

**Tragverhalten von Betondruckgliedern  
mit vorgespannter Umschnürung aus Formgedächtnislegierungen,  
Stahl oder faserverstärkten Kunststoffen**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen

der

BAUHAUS-UNIVERSITÄT WEIMAR

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Lars Janke

geb. am 3. Juni 1972

Weimar, Dezember 2013

Gutachter

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ruth

Prof. Dr. Masoud Motavalli

Prof. Dr. Guido Morgenthal

Tag der Disputation: 21. August 2014



# Vorwort

Im Titel dieser Arbeit werden insbesondere zwei Materialien genannt, deren Wahrnehmung im Bauwesen gegensätzlicher nicht sein könnte: erstens Beton, aus dem seit Langem die meisten unserer Bauwerke bestehen, und zweitens Formgedächtnislegierungen, die noch weitestgehend unerprobt sind. Zu den bemerkenswerten Eigenschaften der Formgedächtnislegierungen zählt ihre thermische Vorspannbarkeit, die als Inspiration für eine neuartige Bewehrung dient: vorgespannte Wendelbewehrung für Druckglieder aus Beton.

Im Rahmen einer wissenschaftlichen Kooperation der Professur Massivbau II der Bauhaus-Universität Weimar und der Abteilung Ingenieur-Strukturen der Eidgenössischen Materialprüfungs- und Forschungsanstalt (Empa) wurde untersucht, welchen Vorteil eine Vorspannung der Umschnürung von druckbeanspruchtem Beton bietet und ob eine thermisch vorgespannte Formgedächtnislegierung als Umschnürung tauglich ist.

Zur Lösung dieser Aufgabe wurden neue Berechnungswerkzeuge für das Verhalten des mehraxial druckbeanspruchten Betons entwickelt und Versuche an der Abteilung Ingenieur-Strukturen der Empa und der Bauhaus-Universität Weimar durchgeführt. Diese Aspekte stehen im Zentrum der vorliegenden Dissertation. Konventionelle Umschnürungsmaterialien wie Stahl und faserverstärkter Kunststoff wurden ergänzend in die Untersuchung mit einbezogen.

Die Arbeit bietet darüber hinaus einen grundlegenden Blick auf die Materialgruppe der Formgedächtnislegierungen aus der Perspektive eines Bauingenieurs. Der Fokus liegt dabei auf Legierungen, die bleibend vorspannbar sind, einen hohen Eisenanteil haben und sich deshalb für Anwendungen im konstruktiven Ingenieurbau eignen könnten.

Brandenburg an der Havel, im Oktober 2014

Lars Janke



# Inhaltsverzeichnis

<b>Bildverzeichnis</b>	<b>9</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>13</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>15</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>19</b>
1.1 Motivation und Zielsetzung . . . . .	19
1.2 Gliederung . . . . .	21
1.3 Abgrenzung . . . . .	22
<b>2 Grundlagen</b>	<b>23</b>
2.1 Idealisierung umschnürter Betondruckglieder . . . . .	23
2.2 Beton . . . . .	23
2.2.1 Gefüge und Bindungskräfte . . . . .	24
2.2.2 Spannungs-Dehnungs-Verhalten . . . . .	25
2.2.3 Risse im Beton . . . . .	29
2.2.4 Verdichtung . . . . .	30
2.2.5 Lokalisierung . . . . .	31
2.2.6 Schädigung und Festigkeit . . . . .	32
2.2.7 Schädigungsindikatoren . . . . .	33
2.2.8 Energie und Dissipation . . . . .	34
2.2.9 Modellierungsstrategien . . . . .	36
2.3 Konventionelle Umschnürungsmaterialien . . . . .	38
2.3.1 Stahl . . . . .	38
2.3.2 Faserverstärkte Kunststoffe (FVK) . . . . .	39
2.4 Formgedächtnislegierungen (FGL) . . . . .	40
2.4.1 Typen und charakteristische Eigenschaften von FGL . . . . .	40
2.4.2 Umwandlungstemperaturen und Spannung . . . . .	41
2.4.3 Pseudoplastizität des Martensit . . . . .	43
2.4.4 Materialverhalten und Anwendungen . . . . .	43
2.4.5 Baupraktisch relevante Legierungen . . . . .	46
2.4.6 Bildung und Deformation des Martensit in Fe-Mn-Si-Cr . . . . .	47
2.4.7 Nachweis des Phasenzustands . . . . .	47
2.5 Umschnürte Betondruckglieder . . . . .	48
2.5.1 Wesentliche experimentelle Erkenntnisse ohne Quervorspannung . . . . .	48
2.5.2 Bisherige Arbeiten zur Quervorspannung von Betondruckgliedern . . . . .	50
2.5.3 Experimente mit vorgespannter FGL-Umschnürung . . . . .	51
2.5.4 Berechnungsmodelle . . . . .	51
2.5.5 Beziehungen am umschnürten Zylinder . . . . .	53

2.5.6	Exakte Dehnungsverteilung in einlagigen Umschnürungen . . . . .	55
2.5.7	Quantifizierung des Umschnürungsgrads . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Versuche</b>	<b>59</b>
3.1	Versuchsarten . . . . .	59
3.2	Übersicht Zylinderdruckversuche . . . . .	59
3.3	Druckversuche: Eigenschaften und Ausführung . . . . .	61
3.3.1	Betonzylinder . . . . .	61
3.3.2	Stahlband . . . . .	62
3.3.3	Bänder aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFVK) . . . . .	64
3.3.4	Herstellen der vorgespannten Umschnürung . . . . .	65
3.3.5	Parameter der Umschnürung und Vorspannung . . . . .	67
3.3.6	Ausführung Zylinderdruckversuche . . . . .	69
3.4	Druckversuche: Ergebnisse . . . . .	70
3.4.1	Hinweise zur Auswertung . . . . .	70
3.4.2	Serie A . . . . .	72
3.4.3	Serie B . . . . .	74
3.4.4	Serie C . . . . .	78
3.4.5	Serie D . . . . .	81
3.5	FGL-Temperatur-Zugversuche . . . . .	82
3.5.1	Materialeigenschaften und Probenvorbereitung . . . . .	82
3.5.2	Aufbau und Ablauf der Versuche . . . . .	83
3.5.3	Vordehnen . . . . .	85
3.5.4	Temperaturzyklus – Ergebnisse und Diskussion . . . . .	85
3.5.5	Vorgespannter Zustand – Ergebnisse und Diskussion . . . . .	87
3.5.6	Fazit für Modellbildung und Baupraxis . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Modellbildung</b>	<b>91</b>
4.1	Restfestigkeit des umschnürten Betons . . . . .	91
4.1.1	Energieanteile mehraxial . . . . .	91
4.1.2	Berechnung der Energieanteile . . . . .	93
4.1.3	Versuchsdaten und Fazit zur Relevanz der radialen Energiedifferenz . . . . .	94
4.1.4	Schädigungsindikator . . . . .	96
4.1.5	Restfestigkeitsgesetz . . . . .	96
4.2	Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons . . . . .	97
4.2.1	Überblick . . . . .	97
4.2.2	Spannungs-Dehnungs-Funktion Teil 1 . . . . .	99
4.2.3	Einaxiale Formänderungsenergie analytisch . . . . .	101
4.2.4	Anstieg der plastischen Tangente . . . . .	101
4.2.5	Übergangspunkt . . . . .	105
4.2.6	Funktion für Volumendehnung . . . . .	106
4.2.7	Lösung für unbekanntem Querdruck . . . . .	109
4.2.8	Berechnungsablauf gesamtes Spannungs-Dehnungs-Modell . . . . .	110
4.3	Schnittstelle zum Modell der Umschnürung . . . . .	112
4.3.1	Linear-elastische Umschnürung . . . . .	112
4.3.2	Elasto-plastische Umschnürung und effektive Zugspannung . . . . .	113
4.3.3	Nichtlinear-elastische Umschnürung . . . . .	114
4.4	Modelle für die zu untersuchenden Umschnürungen . . . . .	115
4.4.1	Stahlband der Versuche . . . . .	115
4.4.2	Formgedächtnislegierung der Versuche . . . . .	117

4.4.3	CFVK der Versuche . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Verifikation und Parameterstudien</b>	<b>121</b>
5.1	Restfestigkeitsmodell mit Versuchsdaten . . . . .	121
5.2	Spannungs-Dehnungs-Modell Beton . . . . .	123
5.3	Restfestigkeit mit Spannungs-Dehnungs-Modell . . . . .	127
5.4	Vorspannung und höherer Materialeinsatz im Vergleich . . . . .	129
5.5	FGL-Umschnürung . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>135</b>
6.1	Ergebnisse . . . . .	135
6.2	Ausblick . . . . .	137
<b>A</b>	<b>Vorzeichen, Hauptspannungen, Achsen</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Beziehungen am Zylinder</b>	<b>143</b>
<b>C</b>	<b>Betoneigenschaften und Referenzzylinder</b>	<b>155</b>
<b>D</b>	<b>Zum Modell des Stahlbands der Versuche</b>	<b>159</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>165</b>



# Bildverzeichnis

1.1	Kollabierte Stahlbetonstützen einer Brücke . . . . .	19
2.1	Umschnürtes Betondruckglied idealisiert . . . . .	23
2.2	Maßstabebenen für Beton . . . . .	24
2.3	Hauptspannungen und Indizes . . . . .	26
2.4	Spannungs-Dehnungs-Linien einaxialer Druckbelastung . . . . .	26
2.5	Triaxialversuche an Würfeln mit verschiedenen konstanten Querdrücken . . . . .	27
2.6	Mehraxiale Bruchspannung von Beton . . . . .	28
2.9	Risse nach einaxialer Belastung unter dem Rasterelektronenmikroskop . . . . .	31
2.10	Hohlräume in der Zementsteinmatrix unter dem Rasterelektronenmikroskop . . . . .	32
2.11	Zur Definition der Restfestigkeit . . . . .	33
2.12	Zusammenhang zwischen Steifigkeit und Querdehnung . . . . .	34
2.13	Energienanteile . . . . .	35
2.14	Stahl im axialen Zugversuch . . . . .	39
2.15	Umwandlungstemperaturprofil von FGL . . . . .	43
2.16	Gitterstrukturen in FGL schematisch . . . . .	44
2.17	Martensit in Fe-Ni-Co-Ti unter dem Mikroskop . . . . .	44
2.18	Prinzipielle Spannungs-Dehnungs-Kurven und Umwandlungstemperaturprofile $z$ - $T$ für die Effekte der FGL . . . . .	45
2.19	Gemessene Spannungs-Dehnungs-Kurven des Betons, abhängig von Art und Menge der Umschnürung . . . . .	49
2.20	Entwicklung der Volumendehnung im Beton . . . . .	50
2.21	Geometrische Parameter einer wendelförmigen Umschnürung . . . . .	54
2.22	Vereinfachte Annahme zur Spannungsverteilung in der Umschnürung . . . . .	54
2.23	Biegung eines Balkens zum Ring und typische Dehnzustände . . . . .	56
2.24	Weitung eines Ringes . . . . .	56
3.1	Parameterkombinationen und Lastschemata für Zylinderdruckversuche . . . . .	60
3.2	Charakterisierung Stahl- und CFVK-Bänder in Zugversuchen . . . . .	62
3.3	Mittelkurven der Zugversuche der Stahlbänder . . . . .	63
3.4	Beispiel eines Zugversuchs mit CFVK-Band. . . . .	64
3.5	Prinzipiskizze: Aufziehen der Bänder auf der Drehbank . . . . .	65
3.6	Drehbank vor dem Aufziehen, Bremsvorrichtung mit Kraftmessdose . . . . .	66
3.7	Drehbank nach dem Aufziehen, Verankerungsschellen gesetzt . . . . .	66
3.8	Detail einer montierten Verankerungsschelle . . . . .	66
3.9	Umschnürte Zylinder . . . . .	67
3.10	Umschnürungsmodul baupraktisch und in den Versuchen . . . . .	68
3.11	Dehnmessstreifen auf den Bändern . . . . .	70
3.12	Anlaufeffekt und Gewindenspiel in Kraft-Verschiebungs-Kurven . . . . .	71
3.13	Kenngrößen für die Duktilitätssteigerung . . . . .	72

3.14	Typische radiale und axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven Serie A . . . . .	73
3.15	Zylinder der Serie A nach dem Bruch . . . . .	74
3.16	Ausgewählte radiale und axiale Spannungs-Dehnungs Kurven der Serie B . .	75
3.17	Spannung-Dehnung axial, bis zur Überlast, für Serie B . . . . .	77
3.18	Ergebnisse der Wiederbelastung ohne Umschnürung Serie B . . . . .	78
3.19	Radiale und axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven, 100 Zyklen, s2, Serie C . .	79
3.20	Ergebnisse Serie C: Restfestigkeit und Spannung-Dehnung axial . . . . .	80
3.21	Zylinder s1p0C-50w nach dem Bruch . . . . .	80
3.22	Serie D: Biegung mit Normalkraft . . . . .	81
3.23	FGL-Drähte eingespannt in Zugprüfmaschinen . . . . .	84
3.24	Vordehnen AS1 . . . . .	85
3.25	Temperaturzyklen Fe-Mn-Si-Cr . . . . .	86
3.26	Belastung Fe-Mn-Si-Cr nach Vorspannung durch FGE . . . . .	88
3.27	Effekt von Unterkühlung und Erwärmung der FGL im Vorspannzustand . .	90
4.1	Einaxiale Restfestigkeit des Betons nach umschnürter Vorbelastung . . . . .	91
4.2	Grafische Interpretation der Energieanteile in axialer Richtung . . . . .	92
4.3	Prinzipielle Spannungs-Dehnungs Linien und Formänderungsenergie mehr- axial; für Beton und linear-elastischen Körper, umschnürt . . . . .	93
4.4	Energieanteile aus Versuchen und linear-elastischer Zylinder. . . . .	95
4.5	Funktion für Restfestigkeit . . . . .	96
4.6	Grafische Interpretation von $W_{ac0}$ . . . . .	97
4.7	Eingangsparameter und Interaktion mit anderen Teilmodellen. . . . .	98
4.8	Anwendungsbereich des Modells . . . . .	98
4.9	Unterteilung $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$ Kurve . . . . .	98
4.10	Angepasste GRASSER-Funktion . . . . .	100
4.11	$\varepsilon_a$ bei $\min \varepsilon_V$ . . . . .	100
4.12	Funktion für $k_S$ . . . . .	100
4.13	Inkrementelle axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve Teil 1 . . . . .	101
4.14	Plastische Tangente prinzipiell . . . . .	102
4.15	Versuchsdaten und Regressionsanalyse plastischer Anstieg . . . . .	103
4.16	Graph der gewählten Funktion $K_{cp}(C)$ . . . . .	104
4.17	Versuchsdaten und Regressionsanalyse $C_0$ . . . . .	104
4.18	Parameterstudie für $K_{cp}(C, f_{c0})$ . . . . .	105
4.19	Übergangspunkt . . . . .	105
4.20	Funktion $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$ . . . . .	106
4.21	Nulldurchgang der Volumendehnung, Versuchsdaten und Funktion . . . . .	108
4.22	Funktion $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$ und Versuchsergebnisse aus [97] . . . . .	109
4.23	Berechnungsablauf radiale Spannung und Dehnung mit Sekantenverfahren .	110
4.24	Struktogramm der gesamten Spannungs-Dehnungs-Berechnung . . . . .	111
4.25	Aufbau der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve . . . . .	111
4.26	Linear-elastische Umschnürung . . . . .	112
4.27	Elasto-plastische Umschnürung . . . . .	113
4.28	Effektive Zugspannung bei unterschiedlich ausgelasteten Lagen . . . . .	113
4.29	Anpassung für nichtlinear-elastische Umschnürung . . . . .	115
4.30	Äußere Randfaserdehnung im Vorspannzustand . . . . .	116
4.31	FE-Modell . . . . .	117
4.32	Spannung im Zugversuch einaxial und berechnete effektive Zugspannung . .	118
4.33	Materialmodell für vorgespannte FGL, basierend auf Versuch AS1 . . . . .	119

5.1	Restfestigkeitskurven und Überlast prinzipiell . . . . .	121
5.2	Ergebnisse des Restfestigkeitsmodells mit $\sigma_a-\varepsilon_a$ der Zylinderdruckversuche .	122
5.3	Axiale Spannung – axiale und radiale Dehnung; Versuche und Berechnung .	124
5.4	Berechnete Volumendehnung $\varepsilon_V$ und effektive Umschnürungsmoduln $C_e$ . .	126
5.5	Berechnete Restfestigkeits-Überlast-Kurven . . . . .	128
5.6	Vergleich Restfestigkeiten aus Gesamtmodell und Versuch . . . . .	129
5.7	Axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven für Parameterstudie . . . . .	130
5.8	Kurven der Restfestigkeit . . . . .	130
5.9	Einfluss von $\sigma_{rp}$ und $C$ auf den Nulldurchgang der Restfestigkeit. . . . .	131
5.10	Umschnürung aus FGL (AS1 und AS <sup>+</sup> ) im Vergleich mit Stahl und CFVK .	133
A.1	Vorzeichenkonvention am Beispiel einer Druckspannung . . . . .	140
A.2	Spannungen am Materialpunkt . . . . .	141
A.3	Koordinatensystem . . . . .	141
B.1	Definition der Richtungen . . . . .	144
B.2	Bezeichnungen am umschnürten Zylinder . . . . .	145
B.3	Spannungskomponenten in kartesischen und ebenen polaren Koordinaten . .	146
B.4	Spannungen und Dehnungen beim Vorspannen . . . . .	148
B.5	Parameterstudie $E_{cc}$ . . . . .	152
D.1	Stahlband 0.5 mm . . . . .	160
D.2	Stahlband 0.8 mm . . . . .	160
D.3	Geoemtrie und Elemente . . . . .	161
D.4	Randbedingungen und lokale Koordinaten . . . . .	162
D.5	Temporäre Randbedingung $u_\varrho$ . . . . .	162
D.6	Laststufen prinzipiell . . . . .	162
D.7	Effektive Zugspannung – äußere Randfaserspannung Beam 188 . . . . .	163
D.8	Effektive Zugspannung – radiale Dehnung Solid 45 . . . . .	164
D.9	Effektive Zugspannung – Dehnung der Mittelfaser Beam 188 . . . . .	164



# Abkürzungen

CFVK	kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
DMS	Dehnmessstreifen
FEM	Methode der finiten Elemente
FGE	Formgedächtniseffekt
FGL	Formgedächtnislegierung
FVK	faserverstärkte Kunststoffe
Fe-Mn-Si	Legierung Eisen-Mangan-Silizium
Fe-Mn-Si-Cr	Legierung Eisen-Mangan-Silizium-Chrom
Fe-Ni-Co-Ti	Legierung Eisen-Nickel-Cobalt-Titan
GFVK	glasfaserverstärkter Kunststoff
Ni-Ti	Legierung Nickel-Titan
PE	Pseudoelastizität
RT	Raumtemperatur
SE	Superelastizität
SIM	spannungsinduzierter Martensit, spannungsinduzierte Martensitbildung
TE	thermoelastisch
hdP	Gitterstruktur, hexagonal dichteste Packung
kfz	Gitterstruktur, kubisch flächenzentriert
w/z-Wert	Wasser-Zement-Wert



# Symbolverzeichnis

## Große lateinische Buchstaben

$A$	Fläche, Querschnittsfläche
$A_1$	Einzelquerschnittsfläche z. B. eines Bandes oder Stabes
$A_D$	Querschnittsfläche nach Abzug des geschädigten Anteils
$A_c$	Querschnittsfläche Beton
$A_f$	Temperatur bei der die Umwandlung zum Austenit beendet ist ( <i>finish</i> )
$A_s$	Temperatur bei der die Umwandlung zum Austenit beginnt ( <i>start</i> )
$A_t$	Querschnittsfläche Umschnürung für eine Einheit der Höhe
$C$	Umschnürungsmodul
$C_0$	Umschnürungsmodul bei $K_{cp} = 0$
$C_e$	effektiver Umschnürungsmodul bei nichtlinearem Material der Umschnürung
$D$	Schädigungsindikator Beton
$D_{c0}$	Schädigungsindikator Beton ohne Umschnürung, bei Erreichen der Festigkeit $f_{c0}$
$E$	Elastizitätsmodul
$E_A$	Elastizitätsmodul einer FGL im Austenit
$E_{AM}$	Elastizitätsmodul einer FGL bei Phasengemisch Austenit/Martensit
$E_{c0}$	Elastizitätsmodul Beton, Tangente im Ursprung der $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve
$E_{cc}$	Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des linear-elastischen, um-schnürten Zylinders
$E_s$	Sekantenmodul als Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs Kurve in Zylinder-druckversuchen nach Abklingen des Anlaufeffektes
$E_{si}$	$E_s$ eines bestimmten Zylinders
$E_{sm}$	Mittelwert der $E_{si}$ aller Zylinder einer Versuchsserie
$E_t$	Elastizitätsmodul der Umschnürung tangential zur Achse des Druckglieds
$E_w$	Linearer Anstieg zwischen Tiefpunkt und Ausgangsspannung der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei Entlastung bzw. Ent- und Wiederbelastung
$F$	Kraft
$F_{ad}$	Überlast die über $F_{c0}$ hinausgeht
$F_{c0}$	Höchstlast Betondruckglied einaxial
$F_i$	Druckkraft einer Laststufe
$F_{peak}$	Traglast (Höchstlast) metallisch umschnürter Betondruckglieder
$F_{wu,wo}$	untere bzw. obere Grenze der Druckkraft bei zyklischer Last
$H$	Integral der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Funktion bis zur Höchstspannung
$K_{Me}$	Tangentenmodul einer FGL mit Phasengemisch, bei elastischer Wiederbelastung

## Symbolverzeichnis

$K_{Mp}$	Tangentenmodul einer FGL mit Phasengemisch, auf dem Plateau der spannungsinduzierten Martensitbildung
$K_{cp}$	Anstieg axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve des Betons im plastischen Bereich
$K_{cpN}$	$K_{cp}$ normiert
$L$	freigesetzte Energie
$M_f$	Temperatur bei der die Umwandlung zum Martensit beendet ist ( <i>finish</i> )
$M_s$	Temperatur bei der die Umwandlung zum Martensit beginnt ( <i>start</i> )
$R_e$	elektrischer Widerstand
$R_{eH}$	obere Streckgrenze metallischer Werkstoff
$R_m$	Zugfestigkeit Stahl
$R_{p,0.2}$	technische Streckgrenze metallischer Werkstoff bei 0.2% bleibender Dehnung
$S$	Standardabweichung
$S_t$	Sekantenmodul der Spannungs-Dehnungs-Kurve der Umschnürung
$T$	Temperatur
$T_{krit}$	Temperatur bei der Martensit spannungsinduziert entsteht
$W$	mechanische Arbeit, Energie(dichte), Formänderungsenergie(dichte)
$W_{1,2,3}$	Formänderungsenergie der Hauptachsenrichtungen
$W_a$	axialer Anteil der der Formänderungsenergie des Betons
$W_{ac0}$	$W_a$ nicht umschnürter Beton bei Erreichen der Festigkeit $f_{c0}$
$W_{ae}$	axialer Anteil der Formänderungsenergie des linear-elastischen Zylinders
$W_{el}$	elastischer Anteil der Formänderungsenergie
$W_{ges}$	gesamte Formänderungsenergie des Betons
$W_{pl,\delta}$	dissipative Anteile der Formänderungsenergie (Plastizität, Kriechen)
$W_r$	radialer Anteil der der Formänderungsenergie des Betons
$W_{re}$	radialer Anteil der der Formänderungsenergie des linear-elastischen Zylinders
$Z$	Zugkraft
$Z_a$	Zugkraft beim Aufziehen der Umschnürung

## Kleine lateinische Buchstaben

$a$	Ausbiegung oder Koeffizient
$a_{1,2}$	Koeffizienten im Spannungs-Dehnungs-Modell Beton
$b$	Breite oder Koeffizient im Spannungs-Dehnungs-Modell Beton
$c$	Koeffizient
$c_{1,2}$	Koeffizienten im Spannungs-Dehnungs-Modell Beton
$d$	Durchmesser
$d_s$	Durchmesser Betonstahl
$e$	Exzentrizität
$f_R$	Restfestigkeit Beton, nach Überlast im umschnürten Zustand
$f_{Re}$	fiktive Anfangsfestigkeit Beton
$f_{c0}$	einaxiale Betondruckfestigkeit
$f_{c0,cyl}$	einaxiale Betondruckfestigkeit Zylinder
$f_{cc}$	axiale Betonspannung bei Traglast metallisch umschnürter Betondruckglieder
$h$	Höhe

$i$	Index für Laststufe oder Iterationsindex
$k$	Koeffizient im Spannungs-Dehnungs-Modell Beton
$k_S$	Koeffizient (Streckung) im Spannungs-Dehnungs-Modell Beton
$k_{aV0}$	$\varepsilon_{aV0}(\sigma_r)$ normiert zu $\varepsilon_{aV0}(\sigma_r=0)$
$k_r$	zu $f_{c0}$ normierte radiale Spannung des Betons
$l$	Länge
$m$	Masse
$n$	Lagenanzahl mehrlagiger Umschnürungen oder Anzahl der Lastwechsel
$r$	Radius
$s$	Steigung einer Wendel bzw. Bügelabstand
$t$	Dicke
$t_e$	effektive Dicke eines umschnürenden Mantels
$u$	Umfang
$w$	Verschiebung
$z$	Phasenfraktion einer FGL, Anteil des Martensit

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Tangentenneigung der $\varepsilon_V$ - $\varepsilon_a$ -Kurve bei $\varepsilon_a = 0$
$\alpha_T$	Temperaturausdehnungskoeffizient
$\gamma$	Toleranz bei iterativen Berechnungen oder Gleitung in elastischen Gleichungen
$\varepsilon$	Dehnungen (Stauchungen)
$\varepsilon_{1,2,3}$	Hauptdehnungen
$\varepsilon_A$	Flächendehnung
$\varepsilon_B$	Randfaserdehnung aus Biegung
$\varepsilon_P$	Dehnung aus Vorspannung
$\varepsilon_{Vp}$	Volumendehnung des Betons aus Vorspannung
$\varepsilon_V$	Volumendehnung des Betons
$\varepsilon_Z$	Dehnung einaxialer Zugversuch
$\varepsilon_a$	axiale Dehnung Beton
$\varepsilon_{aK}$	axiale Dehnung Beton am Übergangspunkt zur plastischen Tangente
$\varepsilon_{aKe}$	endgültiger Wert von $\varepsilon_{aK}$
$\varepsilon_{aV0}$	axiale Dehnung Beton beim Nulldurchgang der Volumendehnung
$\varepsilon_{aVm}$	axiale Dehnung Beton beim Minimum der Volumendehnung
$\varepsilon_{ap}$	axiale Dehnung Beton aus Vorspannung
$\varepsilon_{au}$	axiale Bruchdehnung Beton (Bruch des umschnürten Systems)
$\varepsilon_{c0}$	axiale Betonstauchung bei einaxialer Festigkeit $f_{c0}$
$\varepsilon_{pl}$	plastische Dehnung
$\varepsilon_{pp}$	bleibende pseudoplastische Dehnung in FGL
$\varepsilon_r$	radiale Dehnung des Betons (Querdehnung)
$\varepsilon_{re}$	radiale Dehnung des linear-elastischen Zylinders
$\varepsilon_{rp}$	radiale Dehnung des Betons aus Vorspannung
$\varepsilon_t$	tangentiale Dehnung des Zylinderumfangs bzw. der Umschnürung
$\varepsilon_{ta}$	Dehnung äußere Randfaser der Umschnürung

## Symbolverzeichnis

$\varepsilon_{ti}$	Dehnung innere Randfaser der Umschnürung
$\varepsilon_{tm}$	Dehnung Mittelfaser der Umschnürung
$\varepsilon_{tp}$	tangentiale Dehnung infolge Vorspannung
$\varepsilon_{tpN}$	$\varepsilon_{tp}$ nominal
$\varepsilon_{tr}$	tangentiale Dehnung der Umschnürung infolge Kopplung mit $\varepsilon_r$
$\varepsilon_u$	Bruchdehnung
$\varepsilon_{x,y,z}$	orthogonale Betondehnungen in einem kartesischem Koordinatensystem
$\varepsilon_y$	Fließdehnung metallischer Werkstoff
$\eta$	zu $k_S \cdot \varepsilon_{c0}$ normierte axiale Dehnung Beton
$\eta_K$	$\eta$ am Übergangspunkt
$\eta_{cp}$	$\eta$ ohne Streckfaktor
$\vartheta$	Richtungswinkel für Zylinderkoordinaten
$\nu$	Querdehnzahl
$\nu_{cc}$	Querdehnzahl des umschnürten linear-elastischen Zylinders
$\rho$	Umschnürungsgrad
$\sigma$	Spannung
$\sigma_{1,2,3}$	Betonhauptnormalspannungen ( $\sigma_3$ ist die betragsmäßig kleinste)
$\sigma_Z$	Spannung einaxialer Zugversuch
$\sigma_a$	axiale Spannung Beton
$\sigma_{aK}$	axiale Spannung Beton am Übergangspunkt
$\sigma_{aKe}$	endgültiger Wert von $\sigma_{aK}$
$\sigma_{ae}$	axiale Spannung linear-elastischer Zylinder
$\sigma_{ap}$	axiale Spannung Beton infolge Vorspannen der Umschnürung
$\sigma_{fg}$	Rückumwandlungsspannung in einer FGL infolge Formgedächtnis
$\sigma_{krit}$	kritische Spannung in der FGL bei der Martensit gebildet wird
$\sigma_m$	effektive Zugspannung der Umschnürung
$\sigma_{mp}$	effektive Zugspannung der Umschnürung im Vorspannzustand
$\sigma_r$	radiale Spannung Beton (Querdruck)
$\sigma_{re}$	radiale Spannung linear-elastischer Zylinder
$\sigma_{rp}$	radiale Spannung Beton aus Vorspannung der Umschnürung
$\sigma_{rpN}$	$\sigma_{rp}$ nominal
$\sigma_t$	tangentiale Spannung in der Umschnürung (konstant über die Dicke)
$\sigma_{tp}$	$\sigma_t$ aus Vorspannung
$\sigma_u$	Bruchspannung
$\sigma_{x,y,z}$	orthogonale Betonspannungen in einem kartesischem Koordinatensystem
$\sigma_\vartheta$	Ringspannung in Zylinderkoordinaten
$\tau$	Schubspannung
$\psi$	Kontinuitätsparameter
$\omega$	Schädigungsparameter

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Zielsetzung

Die nachträgliche Verstärkung von Stützen aus Beton hat eine hohe wirtschaftliche und bautechnische Bedeutung insbesondere in Erdbebengebieten. Die Verbesserung der dafür eingesetzten Methoden ist deshalb von großem Interesse. Zudem sind die Erkenntnisse von Stützen übertragbar auf andere Betondruckglieder, wie Spanngliedverankerungen oder die Druckzone von Biegeträgern.

