

## NICHTLINEARE ANALYSE VON VERBUNDQUERSCHNITTEN – EIN NEUER ALTERNATIVER WEG

E. Raue

*Bauhaus-Universität Weimar*  
*Institut für Konstruktiven Ingenieurbau. Professur Massivbau I*  
E-mail: erich.raue@bauing.uni-weimar.de

**Keywords:** non-linear analysis of cross-sections, composite cross-sections, non-linear optimisation, cross-section capacity.

**Abstract.** *A new approach to the non-linear analysis of cross-sections loaded by normal forces and bending moments is presented in the paper. The mechanical model is based on the LAGRANGE principle of minimum of total potential energy. Deformations, stresses and limit load parameters are obtained by solving a non-linear optimisation problem. The mathematical model is independent of the specifics of material. In addition to the stress strain relation and the specific strain energy  $W(\epsilon)$  two further functions  $F(\epsilon)$  and  $\Phi(\epsilon)$  are introduced to describe the material behaviour. Thus cracks in concrete, non-linearity of material etc. can be taken into account without basic modification of the numerical algorithm. For polygonal cross-sections the GAUSS' integral theorem is used. Numerical solutions of the non-linear optimisation problems can be found by application of standard software. Thus the analysis of reinforced concrete cross-sections or more general composite cross-sections with non-linear behaviour of material is as simple as in the case of linear elasticity. The application of the method is demonstrated for polygonal cross-sections. Pre-stresses or pre-strains can easily be included in the mathematical model.*

# 1 EINFÜHRUNG

Die Modellbildung des Tragverhaltens von Verbundquerschnitten basiert im Allgemeinen auf der Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen, der Verträglichkeit der Formänderungen am Gesamtquerschnitt und der Spannungs-Dehnungsbeziehungen der einzelnen Querschnittsanteile. Sofern sich die einzelnen Bereiche des Verbundquerschnitts linear-elastisch verhalten, ist die Spannungs- und Dehnungsanalyse eine elementare Aufgabe der Festigkeitslehre. Bei nichtlinearem Materialverhalten sind in der Regel numerische Methoden zur Problemlösung erforderlich. Es ist üblich, die Querschnitte je nach den Gegebenheiten der Querschnittsgeometrie und der Beanspruchung in Streifen oder Fasern zu zerlegen und numerische Lösungen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente zu ermitteln, wobei häufig nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen nur approximativ erfasst werden. Nachfolgend wird eine alternative Lösungsstrategie auf der Basis der mathematischen Optimierung gezeigt, die es ermöglicht, den Deformations- und Spannungszustand bzw. die Grenztragfähigkeit von Querschnitten mit beliebigem physikalisch nichtlinearem Verhalten zu ermitteln, ohne modellbedingt den Querschnitt zu diskretisieren und die Spannungs-Dehnungsbeziehungen zu modifizieren.

## 2 BERECHNUNGSMODELL

### 2.1 Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials für Stabquerschnitte

Gegenüber herkömmlichen Berechnungsmethoden eröffnet die Formulierung des Problems mit Hilfe des LAGRANGE-Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials einen effektiven alternativen Lösungsweg. Die auf dieser Grundlage gewonnene kinematische Problemformulierung als Optimierungsaufgabe bietet einige erhebliche Vorteile [1], [2].

Für einen Stabquerschnitt, der in der  $y,z$ -Ebene einen Bereich  $B$  einnimmt, der durch die Kurve  $K$  berandet ist, lässt sich entsprechend dem LAGRANGE-Prinzip folgende Extremalaufgabe formulieren:

*Von allen kinematisch zulässigen Formänderungen eines Querschnitts treten diejenigen ein, für die das Gesamtpotential  $\Pi^Q$  ein Minimum wird.*

$$\Pi^Q = \Pi_i^Q + \Pi_a^Q \rightarrow \text{Minimum} \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet  $\Pi_i^Q$  die *Formänderungsenergie* im Querschnitt und  $\Pi_a^Q$  die *potentielle Energie der am Querschnitt angreifenden Schnittgrößen (äußeren Kräfte)*.

Die Formänderungen sind *kinematisch zulässig*, wenn sie die *Kompatibilitätsbedingungen* erfüllen und vorgegebene *Restriktionen* nicht verletzen.

### 2.2 Formänderungen und Verträglichkeitsbedingungen

Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte schubstarr und wölbfrei sind oder näherungsweise als solche angenommen werden können. Für Querschnitte, die aus mehreren Querschnittsanteilen mit unterschiedlichen Materialkenngrößen bestehen, wird angenommen, dass sie unverschieblich miteinander verbunden sind.

Unter den vorgenannten Voraussetzungen bleiben Querschnitte normal zur Stabachse auch bei Verformung eben. Die Dehnung  $\varepsilon_x$ , die sich infolge der Normalkraft  $N$  und der Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  einstellt, ist somit über den Querschnitt linear verteilt und lässt sich als lineare Funktion der kartesischen Koordinaten  $y$  und  $z$  in der Form

$$\varepsilon_x(y, z) = \varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + \kappa_y y + \kappa_z z \quad (2)$$

beschreiben, wobei im Folgenden zur Vereinfachung der Index x weggelassen wird. Die Dehnungsebene nach Gl. (2) ist durch drei Parameter bestimmt, durch die Dehnung  $\varepsilon_0 = \varepsilon(y=0, z=0)$  im Koordinatenursprung sowie die Querschnittsverdrehungen  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$  in y- bzw. z-Richtung. Diese drei Parameter stellen die Problemvariablen dar.

