seit 1558

Friedrich–Schiller–Universität Jena

Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik
Günter Horn
2022

Die Teiler-Probleme von *J.Dirichlet* und *A.Piltz* und die Hypothese von *E.Lindelöf*

1. Zusammenfassung und tragende Ideen

- Betrachtet wird in $\mathbb{R}^k$ die Gitterpunkt- Menge $H_k(x) = \{ (n_1, \dots ,n_k) \in \mathbb{N}^k : n_1 \cdot \dots \cdot n_k \leq x \}$, ein Hyperboloid-Simplex, den man sich wegen der hohen Symmetrie zerlegt denken kann in kongruente Teil-Simplices $h_k(x) = \{(n_1, \dots ,n_k) \in N^k : n_1 \cdot \dots \cdot n_k \leq x$ <u>und</u> $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k\}$. Beim Abzählen der Gitterpunkte erhalten solche mit $n_j = n_{j+1}$ das "Gewicht" 1/2 und Punkte in Schnittgeraden dieser Ebenen (Unterräume) das Gewicht 1/r, r gleich Anzahl der umliegenden $h_k(x)$. Dann ist $H_k(x) = \cup_{\nu=1}^{k!} h_k^{(\nu)}(x)$, da jeder Teil-Simplex die maximalen Koordinaten $x^{1/p}, x^{1/(p-1)}, \dots , x^{1/2}, x$ einer der k! Permutationen der Koordinatenachsen zuordnet. Erzeugt wird diese Klasseneinteilung durch die folgende Äquivalenzrelation : Zwei k-Tupel $(n_1, \dots , n_k)$ und $(m_1, \dots , m_k)$ stehen in Relation genau dann, wenn die geordneten k-Tupel $(n_{\mathrm{i}1}, \dots , n_{\mathrm{ik}})$ und $(m_{\mathrm{j}1}, \dots , m_{\mathrm{jk}})$ zur gleichen Permutation der Koordinatenachsen gehören, wobei gleiche Koordinaten in einem Ausgangs-k-Tupel anschließend in gleicher Reihenfolge nebeneinander stehen. Es wird sich bei den nachfolgenden Untersuchungen zeigen, dass diese Überlegung für k≥3 nur eine Rolle spielt bei der Abschätzung des Restgliedes, weshalb die oben erwähnten "Gewichte" keine Rolle spielen.
- Jedes k-Tupel aus $H_k(x)$ definiert eindeutig eine natürliche Zahl n zu der sämtliche multiplikativen Zerlegungen $n_1 \cdot \dots \cdot n_k = n$ gesucht sind, auch solche, die durch Vertauschen verschiedener n_j entstehen. Ihre Anzahl definiert die verallgemeinerte Teiler-Funktion $d_k(n) := \# \{(n_1, \dots ,n_k) \in N^k : n_1 \cdot \dots \cdot n_k = n \}$. Es sei nun $D_k(x) := \# H_k(x)$, also die Anzahl der k-Tupel in $H_k(x)$. Dann ist $D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(n) = \sum_{n_1 \cdot \dots \cdot n_k \leq x} 1 = k! \, \# \, h_k(x)$, wenn man beim Auswerten die oben erwähnten "Gewichte" beachtet. Für k=2 hat man das Teiler-Problem $D_2(x) = D(x)$ von *Dirichlet* und für $k \geq 3$ das Teiler-Problem von *Piltz*.

- Bekannt ist mit [07], [09], [11] : Mit der Riemannschen ζ-Funktion und komplexer Analysis ist beweisbar, dass $D_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta^k(w)}{w} x^w \, dw$ für c >1. Es ist w = 1 ein Pol k-ter Ordnung, und das Residuum ist von der Form $x L_{k-1}(\log x)$, wobei L_{k-1} ein Polynom in Potenzen von log x und k-1 sein Grad ist. Man schreibt $D_k(x) = x L_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x)$. Für diese qualitative Aussage findet man in [02] einen elementaren Beweis (vollständige Induktion, allerdings mit schwacher Abschätzung des Restgliedes). Eine elementare, auch quantitative Auswertung gelingt im nachfolgenden Text.

- *A.Piltz* veröffentlichte 1881, siehe [09], die Abschätzung $\Delta_k(x) \ll x^{\epsilon + \frac{p-1}{p}}$, $\epsilon > 0$. Das Teiler-Problem von *Piltz* bedeutet seither, das folgende Infimum zu finden : $\inf \{ \vartheta_k \,;\, \Delta_k(x) \ll x^{\vartheta_k} \}$. *G.H.Hardy* veröffentlichte 1916 die untere Abschätzung $\Delta_k(x) = \Omega(x^{\frac{p-1}{2p}})$ und *G.H.Hardy* und *J.E.Littlewood* 1922, siehe [09], $\vartheta_k \leq \frac{p-1}{p+2}$ für $k \geq 4$, speziell $\Delta_4(x) \ll x^{\frac{1}{2}}$. In der vorliegenden Arbeit wird ein elementarer Beweis geführt (elementare Analysis, elementare Zahlentheorie und Geometrie) mit dem Ergebnis (**E1**) : $\Delta_k(x) \ll x^{1/2 + (k-3)\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$ und für alle $k \geq 4$, wobei dies für k = 2 und k = 3 schon lange bekannt ist, da bessere Abschätzungen vorliegen.
- Tragender Baustein für (E1) ist die Abschätzung (**E2**): $d_k(n) \ll n^{(k-1)\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$, also geometrisch der Sachverhalt, dass auf dem gekrümmten Rand des Hyperboloid-Simplex $H_k(n)$ höchstens $n^{(k-1)\epsilon}$ viele Gitterpunkte liegen für jedes $\epsilon > 0$, ein Ergebnis an der Schnittstelle von additiver und multiplikativer Zahlentheorie (Partitionen, Primfaktorzerlegung).
- Ein weiterer tragender Baustein ergab sich aus der Idee $D_k(x)$ für $k \geq 3$ rekursiv über $D_2(x)$ = D(x) zu behandeln. Für die Darstellung von D(x) wurde zum Abzählen der Gitterpunkte nicht wie in [09] die Funktion $\eta(m) = \frac{x}{m} - m$, $1 \leq m \leq \sqrt{x}$, benutzt, sondern (**E3**): $\xi(n) = \sqrt{x + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}$, $0 < n \leq x-1$, also die Inverse, mit der die Gitterpunkte über die Diagonalen mit Anstieg 1 abgezählt werden. Damit wird die rekursive Behandlung von $D_k(x)$ für $k \geq 3$ möglich mit dem Ergebnis (E1).
- Neben der klassischen Basis-Abschätzung von *Van der Corput* für Exponential-Summen hat noch (**E4**): Satz1 aus [06] (nachfolgend Theorem 1 als Kurzfassung) eine tragende Bedeutung, der an der Schnittstelle zur Theorie der Gleichverteilung reeller Folgen modulo 1 (*E. Hlawka, [05]*) entstanden ist , Mit (E4) ergibt sich für das Restglied der Hyperbel die gleiche gute Abschätzung wie für das Kreis-Problem von *Gauß* in [06]. Dort wurde für die Hyperbel ein schlechteres Ergebnis über die Funktion $\eta(m) = \frac{x}{m} - m$ erzielt.
- Sind alle bisherigen Aussagen korrekt, insbesondere (E4) : Satz 1 aus [06], so wäre die *Lindelöf*-Hypothese (**LH**): $\zeta(\sigma + i\,t) \ll t^{\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$ und alle $\sigma \geq \frac{1}{2}$ bewiesen, da nach *E.C. Titchmarsh, D.R. Heath-Brown* in [11] die Abschätzung (E1) äquivalent ist zu (LH).

2. Eine alternative Darstellung des Teiler-Problems von *Dirichlet*

Für $D(x) := \# \{ (m, n) \in \mathbb{N} x \mathbb{N} : m\, n \leq x \}$, also geometrisch die Anzahl der Gitterpunkte unterhalb oder auf der Hyperbel $\xi\, \eta = x$, zeigte *P.G.L. Dirichlet* im Jahr 1849

(1) $D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)\, x + \Delta(x)$, $\Delta(x) \ll x^{1/2}$.

Das "Teiler-Problem" bedeutet, ein möglichst kleines $\vartheta < 1/2$ für den Exponenten von x zu finden. 1915 zeigten *E. Landau* und *G.H. Hardy*, siehe [09], unabhängig voneinander die untere Abschätzung $\vartheta \geq 1/4$ für den x-Exponenten. Daran änderten spätere untere Abschätzungen von $\Delta(x)$ nichts, die untere Schranke vergrößerte sich lediglich um logarithmische Faktoren der Form $(\log x)^{1/4}\, (\log\log x)^{C}$, C > 0. Es ist also ϑ

mit $\frac{1}{4} \leq \vartheta < \frac{1}{2}$ möglichst klein durch obere Abschätzungen zu finden.

In (1) ist γ die Eulersche Konstante, die Euler als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$ definierte. Die Existenz des Grenzwertes ist anschaulich klar, da die Differenz eine Summe von Rechteck-Inhalten auf Einheitsintervallen und Flächenanteilen unter dem Graph von $f(t) = \frac{1}{t}$ in Beziehung setzt. Diese Flächen-Differenzen auf Einheitsintervallen lassen sich disjunkt in ein Einheitsquadrat verschieben, so dass anschaulich klar ist, dass $0 < \gamma < 1$ gilt. Euler schrieb statt γ ein C. Später stellte *Karl Weierstraß* , siehe [04], eine Verbindung des Grenzwertes zum negativen Anstieg der Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ an der Stelle x=1 her : $C = -\Gamma'(1)$.

Seither bezeichnet man vorrangig diese Konstante mit “Gamma” : γ .

