Gitterpunkte und Diskrepanz

Günter Horn

seit 1558

Friedrich–Schiller–Universität Jena

Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik

2020

Zusammenfassung

Gitterpunktbereiche in N×N, deren Rand aus achsenparallelen Teilstrecken besteht und stetig ergänzt werden durch Funtionen $F(\xi,\eta) = x$, $x \gg 1$, wie etwa beim Gitterpunkt-Polygon im Satz von PICK oder mit $\xi^2+\eta^2 = x$ beim Kreisproblem von GAUSS oder mit $\xi\cdot\eta = x$ beim Teilerproblem von DIRICHLET, können analytisch einheitlich behandelt werden nach der Philosophie des Satzes von PICK für Gitterpunkt-Polygone: Anzahl der inneren Gitterpunkte plus 1/2 mal Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand minus 1 = Flächeninhalt des Gitterpunkt-Polygons. Bei der analytischen Behandlung aller drei Probleme unter Verwendung der Eulerschen Summenformel erscheinen in der genannten Beziehung rechts zusätzlich zum Flächeninhalt noch drei Restglieder, wenn man den Gitterpunktbereich durch $F(m,n) \le x$ und explizit mit $\eta = f(\xi)$, $n = f(m)$, $a < m \le b$, beschreibt und mit G(F) den Graphen der Randkurve bezeichnet:

$$\int_a^b f'(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \;+\; \sum_{a<m\le b} \psi_0(f(m)) \;+\; \frac{1}{2}\,\sharp\left\{G(F)\cap Z^2\right\}$$

worin mit $\lfloor z\rfloor := \max\{\,k\in Z,\ k\le z\,\}$, das Größte Ganze eines reellen z ,

$$\psi(z) := z - \lfloor z\rfloor - 1/2 \quad\text{und}\quad \psi_0(z) := \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\sin 2\pi h z\,.$$

Im Fall von Kreis und Hyperbel ist $\frac{1}{2}\,\sharp\left\{G(F)\cap Z^2\right\} \ll x^{\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$.

Das letzte Restglied ergibt sich beim Übergang von ψ aus der Eulerschen Summenformel zur Fourierreihe ψ_0. Von den ersten beiden Restgliedern ergibt sich das Integral durch die Eulersche Summenformel und stellt inhaltlich den Fehler dar beim Übergang von der diskreten Größe f(m) zur stetigen $f(\xi)$. Die Summe in obiger Restglieddarstellung beschreibt den Fehler, der sich beim Übergang vom Größten Ganzen $\lfloor f(m)\rfloor$ zur Summationsgröße f(m) ergibt. Dieser Restgliedsumme und ihrer Abschätzung ist der nachfolgende Text gewidmet. Beim Gitterpunkt-Polygon ist der Wert des Restintegrals und auch der Wert der Restsumme gleich Null, wobei hier (a,f(a)) und (b,f(b)) Gitterpunkte sind und längs der Verbindungsstrecke ist $f'(\xi) = \text{const}$. Über das Verschwinden der

Restgliedsumme beim Satz von PICK wird im nachfolgenden Text eingegangen und hat etwas zu tun mit der Verteilung der Werte $\{f(m)\} := f(m) - \lfloor f(m) \rfloor$ im Intervall $[\![0,1[\![$. Ist $F(\xi,\eta) = x$ mit $\eta = f(x,\xi)$ eine Strecke zwischen zwei Gitterpunkten, so ist für $m \leq M$ die Folge $\{f(x,m)\}$ im Einheitsintervall äquidistant und symmetrisch zum Mittelpunkt verteilt und entspricht für $x \longrightarrow \infty$, $M \longrightarrow \infty$ in idealer Art und Weise dem von WEYL geprägten Begriff einer "gleichverteilten" Folge modulo 1. Solche Folgen liegen dicht bezüglich jedes Punktes aus $[\![0,1[\![$. Ist nun die Randkurve $F(\xi,\eta) = x$ mit $\eta = f(\xi)$ glatt und gilt auch noch für die zweite Ableitung $f''(\xi) \longrightarrow 0$ für $\xi \leq M \longrightarrow \infty$, so kann man wegen

$$\text{Krümmung der Randkurve } f \text{ in } \xi \text{ ist gleich } \frac{f''(\xi)}{(1 + (f'(\xi))^2)^{3/2}}$$

