

STOCHASTISCHE ANALYSE VON STAHLBETONBALKEN IM GRENZZUSTAND DER ADAPTION UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER STEIFIGKEITSDEGRADATION

M. Broßmann*, K.-H. Müller

* *Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Marienstraße 13, 99421 Weimar
marko.broszmann@bauing.uni-weimar.de*

Stichwörter: Stahlbeton, Balken, physikalisch nichtlineares Tragverhalten, Steifigkeitsdegradation, adaptive Grenzlast, Versagenswahrscheinlichkeit, mathematische Optimierung

Kurzfassung: Am Beispiel eines 3-feldrigen Durchlaufträgers wird die Versagenswahrscheinlichkeit von wechselnd belasteten Stahlbetonbalken bezüglich des Grenzzustandes der Adaption (Einspielen, shakedown) untersucht. Die Adaptionsanalyse erfolgt unter Berücksichtigung der beanspruchungsabhängigen Degradation der Biegesteifigkeit infolge Rissbildung. Die damit verbundene mechanische Problemstellung kann auf die Adaptionsanalyse linear elastisch – ideal plastischer Balkentragwerke mit unbekannter aber begrenzter Biegesteifigkeit zurückgeführt werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird unter Berücksichtigung stochastischer Tragwerks- und Belastungsgrößen berechnet. Tragwerkeigenschaften und ständige Lasten gelten als zeitunabhängige Zufallsgrößen. Zeitlich veränderliche Lasten werden als nutzungsdauerbezogene Extremwerte POISSONScher Rechteck-Pulsprozesse unter Berücksichtigung zeitlicher Überlagerungseffekte modelliert, so dass die Versagenswahrscheinlichkeit ebenfalls eine nutzungsdauerbezogene Größe ist. Die mechanischen Problemstellungen werden numerisch mit der mathematischen Optimierung gelöst. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird auf statistischem Weg mit der Monte-Carlo-Methode geschätzt.

1 PROBLEMSTELLUNG

In den aktuellen Normen zu Entwurf und Bemessung von Stahlbetonkonstruktionen wird die Berücksichtigung nichtlinearen Tragverhaltens wesentlich stärker akzentuiert als in den entsprechenden Vorgängernormen. Die dadurch gegebene Möglichkeit, im Rahmen der Tragwerksplanung umfangreichere Schnittgrößenumlagerungen zu berücksichtigen, erfordert die Definition entsprechender Grenzlaskriterien.

Für den Sonderfall der einmaligen Belastung ist das Erreichen der plastischen Grenzlast (Traglast) ein geeignetes Kriterium zur Beurteilung der Tragfähigkeit. Im Allgemeinen liegt aber eine Belastungssituation vor, bei der mehrere voneinander unabhängige veränderliche Lasten wiederholt und in beliebiger Reihenfolge allein oder kombiniert auf ein Tragwerk einwirken. Damit besteht, sofern physikalisch nichtlineares Tragverhalten vorliegt, die Gefahr des Tragwerksversagens infolge progressiver oder alternierender Plastizierungen. Diese Form des Versagens kann durch die Begrenzung der veränderlichen Belastung auf die adaptive Grenzlast (Einspiellast, shakedown-Last), ausgedrückt durch den adaptiven Grenzlastfaktor p_A , verhindert werden. Die adaptive Grenzlast ist durch einen stabilen Restschnittgrößenzustand charakterisiert, der sich nach einer endlichen Anzahl von Lastwechseln im Tragwerk einstellt, so dass alle weiteren Lastwechsel nur elastische Tragwerksreaktionen hervorrufen.

Die Theorie adaptiver Tragwerke [1], deren Ansätze in Optimierungsprobleme überführbar sind [2], ermöglicht die Tragwerksanalyse im Grenzzustand der Adaption unter Verzicht auf aufwändige Lastfolgeuntersuchungen. Es wird elastisch-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt, wobei die Steifigkeit des adaptierten Tragwerks unverändert bleibt. Aufgrund der beanspruchungsabhängigen Steifigkeitsdegradation infolge Rissbildung erfüllen Stahlbetontragwerke diese Voraussetzungen im Allgemeinen nicht. Verschiedene Anwendungen dieser Theorie auf Stahlbetontragwerke legen die vereinfachende Annahme linear elastisch – ideal plastischen Tragverhaltens zugrunde und vernachlässigen die Steifigkeitsdegradation [3] oder berücksichtigen sie durch vorab definierte reduzierte Steifigkeitswerte [4]. Eine Methode zur Berücksichtigung der beanspruchungsabhängigen Degradation der Biegesteifigkeit bei der Adaptionsanalyse von Stahlbetonbalken wird in [5], [6] und [7] vorgestellt. Unter vereinfachenden Annahmen zum Tragverhalten wiederholt bzw. wechselnd biegebeanspruchter Stahlbetonquerschnitte und durch Entkopplung der Biegesteifigkeit von der Lastgeschichte wird das Problem auf die Adaptionsanalyse linear elastisch – ideal plastischer Ersatzbalken mit unbekannter aber begrenzter Biegesteifigkeit zurückgeführt. Im Ergebnis stehen Eingrenzungslösungen für den adaptiven Grenzlastfaktor p_A . Die Lösungsfindung erfolgt numerisch mit der mathematischen Optimierung anhand eines finiten Balkenmodells.

Bedingt durch stochastische Eigenschaften von Material-, Geometrie- und Belastungsgrößen stellt der adaptive Grenzlastfaktor eine Zufallsgröße dar und das Tragwerk adaptiert mit einer bestimmten Versagenswahrscheinlichkeit nicht. In [8], [9], [10] und [11] wird die Versagenswahrscheinlichkeit von Stahlbeton-Stabtragwerken bezüglich des adaptiven Grenzzustandes unter Verwendung der Monte-Carlo-Simulation (MC-Simulation) geschätzt. Dabei wird die Annahme linear elastisch – ideal plastischen Tragverhaltens zugrunde gelegt. Während in [8] und [9] alle stochastischen Größen als zeitunabhängig gelten, werden zeitveränderliche Lasten in [10] und [11] durch nutzungsdauerbezogene Extremwerte POISSONScher Rechteck-Pulsprozesse beschrieben und die Lastauswirkungen unter Berücksichtigung zeitlicher Überlagerungseffekte kombiniert.

Im Beitrag wird am Beispiel eines 3-feldrigen Stahlbeton-Durchlaufträgers der Einfluss der beanspruchungsabhängigen Degradation der Biegesteifigkeit und der Vorgehensweise zur

Überlagerung zeitlich veränderlicher stochastischer Lastauswirkungen auf die Beurteilung der Versagenswahrscheinlichkeit bezüglich des adaptiven Grenzzustandes untersucht.

2 ADAPTIONSANALYSE

2.1 Voraussetzungen, Annahmen und Modellbildung

Es werden Balkentragwerke aus Stahlbeton untersucht, die folgenden Voraussetzungen und Annahmen unterliegen, vgl. [5], [6], [7]:

- Die Belastung des Tragwerks erfolgt statisch.
- Der Einfluss der Verformungen auf die Gleichgewichtsbedingungen kann vernachlässigt werden (Theorie I. Ordnung).
- Es gilt die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte.
- Plastische Deformationen treten konzentriert in plastischen Gelenken mit ausreichender plastischer Rotationsfähigkeit auf.
- Die Tragwerkseigenschaften sind zeit- und temperaturunabhängig.
- Stabilitäts- und Querkraftversagen werden ausgeschlossen.

Die Diskretisierung des Tragwerks erfolgt durch dessen Zerlegung in n_e finite Balkenelemente (Abb. 1) und n_k Verbindungsknoten (Abb. 2), von denen $n_c \leq n_k$ gelagert sind. Die Elementeigenschaften sind über die einzelnen Elementlängen konstant. Die Randbiegemomente \mathbf{M} und die Stützkräfte \mathbf{C} bilden die statischen Unbekannten des diskretisierten Tragwerks:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{M}_e \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{n_e}]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_e = [\mathbf{M}_{e1} \quad \mathbf{M}_{e2}]^T \quad (1)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_c \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{n_c}]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_{c,z} \quad \mathbf{C}_{c,\phi}]^T \quad (2)$$

Die in n_G bzw. n_L voneinander unabhängigen Lastfällen auftretenden ständigen Lasten \mathbf{G}_g ($g = 1, \dots, n_G$) bzw. veränderlichen Lasten \mathbf{L}_j ($j = 1, \dots, n_L$) werden diskret in die Knotenpunkte des FE-Modells eingetragen.



Abb. 1: Finites Balkenelement mit Unbekannten

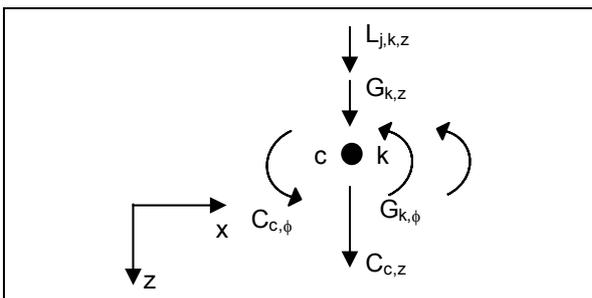


Abb. 2: Knotenkräfte eines gelagerten Knotens

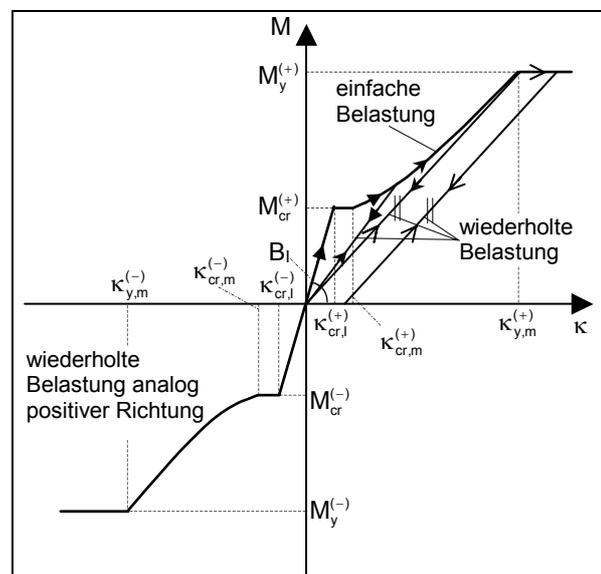


Abb. 3: integrales Querschnittsverhalten

$$\mathbf{G}_g = [\mathbf{G}_{g,1} \cdots \mathbf{G}_{g,k} \cdots \mathbf{G}_{g,n_k}]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{g,k} = [\mathbf{G}_{g,k,z} \quad \mathbf{G}_{g,k,\phi}]^T \quad (g = 1, \dots, n_G; k = 1, \dots, n_k) \quad (3)$$

$$\mathbf{L}_j = [\mathbf{L}_{j,1} \cdots \mathbf{L}_{j,k} \cdots \mathbf{L}_{j,n_k}]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}_{j,k} = [\mathbf{L}_{j,k,z} \quad \mathbf{L}_{j,k,\phi}]^T \quad (j = 1, \dots, n_L; k = 1, \dots, n_k) \quad (4)$$

Die ständigen Lasten werden in \mathbf{G} zusammengefasst:

$$\mathbf{G} = \sum_{g=1}^{n_G} \mathbf{G}_g \quad (5)$$

Für die $n_Q = 2^{n_L} - 1$ möglichen Lastfallkombinationen werden die entsprechenden Knotenlastvektoren wie folgt gebildet:

$$\mathbf{L}_q = \sum_{j=1}^{n_L} \chi_{q,j} \cdot \mathbf{L}_j \quad \left(\chi_{q,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Lastfall } j \text{ zur Lastfallkombination } q \text{ gehört} \\ 0 & \text{wenn Lastfall } j \text{ nicht zur Lastfallkombination } q \text{ gehört} \end{cases} \right) \quad (6)$$

Die Lastfallkombinationen q ($q = 1, \dots, n_Q$) entsprechen den Lastfällen j ($j = 1, \dots, n_L$).