Zusätzlich zum y,z -Koordinatensystem wird ein Koordinatensystem  $\eta, \zeta$  mit dem gleichen Koordinatenursprung eingeführt. Die Achse  $\zeta$  hat die Richtung des Gradienten  $\text{grad } \varepsilon$ , d.h. die Richtung der Normalen der Niveaulinien  $\varepsilon = \text{const.}$  Der Winkel  $\varphi$  der Drehung zwischen den Koordinatenachsen y, z und  $\eta, \zeta$  ergibt sich aus

$$\cos \varphi = \frac{\kappa_z}{\kappa} \quad \text{bzw.} \quad \sin \varphi = -\frac{\kappa_y}{\kappa} \quad \text{mit } \kappa = \sqrt{\kappa_y^2 + \kappa_z^2} \neq 0. \quad (3)$$

Zwischen den Koordinaten y, z und  $\eta, \zeta$  gelten die Transformationsbeziehungen

$$\eta = y \cos \varphi + z \sin \varphi = \frac{\kappa_z}{\kappa} y - \frac{\kappa_y}{\kappa} z, \quad \zeta = -y \sin \varphi + z \cos \varphi = \frac{\kappa_y}{\kappa} y + \frac{\kappa_z}{\kappa} z \quad (\kappa \neq 0) \quad (4)$$

bzw.

$$y = \eta \cos \varphi - \zeta \sin \varphi = \frac{\kappa_z}{\kappa} \eta + \frac{\kappa_y}{\kappa} \zeta, \quad z = \eta \sin \varphi + \zeta \cos \varphi = -\frac{\kappa_y}{\kappa} \eta + \frac{\kappa_z}{\kappa} \zeta \quad (\kappa \neq 0). \quad (5)$$

Im  $\eta, \zeta$ - Koordinatensystem ist die Dehnung  $\varepsilon$  durch die Gleichung

$$\varepsilon = \varepsilon(\zeta) = \varepsilon_0 + \kappa \zeta \quad (6)$$

bestimmt. Dementsprechend ist

$$\zeta = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\kappa} \quad (\kappa \neq 0). \quad (7)$$

Die Betrachtung im Koordinatensystem  $\eta, \zeta$  entfällt für  $\kappa_y = \kappa_z = \kappa = 0$ . In diesem Fall ist die Dehnung

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad (8)$$

über den Querschnitt konstant.

### 2.3 Materialgesetz

Unter der Wirkung der Längskraft N und der Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  entstehen im Stabquerschnitt Normalspannungen  $\sigma_x = \sigma$ . Der Zusammenhang zwischen der Normalspannung  $\sigma$  und der Dehnung  $\varepsilon$  wird durch die Arbeitslinie

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (9)$$

beschrieben.

In [1] wurde gezeigt, dass sich die Aufstellung des Berechnungsmodells wesentlich vereinfachen lässt, wenn außer der Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Gl. (1) die Funktionen  $W(\varepsilon)$ ,  $F(\varepsilon)$  und  $\Phi(\varepsilon)$  eingeführt werden, die als partikuläre Integrale definiert sind

$$W = W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad F = F(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon W(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \Phi = \Phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (10)$$

Jede dieser Funktionen für sich bildet das Materialverhalten eindeutig ab und kann neben der Spannungs-Dehnungsbeziehung als verallgemeinerte Beschreibung des Materialverhaltens verwendet werden. Andererseits gelten die Beziehungen

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{dW}{d\varepsilon}, \quad W(\varepsilon) = \frac{dF}{d\varepsilon}, \quad F(\varepsilon) = \frac{d\Phi}{d\varepsilon}. \quad (11)$$

Bei linear-elastischem Material ist das Spannungs-Dehnungsverhalten durch den Elastizitätsmodul  $E$  bestimmt. Entsprechend Gl. (10) ergibt sich

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad W(\varepsilon) = \frac{E}{2}\varepsilon^2, \quad F(\varepsilon) = \frac{E}{6}\varepsilon^3, \quad \Phi(\varepsilon) = \frac{E}{24}\varepsilon^4. \quad (12)$$

Bei qualitativ unterschiedlichen Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Druck und Zug wird das Materialgesetz in Abhängigkeit von Dehnungsbereichen definiert. Wenn das Material unter Zug keine Spannungen aufnehmen kann, gilt für  $\varepsilon > 0$ :  $\sigma(\varepsilon) = 0$ ,  $W(\varepsilon) = 0$ ,  $F(\varepsilon) = 0$  und  $\Phi(\varepsilon) = 0$ .