Analytisch ergibt sich die Existenz des Grenzwertes über die Summenformel von Euler- Maclaurin [09] :

Falls $f(t)$ stetig ist auf dem Summen-Intervall $[a, b]$ und auch $f'(t)$ dort existiert und stetig ist, gilt

$$(2) \qquad \sum_{a<k\leq b} f(k) = \int_a^b f(t)\,dt + \psi(a)f(a) - \psi(b)f(b) + \int_a^b f'(t)\,\psi(t)\,dt$$

worin $\psi(z) = z - \lfloor z \rfloor - \frac{1}{2}$, $\lfloor z \rfloor := \max\{g \in \mathbb{Z} : g \leq z\}$, und $\psi(z)$ mit der Fourier-Reihe

$$\psi(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \sin 2\pi h z, \quad z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$ Speziell gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{1<k\leq n} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + \psi(1)\cdot 1 - \psi(n)\cdot\frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt = \log n + \frac{1}{2} - \psi(n)\,\frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt .$$

Also ist

$$(3) \qquad \gamma := \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt \,,$$

und die Existenz des Grenzwertes folgt aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

Zur Berechnung von Näherungswerten von γ eignet sich als Ausgangspunkt die geometrische Reihe :

$$(4) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \,, \text{ falls } 0 < x < 1,$$

und die Kenntnis der Zetafunktion von Riemann auf $\mathbb{R}^+$, $\zeta(s)$, $s > 1$. Für $s = k \in \mathbb{N}/\{1\}$ ergibt sich

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Integriert man (4) links , und rechts Glied für Glied von $x = 0$ bis $x = 1/n$, so erhält man :

$$-\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k .$$ Damit ist das folgende Lemma beweisbar.

<u>Lemma 1</u> . (*Leonard Euler*, 1781, [04])

$$(5) \qquad \gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (\zeta(k) - 1)$$

<u>Bemerkung</u> 1. Die Software “Mathematica” liefert für $2 \leq k \leq 30$ den Wert $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$ mit 10 exakten Dezimalziffern.

<u>Beweis</u> . Aus der Vorbetrachtung ergibt sich für $n > 1$

$$\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \log n - \log(n-1) .$$

Summieren über n links und rechts mit $1 < n \leq x$ ergibt, da rechts nur der erste und letzte Wert verbleibt,

$$\sum_{1<n\leq x} \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{1<n\leq x} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \log(\lfloor x \rfloor) = \log x + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

und durch Addition von 1 links und rechts und Ergänzen der inneren Summe zu $\zeta(k)$ und Korrektur mit (-1)

$$\gamma = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} - \log x\right) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (\zeta(k) - 1) \quad \blacksquare$$

Bemerkung 2. Wegen $\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{2} - \int_1^{100} \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt - \int_{100}^\infty \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt$ berechnet "Mathematica" die Summe g der ersten beiden Summanden mit

```
f = - ( 1 / t^2) (t - Floor[t] - 1 / 2);
i = N[Integrate [f, {t, 1, 100}], 12];
Print["g = ", i + 0.5]
```

g = 0.577207

Es ist dann $\gamma = g + \int_{100}^\infty \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt$ und das Rest-Integral kann wegen der Monotonie des Kofaktors von ψ(t) mit dem 2. Mittelwertsatz für Integrale (siehe etwa [02]) mit einem ϑ, $0 < \vartheta < 1$, berechnet werden :

$-\int_{100}^\infty \frac{1}{t^2}\,\psi(t)\,dt = \frac{-1}{100^2} \int_{100}^{100+\vartheta} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{100^2}\cdot\frac{1}{8} \le \frac{1}{80\,000} = 0.0000125$. Damit gilt

$g = 0.577207 < \gamma < 0.577207 + 0.0000125 = 0.5772195$. Wählt man als Näherung den Median-Bruch von unterer und oberer Schranke, so ergibt sich

$\gamma \approx 0.57721325$ mit exakter fünfter Nach-Komma-Stelle.

Wählt man für D(x) in (1) zum Abzählen der Gitterpunkte die übliche Funktion $\eta(m) = \frac{x}{m} - m$, $1 \le m \le \sqrt{x}$, so lassen sich die Gitterpunkte in D(x) wie folgt bestimmen :

$$D(x) = 2 \sum_{m \le \sqrt{x}} \left(\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - m\right) + \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 \sum_{m \le \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{m} - m \right\rfloor + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Damit ergibt sich für $\Delta(x)$ in (1), da $\psi(z)$ 1-periodisch ist,

$$\Delta(x) = -2 \sum_{m \le \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{m} - m\right) + O(1) = -2 \sum_{m \le \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) + O(1) .$$

In [06] wurde die ψ-Summe für die Hyperbel für kleine h ≤ H aus der Fourier-Reihe mit dem Exponenten-Paar $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$ abgeschätzt mit $(Hx)^{2/7}\log x$ (in [06] fehlt der logarithmische Faktor). Dies ergibt für die Hyperbel eine zahlentheoretische Diskrepanz $N D_N \ll x^{1/3}(\log x)^{7/9}$ und mit Satz 1 in [06] die Restglied-Abschätzung $\Delta_H(x) \ll x^{8/27}(\log x)^2$, $\frac{8}{27} = 0,\overline{296}$, während für den Kreis dort in [06] das bessere Ergebnis $\Delta_K(x) \ll x^{5/18}\log x$, $\frac{5}{18} = 0{,}2\overline{7}$, erzielt wurde.

Dieses Ergebnis wird mit den nachfolgenden Ausführungen auch für die Hyperbel erreicht.

Das Ergebnis aus [06] für die Hyperbel soll nun verbessert werden, allerdings mit der Inversen ξ(n) von η(m) :

$$(6) \qquad \xi(n) = \sqrt{x + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}, \quad 0 < n \le x-1$$

Hiermit werden die Gitterpunkte von D(x) über die Diagonalen mit Anstieg 1 erfasst, und es gilt

$$(7) \qquad D(x) = 2 \sum_{0 < n \le x-1} \lfloor \xi(n) \rfloor + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Lemma 2. Für die Gitterpunkt-Menge D(x) von *Dirichlet* gilt

$$(8) \qquad D(x) = x \log x - 2 \sum_{n \le x-1} \psi\left(\sqrt{x + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}\right) + O(1)$$

Beweis. Wegen (6), (7) und $\lfloor z \rfloor = z - \psi(z) - \frac{1}{2}$ gilt

$$D(x) = 2 \sum_{0 < n \le x-1} \left(\sqrt{x + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}\right) - 2 \sum_{n \le x-1} \psi\left(\sqrt{x + \left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}\right) - x + \sqrt{x} + O(1)$$

und weiter mit der Summenformel (2) von *Euler*

$$= 2\left\{ \int_0^{x-1}\left(\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2}\right) dt - \frac{1}{2}\sqrt{x} + O(1) + \frac{1}{4}\int_0^{x-1}\left(\frac{t}{\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2}} - 2\right)\psi(t)\,dt \right\} - x + \sqrt{x}$$

$$-2\sum_{n \le x-1} \psi\left(\sqrt{x+\left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}\right) + O(1)$$

$$= 2\int_0^{x-1}\left(\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2}\right) dt - x + \frac{1}{2}\int_0^{x-1}\left(\frac{t}{\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\right)\psi(t)\,dt - 2\sum_{n \le x-1} \psi\left(\sqrt{x+\left(\frac{n}{2}\right)^2} - \frac{n}{2}\right) + O(1)$$

Im zweiten Integral ist der Faktor bei $\psi(t)$ monoton wachsend und kleiner oder gleich (x-1)/(x+1), so dass nach dem 2. Mittelwertsatz für Integrale das zweite Integral ein O(1) ist. Deshalb gilt weiter mit (6)

$$D(x) = 2\int_0^{x-1}\left(\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2}\right) dt - x - 2\sum_{n \le x-1} \psi(\xi(n)) + O(1)$$

Für das Integral folgt mit der Substitution $t = 2\sqrt{x}\,\sinh(\tau)$, $dt = 2\sqrt{x}\,\cosh(\tau)\,d\tau$ und mit der Inversen $\operatorname{Arsinh}(z) = \log(z+\sqrt{z^2+1})$ die Integrationsgrenzen 0 und x-1 übergehen in 0 und

$$(9) \qquad \tau_1 := \log\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 1}\right)$$

Für das Integral gilt also

$$2\int_0^{x-1}\left(\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2}\right) dt = 4x\int_0^{\tau_1}\left(\sqrt{1+(\sinh(\tau))^2} - \sinh(\tau)\right)\cosh(\tau)\,d\tau$$

$$= 4x\int_0^{\tau_1}(\cosh(\tau))^2\,d\tau - 4x\int_0^{\tau_1}\sinh(\tau)\cosh(\tau)\,d\tau\,.$$

Für die letzten beiden Integrale gilt im Einzelnen

1. $$4x\int_0^{\tau_1}(\operatorname{coh}(\tau))^2\,d\tau = x\int_0^{\tau_1}(e^{\tau}+e^{-\tau})^2\,d\tau = x\int_0^{\tau_1}\left(e^{2\tau}+e^{-2\tau}+2\right)d\tau = \frac{1}{2}x\,(e^{2\tau}+e^{-2\tau})\,\Big|_0^{\tau_1} + 2x\tau_1$$
$$= \frac{1}{2}x\,e^{2\tau_1} + 2x\tau_1 + O(1).$$

2. $$-4x\int_0^{\tau_1}\sinh(\tau)\cosh(\tau)\,d\tau = -x\int_0^{\tau_1}(e^{\tau}-e^{-\tau})(e^{\tau}+e^{-\tau})\,d\tau = -x\int_0^{\tau_1}(e^{2\tau}-e^{-2\tau})\,d\tau = -\frac{1}{2}x\,(e^{2\tau}+e^{-2\tau})\,\Big|_0^{\tau_1}$$
$$= -\frac{1}{2}x\,e^{2\tau_1} + x + O(1)$$

Somit gilt für das ursprüngliche Integral

$$2\int_0^{x-1}\left(\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2}\right) dt = x + 2x\tau_1 + O(1) \text{ und somit ist } D(x) = 2x\tau_1 - \sum_{n \le x-1} \psi(\xi(n)) + O(1)$$

Nun gilt für (9) nach dem 2. binomischen Lehrsatz

$$\tau_1 = -\log\left(\sqrt{\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 1} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right) = -\log\left\{\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\left(\left(1+\frac{4x}{(x-1)^2}\right)^{1/2} - 1\right)\right\} = -\log\left\{\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,\frac{2x}{(x-1)^2}\left(1 - O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\} = \log\sqrt{x} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

also (8) ■

Die Summe in (8) enthält mit Blick auf (1) den Term $(2\gamma-1)x$, und zwar in jenem Bereich des Summen-Intervalls $0 < n \le x-1$, wo die Abschätzung der Summe schlecht wird. Mit der nachfolgenden Beziehung (14) wird klar, dass das in einer linksseitigen Umgebung von (x-1) der Fall ist.