Da die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten des FE-Modells wirken, verlaufen die Zustandsfunktionen der Biegemomente $M_e(x)$ ($e = 1, \dots, n_e$) zwischen den Rändern der finiten Balkenelemente linear.

Das Materialgesetz wird in integraler Form durch eine Biegemomenten-Verkrümmungsfunktion beschrieben. Ein Stahlbetonquerschnitt wird darin durch seine Biegesteifigkeit B_I im Zustand I, die Rissmomente $M_{cr}^{(-)}$ und $M_{cr}^{(+)}$, die Fließmomente $M_y^{(-)}$ und $M_y^{(+)}$ sowie die zugehörigen mittleren, über die Stablängsachse „verschmierten“ Verkrümmungen $\kappa_{cr,m}^{(-)}$, $\kappa_{cr,m}^{(+)}$, $\kappa_{y,m}^{(-)}$ und $\kappa_{y,m}^{(+)}$ im gerissenen Zustand charakterisiert (Abb. 3). Im ungerissenen Zustand wird ein linearer Verlauf der Arbeitslinie angenommen. Im gerissenen Zustand wird er richtungsspezifisch durch jeweils ein Polynom vom Grad $n_p^{(-)}$ bzw. $n_p^{(+)}$ beschrieben:

$$\kappa_m(M) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n_p^{(-)}} a_{inv,i}^{(-)} \cdot M^i & M_y^{(-)} \leq M < M_{cr}^{(-)} \\ M / B_I & M_{cr}^{(-)} \leq M \leq M_{cr}^{(+)} \\ \sum_{i=0}^{n_p^{(+)}} a_{inv,i}^{(+)} \cdot M^i & M_{cr}^{(+)} < M \leq M_y^{(+)} \end{cases} \quad (7)$$

Die Verfestigung bleibt unberücksichtigt, stattdessen wird nach Erreichen der Fließmomente ideal plastisches Verhalten angenommen. Die Berechnung der für das inverse Materialgesetz $\kappa_m(M)$ erforderlichen Größen kann z. B. anhand eines Schichtenmodells [12] unter Verwendung beliebiger Stoffgesetze für Beton und Betonstahl durchgeführt werden. Die Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons in der Zugzone wird durch Modifikation der Arbeitslinie des Betonstahls (z. B. [13], [14]) erfasst.

Für Querschnitte unter wiederholter oder wechselnder Biegebeanspruchung werden folgende Annahmen getroffen:

- Nach einer hinreichend großen Anzahl von Lastwechseln mit den extremen Biegemomenten M_{min} und M_{max} liegt im Intervall $[M_{min}; M_{max}]$ linear elastisches Verhalten vor.
- Die zugehörige mittlere Restbiegesteifigkeit B_m ist von den extremen Biegemomenten sowie vom inversen Materialgesetz $\kappa_m(M)$ abhängig. Die Steifigkeitsdegradation ist mit Erreichen der Fließmomente abgeschlossen:

$$B_m = \min \begin{cases} M_{\min} / \kappa_m (M_{\min}) \\ M_{\max} / \kappa_m (M_{\max}) \end{cases} \geq B_{m,\min} = \min \begin{cases} M_y^{(-)} / \kappa_{y,m}^{(-)} \\ M_y^{(+)} / \kappa_{y,m}^{(+)} \end{cases} \quad (8)$$

Sofern kein Richtungswechsel der Beanspruchung vorliegt, entfällt einer der beiden Ausdrücke und dementsprechend die Bildung des Minimums

Das Steifigkeitsgesetz (8) impliziert im gerissenen Zustand eine richtungsunabhängige Restbiegesteifigkeit, die bei Stahlbetonbalken tatsächlich nicht gegeben ist. Diese Vereinfachung ist dann vertretbar, wenn die Bereiche wechselnder Momentenbeanspruchung klein sind oder in diesen Bereichen – zumindest in einer Beanspruchungsrichtung – vergleichsweise niedrige Biegemomente auftreten. Bedingt durch den im Allgemeinen hohen Eigenlastanteil ist bei Stahlbetonbalken oftmals mindestens eine dieser Bedingungen erfüllt. Bei bekannten Funktionsverläufen $M_{\min,e}(x)$ und $M_{\max,e}(x)$ kann der Restbiegesteifigkeitszustand $B_{m,e}(x)$ eines Elementes $e \in \{1, \dots, n_e\}$ mit (8) bestimmt werden. Die gemittelten Restbiegesteifigkeiten der finiten Balkenelemente werden wie folgt berechnet und in \mathbf{B} zusammengefasst:

$$B_e = \frac{1}{l_e} \cdot \int_0^{l_e} B_{m,e}(x) \cdot dx \quad (e = 1, \dots, n_e) \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = [B_1 \quad \dots \quad B_e \quad \dots \quad B_{n_e}]^T \quad (10)$$

2.2 Adaptionanalyse linear elastisch – ideal plastischer Balkentragwerke

Der Biegemomentenzustand eines unter p -facher veränderlicher Belastung adaptierten linear elastisch – ideal plastischen Balkentragwerks mit der Biegesteifigkeit \mathbf{B} kann in einen stabilen, ggf. von der Lastgeschichte H abhängigen Restanteil und einen veränderlichen elastischen Anteil zerlegt werden. Die extremen Schnittgrößen ergeben sich damit zu:

$$\mathbf{M}_{\min}(\mathbf{B}, H, p) = \mathbf{M}_r(\mathbf{B}, H, p) + p \cdot \mathbf{M}_{el,Q,\min}(\mathbf{B}) + \mathbf{M}_{el,G}(\mathbf{B}) \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\mathbf{B}, H, p) = \mathbf{M}_r(\mathbf{B}, H, p) + p \cdot \mathbf{M}_{el,Q,\max}(\mathbf{B}) + \mathbf{M}_{el,G}(\mathbf{B}) \quad (12)$$

Darin sind $\mathbf{M}_r(\mathbf{B}, H, p)$ der Vektor der Restschnittgrößen, $\mathbf{M}_{el,G}(\mathbf{B})$ der Vektor der elastischen Schnittgrößen infolge der ständigen Lasten \mathbf{G} sowie $\mathbf{M}_{el,Q,\min}(\mathbf{B})$ und $\mathbf{M}_{el,Q,\max}(\mathbf{B})$ die Vektoren der minimalen und maximalen elastischen Schnittgrößen infolge der kombinierten veränderlichen Lasten \mathbf{L}_q ($q = 1, \dots, n_Q$).

Eine lineare Optimierungsaufgabe zur Berechnung des adaptiven Grenzlastfaktors $p_A(\mathbf{B})$ eines linear elastisch – ideal plastischen Balkens geht aus dem statischen (MELANSchen) Einspielsatz hervor. Der adaptive Grenzlastfaktor entspricht dem maximalen Lastfaktor, für den ein statisch zulässiger Restbiegemomentenzustand \mathbf{M}_r^* existiert. Die statische Zulässigkeit ist gegeben, wenn \mathbf{M}_r^* die homogenen Gleichgewichtsbedingungen (GGB) erfüllt und die extremen Schnittgrößen die Plastizitätsbedingungen (PB) nicht verletzen [2]:

$$\begin{aligned} \text{ZF: } p_A &= \max \{ p \} \\ \text{GGB: } \mathbf{A}_G \cdot \mathbf{M}_r^* + \mathbf{A}_C \cdot \mathbf{C}_r^* &= \mathbf{0} \\ \text{PB: } \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_r^* + p \cdot \mathbf{s}_{Q,\text{extr}}(\mathbf{B}) &\leq \mathbf{s}_y - \mathbf{s}_G(\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (13)$$

Darin sind \mathbf{C}_r^* der Vektor der statisch zulässigen Reststützkräfte, \mathbf{A}_G die Matrix der Gleichgewichtsbedingungen, \mathbf{A}_c die Zuordnungsmatrix der Stützkräfte sowie \mathbf{A}_p und \mathbf{s}_y die Matrix und der Absolutgliedvektor der Plastizitätsbedingungen.

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{G,1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{G,1,2} & \mathbf{A}_{G,2,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G,2,2} & \mathbf{A}_{G,3,1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G,3,2} & \ddots & \mathbf{A}_{G,n_e-1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{A}_{G,n_e-1,2} & \mathbf{A}_{G,n_e,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G,n_e,2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{G,e,1} = \begin{bmatrix} -1/1_e & -1/1_e \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

und

$$\mathbf{A}_{G,e,2} = \begin{bmatrix} 1/1_e & 1/1_e \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p,1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{A}_{p,e} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{p,n_e} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{p,e} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{s}_y = \left[\mathbf{M}_{y,e}^{(+)} \quad -\mathbf{M}_{y,e}^{(-)} \mid \mathbf{M}_{y,e}^{(+)} \quad -\mathbf{M}_{y,e}^{(-)} \right]^T \quad (16)$$

Die Vektoren $\mathbf{s}_{el,G}$ und $\mathbf{s}_{el,Q,extr}$ enthalten die elastischen Tragwerksantworten infolge \mathbf{G} und die extremen elastischen Tragwerksantworten infolge \mathbf{L}_q ($q = 1, \dots, n_Q$).

$$\mathbf{s}_G = \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_{el,G} \quad (17)$$

$$\mathbf{s}_{Q,extr} = \left[\max_{q=1}^{n_Q} (s_{q,1,1}) \cdots \max_{q=1}^{n_Q} (s_{q,e,b,f}) \cdots \max_{q=1}^{n_Q} (s_{q,n_e,2,2}) \right]^T \quad (18)$$

Es sind b ($b = 1; 2$) und f ($f = 1$ für $M_y^{(+)}$, $f = 2$ für $M_y^{(-)}$) die Nummern der Elementränder und Fließbedingungen. Der Wert $s_{q,e,b,f}$ ergibt sich durch Multiplikation der Zeile $(e-1) \cdot 4 + (b-1) \cdot 2 + f$ der Matrix \mathbf{A}_p mit dem Vektor der elastischen Biegemomente $\mathbf{M}_{el,q}$ infolge \mathbf{L}_q ($q = 1, \dots, n_Q$).