Material mit nichtlinearem Verhalten im Druckbereich  $\varepsilon \leq 0$  lässt sich unter Verwendung ganz-rationaler Funktionen durch die Beziehungen

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_{cl} \sum_{v=1}^n a_v \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^v, \quad F(\varepsilon) = \sigma_{cl} \varepsilon_{cl}^2 \sum_{v=1}^n \frac{a_v}{(v+1)(v+2)} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^{v+2}, \quad (13)$$

$$W(\varepsilon) = \sigma_{cl} \varepsilon_{cl} \sum_{v=1}^n \frac{a_v}{(v+1)} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^{v+1}, \quad \Phi(\varepsilon) = \sigma_{cl} \varepsilon_{cl}^3 \sum_{v=1}^n \frac{a_v}{(v+1)(v+2)(v+3)} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^{v+3} \quad (14)$$

$$\text{mit } \sum_{v=1}^n a_v = 1 \quad (15)$$

beschreiben.

Für eine multilineare Arbeitslinie sind die Beziehungen in Tafel 1 zusammengestellt. Für Querschnittsanteile aus Beton kann Tafel 2 verwendet werden, wenn die Mitwirkung des Betons auf Zug vernachlässigt werden kann. Die Parameter  $\varepsilon_{cl}$ ,  $\varepsilon_{tl}$ , ... stellen die Intervallgrenzen und  $\sigma_{cl}$ ,  $\sigma_{tl}$ ,  $W_{cl}$ ,  $W_{tl}$ , ... die zugehörigen Funktionswerte dar. Dem Exponenten  $n = 1$  entspricht ein linearer Verlauf der Arbeitslinie.

Bei praktischen Berechnungen reicht eine Unterteilung der Arbeitslinie für Zug und Druck in jeweils drei Bereiche in den meisten Fällen aus. Bei abfallenden Ästen in der Arbeitslinie sind keine besonderen Vorkehrungen zu treffen. Es werden die gleichen Ansätze verwendet. Bei Querschnitten, die aus mehreren Querschnittsanteilen  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) mit unterschiedlichem Materialverhalten bestehen, sind für jeden Querschnittsanteil  $j$  aus der Spannungs-Dehnungsbeziehung  $\sigma_j(\varepsilon)$  die Funktionen  $W_j(\varepsilon)$ ,  $F_j(\varepsilon)$  und  $\Phi_j(\varepsilon)$  zu ermitteln.

**Tafel 1: Multilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung (Stahl)**

| Funktion   | Bereich   | Parameter  |  |
|--|---|--|--|
| $\sigma_{c1} + E_{c2}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})$ | $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1}$  | $E_{c2} = \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{c1}}{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1}}$ |  |
| $\sigma(\varepsilon)$                                  | $E_{c1}\varepsilon$   | $\varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq 0$                                       | $E_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}}$                                  |
|  | $E_{t1}\varepsilon$   | $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t1}$                                       | $E_{t1} = \frac{\sigma_{t1}}{\varepsilon_{t1}}$                                  |
|  | $\sigma_{t1} + E_{t2}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})$  | $\varepsilon_{t1} < \varepsilon \leq \varepsilon_{t2}$                           | $E_{t2} = \frac{\sigma_{t2} - \sigma_{t1}}{\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1}}$ |
| $w(\varepsilon)$                                       | $w_{c1} + \sigma_{c1}(\varepsilon - \varepsilon_{c1}) + \frac{E_{c2}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^2$   | $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1}$                           | $w_{c1} = w(\varepsilon_{c1})$   |
|  | $\frac{E_{c1}}{2}\varepsilon^2$   | $\varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq 0$                                       |  |
|  | $\frac{E_{t1}}{2}\varepsilon^2$   | $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t1}$                                       |  |
|  | $w_{t1} + \sigma_{t1}(\varepsilon - \varepsilon_{t1}) + \frac{E_{t2}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})^2$   | $\varepsilon_{t1} < \varepsilon \leq \varepsilon_{t2}$                           | $w_{t1} = w(\varepsilon_{t1})$   |
| $F(\varepsilon)$                                       | $F_{c1} + w_{c1}(\varepsilon - \varepsilon_{c1}) + \frac{\sigma_{c1}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^2 + \frac{E_{c2}}{6}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^3$  | $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1}$                           | $F_{c1} = F(\varepsilon_{c1})$   |
|  | $\frac{E_{c1}}{6}\varepsilon^3$   | $\varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq 0$                                       |  |
|  | $\frac{E_{t1}}{6}\varepsilon^3$   | $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t1}$                                       |  |
|  | $F_{t1} + w_{t1}(\varepsilon - \varepsilon_{t1}) + \frac{\sigma_{t1}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})^2 + \frac{E_{t2}}{6}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})^3$  | $\varepsilon_{t1} < \varepsilon \leq \varepsilon_{t2}$                           | $F_{t1} = F(\varepsilon_{t1})$   |
|  | $\Phi_{c1} + F_{c1}(\varepsilon - \varepsilon_{c1}) + \frac{w_{c1}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^2 + \frac{\sigma_{c1}}{6}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^3 + \frac{E_{c2}}{24}(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^4$ | $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1}$                           | $\Phi_{c1} = \Phi(\varepsilon_{c1})$   |
| $\Phi(\varepsilon)$                                    | $\frac{E_{c1}}{24}\varepsilon^4$  | $\varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq 0$                                       |  |
|  | $\frac{E_{t1}}{24}\varepsilon^4$  | $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t1}$                                       |  |
|  | $\Phi_{t1} + F_{t1}(\varepsilon - \varepsilon_{t1}) + \frac{w_{t1}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})^2 + \frac{\sigma_{t1}}{6}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})^3 + \frac{E_{t2}}{24}(\varepsilon - \varepsilon_{t1})^4$ | $\varepsilon_{t1} < \varepsilon \leq \varepsilon_{t2}$                           | $\Phi_{t1} = \Phi(\varepsilon_{t1})$   |