davon ausgehen, dass für hinreichend grosses M, $M \gg 1$, die Verteilungsverhältnisse der Folge $\{f(m)\}$ in $[\![0,1[\![$ sich der idealen Verteilung einer Strecke im Gitterpunkt-Polygon mit Krümmung Null nähert. Dabei spielt der Begriff der Diskrepanz einer Folge modulo 1 als Maß für die Abweichung von der idealen Gleichverteilung eine Rolle. Im nachfolgenden Text werden für gleichverteilte Folgen modulo 1 die Aussagen (16), (17), (18) als heuristische Prämissen formuliert, die, falls sie gerechtfertigt sind, die Restgliedabschätzungen mit Exponentialsummen deutlich verbessern. Insbesondere würde sich für das Kreisproblem von GAUSS eine verbesserte obere Abschätzung ergeben:

$$\sum_{m \leq \sqrt{x/2}} \psi_0\left(\sqrt{x - m^2}\right) \ll x^{5/18} \log x \quad , \quad \frac{5}{18} = 0,\ 2727\ \ldots$$

$$\textit{H}\text{UXLEY 2003 : } x^{\frac{131}{416}} (\log x)^3, \quad \frac{131}{416} = 0,\ 314\,903\ \ldots, \quad \text{(Quelle : [6])}$$

26.03.2020

Restglied und Diskrepanz reeller Folgen modulo 1

In der Literatur [3] findet man die Definition der Diskrepanz $D_M(f(m))$ einer Folge $f(m)$ modulo 1, wobei $m \leqslant M$, $M \gg 1$,

$$(1) \quad D_M(f(m)) := \sup_{J \subset [0,1]} \left| \frac{1}{M} \sum_{m \leq M} c_J(f(m)) - \int_0^1 c_J(x)\, dx \right|,$$

$$\text{worin } c_J(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z - \lfloor z \rfloor \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von J für z modulo 1 ist. E. HLAWKA hat in [3] die Ungleichung von ERDÖS und TURAN hergeleitet über (1) :

$$(2) \quad D_M(f(m)) \leq \frac{10}{H} + \frac{4}{\pi} \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{h} \left| \frac{1}{M} \sum_{m \leq M} e(h\, f(m)) \right|,$$

worin $e(x) := e^{2\pi i x}$ und H eine beliebige natürliche Zahl ist.

Für das Restglied $\sum_{m \leq M} \psi(f(m))$ bei ebenen Gitterpunktproblemen erhält man nach $E.\ K$RÄTZEL [2]

$$(3) \quad \left| \sum_{m \leq M} \psi(f(m)) \right| \leq \frac{M}{2\pi H} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{h}, \frac{H}{h^2}\right) \left| \sum_{m \leq M} e(\mathrm{hf}(m)) \right|.$$

Multipliziert man (2) mit M, so sieht man

$$(4) \quad \left| \sum_{m \leq M} \psi(f(m)) \right| \leq M\, D_M(f(m))$$

Wir nennen $\mathrm{MD}_M(f(m))$ <u>Zahlentheoretische</u> <u>Diskrepanz</u> von f.

*E. H*LAWKA hat nun in [3] beschrieben,

wie man von der charakteristischen Funktion $c_J(x)$ in (1) zu den *W*EYLschen Summen $\sum_{m \le M} e(\mathrm{hf}(m))$ gelangt, indem er mit

$$(5) \quad \Delta_M(x, f) := \frac{1}{M} \sum_{m \le M} c_{[\![0,x[\![}(f(m)) - x$$

einen äquivalenten Diskrepanzbegriff betrachtet :

$$(6) \quad \frac{1}{2} D_M(f) \le \sup_{0 \le x \le 1} |\Delta_M(x, f)| \le D_M(f).$$

Mit der endlichen Fourierentwicklung für $F(x) = \left(\frac{\sin(H+1)\pi x}{\sin \pi x}\right)^2$ ergibt sich dann (2) .

Wählt man nun bei gleichem Beweisgang von *H*LAWKA [3] die Fourierentwicklung der Impulsfunktion

$$(7) \quad F(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le D_M(f) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ergibt sich für eine beliebige reelle Folge $f(m)$, $m \le M \longrightarrow \infty$,
mit der Darstellung der zu f gehörenden *W*EYLschen Summe

$$(8) \quad \left| \sum_{m \le M} e(\mathrm{hf}(m)) \right| \ll h^\kappa \left| \sum_{m \le M} e(f(m)) \right|, \quad 0 < \kappa < 1$$

die Diskrepanz $D_M(f)$ sofort und ohne (2) mit

$$(9) \quad D_M(f) \ll \left| \frac{1}{M} \sum_{m \le M} e(f(m)) \right|^{\frac{1}{1+\kappa}}$$

und folglich für die Zahlentheoretische Diskrepanz

$$(10) \quad \mathrm{MD}_M(f) \ll M^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} \left| \sum_{m \le M} e(f(m)) \right|^{\frac{1}{1+\kappa}}.$$

Zu dem gleichen qualitativen Ergebnis gelangt man bei Anwendung von (8) auf (2) multipliziert mit M, aber auch bei Anwendung von (8) auf (3). (10) stellt folglich <u>keine</u> Verbesserung dar.