Der energetisch günstigste Restmomentenzustand $\tilde{\mathbf{M}}_r(\mathbf{B}, p)$ eines adaptierten Balkentragwerks entspricht für ein Lastniveau $p \leq p_A(\mathbf{B})$ dem Lösungsvektor der folgenden quadratischen Optimierungsaufgabe [2], [15], [16]:

$$\begin{aligned} \text{ZF:} \quad & \bar{\Pi}(\tilde{\mathbf{M}}_r) = \min \{ \mathbf{M}_r^T \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{M}_r \} \\ \text{GGB:} \quad & \mathbf{A}_G \cdot \mathbf{M}_r + \mathbf{A}_C \cdot \mathbf{C}_r = \mathbf{0} \\ \text{PB:} \quad & \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_r + p \cdot \mathbf{s}_{Q,extr}(\mathbf{B}) \leq \mathbf{s}_y - \mathbf{s}_G(\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (19)$$

Darin ist $\mathbf{Q}(\mathbf{B})$ die Flexibilitätsmatrix des Tragwerks:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(\mathbf{B}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{Q}_e(\mathbf{B}_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{n_e}(\mathbf{B}_1) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_e(\mathbf{B}_e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 \cdot B_e & 6 \cdot B_e \\ -1 & 1 \\ 6 \cdot B_e & 3 \cdot B_e \end{bmatrix} \quad (20)$$

Der tatsächliche Restmomentenzustand $\mathbf{M}_r(\mathbf{B}, H, p)$ ist eindeutig und entspricht dem energetisch günstigsten Zustand $\tilde{\mathbf{M}}_r(\mathbf{B}, p)$, wenn minimale ($\Pi_{D,min}$) und maximale ($\Pi_{D,max}$) während des Einspielprozesses dissipierte Energie gleich groß sind [15], [16].

2.3 Adaptionanalyse unter Berücksichtigung der Steifigkeitsdegradation

Der Adaptionprozess eines Stahlbetonbalkens mit dem integralen Materialverhalten nach (7), (8) und (9) wird durch die lastfolgeabhängige Veränderung der plastischen Verdrehungen und durch die beanspruchungsabhängige Degradation der Biegesteifigkeit bestimmt. Die plastischen Verdrehungen und die Restbiegesteifigkeit im adaptierten Zustand sind prinzipiell von der konkreten, zur Tragwerksadaption führenden Lastfolge abhängig und bestimmen den Restbiegemomentenzustand des Tragwerks. Durch die bestehende Kopplung der Restbiegesteifigkeit an die extremen Biegemomente (8) und den Zusammenhang (13) zwischen dem adaptiven Grenzlastfaktor p_A und der Restbiegesteifigkeit entsteht eine Lastfolgeabhängigkeit von p_A . Eine „exakte“ Einspielanalyse würde einen sehr aufwändigen Algorithmus unter Berücksichtigung aller möglichen Lastfolgen mit sukzessiver Steigerung der Lastintensität erfordern. Unter Verzicht auf Lastfolgeuntersuchungen ist es anhand eines linear elastisch – ideal plastischen Ersatztragwerks mit in Grenzen unbekannter und von der Beanspruchungsgeschichte entkoppelter Restbiegesteifigkeit möglich, Eingrenzungslösungen für p_A zu berechnen [5], [6], [7].

Durch zusätzliche Entkopplung der Restbiegesteifigkeit von den extremen Biegemomenten können elementare Eingrenzungslösungen $p_{A,\min,0}$ und $p_{A,\max,0}$ hergeleitet werden [5], [6], [7], denen allein die aus dem Steifigkeitsgesetz (8) resultierende Steifigkeitsbeschränkung (STB) $B_{\min} \leq B_A \leq B_I$ zugrunde liegt. Die elementaren Grenzen können mit der folgenden nichtlinearen Optimierungsaufgabe berechnet werden [5], [6], [7]:

$$\begin{aligned} \text{ZF: } p_{A,\min,0} &= \min \{p_A(\mathbf{B}_A)\} \quad \text{bzw.} \quad p_{A,\max,0} = \max \{p_A(\mathbf{B}_A)\} \\ \text{STB: } \mathbf{B}_A &\leq \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_A &\geq \mathbf{B}_{\min} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Vektoren \mathbf{B}_I , \mathbf{B}_{\min} und \mathbf{B}_A enthalten die Elementsteifigkeiten im ungerissenen, vollständig geschädigten und adaptierten Tragwerkszustand. Die Auswertung der Zielfunktion erfolgt numerisch mit der Optimierungsaufgabe (13), wobei \mathbf{B} durch \mathbf{B}_A zu ersetzen ist.

Verbesserte Grenzen können berechnet werden, sofern der tatsächliche Restmomentenzustand $\mathbf{M}_r(\mathbf{B}_A, H, p)$ des adaptierten Stahlbetonbalkens dem lastfolgeunabhängigen energetisch günstigsten Restmomentenzustand $\tilde{\mathbf{M}}_r(\mathbf{B}_A, p)$ des adaptierten linear elastisch – ideal plastischen Ersatzbalkens näherungsweise gleichgesetzt werden kann [5], [6], [7]:

$$\mathbf{M}_r(\mathbf{B}_A, H, p) \approx \tilde{\mathbf{M}}_r(\mathbf{B}_A, p) \quad (22)$$

Diese Näherung gilt, sofern der Restmomentenzustand des Ersatzbalkens im adaptierten Zustand eindeutig und der Einfluss des Steifigkeitsdegradationsprozesses auf den tatsächlichen Restmomentenzustand vernachlässigbar klein ist. Die erstgenannte Annahme kann mit dem in [15] und [16] beschriebenen Verfahren geprüft werden. Die letztgenannte Annahme ist im Allgemeinen gerechtfertigt, da der Unterschied zwischen aktueller Biegesteifigkeit und endgültiger Restbiegesteifigkeit \mathbf{B}_A während des Einspielprozesses zunehmend kleiner wird. Aus den Gleichungen (11) und (12) folgen in Verbindung mit der Gleichung (22) Näherungslösungen für die extremen Biegemomente des tatsächlichen adaptierten Stahlbetonbalkens:

$$\mathbf{M}_{\min}(\mathbf{B}_A, p) \approx \tilde{\mathbf{M}}_r(\mathbf{B}_A, p) + p \cdot \mathbf{M}_{\text{el,Q,min}}(\mathbf{B}_A) + \mathbf{M}_{\text{el,G}}(\mathbf{B}_A) \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\mathbf{B}_A, p) \approx \tilde{\mathbf{M}}_r(\mathbf{B}_A, p) + p \cdot \mathbf{M}_{\text{el,Q,max}}(\mathbf{B}_A) + \mathbf{M}_{\text{el,G}}(\mathbf{B}_A) \quad (24)$$

Da diese extremen Biegemomente nur den adaptierten Tragwerkszustand repräsentieren, sind sie betragsmäßig nicht größer als die extremen aus der gesamten Lastgeschichte resultierenden Biegemomente. Als Argumente für das Steifigkeitsgesetz (8) führen sie somit in Verbindung mit Gleichung (9) zu einer oberen Eingrenzungslösung für die Restbiegesteifigkeit, die vom unbekanntem Biegesteifigkeitszustand \mathbf{B}_A selbst und vom Lastniveau p abhängig ist:

$$\hat{\mathbf{B}}_A [\mathbf{M}_{\min,A}(\mathbf{B}_A, p), \mathbf{M}_{\max,A}(\mathbf{B}_A, p)] \geq \mathbf{B}_A \quad (25)$$

Eine analoge Modifikation der unteren Grenze der Biegesteifigkeit ist nicht möglich, da zu diesem Zweck die Kenntnis der extremen Biegemomentenverteilung über die gesamte Lastgeschichte erforderlich wäre. Unter Verwendung der oberen Steifigkeitsbegrenzung (25) und der elementaren unteren Steifigkeitsbegrenzung $\mathbf{B}_A \geq \mathbf{B}_{\min}$ können gegenüber (21) verbesserte Grenzen berechnet werden [5], [6], [7]:

$$\begin{aligned} \text{ZF: } p_{A,\min,l} &= \min \{p_A(\mathbf{B}_A)\} \quad \text{bzw.} \quad p_{A,\max,l} = \max \{p_A(\mathbf{B}_A)\} \\ \text{STB: } \mathbf{B}_A - \hat{\mathbf{B}}_A [\mathbf{M}_{\min,A}(\mathbf{B}_A, p_A), \mathbf{M}_{\max,A}(\mathbf{B}_A, p_A)] &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_A &\geq \mathbf{B}_{\min} \end{aligned} \quad (26)$$

Die „geschachtelten“ Optimierungsaufgaben (21) und (26) können mit universell einsetzbaren Optimierungsalgorithmen oder mit speziellen auf die Problemstellung abgestimmten Iterationsalgorithmen [5], [7] gelöst werden.

3 STOCHASTISCHE MODELLBILDUNG

3.1 Stochastisches integrales Querschnittsverhalten

Bedingt durch stochastische Geometrie- und Materialkenngrößen nehmen die inversen Arbeitslinien der biegebeanspruchten Stahlbetonquerschnitte eines Balkens zufällige Verläufe an. Jedem finiten Balkenelement wird ein repräsentativer Querschnitt in der jeweiligen Elementmitte zugeordnet. Die zufälligen integralen Querschnittsgrößen werden in den querschnittsbezogenen 9-dimensionalen Zufallsgrößen $\mathbf{X}_{QS,e}$ ($e = 1, \dots, n_e$) und in der tragwerksbezogenen 9· n_e -dimensionalen Zufallsgröße \mathbf{X}_{QS} zusammengefasst:

$$\mathbf{X}_{QS} = [\mathbf{X}_{QS,1} \ \cdots \ \mathbf{X}_{QS,e} \ \cdots \ \mathbf{X}_{QS,n_e}]^T \quad (27)$$

mit

$$\mathbf{X}_{QS,e} = [\mathbf{B}_{1,e} \ \kappa_{cr,m,e}^{(-)} \ \kappa_{y,m,e}^{(-)} \ \kappa_{cr,m,e}^{(+)} \ \kappa_{y,m,e}^{(+)} \ \mathbf{M}_{cr,e}^{(-)} \ \mathbf{M}_{y,e}^{(-)} \ \mathbf{M}_{cr,e}^{(+)} \ \mathbf{M}_{y,e}^{(+)}]^T \quad (28)$$

Diese mehrdimensionalen Zufallsgrößen werden näherungsweise durch ihre Randverteilungen $F_k(x)$ bzw. -dichten $f_k(x)$ ($k = \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{M}_y^{(+)}$) (vgl. Abb. 4) sowie die zugehörigen linearen Korrelationen beschrieben. Die Korrelationskoeffizienten $\rho_{(j,k),e}^{(0)}$ ($j \neq k$; $j, k = \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{M}_y^{(+)}$; $e = 1, \dots, n_e$) der integralen Querschnittsgrößen werden in den Korrelationsmatrizen $\mathbf{R}_{QS,e}$ zusammengefasst. Für die räumlichen Autokorrelationskoeffizienten der integralen Querschnittsgrößen zweier Querschnitte e und f gilt folgendes Modell, vgl. [7]:

$$\rho_{j,(e,f)} = e^{-\alpha_j |\Delta x_{e,f}|} \quad \text{mit} \quad \Delta x_{e,f} = 0,5 \cdot (l_e + l_f) + \sum_{i \in M_{e,f}} l_i \quad (29)$$

Die Indexmenge $M_{e,f}$ enthält die Indices i ($i \in \{1, \dots, n_e\}$) der finiten Stabelemente, die die kürzeste Verbindung zwischen den repräsentativen Querschnitten der Elemente e und f bilden.