**Tafel 2: Spannungs-Dehnungsbeziehung mit nichtlinearem Druckbereich (Beton)**

| Funktion  | Bereich  |
|---|--|
| $\sigma_{cl} + E_{c2}(\varepsilon - \varepsilon_{cl})$  | $\varepsilon < \varepsilon_{cl}$   |
| $\sigma(\varepsilon) = \sigma_{cl} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^n \right)$  | $\varepsilon_{cl} \leq \varepsilon \leq 0$   |
| 0   | $\varepsilon > 0$  |
| $w_{cl} + \sigma_{cl}(\varepsilon - \varepsilon_{ccl}) + \frac{E_{c2}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{ccl})^2$   | $\varepsilon < \varepsilon_{cl}$   |
| $w(\varepsilon) = \varepsilon_{cl} \sigma_{cl} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} - \frac{1}{n+1} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^{n+1} \right) \right]$  | $\varepsilon_{cl} \leq \varepsilon \leq 0$   |
| 0   | $\varepsilon > 0$  |
| $F_{cl} + w_{cl}(\varepsilon - \varepsilon_{cl}) + \frac{\sigma_{cl}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{cl})^2 + \frac{E_{c2}}{6}(\varepsilon - \varepsilon_{cl})^3$  | $\varepsilon < \varepsilon_{cl}$   |
| $F(\varepsilon) = \varepsilon_{cl}^2 \sigma_{cl} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^2 - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} - \frac{1}{n+2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^{n+2} \right) \right] \right\}$   | $\varepsilon_{cl} \leq \varepsilon \leq 0$   |
| 0   | $\varepsilon > 0$  |
| $F_{cl}(\varepsilon - \varepsilon_{cl}) + \frac{w_{cl}}{2}(\varepsilon - \varepsilon_{cl})^2 + \frac{\sigma_{cl}}{6}(\varepsilon - \varepsilon_{cl})^3 + \frac{E_{c2}}{24}(\varepsilon - \varepsilon_{cl})^4$   | $\varepsilon < \varepsilon_{cl}$   |
| $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon_{cl}^3 \sigma_{cl} \left\{ \frac{1}{6} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^3 - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^2 - \frac{1}{n+2} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} - \frac{1}{n+3} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}} \right)^{n+3} \right) \right] \right] \right\}$ | $\varepsilon_{cl} \leq \varepsilon \leq 0$   |
| 0   | $\varepsilon > 0$  |
| Parameter :   | $E_{c2} = \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{cl}}{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{cl}}, \quad w_{cl} = \frac{n}{n+1} \varepsilon_{cl} \sigma_{cl}, \quad F_{cl} = \frac{n}{2(n+2)} \varepsilon_{cl}^2 \sigma_{cl}, \quad \Phi_{cl} = \frac{n}{6(n+3)} \varepsilon_{cl}^3 \sigma_{cl}$ |

## 2.4 Formänderungsenergie

Die Formänderungsenergie  $\Pi_i^Q$  für das abgeschlossene Gebiet B in der y,z -Ebene ergibt sich aus dem Doppelintegral

$$\Pi_i^Q = \iint_B W(y,z) dydz = \iint_B W[\varepsilon(y,z)] dydz. \quad (16)$$

mit  $\varepsilon(y,z)$  nach Gl. (2).

Am Querschnitt stellen die Funktionen  $W[\varepsilon(y,z)] = W(y,z)$ ,  $F[\varepsilon(y,z)] = F(y,z)$  und  $\Phi[\varepsilon(y,z)] = \Phi(y,z)$  zweidimensionale Skalarfelder dar [3]. Um einige für die weitere Problembehandlung relevante Besonderheiten dieser Skalarfelder zu beleuchten, wird das zweidimensionale Vektorfeld

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_y(y,z) \\ V_z(y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_y F(y,z) \\ \kappa_z F(y,z) \end{bmatrix} \quad (17)$$

betrachtet.

Aus

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \kappa_z \frac{\partial F}{\partial y} - \kappa_y \frac{\partial F}{\partial z} = \kappa_z \frac{dF}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \kappa_y \frac{dF}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \kappa_z \frac{dF}{d\varepsilon} \kappa_y - \kappa_y \frac{dF}{d\varepsilon} \kappa_z = 0 \quad (18)$$

folgt

$$\text{rot} \vec{V} = 0. \quad (19)$$

Das Feld  $\vec{V}$  ist wirbelfrei. Gl. (19) ist notwendige und hinreichende Bedingung, dass  $\vec{V}$  ein konservatives Feld, ein Potentialfeld ist.

Betrachtet man den Gradienten des Skalarfeldes  $\Phi(y,z)$ ,

$$\text{grad} \Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_y F \\ \kappa_z F \end{bmatrix}, \quad (20)$$

ergibt sich

$$\text{grad} \Phi = \vec{V}, \quad (21)$$

d.h.  $\Phi(y,z)$  ist das Potential des Feldes  $\vec{V}$ .