In (10) gehört κ nicht notwendig zu einem Exponentenpaar (κ,λ), wie es bei multiplikativen Problemen wie dem Teilerproblem von DIRICHLET zur Anwendung kommt. (10) ist auch anwendbar auf das Kreisproblem von GAUSS, nämlich hierfür die linke Seite von (3) möglichst gut abzuschätzen für f(m) $= \sqrt{x - m^2}$: Mit dem Basissatz von Van der CORPUT (siehe etwa [2])

$$(11) \quad \sum_{\frac{1}{2} M < m \le M} e(F(m)) \ll F'(M) \frac{1}{\sqrt{F''(M)}} + \frac{1}{\sqrt{F''(M)}}$$

ergibt sich die klassische Abschätzung

$$(12) \quad \sum_{m \le \sqrt{x/2}} e\left(h \sqrt{x - m^2}\right) \ll h^{1/2} x^{1/4},$$

also mit (9) und (10) $D_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x - m^2}\right) \ll \left(\frac{1}{\sqrt{x}} x^{1/4}\right)^{2/3} \ll x^{-1/6}$ und somit

$$(13) \quad D_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x - m^2}\right) \ll x^{-1/6} \text{ und } \sqrt{x}\, D_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x - m^2}\right) \ll x^{1/3}.$$

Das Ziel ist nun, für die linke Seite in (4) unter Verwendung der rechten Seite eine wesentlich bessere, also kleinere obere Schranke herzuleiten. Wenn wie in (13) D_M(f(m)) $\longrightarrow 0$ für M $\longrightarrow \infty$, so nennt man {f(m)} gleichverteilt im Intervall $[\![0,1[\![$. Dann ist die Folge auch dicht in jedem Punkt des Intervalls. In [3] zeigt HLAWKA , dass für alle Intervalle J und alle $\epsilon > 0$

$$(14) \quad \left| \frac{1}{M} \sum_{m \leq M} c_J(f(m)) - |J| \right| < \epsilon , \quad \text{wenn nur } M \text{ hinreichend groß ist.}$$

Zieht man in (14) ein Intervall J auf einen Punkt $f(m_0) = c \in [\![0,1[\![$ zusammen, so ist der Betrag in (1) gleich 1/M. Gilt aber wie in (13)

$$(15) \quad \frac{1}{M} = o(D_M(f)) \text{ und } D_M(f) = o(1),$$

so haben die für das Supremum in (1) verantwortlichen Intervalle J_s positive Länge, $|J_s| > 0$. Nun sei J_0 ein Intervall mit $|J_0| = \inf_s \{|J_s|\}$. Dann gilt

Lemma 1. Für D_M(f) aus (1) gilt unter der Bedingung (15), dass die für das Supremum verantwortlichen Intervalle J_s mindestens die Länge 1/2 haben, wenn nur M hinreichend groß ist . Ist J_0 ein solches Intervall, so auch $[\![0,1/2[\![$ und $[\![1/2,1[\![$ wegen der Äquivalenz des Supremums Δ_M(x, f) aus (5) zu D_M(f) aus (1).

Beweis. Es genügt,

den ersten Teil zu beweisen. Wegen $\lim_{M \longrightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m \leq M} c_{J_0}(f(m)) = |J_0|$ gilt für hinreichend großes M für ein vorgegebenes $C > 1$

$$|J_0| - \frac{|J_0|}{C} \leq |J_0| \pm D_M(f) \leq |J_0| + \frac{|J_0|}{C}. \text{ Somit gilt}$$

$$(16) \quad |J_s| \geq C\, D_M(f) \text{ und für } C := \frac{1}{2} D_M^{-1} \text{ ist } |J_s| \geq \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

Heuristische Folgerungen . Ist f(m) , m∈N, eine reelle Folge und der nicht-ganze Anteil von f(m) , {f(m)}, m≤M, die zugehörige Folge modulo 1, so kann man bei Gültigkeit von (15) für alle hinreichend großen M auf dem Intervall $[\![0,1[\![$ die folgende Verteilung der Werte {f(m)} annehmen :

$$(17) \quad \frac{1}{2} M + \mathrm{MD}_M \text{ Werte in } \left[\!\!\left[0, \frac{1}{2}\right[\!\!\right[\text{ und } \frac{1}{2} M - \mathrm{MD}_M \text{ Werte in } \left[\!\!\left[\frac{1}{2}, 1\right]\!\!\right], \text{ oder umgekehrt.}$$