Die zugehörigen Kreuzkorrelationen werden wie folgt berechnet:

$$\rho_{(j,k),(e,f)} = 0,5 \cdot \left(\rho_{(j,k),e}^{(0)} + \rho_{(j,k),f}^{(0)} \right) \cdot \sqrt{\left| \rho_{j,(e,f)} \cdot \rho_{k,(e,f)} \right|} \quad (30)$$

Die räumlichen Auto- und Kreuzkorrelationskoeffizienten der integralen Querschnittsgrößen werden in der Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{QS,(e,f)}$ zusammengefasst. Damit kann die Korrelationsmatrix \mathbf{R}_{QS} der integralen Querschnittsgrößen des Gesamttragwerks gebildet werden:

$$\mathbf{R}_{QS} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{QS,1} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(1,e)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(1,f)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(1,n_e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{QS,(e,1)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,e} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(e,f)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(e,n_e)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{QS,(f,1)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(f,e)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,f} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(f,n_e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{QS,(n_e,1)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(n_e,e)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,(n_e,f)} & \dots & \mathbf{R}_{QS,n_e} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Die im statistischen Sinn mittleren inversen Querschnittsarbeitslinien $\bar{\kappa}_{m,e}^{(-)}$ und $\bar{\kappa}_{m,e}^{(+)}$ ($e = 1, \dots, n_e$) werden im gerissenen Zustand durch Polynome folgender Form beschrieben [7]:

$$\bar{\kappa}_{m,e}^{(-)} = \sum_{i=0}^n \bar{a}_{inv,i,e}^{(-)} \cdot M^i \quad (\text{gültig für } \bar{M}_y^{(-)} \leq M < \bar{M}_{cr}^{(-)}) \quad (32)$$

$$\bar{\kappa}_{m,e}^{(+)} = \sum_{i=0}^n \bar{a}_{inv,i,e}^{(+)} \cdot M^i \quad (\text{gültig für } \bar{M}_{cr}^{(+)} \leq M < \bar{M}_y^{(+)}) \quad (33)$$

Die Überstriche kennzeichnen die Erwartungswerte der Zufallsgrößen.

Durch Transformation des Funktionsargumentes und Manipulation der Koeffizienten von Linear- und Absolutglied kann ein Polynom gebildet werden, welches durch zwei vorgegebene – im Allgemeinen abseits von $\bar{\kappa}_{m,e}^{(-)}(M)$ bzw. $\bar{\kappa}_{m,e}^{(+)}(M)$ liegende – Punkte $(\kappa_{cr,m}^{(-)}, M_{cr}^{(-)})$ und $(\kappa_{y,m}^{(-)}, M_y^{(-)})$ bzw. $(\kappa_{cr,m}^{(+)}, M_{cr}^{(+)})$ und $(\kappa_{y,m}^{(+)}, M_y^{(+)})$ verläuft, und im Intervall $[M_y^{(-)}; M_{cr}^{(-)}]$

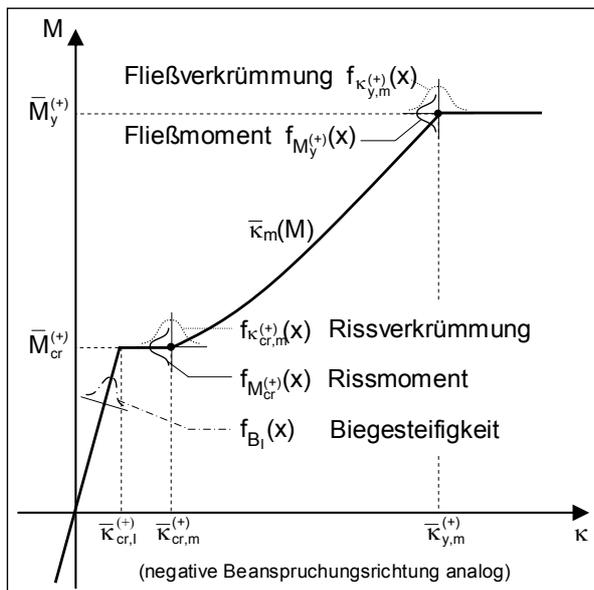


Abb. 4: Stochastische integrale Querschnittsgrößen (schematisch)

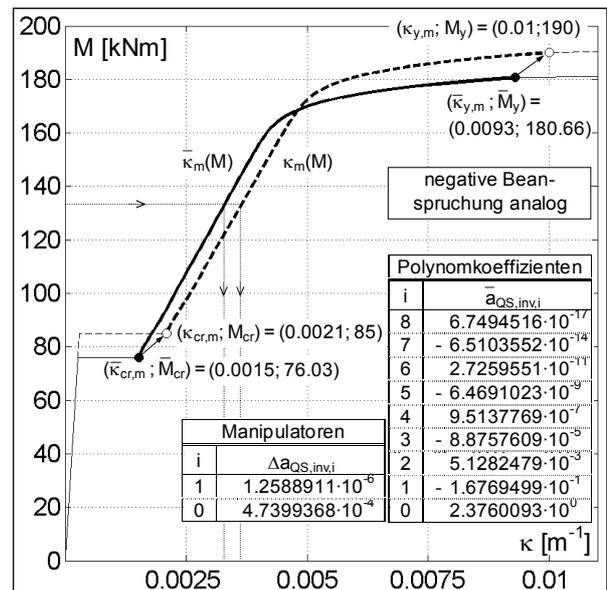


Abb. 5: Manipulation der Querschnittsarbeitslinie am Beispiel [7]

bzw. $[M_{cr}^{(+)}; M_y^{(+)}]$ die Charakteristik der „mittleren“ inversen Arbeitslinie beibehält (Abb. 5):

$$\kappa_{m,e}^{(-)} = \sum_{i=0}^n \bar{a}_{QS,inv,i,e}^{(-)} \cdot \hat{M}^i + \Delta a_{QS,inv,1,e}^{(-)} \cdot \hat{M} + \Delta a_{QS,inv,0,e}^{(-)} \quad (\text{gültig für } \bar{M}_y^{(-)} \leq M < \bar{M}_{cr}^{(-)}) \quad (34)$$

mit

$$\hat{M} = (M - M_{cr,e}^{(-)}) \cdot \left(1 - \frac{(M_{y,e}^{(-)} - \bar{M}_{y,e}^{(-)}) - (M_{cr,e}^{(-)} - \bar{M}_{cr,e}^{(-)})}{M_{y,\bar{e}}^{(-)} - M_{cr,\bar{e}}^{(-)}} \right) + \bar{M}_{cr,e}^{(-)}$$

$$\Delta a_{QS,inv,1,e}^{(-)} = \frac{(\kappa_{y,m,e}^{(-)} - \bar{\kappa}_{y,m,e}^{(-)}) - (\kappa_{cr,m,e}^{(-)} - \bar{\kappa}_{cr,m,e}^{(-)})}{\bar{M}_{y,e}^{(-)} - \bar{M}_{cr,e}^{(-)}}$$

$$\Delta a_{QS,inv,0,e}^{(-)} = -\bar{M}_{cr,e}^{(-)} \cdot \frac{[(\kappa_{y,m,e}^{(-)} - \bar{\kappa}_{y,m,e}^{(-)}) - (\kappa_{cr,m,e}^{(-)} - \bar{\kappa}_{cr,m,e}^{(-)})]}{\bar{M}_{y,e}^{(-)} - \bar{M}_{cr,e}^{(-)}} + (\kappa_{cr,m,e}^{(-)} - \bar{\kappa}_{cr,m,e}^{(-)})$$

(positive Richtung (+) analog)

Mit diesem Polynom (34) können einzelne Realisierungen $\kappa_{m,e,i}(M)$ ($e=1, \dots, n_e$; $i=1, \dots, n$) der Querschnittsarbeitslinien unter Verwendung von Realisierungen $x_{QS,e,i}$ der zufälligen integralen Querschnittsgrößen $X_{QS,e}$ (28) beschrieben werden.

3.2 Stochastisches Lastmodell

Die bezogenen Eigenlasten $g_{1,e}$ ($e=1, \dots, n_e$) der finiten Balkenelemente werden von den Querschnittsgeometrien und den Baustoffwichten bestimmt und stellen deshalb abhängige Zufallsgrößen dar. Sie werden im Zufallsvektor $\mathbf{X}_{G,1}$ zusammengefasst:

$$\mathbf{X}_{G,1}(\mathbf{X}_y, \mathbf{X}_d) = [g_{1,1} \quad \dots \quad g_{1,e} \quad \dots \quad g_{1,n_e}]^T \quad (35)$$

Daraus geht der zufällige Knotenlastvektor \mathbf{G}_1 (vgl. (3)) durch entsprechende Lastdiskretisierung hervor. Für die in \mathbf{R}_{G_1} zusammengefassten Autokorrelationskoeffizienten $\rho_{g_{1,(e,f)}}$ ($e \neq f$; $e, f = (1, \dots, n_e)$) der bezogenen Eigenlasten gilt das gleiche Modell wie für die Autokorrelationskoeffizienten der integralen Querschnittsgrößen. Kreuzkorrelationen mit integralen Querschnittsgrößen werden vernachlässigt.

Für die verschiedenen Eigenlasten nichttragender Bauteile (Trennwände, Fußböden etc.) wird jeweils totale räumliche Korrelation angenommen, so dass die entsprechenden zufälligen Knotenlastvektoren \mathbf{G}_g ($g=2, \dots, n_G$) jeweils als Produkt einer zufälligen Eigenlastgröße G_g ($g=2, \dots, n_G$) und des zugehörigen deterministischen Lastbildvektors $\underline{\mathbf{G}}_g$ ($g=2, \dots, n_G$) dargestellt werden können:

$$\mathbf{G}_g = G_g \cdot \underline{\mathbf{G}}_g \quad (g=2, \dots, n_G) \quad (36)$$

Die zufälligen Eigenlastgrößen werden vektoriell zusammengefasst:

$$\mathbf{X}_{G,2} = [G_2 \quad \dots \quad G_g \quad \dots \quad G_{n_G}]^T \quad (37)$$

Zeitlich veränderliche Lasten werden als voneinander unabhängige POISSONSche Rechteck-Pulsprozesse $L_j(t)$ ($j=1, \dots, n_L$) mit den Erneuerungsraten λ_{L_j} und mittleren Pulsdauern μ_{L_j} modelliert. Die Pulsintensitäten sind nach $F_{L_j}(x)$ verteilt und besitzen die Erwar-

tungswerte \bar{L}_j und Standardabweichungen σ_{L_j} . Die Lastextremwerte $L_{j,\max}$ im Zeitintervall $[0; T]$ genügen näherungsweise folgender Verteilungsfunktion [17]:

$$F_{L_{j,\max}}(\mathbf{x}) \approx e^{-\lambda_{L_j} \cdot T \cdot [1 - F_{L_j}(\mathbf{x}, \mu_{L_j}, \sigma_{L_j})]} \quad (j = 1, \dots, n_L) \quad (38)$$