Mit (6) und der Fourier-Entwicklung von $\psi(z)$, $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, gilt zunächst

$$(10) \quad -2\sum_{0 < n \le x-1} \psi(\xi(n)) = \frac{2}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\sum_{0 < n \le x-1} \sin 2\pi h \xi(n) + O(x^{\epsilon})$$

für jedes $\epsilon > 0$. Der O-Term ist eine obere Schranke für die Anzahl der Gitterpunkte für $x \in \mathbb{N}$ und $\xi(n) \in \mathbb{N}$ auf der Hyperbel $m\,n = x$. Den Beweis für die Größenordnung findet man in [01]. Durch die Herausnahme der Gitterpunkte auf dem gekrümmten Rand (hier die Hyperbel) ist Satz 1 aus [06] anwendbar.

Zunächst gilt

Lemma 3. Es bezeichne $\lceil z \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich z und es sei mit einem ϱ, $2 \le \varrho < 3$,

$$(11) \quad x_0 := \frac{1}{2} + \left\lceil \sqrt{\varrho h x}\,\right\rceil$$

Dann gilt mit der Konstanten γ von *Euler* für $n > x_0$

$$(12)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\sum_{x_0<n\le x-1}\sin 2\pi h\xi(n) = (2\gamma-1)x + O(\log x)$$

Bemerkung. Auf die innere Summe in (12) soll die Summenformel (2) von Euler angewendet werden, und (11) liefert den Wert $\psi(x_0) = 0$.

Beweis. Die h-Summe in (12) ist endlich, $h \ll x$, da die innere Summe für $h \gg x$ wegen (11) leer ist. Wegen $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ kann die innere Summe nach *Van der Corput* ([09], Theorem 2.1) für kurze Intervalle $\frac{1}{2}N < n \le N$, $N \le x-1$, abgeschätzt werden mit

$$(13)\quad \sum_{\frac{1}{2}N<n\le N}\sin 2\pi h\xi(n) \ll \frac{h\,|\xi'(N)|+1}{|h\,\xi''(N)|^{1/2}},\ \text{wobei wegen (6)}$$

$$(14)\quad \xi(t) = \sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2} = \frac{x}{\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2}+\frac{t}{2}}\ \text{ und weiter}$$

$$\xi'(t) = -\frac{x/2}{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}\sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2}},\quad \xi'(N) \ll \begin{cases} 1 & \text{für } N \le \sqrt{x} \\ \frac{x}{N^2} & \text{für } N > \sqrt{x}\end{cases}$$

$$\xi''(t) \approx \frac{x}{\sqrt{x+N^2}\left(x+N^2+N\sqrt{x+N^2}\right)} \gg \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } N \le \sqrt{x} \\ \frac{x}{N^3} & \text{für } N > \sqrt{x}\end{cases}$$

Für (12) ist von Bedeutung, dass ersichtlich $\xi'(t)$ monoton fallend bei wachsendem t ist und für $t > x_0$ aus

$$(11)\quad |h\xi'(t)| \le |h\xi'(x_0)| \le |h\xi'(\sqrt{\varrho hx})|\ \text{mit}$$

$$(15)\quad |h\xi'(t)| \le h\frac{x/2}{x+\frac{\varrho hx}{4}+\ldots} \le h\frac{x/2}{x+\frac{\varrho hx}{4}+\frac{\varrho hx}{4}} \le h\frac{1/2}{1+\frac{\varrho h}{2}} \le h\frac{1/2}{1+h} \le \frac{1}{2}\ \text{ wegen } \varrho \ge 2 \text{ in Lemma 3}.$$

Ist nun S die Doppelsumme in (12), so ergibt sich mit der Summenformel (2) von *Euler*

$$(16)\quad S = \frac{2}{\pi}\sum_{h\ll x}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x-1}\sin 2\pi h\xi(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{h\ll x}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x-1}2\pi h\xi'(t)\cos 2\pi h\xi(t)\,\psi(t)\,dt$$

da $\psi(x_0) = 0$ und $\xi(x-1) = 1$

Im zweiten Integral setzen wir $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und für $\psi(t)$ die Fourier-Reihe aus (2) mit

$$\psi(t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\left(e^{2\pi i v t} - e^{-2\pi i v t}\right)$$

und es ergeben sich 4 Integrale vom Typ

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\int_{x_0}^{x-1}\frac{2\pi h\xi'(t)}{2\pi i(h\xi'(t)+v)}\,d\,e^{2\pi i(h\xi(t)+vt)}$$

Wegen der fallenden Monotonie des ersten Faktors im Integral ist der 2. Mittelwertsatz für Integrale anwendbar, und die *v*-Summe ist wegen (15) konvergent, und bezüglich der h-Summe ergibt sich ein O(log x) :

$$(17)\quad S = \frac{2}{\pi}\sum_{h\ll x}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x-1}\sin 2\pi h\,\xi(t)\,dt + O(\log x)$$

Für das Integral ergibt sich mit der Substitution

$$\tau = \xi(t) = \sqrt{x+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2},\ t = \frac{x}{\tau} - \tau,\ dt = -\left(\frac{x}{\tau^2}+1\right)d\tau,\ t = x_0 \longrightarrow \tau_0,\ \tau_0 \le \sqrt{\frac{x}{\varrho h}},\ t = x-1 \longrightarrow \tau_1 = 1.$$

Da $\tau_0 \ge \tau_1 = 1$, ist $h \le \frac{x}{\varrho}$ und es ergibt sich die Darstellung

$$S = \frac{2}{\pi}\sum_{h\le x/\varrho}\frac{1}{h}\int_1^{\tau_0}\left(\frac{x}{\tau^2}+1\right)\sin 2\pi h\tau\,d\tau + O(\log x)$$

Zunächst ist für den Summanden (+1)

$$\frac{2}{\pi}\sum_{h\le x/\varrho}\frac{1}{h}\int_1^{\tau_0}\sin 2\pi h\tau\,d\tau = \frac{2}{\pi^2}\sum_{h\le x/\varrho}\frac{1}{h^2}\int_1^{\tau_0}d\cos 2\pi h\tau\,d\tau = O(1)$$

und weiter mit dem 2. Mittelwertsatz für Integrale und einem $C > \tau_0$ und $\theta > 1$

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{h \le x/\varrho} \frac{1}{h} \int_1^\infty \frac{x}{\tau^2} \sin 2\pi h \tau d\tau + \frac{1}{\pi^2} \sum_{h \le x/\varrho} \frac{\varrho}{h} \int_{\tau_0}^{c} d\cos 2\pi h \tau d\tau + O(\log x) = \frac{2}{\pi} \sum_{h \le x/\varrho} \frac{1}{h} \int_1^\infty \frac{x}{\tau^2} \sin 2\pi h \tau d\tau$$
$$+ O(\log x)$$
$$= \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \int_1^\infty \frac{x}{\tau^2} \sin 2\pi h \tau d\tau - \frac{1}{\pi^2} \sum_{h > x/\varrho} \frac{x}{h^2} \int_1^\theta d\cos 2\pi h \tau d\tau + O(\log x) = \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \int_1^\infty \frac{x}{\tau^2} \sin 2\pi h \tau d\tau +$$
$$O(\log x)$$
$$= -2 \left(\int_1^\infty \frac{x}{\tau^2} \left(-\frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \sin 2\pi h \tau \right) d\tau + O(\log x) = -2 \int_1^\infty \frac{x}{\tau^2} \psi(t)\, dt + O(\log x)\right.$$

was unter Beachtung von (3) die Behauptung (12) in Lemma 3 ergibt ■

Mit (6), (8) und (12) ist nun

(18) $D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(\xi, x) + O(x^\epsilon)$ für jedes $\epsilon > 0$.

worin $\Delta(\xi, x)$ das von der Funktion ξ aus (6) abhängige Restglied mit $n \le x_0$, x_0 aus (11) ist. x_0 ersetzt durch $\sqrt{\varrho hx}$ ergibt einen Fehler von O(log x) :

(19) $$\Delta(\xi, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{h \le x} \frac{1}{h} \sum_{n \le \sqrt{\varrho hx}} \sin 2\pi h \xi(n)$$

Für kleine h, h ≤ H, und mit der verkürzten Schreibweise $e(z) := e^{2\pi i z}$ ist wegen der Abschätzung (13) mit einem κ, $0 < \kappa < 1$,

$$\sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{n \le N} \sin 2\pi h \xi(n) \ll \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \left| \sum_{n \le N} e(h\xi(n)) \right| \ll H^\kappa \left| \sum_{n \le N} e(\xi(n)) \right|$$

worin der zweite Faktor rechts der h-freie Anteil der Abschätzung der ursprünglichen Summe ist. Die Doppelsumme in (19) wird für h > H üblicherweise (Beweis siehe [9], Theorem 1.8) mit N / H abgeschätzt. Dies führt zur Optimierung des Parameters H für die Berechnung der zahlentheoretischen Diskrepanz ND_N (Schreibweise von E. Hlawka, [5]) für $\Delta(\xi, x)$ in (19)

(20) $$ND_N = H^\kappa \left| \sum_{n \le N} e(\xi(n)) \right| + \frac{N}{H}$$

Im vorliegenden Fall ist $\sqrt{x} \le N \le \sqrt{\varrho Hx}$ und der Wert von N ergibt sich aus der Frage, für welches N in diesem Intervall die Abschätzung maximal wird.