Betrachtet man weiter die äquidistante Intervallzerlegung

$$I_k := \left]\!\!\right] \frac{k}{K}, \frac{k+1}{K} \left[\!\!\right[, \; 0 \leq k \leq \frac{K}{2} - 1, \text{ von } [\![0, 1/2[\![,$$

so nehmen wir wegen der Gleichverteilung und Dichtheit der Folge gemäß (15) an, dass sich die Werte in $[\![0,1/2[\![$ gleichmäßig auf die K/2 Intervalle I_k verteilen, was bedeutet:

$$(18) \quad \sharp\{\{f(m)\} \in I_k\} = \frac{1}{K/2} \frac{M}{2} + \frac{1}{K/2} \mathrm{MD}_M \text{ für alle hinreichend großen } M.$$

Nun wenden wir uns wieder der linken Seite von (4) zu, der Restgliedabschätzung ebener Gitterpunktprobleme. Für das Restglied $\sum_{m \leq M} \psi(f(m))$ aus (3) schreiben wir mit der Fourierentwicklung des ersten Bernoullischen Polynoms : x-1/2, 0≤x<1,

$$(19) \quad -\sum_{m \leq M} \psi(f(m)) = \sum_{m \leq M} \psi_0(f(m)) + \frac{1}{2} \sharp\left\{G(f) \cap Z^2\right\} = \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq M} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \sin 2\pi \mathrm{h} f(m) + \frac{1}{2} \sharp\left\{G(f) \cap Z^2\right\}$$

worin ψ_0 aus der Zusammenfassung und $G(f)$ der Graph der stetigen Randkurve $f(t)$, $t \leq M$, ist.

Für den Kreis mit $f(m) = \sqrt{x - m^2}$ und für die Hyperbel mit $f(m) = \frac{x}{m}$ gilt für den Graphen G(f) jeweils für x∈N (siehe etwa [4], Hyperbel, und [9], Kreis, Satz 6.16 von GAUSS)

$$(20) \quad \sharp\left\{G(f) \cap Z^2\right\} = O(x^\epsilon) \text{ für jedes } \epsilon > 0, \text{ für } x \notin N \text{ ist } G(f) \cap Z^2 = \emptyset.$$

Ist nun G(f) wie im Satz von PICK (veröffentlicht 1899 als Folgerung aus dem Eulerschen Polyedersatz) ein Streckenzug, dessen Ecken sämtlich Gitterpunkte aus N×N sind bei stetigem f, so ist die Summe über die Fourierreihe in (19) gleich Null, da mit Summenumordnung die Summation über jede Teilstrecke zwischen zwei Gitterpunkten bereits Null ist:

Die für eine Teilstrecke mit Anfangsgitterpunkt (a,f(a)) und Endgitterpunkt (b,f(b)) sich ergebenden Werte f(m) liegen bei f(a) < f(b) im Intervall ⟦f(a), f(b)⟧, und zwar äquidistant. Ist hierbei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\gamma > 0$ der Anstieg der Strecke (γ=0 und γ=∞ wird in #{G(f)⋂Z^2} erfasst), so kann man die Summation über m mit a<m<b wie folgt darstellen (in m=a und m=b ist der Sinuswert in (19) sowieso gleich Null):

$$(21) \qquad \sum_{0<r\le\frac{b-a}{2}} \sin 2\pi\, h(f(a)+\gamma r) \; + \sum_{0<r\le\frac{b-a}{2}} \sin 2\pi\, h(f(b)-\gamma r) \;=\; 0\,.$$

Wegen (21) liegen folglich die Werte {f(m)} beim Satz von PICK im Intervall ⟦0,1⟦ paarweise symmetrisch zum Mittelpunkt des Intervalls und unabhängig davon, ob γ rational oder irrational ist. Diese Eigenschaft kann für eine glatte Randkurve f(t), die mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, nur näherungsweise erreicht werden, falls beim "Aufblasen" des Gitterpunktbereiches mit f(t)=f(x,t) und bei x⟶∞ die Krümmung der Randkurve G(f(x,t)) mit $|f_{tt}(x,t)| > 0$ beliebig klein wird. Bevor wir dazu einen Satz formulieren, wird (19) durch Summenumordnung für eine Abschätzung vorbereitet:

$$\left|\sum_{m\le M}\psi(f(m))\right| \;\le\; \sum_{h\le H}\frac{1}{h}\left|\sum_{m\le M} e\,(h\,f(m))\right| \;+\; \left|\sum_{m\le M}\frac{1}{\pi}\sum_{h>H}\frac{1}{h}\sin 2\pi\,\mathrm{hf}(m)\right| \;+\; \frac{1}{2}\,\sharp\left\{G(f)\cap Z^2\right\}$$