Die Extremwerte werden vektoriell zusammengefasst:

$$\mathbf{X}_{L,\max} = [L_{1,\max} \quad \dots \quad L_{j,\max} \quad \dots \quad L_{n_L,\max}]^T \quad (39)$$

Es wird totale räumliche Korrelation innerhalb der einzelnen Lastfälle angenommen, so dass in Analogie zu den ständigen Lasten folgende Beziehungen für die extremen Knotenlastvektoren in $[0; T]$ gelten:

$$\mathbf{L}_{j,\max}(\mathbf{t}) = L_{j,\max}(\mathbf{t}) \cdot \underline{\mathbf{L}}_{j,\max} \quad (j = 1, \dots, n_L) \quad (40)$$

3.3 Zeitabhängige elastische Antworten und deren Überlagerung

Die Vektoren der zeitabhängigen elastischen Antworten eines Tragwerks gehen durch lineare Transformation aus den Lastprozessen $L_j(\mathbf{t})$ ($j = 1, \dots, n_L$) hervor:

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{M}_{el,j}(\mathbf{t}) \quad (j = 1, \dots, n_L) \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_{el,j}(\mathbf{t}) = \mathbf{C} \cdot L_j(\mathbf{t}) \cdot \underline{\mathbf{L}}_j \quad (41)$$

($\mathbf{C} \dots$ Koeffizientenmatrix zur Transformation der Knotenlastvektoren in die Vektoren elastischer Schnittgrößen)

Die Elemente der Matrizen \mathbf{A}_p und \mathbf{C} sind von den Material- und Geometrieparametern des Tragwerks abhängig und damit zufällig, aber im Zeitintervall $[0; T]$ für jede einzelne Realisierung des Tragwerks konstant. Folglich sind die zeitabhängigen elastischen Antworten $s_{j,e,b,f}(\mathbf{t})$ ($j = 1, \dots, n_L$, $e = 1, \dots, n_e$, $b = 1; 2$, $f = 1; 2$) jeder Tragwerksrealisierung wie die Lasten POISSONSche Rechteck-Pulsprozesse mit den gleichen zeitlichen Prozessparametern $\lambda_{s_{j,e,b,f}} = \lambda_{s_j} = \lambda_{L_j}$ und $\mu_{s_{j,e,b,f}} = \mu_{s_j} = \mu_{L_j}$ wie die Lastprozesse. Die Erwartungswerte $\bar{s}_{j,e,b,f}$ und Standardabweichungen $\sigma_{s_{j,e,b,f}}$ der nach $F_{s_{j,e,b,f}}(\mathbf{x})$ verteilten Antwortpulse gehen aus \bar{L}_j und σ_{L_j} durch die Transformation (41) hervor. Die Verteilungstypen der Antwort-Pulsintensitäten entsprechen denen der zugehörigen Last-Pulsintensitäten.

Die Überlagerungs-Antwortprozesse sind ebenfalls POISSONSche Rechteck-Pulsprozesse mit folgenden Parametern und Verteilungsfunktionen [7], [10], [11]:

$$\lambda_{s_{q,e,b,f}} = \lambda_{s_q} = \prod_{z \in M_q} \lambda_{s_z} \cdot \left(\sum_{y \in M_q} \prod_{u \in M_q \setminus \{y\}} \mu_{s_u} \right) \quad (42)$$

$$\mu_{s_{q,e,b,f}} = \mu_{s_q} = \frac{\prod_{z \in M_q} \mu_{s_z}}{\sum_{y \in M_q} \prod_{u \in M_q \setminus \{y\}} \mu_{s_u}} \quad (43)$$

$$F_{s_{q,e,b,f}}(\mathbf{x}) = \underset{z \in M_q}{*} F_{s_z,e,b,f}(\mathbf{x}) \quad (\text{Faltung}) \quad (44)$$

Die Menge $M_q \{z | L_z(\mathbf{t}) \text{ gehört zur Lastfallkombination } q\}$ ($q = 1, \dots, n_Q$) enthält die Indices der an der Lastfallkombination q beteiligten Lastprozesse.

Die Extremwertverteilungen der Antwort-Überlagerungsprozesse für das Zeitintervall $[0; T]$ ergeben sich in Analogie zu (38):

$$F_{s_{q,\max,e,b,f}}(\mathbf{x}) \approx e^{-\lambda_{s_{q,e,b,f}} \cdot T \cdot [1 - F_{s_{q,e,b,f}}(\mathbf{x})]} \quad (45)$$

Im Weiteren gilt die konservative Annahme, dass jeder Überlagerungsprozess $s_{q,e,b,f}(t)$ ($q = 1, \dots, n_Q$) im Zeitintervall $[0; T]$ mindestens einen Lastpuls aufweist.

3.4 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit der Monte-Carlo-Methode

Die Sicherheitsanalyse bezüglich des Grenzzustandes der Adaption wird unter Berücksichtigung sämtlicher oben beschriebener in \mathbf{X} zusammengefasster Zufallsgrößen geführt:

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{X}_{QS}^T \quad \mathbf{X}_{G1}^T \quad \mathbf{X}_{G2}^T \quad \mathbf{X}_{L,max}^T \right]^T \quad (46)$$

Der Einfluss der Steifigkeitsdegradation auf die Sicherheitsanalyse wird je nach gegebener Problemstellung durch die Verwendung der elementaren oder der verbesserten unteren Eingrenzungslösung des adaptiven Grenzlastfaktors bei der Formulierung der Grenzzustandsfunktion berücksichtigt oder durch Verwendung von $p_A = p_A(\mathbf{B}_I)$ vernachlässigt:

$$g_{f,k}(\mathbf{X}) = p_k(\mathbf{X}) - 1 \quad k \in \{A; A, \min, 0; A, \min, 1\} \quad (47)$$

Für jede Realisierung \mathbf{x} der mehrdimensionalen Zufallsgröße \mathbf{X} gilt folgende Zuordnung:

$$g_{f,k}(\mathbf{x}) \begin{cases} < 0 & \text{Versagensereignis} \\ \geq 0 & \text{Überlebensereignis} \end{cases} \quad (48)$$

Damit kann der Versagensbereich \mathbf{D}_f beschrieben werden:

$$\mathbf{D}_{f,k} = \{ \mathbf{x} \mid g_{f,k}(\mathbf{x}) < 0 \} \quad k \in \{A; A, \min, 0; A, \min, 1\} \quad (49)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit $P_{f,k}$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsmasse der Zufallsgröße \mathbf{X} über $\mathbf{D}_{f,k}$:

$$P_{f,k} = \int_{\mathbf{D}_{f,k}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad k \in \{A; A, \min, 0; A, \min, 1\} \quad (50)$$

Im Allgemeinen ist die analytische Lösung dieser Gleichung mit erheblichem Aufwand verbunden oder nicht möglich. Schätzwerte $P_{f,k}^*$ der Versagenswahrscheinlichkeit können auf statistischem Weg z. B. mit der MC-Simulation berechnet werden. Auf der Basis einer numerisch erzeugten Stichprobe \mathbf{x}_i^* ($i = 1, \dots, n_{MC}$) der Basisvariablen \mathbf{X} wird $P_{f,k}$ geschätzt:

$$P_{f,k}^* = \frac{1}{n_{MC}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{MC}} \chi_{\mathbf{D}_{f,k}}(\mathbf{x}_i^*) \quad k \in \{A; A, \min, 0; A, \min, 1\} \quad (51)$$

mit

$$\chi_{\mathbf{D}_{f,k}} = \begin{cases} 1 & \text{für } g_{f,k}(\mathbf{x}_i^*) < 0 \\ 0 & \text{für } g_{f,k}(\mathbf{x}_i^*) \geq 0 \end{cases} \quad (52)$$

Aus dem Schätzwert $P_{f,k}^*$ kann ein Konfidenzintervall abgeleitet werden, welches die Versagenswahrscheinlichkeit $P_{f,k}$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$ einschließt [18]:

$$P(P_{f,k} \in [P_{f,k,u}^*; P_{f,k,o}^*]) = 1 - \alpha \quad k \in \{A; A, \min, 0; A, \min, 1\} \quad (53)$$

mit

$$P_{f,k,u}^* = \frac{z_{\alpha/2}}{n_{MC} + z_{\alpha/2}^2} \cdot \left(\frac{n_{MC} \cdot P_{f,k}^*}{z_{\alpha/2}} + \frac{z_{\alpha/2}}{2} + \sqrt{n_{MC} \cdot P_{f,k}^* \cdot (1 - P_{f,k}^*) + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4}} \right) \quad (54)$$

$$P_{f,k,o}^* = \frac{z_{1-\alpha/2}}{n_{MC} + z_{1-\alpha/2}^2} \cdot \left(\frac{n_{MC} \cdot P_{f,k}^*}{z_{1-\alpha/2}} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{2} + \sqrt{n_{MC} \cdot P_{f,k}^* \cdot (1 - P_{f,k}^*) + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4}} \right) \quad (55)$$

Darin sind $z_{\alpha/2}$ und $z_{1-\alpha/2}$ die Quantilwerte $\Phi^{-1}(\alpha/2)$ und $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ der standardisierten Normalverteilung.

Die Überlagerung extremer elastischer Antworten nach Abschnitt 3.3 erfordert eine zweistufige Simulation. Für jede Realisierung i ($i = 1, \dots, n_{MC}$) des Tragwerks sind die Extremwerte der elastischen Antworten auf die zeitlich veränderlichen Lasten zu berechnen. Für alle Lastfallkombinationen q ($q = 1, \dots, n_Q$) werden die Pulsintensitätsverteilungen $F_{s_{q,e,b,f,i}}^*(x)$ (44) der elastischen Tragwerksantworten, die Erneuerungsrate λ_{s_q} (42) und die mittlere Pulsdauer μ_{s_q} (43) ermittelt. Die Realisierungen $s_{q,\max,e,b,f,i}^*$ der Antwortextremwerte werden durch Transformation aus den Realisierungen $r_{q,i}^*$ einer in $[0; 1]$ gleich verteilten Zufallsgröße R erzeugt [11]:

$$s_{q,\max,e,b,f,i}^* = F_{s_{q,e,b,f,i}}^{*-1} \left(1 + \frac{\ln(r_{q,i}^*)}{\lambda_{s_q} \cdot T} \right) \quad (q = 1, \dots, n_Q ; i = 1, \dots, n_{MC}) \quad (56)$$

Aus diesen Antwortextremwerten wird der Vektor der extremen elastischen Antworten

$$\mathbf{s}_{Q,\text{extr},i}^* = \left[\max_{q=1}^{n_Q} (s_{q,\max,1,1,1,i}^*) \quad \dots \quad \max_{q=1}^{n_Q} (s_{q,\max,e,b,f,i}^*) \quad \dots \quad \max_{q=1}^{n_Q} (s_{q,\max,n_e,2,2,i}^*) \right]^T \quad (57)$$

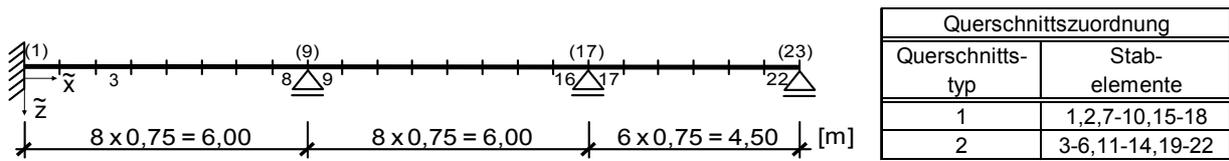
zusammengesetzt (vgl. (18)), mit dem eine Realisierung $p_{k,i}^*$ ($i = 1, \dots, n_{MC}$) des entsprechenden Grenzlastfaktors und der Wert der Grenzzustandsfunktion (47) berechnet werden.