Die Divergenz des Feldes  $\vec{V}$  ist

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \kappa_y \frac{\partial F}{\partial y} + \kappa_z \frac{\partial F}{\partial z} = \kappa_y^2 \frac{dF}{d\varepsilon} + \kappa_z^2 \frac{dF}{d\varepsilon} = \kappa^2 W(y,z). \quad (22)$$

Es gilt somit

$$\text{div grad} \Phi = \Delta \Phi(y,z) = \kappa^2 W(y,z). \quad (23)$$

Mit Gl. (22) wird Gl. (16) in die Form

$$\Pi_i^Q = \iint_B W(y, z) dy dz = \frac{1}{\kappa^2} \iint_B \left[ \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] dy dz = \frac{1}{\kappa^2} \iint_B \left[ \kappa_y \frac{\partial F}{\partial y} + \kappa_z \frac{\partial F}{\partial z} \right] dy dz. \quad (24)$$

gebracht.

Das Doppelintegral nach Gl. (24), das die Formänderungsenergie des Querschnitts beschreibt, lässt sich mit der Integralformel nach GAUSS umformen, d.h. in ein Kurvenintegral überführen. Nach der GAUSS'schen Integralformel gilt

$$\iint_B \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz = \oint_L (Y dy + Z dz). \quad (25)$$

Mit dem Ansatz

$$Y = -\frac{\kappa_z}{\kappa^2} F, \quad Z = \frac{\kappa_y}{\kappa^2} F \quad (26)$$

und

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\kappa_z}{\kappa^2} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\kappa_y}{\kappa^2} \frac{\partial F}{\partial y} \quad (27)$$

erhält man für die Formänderungsenergie

$$\Pi_i^Q = \iint_B W(y, z) dy dz = \frac{1}{\kappa^2} \iint_B \left[ \kappa_y \frac{\partial F}{\partial y} + \kappa_z \frac{\partial F}{\partial z} \right] dy dz = \oint_L \left( -\frac{\kappa_z}{\kappa^2} F dy + \frac{\kappa_y}{\kappa^2} F dz \right). \quad (28)$$

Bei Verbundquerschnitten wird die Formänderungsenergie  $\Pi_i$  des Querschnitts durch Summation der Anteile  $\Pi_{i,j}$  der Formänderungsenergie der einzelnen Querschnittsanteile  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )

$$\Pi_i^Q = \sum_{j=1}^m \Pi_{i,j}^Q \quad (29)$$

ermittelt.

Die Formänderungsenergie  $\Pi_{i,j}$  für den Querschnittsanteil  $j$  analog zu Gl.(16) erhält man durch Integration der spezifischen Formänderungsenergie  $W_j$  über den Bereich  $B_j$

$$\Pi_{i,j}^Q = \iint_{B_j} W_j(y, z) dy dz. \quad (30)$$

## 2.5 Potentielle Energie der äußeren Beanspruchungen

Der Querschnitt soll durch eine Längskraft  $N$  und die Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$ , die auf die Achsen  $y$  und  $z$  bezogen sind, beansprucht sein. Die zugehörigen Verformungen sind die Dehnung  $\varepsilon_0$  in der Achse  $z$  und die beiden Querschnittsverdrehungen  $\kappa_z$  und  $\kappa_y$ . Die potentielle Energie der äußeren Beanspruchungen beträgt

$$\Pi_a^Q = \Pi_a^Q(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = -(N\varepsilon_0 + M_y\kappa_z + M_z\kappa_y). \quad (31)$$

$\Pi_i^Q$  und  $\Pi_a^Q$  hängen von den gleichen Verformungsparametern ab.



## 2.6 Gesamtpotential und Extremalbedingung

Das Gesamtpotential beträgt für Verbundquerschnitte

$$\Pi^Q = \Pi_i^Q + \Pi_a^Q = \sum_{j=1}^m \Pi_{i,j}^Q(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) - (N\varepsilon_0 + M_y\kappa_z + M_z\kappa_y). \quad (32)$$

Entsprechend dem Prinzip von LAGRANGE ergibt sich folgende Extremalaufgabe ohne Nebenbedingungen:

$$\Pi^Q = \sum_{j=1}^m \Pi_{i,j}^Q(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) - (N\varepsilon_0 + M_y\kappa_z + M_z\kappa_y) \rightarrow \text{Minimum}. \quad (33)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen gehen nicht explizit in das Berechnungsmodell ein. Sie werden durch die Extremalbedingung erfüllt, denn die partiellen Ableitungen des Gesamtpotentials nach den Verformungsparametern stellen die Gleichgewichtsbedingungen dar

$$\frac{\partial \Pi^Q}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial \Pi_i^Q}{\partial \varepsilon_0} - N = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Q}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial \Pi_i^Q}{\partial \kappa_y} - M_z = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Q}{\partial \kappa_z} = \frac{\partial \Pi_i^Q}{\partial \kappa_z} - M_y = 0. \quad (34)$$