Bild 1.1 veranschaulicht die Relevanz des Themas am Beispiel einer Brücke nach dem Northridge-Erdbeben von 1994. Infolge der Überlastung zerbarst der Beton der Stützen; die vorhandene Längsbewehrung knickte aus. Offenbar war die umlaufende Wendelbewehrung ursprünglich zu schwach dimensioniert worden. Der Folgeschaden war immens. Durch geeignete Verstärkungsmaßnahmen hätte der Kollaps jedoch verhindert werden können.



Bild 1.1: Kollabierte Stahlbetonstützen einer Brücke (Foto: M. CELEBI [39])

Zu den etablierten Maßnahmen der nachträglichen Verstärkung von Stützen zählt die Umschnürung mit zugfesten Materialien. Stahl und faserverstärkte Kunststoffe (FVK) werden als Umschnürung eingesetzt. Die Umschnürung ergänzt die vorhandene Querbewehrung und verbessert einerseits das Verhalten des Druckglieds bei Schubbeanspruchung. Zusätzlich wird die Querausdehnung des Betons infolge axialer Last durch die Umschnürung behindert, wodurch axiale Traglast und Duktilität wesentlich gesteigert werden können.

Bei bisherigen Verstärkungen kam jedoch eine planmäßige Vorspannung des umschnürenden Materials nicht in Betracht; sofern montagebedingt vorhanden, wurde sie nicht

## 1 Einleitung

beim Nachweis des Bauteilverhaltens berücksichtigt. Verantwortlich für die bisher geringe Anwendung und Bedeutung der Vorspannung sind insbesondere zwei offene Fragen: Welche Vorteile erwachsen aus der Vorspannung? Wie kann die Spannkraft der Umschnürung am Bauteil einfach und entlang des gesamten Bauteilumfangs erzeugt werden?

Die Diskussion um die Technik des Vorspannens wird durch den Vorschlag belebt, thermisch vorspannbare Formgedächtnislegierungen (FGL) als Umschnürung zu verwenden. Jedoch ist die Materialgruppe der FGL noch nahezu unerprobt im Bauwesen, ihre Entwicklung ist noch längst nicht abgeschlossen. Bevor aber die Materialentwicklung der FGL in die eine oder andere Richtung gelenkt wird, ist zu klären, welcher Nutzen aus der vorgespannten Umschnürung überhaupt erwächst.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb der Einfluss einer Vorspannung der Umschnürung auf das Last-Verformungs-Verhalten und die Festigkeit von Betondruckgliedern untersucht. Ausschließlich axiale Last wird dabei berücksichtigt. Wichtig ist die Isolation des Effektes der Vorspannung vom Effekt ungespannter Umschnürung, die als Referenz dient. Deren Vorteile und Defizite bilden die Vergleichsbasis.

Vor allem wird ein Defizit konventionell umschnürter Betondruckglieder betrachtet: der Festigkeitsverlust des umschnürten Betonkerns unter den hohen axialen Lasten, die mit Umschnürung erlaubt sind. Dieser Aspekt wurde bisher vernachlässigt, obwohl er bei einer externen Verstärkung außerordentlich wichtig ist: Fällt die Verstärkung jemals aus, so entscheidet die Restfestigkeit des vormals umschnürten Betonkerns über die Tragfähigkeit des Bauteils oder sogar Tragwerks. Fehlende oder falsche Einschätzung der Restfestigkeit stellt eine bedeutende Sicherheitslücke dar.

Folgerichtig wird experimentell und analytisch untersucht, wie eine Vorspannung der Umschnürung die Restfestigkeit des Betons beeinflusst. Betrachtet wird insbesondere das Verhalten nach Überlast. Der Begriff Überlast bezeichnet dabei den Anteil der zusätzlichen axialen Last, den ausschließlich die Umschnürung ermöglicht.

An Hand der gewonnenen Erkenntnisse wird der Nutzen der vorgespannten Umschnürung bewertet. Wie ist die theoretische Eignung von FGL, verglichen mit konventionellen Materialien, zu diesem Zweck?

Den Nutzer interessiert nicht zuletzt auch die Frage: Welche Konsequenzen ergeben sich aus der fehlenden Vorspannung konventioneller Umschnürungen für die bisherige und zukünftige Praxis solcher externen Verstärkungen?

Antworten auf diese Fragen gibt die vorliegende Arbeit.

## 1.2 Gliederung

Zunächst werden im zweiten Kapitel Grundlagen zu den Materialien des umschnürten Systems erläutert. Das sind der Beton und die Materialien mit denen umschnürt wird. Der Schwerpunkt liegt beim Beton, bei dessen Verformungsverhalten und Gefügeänderungen. Eine Übersicht zum Verständnis der Schädigung und zur Modellierung wird gegeben. Die Materialgruppe der Formgedächtnislegierungen wird vorgestellt; baupraktisch relevante FGL werden näher besprochen. Darauf aufbauend wird das Verhalten der Legierung Eisen-Mangan-Silizium-Chrom (Fe-Mn-Si-Cr) erläutert, einer FGL die auch experimentell in dieser Arbeit untersucht wird. Zum Verhalten des gesamten umschnürten Systems wird der Stand der Forschung zusammengefasst. Die wesentlichen Erkenntnisse zur konventionellen Umschnürung und vorangehende Arbeiten zur vorgespannten Umschnürung werden vorgestellt. Als Vorbereitung der Versuche und Modellbildung werden grundlegende Beziehungen am umschnürten Zylinder dargelegt.

Zwei Arten von Versuchen sind Gegenstand des dritten Kapitels: Druckversuche an umschnürten Betonzylindern und Temperatur-Zugversuche an einer ausgewählten FGL. Die Druckversuche dienen der Bewertung des Einflusses der Quervorspannung auf den Beton. Umschnürt wird mit Stahl und Kohlefaser. Beide Materialien werden mechanisch vorgespannt. Belastet wird überwiegend monoton steigend und zentrisch. Dazu kommen Tastversuche mit zyklischer Überlast und ausmittiger Last. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons und seine Restfestigkeit wird ausgewertet. Das Verhalten der Formgedächtnislegierung Fe-Mn-Si-Cr als potentielle Umschnürung wird nicht am Betonzylinder untersucht, sondern in separaten Versuchen an Drahtproben. Die besondere Probenvorbereitung wird ausführlich beschrieben. Dazu gehört auch der thermische Vorspannprozess, der in zwei verschiedenen Zugprüfmaschinen ausgeführt wurde. Weiterhin wird untersucht, wie das Spannungs-Dehnungs-Verhalten im vorgespannten Zustand ist. Die Ergebnisse liefern Daten für ein vereinfachtes Materialmodell.

Das vierte Kapitel ist der Modellbildung gewidmet. Zunächst wird ein Modell für die Restfestigkeit des Betons entwickelt. Darin sind die axialen Spannungs-Dehnungs-Daten des Betons Eingangswerte. Als Voraussetzung für vollständig analytische Berechnung des umschnürten Zylinders wird deshalb anschließend ein eigenständiges Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons formuliert, welches der mehraxialen Beanspruchung gerecht wird. Dazu gehört die Definition der Schnittstelle, über die das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons mit dem unabhängigen Modell der Umschnürung interagiert. Nachfolgend werden die Materialmodelle der Umschnürungen beschrieben, die für Verifikation und Parameterstudien benötigt werden.

Im fünften Kapitel werden die Modelle verifiziert und Parameterstudien unterzogen. Die Verifikation des Restfestigkeitsmodells erfolgt an Hand der in Druckversuchen festgestellten Restfestigkeiten. Danach werden Berechnungen mit dem Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons dokumentiert und mit Versuchsergebnissen verglichen. Komplettiert wird die Verifikation durch Anwendung und Bewertung des Gesamtmodells. Anschließend werden Ergebnisse zweier Parameterstudien erläutert, die die neuen Werkzeuge zu folgenden Fragen nutzen: Ist die Vorspannung der Umschnürung sinnvoll? Sind FGL als Umschnürung geeignet?

### 1.3 Abgrenzung

Der Fokus dieser Untersuchung liegt auf axial zentrisch belasteten Betondruckgliedern unter nicht zyklischer Last. Zum Verhalten unter kombinierter Last mit Normalkraft und Biegung wird ein experimentell fundierter Ausblick gegeben. Dies erfolgt ebenso für zyklische Belastung. Zeitabhängiges Verhalten des Betons wird vernachlässigt.

In den Versuchen werden ausschließlich unbewehrte, gedrungene Betonzylinder umschnürt: Stabilitätsprobleme spielen keine Rolle, der Beitrag einer praktisch immer vorhandenen Längsbewehrung wird nicht erfasst, der Kreisquerschnitt ist hinsichtlich der Umschnürung der ideale Fall. Außerdem wird im Versuch nahezu oberflächendeckend umschnürt; die Umschnürung hat keine Steifigkeit in Richtung der Lastachse.

Um die gewonnenen Ergebnisse quantitativ auf andere Querschnitte übertragen zu können, sind also weitere Schritte notwendig. Entsprechende Verfahren für konventionell umschnürte Betondruckglieder existieren bereits und werden hier nicht behandelt. Der Effekt der vorgespannten Umschnürung für allgemeinere Querschnitte kann somit qualitativ extrapoliert werden. Dafür werden die gewonnenen Erkenntnisse am Zylinder als Basis zur Verfügung gestellt.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Idealisierung umschnürter Betondruckglieder

Betonkern und Umschnürung sind die Komponenten eines Systems, das Bild 2.1 in idealisierter Form darstellt. Diese Komponenten stehen in Wechselwirkung: Axiale Belastung des Betonkerns führt infolge seiner Querausdehnung zur Dehnung der Umschnürung; Zugkräfte werden im umschnürenden Material aktiviert. Der resultierende Querdruck stützt den Betonkern und stellt zusammen mit der axialen Spannung einen mehraxialen Spannungszustand im Beton her. Den selben Effekt hat auch die Vorspannung der Umschnürung.

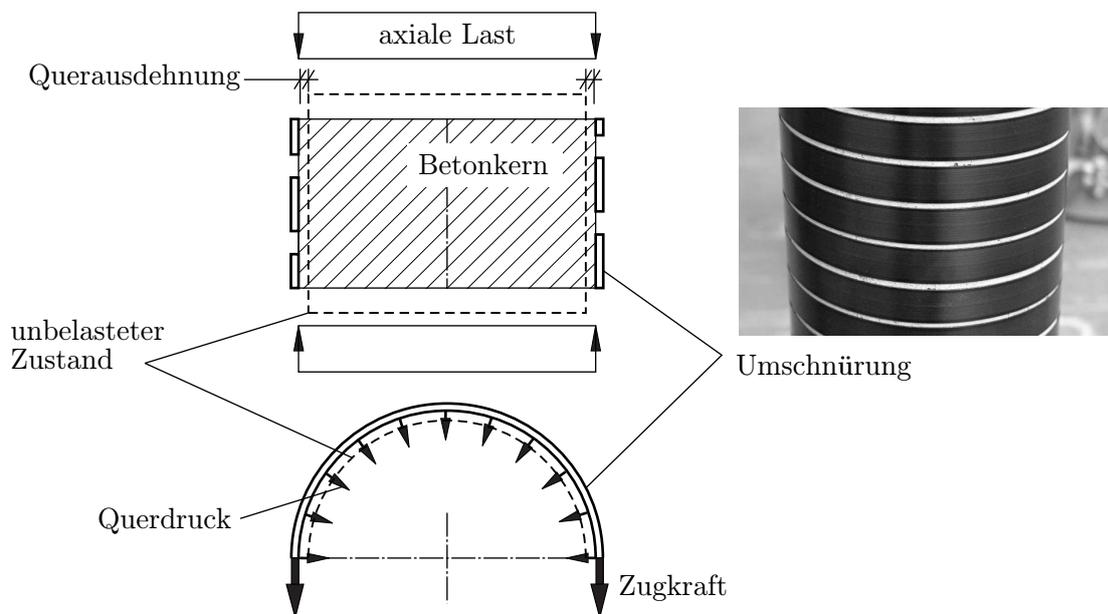


Bild 2.1: Umschnürtes Betondruckglied idealisiert

Im Folgenden wird zunächst separat das Verhalten des Betons und der Materialien beschrieben die als Umschnürung eingesetzt werden können. Anschließend wird ein Überblick zum Verhalten und zur Berechnung des gesamten Systems gegeben.

### 2.2 Beton

Das Last-Verformungs Verhalten und die Festigkeit des Betons hängen maßgeblich von den Veränderungen innerhalb seines Gefüges infolge Belastung ab. Der Begriff Gefüge wird in der Literatur synonym mit dem Begriff Struktur, zur Bezeichnung des inneren Aufbaus des Materials Beton verwendet [61, 178, 196]. Allerdings dient der Begriff Struktur, neben eher

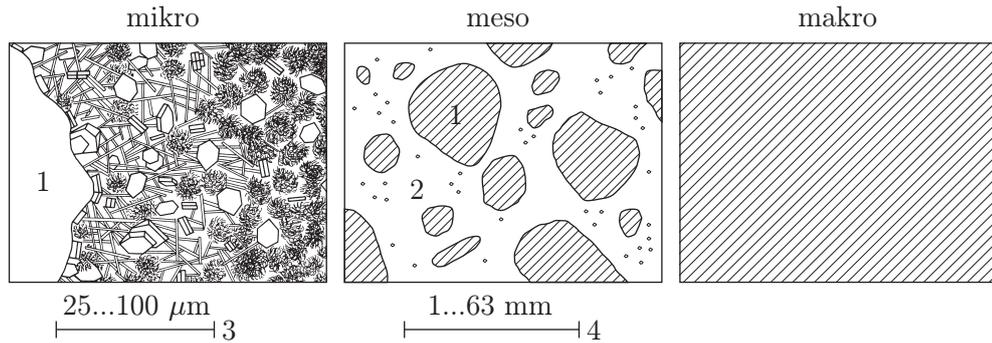


Bild 2.2: Maßstabsebenen für Beton (mikro [147], Gesamtdarstellung nach [31]):  
 1–Zuschlag, 2–Zementsteinmatrix, 3–Dicke der Kontaktzone [128], 4–typische Korngrößen des Zuschlags [179]

allgemeiner Verwendung in verschiedensten Bedeutungen, insbesondere zur Beschreibung von Materialien auf atomarer Ebene bzw. von deren Oberflächen. Die Bezeichnung als Gefüge hingegen definiert, dass im Material oberhalb des atomaren Maßstabs ein Zusammenhalt aus verschiedenartigen Bestandteilen wie Körnern, Kristallen oder noch größeren stofflichen Einheiten besteht [19, 178].

In den folgenden Abschnitten werden an Hand der Literatur zunächst das typische Gefüge des Normalbetons und die Ursachen seines Zusammenhalts skizziert. Nach einer Einführung zum Spannungs-Dehnungs-Verhalten werden die zu Grunde liegenden Veränderungen innerhalb des Gefüges betrachtet. Zur Beschreibung von Schädigung geeignete Kenngrößen werden erläutert und ein Überblick zu den Modellierungsstrategien gegeben.

### 2.2.1 Gefüge und Bindungskräfte

Das Verbundmaterial Beton entsteht infolge der „Verklebung“ von festen Zuschlagkörnern (Kies, Sand) mit einem während der Herstellung flüssigen Bindemittel (Zement, Wasser). Nach der Erstarrung des Bindemittels zum Zementstein liegt ein festes Aggregat vor, das verschiedene Phasen aufweist. Als Phase wird ein Bereich gleichartiger Struktur und chemischer Zusammensetzung innerhalb eines definierten Betrachtungsmaßstabs verstanden [19, 92].

Für Beton geeignete Maßstabsebenen sind in [251] vorgeschlagen worden. Wie in Bild 2.2 dargestellt, wird für den Beton makroskopisch eine vollständig homogene Struktur angenommen. Auf der mesoskopischen Ebene werden meist nur grobe Zuschlagkörner und die Zementsteinmatrix als Phasen unterschieden. Allerdings weist der Zementstein, wie noch erläutert werden wird, in der Kontaktzone zu den Zuschlagkörnern deutlich abweichende Eigenschaften auf, so dass vorgeschlagen wurde, die Kontaktzone als dritte Phase auf der Meso-Ebene zu berücksichtigen [147, 148]. Zementsteinmatrix und Zuschlag bestehen, neben diversen Hohlräumen, wiederum aus verschiedenen Phasen, was sich erst auf der mikroskopischen Ebene zeigt. Im Zementstein handelt es sich dabei überwiegend um Kristalle, wie Calciumsilicathydrat, Calciumhydroxid und Ettringit, die bei der Hydratation des Zementes entstehen und als Hydratphasen bezeichnet werden [178].

Nach heutigem Kenntnisstand erfolgt der Zusammenhalt zwischen den Hydratphasen des Zementsteins durch (a) mechanische Verzahnung und (b) durch adhäsive Kräfte [147]. Letztgenannte sind elektromagnetische Anziehungskräfte zwischen festen Oberflächen unterschiedlicher Ladung und werden als VAN DER WAALS'sche Kräfte bezeichnet. Innerhalb der Hydratphasen bzw. Kristalle, sind die Bindungskräfte wesentlich stärker, nämlich infolge (c) kohäsiver Wasserstoffbrückenbindung und (d) chemischer Bindung auf atomarer Ebene. Maßgeblich für Gefügauflockerung und Festigkeitsverlust sind also nur die Bindungen in den Phasengrenzflächen (a,b).

Im Widerspruch zum mehrphasigen Aufbau von Beton wird er häufig als kohäsives Material beschrieben. Dies hat historische Ursachen in der MOHR-COULOMB-Hypothese [151], die auch granulare Materialien wie Beton als einen Stoff betrachtet. Nach heutiger Definition tritt Kohäsion nur innerhalb eines Stoffes auf, Adhäsion hingegen wirkt zwischen verschiedenen Phasen bzw. deren Oberflächen [170].

Insbesondere die Kontaktzone zwischen Zementstein und Zuschlag ist von Bedeutung für den Zusammenhalt des Betons. Zwar wirken auch hier Bindungskräfte zwischen der Oberfläche der Zuschlagkörner und den Phasen des Zementsteins, jedoch verursachen Wasserablagerungen an den Zuschlagkörnern während der Betonherstellung eine größere Porosität sowie weniger feine Hydratphasen im Zementstein. Das resultiert in geringeren VAN DER WAALS'schen Kräften in den Phasengrenzflächen der Kontaktzone und zur Oberfläche der Zuschlagkörner [147]. Aus diesem Grund ist die Kontaktzone im Normalbeton von geringerer Festigkeit, sie ist das „schwächste Glied“ im Betongefüge [78, 128, 148] und der maßgebliche Ort für das Ablösen von Bindungen.

Im gesamten Betongefüge befindet sich eine Vielzahl herstellungsbedingter Hohlräume verschiedenster Größenordnungen, die das mechanische Verhalten beeinflussen. Das Gesamtporevolumen im Normalbeton beträgt etwa 30% bei einem günstigen Wasser/Zement-Wert. Bei ungünstigen, hohen Wasser/Zement-Werten kann die Porosität noch wesentlich größer sein [178].

### 2.2.2 Spannungs-Dehnungs-Verhalten

Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons wurde in zahlreichen Versuchen in der Literatur charakterisiert. Für diese Arbeit wird ausschließlich nicht hochfester Normalbeton betrachtet. Als Normalbeton sind in [2] Betone mit Rohdichten zwischen  $2000 \text{ kg/m}^3$  und  $2600 \text{ kg/m}^3$  definiert. Hochfester Normalbeton hat nach [179] Zylinderfestigkeiten oberhalb  $50 \text{ N/mm}^2$  und wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Im Folgenden sollen die wesentlichen Erkenntnisse wiedergegeben werden für: erstens ein-axiale Druckbelastung und zweitens allseitige Druckbelastung mit gleich großem Querdruck rechtwinklig zur größten (axialen) Hauptdruckspannung. Andere Spannungszustände, bei denen entweder die Querdruckspannungen ungleich sind (mit dem Sonderfall der biaxialen Belastung) oder mindestens in einer Hauptachsenrichtung Zugspannungen wirken (mit dem Sonderfall einaxialer Zuglast), werden hier nicht näher erläutert.

Die zitierten Diagramme aus der Literatur werden an die Vorzeichenregel und Achsenbezeichnung dieser Arbeit angepasst. Diese Konventionen sind Anhang A zu entnehmen. Demzufolge ist  $\sigma_3$  die betragsmäßig größte Hauptdruckspannung,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind die verbleibenden Hauptspannungen (Bild 2.3). Die Indizes werden für die zugehörigen Dehnungen übernommen. Die Betondruckfestigkeit  $f_{c0}$  wird negativ eingesetzt.

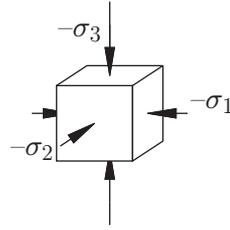


Bild 2.3: Hauptspannungen und Indizes

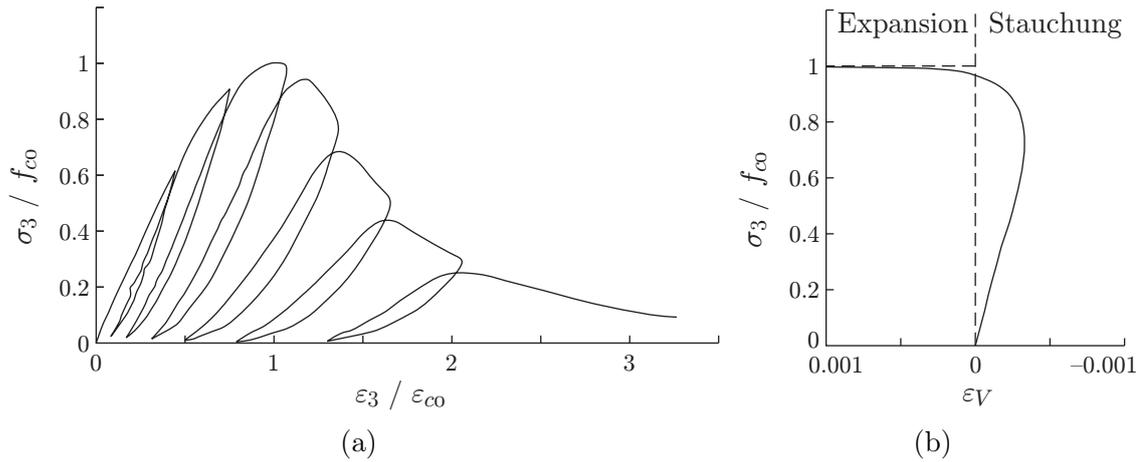


Bild 2.4: Spannungs-Dehnungs-Linien einaxialer Druckbelastung; Axiale Spannung normiert: (a) Zyklische Belastung [16], (b) Volumendehnung bei monotoner Belastung [208]

Die Hauptspannungen am Materialpunkt sind identisch bei Zylinder und Würfel wenn gilt:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_r. \quad (2.1)$$

Details dazu sind in Anhang B (B.8) gegeben.

Bild 2.4 zeigt, dass die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Kurve von Anfang an nichtlinear ist, mit zunehmender Krümmung bis zum Maximum der Spannung. Wird verformungs-gesteuert belastet, so ergibt sich ein abfallender Ast der Kurve nach dem Maximum der Spannung. Wird kraftgesteuert belastet, so entspricht die maximale Druckspannung der Bruchspannung bzw. einaxialen Festigkeit  $f_{c0}$ .

Die Querdehnung ist nicht konstant, sie steigt insbesondere nahe der Bruchlast überproportional im Verhältnis zur Längsstauchung an [196, 208]. Auswertung der Volumendehnung als Summe der drei Hauptdehnungen

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.2)$$

zeigt: Nach anfänglicher Stauchung expandiert das Betonvolumen über seinen Anfangswert hinaus (Bild 2.4b). Dieses Verhalten wird als Dilatanz bezeichnet.

Vollständige einaxiale Entlastung von beliebigen Punkten des Lastpfades und anschließende Wiederbelastung offenbart [16, 214], (Bild 2.4a): Bleibende Deformationen werden akkumuliert; deren Anteil an der Gesamtverformung steigt mit der axialen Stauchung. Ent- und Wiederbelastung kehrt in etwa zum selben Spannungs-Dehnungs-Punkt zurück; die

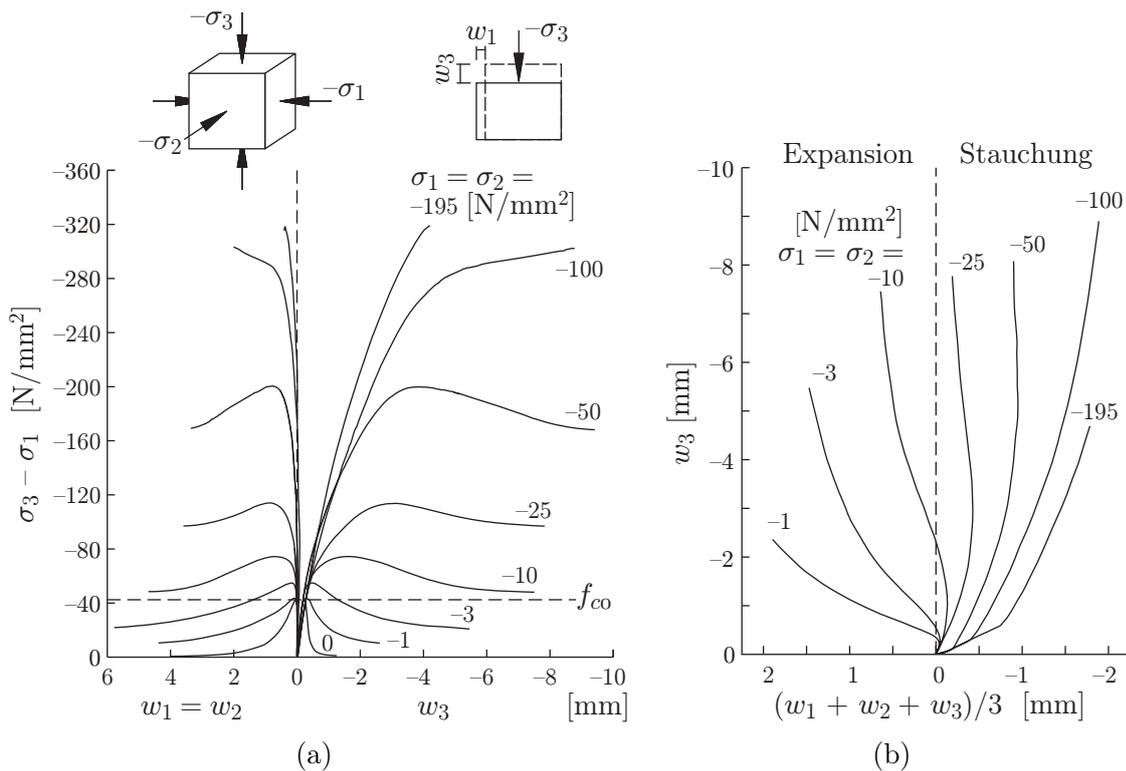


Bild 2.5: Triaxialversuche an Würfeln mit verschiedenen konstanten Querdrücken  $\sigma_1 = \sigma_2$  nach [230]: (a) Spannungen und Verschiebungen, (b) Verschiebung  $w_3$  und „mittlere Verschiebung“ (äquivalent zur Volumendehnung)

Umhüllende eines zyklischen Lastpfades entspricht somit näherungsweise dem Spannungs-Dehnungs Verlauf bei monotoner Belastung. Der Entlastungsmodul, als Sekante zwischen Tief- und Hochpunkt der Entlastung, nimmt mit steigender Stauchung stetig ab. Ent- und Wiederbelastungspfad schließen eine Hysterse ein.

Mehraxiale Druckversuche belegen die Abhängigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens vom Betrag des Querdruckes [97, 117, 217, 230]: Die maximal aufnehmbare axiale Spannung steigt mit dem Querdruck; das axiale Verformungsvermögen wächst (Bild 2.5a). Außerdem wird die Volumenausdehnung, im Vergleich zum einaxialen Versuch, durch Querdruck verzögert oder gänzlich unterbunden. Bild 2.5b zeigt diese Tatsache an Hand von dreiaxialen Würfeldruckversuchen aus [230]. Dort wird die mittlere Verschiebung der Würfelseiten  $(w_1 + w_2 + w_3)/3$  als Äquivalent zur Volumendehnung benutzt. Die Kurven aus der mittleren Verschiebung entsprechen qualitativ den Kurven der Volumendehnung, nicht jedoch quantitativ. Gleich sind aber die Positionen des Nulldurchgangs auf der Ordinatenachse.

Die Ergebnisse in [97] deuten darauf hin, dass der expansive Anteil der Volumendehnung irreversibel ist.

Ent- und Wiederbelastung unter mehraxialem Druck vollziehen sich grundsätzlich analog zum einaxialen Fall: Der zyklische Lastpfad wird von der Kurve monotoner Belastung umhüllt, der Entlastungsmodul sinkt mit zunehmender axialer Stauchung [209].