Lemma 2. Für $f(m) = \lfloor f(m)\rfloor + \{f(m)\}$, $0 < \{f(m)\} < 1$, gilt

$$(22) \qquad \frac{1}{\pi}\sum_{h>H}\frac{1}{h}\sin 2\pi\,\mathrm{hf}(m) \;=\; -\int_{1/2}^{\{f(m)\}}\frac{\sin(2H+1)\,\pi t}{\sin \pi t}\,dt\,.$$

<u>Beweis</u>. Nach [5] ist für $0 < t < 1$,

$$\sum_{h=1}^{H}\cos 2\pi\,\mathrm{ht} \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2H+1)\,\pi t}{2\sin \pi t}.$$ Durch Integration nach t von $1/2$ bis $\{f(m)\}$ folgt (22) ∎

Unterstellen wir noch, wie beim Basissatz von Van der CORPUT, die Abschätzbarkeit von Exponentialsummen mit einem κ, $0 < \kappa < 1$, in der Form (8), so ergibt sich mit (22)

$$(23) \qquad \left|\sum_{m\le M}\psi(f(m))\right| \;\le\; H^{\kappa}\left|\sum_{m\le M} e\,(f(m))\right| \;+\; \left|\sum_{m\le M}\int_{1/2}^{\{f(m)\}}\frac{\sin(2H+1)\,\pi t}{\sin \pi t}\,dt\right| \;+\; \sharp\left\{G(f(m))\cap Z^2\right\}$$

Lemma 3. Ergibt sich für die Folge f(m), m ≤ M, modulo 1 die Zahlentheoretische Diskrepanz $\mathrm{M}D_M(f)$ nach Formel (10), so gilt für hinreichend große M und bei Gültigkeit von (15)

$$(24) \qquad \left|\sum_{m\le M}\int_{1/2}^{\{f(m)\}}\frac{\sin(2H+1)\,\pi t}{\sin \pi t}\,dt\right| \;\ll\; \frac{1}{H}\,MD_M(f)\log H\,.$$

<u>Beweis</u>. Für hinreichend großes M gilt wegen (15) auch (17) und (18). Die Nullstellen des Integranden liegen für {f(m)}∈ ⟧0,1/2⟧ bei $t_k = \frac{k}{2H+1}$. Wir zerlegen das Intervall ⟧0,1/2⟧ in Teilintervalle $I_k = \rrbracket \frac{k}{2H+1}, \frac{k+1}{2H+1}\rrbracket$ mit 0≤k≤H-1/2 , und betrachten das an der Vertikalen in t = 1/2 gespiegelte Intervall $I_k' = \left[\!\left[1-\frac{k+1}{2H+1}, 1-\frac{k}{2H+1}\right[\!\right[$, $I_k' \subset$ ⟦1/2, 1⟦ . In I_k' gibt es wegen (17) und analog zu (18) $\frac{1}{H}\left(\frac{1}{2}M - \mathrm{MD}_M\right)$ Elemente, die nahezu gleichverteilt und dicht liegen in I_k' bei hinreichend großem M. Bei idealer Gleichverteilung liegen die Elemente {f(m')} aus ⟦1/2, 1⟦ in äquidistantem Abstand d zueinander mit d ≤ $\frac{2}{M}$. Zu jedem {f(m')}∈I_k' gibt es folglich ein {f(m)}∈I_k so, dass bei Spiegelung von {f(m')} an der Vertikalen durch t = 1/2 das Spiegelbild von {f(m')} zu {f(m)} einen Abstand von d ≤ $\frac{2}{M}$ hat. Nun haben die Integrale in (24) für {f(m)} und {f(m')} unterschiedliches Vorzeichen bei fast gleichem vorzeichenbehafteten Flächeninhalt wegen der Spiegelsymmetrie des Graphen des Integranden auf ⟦0, 1⟧ bezüglich der Vertikalen in t = 1/2. Die Summe der Integrale für die Werte {f(m)} und {f(m')}, deren Abstand von 1/2 in ⟦0,1⟧ in der Differenz höchstens ≤ $\frac{2}{M}$ ist, ergibt einen vorzeichenbehafteten Flächeninhalt vom Betrag ≤ $\frac{2}{M}\cdot\frac{2H+1}{k}$ in I_k, k ≥ 1, und in I_0 einen Flächeninhalt von $\frac{2}{M}$(2H+1). Da in jedem I_k bisher $\frac{1}{H}$ ($\frac{1}{2}$M - MD_M) ≤ $\frac{1}{H}\cdot\frac{1}{2}$ M Elemente berücksichtigt wurden, ergibt sich für I_k <u>und</u> I_k' ein Integralanteil von betragsmäßig ≤ 3 + $\frac{3}{k}$, 1 ≤ k ≤ H - $\frac{1}{2}$ und für die Anzahl $\frac{1}{2}$M - MD_M aller Elemente in ⟦1/2, 1⟦ und entsprechend vieler in ⟧0, 1/2⟧ die