<u>Lemma</u> 4. Unter Verwendung der Abschätzung (13) von J.G. Van der Corput ergibt sich für h ≤ H

(22) $$\sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{n \le \sqrt{\varrho hx}} \sin 2\pi h \xi(n) \ll H^{1/2} x^{1/4} + H^{1/4} x^{1/4}$$

mit den zugehörigen N-Werten $N = \sqrt{x}$ und $N = \sqrt{\varrho Hx}$ und mit der Optimierung (20) einheitlich

(23) $ND_N \ll x^{\frac{1}{3}}$, und folglich $\Delta(\xi, x) \ll x^{\frac{1}{3}}$ mit dem Parameter $H \le x^{\frac{1}{3}}$

(diese Information bezüglich H ist für das Teiler-Problem von *Piltz* von Bedeutung).

<u>Beweis</u>. Unter Beachtung von (13) und (14) wird die innere Summe in (22) abgeschätzt auf den Teilintervallen

$$n \le \sqrt{x}\ , \quad \sqrt{x} < n \le \sqrt{hx}\ , \quad \sqrt{hx} < n \le \sqrt{\varrho hx}$$

1. $$\sum_{n \le \sqrt{x}} \sin 2\pi h \xi(n) \ll \frac{h}{\sqrt{h}} x^{1/4} \ll h^{1/2} x^{1/4}$$

2. $$\sum_{\sqrt{x} < n \le \sqrt{hx}} \sin 2\pi h \xi(n) \ll \sum_{\sqrt{x} < N} \sum_{N < n \le 2N} \sin 2\pi h \xi(n) \ll \sum_{\sqrt{x} < N} \frac{hx}{N^2} \frac{N^{3/2}}{(hx)^{1/2}} \ll \sum_{\sqrt{x} < N} \left(\frac{hx}{N}\right)^{1/2} \ll h^{1/2} x^{1/4}$$

3. $$\sum_{\sqrt{hx} < n \le \sqrt{\varrho hx}} \sin 2\pi h \xi(n) \ll \frac{N^{3/2}}{\sqrt{hx}} \ll \frac{(\varrho hx)^{3/4}}{(hx)^{2/4}} \ll (hx)^{1/4}$$

In den ersten beiden Fällen ist $N = \sqrt{x}$ und im 3. Fall $N = \sqrt{\varrho Hx}$. Somit ergibt sich mit $N = \sqrt{x}$ die zahlentheoretische Diskrepanz

$\mathrm{N}D_N \ll H^{1/2} x^{1/4} + \frac{\sqrt{x}}{H}$, $H^{3/2} = x^{1/4}$, $\mathrm{H} = x^{1/6}$ also $\mathrm{N}D_N \ll \frac{\sqrt{x}}{H} \ll x^{1/3}$

und im 3. Fall mit $\mathrm{N} = \sqrt{\varrho \mathrm{Hx}}$

$\mathrm{N}D_N \ll (\mathrm{Hx})^{1/4} + \sqrt{\frac{x}{H}}$, $H^{3/4} = x^{1/4}$, $\mathrm{H} = x^{1/3}$ also $\mathrm{N}D_N \ll \sqrt{\frac{x}{H}} \ll x^{1/3}$

also in beiden N-Fällen (23) ■

Das folgende Theorem liefert eine bessere Abschätzung für $\Delta(\xi, \mathrm{x})$

Theorem 1. (Kurzfassung von Satz 1 in [06])

Hat man für das Restglied $\Delta(\mathrm{x}) = \sum_{n<N} \psi(\mathrm{f(n)})$ die zahlentheoretische Diskrepanz $\mathrm{N}D_N$ durch die bekannte Optimierung (20),

(24) $\mathrm{N}D_N \ll H^\kappa N^\alpha + \frac{N}{H}$, $\Delta(\mathrm{x}) \ll \mathrm{N}D_N$, $0 < \alpha < 1$,

bereits abgeschätzt, so ergibt sich durch erneute Optimierung mit neuem Parameter H eine bessere obere Schranke für $\Delta(\mathrm{x})$:

(25) $\Delta(\mathrm{x}) \ll H^\kappa N^\alpha + \frac{1}{H} \mathrm{N}D_N \log \mathrm{H}$.

Dieses Ergebnis ergibt sich wesentlich aus der heuristischen Annahme, dass die Abweichung (Diskrepanz) von der Gleichverteilung einer reellen Folge modulo 1 sich wegen der Dichtheit der Folge gleichmäßig verteilt auf jedes Teilintervall einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls (0, 1).

Beweis . Siehe Satz 1 in [06] ■

Historische Bemerkungen . Vertritt man die Ansicht, dass die in (24) berechnete zahlentheoretische Diskrepanz $\mathrm{N}D_N$ eine Eigenschaft des gekrümmten Randes einer Gitterpunkt-Menge ist, die in (24) durch eine spezielle Methode ermittelt wurde, so wird mit (25) klar, dass der Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen eine besondere Bedeutung zukommt : $\mathrm{N}D_N$ in (25) steht für eine mit irgendeiner (elementaren oder tiefliegenden) Methode ermittelten oberen Schranke der zahlentheoretischen Diskrepanz. $\mathrm{N}D_N \ll x^{1/3}$ aus (23) wurde hier erzielt mit elementarer Analysis und ausschließlicher Verwendung der Basisabschätzung (13) für Exponentialsummen von *Van der Corput*.

Ab 1900 wurde für die zahlentheoretische Diskrepanz bereits so gute Ergebnisse erzielt wie in (23) : *G.F. Voronoi* 1903 mit $\Delta(\mathrm{x}) \ll x^{1/3} \log \mathrm{x}$, siehe [12], mit der nachfolgenden Restglied-Darstellung (26) für $\Delta(\mathrm{x})$.

Ab 1922 wurden bessere Ergebnisse erzielt für das Hyperbelproblem, beginnend mit der sich entwickelnden Theorie der Exponentenpaare, die auf die Funktionenklasse mit Kern $\mathrm{f(t)} = \mathrm{x/t}$, $\mathrm{t} \leq \sqrt{x}$, also auf D(x) zugeschnitten ist.

Mit der auf *E.C. Titchmarsh* zurückgehenden Methode zur 2-dimensionalen Abschätzung von Exponentialsummen erzielte *E. Krätzel* für das Restglied $\Delta(\mathrm{x})$ von D(x) mit einem relativ einfachen Beweis das Ergebnis

(25) $\Delta(\mathrm{x}) \ll \mathrm{N}D_N \ll x^{\frac{19}{58}}$, $\frac{19}{58} = 0{,}3275\ldots$, [09], 1988

Fortschritte ergaben sich durch alternative Restglied-Darstellungen, wie etwa die auf *Voronoi* zurückgehende Darstellung (Quelle: [08])

(26) $\Delta(\mathrm{x}) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{d(n)} n^{-1/2} (K_1(4\pi\sqrt{\mathrm{nx}}) + \frac{\pi}{2} Y_1(4\pi\sqrt{\mathrm{nx}}))$, K_1 und Y_1 sind Bessel-Funktionen,

und der Entwicklung von immer komplizierteren Methoden, bis hin zur “Diskreten Hardy-Littlewood-Methode” von *H. Iwaniec*, *C.J.Mozzochi* und *M.N. Huxley* (Quelle: [08] , [09]) :

$$(27)\quad \Delta(x) \ll ND_N \ll \begin{cases} x^{\frac{27}{82}} & \textit{J.G. Van der Corput}, 1928 \\ x^{\frac{12}{37}} \ldots x^{\frac{139}{429}} & \textit{G. Kolesnik}, 1969 \ldots 1985 \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\frac{7}{22}} & \textit{H. Iwaniec}, \textit{C.J. Mozzochi}, 1987 \\ x^{\frac{131}{416}} & \textit{M.N. Huxley}, 2003 \end{cases}$$

$$\frac{27}{82} = 0,329268\ldots\ ,\quad \frac{12}{37} = 0,\overline{324}\ ,\quad \frac{7}{22} = 0,3\overline{18}\ ,\quad \frac{131}{416} = 0,314903\ldots$$

In [08] wird außerdem die folgende Aussage von *M.N. Huxley* erwähnt bezüglich der von ihm und *H. Iwaniec* sowie *C.J. Mozzochi* entwickelten “Diskreten Hardy-Littlewood-Methode” : Für die zahlentheoretische Diskrepanz ND_N des Restgliedes $\Delta(x)$ von D(x) in (1) gilt für die obere Abschätzung nach dieser Methode für das Infimum des Exponenten von x :

$$(28)\quad \inf\{\vartheta : \Delta(x) \ll ND_N \ll x^{\vartheta} (\log x)^{\beta}\} = \frac{5}{16}\ ,\quad \frac{5}{16} = 0,3125$$

Für die untere Abschätzung von $\Delta(x)$, siehe etwa [09] gilt

$$(29)\quad \Delta(x) = \Omega((x \log x)^{1/4} (\log\log x)^{\beta})\ ,\ \beta > 1.$$

Gilt nun Theorem 1 (also Satz 1 aus [06]), so gilt auch das folgende

<u>Theorem</u> 2. Für das Restglied (19) des Teiler-Problems von Dirichlet gilt unter Anwendung von Theorem 1 (also von Satz 1 in [06])

$$(30)\quad \Delta(x) \ll x^{\frac{5}{18}} \log x \text{ mit } ND_N = x^{\frac{1}{3}} \text{ aus (23) und } H = x^{\frac{1}{18}}$$

$$(31)\quad \Delta(x) \ll x^{\frac{8}{29}} \log x \text{ mit } ND_N = x^{\frac{19}{58}} \text{ aus (25) und } H = x^{\frac{3}{58}}$$

$$\vdots$$

$$(32)\quad \Delta(x) \ll x^{\frac{13}{48}} \log x \text{ mit } ND_N = x^{\frac{5}{16}} \text{ aus (28) und } H = x^{\frac{1}{24}}$$

$$\frac{5}{18} = 0,2\overline{7}\ ,\quad \frac{8}{29} = 0,275863\ldots\ ,\quad \blacksquare\ \blacksquare\ \blacksquare\ ,\quad \frac{13}{48} = 0,2708\overline{3}$$

<u>Bemerkung</u> . Mit den Ergebnissen zu ND_N in (27) ergeben sich weitere Verbesserungen zwischen (31) und (32). (30) steht für den geringsten Aufwand (die gleiche Abschätzung wurde in [06] für das Kreis-Problem von *C.F. Gauß* erzielt), und (32) ist nach *Huxley* maximal für Hyperbel und Kreis erreichbar mit seiner Methode. Die Aussage zum optimierten Parameter H, etwa in (30), erlangen ihre Bedeutung in den Abschätzungen zum Teiler-Problem von *A. Piltz*.