Vereinfachend kann die Überlagerung der extremen elastischen Antworten durch Addition der Realisierungen $\mathbf{L}_{j,\max,i}^*$ ($j = 1, \dots, n_L ; i = 1, \dots, n_{MC}$) der veränderlichen extremen Knotenlastvektoren $\mathbf{L}_{j,\max,i}$ nach (6) oder der Realisierungen $\mathbf{s}_{j,\max,i}^*$ der daraus abgeleiteten extremen elastischen Antworten $\mathbf{s}_{j,\max}$ realisiert werden. Diese Vorgehensweise impliziert ein gleichzeitiges Auftreten der Extremwerte aller beteiligten Lastprozesse und führt zu konservativen Lösungen [10], [11].

4 BEISPIEL DURCHLAUFTRÄGER

Für den in Tafel 1a dargestellten Stahlbeton-Durchlaufträger werden unter stochastischen Modellannahmen für die integralen Querschnittsgrößen und die Belastungsgrößen die Einflüsse von Steifigkeitsdegradation sowie Intensität und Art der Überlagerung der veränderlichen Belastung auf die Versagenswahrscheinlichkeit bezüglich des Grenzzustandes der Adaption analysiert.

Den finiten Balkenelementen sind 2 unterschiedliche T-Querschnittstypen zugeordnet (vgl. [7]), die sich allein im Bewehrungsquerschnitt unterscheiden. Das stochastische Querschnittsmodell (Tafel 1b - d) und das stochastische Modell der Tragwerkseigenlast sind Ergebnisse einer in [7] dokumentierten statistischen Analyse unter Verwendung der MC-Simulation und des KOLMOGOROV-SMIRNOV-Tests. Darin liegen als Baustoffe ein Beton C 25/30 und ein Betonstahl BSt 500 S(B) zugrunde. Das Materialverhalten des Betons wird mit der in [19]



a) Statisches System, und Querschnittszuordnung

Querschnittstyp 1					
Größe	Einheit	Verteilungstyp	Erwartungswert \bar{k}	Standardabweichung σ_k	Korrelationsparameter α_k [1/m]
B_i	kNm^2	Log.-N.	287.648	30.069	1,932E-02
$\kappa_{cr,m}^{(-)}$	m^{-1}	Log.-N. (!)	-2,27E-03	3,87E-04	2,191E-02
$\kappa_{y,m}^{(-)}$		Log.-N. (!)	-9,97E-03	1,29E-03	1,165E-01
$\kappa_{cr,m}^{(+)}$		Log.-N.	2,00E-03	3,78E-04	2,332E-02
$\kappa_{y,m}^{(+)}$		Log.-N.	9,39E-03	4,47E-04	1,165E-01
$M_{cr}^{(-)}$	kNm	Log.-N. (!)	-1,44E+02	2,99E+01	1,836E-02
$M_y^{(-)}$		Log.-N. (!)	-3,41E+02	2,24E+01	7,965E-02
$M_{cr}^{(+)}$		Log.-N.	8,14E+01	1,70E+01	1,747E-02
$M_y^{(+)}$		Log.-N.	1,79E+02	1,15E+01	1,227E-01

(!) ... gültig für den Absolutbetrag der Zufallsgröße

Querschnittstyp 2					
Größe	Einheit	Verteilungstyp	Erwartungswert \bar{k}	Standardabweichung σ_k	Korrelationsparameter α_k [1/m]
B_i	kNm^2	Log.-N.	284.148	26.071	1,777E-02
$\kappa_{cr,m}^{(-)}$	m^{-1}	Log.-N. (!)	-2,98E-03	5,22E-04	1,892E-02
$\kappa_{y,m}^{(-)}$		Log.-N. (!)	-9,27E-03	1,64E-03	1,302E-01
$\kappa_{cr,m}^{(+)}$		Log.-N.	1,95E-03	3,71E-04	2,227E-02
$\kappa_{y,m}^{(+)}$		Log.-N.	9,42E-03	4,10E-04	1,302E-01
$M_{cr}^{(-)}$	kNm	Log.-N. (!)	-1,37E+02	2,66E+01	1,761E-02
$M_y^{(-)}$		Log.-N. (!)	-2,30E+02	1,60E+01	8,493E-02
$M_{cr}^{(+)}$		Log.-N.	7,84E+01	1,45E+01	1,716E-02
$M_y^{(+)}$		Log.-N.	1,80E+02	1,20E+01	1,029E-01
g_1	kN/m	Log.-N.	7,33E+00	1,54E-01	2,639E-02

(!) ... gültig für den Absolutbetrag der Zufallsgröße

b) Statistische Parameter der integralen Querschnittsgrößen und Verteilungsanpassung

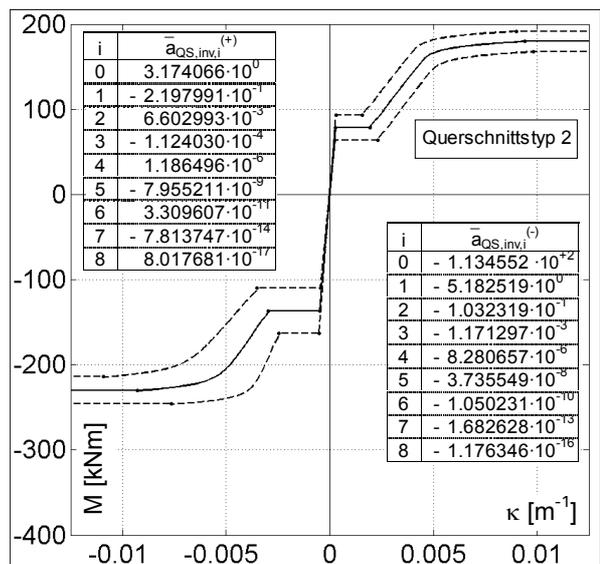
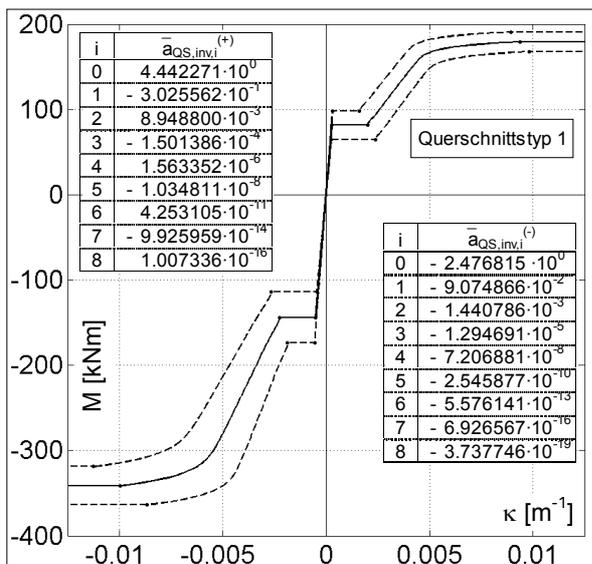
Querschnittstyp 1								
$\kappa_{cr,m}^{(-)}$	$\kappa_{y,m}^{(-)}$	$\kappa_{cr,m}^{(+)}$	$\kappa_{y,m}^{(+)}$	$M_{cr}^{(-)}$	$M_y^{(-)}$	$M_{cr}^{(+)}$	$M_y^{(+)}$	$k \setminus j$
-6,592	3,762	7,667	-3,451	-8,207	-0,370	8,212	-0,150	B_i
	-2,662	-9,339	1,985	9,331	-1,013	-9,223	0,141	$\kappa_{cr,m}^{(-)}$
		3,005	-5,424	-3,627	2,725	3,622	-3,825	$\kappa_{y,m}^{(-)}$
			-1,384	-9,551	0,129	9,592	-0,439	$\kappa_{cr,m}^{(+)}$
				3,089	-5,791	-3,103	5,543	$\kappa_{y,m}^{(+)}$
					0,206	-9,941	-0,264	$M_{cr}^{(-)}$
						-0,213	-8,759	$M_y^{(-)}$
							0,301	$M_{cr}^{(+)}$

$\rho_{k,j}^{(0)} = \rho_{j,k}^{(0)} = 10^{-1} \dots$

Querschnittstyp 2								
$\kappa_{cr,m}^{(-)}$	$\kappa_{y,m}^{(-)}$	$\kappa_{cr,m}^{(+)}$	$\kappa_{y,m}^{(+)}$	$M_{cr}^{(-)}$	$M_y^{(-)}$	$M_{cr}^{(+)}$	$M_y^{(+)}$	$k \setminus j$
-6,358	2,721	7,359	-1,315	-7,913	-1,500	7,866	0,569	B_i
	-2,618	-9,388	0,754	9,210	-1,262	-9,160	0,664	$\kappa_{cr,m}^{(-)}$
		2,950	-4,028	-3,412	2,335	3,319	-3,036	$\kappa_{y,m}^{(-)}$
			-0,349	-9,524	0,376	9,569	-1,016	$\kappa_{cr,m}^{(+)}$
				1,810	-5,955	-1,789	6,120	$\kappa_{y,m}^{(+)}$
					0,349	-9,932	0,031	$M_{cr}^{(-)}$
						-0,384	-8,669	$M_y^{(-)}$
							0,057	$M_{cr}^{(+)}$

$\rho_{k,j}^{(0)} = \rho_{j,k}^{(0)} = 10^{-1} \dots$

c) Kreuzkorrelationen der integralen Querschnittsgrößen (jeweils gültig für einen Querschnitt, d. h. ohne räumlichen Abstand)



d) Mittlere integrale Arbeitslinien (—) der Querschnitte und zugehörige σ - Grenzen (-----)

Tafel 1: Tragwerksmodell und stochastisches integrales Querschnittsmodell [7]

empfohlenen Arbeitslinie nach GRASSER [20] beschrieben, das des Betonstahls mit dem RAMBERG-OSGOOD-Polynom [21] Die Mitwirkung des Betons in der Zugzone wird durch Modifikation der Arbeitslinie des gezogenen Betonstahls nach [14] berücksichtigt.

Sämtliche integralen Querschnittsgrößen werden mit logarithmischen Normalverteilungen beschrieben (Tafel 1b). Die Autokorrelationsparameter α_k ($k = B_1, \dots, M_y^{(+)}$) (Tafel 1b) gelten für das Autokorrelationsmodell (29) und in Verbindung mit den Kreuzkorrelationskoeffizienten $\rho_{(j,k),e}^{(0)}$ ($j \neq k$; $j, k = B_1, \dots, M_y^{(+)}$; $e = 1, \dots, n_e$) (Tafel 1c) für das Kreuzkorrelationsmodell (30). In der Tafel 1d sind die Polynomapproximationen der „mittleren“ inversen Arbeitslinien der Querschnitte und die zugehörigen σ -Grenzen dargestellt. Es wird deutlich, dass der stochastische Charakter der Material- und Geometriegrößen insbesondere im gerissenen Zustand einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Tragverhalten der Querschnitte und folglich auf die Sicherheit des Tragwerks besitzt.