$$(24\,a) \qquad \text{Integralabschätzung für } (m,\, m') \;\le\; 4 + 3\log H$$

Es verbleiben in ⟧0, 1/2⟧ noch 2MD_M überschüssige Elemente. Für k ≥ 1 und {f(m)}∈I_k = ⟧$\frac{k}{2H+1}$, $\frac{k+1}{2H+1}$⟧ ist, da $\frac{1}{\sin \pi t}$ monoton fallend und größer oder gleich 1 auf]]0, 1/2]] , das Integral in (24) mit dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe etwa [8]) abschätzbar mit einem ϑ, {f(m)}< ϑ <1/2 , und mit $\frac{1}{\sin \pi t} \le \frac{1}{2t}$ auf]]0, 1/2]] :

$$\left|\int_{1/2}^{\{f(m)\}} \frac{\sin(2H+1)\pi t}{\sin \pi t} \mathrm{dt}\right| = \frac{1}{\sin \pi \{f(m)\}} \left|\int_{\{f(m)\}}^{\vartheta} \sin(2H+1)\pi t\, \mathrm{dt}\right| \le \frac{2H+1}{2k} \cdot \frac{2}{2H+1} = \frac{1}{k}, \quad k \ge 1 .$$

Für $k = 0$, also $\{f(m)\} \in I_0 =]\!]\, 0\,,\, 1/(2H+1)\, [\![$ ist

$$\left|\int_{1/2}^{\{f(m)\}} \frac{\sin(2H+1)\pi t}{\sin \pi t} \mathrm{dt}\right| = \left|\int_{\{f(m)\}}^{\frac{1}{2H+1}} \ldots \mathrm{dt} + \int_{\frac{1}{2H+1}}^{1/2} \ldots \mathrm{dt}\right| \le (2H+1) \int_{\{f(m)\}}^{\frac{1}{2H+1}} \mathrm{dt} + 2 \le 3 .$$

Da auf jedes I_k, k≥0 , $\frac{2}{H}\mathrm{M}D_M$ überschüssige Elemente entfallen, ergibt sich für diese überschüssigen Elemente in]]0,1/2]] die Abschätzung

$$(24\,b) \qquad \frac{6}{H}\mathrm{MD}_M + \frac{2}{H}\mathrm{MD}_M \sum_{k \le H-1/2} \frac{1}{k} \le \frac{2}{H}\mathrm{MD}_M\left(4 + \int_1^H \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}\right) \le \frac{2}{H}\mathrm{MD}_M(4 + \log H) .$$

(24 a) und (24 b) ergeben zusammen (24) ■

Zusammenfassend ergibt sich

Satz 1. Bildet mit einem großen Parameter x die reelle Funktion f(x,t), t ≤ M = M(x), mit ihrem Graphen G(f) einen Teil des Randes einer ebenen Gitterpunktmenge und ist f(t) mindestens zweimal stetig differenzierbar für t ≤ M mit der Eigenschaft, dass |f ´´(t)| streng monoton fallend gegen Null strebt für M⟶∞ , so ergibt sich für die Restgliedabschätzung des Gitterpunktproblems unter Verwendung der Abschätzung der zugehörigen Exponentialsumme in der Form

$$\sum_{m \le M} e(h\, f(m)) \ll h^{\kappa} \left|\sum_{m \le M} e(f(m))\right|, \quad 0 < \kappa < 1$$

zunächst die Zahlentheoretische Diskrepanz MD_M nach (10) mit

$$\mathrm{MD}_M(f) \ll M^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} \left|\sum_{m \le M} e(f(m))\right|^{\frac{1}{1+\kappa}}$$

und wenn hierfür noch (15) erfüllt ist mit

$$\frac{1}{M} = o(D_M(f)) \quad \text{und} \quad D_M(f) = o(1)\,,$$

gilt für das Restglied des Gitterpunktproblems bei der Wahl von C in (16) mit C := $\frac{1}{2}D_M^{-1}$ für hinreichend großes M mit (23) und (24):

$$(25) \qquad \sum_{m \le M} \psi(f(m)) \ll H^{\kappa} \left|\sum_{m \le M} e(f(m))\right| + \frac{1}{H} MD_M(f) \log H + \sharp\left\{G(f) \cap Z^2\right\}$$

und nach optimaler Wahl von H mit MD_M aus (10)

$$(26) \qquad \sum_{m \le M} \psi(f(m)) \ll M^{\left(\frac{\kappa}{1+\kappa}\right)^2} \left|\sum_{m \le M} e(f(m))\right|^{\frac{1+2\kappa}{(1+\kappa)^2}} \log x + \sharp\left\{G(f) \cap Z^2\right\}.$$