<u>Beweis</u> . Mit Lemma 4 und Theorem 1 gilt für (30): $\Delta(x) \ll H^{1/2} x^{1/4} + \frac{1}{H} x^{\frac{1}{3}} \log H$, $H^{3/2} = x^{\frac{1}{12}}$ ergibt $H = x^{\frac{1}{18}}$ und $\log H \ll \log x$, also $\Delta(x) \ll \frac{1}{H} x^{\frac{1}{3}} \log x \ll x^{\frac{5}{18}} \log x$, (31) und (32) analog ∎

3. Das Teiler-Problem $D_k(x)$ von *Piltz* , k ≥ 3

Ist $D(x) = \sum_{n \le x} d(n)$, so ist $D_k(x) = \sum_{n \le x} d_k(n)$ eine Verallgemeinerung von $D(x) = D_2(x)$. Für k = 2 bedeutet in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen das Zeichen $t \mid n$, dass t ein Teiler von n ist mit der Bedeutung $t \mid n :\Leftrightarrow \exists\, t' \in \mathbb{N} : t \cdot t' = n$. t’ heißt Komplementär-Teiler von t. Ist $t < \sqrt{n}$, so gilt für den Komplementär-Teiler: $t' > \sqrt{n}$, und ist $t = \sqrt{n} \in \mathbb{N}$, so ist $n = t \cdot t = t^2$ eine Quadratzahl. Also haben Quadratzahlen eine ungerade Anzahl von Teilern. Die zahlentheoretische (arithmetische) Funktion d(n) gibt die Anzahl der Teiler von n an. Da Teiler und Komplementär-Teiler immer als

Paar (t, t') auftreten, erfasst man die Teiler t ≤ $\sqrt{n}$ mit (t, t') und die Teiler t' ≥ $\sqrt{n}$ mit (t', t). Es ist also

$$d(n) = \#\{ t\in\mathbb{N} : t \mid n \} = \#\{ (n_1, n_2)\in\mathbb{N}^2 : n_1 \cdot n_2 = n\}.$$

Das ist eine Schnittstelle zwischen Arithmetik und Geometrie: d(n) gibt an, wie viele Gitterpunkte auf der Hyperbel $\xi\cdot\eta = n$ in $\mathbb{R}^+ x\, \mathbb{R}^+$ liegen. Andererseits gibt d(n) an, wie viele multiplikative Zerlegungen es von n gibt unter Beachtung der Reihenfolge.

d(n) hat zur Berechnung des Funktionswertes eine wichtige Eigenschaft: d(n) ist multiplikativ, Beweis siehe etwa [10] : Es gilt

$d(n_1 \cdot n_2) = d(n_1)\cdot d(n_2)$, falls n_1, n_2 keine gemeinsamen Teiler haben außer 1. Folglich gilt, wenn n in kanonischer Primfaktorzerlegung über der Primzahl-Menge $\mathbb{P}$ gegeben ist und $\mathcal{V}_p(n)$ die Vielfachheit bezeichnet, mit der p als Teiler von n als Faktor enthalten ist :

$$(34) \quad \text{Für } n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\mathcal{V}_p(n)} \text{ ist } d(n) = \prod_{p\in\mathbb{P}} d\left(p^{\mathcal{V}_p(n)}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (\mathcal{V}_p(n)+1)$$

wobei für die Vielfachheit $\mathcal{V}_p(n)$ gilt: $\mathcal{V}_p(n) \geq 0$, das Produkt ist folglich immer endlich.

Lemma 5. Es sei $h(n) := \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^+ x\, \mathbb{R}^+ : \xi\cdot\eta = n \in \mathbb{N} \}$ der Graph zur Hyperbel $\xi\cdot\eta = n$, und es sei

$$H(x) = \bigcup_{n \leq x} h(n) .$$

Dann ist $D(x) = H(x)\cap\mathbb{Z}^2 = \sum_{n\leq x} d(n)$ und es gilt

$$(35) \quad d(n) \ll n^{\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0 .$$

und auf jeder Hyperbel h(n) gibt es genau d(n) Gitterpunkte mit

$$(36) \quad \#(h(n)\cap \mathbb{Z}^2) \ll n^{\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0 .$$

und für D(x) gilt die Abschätzung

$$(37) \quad D(x) \ll x^{1+\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0 .$$

Beweis . In [01] wird $\lim\ (d(n)/n^{\epsilon}) = 0$ für $n \longrightarrow \infty$ bewiesen, was (35) impliziert : Wegen (34) genügt es, den Beweis für $d\left(p^{\mathcal{V}_p}\right)$, $p^{\mathcal{V}_p} \longrightarrow \infty$, zu führen : siehe [01]. (36) ist dann klar, und für (37) ist

$$D(x) = \sum_{n\leq x} d(n) \ll \sum_{n\leq x} n^{\epsilon} \ll x^{\epsilon} \sum_{n\leq x} 1 \ll x^{1+\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0 \ \blacksquare$$

Beim Teiler-Problem $D_k(x)$ von *Piltz* ,

$$(38) \quad D_k(x) = \sum_{n\leq x} d_k(n) = \sum_{n_1\cdot \ldots \cdot n_k \leq x} 1$$

ist die verallgemeinerte Teiler-Funktion $d_k(n)$, $d_2(n) = d(n)$, zu erklären :

$$(39) \quad d_k(n) := \#\{ (n_1, \ \ldots, \ n_k)\in\mathbb{N}^k : n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = n \}$$

ist die Anzahl aller multiplikativen Zerlegungen von der Länge k in beliebiger Anordnung. Bei kleinen n findet man alle k-Tupel über die Bedingung $n_1 \geq n_2 \geq \ldots$ mit $n_1 \mid n$, $n_2 \mid n$ ... , um dann zu jedem dieser "Start-k-Tupel" Koordinaten zu vertauschen, die das vorgelegte k-Tupel verändern. Als Beispiele ergeben sich $d_3(2) = 3$, $d_3(9) = 6$, $d_3(18) = 12$, woraus folgt, dass $d_3(n)$ nicht multiplikativ ist. Bei der Herleitung einer Abschätzung für $d_k(n)$ kann man folglich nicht auf die Beweisidee von *Chandrasekharan* in [01] zurückgreifen, wohl aber auf die Abschätzung $d(n) \ll n^{\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$ aus (35) :

Für $n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\mathcal{V}_j}$ erzeugt das k-Tupel $(n_1 = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\mathcal{V}_j}, 1, \ldots , 1 = n_k)$ als "Start-k-Tupel" durch additive

Zerlegungen der $\mathcal{V}_j = m = \sum_{j=1}^{k} m_j$, $m_j \geq 0$, alle möglichen k-Tupel ohne Vertauschung verschiedener

Koordinaten. Deren Anzahl sei

$P_k(\mathrm{m}) := \#\{\,(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}_0^k : m_1 + \ldots + m_k = \mathrm{m}\,,\, m_1 \geq \ldots \geq m_k \geq 0\,\}$.

Dann ist offensichtlich mit einer Konstanten c_k wegen anschließend noch notwendiger Vertauschungen der Koordinaten

$$(40) \quad d_k(\mathrm{n}) = c_k \prod_{j=1}^{r} P_k(\mathcal{V}_j)\ ,\ 1 \leq c_k \leq \mathrm{k}!$$

Bekanntlich, siehe etwa [10], erfüllen die Partitionen maximaler Länge k bezüglich ihrer Anzahl $P_k(\mathrm{m})$ die Differenzen-Gleichung

$$(41) \quad P_k(\mathrm{m}) = P_k(\mathrm{m-k}) + P_{k-1}(\mathrm{m}) \text{ mit } P_k(\mathrm{m-k}) = 0 \text{ für } \mathrm{k} > \mathrm{m}\,, \text{ und es gilt}$$

$$(42) \quad P_2(\mathrm{m}) = \left\lfloor \tfrac{m}{2} \right\rfloor + 1 \leq \mathrm{m}\ ,\ P_3(\mathrm{m}) \leq \tfrac{m^2}{12} + \tfrac{13}{12}\mathrm{m} + 1 \leq m^2 \text{ für m} \geq 2$$

<u>Lemma</u> 6. Für $\mathrm{k} \geq 2$ gilt $P_k(\mathrm{m}) \leq m^{k-1}$

<u>Beweis</u> (Vollständige Induktion über k und m).

Die Behauptung gilt für $\mathrm{k} = 2$ und $\mathrm{k} = 3$ und alle m. Es sei nun $P_k(\mathrm{m-k}) \leq (m-k)^{k-1}$ und $P_{k-1}(\mathrm{m}) \leq m^{k-2}$. Dann ist für $\mathbf{k \leq m}$

(für $\mathrm{k} > \mathrm{m}$ ist $P_k(\mathrm{m}) = P_{k-1}(\mathrm{m})$) : $P_k(\mathrm{m}) = P_k(\mathrm{m-k}) + P_{k-1}(\mathrm{m}) \leq (m-k)^{k-1} + m^{k-2}$

$$\leq m^{k-1}\left(1 - \tfrac{k}{m}\right)^{k-1} + \tfrac{1}{m} m^{k-1} \leq m^{k-1}\{\left(1 - \tfrac{k}{m}\right)^{k-1} + \tfrac{1}{m}\,\} \leq m^{k-1}\{\left(1 - \tfrac{k}{m}\right)^{1} + \tfrac{1}{m}\,\} \leq m^{k-1} \ \blacksquare$$

<u>Lemma</u> 7. Es sei $h_k(\mathrm{n}) := \{\,(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in (\mathbb{R}^+)^k : \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_k = \mathrm{n}\,\}$ der Graph der k-dimensionalen Hyperbel $\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_k = \mathrm{n}$ und $H_k(\mathrm{x}) := \bigcup_{n \leq x} h_k(\mathrm{n})$.