Bei sehr hohem Querdruck tritt an Stelle des abfallenden Astes der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve eine monoton steigende Kurve. Für diesen Wechsel im Charakter der

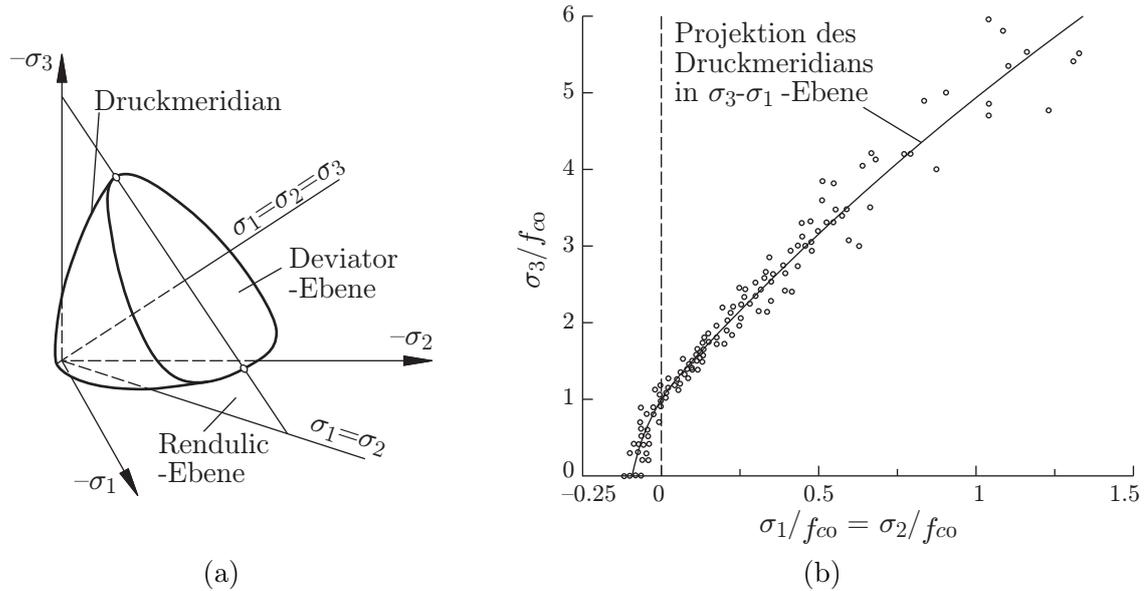


Bild 2.6: Mehraxiale Bruchspannung von Beton: (a) allgemeine Bruchfigur und Bezeichnungen und (b) normierte Versuchsergebnisse in Abhängigkeit von  $\sigma_1 = \sigma_2$ , für verschiedene Betone aus [89]

Kurve werden in der Literatur die Begriffe Übergangspunkt (*transition point*) und spröde-duktil Übergang (*brittle-ductile transition*) verwendet [vgl. 164, 217, 236]. Die Bezeichnung als duktil wird, analog zu Metallen, für das verfestigende Verhalten benutzt [217]. VAN GEEL merkt in [230] an, dass es sich vielmehr um einen Übergang von sprödem zu weniger sprödem Verhalten handelt. Verhältniswerte zwischen Querdruck und größter Hauptdruckspannung für den Übergang wurden mit 0.14 [247], 0.20 bis 0.25 [236] und 0.40 [164] angegeben. Nach [217] steigt das Verhältnis mit  $f_{c0}$ .

Ein wichtiger Parameter für die Bemessung von Bauteilen ist die mehraxiale Tragfähigkeit. Sie ergibt sich aus der maximal erreichbaren, axialen Druckspannung am Hochpunkt der Spannungs-Dehnungs-Kurve, die als Bruchspannung oder mehraxiale Festigkeit bezeichnet wird [46]. Mit dieser Bezeichnung bleibt unberücksichtigt, dass die Verformung bis zum vollständigen Versagen des Betonkörpers noch weiter gesteigert werden kann, während die Spannung nachlässt.

Alle Spannungs-kombinationen, bei denen die Bruchspannung erreicht wird, bilden die Bruchfigur im kartesischen Koordinatensystem der Hauptspannungen. Bild 2.6a zeigt die allgemeine Bruchfigur für Beton, deren Gestalt durch Versuche ermittelt wurde [69, 125, 129, 197, 239]. Die glockenförmige Figur ist an der hydrostatischen Achse  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (Äquisektrix) ausgerichtet, ihr Querschnitt offenbart sich in der Deviator-Ebene; also im ebenen Schnitt, der die hydrostatische Achse zur Normalen hat. Im Sonderfall  $\sigma_1 = \sigma_2$  reduziert sich die Bruchfigur zu einer Kurve in der Rendulic-Ebene, die von der  $\sigma_3$ -Achse und der hydrostatischen Achse aufgespannt wird. Der Bruch erfolgt dann auf dem sogenannten Druckmeridian der Kurve, wenn  $\sigma_3$  die größte Hauptdruckspannung ist. Bild 2.6b zeigt Versuchsdaten mehraxialer Festigkeiten in Abhängigkeit von  $\sigma_1 = \sigma_2$ , nach einer Zusammenstellung von [89]. Der aus der Rendulic-Ebene in die  $\sigma_3 = \sigma_1$ -Ebene projizierte Druckmeridian ist angedeutet. Die Bruchfiguren, die für verschiedene Betone ermittelt wurden, unterscheiden sich nur wenig. Ein gewisser Einfluss der Betoneigenschaften wurde jedoch nachgewiesen [z. B. 87, 88].

Zum Einfluss des Spannungspfads auf die Bruchfigur wurde festgestellt: Die mehraxiale Festigkeit ist pfadunabhängig [97, 116, 197, 217]. Die übliche Streuung der Betoneigenschaften wird als Ursache für vorhandene Abweichungen angegeben.

Jedoch die Verformungen unter mehraxialer Last sind abhängig vom Spannungspfad, wie in [97] gezeigt. Nach Ergebnissen in [217] ist der Nulldurchgang der Volumendehnung allerdings unabhängig vom Spannungspfad. Das heißt in anderen Worten: Der Nulldurchgang der Volumendehnung wird immer beim selben Spannungszustand ( $\sigma_3, \sigma_{1=2}$ ) erreicht, unabhängig davon, mit welchem Anstieg und in welchem Verhältnis die Spannungen erhöht wurden.

Die in diesem Abschnitt vorgenommene Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens beschränkt sich auf das Wesentliche. Darüber hinaus müssen für bestimmte Anwendungen auch Auswirkungen von Geschwindigkeit und Dauer der Belastung berücksichtigt werden.

### 2.2.3 Risse im Beton

Im erhärteten Beton sind bereits vor jeglicher mechanischer Belastung zahlreiche mit bloßem Auge nicht sichtbare Risse vorhanden, die als Mikrorisse bezeichnet werden. Die Mikrorisse treten vornehmlich in der Kontaktzone zum Zuschlag auf [94, 216]. Als Hauptursache wird das Schwinden des jungen Zementsteins, im Unterschied zu den Zuschlägen angegeben [208, 213, 215]. Die höhere Porosität und geringere Festigkeit des Zementsteins in der Kontaktzone befördern die Rissbildung entlang der Zuschläge [172].

Die Ausrichtung der Mikrorisse kann beliebig sein. Deshalb ergibt sich zu Beginn einer Erstbelastung von Betonkörpern mit Druckkräften eine konkave Spannungs-Dehnungs-Linie, infolge des Schließens derjenigen ursprünglich vorhandenen Mikrorisse, die senkrecht oder geneigt zur Druckspannung verlaufen [186]. In der Regel wird dieser Vorgang jedoch vernachlässigt, da er nur bei kleinen Lasten auftritt und keinen Einfluss auf die Festigkeit hat.

Jede mechanische Belastung des heterogenen Betongefüges verursacht lokale Spannungsspitzen im Beton [59, 137]. Anders als in Metallen sind jedoch keine Versetzungsbewegungen zum Abbau der Spannungsspitzen möglich. Deshalb führen abgelöste Bindungen zu Rissbildung bzw. -wachstum [132]. Vorhandene Mikrorisse, Poren, Zuschlagkörner und zur Druckkraft geneigte innere Phasengrenzflächen dienen als Ursprungsorte des Risswachstums. Der Begriff Riss signalisiert hierbei ein lokales Zugversagen, welches allerdings auch bei äußerer Druckbelastung auftritt, wie schematisch in Bild 2.7 dargestellt. Als eine Hauptursache für Risse in Normalbeton unter Druck gelten die quer zur Achse einer äußeren Druckkraft gerichteten Zugkräfte, infolge Keil- und Sprengwirkung im Korngerüst [24, 59, 137]. Auch aus anfangs geneigten Fehlstellen entstehen Risse, die sich quer zur Richtung der Druckkraft öffnen und lastparallel verlängern (Bild 2.7). Reale Querspannungen nach einaxialer Drucklast zeigt Bild 2.9.

Wie in Bild 2.8 schematisch gezeigt, geht der Rissspitze eine Zone sich räumlich übergreifender mesoskopischer Risse voraus (*crack bridging*), die zum inelastischen Abbau von Spannungsspitzen führt [235]. Gemäß dem in [85] begründeten *fictitious crack model* wird ein Riss erst ab einer bestimmten Öffnungsweite spannungsfrei. Nach Angaben in [86] beträgt diese Rissöffnung 0.15 mm bei 16 mm Größtkorndurchmesser des Zuschlags.

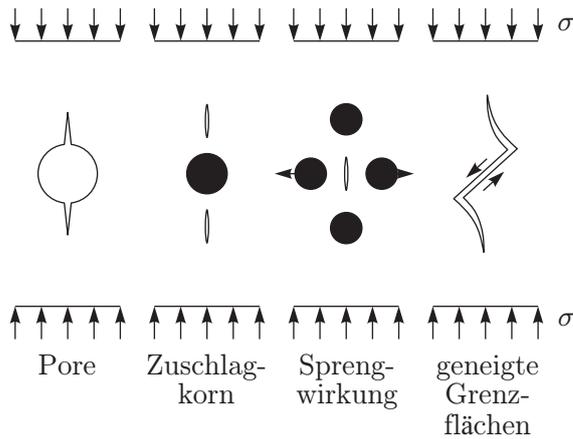


Bild 2.7: Risse infolge Druckbelastung [24]

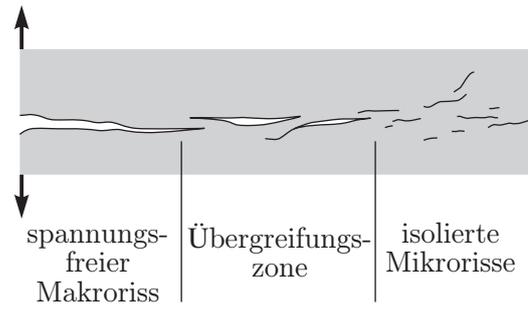


Bild 2.8: Risswachstum [236]

Die Homogenisierung der Spannungsspitzen durch Mikrorissbildung verleiht dem Beton ein weitaus größeres Verformungsvermögen, als es seine spröden Ausgangsmaterialien besitzen. Deshalb wird Beton häufig als quasi-spröde bezeichnet [132, 173, 250], obwohl seine Duktilität im Vergleich zu anderen Materialien klein ist. Dem gegenüber steht die Bezeichnung „spröd-duktil“ für mehraxiale Belastungen (siehe Abschnitt 2.2.2, S. 27).

Versuche unter einaxialer [z. B. 196] und mehraxialer Druckbelastung [z. B. 31] zeigen, dass die Mikrorissbildung bis zu einer bestimmten Laststufe gering, isoliert und stabil ist. D. h. die Risse sind voneinander getrennt und ihre Anzahl wächst proportional zur Last. Die Tangentenneigung der achsialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des Betons nimmt mäßig ab. Erst nahe der Traglast entstehen, aus dem Zusammenschluss von Mikrorissen, zunehmend Makrorisse, während sich die Spannungs-Dehnungs-Kurve deutlich neigt. Dieser Vorgang wird in [196] als Gefügezerstörung benannt; der Beginn der Gefügezerstörung für einaxiale Belastung von Normalbeton wurde dort bei etwa 93 % der Traglast festgestellt. Dieser Wert hängt jedoch maßgeblich von der mehraxialen Belastungssituation ab.

Entgegen früherer Ansätze [vgl. 241] dominiert heute die Einschätzung, dass zumindest auf mikroskopischer Ebene alle makroskopischen Versagensarten von Beton durch öffnende Risse (Modus I) erklärt werden können – wie in diesem Abschnitt beschrieben. Das gilt für reinen Zug ebenso wie für Schubbruch oder Druckbruch [24, 198, 236].

### 2.2.4 Verdichtung

Das Material Beton mit seinen vielen Hohlräumen (Bild 2.10) verformt sich auch infolge Verdichtung des Gefüges. Besonders bei hohem allseitigen Druck wurde eine irreversible Verdichtung des festen Betons an Hand des reduzierten Porenvolumens nachgewiesen [207]. Als maßgeblichen Ort für die Verdichtung nennen [31] und [230] die Kontaktzone benachbarter Zuschlagkörner, die gegeneinander gedrückt werden. Sie stellten einerseits fest, dass unter allseitiger Drucklast verdichtete Proben anschließend mehr Druckkräfte unter zweiachsiger Last aufnehmen konnten als nicht vorbelastete Proben. Andererseits versagten gleichartig vorbelastete Proben im einaxialen Versuch schon bei Spannungen unterhalb der einaxialen Traglast. Nachweis der mikroskopischen, verdichtenden Prozesse ist schwierig.

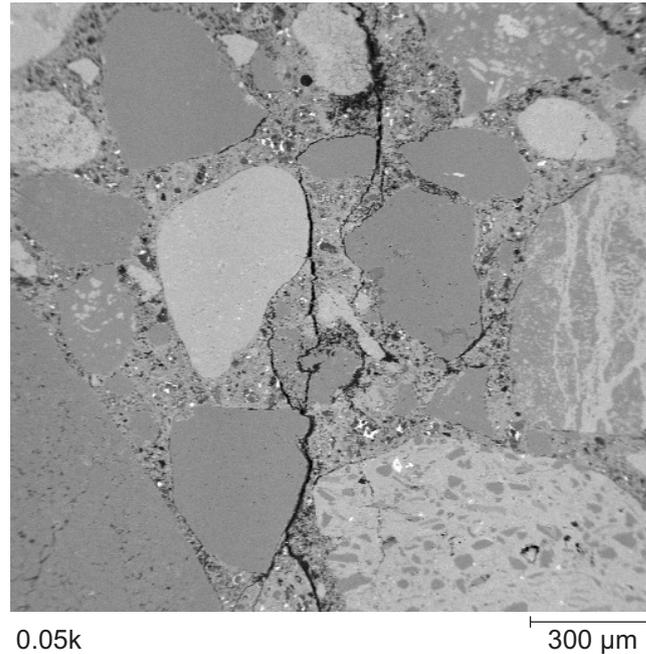


Bild 2.9: Risse nach einaxialer Belastung unter dem Rasterelektronenmikroskop (Aufnahme: MFPA Weimar)

Betrachtet auf mikroskopischer Ebene, muss der Prozess der Verdichtung mit dem Ablösen von Bindungen einher gehen, da die Verformungen bei der Verdichtung irreversibel sind. Andererseits entstehen im Gefüge neue Kontakte auf Druck, denn die mögliche Verdichtung ist auf den ursprünglichen Hohlraum begrenzt. Die Auswirkungen auf das Verformungs- und Festigkeitsverhalten sind noch nicht geklärt.

### 2.2.5 Lokalisierung

Der vollständige Verlust der Tragfähigkeit eines Betonkörpers manifestiert sich in makroskopischen Rissen. Die Makrorisse sind Folge instabiler Rissausbreitung, zertrennen das Gefüge und sind ultimativer Ausdruck der Lokalisierung. Kein allgemeiner makroskopischer Ansatz kann diesen Vorgang beschreiben.

Natürlich sind Veränderungen im Betongefüge immer lokal, vom Beginn der Belastung an, in Form von Mikrorissen, bis hin zur Verdichtung zwischen den Zuschlägen. Dies ist der Inhomogenität des Materials geschuldet. Häufig unterstellt man jedoch, die Diskontinuitäten seien begrenzt und gleichmäßig verteilt, wodurch makroskopische Modelle des Betonverhaltens legitimiert werden. Wo ist also die Grenze, bis zu der „verschmierte“ Modelle gelten und ab der Lokalisierung zu berücksichtigen ist?

Bei reiner Zugbelastung sind die Gefüge trennenden Risse immer in einem begrenzten Bereich des Betonkörpers konzentriert [95, 167, 177, 181, 238]. Unter allseitigem Druck hingegen beeinflusst der Betrag des Querdruckes die Lokalisierung.

In [207] wurden Zylinder in einer Triaxialzelle bis 2% axial, bei konstantem Querdruck gestaucht. Die Auswertung ergab: Bei geringem Querdruck, mit abfallendem Charakter der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve, waren zahlreiche verteilte Risse entstanden

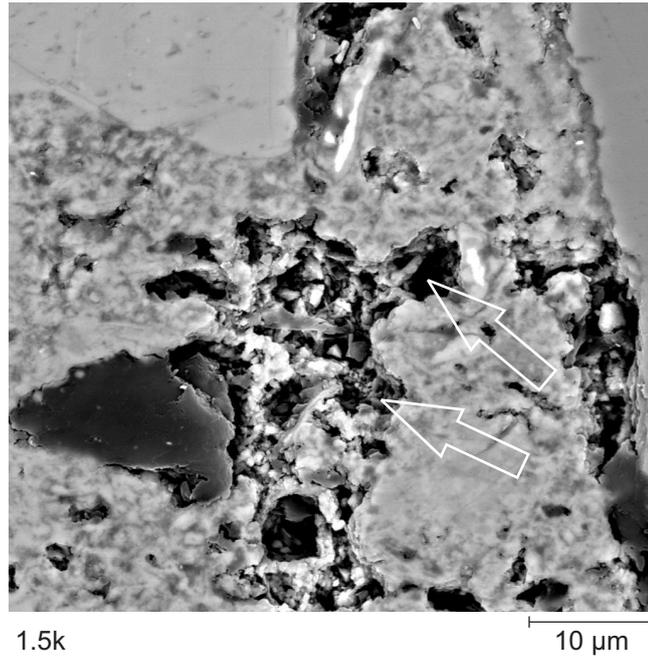


Bild 2.10: Hohlräume in der Zementsteinmatrix unter dem Rasterelektronenmikroskop (Aufnahme: MFPA Weimar)

(*distributed cracking*). Hoher Querdruck hingegen führte, unter monoton steigendem Spannungs-Dehnungs-Verhalten, zu wenigen makroskopischen Trennrissen, wobei die Bruchstücke zahlreiche sehr feine Risse aufwiesen.

Im Gegensatz dazu berichtet z. B. [230] von starker Lokalisierung bei geringem Querdruck. Unter hohem Querdruck (bis zu 195 MPa) wurde hier nahezu keine sichtbare Lokalisierung von Rissen festgestellt, allerdings starke verteilte Rissbildung auf mesoskopischer Ebene. Bei der Interpretation derartig widersprüchlicher Ergebnisse (vgl. [207, 230]) spielt die Art und Weise der Lasteinleitung eine große Rolle [242]. Zu ähnlichen Ergebnissen wie [230] kamen aber auch zahlreiche andere Autoren: Mit steigendem Umschnürungsdruck treten die Bruchvorgänge verteilter auf, die Tendenz zur Lokalisierung ist geringer [233].

Im Fall einaxialer Belastung beginnt die Lokalisierung kurz unterhalb oder bei der Bruchlast  $f_{e0}$  [228, 241]. Schon bei geringem Querdruck von  $\approx 0.15f_{e0}$  jedoch stellte [230] fest, dass sich die Lokalisierung verzögert und erst nach dem Überschreiten der Höchstlast beginnt. Daraus folgt für umschnürten Beton: Mindestens bis zum Erreichen der Höchstlast ist die Rissbildung verteilt, ungeachtet der Stärke des Querdruckes. Der Beton kann bis dahin näherungsweise als Kontinuum betrachtet werden.

Erst mit der dann folgenden Lokalisierung setzen Maßstabeffekte ein, zu deren Bestimmung immer die tatsächliche Bauteilgeometrie beachtet werden muss [24].

### 2.2.6 Schädigung und Festigkeit

Schädigung wird wie folgt definiert: Sie entsteht durch Lösen von Bindungen auf der Mikro- oder Mesoebene eines Materials und führt makroskopisch zu einer Verringerung der Festigkeit und/oder Steifigkeit des Materials [132, 176]. Als Festigkeit des Betons wird allgemein

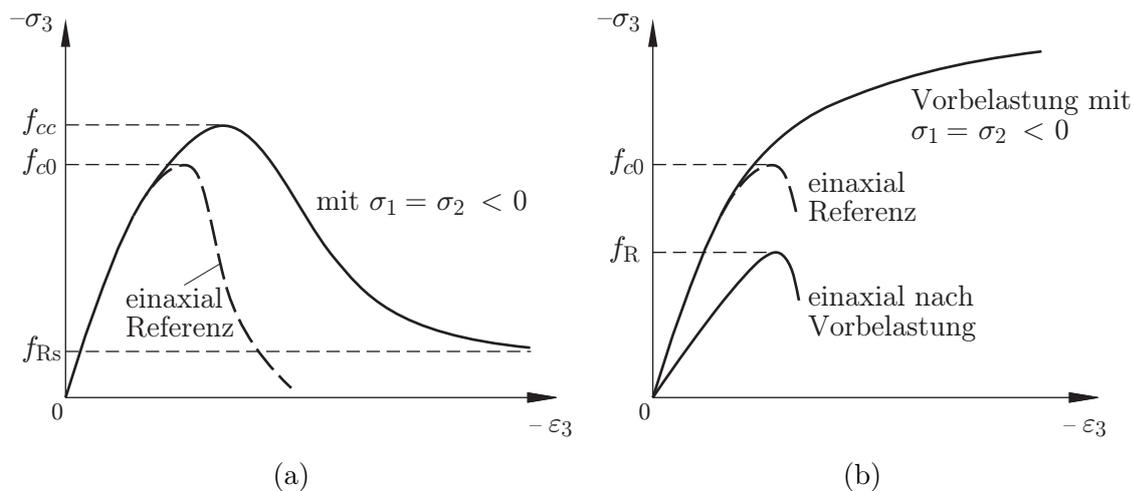


Bild 2.11: Zur Definition der Restfestigkeit: (a) Entfestigung im verformungsgesteuerten Versuch und (b) einaxiale Restfestigkeit nach mehraxialer Vorbelastung

die obere Grenze des Widerstandsvermögens [197], also die höchste aufnehmbare mechanische Spannung aufgefasst.

Die Festigkeit hängt neben den Materialeigenschaften des Festbetons vor allem von der Art und Weise der Belastung ab. Bild 2.11 zeigt dazu prinzipielle Spannungs-Dehnungskurven. Die einaxiale Festigkeit ist  $f_{c0}$ . Unter mehraxialer Druckspannung kann die umschürnte Festigkeit  $f_{cc}$  (*confined concrete*) erreicht werden.

Bild 2.11a beschreibt die Restfestigkeit im Nachbruchbereich bei allmählicher Entfestigung  $f_{Rs}$ , wie sie in der Literatur [217] benutzt wird, wenn mehraxiale Druckversuche verformungsgesteuert sind. Auf Grund starker Lokalisierung der Schädigung fällt  $\sigma_3$  auf dem Niveau von  $f_{Rs}$  nur noch sehr langsam ab.

Im Gegensatz dazu zeigt Bild 2.11b die einaxiale Restfestigkeit nach mehraxialer Vorbelastung  $f_R$ , die in der vorliegenden Arbeit relevant ist. Verwendet wird diese Definition der Restfestigkeit z. B. auch in [46] oder im Kontext einer Vorbelastung mit hohen Temperaturen [150]. Versuche in [183] und [230] belegen:  $f_R$  kann nach vorangegangener mehraxialer Belastung wesentlich geringer sein als  $f_{c0}$  ursprünglich war.

### 2.2.7 Schädigungsindikatoren

Da Schädigung nicht direkt messbar ist, werden alternative Indikatoren zu ihrer Beurteilung benötigt. Als Eigenschaften der Schädigungsindikatoren fordert [118], sie seien identifizierbar, messbar und mit den maßgeblichen Änderungen im Betongefüge gekoppelt.

Ein Indikator für Schädigung unter ein- und mehraxialem Druck ist die abnehmende Steifigkeit. Bereits in [174] wurde festgestellt: je größer der Hohlraumgehalt des Betons ist, umso geringer ist der Elastizitätsmodul. Es wird davon ausgegangen, Risse und natürliche Porosität haben ähnliche Auswirkung auf die Steifigkeit. DOUGILL [55] begründete die Theorie der elastischen Degradation (*elastic degrading* [34]) mit der Sekantensteifigkeit als Indikator. Als besser geeignet hat sich jedoch die Entlastungssteifigkeit erwiesen [176]. Sie entspricht

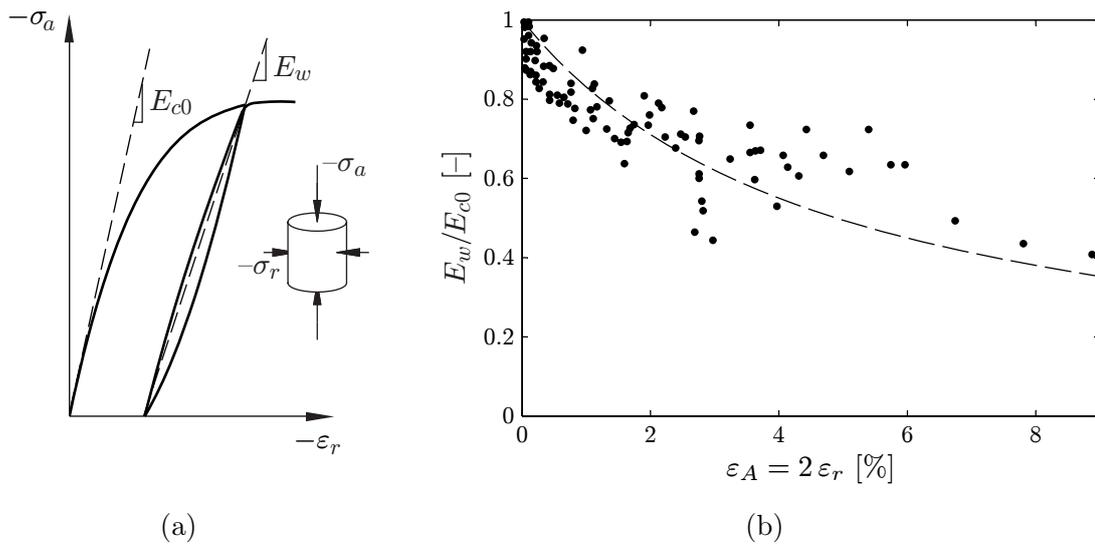


Bild 2.12: Zusammenhang zwischen Steifigkeit und Querdehnung: (a)  $E_w$  prinzipiell und (b) Messwerte nach [97]

dem Anstieg der Gerade durch die Spannungs-Dehnungs-Punkte am Beginn der Entlastung und nach vollständiger Entlastung ( $E_1$  in Bild 2.12a).

Als weiterer Schädigungsindikator gilt die Volumenausdehnung des Betons, da diese durch Risse hervorgerufen wird [217]. Bild 2.4b auf S. 26 zeigt einen charakteristischen Kurvenverlauf für die Volumendehnung. Volumenexpansion geht mit der Schädigung bzw. Zerstörung des Gefüges einher [196].

In [97, 164] wurde nachgewiesen, dass allein die in der Volumendehnung enthaltene Querausdehnung ein Indikator für Steifigkeitsreduktion und also Schädigung ist. Für den Fall allseits gleichen Querdrucks ist dort die Flächendehnung

$$\varepsilon_A = 2\varepsilon_r. \quad (2.3)$$

Bild 2.12b zeigt die Abnahme der Steifigkeit des Ent- und Wiederbelastungspfads ( $E_w$  in Bild 2.12a) mit steigenden  $\varepsilon_A$ .

Auch die im Beton während der Belastung gespeicherte oder umgewandelte Energie bietet die Grundlage zu aussagekräftigen Schädigungsindikatoren. Dieser Aspekt wird im Abschnitt 2.2.8 gesondert betrachtet.

Die bisher genannten Indikatoren können aus gemessenen oder berechneten Last-Verformungs-Kurven bestimmt werden. Zwei rein messtechnische Indikatoren sind: Messung von rissbedingten Schallemissionen [221] oder Messung der Laufzeit von Ultraschallwellen durch den gerissenen Beton [27, 206]. Diese Verfahren liefern jedoch eher qualitative Informationen.

### 2.2.8 Energie und Dissipation

Beim Belasten des Betons verrichtet das belastende System mechanische Arbeit. Die somit auf den Betonkörper übertragene Energie wird teils gespeichert, teils umgewandelt. Die

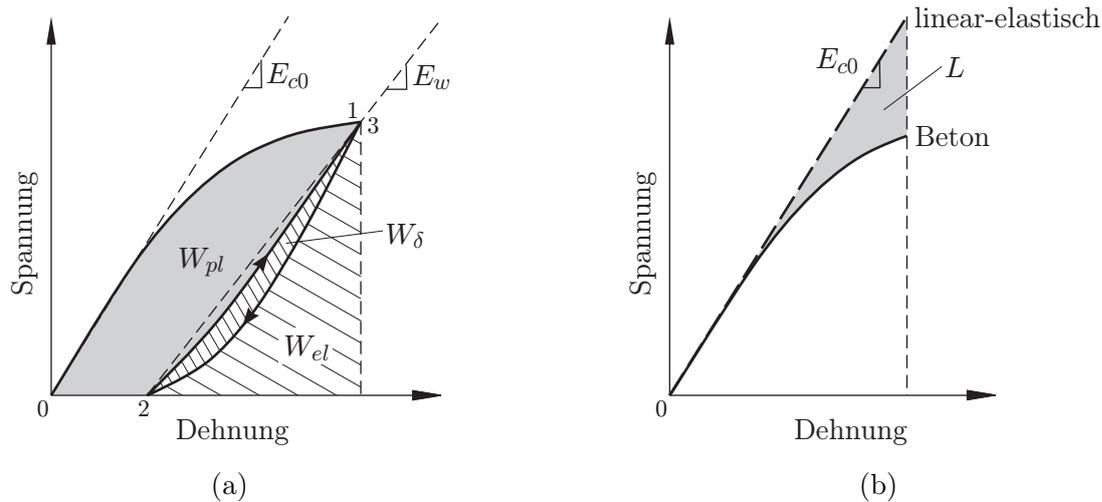


Bild 2.13: Energieanteile: (a) umgewandelt und gespeichert, (b) frei gesetzt

Grundlagen zur Nutzung der Energieanteile in Schädigungsindikatoren werden im Folgenden erläutert [213, 221, 250].

Energie pro Volumeneinheit ist Energiedichte, die als Fläche im Spannungs-Dehnungs-Diagramm veranschaulicht werden kann. Im Weiteren werden Energiedichte und Energie synonym verwendet.

Bild 2.13a zeigt die prinzipielle einaxiale Spannungs-Dehnungs-Kurve von Beton. Die charakteristischen Punkte sind bezeichnet. Bei Belastung vom Punkt 0 bis zum Punkt 1 ergibt sich die gesamte Formänderungsenergie  $W$  als die Fläche zwischen der Kurve und der Abszisse. Sie ist die Summe dreier Energieanteile:

$$W = W_{pl} + W_{\delta} + W_{el}. \quad (2.4)$$

Erst nach Entlastung bis zum Punkt 2, wird davon der elastisch gespeicherte Anteil  $W_{el}$  wieder frei (Fläche zwischen Entlastungskurve und Abszisse). Folglich muss der Rest von  $W$  im Beton gespeichert bleiben, oder dissipiert – also in andere Energieformen umgewandelt – werden.