Das stochastische Modell der Eigenlasten g_1 der beiden Querschnittstypen (Tafel 2) wurde in Analogie zu den Modellen der integralen Querschnittsgrößen aufgestellt. Der Variationskoeffizient $v_{G_2} = 0,10$ der logarithmisch normalverteilten ständigen Belastung G_2 wird angenommen (Tafel 2). Die veränderlichen, voneinander unabhängigen Einheitslasten L_1, L_2 und L_3 sind POISSONSche Rechteck-Pulsprozesse mit identischen Puls-Intensitätsverteilungen und Prozessparametern (Tafel 2). Sie wirken mit der Intensität $p \cdot p_0$, wobei p_0 eine feststehende Grundlastintensität und p ein veränderlicher Lastfaktor ist. Die Lastprozesse können kombiniert in den Lastfallkombinationen q ($q = 1, \dots, 7$) auftreten (Tafel 2).

Die stochastischen Berechnungen werden mit der MC-Simulation mit einem Stichprobenumfang von $n_{MC} = 10^4$ Realisierungen durchgeführt. Die Nutzungsdauer des Balkens wird mit $T = 50$ Jahren angenommen. Die unterschiedliche Modellbildung der Steifigkeitsdegradation wird durch Verwendung der unterschiedlich definierten adaptiven Grenzlastfaktoren $p_A(\mathbf{B}_I)$ ungeschädigtes Tragwerk), $p_A(\mathbf{B}_{r,m,min})$ (total geschädigtes Tragwerk), $p_{A,min,0}$ (elementare untere Grenze), $p_{A,min,1}$ (verbesserte untere Grenze) berücksichtigt. Die Überlagerung der veränderlichen Lasten erfolgt im Raum der elastischen Tragwerksantworten durch Addition der Extremwerte der einzelnen Lastfälle bzw. durch exakte Extremwertüberlagerung (vgl. Kapitel 3.3). Die mittleren Erneuerungsraten und die mittleren Pulsdauern der Überlagerungsprozesse $s_{q,e,b,f}$ ($q = 4, 5, 6, 7$; $e = 1, \dots, 22$; $b = 1, 2$; $f = 1, 2$) ergeben sich aus den Prozessparametern der Lastprozesse L_1, L_2 und L_3 (Tafel 2) zu $\lambda_{p,sq} = 0,5 \text{ Jahre}^{-1}$ für $q = 4, 5, 6$ bzw.

Ständige Lasten g_1 und G_2						
Größe	Verteilung	Mittelwert \bar{k}	Standardabweichung σ_k	Variationskoeffizient v	Korrelationsparameter α_k	
$k =$		[kN/m]	[kN/m]		[1/m]	
g_1	Log.-N.	7,33	0,143	0,0195	2,40E-02	QS-Typ 1
G_2	Log.-N.	7,33	0,154	0,0210	2,64E-02	QS-Typ 2

Veränderliche Lasten L_1, L_2, L_3							
Größe	Puls-Intensitäts-Verteilung	Mittelwert \bar{k}	Standardabweichung σ_k	Variationskoeffizient v	Prozesstyp	Erneuerungsrate $\lambda_{p,L}$	Mittlere Dauer $\mu_{p,L}$
$k =$		[kN/m]	[kN/m]			[1/Jahr]	[Jahre]
L_1, L_2, L_3	Normal	1,000	0,500	0,5000	Pois. RP	5,0	0,01

Lastfallkombinationen			
L_q $q =$	Lastfall L_j		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	•		
2		•	
3			•
4	•	•	
5	•		•
6		•	•
7	•	•	•

Tafel 2: Stochastisches Belastungsmodell des Durchlaufträgers

Extremwertaddition			
k =	\bar{k}^*	σ_k^*	v_k^*
$p_A(\mathbf{B}_i)$	25,3015	2,5857	0,1022
$p_A(\mathbf{B}_{r,m,min})$	25,3316	2,5813	0,1019
$p_{A,min,0}$	16,7066	1,7527	0,1049
$p_{A,min,1}$	21,3331	2,4793	0,1162

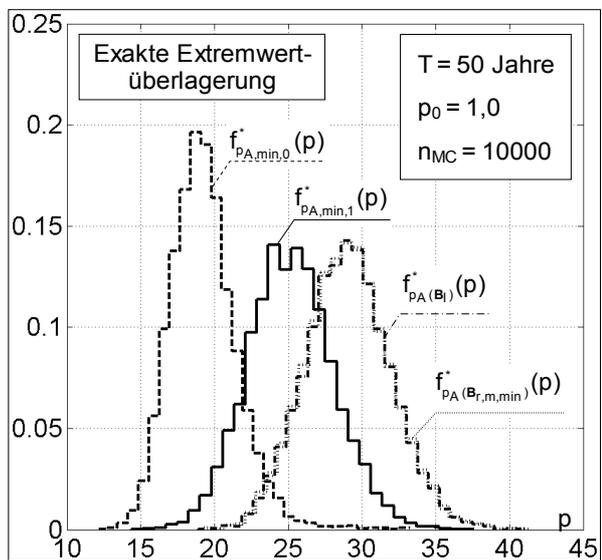
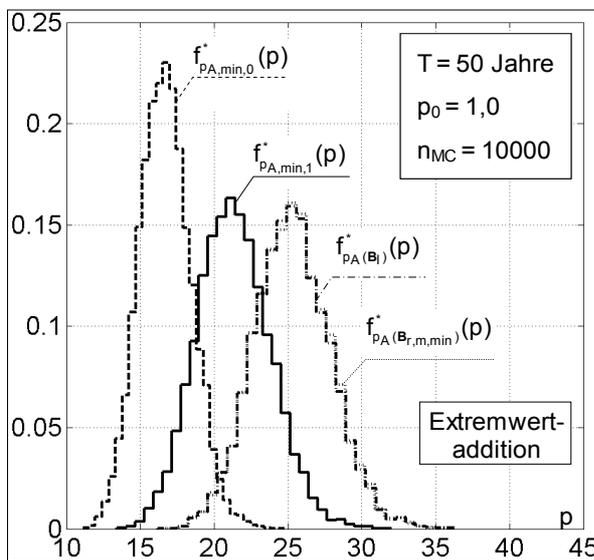
Exakte Extremwertüberlagerung			
k =	\bar{k}^*	σ_k^*	v_k^*
$p_A(\mathbf{B}_i)$	29,0774	2,8805	0,0991
$p_A(\mathbf{B}_{r,m,min})$	29,1028	2,8795	0,0989
$p_{A,min,0}$	19,3011	2,2600	0,1171
$p_{A,min,1}$	25,1884	2,8801	0,1143

a) Statistische Parameter unterschiedlich definierter adaptiver Grenzlastfaktoren ($n_{MC} = 10000$)

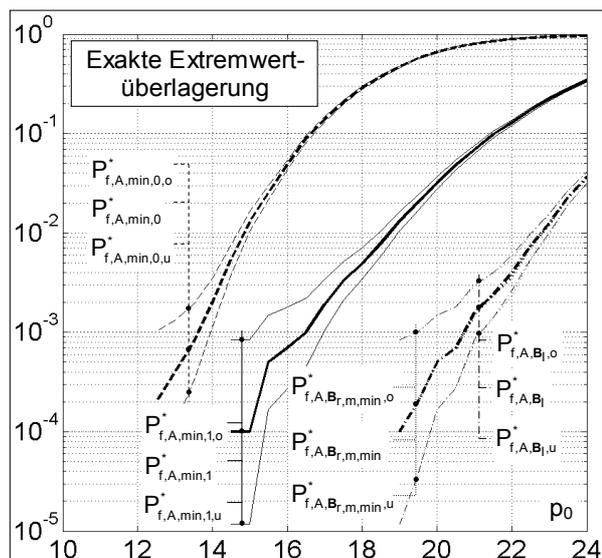
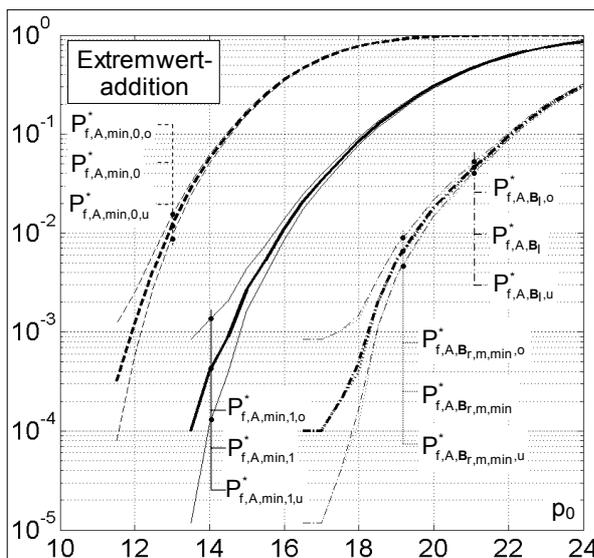
Extremwertaddition				
	$p_{ad}(\mathbf{B}_i)$	$p_{ad}(\mathbf{B}_{r,m,min})$	$p_{ad,min,0}$	$p_{ad,min,1}$
$p_A(\mathbf{B}_i)$	1,0000	0,9992	0,9096	0,9345
$p_A(\mathbf{B}_{r,m,min})$	0,9992	1,0000	0,9056	0,9311
$p_{A,min,0}$	0,9096	0,9056	1,0000	0,9128
$p_{A,min,1}$	0,9345	0,9311	0,9128	1,0000

Exakte Extremwertüberlagerung				
	$p_{ad}(\mathbf{B}_i)$	$p_{ad}(\mathbf{B}_{r,m,min})$	$p_{ad,min,0}$	$p_{ad,min,1}$
$p_A(\mathbf{B}_i)$	1,0000	0,9991	0,7612	0,9065
$p_A(\mathbf{B}_{r,m,min})$	0,9991	1,0000	0,7581	0,9041
$p_{A,min,0}$	0,7612	0,7581	1,0000	0,8062
$p_{A,min,1}$	0,9065	0,9041	0,8062	1,0000

b) Korrelationskoeffizienten unterschiedlich definierter adaptiver Grenzlastfaktoren ($n_{MC} = 10000$)



c) Empirische Dichtefunktionen unterschiedlich definierter adaptiver Grenzlastfaktoren



d) Schätzwerte P_f^* und Konfidenzgrenzen $P_{f,u}^*$ und $P_{f,o}^*$ ($\alpha = 0,01$) der Versagenswahrscheinlichkeiten unterschiedlich definierter adaptiver Grenzlastfaktoren in Abhängigkeit vom Grundlastniveau p_0

Tafel 3: Ergebnisse der stochastischen Tragwerksanalyse

$\lambda_{p,sq} = 0,0375 \text{ Jahre}^{-1}$ für $q=7$ (42) und $\mu_{p,sq} = 0,005 \text{ Jahre}$ für $q=4, 5, 6$ bzw. $\mu_{p,sq} = 0,00\bar{3}$ Jahre für $q=7$ (43).