Dann ist $D_k(\mathrm{x}) = H_k(\mathrm{x}) \cap \mathbb{Z}^k = \sum_{n \leq x} d_k(\mathrm{n})$ und es gilt

$$(43) \quad d_k(\mathrm{n}) \ll_k n^{(k-1)\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0\,.$$

und auf jeder k-dimensionalen Hyperbel $h_k(\mathrm{n})$ gibt es genau $d_k(\mathrm{n})$ Gitterpunkte mit

$$(44) \quad \#(h_k(\mathrm{n}) \cap \mathbb{Z}^k) \ll_k n^{(k-1)\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0\,.$$

und für $D_k(\mathrm{x})$ gilt die Abschätzung

$$(45) \quad D_k(\mathrm{x}) \ll_k x^{1+(k-1)\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0\,.$$

<u>Beweis</u> . Wegen (40) gilt mit Lemma 6 für (43): $d_k(\mathrm{n}) = c_k \prod_{j=1}^{r} P_k(\mathcal{V}_j) \leq c_k \prod_{j=1}^{r} \mathcal{V}_j^{k-1} \leq c_k\,(\mathcal{V}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{V}_r)^{k-1}$

$$\leq c_k\,(d(n))^{k-1} \ll_k n^{(k-1)\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0\,,$$

da $\mathrm{d(n)} = \prod_{j=1}^{r} d\!\left(p_j^{\mathcal{V}_j}\right) = \prod_{j=1}^{r} (\mathcal{V}_j + 1) \geq \mathcal{V}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{V}_r$ und wegen (35) $\blacksquare$

Von der Abschätzung (45) gehen wir nun über zur asymptotischen Darstellung $D_k(\mathrm{x}) = H_k(\mathrm{x}) + \Delta_k(\mathrm{x})$ mit Hauptteil und Restglied. Der Hauptteil $H_k(\mathrm{x})$ ergibt sich aus $D_k(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta^k(w)}{w}\, x^w\, dw$ für c >1 = “Residuum” + “Rest”, also Anwendung des Residuensatzes der komplexen Analysis. $H_k(\mathrm{x})$ = “Residuum” = “x mal Polynom vom Grad k-1 in Potenzen von log x”. Dieses Ergebnis soll nun durch Rechnen im Reellen bestätigt werden, ebenso, wie die Bestimmung des Restgliedes $\Delta_k(\mathrm{x})$ und seine Abschätzung durch Rückführung auf die bereits vorliegenden Ergebnisse zum Teiler-Problem von *Dirichlet*. Insbesondere gilt mit (18)

$$D_2(\mathrm{x}) = \mathrm{D(x)} = \mathrm{x}\log\mathrm{x} + (2\gamma - 1)\mathrm{x} + \Delta(\xi, \mathrm{x}) + \mathrm{O}(x^{\epsilon}) \quad \text{für jedes } \epsilon > 0 \text{ mit}$$

$$\Delta(\xi, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{h \le x} \frac{1}{h} \sum_{n \le \sqrt{\varrho h x}} \sin 2\pi h \xi(n)$$ aus (19). Damit gilt mit

$$D_k(x) = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \le x} 1 = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x} \sum_{m \cdot n \le \frac{x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}}} 1 = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x} D_2\left(\frac{x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}}\right)$$ und mit $\Delta_2(\xi, z) := \Delta(\xi, z)$ und

(46) $z := \frac{x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}}$ ist $D_k(x) = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x} \{ z \log z + (2\gamma\text{-}1)z + \Delta_2(\xi, z) + O(z^{\epsilon}) \}$ für jedes $\epsilon > 0$.

Der Term $(2\gamma\text{-}1)z$ bildet sich nur dann, wenn $\sqrt{\frac{\varrho x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}}} \le \frac{x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}}$, also für

(47) $n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le \frac{x}{\varrho}$, $2 \le \varrho \le 3$

und der Term $\Delta_2(\xi, z)$ nur dann, wenn $\frac{x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}} \le \sqrt{\frac{\varrho H x}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}}}$, also für

(48) $\frac{x}{\varrho \cdot H} \le n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}$, H aus Theorem 2

Es ist also mit z aus (46) und für jedes $\epsilon > 0$

$$D_k(x) = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x} z \log z + \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x/\varrho} (2\gamma\text{-}1)z + \sum_{\substack{\frac{x}{\varrho H} \le n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \\ n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \le x}} \{ \Delta_2(\xi, z) + O(z^{\epsilon}) \}$$

Somit ist mit z aus (46)

(49) $D_k(x) = H_k(x) + \Delta_k(x)$

(50) $H_k(x) = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x} z \log z + \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \le x/\varrho} (2\gamma\text{-}1)z$

(51) $\Delta_k(x) = \sum_{\substack{\frac{x}{\varrho H} < n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-2} \\ n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \le x}} \{ \Delta_2(\xi, z) + O(z^{\epsilon}) \}$

Zur Abschätzung der Summe in (51) genügt es wegen der hohen Symmetrie, die Abschätzung über eines der k! Teil-Simplices mit den Kantenlängen $x^{1/k}$, $x^{1/k-1}, \ldots, x^{1/2}$, x und der Nebenbedingung $n_1 \le \ldots \le n_k \le x$ zu vollziehen. Es ist also mit z aus (46) und jedes $\epsilon > 0$

(52) $\Delta_k(x) = k! \sum_{\substack{\frac{x}{\varrho H} < n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-3} \cdot n \\ n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-3} \cdot n^3 \le x \\ n_1 \le \ldots \le n_{k-3} \le n}} \{ \Delta_2(\xi, z) + O(z^{\epsilon}) \}$

<u>Der Fall k= 3</u>: Mit z aus (46) ist (leere Produkte haben den Wert 1) ist mit (50) und k = 3

(53) $H_3(x) = \sum_{n \le x} \frac{x}{n} \log \frac{x}{n} + (2\gamma\text{-}1)x \sum_{n \le x/\varrho} \frac{1}{n}$

und mit $\Delta_2(\xi, z)$ aus Theorem 2 gilt für (52) mit k = 3

$$\Delta_3(x) \ll \sum_{\substack{n^3 \le x \\ n > \frac{x}{\varrho \cdot H}}} \{ \left(\tfrac{x}{n}\right)^{\epsilon} + \left(\tfrac{x}{n}\right)^{\epsilon} \log x \} \ll (H^{\epsilon} + H^{\alpha} \log x) \sum_{n^3 \le x} 1$$

Es gilt also mit α und H aus (23), Lemma 4, oder aus (30), Theorem 2 (Satz 1 in [06])

(54) $\Delta_3(x) \ll x^{1/3} H^{\alpha} \log x$

<u>Lemma 8</u>. Für $D_3(x) = H_3(x) + \Delta_3(x)$ gilt

(55) $H_3(x) = x\,(\tfrac{1}{2}\log^2 x + (3\gamma\text{-}1)\log x + \lambda_3)$ mit

(56) $\lambda_3 := 3\gamma^2 - 3\gamma + 3C_1 + 1$ mit

(57) $C_1 := \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\log t\right)\psi(t)\,dt = \frac{1}{2} - \gamma - \int_1^\infty \left(\frac{1}{t^2}\log t\right)\psi(t)\,dt \approx -0.0728254,$ γ ist die *Eu*
Konstante aus (3)
und für das Restglied gilt

$$(58)\quad \Delta_3(x) \ll \begin{cases} x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}\log x & \left(\text{ohne Satz 1 in [06] },\ \alpha = \frac{1}{3},\ H = x^{\frac{1}{3}}\right) \\ x^{\frac{1}{3}+\frac{5}{324}}\log x & \left(\text{mit Satz 1 in [06] },\ \alpha = \frac{5}{18},\ H = x^{\frac{1}{18}}\right) \end{cases}$$

Beweis . (55), (56) ergeben sich aus dem Residuum von $D_3(x)$, siehe *E. Krätzel* [09], und dient der endgültigen Festlegung des Parameters ϱ in (53) über die nachfolgende Beziehung (59). Die Näherung für C_1 in (57) ergibt sich analog zur Bemerkung 2 unter Lemma 1 mit einem ϑ, $0 < \vartheta < 1$:

$$C_1 = \frac{1}{2} - \gamma - \int_1^\infty \left(\frac{1}{t^2}\log t\right)\psi(t)\,dt = \frac{1}{2} - \gamma - \int_1^{100}\left(\frac{1}{t^2}\log t\right)\psi(t)\,dt - \int_{100}^\infty \frac{\log t}{t^2}\psi(t)\,dt = \frac{1}{2} - \gamma - \int_1^{100}\left(\frac{1}{t^2}\log t\right)\psi(t)\,dt - \frac{\log 100}{100^2}\int_{100}^{100+\vartheta}\psi(t)\,dt .$$

Ist C1 die Summe der ersten drei Summanden, so ergibt sich mit “Mathematica” :

```
f = ((- Log[t]) / t^2) (t - Floor[t] - 1 / 2);
i = Integrate [f, {t, 1, 100}]; C1 = -0.0772156649 + i;
Print["C1= ", C1]
```

C1= −0.0728542 und weiter mit dem Wert des Rest-Integrals < + 0.0000576 :
$-0.0728542 < C_1 < -0.0728542 + 0.0000576 = -0.0727966$. Nimmt man den Median-Bruch der Schranken von C_1, so gilt $C_1 \approx$ -0,0728254, wie in (57).