Einer der zwei grundlegenden dissipativen Anteile ist die Energie  $W_{\delta}$ : Sie entspricht der durch die Hysterese von Ent- und Wiederbelastungspfad eingeschlossene Fläche 1-2-3, sie wird mit den Begriffen Dämpfung [213, 221, 222, 250] bzw. reversibles Kriechen [203] beschrieben. In jedem Zyklus fällt  $W_{\delta}$  erneut an, anteilig sowohl bei Entlastung als auch bei Wiederbelastung [221]. Allerdings kehrt der Beton bei zyklischer Last stets zum umhüllenden, monotonen Lastpfad zurück, wie niederzyklische Druckversuche belegen [16, 214, 221]. Schädigung erfolgt also nicht.

Hingegen in maßgeblichem Zusammenhang mit der Schädigung steht der zweite dissipative Energieanteil  $W_{pl}$  (Fläche 0-3-2 in 2.13a). In der Literatur werden für  $W_{pl}$  die Bezeichnungen Schädigungsenergie [221] oder Strukturveränderungsenergie [203] benutzt. Bleibende Dehnungen – als Ausdruck von Plastizität – gehen offensichtlich in die Bestimmung von  $W_{pl}$  ein. Jedoch werden bleibende Dehnungen durch verschiedene Prozesse verursacht, weshalb  $W_{pl}$  wiederum mehrere Wurzeln hat, die nicht alle schädigend sind,

nämlich (a) Verlust von Bindungen durch Risse, (b) Verdichtung und (c) Eigenspannungszustände. Die Relevanz dieser Prozesse für die Schädigung kann wie folgt zusammengefasst werden:

- (a) Rissbildung ist schädigend. Sie erfordert Energie, die einerseits durch das Lösen der Bindungen als Oberflächenenergie der neuen Grenzflächen wieder frei wird [23, 236] und durch inelastische Vorgänge an der Rissspitze anderweitig dissipiert wird [75].
- (b) Weniger klar definiert ist die Dissipation infolge gegensätzlicher Bewegung bestehender innerer Grenzflächen, wie sie vermutlich auch bei Verdichtung auftritt. Sie wird mit dem Begriff Reibung zusammengefasst [124]. Bisher ist noch nicht geklärt, wie die Verdichtung zur Schädigung beiträgt.
- (c) Nicht auszuschließen als Ursache bleibender Dehnungen ist aber auch elastische Verformung des verformten Betons auf Grund der Verzahnung innerer Oberflächen. Derartige Eigenspannungszustände entziehen sich jedoch dem Experiment und bleiben deshalb meist unberücksichtigt.

Die Eignung von  $W_{pl}$  als Schädigungsindikator stützt sich also vorrangig auf die Rissbildung.

Die bisher erläuterten Energieanteile werden durch Flächen unter der Spannungs-Dehnungs-Linie repräsentiert. Eine andere Art der Beschreibung von Schädigung nutzt folgenden Vergleich: Was ist, bei gleicher axialer Verformung, der energetische Unterschied zwischen dem Beton und einem ungeschädigten Körper? Bild 2.13b zeigt die entsprechende Fläche zwischen den einaxialen Arbeitslinien von Beton und dem linear-elastischen Fall. In [234] wird dafür der Begriff freigesetzte Energie (*energy released*) benutzt; Mikrorissbildung vor Beginn von Lokalisierung wird als Ursache angegeben.

Der Begriff Energiefreisetzung geht ursprünglich zurück auf GRIFFITH's Arbeit [74] zur linearen Bruchmechanik bei Zugbeanspruchung. Demnach wird zur Bildung von Rissen Formänderungsenergie verzehrt. Es muss Arbeit geleistet werden um Risse zu verlängern und neue Oberflächen zu erzeugen [180]. In [24] wird zusammengefasst: Das Druckversagen in quasi-spröden Materialien (wie Beton) wird vorrangig verursacht durch die Freisetzung von in der Struktur gespeicherter Energie ... Dies ist vergleichbar mit der Bruchmechanik von Zugrissen.

### 2.2.9 Modellierungsstrategien

Verformungen und Festigkeitsverlust des Betons unter Last gehen mit komplexen Änderungen im Gefüge einher, wie in den bisherigen Abschnitten gezeigt. Zur Vorhersage des Materialverhaltens stehen folgende Strategien zur Verfügung:

- (1) empirische Modelle
- (2) Bruchmechanik
- (3) Kontinuumsmechanik

Dies ist nur eine grobe Einordnung. Komplexere Gliederungen sind möglich, wobei Verzweigungen und Überschneidungen schwer zu erfassen sind. Die Grenzen zwischen den Strategien sind fließend.

zu (1): Für empirische Modelle werden mathematische Funktionen geeigneter Kurven angepasst, um das experimentelle Spannungs-Dehnungs-Verhalten abzubilden. Eine physikalische Grundlage der Parameter besteht i. d. R. nicht, ihre Anzahl ist gering, die Modelle sind meist nur einaxial. So wurden Gleichungen für die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Kurve von Normalbeton vorgeschlagen [171, 191]. Auch für umschnürten Beton existieren einaxiale empirische Modelle [z. B. 142]. Eine Verknüpfung der Parameter mit physikalischen Eigenschaften wird in [z. B. 165] verfolgt. Parameter wie Porosität und Wasser-Zement-Wert werden dort herangezogen, um sowohl axiale als auch laterale Dehnungen infolge einaxialer Last empirisch vorherzusagen.

zu (2): Mittels klassischer Bruchmechanik wird das Wachstum makroskopischer Risse berechnet, die ausgehend von einer gegebenen Fehlstelle immer diskret im Modell vorhanden sein müssen. Sie ist besonders für spröde Materialien geeignet. Ausgehend von der Theorie nach GRIFFITH [74] wurden erweiterte bruchmechanische Konzepte [25, 85] in diskrete Finite Elemente Modelle für Beton integriert [36, 51, 85, 99, 198, 241]. Durch Anpassung der Elementnetze an das Gefüge des Betons (*mapping*) [96, 237] und an den Risspfad [35] wird versucht, die Qualität der Modelle zu steigern. Auch netzfreie Methoden kommen zum Einsatz [155].

Besonders das Verhalten im sogenannten Entfestigungsbereich, einhergehend mit Lokalisierung, wurde bruchmechanisch simuliert. Die Modellbildung ist jedoch aufwändig, wenn das Betongefüge wirklichkeitsnah repräsentiert werden soll. Die korrekte Bestimmung der notwendigen Parameter ist schwierig. Zudem fehlen immer noch Methoden zur mikroskopischen Beobachtung der zu modellierenden Bruchprozesse an der Probe [237]. Ungeachtet der Vorzüge der Bruchmechanik bedürfen makro- oder mesoskopisch ungerissene Bereiche immer einer anderweitigen Beschreibung – z. B. kontinuumsmechanisch – wobei zu erfassen wäre, dass Schädigung vom Anbeginn der Belastung erfolgt. Bruchmechanische, also diskrete, Abbildung auch der mikroskopischen Schädigungen wäre numerisch unwirtschaftlich.

zu (3): Im Rahmen der Kontinuumsmechanik wird die diskrete, heterogene Mikrostruktur der Materie durch ein hypothetisches, makroskopisches Modell – das Kontinuum – repräsentiert; darin soll die Materie den Raum stetig ausfüllen, wobei ihre Eigenschaften gemittelt werden [12]. Jedes infinitesimale Volumen des Materials bzw. jeder Materialpunkt entspricht demnach genau einem Materieteilchen. Das Verhalten der Materialpunkte wird durch zwei Gruppen von Gleichungen beschrieben: Materialunabhängige (Kinetik, Kinematik, Bilanzgleichungen) und materialabhängige (Konstitutivgleichungen). Verknüpfung beider Gruppen führt zu den allgemeinen Feldgleichungen des Kontinuums, die als Anfangs-Randwertproblem formuliert sind. Für die Feldgleichungen (NAVIER-CAUCHY bzw. BELTRAMI-MICHELL) gibt es keine allgemeine Lösung, diese kann jedoch näherungsweise mittels numerischer Verfahren, wie der Finite-Elemente-Methode, erzielt werden [12].

Anpassung des kontinuumsmechanischen Modells an das Material Beton erfolgt innerhalb der Konstitutivgleichungen: Zunächst durch grundlegende Materialgleichungen, die unter anderem für elasto-plastisches Verhalten aufgestellt wurden; weiterhin durch sogenannte innere Variablen, von denen die Materialgleichungen abhängig sind. Mit den inneren Variablen können dissipative Effekte erfasst werden, wie sie mit Plastizierungen oder Schädigung einhergehen.

Die Schädigungsvariablen und ihre Evolutionsgleichungen sind Gegenstand der Schädigungsmechanik, einem Teilgebiet der Kontinuumsmechanik, das durch KACHANOV [107]

begründet wurde. Er nutzte die einfache Modellvorstellung, dass Schädigung die tragfähige Querschnittsfläche reduziert. Somit entspricht der skalare Schädigungsparameter  $\omega$  dem Verhältnis von geschädigter Querschnittsfläche  $A_D$  zur ursprünglichen Querschnittsfläche  $A$ :

$$\omega = \frac{A_D}{A} \quad \text{mit } 0 < \omega < 1. \quad (2.5)$$

Sinngemäß lautet der skalare Kontinuitätsparameter:

$$\psi = \frac{A - A_D}{A} = 1 - \omega \quad \text{mit } 1 < \psi < 0. \quad (2.6)$$

Derartige skalare Schädigungsvariablen werden dem einaxialen Fall gerecht (Zugstab) oder einem isotropen Material, in dem alle Richtungen gleich geschädigt werden. Schädigung z. B. im druckbelasteten Beton ist aber eine räumliche Erscheinung. Deshalb werden die Schädigungsvariablen im Rahmen der Kontinuumsmechanik anisotroper Materialien als Tensoren formuliert [28].

Die inneren skalaren Schädigungsvariablen und erst recht die Komponenten von Schädigungstensoren sind kaum physikalisch identifizierbar [133], sie sind phänomenologischer Natur. Nur indirekt werden sie bestätigt, wenn das berechnete Materialverhalten die am Bauteil erfassten Schädigungsindikatoren nach Abschnitt 2.2.7 widerspiegelt.

Als Beispiele für kontinuumsmechanische Betonmodelle, die Elasto-Plastizität und Schädigung kombinieren, seien [45, 73, 133, 176] exemplarisch genannt. Desweiteren kommen in der *Microplane theory* auch polare Kontinua zum Einsatz [26, 124].

Mehrere anwendungsorientierte kontinuumsmechanische Betonmodelle wurden bisher ohne Schädigungsansatz nur elasto-plastisch aufgestellt [41, 184, 199, 200, 202].

## 2.3 Konventionelle Umschnürungsmaterialien

### 2.3.1 Stahl

Traditionell wird mit Stahl umschnürt. Jede Art von Bügel- oder Wendelbewehrung aus Betonstahl ist eine Umschnürung. An dieser Stelle soll nur das wesentliche Materialverhalten von Stahl auf Grundlage von [19] und [92] skizziert werden.

Die meisten Stahlprodukte zeigen im einaxialen Zugversuch eines der in Bild 2.14 gezeigten Spannungs-Dehnungs-Verhalten bis zum Erreichen der Höchstlast  $R_m$ : Nach zunächst linear elastischem Verhalten mit großem Elastizitätsmodul  $E$  steigt die Dehnung überproportional und irreversibel an; Verfestigung beginnt, es wird plastisch gedehnt. Ent- und Wiederbelastung erfolgt jedoch elastisch.

Bild 2.14a zeigt die  $\sigma$ - $\varepsilon$  Kurve für einen Stahl mit ausgeprägter oberer Streckgrenze  $R_{eH}$  bei Erstbelastung; Das sogenannte Fließen zeigt sich in Unstetigkeiten der Kurve nach Überschreiten von  $R_{eH}$ . Hat ein Stahl keine ausgeprägte Streckgrenze, wie in Bild 2.14b dargestellt, so wird als Ersatz dafür die 0.2%-Dehngrenze genommen. Die entsprechende Spannung  $R_{p,0.2}$  ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Kurve mit dem um 0.2% verschobenen Anfangsanstieg.

Verfestigung in Metallen ist eine Folge neu entstandener und aufgestauter Versetzungen in der Kristallstruktur. Wie ausgeprägt Fließen bzw. Fließbeginn bei Erstbelastung ist

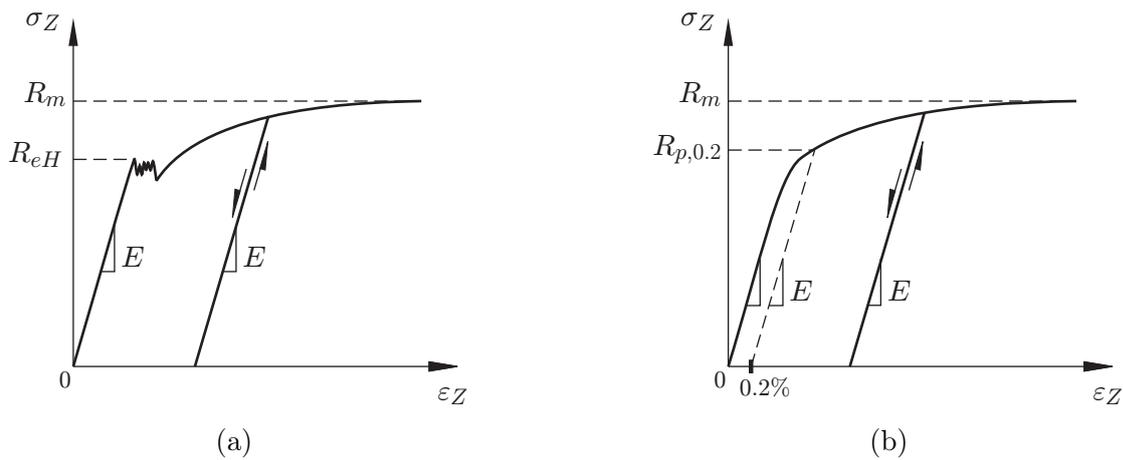


Bild 2.14: Stahl im axialen Zugversuch: (a) mit und (b) ohne ausgeprägter Streckgrenze

und wie stark das Material verfestigt und plastisch gedehnt werden kann, hängt von der Stahlsorte und deren Herstellung ab.

Die Verformungs- und Festigkeitskennwerte bei Druckbelastung entsprechen im wesentlichen denen des Zugversuchs. Bei plastischer Last jedoch, die zwischen Zug und Druck (oder umgekehrt) wechselt, tritt in Stählen der BAUSCHINGER-Effekt auf: Bei erstmaliger Verformung in Gegenrichtung sinkt die Elastizitätsgrenze. Dies kann für Umschnürungen aus Stahl relevant werden, wenn sie stark gebogen werden.

Einen Überblick zu möglichen Berechnungsverfahren von Stahlwerkstoffen gibt [195]. Zu den genutzten elasto-plastischen Materialmodellen sei auf die Arbeiten von HILL [84] und CHABOCHE [40] verwiesen.

In einfachen, einaxialen Anwendungsfällen ohne Wechsellast wird Verfestigung oft durch eine nichtlineare oder abschnittsweise lineare Approximation der Versuchskurve abgebildet.

### 2.3.2 Faserverstärkte Kunststoffe (FVK)

Die zweite Gruppe von Materialien für konventionelle Umschnürungen sind faserverstärkte Kunststoffe – hochzugfeste Fasern, die in eine Kunststoffmatrix eingebettet sind. Es wurde intensiv mit FVK für externe Verstärkungen experimentiert [z. B. 49, 144, 157]; diverse praktische Anwendungen erfolgten in den vergangenen Jahrzehnten [91, 114].

Fasern aus Glas, Aramid oder Kohlenstoff werden im Bauwesen eingesetzt, begründet durch ihre Zugfestigkeit. Die Zugfestigkeit von Kohlenstofffasern kann sogar weit höher sein als die von Stahl. Für Umschnürungen sinnvoll sind unidirektionale Faseranordnungen, wie in Bändern oder Matten gegeben. Deren axiales mechanisches Verhalten entspricht qualitativ in etwa dem der Faser.

Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Glasfasern ist ideal linear-elastisch bis zum Bruch, ihr Elastizitätsmodul ist gering. Kohlenstofffasern verhalten sich ebenfalls nahezu linear-elastisch, sie haben jedoch grundsätzlich einen höheren Elastizitätsmodul als Glasfasern. Außerdem versteifen sich Kohlenstofffasern nahe der Bruchlast um bis zu 10 % [204]. Glasfasern werden wegen ihres geringen Preises gewählt oder wenn große Bruchdehnungen

gewünscht sind, Kohlenstofffasern dann, wenn Steifigkeit und Festigkeit besonders hoch sein sollen.

Abhängig vom Faseranteil liegen die effektiven mechanischen Kennwerte der FVK unter denen der reinen Faser; sie sind am genauesten über Versuche bestimmbar. Die realen Verhältnisse bei der Montage der Umschnürung sowie am Bauteil weichen jedoch von denen der axialen Charakterisierung ab: Zusätzlich wird das umschnürende Material gebogen und die nachgiebige Matrix quer gedrückt. Infolge dessen wirken zusätzliche Spannungen in den Fasern, die tangentielle Bruchdehnung der FVK-Umschnürung ist geringer als im axialen Zugversuch festgestellt.

Übliche Montageverfahren der Umschnürung mit Verbund sind [91, 204]: das arbeitsaufwändige Handlaminierverfahren (*wet lay-up procedure*) oder die Verwendung von vorimprägnierten Fasern (*prepregs*). Beim Handlaminierverfahren werden die Fasern bzw. Faserewebe oder -matten am Bauteil aufgelegt und anschließend flüssiges Epoxy- oder Polyesterharz eingewalzt. Die Matrix härtet kalt aus. Mehrere Schichten können im Verbund hergestellt werden. Die *prepregs* hingegen sind FVK-Halbzeuge, die bereits in eine ungehärtete duroplastische Kunststoffmatrix eingebettet sind. Sie werden am Bauteil, auch mehrlagig, angebracht und die Matrix mittels Temperatur gehärtet.

Zur Umschnürung kreisrunder Stützen mit Verbund wurden bereits halbautomatische Laminiergeräte entwickelt (vgl. XXsys Technologies in [91]). In [83] wird für rechteckige Stützen mit handlaminierter Umschnürung gezeigt, dass unerwünschte Biegespannung an den Umlenkstellen der Umschnürung durch Trennlagen reduziert werden kann; Nur jeweils zwei Lagen vorimprägnierter FVK-Bänder werden am Bauteil laminiert und durch Polyethylenfolie von weiteren Schichten der Umschnürung getrennt.

Als Montageverfahren ohne Verbund kommt mehrlagige Umschnürung mit möglichst dünnen thermoplastischen FVK-Bändern in Frage [102, 168]. Es erfolgt kein Verbund mit dem Bauteil und zwischen den Lagen. Nach [249] resultieren Relativbewegungen benachbarter Lagen in einer homogeneren Dehnungsverteilung bei FVK-Zuggliedern, die an zylindrischen Oberflächen umgelenkt werden. Allerdings ist dadurch das Steifigkeitsverhalten zu Beginn der Belastung progressiv; erst nach der Homogenisierung wird die Nennsteifigkeit erreicht und die Spannungs-Dehnungs Linie linear-elastisch. Die geringere Wirksamkeit der FVK-Umschnürung rechteckiger Stützen kann durch Füllkörper an den Stützenseiten verbessert werden [83].

Für einen Überblick zu vorgespannten FVK-Verstärkungen sei auf [157] verwiesen.

## 2.4 Formgedächtnislegierungen (FGL)

### 2.4.1 Typen und charakteristische Eigenschaften von FGL

Formgedächtnislegierungen sind metallische Werkstoffe; sie bestehen aus mindestens zwei Elementen und können mehr als eine typische kristalline Gitterstruktur einnehmen (Polymorphie), die abhängig von Temperatur und mechanischer Spannung wechselt, während das Material ein fester Körper bleibt [33]. Die Phase bei höherer Temperatur wird als Austenit bezeichnet, die Tieftemperaturphase als Martensit. Die namensgebende Eigenschaft der FGL ist folgende Fähigkeit: sie können infolge Erwärmung in den Austenit wieder ihre Ursprungsform annehmen, nachdem diese zuvor im martensitischen Zustand verändert wurde – diese Eigenschaft wird als Formgedächtniseffekt bezeichnet [223].

Legierungstyp	Zusammensetzung [Atom-%]	Umwandlung
Cu-Al-Ni	28-29 Al, 3.0-4.5 Ni	TE=thermoelastisch
Cu-Sn	15 Sn	TE
Cu-Zn (Messing)	38.5-41.5 Zn	TE
Cu-Zn-X (X=Si, Al, Ga, Sn)	wenige % X	TE
Fe-Cr-Ni-Mn-Si	9 Cr, 5 Ni, 14 Mn, 6 Si	nicht TE
Fe-Mn-Si	28-33 Mn, 4-6 Si	nicht TE
Fe-Ni-C	31 Ni, 0.4 C	nicht TE
Fe-Ni-Nb	31 Ni, 7 Nb	nicht TE
Fe-Ni-Co-Ti	33 Ni, 10 Co, 4 Ti	TE
	31 Ni, 10 Co, 3 Ti	nicht TE
Ni-Al	36-38 Al	TE
Ni-Ti	49-51 Ni	TE
Ni-Ti-Cu	8-20 Cu	TE

Tabelle 2.1: Ausgewählte FGL nach [140, 162]

Der Formgedächtniseffekt wurde 1932 erstmals an einer Legierung aus Gold und Cadmium beobachtet [18] und nachfolgend die vollständige Umkehrbarkeit der martensitischen Umwandlung nachgewiesen [93, 126]. NiTi (Nickel-Titan) ist die heute am stärksten genutzte FGL, deren Formgedächtnis 1961 entdeckt wurde [32]. Erst wesentlich später wurden auch eisenbasierte FGL erforscht [193]. Bis heute sind etwa 30 Typen von FGL bekannt. Eine Übersicht dazu gibt Tabelle 2.1. Je nach Zusammensetzung und metallurgischer Verarbeitung können von jedem Typ verschiedene Legierungen mit individuellen Eigenschaften hergestellt werden.

Der Wechsel der Phasen in FGL geht einher mit Änderung der elektrischen, thermischen und vor allem mechanischen Eigenschaften. So besitzt der Austenit in nicht eisenbasierten FGL z. B. einen höheren Elastizitätsmodul als der Martensit. In Tabelle 2.2 sind wichtige Eigenschaften ausgewählter FGL gegenübergestellt. Die Tabelle enthält einen Auszug aus der umfangreichen Zusammenstellung zu nicht eisenbasierten FGL in [162], sowie zwei Varianten der eisenbasierten Legierung Fe-Mn-Si-Cr.

Während des Phasenübergangs besteht eine Mischung mehrerer Phasen, die mit der Phasenfraktion (Massenanteil) des Martensits  $z$  beschrieben wird:

$$z = \frac{m_M}{m_A + m_M}. \quad (2.7)$$

## 2.4.2 Umwandlungstemperaturen und Spannung

Ohne Last ( $\sigma = 0$ ) haben FGL ein Umwandlungstemperaturprofil, wie an Hand des  $z$ -Temperatur-Diagramms in Bild 2.15a schematisch dargestellt. Die Umwandlung zum Martensit bzw. Austenit beginnt bei den Temperaturen  $M_s$  (Martensit Start) bzw.  $A_s$  (Austenit Start); die Umwandlung ist abgeschlossen bei  $M_f$  (Martensit *finish*) bzw.  $A_f$  (Austenit *finish*) entsprechend. Der Pfad der Abkühlung und Erwärmung schließt eine Hysterese ein. In Bild 2.15a ist angedeutet wie die mechanische Spannung  $\sigma$  das Temperaturprofil verändert: in einer austenitischen FGL kann  $M_s(\sigma)$  bis zu einer kritischen Umgebungstemperatur  $T_{krit}$

## 2 Grundlagen

Eigenschaft [Einheit]	Ni-Ti	Cu-Zn-Al	Cu-Al-Ni	Fe-Mn-Si-Cr	Fe-Mn-Si-Cr-Ni-VC
Elastizitätsmodul [GPa] <sup>a</sup>					
Austenit	70-98	70-100	80-100	170	200 <sup>e1</sup>
Martensit	27	70	80		
Streckgrenze [N/mm <sup>2</sup> ]					
Austenit	100-800	150-350	150-300	200-300	320-400 <sup>e1</sup>
Martensit	50-300	80-300	150-300		
Grenzzugspannung [N/mm <sup>2</sup> ]					
Austenit	800-1500	400-900	500-1200	680-1000	950 <sup>e2</sup>
Martensit	700-2000	700-800	1000-1200		
Bruchdehnung [%]					
Austenit	15-20			16-30	
Martensit	20-60	10-15	8-10		
Rückumwandlungsdehnung [%]	8	3.5	2	3.4 <sup>c</sup>	1.6 <sup>e1</sup>
Rückumwandlungsspannung [N/mm <sup>2</sup> ]	600-900	400-700	300-600	200 <sup>d</sup>	580 <sup>e2</sup>
Superelastisch speicherbare Energie [Joule/g]	6.5	1.8			
Spezifische Dämpfungskapazität <sup>f</sup> [%]	15-20	30-85	10-20		
Ermüdungsfestigkeit [N/mm <sup>2</sup> ] bei N= 10 <sup>6</sup>	350	270	350		
Literaturquelle	nach [232]			<i>b</i>	<i>e</i>

<sup>a</sup> 1 GPa=10<sup>3</sup>· N/mm<sup>2</sup>

<sup>b</sup> wenn nicht anders angegeben:

Herstellerangaben Awaji Sangyo, Japan, für Fe-27.2%Mn-5.7Si-5Cr

<sup>c</sup> Messungen an verbesserter Legierung Fe-28%Mn-6Si-5Cr-1.5VN (Masse-%) in [64]

<sup>d</sup> Messungen an ähnlicher Legierung Fe-28%Mn-6Si-5Cr (Masse-%) in [243]

<sup>e</sup> Empa FGL-Team

<sup>e1</sup> [130]

<sup>e2</sup> [131]

<sup>f</sup> abhängig von Frequenz und Amplitude

Tabelle 2.2: Eigenschaften ausgewählter FGL

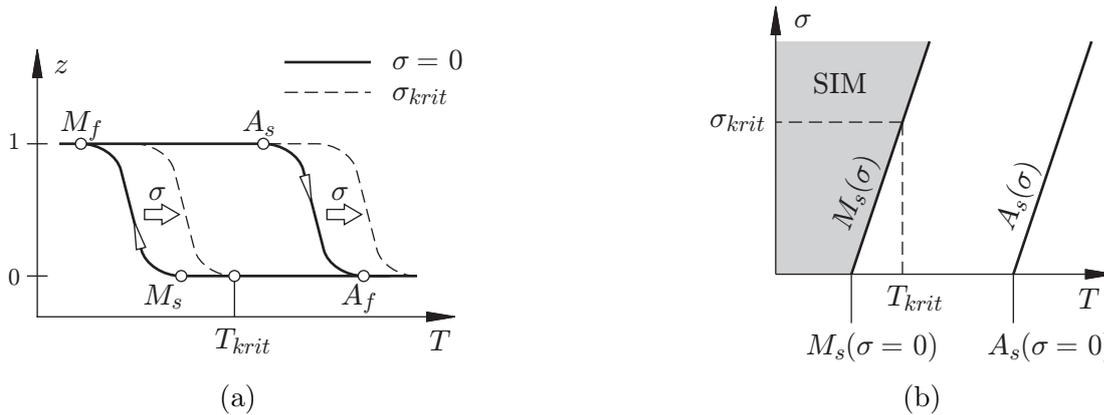


Bild 2.15: Umwandlungstemperaturprofil von FGL: (a) Abhängigkeit der martensitischen Phasenfraktion von der Temperatur und (b) Einfluss der Temperatur auf die kritische Spannung bei Erreichen von  $M_s$

ansteigen, bei der die Umwandlung beginnt. Dieser Effekt wird als spannungsinduzierte Martensitbildung (SIM) bezeichnet [162, 245].

Versuche haben gezeigt: die Umwandlungstemperaturen hängen etwa linear von der Spannung ab und der Einfluss ist ähnlich bei allen vier Umwandlungstemperaturen [245]. Dieser Zusammenhang ist in Bild 2.15b für  $M_s$  und  $A_s$  skizziert; Überschreiten von  $\sigma_{krit}(T)$  oder Unterschreiten von  $T_{krit} = M_s(\sigma)$  führt zu SIM.

### 2.4.3 Pseudoplastizität des Martensit

Grundlagen für den Formgedächtniseffekt sind Aufbau und Verformungsverhalten des Martensit, das schematisch in Bild 2.16 dargestellt ist [19, 162]. Die Gitterstruktur des Austenit (Bild 2.16a) wird bei Abkühlung zu der des Martensit umgebaut (Bild 2.16b), wobei Scherungen und Gleitungen erfolgen – ohne dass sich die makroskopische Form wesentlich ändert [19, 162]. Dabei entstehen sogenannte Martensitzwillinge, spiegelbildlich entlang von Grenzflächen. Die Zwillinge bilden nadelförmige Strukturen oder Lamellen, die zufällig verteilt sein können, wie in Bild 2.17 in einer Mikroskopaufnahme zu erkennen.

Wirkt eine mechanische Spannung auf den Martensit, so sind große makroskopisch bleibende Dehnungen von mehreren Prozent möglich, da die Zwillinge wieder entfaltet (Bild 2.16c) und die hochbeweglichen Grenzflächen verschoben werden (Bild 2.16d). Dabei wird das Gitter nicht versetzt und geschädigt wie bei wirklicher plastischer Verformung. Die Verformung wird deshalb als pseudo-plastisch bezeichnet [19, 93]. Durch Erwärmung des derart verformten Martensit kann wieder die Struktur und Form des Austenit erzwungen werden.