Die Grenzlasterfaktoren $p_A(\mathbf{B}_I, p_0)$, $p_A(\mathbf{B}_{r,m,\min}, p_0)$, $p_{A,\min,0}(p_0)$ und $p_{A,\min,1}(p_0)$ für Grundlastintensitäten $p_0 \neq 1,0$ gehen aus den entsprechenden für $p_0 = 1,0$ berechneten Grenzlasterfaktoren durch die Transformation $p_A(p_0) = p_A(p_0=1)/p_0$ hervor. Damit können entsprechende Stichprobentransformationen durchgeführt und die numerisch aufwendige MC-Simulation auf die Grundlastintensität $p_0 = 1,0$ beschränkt werden.

In den Tafeln 3a,b,c ist die statistische Auswertung der oben genannten adaptiven Grenzlasterfaktoren für die Grundlastintensität $p_0 = 1,0$ dokumentiert. Es ist festzustellen:

- Die Mittelwerte $\bar{p}_A^*(\mathbf{B}_I)$ und $\bar{p}_A^*(\mathbf{B}_{r,m,\min})$ bzw. die Standardabweichungen $\sigma_{p_A(\mathbf{B}_I)}^*$ und $\sigma_{p_A(\mathbf{B}_{r,m,\min})}^*$ der Grenzlasterfaktoren des ungeschädigten und des vollständig geschädigten Tragwerks sind in beiden Fällen nahezu identisch (Tafel 3a).
- Die Variationskoeffizienten der unterschiedlich definierten Grenzlasterfaktoren sind im Fall der Extremwertaddition etwa gleich groß. Im Fall der exakten Extremwertaddition liegt eine geringfügige Vergrößerung der Variationskoeffizienten $v_{p_{A,\min,0}}^*$ und $v_{p_{A,\min,1}}^*$ der unteren Grenzen gegenüber den Variationskoeffizienten $v_{p_A(\mathbf{B}_I)}^*$ und $v_{p_A(\mathbf{B}_{r,m,\min})}^*$ des ungeschädigten und des total geschädigten Tragwerks vor (Tafel 3a).
- Die Mittelwerte der Grenzlasterfaktoren sind bei exakter Extremwertüberlagerung erwartungsgemäß etwas größer als bei der Extremwertaddition (je nach Grenzlasterfaktor 15,...,18%). Die Verschiebungen der empirischen Dichten veranschaulichen diese Tendenz (Tafel 3c).
- Zwischen den unterschiedlich definierten Grenzlasterfaktoren sind in beiden Fällen der Extremwertüberlagerung wesentliche lineare Korrelationen vorhanden (Tafel 3b). Die größte lineare Abhängigkeit liegt zwischen den nahezu vollständig korrelierten Grenzlasterfaktoren $p_A(\mathbf{B}_I)$ und $p_A(\mathbf{B}_{r,m,\min})$ vor. Die geringste Korrelation ist jeweils zwischen $p_A(\mathbf{B}_{r,m,\min})$ und $p_{A,\min,0}$ vorhanden.

In der Tafel 3d sind Schätzwerte $P_{f,k}^*$ ($k = A; A,\min,0; A,\min,1$) (51) der Versagenswahrscheinlichkeiten bezüglich des adaptiven Grenzzustandes und die zugehörigen Konfidenzgrenzen $P_{f,k,u}^*$ (54) und $P_{f,k,o}^*$ (55) für $\alpha=0,01$ in Abhängigkeit von der Definition des adaptiven Grenzlasterfaktors und der Grundlastintensität p_0 aufgetragen. Der Grenzzustand wird durch Gleichung (47) beschrieben. Es sind folgende Feststellungen zu treffen:

- Die Versagenswahrscheinlichkeiten nehmen erwartungsgemäß in allen Fällen mit steigender Grundlastintensität p_0 stetig zu.
- Die Versagenswahrscheinlichkeiten P_{f,A,\mathbf{B}_I}^* und $P_{f,A,\mathbf{B}_{r,m,\min}}^*$ des ungeschädigten und des vollständig geschädigten Tragwerks sind in beiden Fällen der Extremwertüberlagerung nahezu identisch.
- Etwa ein bis zwei Zehnerpotenzen größer sind die Versagenswahrscheinlichkeiten $P_{f,A,\min,1}^*$ unter Berücksichtigung der Steifigkeitsdegradation mit der verbesserten unteren Grenze des adaptiven Grenzlasterfaktors. Diese Differenz nimmt tendenziell mit steigender Lastintensität ab.

- Die genannte Größenordnung der Differenz zwischen den genannten Versagenswahrscheinlichkeiten ist sicherheitsrelevant und verdeutlicht die Notwendigkeit der Berücksichtigung der beanspruchungsabhängigen Steifigkeitsdegradation.
- Um weitere ein bis zwei Zehnerpotenzen größer – und damit sehr konservativ – sind die Versagenswahrscheinlichkeiten $P_{f,A,min,0}^*$ unter Verwendung der elementaren unteren Grenzen des adaptiven Grenzlastfaktors.
- Die Lastüberlagerung durch Extremwertaddition führt im Vergleich mit der exakten Extremwertüberlagerung zu größeren Versagenswahrscheinlichkeiten, wobei sich die einander entsprechenden Werte etwa um eine Zehnerpotenz unterscheiden. Dementsprechend stellt die Extremwertaddition im Vergleich mit der exakten Extremwertüberlagerung erwartungsgemäß die konservative Lösung dar.

5 ZUSAMMENFASSUNG

Unter Verwendung der MC-Simulation wird die Versagenswahrscheinlichkeit von wechselnd belasteten Stahlbetonbalken mit beanspruchungsabhängiger Steifigkeitsdegradation bezüglich des Grenzzustandes der Adaption geschätzt. Dafür wird ein stochastisches Berechnungsmodell entwickelt, das speziell auf die Anwendung der mathematischen Optimierung als Lösungsmethode der Adaptionsanalyse abgestimmt ist.

Im Rahmen der Adaptionsanalyse wird die Restbiegesteifigkeit der Stahlbetonbalken von der Lastgeschichte entkoppelt. Dies führt zum Verlust der Eindeutigkeit des adaptiven Grenzlastfaktors, lässt aber dessen Eingrenzung zu.

Stochastische Tragwerksgrößen werden in Konsistenz mit dem FE-Modell des Tragwerks durch mehrdimensionale in sich korrelierte Zufallsgrößen, zeitlich veränderliche Lasten durch nutzungsdauerbezogene Extremwertverteilungen POISSONScher Rechteck-Pulsprozesse beschrieben. Die Überlagerung der Auswirkungen zeitlich veränderlicher Lasten erfolgt auf der Ebene der elastischen Tragwerksantworten in vereinfachter Form durch Extremwertaddition oder in exakter Form durch eine entsprechende Kombinationsregel.

Für einen wechselnd belasteten Stahlbeton-Durchlaufträger wird die Sicherheitsanalyse bezüglich des Grenzzustandes der Adaption durchgeführt. Es zeigt sich, dass die Versagenswahrscheinlichkeit durch die Steifigkeitsdegradation deutlich erhöht wird und dass die vereinfachte Form der Lastüberlagerung zu einer konservativen Einschätzung der Tragwerksicherheit führt.

LITERATUR

- [1] König, J.A.: *Shakedown of elastic-plastic Structures (Fundamental studies in engineering 7)*. Amsterdam, Elsevier, 1987
- [2] Raue, E.: *Zur Bestimmung der adaptiven Grenzlast statisch unbestimmter Tragwerke*. Industrie- und Spezialbau - Theorie und Anwendung, Festschrift Prof. E. Hampe, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar 1993
- [3] Timmler, H.-G.; Saad, M.: *Anwendung der Theorie adaptiver Tragwerke auf ebene Stahlbetonrahmen*. Industrie- und Spezialbau – Theorie und Anwendung, Festschrift Prof. E. Hampe, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar 1993
- [4] Weitzmann, R.: *Bemessungskonzept für Stahlbetontragwerke auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 2000
- [5] Broßmann, M.; Müller, K.-H.; Raue, R.: *Analyse des adaptiven Tragverhaltens von Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung der Steifigkeitsdegradation infolge Rissbildung*. Schriften der Bauhaus-Universität Weimar – Veröffentlichungen des SFB 524: Revitalisierung von Bauwerken (2005), Heft 117, S. 15-24
- [6] Broßmann, M.: *Stahlbetonbalken im Grenzzustand der Adaption unter Berücksichtigung der Steifigkeitsdegradation*. Beton- und Stahlbetonbau 100 (2005) – Tagungsband Doktorandensymposium 45. Forschungskolloquium des DAfStb, S. 29-32
- [7] Broßmann, M.: *Analyse von Stahlbeton-Stabtragwerken mit der mathematischen Optimierung unter Berücksichtigung der Steifigkeitsdegradation und stochastischer Einflüsse*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, eingereicht 2006
- [8] Raue, E.; Vaidogas, E. Müller, K.-H.: *Bewertung der Grenzlast statisch unbestimmter Tragwerke*. IKM 1997, Bauhaus-Universität Weimar (auf CD)
- [9] Müller, K.-H.; Broßmann, M.: *Probabilistische Beurteilung von Grenzlastfaktoren für ein Stahlbetontragwerk*. Thesis – Wissenschaftliche Zeitschrift der Bauhaus-Universität Weimar, 46.Jg., Weimar 2000
- [10] Müller, K.-H.; Broßmann, M.: *Berücksichtigung des zeitlich zufälligen Lastverhaltens bei der adaptiven Grenzlastanalyse*. Massivbau – Beiträge aus Theorie und Praxis Schriftenreihe der Bauhaus-Universität Weimar, Heft 113, Festschrift anlässlich des 60. Geburtstages von Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue, Weimar, 2002, S. 31-39
- [11] Müller, K.-H.; Broßmann, M.: *Berücksichtigung des zeitlich zufälligen Lastverhaltens und zufälliger Systemeigenschaften bei der adaptiven Grenzlastanalyse*. IKM 2003 - proceedings 16th Intern. Conference On the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, CD zur Tagung, Bauhaus-Universität Weimar, 2003
- [12] Marx, S.: *Anwendung der mathematischen Optimierung bei der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analyse von Stahlbetontragwerken*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 2000
- [13] *CEB-FIP Model Code 90*. Comité Euro-International du Béton, Lusanne 1990
- [14] *Erläuterungen zu DIN 1045-1*. DAfStb Heft 525, Beuth, Berlin 2003

- [15] Atkočiunas, J.: *Berechnung elastisch – plastischer Systeme unter wiederholter Belastung*. Verlag für Wissenschaft und Enzyklopädie Vilnius, Vilnius, 1994 (in russisch)
- [16] Atkočiunas, J.: *Energetische Grenzen des Einspielzustandes elastoplastischer Konstruktionen*. Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Heft 41, Weimar 1995, S. 6,7
- [17] Wen, Y.-K.: *Structural Load Modeling and Combination for Performance and Safety Evaluation*. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo 1990
- [18] Storm, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistisch Qualitätskontrolle*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1972
- [19] DIN 1045-1: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth, Juli 2001
- [20] Grasser, E.: *Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen*. Dissertation, TU München, 1968
- [21] Ramberg, W.; Osgood, W. R.: *Description of stress-strain curves by three parameters*. NACA, TN 902, 1943