■

Die Restgliedabschätzungen für Kreis und Hyperbel

Für beide Probleme hat J.L.HAFNER 1981 untere Abschätzungen angegeben, siehe etwa [1], aus denen für die speziellen Restglieder Δ_K für den Kreis und Δ_H für die Hyperbel folgt

$$(27) \qquad \Delta_K = \Omega\left(x^{1/4}(\log x)^{1/4}\,(\log\log x)^{\frac{1}{4}\log 2 - \epsilon}\right), \ \epsilon > 0, \qquad \Delta_H = \Omega\left(x^{1/4}(\log x)^{1/4}\,(\log\log x)^{\frac{1}{4}(3+\log 4) - \epsilon}\right), \ \epsilon > 0 .$$

Für beide Probleme gilt außerdem wegen (20) : $\sharp\left\{G(f) \cap Z^2\right\} \ll x^{\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$.

Satz 1 liefert für das Kreisproblem von GAUSS mit (12) und (13) ,

$$\sum_{m \le \sqrt{x/2}} e\left(h\sqrt{x-m^2}\right) \ll h^{1/2}x^{1/4}, \quad \sqrt{x}\, D_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x-m^2}\right) \ll x^{1/3},$$

also die Exponentialsummenabschätzung und Zahlentheoretische Diskrepanz für den Kreis mit Radius $\sqrt{x}$, schließlich mit (25) oder (26) die Abschätzung

$$(28)\qquad \sum_{m \le \sqrt{x/2}} \psi\left(\sqrt{x-m^2}\right) \ll x^{\frac{5}{18}} \log x, \quad \frac{5}{18} = 0,2727\ldots .$$

Im Übersichtsartikel von W.G.NOWAK aus [7] wird erwähnt, dass CHOWLA und WALUM bereits auf dem Symposium der AMS 1965 äußerten, dass speziell für das Teilerproblem von DIRICHLET als beste Abschätzung des Restgliedes lediglich $x^{\frac{1}{4}+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, erwartet werden kann. Im Jahr 2003 erzielte HUXLEY für x den Exponenten $\frac{131}{416} = 0{,}314903\ldots$ mit der BOMBIERI-IWANIEC-MOZZOCHI Methode (Quelle: [6]), die er zur sogenannten "Diskrete HARDY- LITTLEWOOD Methode" verfeinerte. Seine Restgliedabschätzung für den Kreis $\xi^2+\eta^2 \le x$ (und für die Hyperbel, deren Restgliedabschätzung sich nur im Exponenten für den logarithmischen Faktor unterscheidet) mit

$$\Delta_K \ll x^{\frac{131}{416}} (\log x)^3, \quad \frac{131}{416} = 0,314903\ldots, \quad (3 = \text{Kleinstes Ganzes oberhalb des ermittelten Exponenten von } \log(x))$$

bedeutet im Sinne von Satz 1, dass die erzielte obere Schranke für Δ_K nichts weiter ist, als eine Abschätzung der Zahlentheoretischen Diskrepanz $MD_M(f(m))$ für $M=\sqrt{x/2}$, $f(m) = \sqrt{x-m^2}$.

Da in (23) die Beträge in der Betragssumme unabhängig voneinander abgeschätzt werden können, wählen wir jetzt statt der für (28) eingesetzten Zahlentheoretischen Diskrepanz die angegebene Abschätzung von HUXLEY, wir wählen also zur Anwendung von Satz 1 die Exponentialsummen-Abschätzung wie zuletzt, und für die Zahlentheoretische Diskrepanz den Wert

$$x^{\frac{131}{416}} (\log x)^3. \text{ Das ergibt mit Satz 1: } \sum_{m \le \sqrt{x/2}} \psi\left(\sqrt{x-m^2}\right) \ll x^{\frac{113}{416}} \log x, \quad \frac{113}{416} = 0,271634\ldots,$$

Unterstellt man, dass wegen (10) der HUXLEY-Abschätzung ein κ-Parameter zugeordnet werden kann, der sogar den Wert $\kappa = 1/2$ hat, so würde sich ergeben:

$$\sum_{m \le (x/2)^{1/2}} e\left(\sqrt{x-m^2}\right) \ll x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{185}{416}} (\log x)^{9/2}$$

$$\text{Mit Satz 1 wäre dann}\quad \Delta_K \ll x^{\frac{79}{312}} (\log x)^4, \quad \frac{79}{312} = 0,253205\ldots$$