### 2.4.4 Materialverhalten und Anwendungen

In Abschnitt 2.4.2 wurde bereits deutlich: das Verhalten der FGL ist abhängig von den Umwandlungstemperaturen in Bezug zur Temperatur der FGL. Diese ist ohne Wärmezufuhr

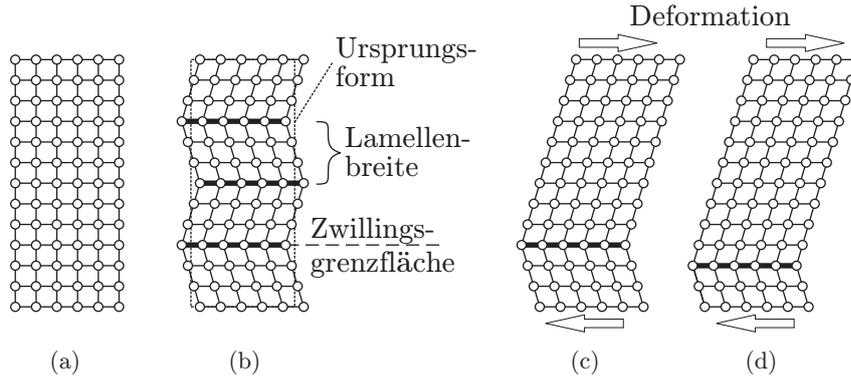


Bild 2.16: Gitterstrukturen in FGL schematisch: (a) Austenit bei  $T > M_s$ , (b) Martensit nach Abkühlung  $T < M_f$ , (c) Deformation des Martensit durch Entfalten der Zwillinge und (d) Bewegen der Grenzflächen

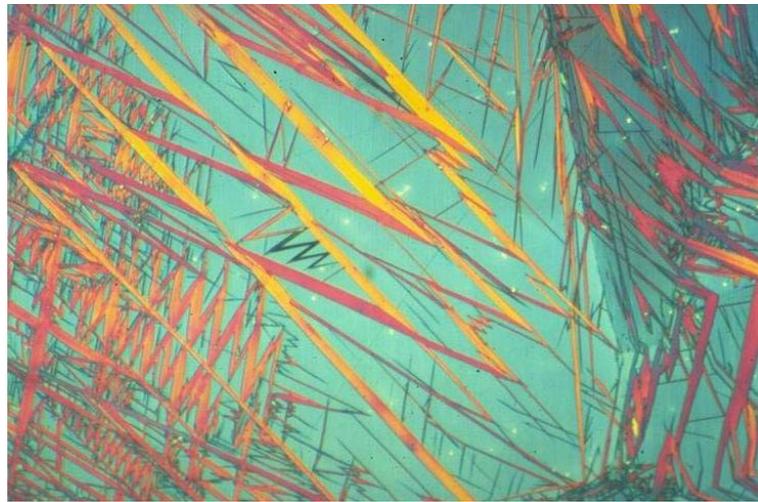


Bild 2.17: Martensit in Fe-Ni-Co-Ti unter dem Mikroskop, Quelle: N. JOST [104, 105]

gleich der Umgebungstemperatur. Bei Bauwerken ist die Temperatur der Umgebung saisonal verschieden, deshalb muss ein Temperaturbereich berücksichtigt werden.

Je nach Lage der Umwandlungstemperaturen und den Eigenschaften der FGL sind verschiedene Effekte nutzbar, so z.,B. thermisch aktivierter Formgedächtniseffekt (FGE) und Pseudoelastizität (PE) [162]. In Bild 2.18 sind dazu verschiedene Szenarien skizziert.

Für den thermisch aktivierten Formgedächtniseffekt ist vorausgesetzt, dass eine martensitische FGL zwischen  $M_s$  und  $A_s$  temperiert ist (Bild 2.18b). Nach Deformation und Entlastung, wie in Bild 2.18a dargestellt, bleibt die pseudoplastische Dehnung  $\varepsilon_{pp}$ . Nachfolgende Erwärmung ohne Dehnungsbehinderung ( $\varepsilon$  frei) verformt das Material zurück; irreversible Restdehnungen sind möglich. Wird die Dehnung jedoch bei der Erwärmung vollständig behindert ( $\varepsilon = \varepsilon_{pp}$ ), so entsteht eine Zwangskraft bzw. Rückumwandlungsspannung  $\sigma_{fg}$ . Bei Rückumwandlung gegen eine Federkraft, wird zwar  $\varepsilon_{pp}$  teilweise zurückgeformt aber das Maximum von  $\sigma_{fg}$  nicht erreicht. Nach Abkühlung bleibt die Zwangskraft des Austenit erhalten, es sei denn, SIM führt zu teilweiser Rückumwandlung in den Martensit.

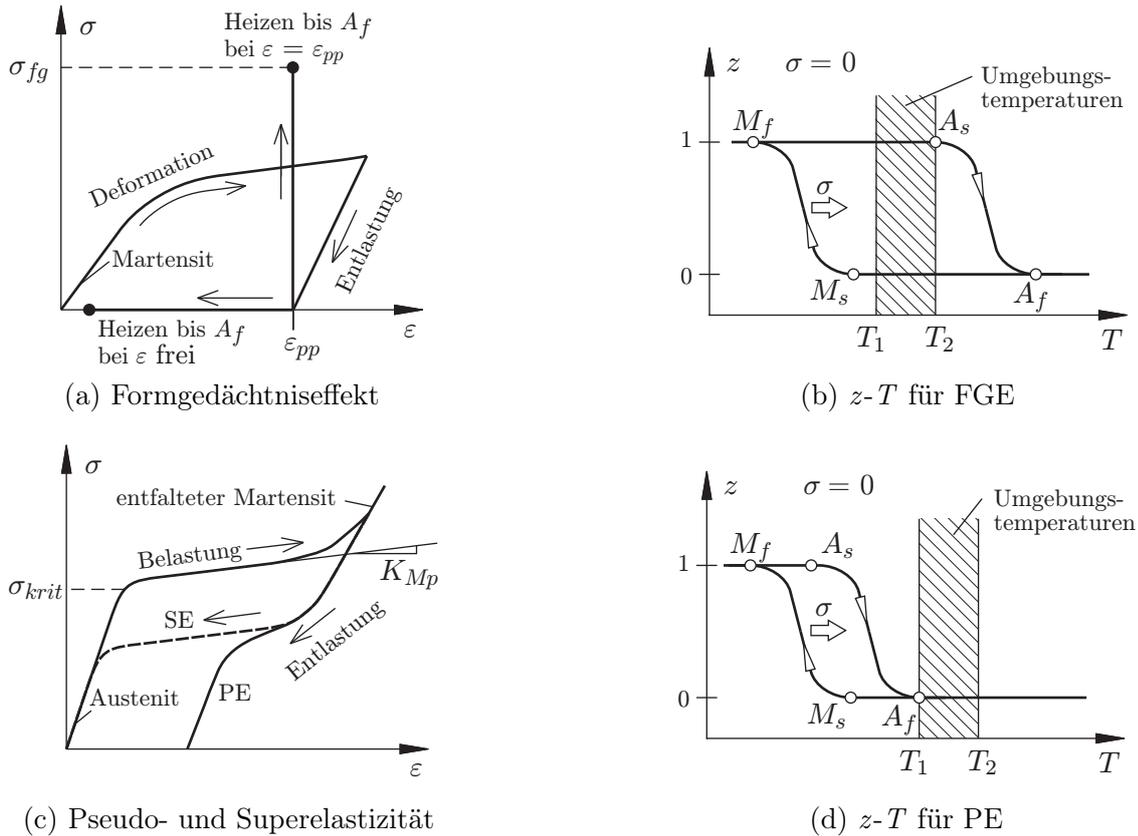


Bild 2.18: Prinzipielle Spannungs-Dehnungs-Kurven und Umwandlungstemperaturprofile  $z$ - $T$  für die Effekte der FGL

Voraussetzung für pseudoleastisches Verhalten ist ein Umwandlungstemperaturprofil wie in Bild 2.18d;  $A_f$  muss im unbelasteten Zustand tiefer sein als die Untergrenze der Umgebungstemperaturen  $T_1$ . Erreicht die Last der austenitischen FGL  $\sigma_{krit}$  (Bild 2.18c), wird Martensit spannungsinduziert gebildet, da  $M_s(\sigma) = T$  erreicht wurde (vgl. Abschnitt 2.4.2). Wegen der hervorragenden Verformbarkeit des Martensits verläuft der Spannungs-Dehnungs-Pfad bei weiterer Belastung auf einer Art Plateau mit nahezu konstantem Anstieg  $K_{Mp}$ , bis der Martensit vollständig entfaltet ist [245].

Der Belastungspfad in Bild 2.18c entspricht prinzipiell einer Abkühlung unter  $A_f(\sigma)$ , nach Vorspannen auf  $\sigma_{fg}$ , wie in Bild 2.18a gezeigt, da Temperatursenkung und Spannungserhöhung gleich wirken.

Bei Entlastung ist ein pseudoelastischer Werkstoff in der Lage Verformung zurückzubilden, die infolge Belastung über der Elastizitätsgrenze entstanden ist [113]. FGL können diesbezüglich eine nichtlineare Entlastungskurve mit Wendepunkt haben (Bild 2.18c), wobei sie wieder in den Austenit zurückkehren [159, 218]. Restdehnungen sind möglich. Einige thermoelastische FGL (Tabelle 2.1) kehren sogar wieder zum Ursprung der Spannungs-Dehnungs Kurve zurück (Bild 2.18c), was als Superelastizität (SE) bezeichnet wird [76].

Der Begriff thermoelastisch wird im Kontext der FGL wie folgt definiert: Thermoelastische FGL haben eine kleine Hysterse der Umwandlungstemperaturen im unteren zweistelligen Bereich; Die Bewegung ihrer Zwillingsgrenzflächen erfordert nur eine verhältnismäßig geringe Energie [153, 161]. Dies zeigt sich praktisch darin, dass allein infolge Abkühlung des Austenit eine zügige und vollständige Umwandlung zum Martensit möglich ist, die

in etwa proportional mit der Temperatur erfolgt. Nicht thermoelastische FGL hingegen besitzen eine weit größere Temperaturhysterese und weniger mobile Grenzflächen. Selbst bei Abkühlung des Austenit, deutlich unter  $M_f$ , wird Martensit nur teilweise gebildet. Erst durch zusätzliche äußere mechanische Spannung wird Martensit spannungsinduziert gebildet [108, 140]. Dieses Verhalten ist typisch für die meisten eisenbasierten FGL (Tabelle 2.1).

Bereits mehrere Vorschläge wurden unterbreitet, die Rückumwandlungskraft aus  $\sigma_{fg}$  zur temporären [48, 52, 120, 136, 139] oder permanenten [13, 60, 109, 211, 219] Beeinflussung von Tragwerken zu nutzen. Einen ausführlichen Überblick zu den Anwendungsszenarien geben [101, 156].

Gegen temporäre thermische Aktivierung des Formgedächtniseffektes – z. B. für dynamische Probleme – spricht die technisch bedingte Trägheit der Erwärmung und vor allem Abkühlung. Das wurde in [101] nachgewiesen.

Für die vorliegende Arbeit von Interesse ist vielmehr die permanente Vorspannung. Wenige Pilotstudien wurden dazu veröffentlicht, so z. B. zum Vorspannen von Verstärkungen an Brücken [219] und Umschnürungen von Betondruckgliedern [121]. Die Ergebnisse waren: Vorspannung mit FGL ist möglich, jedoch waren die Spannungswerte mit kostengünstigen FGL niedrig [219], weshalb auf wesentlich teurere FGL ausgewichen wurde [13, 43]; Relaxation der Spannung scheint ein Problem zu sein.

Über die intensive Erforschung und erste Anwendungen der Superelastizität zur Dämpfung von dynamisch beanspruchten Tragwerken informieren [90, 101, 187, 231].

### 2.4.5 Baupraktisch relevante Legierungen

Das Hauptaugenmerk der bisherigen Forschung und Anwendung galt der Legierung Ni-Ti (Nickel-Titan) auf Grund ihrer hervorragenden Eigenschaften [145, 162, 163]: Rückumwandlungsspannungen bis  $900 \text{ N/mm}^2$  wurden nachgewiesen, das Korrosionsverhalten erlaubt selbst Anwendung in der Medizin [138], superelastische Dämpfung und hohe Zyklenzahl ohne große Ermüdung sind möglich [57]. Eine Übersicht zu Bauprojekten mit Ni-Ti gibt [101]. Trotzdem scheidet Ni-Ti für Anwendung im Bauwesen aus, sobald Mengen des Materials benötigt werden, die über Kleinteile hinausgehen. Ursache ist der hohe Preis für Titan und Nickel, aus denen die Legierung zu je 50 % besteht.

Interessant für Anwendungen im Bauwesen sind kostengünstige eisenbasierte Formgedächtnislegierungen. Geeignet für permanente Vorspannung scheint Fe-Ni-Co-Ti (Eisen-Nickel-Cobalt-Titan, Zusammensetzung siehe Tabelle 2.1). KOKORIN gibt für thermoelastisches Fe-Ni-Co-Ti  $1000 \text{ N/mm}^2$  als Rückumwandlungsspannung an, wenn die Dehnung vollständig behindert wird [115]. Andere Arbeiten zu diesem Material bestätigen das sehr gute Formgedächtnis, jedoch nicht KOKORIN's hohen Wert für  $\sigma_{fg}$  [104, 111, 113, 205]. Die Bemühungen richten sich auf die Verbesserung der Eigenschaften im Zusammenhang mit Ausscheidungshärtung [105, 123]. Nach [104] ist das Verhältnis von spezifischer Formgedächtnisarbeitsleistung zu Herstellungskosten bei Fe-Ni-Co-Ti mehr als dreimal so hoch wie bei Ni-Ti. Anwendungen mit Fe-Ni-Co-Ti stehen aus.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer vielbeachteter eisenbasierter FGL-Typ experimentell untersucht: Fe-Mn-Si-Cr (Eisen-Mangan-Silizium-Chrom, typische Zusammensetzung Fe-Mn-Si siehe Tabelle 2.1). In [225] wird dafür der Begriff „Formgedächtnisstahl“ verwendet. Sie hat 60 % bis 65 % Eisenanteil und nur mäßig teure Legierungselemente.

Fe-Mn-Si-Cr ist nicht thermoelastisch [108], was mit Besonderheiten einhergeht, die in Abschnitt 2.4.6 beschrieben werden.

Nach der Entdeckung des Effektes im Grundtyp Fe-Mn-Si [193] waren Formgedächtnis und Korrosionsbeständigkeit gering. Dies wurde verbessert durch Zugabe von Legierungselementen. Auch thermomechanisches Training wird als Möglichkeit zur Verbesserung genannt [108, 244], was jedoch den Herstellungsaufwand wesentlich erhöht. Weitere Maßnahmen sind in [21, 22] benannt. Für Fe-28%Mn-6%Si-5%Cr, mit geringer Zugabe von Vanadium bzw. Niobcarbid, sind Rückumwandlungsspannungen von  $300 \text{ N/mm}^2$  [64] bzw.  $400 \text{ N/mm}^2$  [109] nachgewiesen worden. Die Temperatur  $M_s$  liegt in vielen Legierungen dieses Typs um Null °C; die Temperaturhysterese  $A_f - M_s$  beträgt etwa 160 K [134].

Jüngste Verbesserungen des Legierungstyps Fe-Mn-Si-Cr werden in [54, 130, 131] dokumentiert. Die neue Legierung Fe-17%Mn-5Si-10Cr-4Ni-1VC enthält zusätzlich Nickel und geringe Mengen Vanadiumcarbid (VC). Ausscheidungshärtung und Wärmebehandlung verbessern die Formgedächtniseigenschaften derart, dass kein thermomechanisches Training nötig ist. Die Legierung ist für große Rückumwandlungsspannungen optimiert. In [131] wird  $\sigma_{fg} = 580 \text{ N/mm}^2$  nachgewiesen. Der Elastizitätsmodul von  $200 \text{ N/mm}^2$  ist gleichwertig mit dem von Stahl; die 0.2%-Dehngrenze  $R_{p,0.2}$  wurde zwischen  $320 \text{ N/mm}^2$  und  $400 \text{ N/mm}^2$  gemessen [130].

#### 2.4.6 Bildung und Deformation des Martensit in Fe-Mn-Si-Cr

Die Kristallstruktur der verschiedenen Typen von FGL unterscheidet sich. Fe-Mn-Si-Cr hat ein kubisch flächenzentriertes (kfz) Gitter im Austenit und wechselt in ein hexagonal dichtest gepacktes (hdP) Gitter im Martensit [108] (für Gittersysteme siehe z. B. [19, 101]). Die Umwandlung dieser Gitterstrukturen in Fe-Mn-Si-Cr ist nicht thermoelastisch, d. h. die Phasenumwandlung zum Martensit kann nicht allein durch Temperaturänderung gestartet werden, es sei denn es wird deutlich unterkühlt, was jedoch keine vollständige Umwandlung garantiert. Unterschreiten von  $M_s$  führt zwar zu einem metastabilen Zustand, ist aber nur eine Voraussetzung für den Beginn der Umwandlung [108, 194]. Die Umwandlung muss durch mechanische Spannung unterstützt werden.

Eine weitere Erklärung der Umwandlung des Gitters von kfz nach hdP unter Spannung gibt [108]: nur unter Spannung addieren sich die Verschiebungsvektoren beim Bilden des Martensits, was Voraussetzung für hohe pseudoplastische Dehnung ist, die notwendig für Formgedächtnis ist. Ohne Spannung hingegen, sind die Verschiebungsvektoren zufällig gerichtet; bei nachfolgender gerichteter Belastung kann nur ein Teil des Martensits pseudoplastisch gedehnt werden.

Praktische Konsequenz: Beim Abkühlen aus dem Austenit – bis unter  $M_s$  – ist keine Umwandlung nachweisbar. Bei nachfolgender Dehnung des Materials kann Martensit gebildet werden, wobei der Beginn der Spannungs-Dehnungs-Kurve von elastischer Verformung des metastabilen Austenit geprägt sein kann. Erst zunehmende Neigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve, hin zu einem Plateau, markiert  $\sigma_{krit}$ , der spannungsinduzierten Martensitbildung, wie in Bild 2.18c dargestellt.

#### 2.4.7 Nachweis des Phasenzustands

Folgende Methoden klären, in welcher Phase die FGL ist [10]:

- Metallographische Analyse von Schlifflen unter dem Mikroskop (Bild 2.17)
- Differentialkalorimetrie
- Interpretation von Temperatur-Last-Verformungskurven (Bild 2.18)
- Messung der elektrischen Widerstandsänderung.

Nur die beiden letzten Methoden können *in situ* angewendet werden, d. h. unter Last und am Bauteil. Mit Differentialkalorimetrie können lediglich die Umwandlungstemperaturen ohne mechanische Spannung an Hand von Änderungen des Wärmestroms ermittelt werden [246].

Voraussetzung für elektrische Widerstandsmessung ist eine entsprechend schlanke Probe mit ausreichendem elektrischem Widerstand. Nach Ergebnissen in [81] ist die Änderung des elektrischen Widerstands  $\Delta R_e$  linear abhängig von der Dehnung der FGL; die mechanische Spannung hat nur geringen Einfluss darauf. Die Änderung des Phasenzustands hingegen führt zu nichtlinearem Verlauf der  $\Delta R_e$ -Kurve; deren Wechsel der Tangenten-neigung korrespondiert mit den Umwandlungstemperaturen. Allerdings lässt  $\Delta R_e$  keine qualitative Aussage zum Phasengemisch zu, wenn nicht Referenzpunkte bekannt sind. Die Bewertung kann also nicht an Hand einer Einzelmessung erfolgen sondern immer relativ innerhalb einer kontinuierlichen Messung. Ergebnisse zu  $\Delta R_e$  in Fe-Mn-Si sind in [244, 255] enthalten.

## 2.5 Umschnürte Betondruckglieder

Das Materialverhalten der Komponenten des umschnürten Betondruckglieds wurde in den vorhergehenden Abschnitten separat erläutert. Dieser Abschnitt gibt Ergänzungen mit direktem Bezug auf umschnürte Betondruckglieder.

### 2.5.1 Wesentliche experimentelle Erkenntnisse ohne Quervorspannung

Bereits 1902 erwähnt CONSIDÈRE [44], dass der Widerstand des Betons gegen Druck durch Querbewehrung zu erhöhen sei. RICHART und Kollegen versahen 1928 erstmals Betonzy-linder mit metallischen Umschnürungen [182, 183]. Ihre grundlegenden Erkenntnisse haben bis heute Bestand:

- Elastische Umschnürung wirkt inelastischen Verformungen des Betons entgegen
- Die Traglast steigt infolge Umschnürungsdruck
- Veränderungen im Betonverhalten werden durch Volumenänderung gekennzeichnet

Eher als Randnotiz zum Probekörper Nr. 32 wird in [183] festgehalten: Wiederbelastung ohne Umschnürung führte zum Versagen bei 49% der Last, die im umschnürten Zustand aufgenommen werden konnte. Derartige Entfestigung des umschnürten Betons wurde auch in [226] für FVK Umschnürung festgestellt.

Bild 2.19 zeigt die typischen axialen Spannungs-Dehnungs-Kurven umschnürter Betonzy-linder an Hand von Versuchsergebnissen [11, 252]. Mit Umschnürung aus Stahl (Bild 2.19a) kann die axiale Last gesteigert werden, bis das elastische Dehnvermögen des Stahls erschöpft ist. Nach Überschreiten der Traglast  $f_{cc}$  wird die Umschnürung plastisch gedehnt, ermöglicht aber keine höheren Querdrücke; die axiale Spannung im Beton sinkt, obwohl

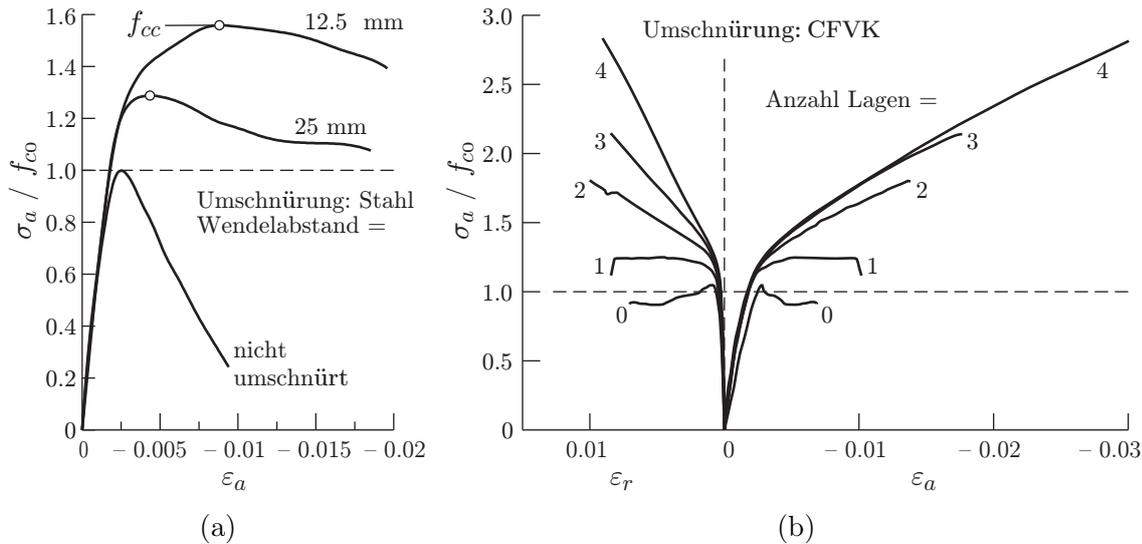


Bild 2.19: Gemessene Spannungs-Dehnungs-Kurven des Betons, abhängig von Art und Menge der Umschnürung: (a) mit Stahlumschnürung aus [11] und (b) mit Kohlefaserumschnürung aus [252]

noch weiter axial gestaucht werden kann. Der ansteigende Typ der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve (oberste Kurve in Bild 2.19a) kommt nur zu Stande wenn ausreichender Querdruck vorhanden ist, sonst fällt die Kurve ab, nachdem  $\varepsilon_{c0}$  geringfügig überschritten wurde. Der Betonkern bricht schlagartig, wenn der Stahl reißt.

FVK Umschnürung ermöglicht nahezu linearen Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve bis zum Bruch der Umschnürung und damit auch des Betonkerns. Den Einfluss der Menge umschnürenden FVK Materials zeigt Bild 2.19b.

Die axiale Bruchdehnung – und damit die Duktilität – des umschnürten Betons werden maßgeblich durch die Bruchdehnung der Umschnürung bestimmt.

Die Wirksamkeit einer Umschnürung ist ausgeprägter bei Beton niedriger Festigkeit [11, 226], wofür die geringere Querdehnung bei Beton höherer Festigkeit verantwortlich ist.

Wie in Abschnitt 2.2.2 dargelegt, ist die Kurve der Volumendehnung charakteristisch für das Verhalten des Betons. Ergebnisse für Betonzylinder zeigt Bild 2.20. Der Querdruck infolge Umschnürung ist demnach für die Volumendehnung bestimmend. In IMRAN's umfangreichen Versuchen wurde der Querdruck hydraulisch, in einer Triaxialzelle erzeugt [97]. Bild 2.20a zeigt Ergebnisse daraus, für konstanten Querdruck. Diese Ergebnisse werden in der Modellbildung der vorliegenden Arbeit genutzt (Abschnitt 4.2.6). Die Kurve der Volumendehnung entwickelt sich stetig, ohne markante Wechsel der Tangentenrichtung.

Bei realer Umschnürung aus GFVK hingegen, wurde ein konzentrierter Richtungswechsel in der Kurve der Volumendehnung festgestellt, der bei axialen Spannungen nahe  $f_{c0}$  erfolgt Bild 2.20b. In den zu Grunde liegenden Versuchen [149] wurde auch nachgewiesen, dass die Richtung der Kurve nach begonnener Volumenexpansion wieder wechseln kann, zu Gunsten weiterer Volumenstauchung. Dieses Verhalten kann als Aktivierungseffekt bezeichnet werden, verursacht durch: tangentielle Versteifung der Umschnürung und radiale Verschiebungen innerhalb der Umschnürung, infolge Last aus stark zunehmender Querdehnung des

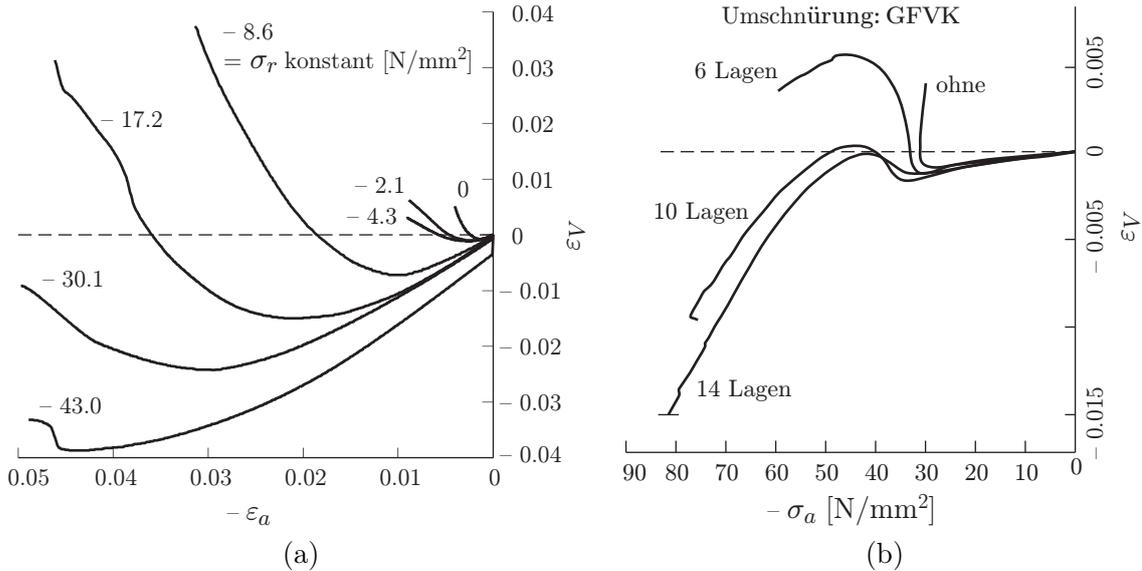


Bild 2.20: Entwicklung der Volumendehnung im Beton: (a) bei verschiedenen konstanten Querdrücken in einer Triaxialzelle, aus [97] und (b) bei Umschnürung aus Glasfasern mit verschiedener Lagenanzahl, aus [149]

Betons nahe  $f_{c0}$ . Ein weniger wahrscheinlicher Grund wäre auch Ausgleich von fehlendem Kontakt zwischen Umschnürung und Betonoberfläche.

Tangentiale Versteifung wurde in einaxialen Zugversuchen von CFVK nachgewiesen (vgl. Bild 3.4 und [47, Fig. 51]); In [56] wird dieses Verhalten als typisch für Kohlefaser beschrieben.

Radiale Verschiebungen sind insbesondere wahrscheinlich bei FVK, wenn die Fasern in Querrichtung in die Matrix gepresst werden oder Hohlräume in mehrlagigen Umschnürungen geschlossen werden [249].

## 2.5.2 Bisherige Arbeiten zur Quervorspannung von Betondruckgliedern

Einen Überblick zu bisherigen technischen Konzepten und Experimenten zur Quervorspannung von Betondruckgliedern enthält [102, 103]. Quervorspannung wurde bereits mit verschiedenen Methoden erzeugt: Aufziehen von Fasern, Drähten oder Bändern [66, 68, 143, 169, 226]; Hochdruckinjektion des Raumes zwischen FVK Umschnürung und Beton mit Mörtel oder Verwendung von Quellmörtel [154, 175, 254]; Spannen von Stahl oder FVK mit hydraulischen Pressen oder Gewindebolzen [190, 253]; selbstvorspannbare Formgedächtnislegierungen ([13, 42, 122, 212]). Die Schlussfolgerungen der Arbeiten sprechen durchweg für den Effekt der vorgespannten Umschnürung: geringfügig höhere Traglast bei Umschnürung aus Stahl [143] und FVK [154]; höhere Rotationsfähigkeit des Betons bei Biegung [67, 175, 253]; geringere Verformung des Betons [154], auch bei zyklischer Last [226]; höhere Tragfähigkeit von Stößen axialer Betonstahlbewehrung innerhalb der Umschnürung [67, 175]; erhöhte Schubtragfähigkeit des Betons [175, 190, 253].

Fast alle der vorgenannten Arbeiten, mit Ausnahme von [154], haben einen wesentlichen Mangel: Der Effekt der Vorspannung wird nicht isoliert ausgewiesen, d. h. nicht im Vergleich zum ungespannten Fall, bei gleicher Art und Menge der Umschnürung. Der Nutzen

der Vorspannung ist auf dieser Grundlage nur ansatzweise zu bewerten, denn schon ungespannte Umschnürung kann wesentliche Verbesserung im Vergleich zum nicht umschnürten Betonverhalten bewirken, so z. B. enorme Steigerung der Traglast (Bild 2.19); die Duktilität steigt bereits auf ein Vielfaches. So scheint in punkto Traglast und Duktilität kein Bedarf für technisch aufwändige Verbesserungen zu bestehen, die mit der Erzeugung der Vorspannung einhergehen, zumal in Versuchen verhältnismäßig geringer Einfluss der Vorspannung auf Traglast und Duktilität festgestellt wurde [143, 226].