Die beiden Summen in (53) werden nun getrennt ausgewertet mit der Summenformel (2) von Euler und mit dem Ziel, die aus der komplexen Analysis bekannten Relationen (55) und (56) durch das Rechnen im Reellen zu bestätigen. Dabei wird sich zeigen, dass der Parameter ϱ aus (53) und Lemma 3 hierfür einen wohlbestimmten Wert annehmen muss, für den Theorem2 auf $D_3(x)$ anwendbar ist, falls $\varrho \geq 2$, wie in Lemma 3 verlangt :

Für die <u>1. Summe</u> in (53) ergibt sich mit (57)

$$\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\log\frac{x}{n} = \frac{1}{2}x\log x + \int_1^x \frac{x}{t}\log\frac{x}{t}\,dt + \int_1^x \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{x}{t}\log\frac{x}{t}\right)\psi(t)\,dt = \frac{1}{2}x\log x + x\log^2 x - x\int_1^x \frac{1}{t}\log t\,dt$$
$$- x\log x\int_1^x \frac{dt}{t^2}\psi(t) - x\int_1^x \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{t}\log t\right)\psi(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}x\log^2 x + \frac{1}{2}x\log x + (\gamma - \tfrac{1}{2})x\log x - C_1 x + O(1) = \frac{1}{2}x\log^2 x + \gamma x\log x - C_1 x + O(1)$$

Für die <u>2. Summe</u> in (53) ergibt sich mit γ aus (3)

$$(2\gamma-1)x\sum_{n\le x/\varrho}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}x(2\gamma-1) + O(1) + (2\gamma-1)x\int_1^{x/\varrho}\frac{dt}{t} - (2\gamma-1)x\int_1^{x/\varrho}\frac{dt}{t^2}\psi(t) = (2\gamma-1)x\log x$$
$$- (2\gamma-1)x\log\varrho + x(\gamma-\tfrac{1}{2}) + (\gamma-\tfrac{1}{2})(2\gamma-1)x + O(1)$$
$$= (2\gamma-1)x\log x + x(2\gamma^2-\gamma-(2\gamma-1)\log\varrho) = (2\gamma-1)x\log x + x(2\gamma^2-\gamma(1+2\log\varrho)+\log\varrho) .$$

Beide Ergebnisse zusammen ergibt $H_3(x) = x\,(\frac{1}{2}\log^2 x + (3\gamma-1)\log x - C_1 + 2\gamma^2 - \gamma(1+2\log\varrho) + \log\varrho)$
Andererseits gilt für $H_3(x)$ (55) mit λ_3 aus (56). Da λ_3 eindeutig bestimmt ist, ergibt sich der exakte Wert des Parameters ϱ mit

(59) $(1-2\gamma)\log\varrho = (\gamma-1)^2 + 4C_1$, also mit $\varrho = \mathrm{Exp}\left(\frac{(\gamma-1)^2+4C_1}{1-2\gamma}\right)$, und es ist $\varrho > 2{,}07$,

wenn für C_1 die ungünstigere Schranke -0.0727966 eingesetzt, und die siebte Nach-Komma-Stelle

von γ aufgerundet wird.
Mit dem exakten Wert für ϱ gilt (55) mit λ_3 aus (56). Abschließend folgt (58) aus der Vorbetrachtung unter Einbeziehung von (23) aus Lemma 4 und von (30) aus Theorem 2 ∎

Der allgemeine Fall $k \geq 3$ für $D_k(x) = H_k(x) + \Delta_k(x)$

Lemma 9 . Für die beiden Summen in (50) zu $H_k(x)$, k ≥ 3, gibt es jeweils Polynome $L_{k-1}^{(1)}(\log x)$ und $L_{k-2}^{(2)}(\log x)$ vom Grad k-1 und k-2 in Potenzen von $\log x$ mit den absoluten Koeffizienten $C_{k-1}^{(1)}$ und $C_{k-2}^{(2)}$, so dass mit (50) und z aus (46) gilt :

$$(60) \qquad \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-2}\leq x} z\log z = x\,L_{k-1}^{(1)}(\log x) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x} 1\Big)$$

$$(61) \qquad \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-2}\leq x/\varrho} (2\gamma\text{-}1)z = x\,L_{k-2}^{(2)}(\log x) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x} 1\Big)$$

wobei der O-Term wegen der Symmetrie k! mal unter der Bedingung $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_{k-3} \leq \ldots \leq n_k \leq x$ abgeschätzt werden kann mit dem Ergebnis

$$(62) \qquad \sum_{\substack{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x\\ n_1\leq\ldots\leq n_k\leq x}} 1 = \begin{cases} O(1) & \text{für } k = 3\\ O(x^{1/4}) & \text{für } k = 4\\ O(x^{2/5+(k-4)\epsilon}) & \text{für } k \geq 5 \text{ und jedes } \epsilon > 0\end{cases}$$

Beweis (Vollständige Induktion über k). Für k = 3 lautet der O-Term jeweils O(1) und die Polynome lauten

$$\text{für (60)}: \; L_2^{(1)}(\log x) = \tfrac{1}{2}\log^2 x + \gamma\log x - C_1$$

$$\text{für (61)}: \; L_1^{(2)}(\log x) = (2\gamma\text{-}1)\log x + 3\gamma^2 - 3\gamma + 4C_1 + 1$$

(siehe Beweis von Lemma 8). Die Behauptung gelte nun für k := k-1. Dann ergibt sich mit z aus (46)

für (60) :

$$\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-2}\leq x} z\log z = \sum_{n\leq x}\;\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x/n} \frac{x/n}{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}}\log\Big(\frac{x/n}{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}}\Big) = \sum_{n\leq x}\Big\{\frac{x}{n}L_{k-2}^{(1)}(\log\tfrac{x}{n}) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-4}\leq x/n} 1\Big)\Big\}$$

$$= x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}L_{k-2}^{(1)}(\log\tfrac{x}{n}) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-4}\cdot n\leq x} 1\Big),$$

was mit $n = n_{k-3}$ der gewünschte O-Term in (60) ist, und weiter gilt mit der Summenformel (2) von *Euler*

$$= x\Big\{\tfrac{1}{2}L_{k-2}^{(1)}(\log x) - \frac{\psi(x)}{x}C_{k-2}^{(1)} + \int_1^x\frac{dt}{t}L_{k-2}^{(1)}(\log\tfrac{x}{t}) + \int_1^x\frac{\delta}{\delta t}\Big(\frac{1}{t}L_{k-2}^{(1)}(\log\tfrac{x}{t})\Big)\psi(t)dt\Big\} + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x} 1\Big)$$

und weiter mit der Substitution $\frac{x}{t} = \tau$, $dt = -\frac{x}{\tau^2}d\tau$ für das 1. Integral . Das 2. Integral ist konvergent für $x \longrightarrow \infty$ und für das Rest-Integral gilt mit dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung insgesamt weiter

$$= x\Big\{\tfrac{1}{2}L_{k-2}^{(1)}(\log x) + \int_1^x\frac{d\tau}{\tau}L_{k-2}^{(1)}(\log\tau) + C_{k-1}^{(1)}\Big\} + O(1) + O\Big(\frac{\log^{k-2}x}{x}\Big) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x} 1\Big)$$

$$= x\,L_{k-1}^{(1)}(\log x) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq x} 1\Big)$$

mit

$$(63) \qquad C_{k-1}^{(1)} := \int_1^\infty\frac{\delta}{\delta t}\Big(\frac{1}{t}L_{k-2}^{(1)}(-\log t)\Big)\psi(t)dt$$

Für (61) ergibt sich mit z aus (46)

$$\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-2}\leq\frac{x}{\varrho}} (2\gamma\text{-}1)z = \sum_{n\leq x/\varrho}\;\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\leq\frac{x/n}{\varrho}} (2\gamma-1)\frac{x/n}{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}} = \sum_{n\leq x/\varrho}\Big\{\frac{x}{n}L_{k-3}^{(2)}(\log\tfrac{x}{n}) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-4}\leq x/n} 1\Big)\Big\}$$

$$= \quad x\ \{\tfrac{1}{2}L_{k-3}^{(2)}(\log\ x)\ -\ \psi(x/\varrho)L_{k-3}^{(2)}(\log\ \varrho)\ +\ \int_1^{x/\varrho}\frac{dt}{t}L_{k-3}^{(2)}(\log\ \tfrac{x}{t})\ +\ \int_1^{x/\varrho}\frac{\delta}{\delta t}\left(\tfrac{1}{t}L_{k-3}^{(2)}(\log\ \tfrac{x}{t})\right)\psi(t)\,d t\ \}\ +$$

$$O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-4}\cdot n\le x} 1\Big)$$

$$= x\left\{\tfrac{1}{2}L_{k-3}^{(2)}(\log x) + \int_\varrho^x \frac{d\tau}{\tau}L_{k-3}^{(2)}(\log\tau) + C_{k-2}^{(2)}\right\} + O(1) + O\Big(\frac{\log^{k-3}x}{x}\Big) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\le x} 1\Big)$$

$$= x\,L_{k-2}^{(2)}(\log x) + O_k\Big(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\le x} 1\Big)$$

mit

$$(64)\qquad C_{k-2}^{(2)} := \int_1^\infty \frac{\delta}{\delta t}\left(\tfrac{1}{t}L_{k-3}^{(2)}(-\log t)\right)\psi(t)dt\,.$$

Somit gilt (60) und (61) mit vollständiger Induktion ■

Für den gemeinsamen O_k-Term ergibt sich wegen der Symmetrie und mit $d_{k-4}(n) \ll_k n^{(k-5)\epsilon}$ für $k \ge 6$ und jedes $\epsilon > 0$

$$\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\le x} 1 \ll k! \sum_{\substack{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-4}\, n_{k-3}^4\le x\\ n_1\le\ldots\le n_k\le x}} 1 \ll x^{(k-5)\epsilon}\sum_{\substack{m\,n^4\le x\\ m\le n}} 1 \ll x^{(k-5)\epsilon}\sum_{m\le x^{1/5}}\ \sum_{n\le\left(\frac{x}{m}\right)^{1/4}} 1 \ll x^{(k-5)\epsilon}x^{1/4}\sum_{m\le x^{1/5}} m^{-1/4}$$

$$\ll x^{2/5+(k-5)\epsilon}$$

für jedes $\epsilon > 0$, was insgesamt (62) bedeutet für $k \ge 5$, und die Fälle $k = 3$ und $k = 4$ sind offensichtlich auch richtig. ■

<u>Lemma 10</u>. Für $D_k(x) = H_k(x) + \Delta_k(x)$ gilt mit reellen λ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$

(65) $H_k(x) = x\,(\lambda_1\log^{k-1}x + \lambda_{k-2}\log^{k-2}x + \ldots + \lambda_{k-1}\log x + \lambda_k)$ und mit (63) und (64) ist für $k \ge 4$

$$(66)\qquad \lambda_k = \tfrac{1}{2}\lambda_{k-1} - (2\gamma\text{-}1)\log\varrho + \int_1^\infty \frac{\delta}{\delta t}\left(\tfrac{1}{t}L_{k-2}(-\log t)\right)\psi(t)dt \quad \text{mit } L_{k-2} := L_{k-2}^{(1)} + L_{k-3}^{(2)}\,.$$

Weiter gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$(67)\qquad \Delta_k(x) = x^{\frac{1}{2}+(k-3)\epsilon} + x^{(k-4)\epsilon}\cdot\min\{x^{\frac{1}{2}}H^\alpha, x^{\frac{3\alpha+1}{4}}H^{\frac{1-\alpha}{2}}\}$$

und für $\Delta_3(x)$ die Abschätzung (58) aus Lemma 8. α und H sind Lemma 4 oder Theorem 2 zu entnehmen.