Für das <u>Hyperbelproblem</u> von *D*IRICHLET ergibt sich analog mit dem Exponentenpaar $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$

$$\sum_{m \le \sqrt{x}} e\left(h\frac{x}{m}\right) \ll h^{2/7} x^{2/7}, \quad \sqrt{x}\, D_{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{m}\right) \ll x^{1/3}$$

$$(29)\qquad \sum_{m \le \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) \ll x^{\frac{8}{27}} \log x, \quad \frac{8}{27} = 0,296296\ldots$$

$$\text{und mit } MD_M = x^{\frac{131}{416}} (\log x)^3 \text{ ergibt sich über Satz 1: } \sum_{m \le \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) \ll x^{\frac{547}{1872}} (\log x)^{6/9}, \quad \frac{547}{1872} = 0,2922008\ldots$$

Für das Hyperbelproblem von DIRICHLET ist der x-Exponent 1/4 nicht im Rahmen der Theorie der Exponentenpaare zu erreichen: Ist (κ,λ) ein Exponentenpaar, so ist es optimal für $2\kappa = \lambda$, wie für $(2/7, 4/7)$, Solche Exponentenpaare findet man durch Anwendung des sogenannten **C** - Prozesses (siehe etwa [1]) auf ein Exponentenpaar (k, ℓ) mit $2k < \ell$ und dem Exponentenpaar (1/2, 1/2) oder einem anderen Exponentenpaar (κ, λ) aus der Halbebene $2k > \ell$, indem man geometrisch gesprochen die Strecke zwischen den Exponentenpaaren zum Schnitt bringt mit jener Geraden durch $(0, 0)$, die den Anstieg 2 hat: Gesucht ist also zunächst ein Exponentenpaar (k, ℓ) mit $2k < \ell$ und ℓ möglichst nahe bei 1/2, $\ell \ge 1/2$. Hierzu ein <u>Beispiel</u>:

Mit den Prozessen **A** (Schwarzsche Ungleichung) und **B** (Transformation, geometrisch die Geradenspiegelung an $\eta = \xi + 1/2$), ergibt sich $\mathbf{BABAB}(A)^2(1/2, 1/2) = \left(\frac{11}{44}, \frac{26}{44}\right)$. Durch Anwendung von **C** mit (1/2, 1/2) ergibt sich das Exponentenpaar $(\kappa,\lambda) = \left(\frac{15}{52}, \frac{30}{52}\right)$. Damit ergibt sich aber für die Hyperbel wegen $\frac{15}{52} > \frac{2}{7}$ keine Verbesserung der Abschätzung für die Exponentialsumme und folglich auch nicht für (29).

Wählt man für den **C**-Prozess $\left(\frac{11}{44}, \frac{26}{44}\right)$ und statt (1/2, 1/2) das Exponentenpaar $\mathbf{B}A^2\mathbf{B}A^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{40}, \frac{22}{40}\right)$ aus der Halbebene $2k > \ell$, so liefert **C** das Exponentenpaar $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, also auch keine Verbesserung. Im Rahmen der Theorie der Exponentenpaare ist (29) möglicherweise nicht zu unterbieten.

In Analogie wird in [6] erwähnt, dass für die Zahlentheoretische Diskrepanz $\mathrm{M}D_M$ für Kreis und Hyperbel bei Anwendung der Diskreten Hardy-Littlewood Methode $\inf\left\{\alpha\,;\,\Delta \ll x^{\alpha}(\log x)^{\beta}\right\} = \frac{5}{16}$ vermutet wird. Unterstellt man auch hier, dass beim Nachweis von

$$\Delta \approx \mathrm{MD}_M \ll x^{\frac{5}{16}}(\log x)^3 \text{ der Parameter } \kappa = \frac{1}{2} \text{ zuständig ist,}$$

so erhält man mit Satz 1 für Kreis und Hyperbel die Abschätzung

$$\Delta_K = \Delta_H \ll x^{\frac{1}{4}}(\log x)^4 .$$

Literaturhinweise

[1] E. Krätzel, Lattice Points, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988

[2] E. Krätzel, Analytische Funktionen in der Zahlentheorie, Teubner-Texte zur Mathematik, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden 2000

[3] E. Hlawka, Theorie der Gleichverteilung, Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1979

[4] K. Chandrasekharan, Einführung in die analytische Zahlentheorie, Springer-Verlag, 1966

[5] F. Toenniessen, Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum 2010

[6] A. Ivić, E. Krätzel, M. Kühleitner, W.G. Nowak, Lattice points in large regions and related arithmetic functions: Recent developments in a very classic topic, arXiv:math/0410522v1 [math.NT] 25 Oct 2004

[7] W.G. Nowak, Einige Beiträge zur Theorie der Gitterpunkte, Lecture Notes in Mathematics 1114, Zahlentheoretische Analysis, Wiener Seminarberichte 1980-82, Springer-Verlag

[8] F.Fricker, Einführung in die Gitterpunktlehre, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1982

[9] E. Krätzel, Zahlentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1981