Im Blickfeld der vorliegenden Arbeit stehen deshalb: Einfluss der Vorspannung auf die in [183, 226] nachgewiesene Entfestigung des umschnürten Betons und auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten vor Erreichen der Traglast.

### 2.5.3 Experimente mit vorgespannter FGL-Umschnürung

In Versuchen verhielten sich mit Ni-Ti umschnürte und vorgespannte Betonzyylinder ähnlich wie Zylinder mit konventioneller metallischer Umschnürung (Bild 2.19a), mit abfallendem Typ der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve nach Erreichen von  $f_{cc}$  [122, 212]. Die Betonstauchungen bei  $f_{cc}$  waren dabei höchstens  $2 \cdot \varepsilon_{c0}$  oder weniger. Mit reiner FGL Umschnürung beobachtet, deutliches Abfallen der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve, direkt nach Überschreiten von  $f_{c0}$ , wurde verhindert, durch Kombination der FGL mit GFVK als Umschnürung [212]. In [122] wurde eine deutliche Erhöhung von  $f_{cc}$  erreicht, indem Ni-Ti mit Stahlfasern als vorspannbare Umschnürung kombiniert wurde.

Alle genannten Arbeiten weisen eine enorme Duktilität des mit FGL umschnürten Betons nach. Vergleich von Umschnürung aus Ni-Ti im Martensit und Austenit ergab keine verwertbaren Ergebnisse für die Traglasterrhöhung von Betonzyindern [42].

Anhaltspunkte zum positiven Effekt vorgespannter Umschnürung mit FGL liegen also vor. Jedoch sind Umschnürungen aus FGL aus folgenden Gründen nicht geeignet, um den Effekt der Vorspannung im Vergleich zum ungespannten Fall zu isolieren: Zur thermischen Vorspannung ist Phasenübergang notwendig, ungespannter Martensit müsste also mit gespanntem Austenit verglichen werden. Theoretisch könnte auch ungespannter Austenit mit thermisch vorgespanntem Austenit verglichen werden, allerdings wandelt sich der gespannte Austenit mit steigender Last möglicherweise spannungsinduziert um. Wegen der veränderlichen Materialeigenschaften im Übergangsbereich kann die Zugkraft in der Umschnürung nicht ohne Weiteres festgestellt werden. Eine ungespannte Legierung in der Tieftemperaturphase (Martensit) ist ohnehin nicht sinnvoll als Umschnürung anwendbar, da ihre Steifigkeit zu gering ist.

Um den Sinn der FGL als vorgespannte Umschnürung zu klären, wird in der vorliegenden Arbeit zunächst der grundsätzliche Effekt der Vorspannung isoliert.

### 2.5.4 Berechnungsmodelle

RICHART und Kollegen formulierten folgende empirische Gleichung für die axiale Traglast  $f_{cc}$  des radial umschnürten Betons als Funktion des maximalen Querdrucks  $\sigma_r$  auf Grund ihrer Versuche [182]:

$$f_{cc} = f_{c0} + 4.1 \cdot \sigma_r . \quad (2.8)$$

Diese Gleichung ist nach wie vor gültig, obwohl im Detail verbessert [158, 248].

Nachfolgende Untersuchungen widmeten sich weiter der experimentellen und analytischen Bestimmung der erhöhten Traglast und der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve [17, 100, 158]. Einbezogen wurden auch baupraktisch relevante Randbedingungen, wie exzentrische Last und Stützenschlankheit [146, 224] sowie rechteckige Querschnitte und größere axiale Abstände der Umschnürungselemente [58, 119, 141, 142]. Die Berechnungsmodelle für rechteckige Querschnitte basieren jedoch auf dem Verhalten des homogen umschnürten Zylinders. MANDER et al. entwickelten dafür das Konzept der effektiv umschnürten Querschnittsfläche [142].

In [142] wird bereits ein energetischer Ansatz verfolgt: die Differenz der Formänderungsenergie, des umschnürten und nicht umschnürten Betons, sei gleich der in der Umschnürung gespeicherten Energie. Dies wurde jedoch widerlegt [80].

Die vorgenannten Arbeiten betrachten ausschließlich Stahl als umschnürendes Material. Sie bilden die Grundlage zur Berücksichtigung der Umschnürungswirkung in Normenkonzepten [38], Richtlinien [82] und europäischen Normen, wie EC 2 und SIA 262 [1, 3]. Die von 2008 bis 2012 gültige deutsche Norm des Stahlbetonbaus, DIN 1045-1 [9, (Abschn. 9.1.7(4))], enthielt keine expliziten Verfahren für umschnürte Druckglieder. Es hieß dort lediglich: „Bei mehraxialen Druckbeanspruchungen dürfen höhere Festigkeiten angesetzt werden“. EC 2 enthält das vereinfachte Verfahren nach [38], was eine parabel-rechteckförmige Spannungs-Dehnungs-Linie für umschnürten Beton zur Verfügung stellt. Damit können zwar höhere Festigkeiten und höhere axiale Dehnungen abgebildet werden, darüber hinaus heißt es jedoch: „Andere grundlegende Baustoffeigenschaften dürfen für die Bemessung als unbeeinflusst betrachtet werden.“ [1, (Abschn. 3.1.9(1))].

Zu Beginn der 1980er Jahre wurden erste Vorschläge gemacht, FVK zur Umschnürung einzusetzen [62, 63, 127]. Zahlreiche Experimente folgten [160, 185, z. B.]; viele empirische Berechnungsmodelle wurden publiziert, die sich jedoch meist nur geringfügig unterscheiden [62, 106, 188, 189, 192, 229, 252, z. B.]. Zum Vergleich der wesentlichen empirischen Modelle für FVK-Umschnürung sei verwiesen auf [30, 50, 227]. Diese Modelle haben gemein, dass zwar die axiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung bestimmt wird, nicht aber die Querdehnung.

Wenige Autoren betreiben eine zumindest teilweise physikalische Modellbildung, die auch die Querdehnung berücksichtigt: [29, 79, 80, 152, 164, 220]. Dafür ist es notwendig, die Dilatanz des Betons zu beschreiben (Bild 2.4b).

Um das dilatante Dehnverhalten des Betons zu erfassen, schlägt PANTAZOPOULOU eine empirische Funktion  $\varepsilon_r(\varepsilon_a)$  vor, die Längs- und Querdehnung verknüpft und von den Betoneigenschaften abhängt [165]. Weiterhin wird eine Gleichung für die in Bild 2.12b gestrichelt dargestellte Abhängigkeit des Sekantenmoduls des Betons von der Querdehnung formuliert, mit  $2\varepsilon_r$  als Schädigungsindikator. Dieser Ansatz wurde von anderen Autoren genutzt [98, 166, 220] – auch für mehraxiale Last.

In [164] wird das Konzept für den triaxialen Fall erweitert, mit der Annahme, dass der Unterschied zwischen einaxialem und transversal-isotropischem Fall (Definition siehe Anhang B) energetisch beschrieben werden kann: in einem Inkrement der axialen Dehnung sei die Differenz der Zunahme der Formänderungsenergie zwischen umschnürtem Beton und dem nicht umschnürten Beton gleicher Schädigung identisch mit der Zunahme der Formänderungsenergie der Umschnürung.

Eigene Simulationen mit diesem und verwandten Verfahren zeigten, dass die axialen und radialen Spannungs-Dehnungs-Kurven des umschnürten Betons nur näherungsweise be-

rechnet werden können, insbesondere mit ungenügenden Ergebnissen für Spannung und Dehnung in Querrichtung. Die Voraussetzung zum Erfassen einer Quervorspannung ist somit nicht gegeben. Zudem gelingt die Abbildung nicht bei nichtlinearem Verhalten der Umschnürung. In der Originalliteratur werden diese Modelle auch meist nur für Versuchskörper getestet, die mit FVK umschnürt sind [152, 166, 220].

Andere Arbeiten der letzten Jahre [20, 72, 98, 110, 202] setzen auf eine kontinuumsmechanische Modellbildung mit elastisch-plastischen Materialgleichungen für den Beton, wie in Abschnitt 2.2.9 erläutert. Zur numerischen Lösung sind komplexe Computerprogramme notwendig; In der Regel wird die Finite Elemente Methode (FEM) genutzt. Für Modelle ohne Schädigungsansatz wurden bereits Verfahren in FEM-Programme implementiert, die für den Anwender verfügbar sind [14, 201, 240]. Eigene Simulationen mit dem in [201] dokumentierten Programm zeigten, dass gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen erreicht wird, wenn das Spannungsverhältnis  $\sigma_a/\sigma_r$  mit steigender Last konstant bleibt. Bei realer Umschnürung, hingegen, ändert sich das Spannungsverhältnis mit der Last; berechnete Querdehnung und Querdruck weichen stark vom Experiment ab. Wiederum besteht das Defizit in der Abbildung der Dilatanz des Betons und den entsprechenden dissipativen Vorgängen gemäß Abschnitt 2.2.8.

Modelle mit Schädigungsansatz wurden noch kaum in kommerzielle Computerprogramme implementiert und sind deshalb vorrangig von wissenschaftlicher Bedeutung. Sie erfordern zumeist eine hohe Anzahl von Parametern, die es zu kalibrieren gilt. Ein allgemein anwendbares Verfahren liegt damit nicht vor. So werden z. B. in [176], trotz nur weniger Eingangsparameter, hervorragende Ergebnisse bei der Abbildung von einaxialen und biaxialen Spannungszuständen erzielt; für den dreiaxialen Fall jedoch liegt die Abweichung von Versuchsergebnissen bei bis zu 100 %.

### 2.5.5 Beziehungen am umschnürten Zylinder

Dieser Abschnitt beschreibt grundlegende, bekannte Zusammenhänge, die in der Modellbildung benutzt werden.

Aus der Geometrie des Kreises folgt, dass radiale Dehnung  $\varepsilon_r$  und tangentielle Dehnung  $\varepsilon_t$  einer Kreisfläche gleich sind (Herleitung in Anhang B):

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t. \quad (2.9)$$

Infolge der radialen Ausdehnung eines Zylinders wird somit eine Zugspannung in einem umschnürenden Material hervorgerufen.

**Von der Wendel zum Mantel** In den Versuchen sowie auch in praktischen Anwendungen der Umschnürung werden Wendel oder Ringe benutzt. Bild 2.21a und Bild 2.21b zeigen die geometrischen Parameter einer einlagigen Umschnürung mit Bändern: Radius  $r$ , Bandbreite  $b$ , Banddicke  $t$  und Steigung bzw. Achsabstand der Ringe  $s$ . Bei FVK-Umschnürung sind die Wendel meist mehrlagig, mit der Lagenanzahl  $n$  (Bild 2.21c).

Für die Berechnung wird hingegen häufig ein stellvertretender, homogener umschnürender Mantel angenommen, der die effektive Dicke  $t_e$  hat (Bild 2.21d). Diese Annahme ist zulässig, wenn der lichte Abstand der einzelnen Umschnürungsringe kleiner oder gleich dem Größtkorndurchmesser des Betons ist. Die Idealisierung als Mantel wird aber auch vorgenommen, wenn die Auswirkung größerer Abstände anderweitig berücksichtigt wird

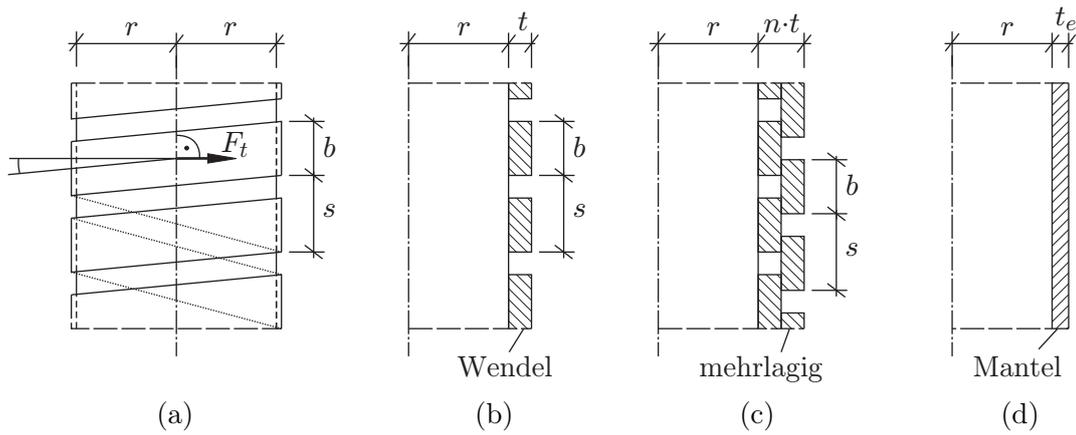


Bild 2.21: Geometrische Parameter einer wendelförmigen Umschnürung (a,b,c) und (d) eines homogenen Mantels

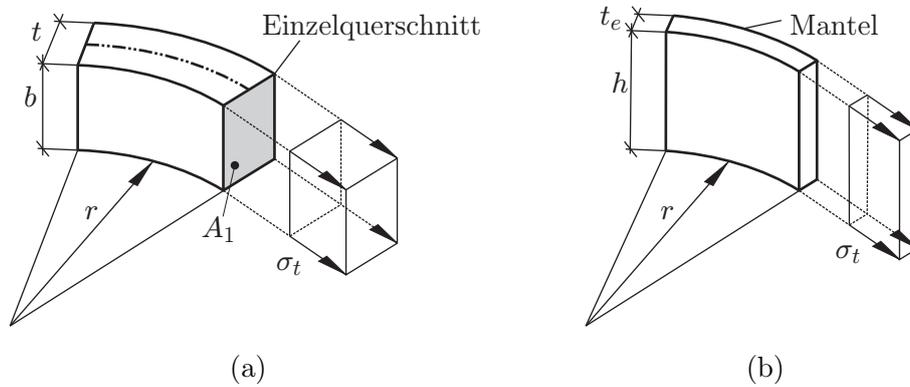


Bild 2.22: Vereinfachte Annahme zur Spannungsverteilung in der Umschnürung: (a) Einzelquerschnitt und (b) Mantel

([142]). Obwohl die Zugkraft in einer Wendel genau genommen eine nicht orthogonale Neigung zur Zylinderachse hat, wie in Bild 2.21a dargestellt, wird die Richtung der Zugkraft  $F_t$  üblicherweise trotzdem als exakt tangential zum Zylinderquerschnitt wirkend angenommen. Der damit verbundene Fehler ist gering, wenn der Anstieg der Wendel klein ist.

Weiterhin wird angenommen, dass  $\varepsilon_t$  und damit auch die tangentiale Spannung  $\sigma_t$  über die gesamte Dicke des umschnürenden Querschnitts gleich ist, wie in Bild 2.22a dargestellt. Biegedehnungen werden vernachlässigt. Dabei wird zu Grunde gelegt, dass die Dicke der Umschnürung wesentlich kleiner ist als der Durchmesser des umschnürten Körpers. Diese Vereinfachung ermöglicht eine eindimensionale Modellbildung für die Umschnürung.

Wenn ein Mantel rechnerisch stellvertretend für eine Wendel sein soll, so muss für eine bestimmte Höhe des Zylinders  $h$  gelten:

$$\begin{aligned}
 F_{t,Mantel} &= F_{t,Wendel} \\
 \sigma_t t_e h &= \sigma_t A_1 \frac{h}{s} n.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Hierbei ist  $A_1$  die Einzelquerschnittsfläche von Wendel oder Ring. Da  $\sigma_t$  in Wendel und Mantel bei gegebenem  $\varepsilon_t$  gleich groß ist, folgt für die effektive Dicke:

$$t_e = \frac{A_1 n}{s}. \quad (2.11)$$

**Radialer Umschnürungsdruck aus Ringzug** Eine Zugspannung  $\sigma_t$  in der Umschnürung führt auf Grund der geometrischen Kopplung zu einer radialen Druckspannung  $\sigma_r$  im Zylinder. Wie in Anhang B (B.5) gezeigt, sind diese Spannungen durch folgende Beziehung verknüpft

$$\sigma_r = -\sigma_t \frac{t_e}{r}, \quad (2.12)$$

die auch als Kesselformel bekannt ist.

### 2.5.6 Exakte Dehnungsverteilung in einlagigen Umschnürungen

In Abschnitt 2.5.5 wurden die üblichen Grundannahmen zur Beschreibung der Dehnungs-Spannungs-Interaktion zwischen Betonzyylinder und Umschnürung dargestellt. Dabei wird insbesondere der Einfluss der Biegung vernachlässigt. Die Umschnürung wird eindimensional modelliert. Diese Annahmen werden nachfolgend in Frage gestellt. Das umschnürende Material wird dazu als Balken aufgefasst der um den Betonquerschnitt gebogen und mit dem Zylinder geweitet wird.

**Ringbiegung** Bild 2.23a zeigt die geometrischen Verhältnisse bei Biegung eines Balkens um einen Radius  $r$ , wenn der Balken frei auf dem Radius gleiten kann. Mit dem Strahlensatz

$$\frac{dl + \Delta dl}{dl} = \frac{r + t}{r + \frac{1}{2}t}$$

ergibt sich die Randfaserdehnung infolge Biegung zu

$$\varepsilon_B = \frac{\Delta dl}{dl} = \frac{t}{2r + t}. \quad (2.13)$$

Mögliche Dehnungszustände nach der Biegung der Umschnürung sind in Bild 2.23 dargestellt. Die Biegedehnung ist symmetrisch. In Bild 2.23b bleiben die Dehnungen unterhalb der Fließgrenze  $\varepsilon_y$ . In Bild 2.23c überschreiten sie die Fließgrenze, beginnend mit den Randfasern. Die BERNOULLI-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte soll gelten. Erfolgt jedoch vor der Biegung eine axiale mechanische Vorspannung  $\varepsilon_P$ , so ergeben sich z. B. Dehnungen nach Bild 2.23d. Eine solche Situation kann entstehen, wenn eine Umschnürung mit einer Zugkraft auf einen Zylinder aufgezogen wird.

Es wird deutlich, dass die Annahme einer konstanten Dehnungsverteilung bei metallischen Umschnürungen möglicherweise nicht gerechtfertigt ist, da eine schrittweise Plastizierung der Umschnürung erfolgen kann.

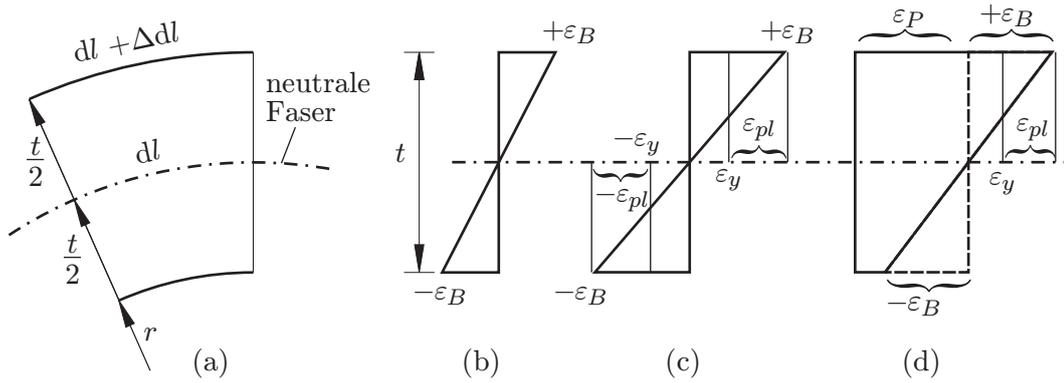


Bild 2.23: Biegung eines Balkens zum Ring und typische Dehnzustände: (a) Geometrie, (b) elastisch, (c) elastisch-plastisch und (d) Biegung mit zentrischer Vorspannung

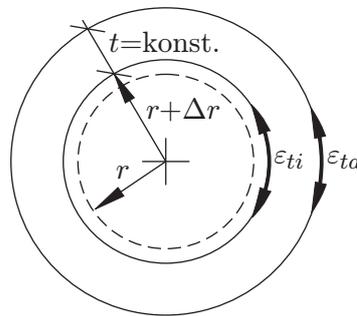


Bild 2.24: Weitung eines Ringes

**Weitung** Wird der umschnürte Zylinder infolge einer Last aufgeweitet (Bild 2.24), so ist zu beachten, ob sich alle Fasern der Umschnürung gleich dehnen oder ob ein Gradient vorliegt. In Analogie zu

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} \quad (2.14)$$

und mit (2.9) ergeben sich die Randfaserdehnungen des Umschnürungsringes zu

$$\varepsilon_{ti} = \frac{\Delta r}{r} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{ta} = \frac{\Delta r}{r + t}. \quad (2.16)$$

Das Verhältnis der Randfaserdehnungen ist dann

$$\frac{\varepsilon_{ti}}{\varepsilon_{ta}} = 1 + \frac{t}{r}. \quad (2.17)$$

Es existiert also ein konstanter, von der Ausgangsgeometrie aber nicht von der Geometrieänderung abhängiger Gradient in der Umfangsdehnung. Die Verteilung der Umfangsdehnungen infolge radialer Dehnung kann nur dann vereinfachend als konstant über die Dicke der Umschnürung angenommen werden, solange  $t/r$  ausreichend klein ist.

### 2.5.7 Quantifizierung des Umschnürungsgrads

Zur Beschreibung des Grades der Umschnürung mit einem skalaren Parameter existieren drei verschiedene Ansätze mit unterschiedlicher Aussagekraft.

Analog zum Bewehrungsgrad in stabförmigen Betonbauteilen kann das Verhältnis  $\rho$  der Querschnittsflächen von Umschnürung (tangential) und Betonkern (axial) verwendet werden [142]:

$$\rho = \frac{A_t}{A_c}. \quad (2.18)$$

Allerdings wird mit diesem Ansatz die Zugsteifigkeit der Umschnürung  $E_t A_t$  nicht erfasst. Somit können umschnürte Systeme mit unterschiedlichen Umschnürungsmaterialien nicht an Hand von  $\rho$  verglichen werden. Für zylindrische Druckglieder besser geeignet ist der Umschnürungsmodul  $C$  nach [252], der sowohl Dicke und Elastizitätsmodul der Umschnürung als auch die Dimension des Betonzylinders erfasst:

$$C = \frac{E_t t_e}{r}. \quad (2.19)$$

Beide bisher gezeigten Ansätze berücksichtigen nicht die Begrenzung der Umschnürungswirkung durch eine etwaige Fließgrenze  $\varepsilon_y$  des umschnürenden Materials. Durch Einsetzen von  $\sigma_t = E_t \varepsilon_y$  in (2.12) und Normierung mit der Betondruckfestigkeit  $f_{c0}$  entsteht

$$\frac{\sigma_r(\varepsilon_y)}{f_{c0}} = \frac{E_t \varepsilon_y t_e}{r f_{c0}}. \quad (2.20)$$

Der Quotient  $\sigma_r(\varepsilon_y)/f_{c0}$  ist das Verhältnis zwischen erzielbarem Umschnürungsdruck und einaxialer Betondruckfestigkeit. Allerdings kann dieses Kriterium nicht sinnvoll angewendet werden, bevor die Umschnürung fließt. Bei Umschnürung aus FVK ist dieses Kriterium nutzlos.



# 3 Versuche

## 3.1 Versuchsarten

Zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Versuchen wurden durchgeführt:

- Druckversuche an umschnürten Betonzylindern
- Temperatur-Zugversuche an einer eisenbasierten Formgedächtnislegierung

Die Zylinderdruckversuche dienen zur Bestimmung von Spannungs-Dehnungs-Verhalten und Restfestigkeit des vorgespannt umschnürten Betons. Stahl und Kohlefasern wurden als umschnürende Materialien verwendet und auch vorgespannt. Anhand der Ergebnisse der vorgespannten Stahlschnürung wurden auch Rückschlüsse auf die Auswirkung selbstvorspannbarer metallischer Umschnürungen, wie FGL, ermöglicht.

Die Temperatur-Zugversuche an Drähten aus Fe-Mn-Si-Cr bestimmen das Verhalten dieser FGL exemplarisch. Sie steuern Parameter bei zur Beantwortung der Frage: Können FGL sinnvoll als Umschnürung eingesetzt werden?

Die Herstellung der Probekörper und alle Experimente mit den Zylindern erfolgten im Labor der Abteilung Ingenieurstrukturen an der Eidgenössischen Materialprüfungs- und Forschungsanstalt (Empa). Die Experimente mit Fe-Mn-Si-Cr fanden sowohl an der Empa, als auch an der Bauhaus-Universität Weimar statt.

## 3.2 Übersicht Zylinderdruckversuche

Insgesamt wurden vier Serien (A,B,C,D) von Zylinderdruckversuchen durchgeführt mit Schwerpunkt auf Serie B. Die Geometrie der Zylinder war für alle Serien gleich. Ebenso war die Art der Verankerung der Umschnürung gleich, wie im Weiteren beschrieben.

Variiert wurden die Zugsteifigkeit der Umschnürung, die Vorspannung der Umschnürung und die axiale Last auf dem Zylinder. Bild 3.1 gibt eine Übersicht zu Parameterkombinationen und Art der Belastung für alle Serien; die Tabellen enthalten die Parameter in Kopfzeile und erster Spalte; graue Tabellenfelder zeigen wie die Parameter kombiniert wurden. Die verwendeten Kürzel sind in Tabelle 3.1 erläutert.

---

s1, s2, s3	Stufen der Zugsteifigkeit $EA$ der Umschnürung aus Stahl
c2, c3, c4	Stufen der Zugsteifigkeit $EA$ der Umschnürung aus CFVK
p0, p1, px, p2	Stufen der Vorspannung der Umschnürung (p0 = ohne Vorspannung)
i	Index für Laststufe
n	Anzahl der Lastwechsel

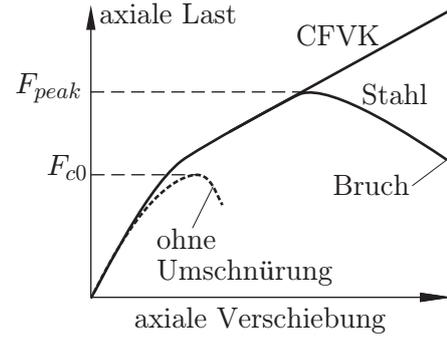
---

Tabelle 3.1: Kürzel für Parameter der Zylinderdruckversuche

### 3 Versuche

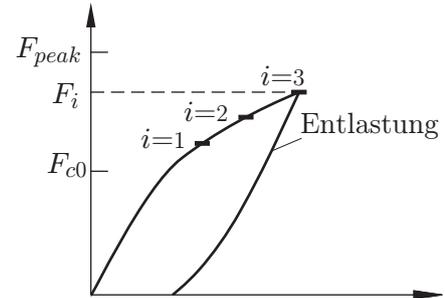
Serie A

		p0	px
Stahl	s3	Anz. = 2	3
CFVK	c3	1	1



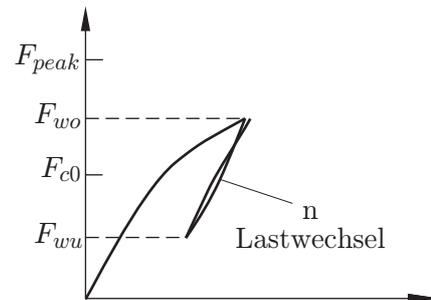
Serie B

		p0	p1	p2
Stahl	s2	$i = 1, 2, 3$		
Stahl	s3			
CFVK	c2			
	c3			
	c4			



Serie C

		p0	p1	p2
Stahl	s1	$n = 50$	50	
Stahl	s2	1,50,100		1,50,100



Serie D

		p0	p2
Stahl	s2	$i = 1$	1

wie Serie B



Bild 3.1: Parameterkombinationen und Lastschemata für Zylinderdruckversuche

Serie A diente der Bestimmung des Last-Verformungs-Verhaltens bis zum Bruch des umschnürten Systems unter axialem Druck. Die Einzelversuche unterschieden sich lediglich in Material und Menge der Umschnürung, sowie hinsichtlich der tangentialen Vorspannung der Umschnürung. Diese Serie klärt die Höchstlasten  $F_{peak}$  bzw. Bruchlasten der gewählten Kombinationen von Materialien und Vorspannung.

In Serie B wurde, außer Material, Menge und Vorspannung der Umschnürung, zusätzlich noch die maximale axiale Drucklast für einzelne Versuchskörper variiert. Die maximalen Drucklasten oberhalb von  $F_{c0}$ , aber unterhalb von  $F_{peak}$ , repräsentieren jeweils eine bestimmte Überlast auf dem umschnürten System. In Bild 3.1 sind die Stufen der Überlast

mit  $i = 1, 2, 3$  bezeichnet. Jeder Zylinder wurde anschließend ohne Umschnürung einem weiteren axialen Druckversuch bis zum Bruch unterzogen, um die Restfestigkeit des vorbelasteten Betons zu ermitteln.

In Serie C sind Ablauf und Parameter ähnlich wie bei Serie B, jedoch wurde das umschnürte System zyklisch ent- und wieder belastet, mit den Kräften  $F_{wu}$  und  $F_{wo}$  als untere und obere Zielmarke.

In Serie D wurden je ein vorgespannt und ein ungespannt umschnürter Zylinder exzentrisch belastet.

Die Serien C und D liefern trotz der geringen Anzahl der Prüfkörper einen wichtigen experimentellen Ausblick zur Bewertung des Anwendungspotentials der Vorspannung.

### 3.3 Druckversuche: Eigenschaften und Ausführung

#### 3.3.1 Betonzylinder

Für die Zylinder mit  $\varnothing 150$  mm und 600 mm Höhe wurde Normalbeton mit Größtkorndurchmesser 16 mm hergestellt. Der Beton stammt für die Serien A, B und C aus jeweils einer Mischung. Die Betonchargen wurden entsprechend mit I, II und III bezeichnet. Für Serie D wurden Zylinder aus Charge II genutzt. Alle verschiedenen Betonchargen haben die selbe Rezeptur (Anhang C, Tabelle C.1) und wurden in Standardversuchen an Würfeln, Zylindern und Prismen geprüft, die jeweils zu Beginn und am Ende der Versuchsserie ausgeführt wurden. Die Baustoffprüfungen wurden an der Abteilung Beton und Bauchemie der Empa ausgeführt. Die Prüfung erfolgte nach folgenden Standards: [5] für Würfeldruckversuche, [6, 7] für Biegezug- und Spaltzugfestigkeit, [4] für den Elastizitätsmodul und in Anlehnung an [8] für die Zugfestigkeit. Die Festigkeitssteigerung im Versuchszeitraum erwies sich als klein. Die Mittelwerte der Betoneigenschaften sind in Tabelle 3.2 angegeben.