## 2.7 Grenzbeanspruchung

Ist nicht der Formänderungs- und Spannungszustand zu einer gegebenen Beanspruchung zu ermitteln, sondern ein Grenzbeanspruchungsparameter  $p$  unter Beachtung von Nebenbedingungen für die Dehnungen und Spannungen, kann folgende Extremalaufgabe formuliert werden:

*Zielfunktion*

$$p \rightarrow \text{Max} \quad (35)$$

*Nebenbedingungen*

$$\Pi(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z, p) = \Pi_i(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) = \Pi_i(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) - pN\varepsilon_0 - pM_y\kappa_z - pM_z\kappa_y \rightarrow \text{Min} \quad (36)$$

$$f_k(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) \leq g_k \quad (k = 1, \dots, r). \quad (37)$$

Statt der Nebenbedingung (10) können auch die Gleichgewichtsbedingungen verwendet werden. Es ergibt sich dann folgende Formulierung:

*Zielfunktion*

$$p \rightarrow \text{Max} \quad (38)$$

*Nebenbedingungen*

$$\frac{\partial \Pi^Q}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial \Pi_i^Q}{\partial \varepsilon_0} - N = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Q}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial \Pi_i^Q}{\partial \kappa_y} - M_z = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Q}{\partial \kappa_z} = \frac{\partial \Pi_i^Q}{\partial \kappa_z} - M_y = 0 \quad (39)$$

$$f_k(\varepsilon_0, \kappa_y, \kappa_z) \leq g_k \quad (k = 1, \dots, r). \quad (40)$$

Die Restriktionen  $f_k \leq g_k$  können sowohl Beschränkungen von Verformungen als auch Beschränkungen von Spannungen beinhalten.

### 3 ANWENDUNGEN

Im allgemeinen Beanspruchungsfall ist der Dehnungszustand bei einem „flächigen Querschnittsanteil“ durch 3 Parameter bestimmt.

Nach der Geometrie des Querschnittsanteils lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- punktförmige Querschnittsanteile,
- linienförmige Querschnittsanteile und
- flächige Querschnittsanteile.

Bei einem „punktförmigen“ Querschnittsanteil  $j$  kann angenommen werden, dass die Dehnungen über den Querschnittsanteil konstant sind, d.h. durch einen einzigen Parameter beschrieben werden. Unter dieser Voraussetzung sind auch die Spannung  $\sigma_j$  und die spezifische Formänderungsenergie  $W_j$  über das Gebiet  $B_j$  mit der Fläche  $A_j$  des Querschnittsanteils  $j$  konstant. Die zugehörige Formänderungsenergie beträgt dann

$$\Pi_{i,j}^Q = \iint_B W_j(y, z) dy dz = A_j W_j(y_j, z_j). \quad (41)$$

Hierbei sind  $y_j$  und  $z_j$  die Koordinaten des Schwerpunktes des Querschnittsanteils.

Einzelne Bewehrungsstäbe mit den Koordinaten  $y_{s,k}$  und  $z_{s,k}$  lassen sich als punktförmige Querschnittsanteile auffassen. Ihre Dehnung  $\varepsilon_{s,k} = \varepsilon_k$  ist durch Gl. (2) bestimmt und hängt von den Parametern  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$  der Dehnungsebene ab.

Bei einem „linienförmigen“ Querschnittsanteil  $j$  der Länge  $l_j$  und der konstanten Dicke  $t_j \ll l_j$  kann näherungsweise angenommen werden, dass die Dehnungen  $\varepsilon_j$  und damit auch die Spannungen  $\sigma_j$  und die spezifische Formänderungsenergie  $W_j$  über die Breite  $t_j$  des Querschnittsanteils konstant sind. Bei einem „geradlinigen“ Querschnittsanteil  $j$  sind die Dehnungen über die Elementlänge linear verteilt und durch zwei Parameter bestimmt. Werden als Parameter die Dehnungen  $\varepsilon_{j0}$  und  $\varepsilon_{j1}$  in den Randpunkten  $j_0$  und  $j_1$  mit den Koordinaten  $y_{j0}$ ,  $z_{j0}$  und  $y_{j1}$ ,  $z_{j1}$  gewählt, ergibt sich

$$\Pi_{ij}^Q = \begin{cases} \frac{\Delta F_j}{\Delta \varepsilon_j} A_j & (\Delta \varepsilon_j \neq 0) \\ W_{jm} A_j & (\Delta \varepsilon_j = 0). \end{cases} \quad (42)$$

Hierbei ist  $A_j = t_j l_j$  die Fläche des Querschnittsanteils  $j$ .

Die Beziehungen für flächige Querschnittsanteile lassen sich für die numerische Analyse weiter aufbereiten, wenn die Berandung abschnittsweise geradlinig ist.