<u>Beweis</u>. (65) ergibt sich aus Lemma 9. Zu (66): $\frac{1}{2}\lambda_{k-1}$ ergibt sich aus der Anwendung der Summenformel (2) von *Euler*, - $(2\gamma\text{-}1)\log\varrho$ ergibt sich über die Summen-Bedingung $n \le x/\varrho$ im Beweis zu (61) und das Integral ist die zusammengefasste neue Konstante nach (2). Zu (67) :
Für $\Delta_k(x)$ in (52) bedeuten die Bedingungen $n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\cdot n^3 \le x$, $n_1 \le \ldots \le n_{k-3} \le n$ für $k = 4$: $m\cdot n^3 \le x$ und $m \le n$. Und für $k \ge 5$ unter Einbeziehung von $d_{k-4}(n) \ll n^{(k-5)\epsilon}$ wegen (43), ergibt sich in beiden Fällen bei der Summierung der zusätzliche Faktor $x^{(k-4)\epsilon}$. Somit ergibt sich für die <u>zweite Summe</u> in (52) mit z^ϵ

$$\sum_{\substack{n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\cdot n^3\le x\\ n_1\le\ldots\le n_{k-3}\le n}} O(z^\epsilon) \ll x^{\epsilon+(k-4)\epsilon}\sum_{\substack{m\cdot n^3\le x\\ m\le n}} 1 \ll x^{(k-3)\epsilon}\sum_{m\le x^{1/4}}\ \sum_{n\le\left(\frac{x}{m}\right)^{1/3}} 1 \ll x^{(k-3)\epsilon}x^{1/3}\sum_{m\le x^{1/4}} m^{-1/3} \ll x^{\frac{1}{2}+(k-3)\epsilon}$$

für jedes $\epsilon > 0$.

Das ist der erste Summand in (67). Für die <u>erste Summe</u> in (52) mit Δ_2 ergibt sich bei gleichem Vorgehen, aber mit der Zusatzbedingung $\frac{x}{H} \ll n_1\cdot\ldots\cdot n_{k-3}\cdot n$ und mit $\Delta_2(\xi, z) \ll z^\alpha$ mit α und H aus Lemma 4 oder Theorem 2 :

$$x^{(k-4)\epsilon} \sum_{\substack{\frac{x}{H} \ll m\cdot n \\ m\cdot n^3 \le x \\ m \le n}} \left(\frac{x}{m\cdot n}\right)^{\alpha} \ll x^{(k-4)\epsilon} H^{\alpha} \sum_{\substack{m\cdot n^3 \le x \\ m \le n}} 1 \ll x^{(k-4)\epsilon} H^{\alpha} \sum_{m \le x^{1/4}} \sum_{n \le \left(\frac{x}{m}\right)^{1/3}} 1 \ll x^{(k-4)\epsilon} H^{\alpha} x^{\frac{1}{2}}$$

Verwendet man die Nebenbedingung $\frac{x}{H} \ll m\cdot n$ für die Einschränkung des Bereiches der Summierung, so ergibt sich eine bessere Abschätzung bei Verwendung von Theorem 1 (Satz 1 in [06]) :

$$x^{(k-4)\epsilon} \sum_{\substack{\frac{x}{H} \ll m\cdot n \\ m\cdot n^3 \le x \\ m \le n}} \left(\frac{x}{m\cdot n}\right)^{\alpha} \ll x^{(k-4)\epsilon} x^{\alpha} \sum_{m \le x^{1/4}} m^{-\alpha} \sum_{\substack{m\cdot n^3 \le x \\ m\cdot n \gg \frac{x}{H}}} n^{-\alpha} \ll x^{(k-4)\epsilon} x^{\alpha} \sum_{m \le x^{1/4}} m^{-\alpha} \sum_{\substack{(m\cdot n)\cdot n^2 \le x \\ m\cdot n \gg \frac{x}{H}}} n^{-\alpha} \ll x^{(k-4)\epsilon} x^{\alpha} \sum_{m \le x^{1/4}} m^{-\alpha} \sum_{n^2 \le H} n^{-\alpha}$$

$$\ll x^{(k-4)\epsilon} x^{\alpha + \frac{1-\alpha}{4}} H^{\frac{1-\alpha}{2}} \ll x^{(k-4)\epsilon} \cdot x^{\frac{1+3\alpha}{4}} H^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

womit auch der 2. Summand rechts in (67) bestätigt ist ■

Theorem 3 . Ohne Theorem 1 (Satz 1 in [06]) ergeben sich für das Restglied $\Delta_k(\mathrm{x})$ beim Teiler-Problem von *Piltz* ($k \ge 3$) die Abschätzungen

$$(68) \quad \Delta_k(\mathrm{x}) \ll \begin{cases} x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = x^{\frac{4}{9}} & \text{für } k = 3,\ \frac{4}{9} = 0,\overline{4} \\ x^{(k-4)\epsilon + \frac{1}{2} + \frac{1}{9}} = x^{(k-4)\epsilon + \frac{11}{18}} & \text{für } k \ge 4,\ \frac{11}{18} = 0,6\overline{1} \end{cases}$$

Beweis . Lemma 8 und (67) in Lemma 10 mit jeweils $\alpha = \frac{1}{3}$ und $H = x^{\frac{1}{3}}$ ■

Bemerkung . Im Vergleich dazu die seit 1927 bekannte untere Abschätzung von *G. Szegö* und *A. Walfisz* (Quelle [09]) :

$$\Delta_k(\mathrm{x}) = \Omega\,(x^{\frac{p-1}{2p}} \log^{\alpha} \mathrm{x})\,,\ \alpha > \frac{p-1}{2p}$$

Theorem 4 . Mit Theorem 1 (Satz 1 in [06]) ergibt sich für das Restglied $\Delta_k(\mathrm{x})$ beim Teiler-Problem von *Piltz* für $k \ge 4$ die Abschätzung

$$(69) \quad \Delta_k(\mathrm{x}) \ll x^{\frac{1}{2} + (k-3)\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0 \text{ und alle } k \ge 4$$

Beweis . In (67) sind wegen Theorem 2 die Werte $\alpha = \frac{5}{18}$ und $H = x^{\frac{1}{18}}$ wählbar, und für das dortige Minimum ergibt sich $x^{\frac{3\alpha+1}{4}} H^{\frac{1-\alpha}{2}} = x^{\frac{155}{324}}$

■

Folgerung : Mit Theorem 1 (Satz 1 in [06]) und Theorem 4 gilt dann auch die Hypothese von *LINDELÖF* für die ζ-Funktion von *Riemann*

$$(70) \quad \zeta(\sigma + \mathrm{it}) \ll t^{\epsilon} \text{ für jedes } \epsilon > 0 \text{ und alle } \sigma \ge \frac{1}{2}$$

Beweis . Nach Theorem 13.4 von *E.C. Titchmarsh / D.R. Heath-Brown* aus [11] ist (70) äquivalent zu (69) ■

4. Verwendete Literatur

[01] *K. Chandrasekharan*, Einführung in die Analytische Zahlentheorie, Springer-Verlag Berlin * Heidelberg * New York, 1966

[02] *F. Fricker*, Einführung in die Gitterpunktlehre, Birkhäuser-Verlag Basel * Boston * Stuttgart, 1982

[03] *G.H. Hardy, J.E. Littlewood*, The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications of the divisor problems of *Dirichlet* and *Piltz*, Proc. London Math. Soc. (2) 21 (1922)

[04] *J. Havil*, GAMMA, Springer Berlin Heidelberg New York, 2007

[05] *E. Hlawka*, Theorie der Gleichverteilung, Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut Mannheim Wien Zürich, 1979

[06] *G. Horn*, Gitterpunkte und Diskrepanz, Digitale Bibliothek Thüringen, https://doi.org/10.22032/dbt.42572, 2020

[07] *Loo-Keng Hua* (deutsche Fassung von *Ph. Salie'*, *H. Salie'*, Leipzig), Abschätzungen von Exponentialsummen, Enzyklopädie d.Math.Wiss., Band I_2, Heft 13, Teil 1, 1959

[08] *A. Ivic'*, *E. Krätzel*, *M. Kühleitner*, *W.G. Nowak*, Lattice points in large regions and related arithmetic functions: Recent developments in a very classic topic, arX iv: math / 0410522v1[math. NT] 25 Oct. 2004

[09] *E. Krätzel*, Lattice Points, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988

[10] *E. Krätzel*, Zahlentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1981

[11] *E.C. Titchmarsh* revised by *D.R. Heath-Brown*, The theory of the Riemann Zeta-function, Second edition 1986

[12] *G. Voronoi*, Sur un probleme du calcul des fonctions asymptotiques, J. Math. 126 (1903), 241-282

Autor: Günter Horn, guenter.horn@uni-jena.de, guenter.horn@t-online.de, 22.04.2022