Serie		A	B	C	D
Betoncharge		I	II	III	II
Würfeldruckfestigkeit (–)(Würfel 150 mm)	[N/mm <sup>2</sup> ]	42.5	38.5	42.5	44.0
Zugfestigkeit axial (Bohrkern $\varnothing 50 \times 150$ mm)	[N/mm <sup>2</sup> ]	2.7	2.0	3.2	2.1
Biegezugfestigkeit (Prisma $120 \times 120 \times 360$ mm)	[N/mm <sup>2</sup> ]	7.0	5.2	5.5	5.3
Spaltzugfestigkeit (Zylinder $\varnothing 150 \times 300$ mm)	[N/mm <sup>2</sup> ]	–	2.5	2.4	–
Elastizitätsmodul (Bohrkern $\varnothing 50 \times 150$ mm)	[N/mm <sup>2</sup> ]	32067	30080	33280	–
$-F_{c0}$ , Bruchlast Referenzzylinder	[kN]	619	581	640	664
$-f_{c0}$ , Druckfestigkeit Referenzzylinder	[N/mm <sup>2</sup> ]	35.0	32.9	36.2	37.6
$-\varepsilon_{c0}$ , axiale Dehnung bei $F_{c0}$	[‰]	2.0	2.8	–	–

Tabelle 3.2: Mittelwerte der Betoneigenschaften

Alle folgenden Auswertungen zur Festigkeit erfolgen auf Basis von Referenzzylindern mit  $\varnothing 150$  mm und 600 mm Höhe, die für jede Serie bis zum Bruch belastet wurden – ohne Umschnürung aber mit Verankerung. Somit wird der Einfluss der Zylinderschlankheit auf die Bruchlast erfasst, der experimentell und rechnerisch nachweisbar ist [112]; Vergleich mit den umschnürten Zylindern ist deshalb direkt möglich. Die Mittelwerte von

### 3 Versuche

$F_{c0}$  und  $f_{c0}$  sind in Tabelle 3.2 angegeben. Die Einzelergebnisse aller Referenzzyylinder sind in Anhang C, Tabelle C.2, gegeben. Der Vergleich der Würfeldruckfestigkeit mit der Zylinderdruckfestigkeit der Referenzzyylinder zeigt das übliche Verhältnis von etwa 0.8.

Die Zylinder wurden an Luft im Labor gelagert. Vor den Versuchen wurden sie an den Stirnseiten beschliffen, um ebene und parallele Grund- und Deckflächen zu gewährleisten.

#### 3.3.2 Stahlband

Für die Stahlumschnürungen wurden zwei Sorten handelsübliches wärmebehandeltes Stahlband mit den Querschnittsabmessungen  $0.5 \times 12.7$  mm bzw.  $0.80 \times 19.0$  mm verwendet. Die beiden Querschnittsvarianten wurden in Zugversuchen charakterisiert. Dabei zeigten sich Unterschiede im Fließverhalten. Bild 3.2a zeigt das dickere Stahlband nach dem Bruch in der Zugprüfmaschine Instron Model 1251. Bild 3.2b zeigt das dünnere Stahlband in der Zugprüfmaschine Zwick Z010. Belastet wurde mit 5 mm/min.

Die nachfolgend angegebenen Kennwerte des Zugversuchs sind in Bild 2.14 illustriert. Der Elastizitätsmodul beider Bandsorten ist  $187500 \text{ N/mm}^2$ . Das dünnere Band hat eine deutliche obere Streckgrenze  $R_{eH}$ , mit darauffolgendem Fließen ohne weitere Kraftaufnahme. Erst dann folgt Verfestigung bis zur Zugfestigkeit  $R_m$ , dem Maximalwert der auf den Ausgangsquerschnitt bezogenen Spannung (Nennspannung).

Im Gegensatz dazu, weist das dickere Band, vermutlich infolge herstellungsbedingter Kaltverfestigung, keine ausgeprägte Streckgrenze auf. Verfestigendes Verhalten überwiegt dem reinen Fließen. Dabei wird der linear-elastische Pfad schon weit vor dem Erreichen des

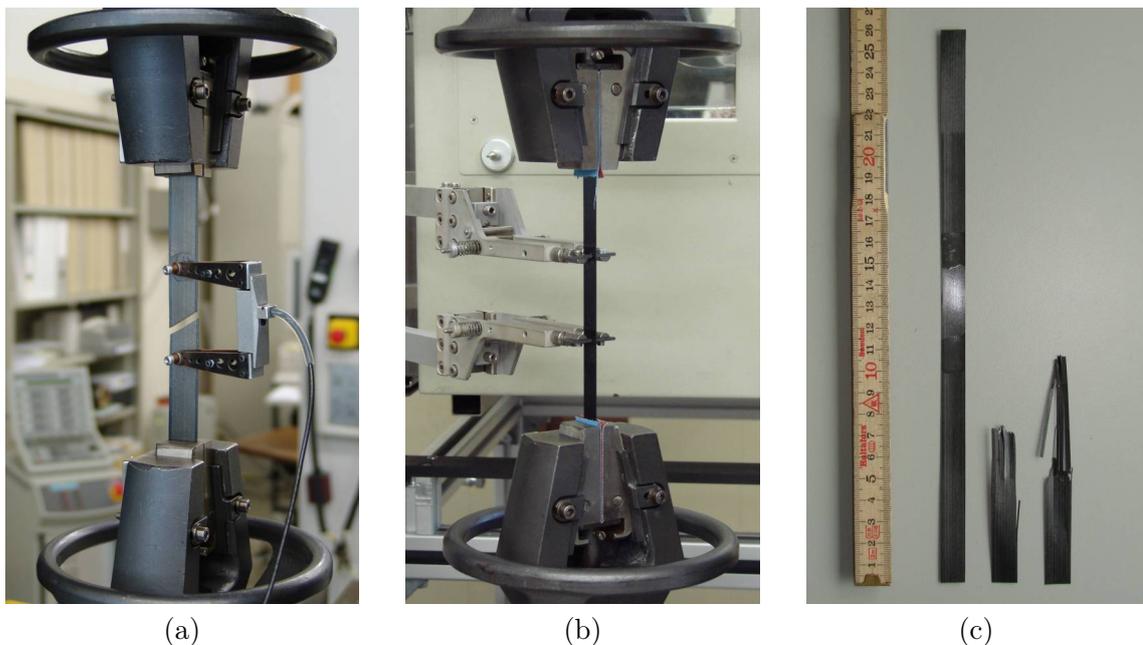


Bild 3.2: Charakterisierung in Zugversuchen: (a) Stahlband  $0.8 \times 19$  mm, (b) Stahlband  $0.5 \times 12.7$  mm und (c) Zugprobe und gerissene Bänder aus CFVK

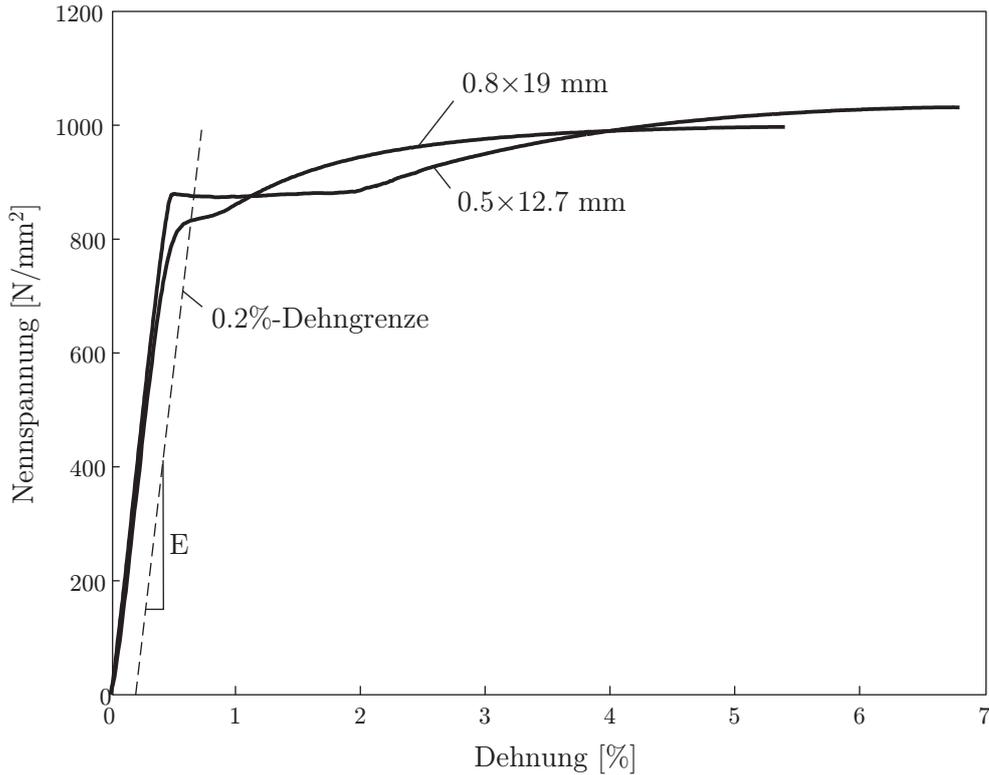


Bild 3.3: Mittelkurven der Zugversuche der Stahlbänder

Querschnitt [mm]	$R_{eH}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$R_{p,0.2}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$S_{Rp,0.2}^1$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\varepsilon_{Rp,0.2}$ [%]	$R_m$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$S_{Rm}^1$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\varepsilon_{Rm}$ [%]	min $\varepsilon_u$ [%]
0.5 × 12.7	879	875	15.7	6.69	1033	8.7	7.4	6.8
0.8 × 19	–	832	5.6	6.44	1000	5.5	5.9	5.4

für beide Querschnitte:  $E = 187500 \text{ N/mm}^2$

<sup>1</sup> Standardabweichung

Tabelle 3.3: Kennwerte Zugversuch Stahlbänder

kurzen Fließplateaus verlassen. Dieser Fakt ist für eine exakte Modellbildung zu berücksichtigen.

Die Nennspannungs-Dehnungs-Mittelkurven der Zugversuche sind in Bild 3.3 bis zum Erreichen der jeweils pro Bandsorte kleinsten erreichten Bruchdehnung  $\min \varepsilon_u$  dargestellt. Die 0.2%-Dehngrenze ist eingetragen. Die Mittelkurven wurden errechnet aus Stützstellen der Einzelkurven, die in einem gleichen Raster der Dehnung lagen oder die aus den Messwerten zusätzlich interpoliert wurden. Die zu Grunde liegende Anzahl der Proben ist Acht für das dickere bzw. Sechs für das dünnere Band.

Tabelle 3.3 enthält die Kennwerte der Zugversuche. Die Bruchdehnungen  $\varepsilon_u$  sind stark gestreut, wobei der Bruch einiger Proben bereits kurz nach Überschreitung von  $R_m$  eintrat. Für das dünnere Band waren die Bruchdehnungen zwischen 6.8 % und 12.0 % bzw. zwischen 5.4 % und 13.8 % für das dickere Band. Als Grundlage für die weitere Modellbildung dient die abschnittsweise lineare Approximation der Mittelkurven bis  $\min \varepsilon_u$ , wie in Anhang D gezeigt.

### 3.3.3 Bänder aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFVK)

Zur Umschnürung der Betonzylinder kam auch Bandmaterial aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff zum Einsatz (Bild 3.2c). Das Band hat die nominalen Querschnittsabmessungen  $0.15 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$  und einen Anteil von 55 % Kohlenstofffasern im Querschnitt. Eine einzelne Kohlenstofffaser hat nur wenige  $\mu\text{m}$  Durchmesser. Die thermoplastische Matrix, in der die Fasern eingebettet sind, besteht aus Polypropylensulfid. Sie gewährleistet Zusammenhalt und Formstabilität.

Zur Charakterisierung des auf den Nennquerschnitt bezogenen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens wurden axiale Zugversuche durchgeführt. Der Versuchsaufbau war wie in Bild 3.2b gezeigt. Belastet wurde mit  $1 \text{ mm/min}$  in einer Zugprüfmaschine Zwick Z010. Einige der Proben versagten am Rand der mechanischen Spannköpfe. Bruchstücke der Bänder zeigt Bild 3.2c, neben einer unbelasteten Probe. Die Standardabweichung der Bruchdehnungen  $S_{\varepsilon_u}$  war jedoch gering (siehe Tabelle 3.4).

Serie	Querschnitt [mm]	$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_u$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$S_{\sigma_u}^1$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\varepsilon_u$ [%]	$S_{\varepsilon_u}^1$ [%]
A	$0.15 \times 12^*$	113000	1750	57	1.45	0.06
B	$0.15 \times 12^*$	116000	1900	86	1.50	0.03

<sup>1</sup> Standardabweichung

\* nominale Breite, exakte Breite 11.9 mm

Tabelle 3.4: Kennwerte Zugversuch CFVK-Bänder

Bild 3.4 zeigt eine typische Spannungs-Dehnungs-Kurve. Das Band verhält sich, abgesehen von einer geringfügigen Versteifung mit steigender Zuglast, näherungsweise linear bis zum Bruch bei  $\sigma_u$  bzw.  $\varepsilon_u$ . Da in den Versuchsserien A und B zwei verschiedene Chargen von Bandmaterial verwendet wurden, sind diese einzeln untersucht worden. Die

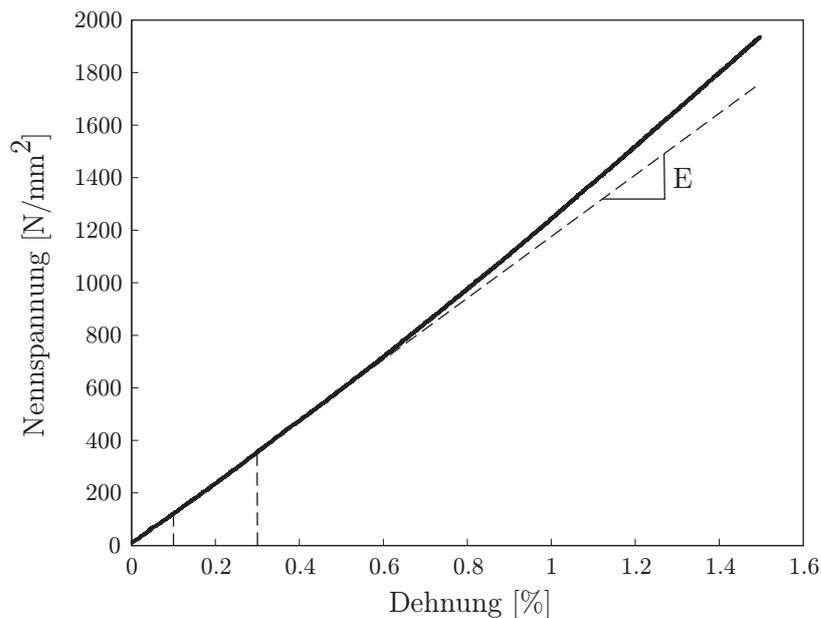


Bild 3.4: Beispiel eines Zugversuchs mit CFVK-Band.

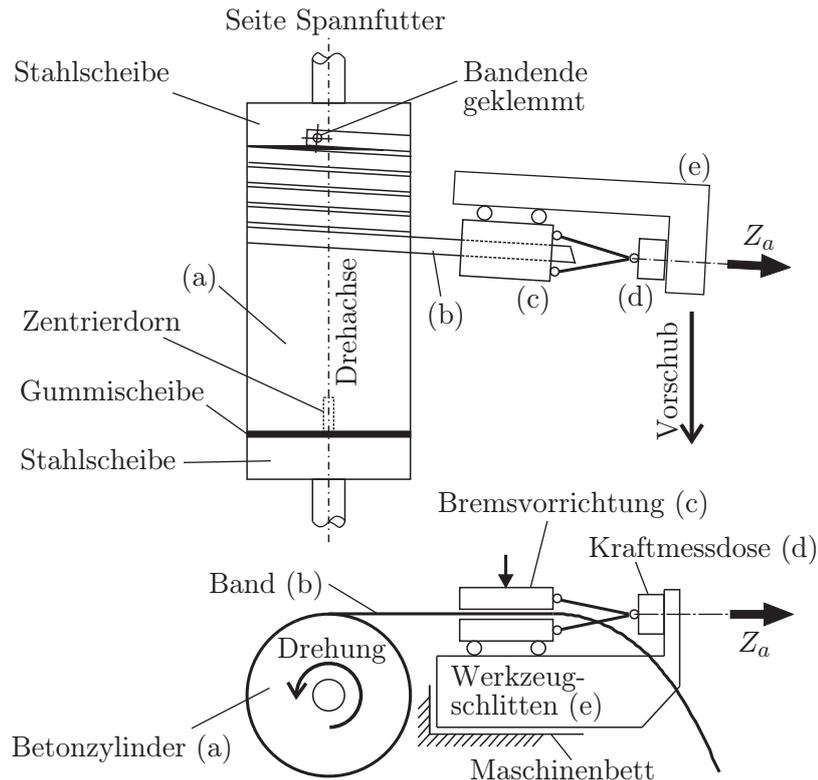


Bild 3.5: Prinzipskizze: Aufziehen der Bänder auf der Drehbank

Kennwerte der Zugversuche sind in Tabelle 3.4 als Mittelwerte angegeben. Die Kennwerte basieren auf der Auswertung von je sechs Einzelproben. Der Elastizitätsmodul wurde als Sekante der Spannungs-Dehnungs-Linie durch die Dehnungen 0.1% und 0.3% bestimmt.

### 3.3.4 Herstellen der vorgespannten Umschnürung

Die Bänder der Umschnürung wurden mittels einer konventionellen Drehbank wendelförmig auf den Zylinder gezogen, während dieser horizontal eingespannt war. Der Vorgang ist in Bild 3.5 skizziert. Die schwere Werkzeugmaschine erlaubt eine hohe Präzision in Steigung des Bandes (Vorschubweg) und Drehgeschwindigkeit des Zylinders. Das Band, dessen Anfang auf der Spannfutterseite geklemmt ist, wird durch eine einstellbare Bremsvorrichtung gezogen (Bild 3.6), die sich synchron zum Vorschub bewegt, in Bandrichtung gleitend gelagert ist und von einer Kraftmessdose gehalten wird. Die Bremskraft erzeugt die Vorspannung der Umschnürung. In Vorversuchen wurde die Einstellung der Bremse kalibriert. Sowohl Vorschubweg als auch Bremskraft  $Z_a$  wurden für jeden Zylinder elektronisch aufgezeichnet und geprüft.

Zum Abschluss des Wickelvorgangs wird die Drehung gestoppt, die Kraft von der Bremse gehalten, Stahlschellen (Bild 3.8) an den Zylinderenden montiert, Schrauben eingesetzt und per Drehmomentenschlüssel angezogen. Bild 3.7 zeigt einen Prüfkörper mit 300 mm Höhe nach dem Aufziehen und Verankern bevor er aus der Maschine genommen wird.

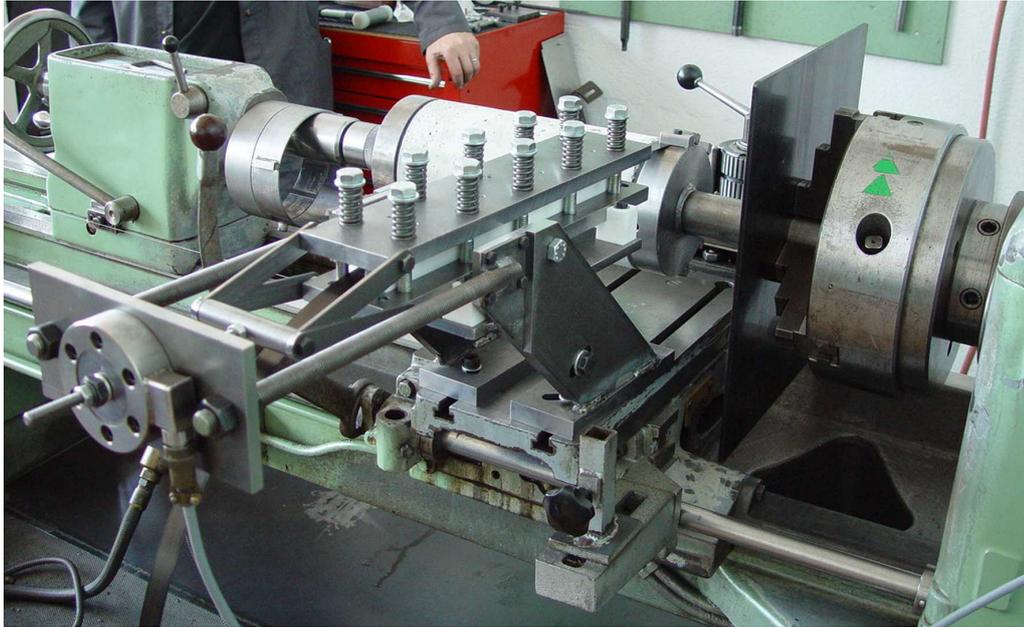


Bild 3.6: Drehbank vor dem Aufziehen, Bremsvorrichtung mit Kraftmessdose



Bild 3.7: Drehbank nach dem Aufziehen, Verankerungsschellen gesetzt



Bild 3.8: Detail einer montierten Verankerungsschelle

Beim Auftreffen auf den Zylinder wird das Band gebogen. Falls die Biegung bei den Stahlbändern teilweise plastisch ist, so erfolgt theoretisch ein Abbau der Kraft  $Z_a$  im Band. Da das Stahlband jedoch direkt nach dem Auftreffen noch auf der Zylinderoberfläche gleiten kann, wird praktisch wieder nachgespannt, bis zur vollen Bremskraft.

Der Zylinder wird im Bereich der vollständigen Wendel durch die Ringvorspannung radial gestaucht. Damit geht eine geringe Abnahme der Vorspannung einher.

Bild 3.9 zeigt die die mit verschiedenen Umschnürungen versehenen Zylinder bereit zum Druckversuch. Zu sehen ist auch ein nicht umschnürter Referenzzylinder. Auch an den Referenzzylindern wurden Stahlschellen montiert, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu garantieren.



Bild 3.9: Umschnürte Zylinder: (v. l. n r.) Referenz, s2, s3, c

### 3.3.5 Parameter der Umschnürung und Vorspannung

In Abschnitt 3.2 wurden Art der Parameter, deren Kombinationen und Bezeichnung (Tabelle 3.1) vorgestellt. Die geometrischen Parameter einer umschnürenden Wendel sind in Bild 2.21 gezeigt. Im Folgenden werden die Parameter quantifiziert.

Die elastische Zugsteifigkeit der Umschnürung ist gegeben durch Elastizitätsmodul  $E_t$  und Geometrie (Bandquerschnitt  $A_1 = t \times b$ , Steigung  $s$ , Lagenanzahl  $n$ ). Vereinfachend kann die Umschnürungswirkung einer Wendel abgebildet werden, mittels eines Mantels der Dicke  $t_e$  nach (2.11).

Die gewählten Parametersätze der Zugsteifigkeit sind in Tabelle 3.5 angegeben. Die Steifigkeitsunterschiede der Umschnürung können an Hand des Umschnürungsmoduls  $C$  (2.19) bewertet werden, da  $t_e \cdot E_t$  bei gleichbleibendem Radius proportional zu  $C$  ist. Alle Werte des Umschnürungsmoduls sind in Bild 3.10b veranschaulicht.

Für Umschnürung aus Stahl (s. . .) und CFVK (c. . .) sind die Stufen der Zugsteifigkeit aufeinander abgestimmt, so dass z. B. s2 annähernd gleich steif ist wie c2.

Der lichte Abstand zwischen den Windungen der Stahlbänder (s1: 19.3 mm, s2: 3.3 mm, s3: 3.0 mm) ist wesentlich kleiner als der Größtkorndurchmesser des Betons, mit Ausnahme von s1. Die Bänder aus CFVK werden mit Überlappung mehrlagig aufgezogen. Die Annahme eines umschnürenden Mantels ist also berechtigt. Für die Steifigkeit s1 kann Gewölbewirkung über die Lücken der Bänder unterstellt werden.

Die baupraktische Einordnung der experimentellen Umschnürungsmoduln zeigt der Vergleich mit konventioneller Betonstahlbewehrung in Bild 3.10: Die gewählten Umschnürungsmoduln der Versuche sind in der Größenordnung herkömmlicher Querkraftbewehrung von Stahlbetonstützen und teilweise größer. Die Kurven der Umschnürungsmoduln

Typ	Serie	$t \times b$ [mm×mm]	$s$ [mm]	$n$	$t_e$ [mm]	$E_t$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$C$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$C$ relativ
s1	C	$0.5 \times 12.7$	32	1	0.198		496	19 %
s2 $\approx$ c2	B,C,D	$0.5 \times 12.7$	16	1	0.397	187500	992	38 %
s3 $\approx$ c3	A,B	$0.8 \times 19$	22	1	0.691		1727	67 %
c2	B		13	5	0.687		1034	40 %
c3	A B	$0.15 \times 11.9$	13.5	9	1.190	113000   116000	1793	69 %
c4	B		13.5	13	1.719		2590	100 %

Tabelle 3.5: Parametersätze zur Zugsteifigkeit

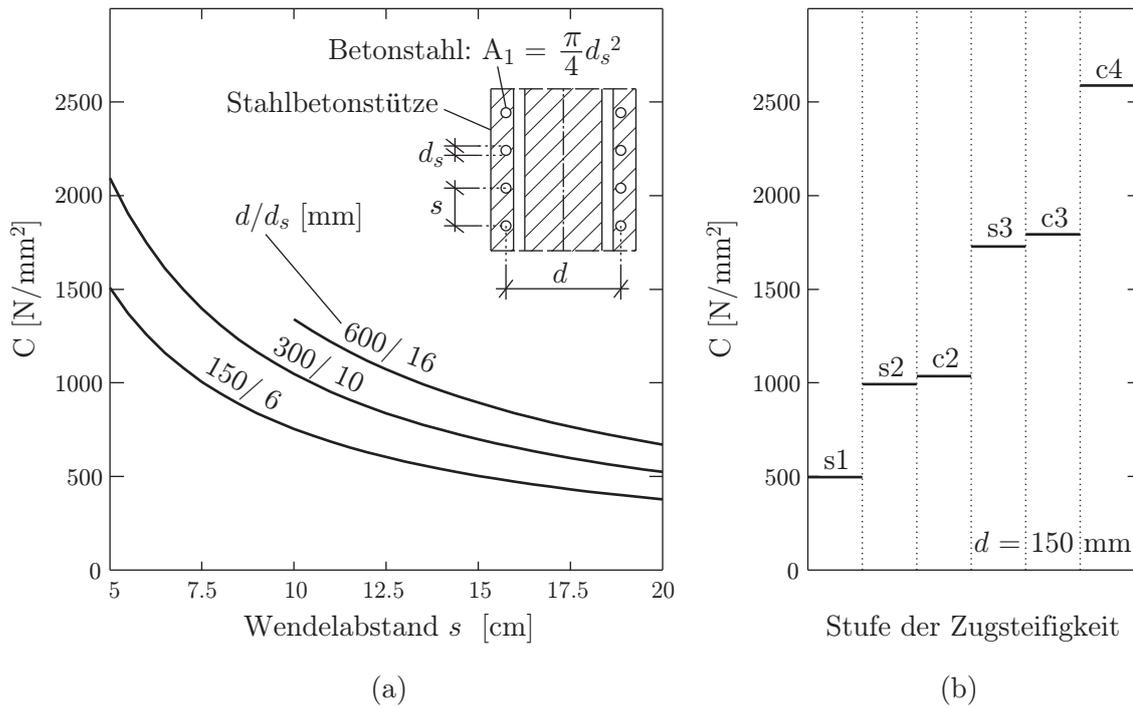


Bild 3.10: Umschnürungsmodul (a) baupraktisch und (b) in den Versuchen

in Bild 3.10a basieren auf realistischen Stützenquerschnitten, ihren Betonstahldurchmessern und Bewehrungsabständen von Wendeln oder Ringen.

Tabelle 3.6 enthält die Parametersätze zur Vorspannung. Infolge der Bremskraft  $Z_a$ , beim Aufziehen der Bänder entsteht eine Vorspannung  $\sigma_{tp}$  der Wendel:

$$\sigma_{tp} = \frac{Z_a}{A_1} \quad (3.1)$$

Es wird angenommen, dass die Wendel rechnerisch durch einen Mantel ersetzt werden kann. Wird also (3.1) und die Gleichung (2.11) für die Dicke  $t_e$  des stellvertretenden Mantels in die Gleichung für radiale Druckspannung (2.12) eingesetzt, so ergibt sich die nominale Quervorspannung auf den Betonzylinder zu

$$\sigma_{rpN} = -\frac{Z_a}{A_1} \frac{A_1 n}{r s},$$

vereinfacht zu

$$\sigma_{rpN} = -\frac{Z_a n}{r s} \quad (3.2)$$

Vorspannung Typ	Serie	Umschnürung Typ	$Z_a$ nominal [kN]	$s$ [mm]	$n$ [mm]	$\sigma_{rpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
p0	ohne Vorspannung					
px	A	s3	3.1	22	1	-1.9
		c3	0.21	13	9	
p1	B,C	s1	3.4	32	1	-1.4
		s2	1.7	16	1	
		s3	2.3	22	1	
p2	B,C,D	s2	3.2	16	1	-2.7
		s3	4.4	22	1	

Tabelle 3.6: Parametersätze zur Vorspannung

Gemäß Bild 2.23 und (2.13) sind die Randfaserdehnungen der Stahlbänder

$$\varepsilon_P \pm \varepsilon_B = \frac{Z_a}{A_1} \pm \frac{t}{2r + t}. \quad (3.3)$$

Für die Kombination der Steifigkeit s3 und Vorspannung p2 ergeben sich daraus 6.9 ‰ Dehnung in der äußeren Randfaser. Damit ist die in Tabelle 3.3 angegebene Grenzdehnung  $\varepsilon_{Rp,0.2}$  knapp überschritten. Das Stahlband beginnt schon im Vorspannzustand zu plastizieren. Die Zugkraft-Dehnungs-Kurve wird also bei weiterer Last nichtlinear sein. Alle anderen Kombinationen erreichen  $\varepsilon_{Rp,0.2}$  im Vorspannzustand nicht, sind aber teilweise nicht weit davon entfernt.

### 3.3.6 Ausführung Zylinderdruckversuche

Belastet wurde maschinenweggesteuert in einer 5000 kN Druckprüfmaschine, Amsler/ Walter&Bai, Typ DB-80; mit einer Geschwindigkeit von 1.32 mm/min in Serie A, 0.41 mm/min in Serie B und C sowie 0.17 mm/min in Serie D.