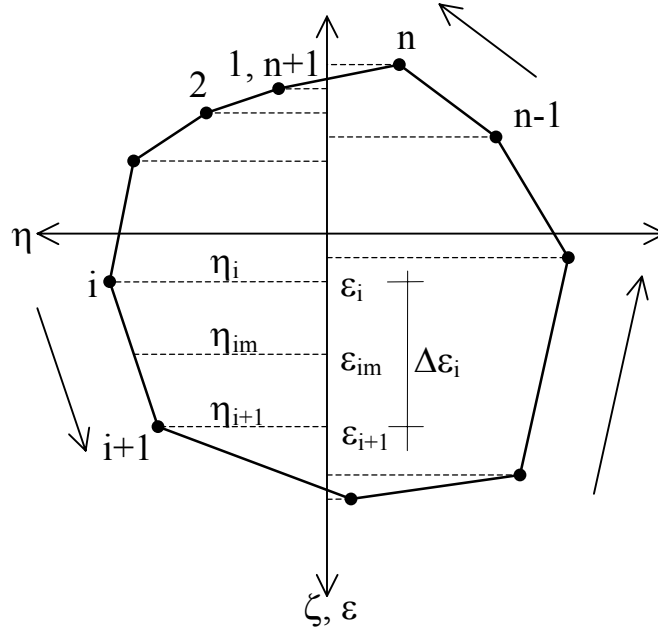
Für den polygonal berandeten Querschnittsanteil  $j$  mit den Eckpunkten  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wird das Kurvenintegral über  $L_j$  in

$$\Pi_{i,j}^Q = \oint_{L_j} \left( -\frac{\kappa_z}{\kappa^2} F_j dy + \frac{\kappa_y}{\kappa^2} F_j dz \right) = - \sum_{i=1}^n \int_{(P_i)}^{(P_{i+1})} \frac{\kappa_z}{\kappa^2} F_j dy + \sum_{i=1}^n \int_{(P_i)}^{(P_{i+1})} \frac{\kappa_y}{\kappa^2} F_j dz \quad (43)$$

überführt.

Für jeden einzelnen geradlinigen Abschnitt  $i$  gilt

$$dy = \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon \quad \text{und} \quad dz = \frac{\Delta z_i}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon. \quad (44)$$



**Bild 1: Polygonaler Querschnitt – polygonal cross-section**

Hiermit ergibt sich aus Gl. (43) für den Abschnitt i

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j,i}^Q &= \frac{1}{\kappa^2} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \left( -\kappa_z \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} F_j(\varepsilon) d\varepsilon + \kappa_y \frac{\Delta z_i}{\Delta \varepsilon_i} F_j(\varepsilon) d\varepsilon \right) = \\ &= \frac{1}{\kappa \Delta \varepsilon_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \left( -\frac{\kappa_z}{\kappa} \Delta y_i + \frac{\kappa_y}{\kappa} \Delta z_i \right) F_j(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= -\frac{\Delta \eta_i}{\kappa \Delta \varepsilon_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} F_j(\varepsilon) d\varepsilon = -\frac{\Delta \eta_i}{\kappa \Delta \varepsilon_i} [\Phi_j]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} = -\frac{1}{\kappa} \Delta \eta_i \frac{\Delta \Phi_{j,i}}{\Delta \varepsilon_i} \quad (\kappa \neq 0, \Delta \varepsilon_i \neq 0). \end{aligned} \quad (45)$$

Wenn  $\kappa \neq 0$  und  $\Delta \varepsilon_i = 0$  ist der Grenzwert

$$\lim_{\Delta \varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_{j,i}}{\Delta \varepsilon_i} = F_{j,im} \quad (46)$$

zu betrachten. Der Anteil der Formänderungsenergie für den Abschnitt i beträgt dann

$$\Pi_{i,j,i}^Q = -\frac{1}{\kappa} \Delta \eta_i F_{im} = -\frac{1}{\kappa} \Delta(\eta F)_i \quad (\kappa \neq 0, \Delta \varepsilon_i = 0). \quad (47)$$

Für  $\kappa = 0$  ist die Dehnung  $\varepsilon = \varepsilon_0$  und somit auch die spezifische Formänderungsenergie  $W_j = W_{j0}$  über den Querschnittsanteil j konstant und

$$\Pi_{i,j,i}^Q = \iint_{B_j} W_j dydz = W_j \iint_{B_{j0}} dydz \quad (\kappa = 0) \quad (48)$$

Mit der Sektorformel nach GAUSS erhält man

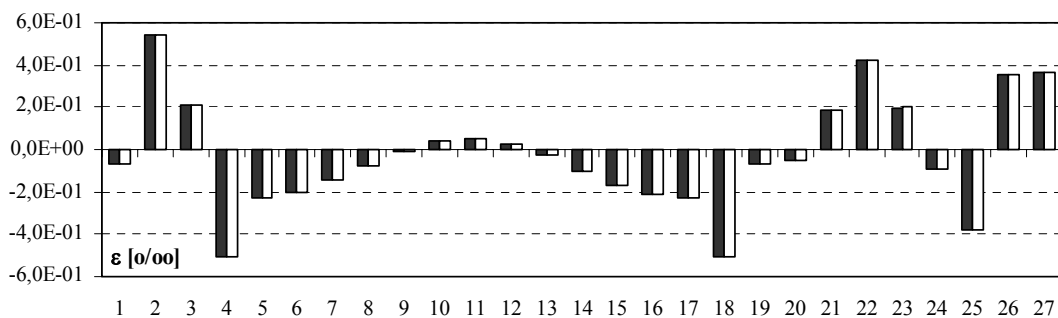
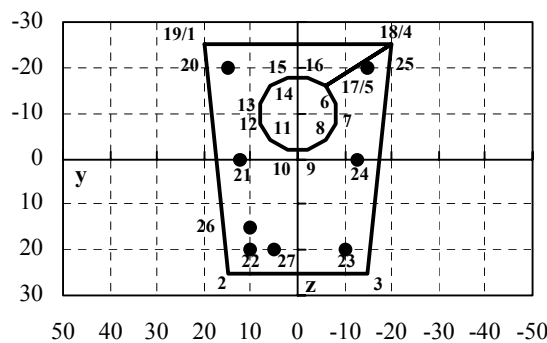
$$\Pi_{i,j}^Q = W_{j0} \iint_{B_j} dydz = \frac{W_{j0}}{2} \oint_{L_j} (ydz - zdy) = \frac{W_{j0}}{2} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \quad (\kappa = 0). \quad (49)$$

Für den polygonalen Querschnittsanteil j ergibt sich somit die Formänderungsenergie zu

$$\Pi_{i,j}^Q = \sum_{i=1}^m \Pi_{i,j,i}^Q \quad (50)$$

mit

$$\Pi_{i,j,i}^Q = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa} \Delta \eta_i \frac{\Delta \Phi_{j,i}}{\Delta \varepsilon_i} & (\kappa \neq 0, \quad \Delta \varepsilon_i \neq 0) \\ -\frac{1}{\kappa} \Delta (\eta F_j)_i & (\kappa \neq 0, \quad \Delta \varepsilon_i = 0) \\ \frac{W_{j0}}{2} (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) & (\kappa = 0). \end{cases} \quad (51)$$



**Bild 2: Stahlbeton-Querschnitt nach [3] - Reinforced cross-section**

Bild 2 zeigt einen Stahlbetonquerschnitt, der in [4] analysiert wurde. Der Vergleich der nach der vorgestellten Methode berechneten Dehnungswerte mit denen nach [4] zeigt völlige Übereinstimmung.

## 4 SCHLUSSFOLGERUNGEN

Der Vorteil der dargestellten alternativen Berechnungsmethode besteht darin, dass bei der Aufstellung des Berechnungsmodells keine Näherungen in Bezug auf die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen erforderlich sind. Materialgesetze mit abfallendem Ast oder schlagartiges Versagen können in das Berechnungsmodell einbezogen werden, ohne den Berechnungsalgorithmus zu modifizieren. Normenspezifische Ansätze zur Beschreibung des Materialverhaltens lassen sich problemlos berücksichtigen.

Es bedarf keinerlei Pfadverfolgungsstrategien oder sukzessiver Eintragung von Beanspruchungssinkrementen, wie dies bei der Lösung physikalisch nichtlinearer Probleme nach der Methode der finiten Elemente üblich ist. Alle Iterationen, die für die numerische Lösung erforderlich sind, werden in das mathematische Instrumentarium, d.h. in den „Solver“ verlegt.

Bei polygonalen Querschnitten sind die Berechnungsansätze exakt. Über die Abgrenzung der Querschnittsbereiche mit unterschiedlichen Materialeigenschaften hinaus ist weder eine Zerlegungen der Querschnitte in Streifen bzw. Fasern noch eine andersartige Diskretisierung erforderlich. Sollen Querschnitte mit nichtlinearen Abschnitten der Berandung berechnet werden, so ist es erforderlich, diese durch einen Polygonzug zu approximieren. Damit verbundene Ungenauigkeiten in der Erfassung der Randkurve sind dann zwar unvermeidlich, lassen sich aber durch eine entsprechend große Anzahl von zwischengeschalteten Punkten auf der Randkurve in gewünschten Grenzen halten.

Da die numerische Lösung über ein Optimierungsproblem in der kinematischen Formulierung gewonnen wird, bieten die Gleichgewichtsbedingungen die Möglichkeit der unabhängigen Kontrolle der berechneten Ergebnisse und der Beurteilung der Einhaltung von Fehler-schranken bei der numerischen Lösung.

Je nach Aufgabenstellung führt das vorgestellte Berechnungsmodell auf nichtlineare Optimierungsprobleme mit oder ohne Nebenbedingungen. Unter der Annahme, dass die Stabquerschnitte bei Verformung eben bleiben, ergeben sich im allgemeinen Fall nur drei Problemvariablen. Bei einfach symmetrischen Querschnitten unter einachsiger Beanspruchung reduziert sich die Anzahl auf zwei. Die numerische Lösung kann bereits mit der im Allgemeinen verfügbaren Standardsoftware (MS EXCEL, MATLAB) realisiert werden.

## REFERENCES

- [1] E. Raue, Nichtlineare Querschnittsanalyse als Optimierungsproblem. *Bautechnik*, **82**, Heft 11, 796-809, 2005.
- [2] E. Raue, Non-linear analysis of reinforced concrete cross-sections by non-linear optimisation. *Computational Modelling of Concrete Structures*, EURO-C 2006, 803-808, London: Balkema, UK, 2006.
- [3] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*, Thun und Frankfurt am Main: Verlag H. Deutsch, 2001.
- [4] D. Busjaeger, U. Quast, Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft (Programm MASQUE). *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, **415**, Berlin, Köln: Beuth Verlag 1990.