Gemessen und aufgezeichnet wurden: Zeit, Kraft, Maschinenweg, Dehnungen an ausgewählten Prüfkörpern sowie Verschiebung der Lastplatten mittels externen Wegaufnehmern.

Die Verschiebung der Lastplatten wurde mit drei induktiven Wegaufnehmern HBM-W20TK gemessen.

Die Messung der Umfangsdehnung an ausgewählten Zylindern erfolgte mittels Dehnmessstreifen (DMS), die bei halber Zylinderhöhe, in Bandrichtung, auf der Oberfläche der Bänder oder, bei Referenzzyklindern, direkt auf dem Beton appliziert wurden. Verwendet wurden entweder kurze gegenüberliegende DMS in Serie A (Bild 3.11a) oder ein 100 mm langer DMS für alle anderen Serien (Bild 3.11b).

Vor Beginn der Messung wurden die Zylinder mit 50 kN vorbelastet und wieder entlastet, was höchstens 12 ‰ von  $F_{c0}$  entspricht, und im linear elastischen Bereich des Betonverhaltens liegt. Durch die Vorbelastung wurden hervorstehende Grate und Körner auf den Lasteinleitungsflächen egalisiert.

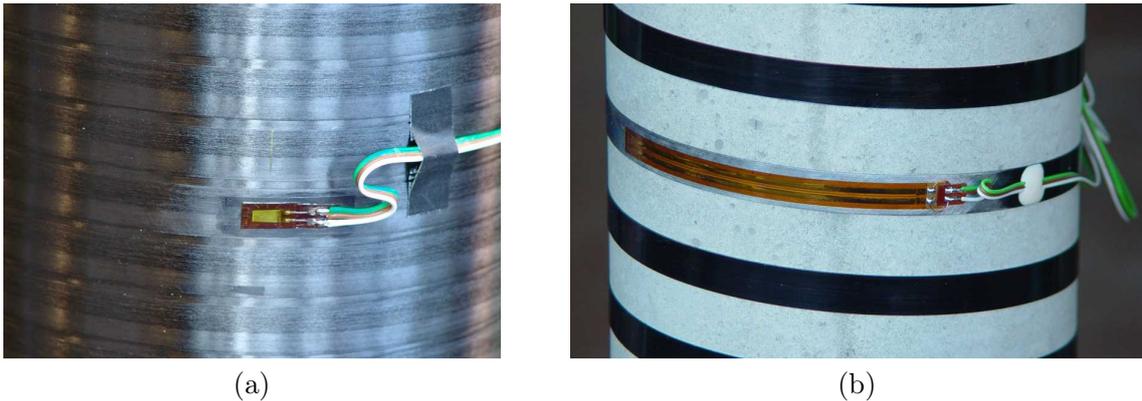


Bild 3.11: Dehnmessstreifen auf den Bändern: (a) Serie A mit CFVK und (b) Serien B und C, am Beispiel von Stahlband s1

Die gewählte Geometrie der Zylinder gewährleistet, dass im mittleren Zylinderdrittel kein Einfluss der Querdehnungsbehinderung durch Lasteinleitung und Verankerungsschellen besteht. Die vorhandene Schlankheit schließt jedoch Stabilitätsversagen aus, was auch durch die unverdrehbaren Lastplatten unterstützt wird.

## 3.4 Druckversuche: Ergebnisse

### 3.4.1 Hinweise zur Auswertung

Für einige der nachfolgend gezeigten Ergebnisse wurden die gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurven hinsichtlich zweier Aspekte nachbearbeitet: Anlaufeffekt im Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons und Gewindespiel der Druckprüfmaschine. Die Bearbeitung erfolgte in zwei Fällen: wenn die axiale Verschiebung nicht mit Wegaufnehmern gemessen wurde oder, wenn ein starker Anlaufeffekt die Vergleichbarkeit mehrerer Versuche erschwerte.

In Abschnitt 2.2.3 wurde bereits eine Erklärung gegeben, warum der nicht vorbelastete Beton zu Beginn der Belastung eine konkave Spannungs-Dehnungs-Kurve haben kann, also erst allmählich steifer wird. In [233] werden für diesen sogenannte Anlaufeffekt (*inital run*) auch andere Ursachen angegeben, wie Relativverschiebungen in der Grenzschicht zwischen Prüfkörper und Belastungsfläche. Eine Übersicht zum Anlaufeffekt gibt [77]. Der Anlaufeffekt ist nicht von Bedeutung für die Traglast und Schädigung des Betons. Deshalb wird die Messung in der Regel erst nach Abklingen des Anlaufeffektes gewertet.

Der zweite Aspekt für die Nachbearbeitung hat folgenden Grund: Bei der genutzten Druckprüfmaschine befindet sich der Hydraulizylinder unterflur, die untere Lastplatte wird angehoben. Infolge der Toleranzen im Gewinde der Säulen zur oberen Lastplatte muss der Prüfkörper mitsamt oberer Lastplatte erst an die oberen Flanken des Gewindes gehoben werden, bevor Kraftschluss besteht. Dieser Vorgang wird auch als „Totspiel“ oder besser Gewindespiel bezeichnet und führt zu einem Fehler in der Kraft-Verschiebungs-Kurve. Der Fehler tritt bei einer Last auf, die dem Gewicht von Prüfkörper und oberer Lastplatte entspricht; also etwa 25 kN in den durchgeführten Versuchen.

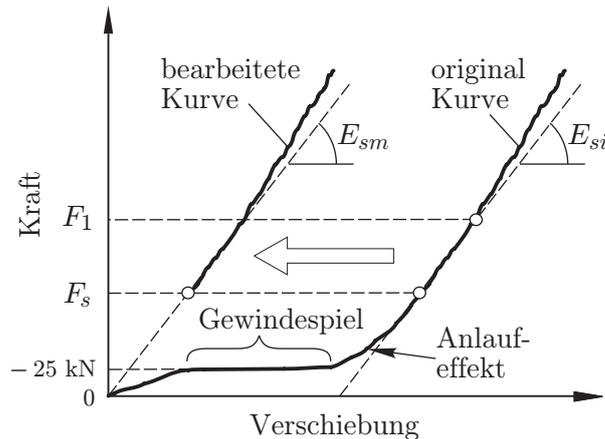


Bild 3.12: Anlaufeffekt und Gewindespil in Kraft-Verschiebungs-Kurven

Da der Anlaufeffekt für einzelne Prüfkörper verschieden ist, erschwert er die Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Anlaufeffekt und Gewindespil werden deshalb gemäß Bild 3.12 eliminiert: Festlegen der Startkraft  $F_s$  und der Kraft  $F_1$ , oberhalb des Anlaufeffektes; Ermitteln des entsprechenden Sekantenmoduls des Einzelversuchs  $E_{si}$ ; Bestimmen des mittleren Sekantenmoduls aller Versuche  $E_{sm}$  einer Serie; Verschieben der originalen Kurve, so dass die Sekante mit  $E_{sm}$  durch den Koordinatenursprung geht und die Kurve bei  $F_s$  trifft. Für  $F_s$  bzw.  $F_1$  wurden 200 kN bzw. 300 kN gewählt.

Alle Last-Verschiebungs-Daten einer Serie beginnen also am selben Punkt, sowie  $E_{sm}$  genutzt wird, bei höchstens 34 % von  $F_{c0}$  (Serie B). Bis zu dieser Last verändert sich das Betongefüge nur unwesentlich; die Querdehnungsänderung ist sehr klein und die Umschnürung deshalb von geringem Einfluss. Diese Annahmen werden von den durchgeführten Versuchen bestätigt. Die Verwendung von  $E_{si}$  oder  $E_{sm}$  ist in den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen gekennzeichnet.

Der Wert von  $E_{sm}$  ist z. B. 18860 N/mm<sup>2</sup> für Serie B, also deutlich niedriger als der Elastizitätsmodul nach Standardversuch (Tabelle 3.2). Dies deutet auf zeitabhängige Verformungen im Versuch hin. Diese Tatsache wird in der weiteren Auswertung und Anwendung der Modelle nach Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.2 nicht berücksichtigt. Die Aussagekraft der Ergebnisse wird dadurch nicht beeinträchtigt, solange die experimentelle Anfangstangente als Elastizitätsmodul in den Berechnungen verwendet wird, und zwar sowohl bei umschnürten Zylindern als auch bei Referenzzylindern.

Nachfolgend verwendete axiale Dehnungen sind mittlere Dehnungen über die Zylinderhöhe; sie werden aus Zylinderhöhe und Verschiebung der Lastplatten bzw. Maschinenweg berechnet.

Die angegebenen Umfangsdehnungen, bei zwei kurzen DMS je Prüfkörper (Bild 3.11a), sind Mittelwerte der gegenüberliegenden Messstellen. Die Auswertung zeigte keine signifikanten Unterschiede beider Messstellen.

Die erhöhte Duktilität umschnürter Zylinder wurde mit dem Verhältnis der axialen Bruchdehnungen  $\varepsilon_{au}/\varepsilon_{au0}$  bewertet, die mit und ohne Umschnürung erzielt wurden. Dies folgt dem Ansatz, Duktilität sei die Fähigkeit eines Materials (oder Systems) ohne Versagen bleibend verformt zu werden [15]. In Bild 3.13 sind die Kenngrößen im axialen Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt. Als  $\varepsilon_{au0}$  wird die Stauchung bei  $0.85 \cdot f_{c0}$ , auf dem absteigenden Ast der Kurve der Referenzzylinder angenommen.

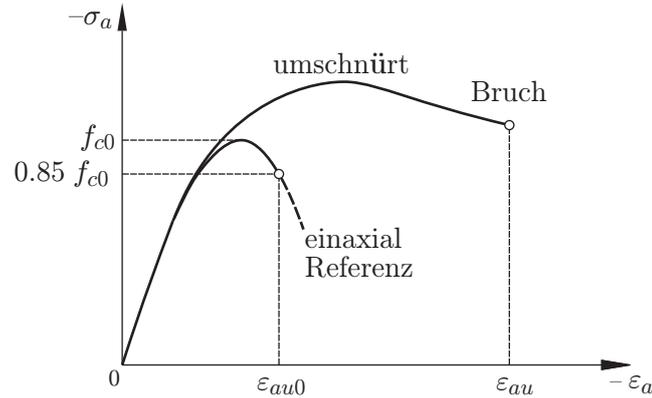


Bild 3.13: Kenngrößen für die Duktilitätssteigerung

Für die Darstellung der Ergebnisse wird die radiale Dehnung des Betons  $\epsilon_r$  aus der tangentialen Dehnung  $\epsilon_t$  gefolgert, denn  $\epsilon_r$  wird nicht direkt gemessen, sondern nur  $\epsilon_t$ , auf der Oberfläche der Umschnürung. Für die verwendeten Stahlbänder, mit  $t = 0.5 \text{ mm}$  bzw.  $t = 0.8 \text{ mm}$  und  $r = 75 \text{ mm}$ , ergibt sich nach (2.17) das Verhältnis  $\epsilon_{ti}/\epsilon_{ta}$  zu 1.0106 bzw. 1.0066. Der Unterschied zwischen den Randfasern ist sehr gering. Für die stahluumschnürten Zylinder ist die Annahme  $\epsilon_r = \epsilon_t$  also gerechtfertigt. Dies gilt jedoch nicht für kohlefaserumschnürte Zylinder. Einschränkungen dazu werden mit den Ergebnissen beschrieben (Abschnitt 3.4.3, S. 77).

### 3.4.2 Serie A

In Serie A wurden Referenzzylinder ohne Umschnürung sowie umschnürte Zylinder mit und ohne Vorspannung bis zum Bruch belastet. Diese Serie bestimmt die Höchst- und Bruchlasten für die gewählten Umschnürungen sowie die zugehörigen Dehnungen. Tabelle 3.7 zeigt die wesentlichen Parameter und Ergebnisse: mit Querdruck  $\sigma_{rp}$  infolge Vorspannung, Höchstlast  $F_{peak}$ , axialer Stauchung  $\epsilon_{peak}$  bei Höchstlast und axialer Bruchdehnung  $\epsilon_{au}$ .

Typische normierte axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven zeigt Bild 3.14. Erst oberhalb 75 % von  $F_{c0}$  Last unterscheiden sich die Spannungs-Dehnungs-Kurven, in Abhängigkeit der Parameter der Umschnürung. Mit Vorspannung neigt sich die axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve erst bei höherer Last. Besonders das Verhalten nach Überschreiten von  $F_{c0}$  weicht vom ungespannten Fall ab; Der vorgespannte Zylinder staucht sich weniger. Mit steigender Last nähert sich die vorgespannte Kurve jedoch wieder dem ungespannten Verlauf an. Zylinder mit Stahluumschnürung zeigen das typische Verhalten, mit Höchstlast und abfallendem Ast, bei Plastizieren des Stahls, wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben.

Bereits ohne Vorspannung erhöht sich die Tragfähigkeit mit Stahluumschnürung im Mittel auf 180 % von  $F_{c0}$  und mit Kohlefaserbändern sogar auf 360 % von  $F_{c0}$ .

Mit Vorspannung ist die Traglast stahluumschnürter Zylinder im Mittel um 4.3 % höher als ohne Vorspannung. Bei vorgespanntem Kohlefaserband ist jedoch eine Reduktion der Traglast um 4.8 % im Vergleich zum ungespannten Fall zu verzeichnen.

Die Duktilität beträgt in allen Fällen weit mehr als das zehnfache der Referenzzylinder. Mit  $\epsilon_{au0} = -2.4 \text{ ‰}$ , beim Referenzzylinder r000A-1b, ist  $\epsilon_{au}/\epsilon_{au0}$  z. B. 11.2 für den

Material	Umschnürung		Kennung	$-\sigma_{rpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$-F_{peak}$ [kN]	$-\varepsilon_{peak}$ [‰]	$-\varepsilon_{au}$ [‰]
	Zug- steifigkeit	Vor- spannung					
ohne	–	–	r000A-1b	–	621.6 <sup>a</sup>	2.05	–
			r000A-2b	–	615.5 <sup>a</sup>	2.02	–
Stahl	s3	p0	s3p0A-1b	<0.05	1135	16.9	26.9
			s3p0A-2b		1142	16.2	27.8
		px	s3pxA-1b	1.9	1190	15.4	24.4
			s3pxA-2b	1.8	1172	13.1	27.6
			s3pxA-5b	2.0	1204	13.0	32.4
CFVK	c3	p0	c3p0A-1b	0.1	2192 <sup>b</sup>	–	36.4
		px	c3pxA-2b	2.1	2086 <sup>b</sup>	–	33.0

<sup>a</sup> Mittelwert  $F_{c0} = -619$  kN

<sup>b</sup> Höchstlast entspricht Bruchlast

Tabelle 3.7: Parameter und Ergebnisse Zylinderdruckversuche Serie A

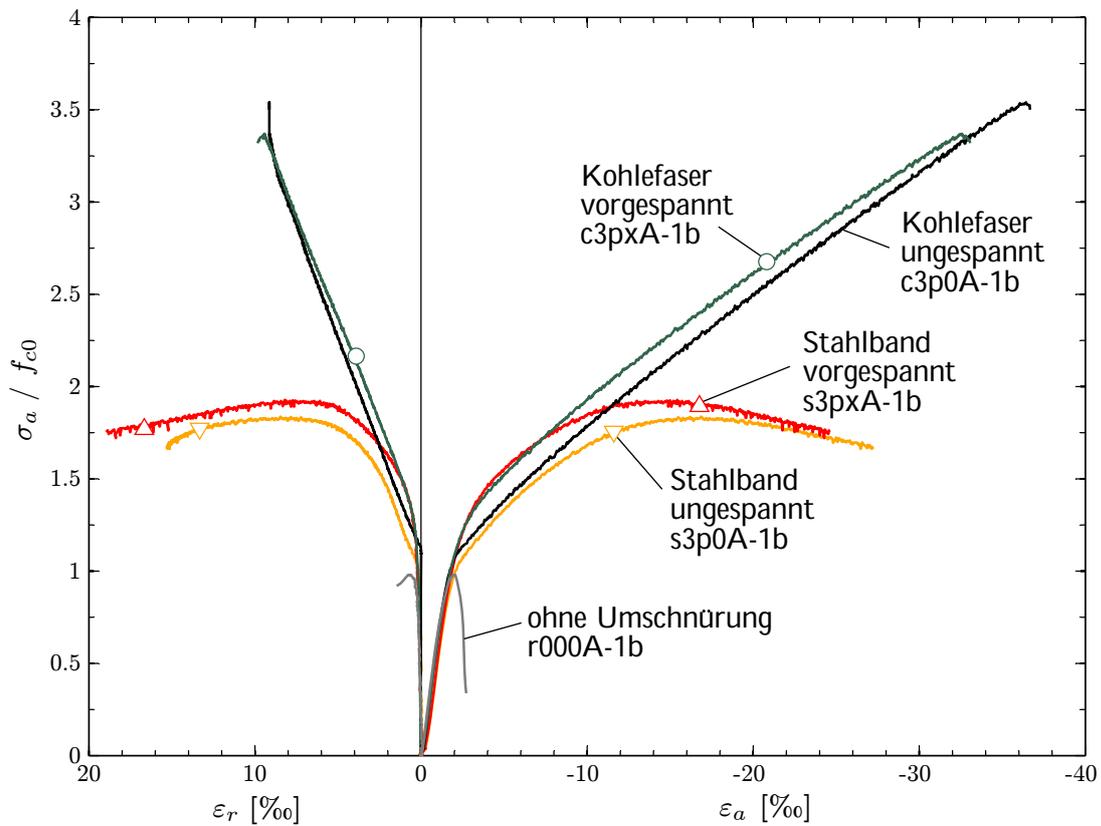


Bild 3.14: Typische radiale und axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven Serie A

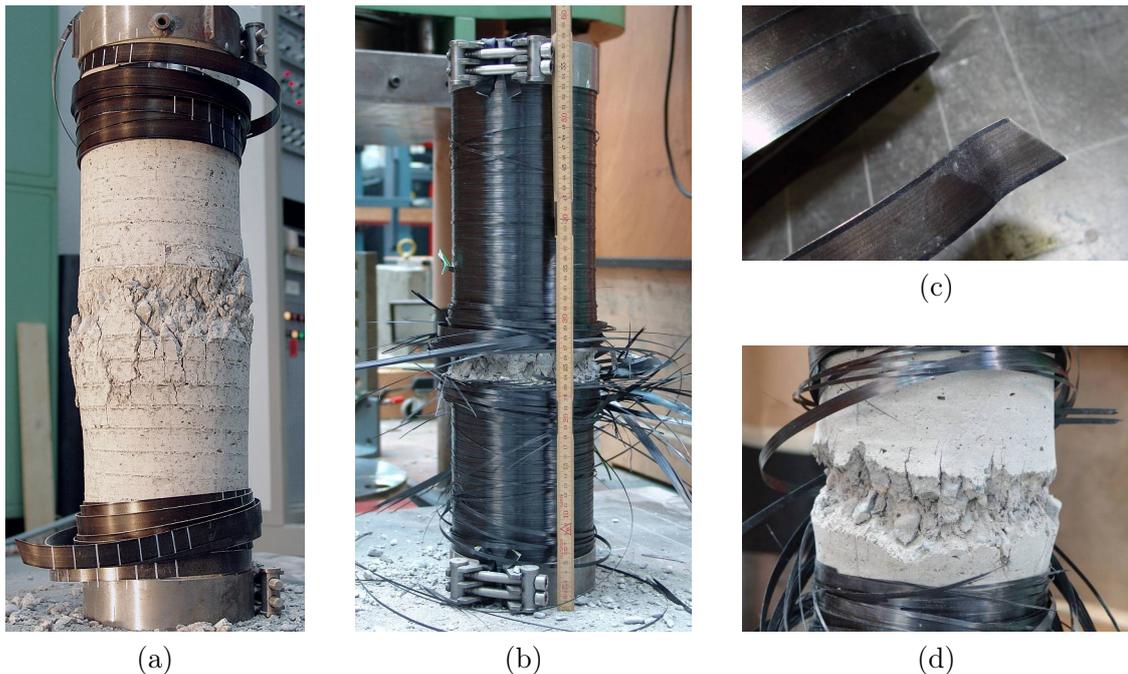


Bild 3.15: Zylinder der Serie A nach dem Bruch: (a) stahlbandumschnürt, (b) mit CFVK-umschnürt, (c) Bruchstelle im Stahlband  $0.8 \times 19$  mm und (d) Bruchstelle CFVK-Umschnürung

stahlumschnürten Zylinder s3p0A-1b und 15.2 für den kohlefaserumschnürten Zylinder c3p0A-1b.

Die Duktilität ist ähnlich bei Prüfkörpern mit und ohne Vorspannung. Bei Stahlumschnürung ergibt sich für die Duktilität kein eindeutiger Trend. Die Anzahl der Zylinder mit Kohlefaserband ist zu gering für Schlussfolgerungen diesbezüglich.

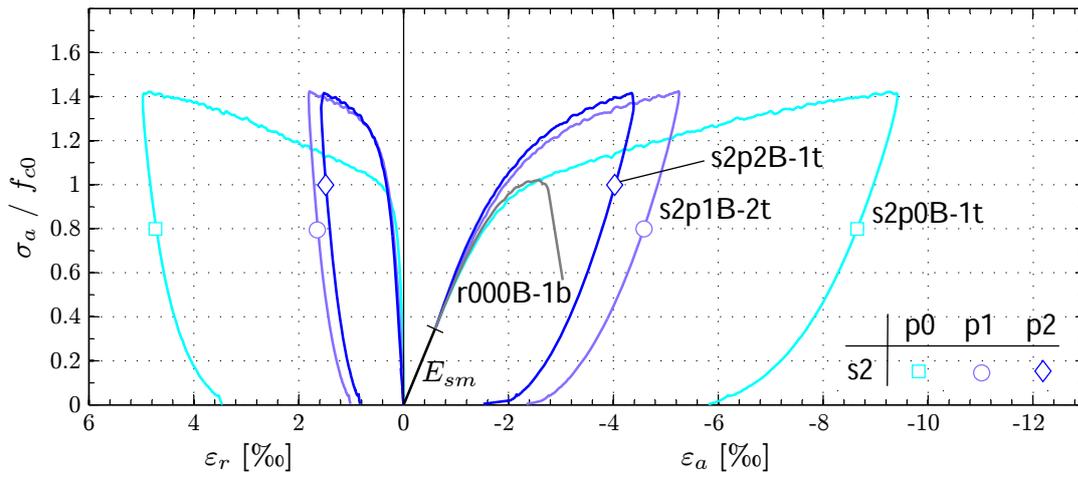
Alle umschnürten Zylinder versagten schlagartig, nachdem die Umschnürung riss und der Beton im mittleren Bereich des Zylinders explosiv auseinander barst. Bild 3.15 zeigt umschnürte Zylinder nach dem Bruch und Details der Bruchstellen.

Die Umfangsdehnungen beim Bruch waren zwischen 1.5 % und 3.0 % bei Stahlumschnürung und im Mittel 0.9 % bei Kohlefaserumschnürung. Offensichtlich sind diese Werte deutlich geringer als Ergebnisse axialer Zugversuche des selben Materials.

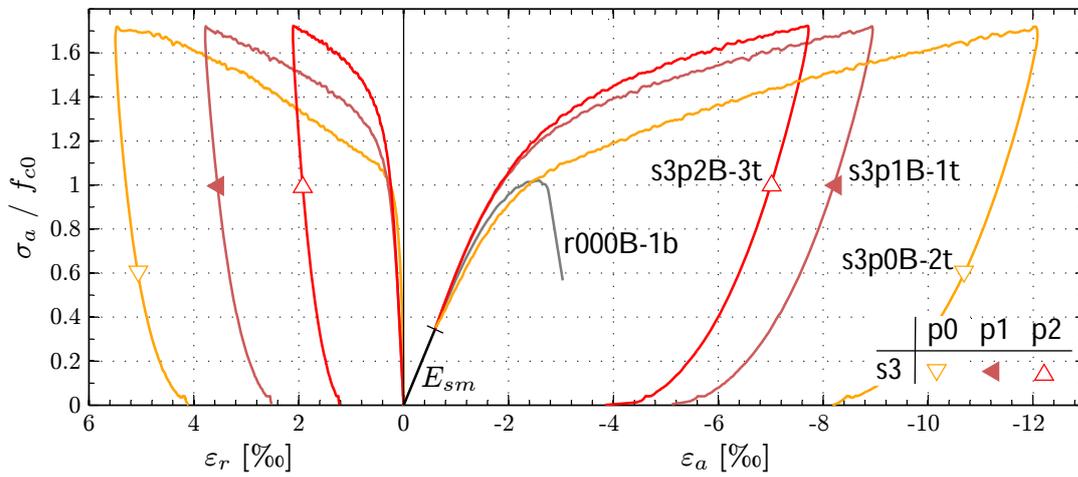
### 3.4.3 Serie B

In Serie B wurden umschnürte Zylinder bis  $F_i = F_{c0} + F_{ad,i}$  belastet und wieder vollständig entlastet (Bild 3.1-Serie B). Die Überlast  $F_{ad}$  ist nur im durch Umschnürung verstärkten System möglich. Die Lasten  $F_i$  waren zwischen 116 % und 172 % von  $F_{c0}$ , aber immer unter der Höchstlast bei stahlumschnürten Zylindern, um die Stahlbänder möglichst elastisch zu nutzen. Parameter und Ergebnisse enthält Tabelle 3.8. Typische Spannungs-Dehnungs Kurven zeigt Bild 3.16.

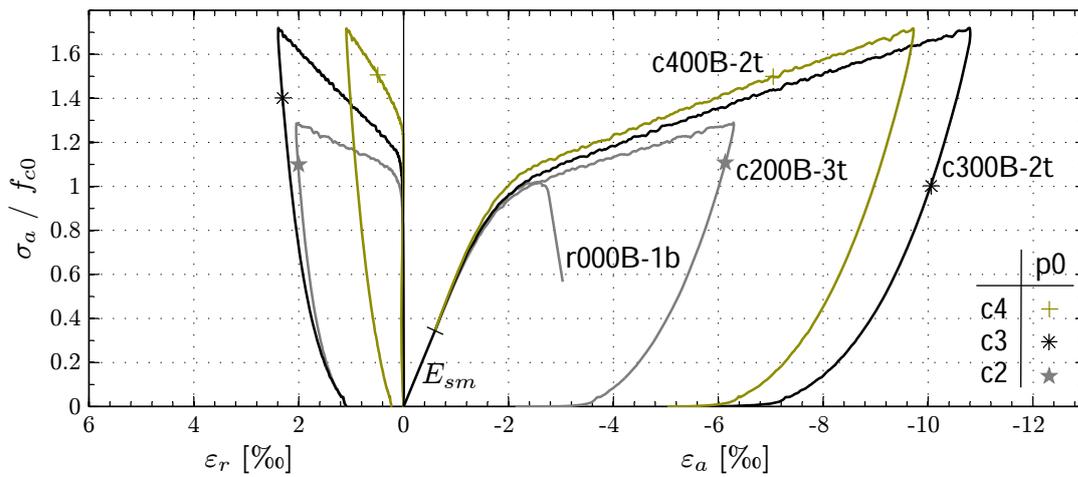
Alle ungespannt umschnürten Zylinder wurden bei gleicher Last deutlich mehr axial gestaucht und radial gedehnt als vorgespannte Prüfkörper mit sonst gleichen Parametern



(a) Stahlschnürung s2



(b) Stahlschnürung s3



(c) CFVK-Umschnürung

Bild 3.16: Ausgewählte radiale und axiale Spannungs-Dehnungs Kurven der Serie B

### 3 Versuche

Material	Umschnürung		Kennung	$-\sigma_{rpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$F_{ad}/F_{c0}$ [-]	$-\varepsilon_{a,ad}$ [%]	$f_R/f_{c0}$ [-]
	Zug- steifigkeit	Vor- spannung					
ohne	-	-	r000B-1b	-	$\langle -592.7 \rangle^a$	-	-
			r000B-2b	-	$\langle -571.0 \rangle^a$	-	-
			r000B-3b	-	$\langle -579.1 \rangle^a$	-	-
Stahl	s2	p0	s2p0B-1t/r	<0.05	0.42	9.7	0.56
			s2p0B-2t/r		0.29	5.8	0.75
			s2p0B-3t/r		0.16	3.6	0.87
		p1	s2p1B-1t/r	1.4	0.42	5.6	0.88
			s2p1B-2t/r		0.29	3.5	0.99
			s2p1B-3t/r		0.16	2.5	1.08
	s2p1B-4t/r		0.17		2.7	1.03	
	p2	s2p2B-1t/r	2.6	0.16	3.3	1.01	
		s2p2B-2t/r		0.42	4.8	0.95	
		s2p2B-3t/r		0.28	3.2	1.06	
	s3	p0	s3p0B-2t/r	<0.05	0.72	12.9	0.60
			s3p0B-1t/r		0.42	8.8	0.66
			s3p0B-3t/r		0.16	2.9	1.00
		p1	s3p1B-1t/r	1.4	0.72	8.9	0.77
			s3p1B-2t/r	1.3	0.42	4.3	1.01
			s3p1B-3t/r	1.4	0.16	2.6	1.01
		p2	s3p2B-1t/r	2.5	0.41	4.6	1.03
			s3p2B-2t/r	2.7	0.32	3.1	1.02
s3p2B-3t/r			2.7	0.72	7.7	0.87	
CFVK	c2 ( $\cong$ s2)	p0	c200B-1t/r	<0.1	0.42	9.3	0.59
			c200B-2t/r		0.16	4.2	0.85
			c200B-3t/r		0.29	6.4	0.73
	c3 ( $\cong$ s3)	p0	c300B-1t/r	<0.1	0.43	7.6	0.77
			c300B-2t/r		0.73	10.9	0.65
			c300B-3t/r		0.17	3.3	0.97
	c4	p0	c400B-1t/r	<0.1	0.43	6.2	0.83
			c400B-2t/r	0.2	0.73	9.7	0.69
			c400B-3t/r	0.1	0.17	3.5	0.91

<sup>a</sup>  $F_{c0}$  in kN, Mittelwert -581 kN

<sup>b</sup> Mittelung von  $F_{ad}$  und  $f_R$  wegen Ausreißer:  
s3p0B-2 + s3p0B-1 und s3p0B-1 + s3p0B-3

Tabelle 3.8: Parameter und Ergebnisse Zylinderdruckversuche Serie B

(Bild 3.16a, 3.16b). Schon die Stufe p1 der Vorspannung, mit  $\sigma_{rp}/f_{c0} = 0.043$  hat signifikanten Einfluss. Bei Verdopplung der Vorspannung zur Stufe p2 wird der Einfluss zwar stärker, jedoch nicht im selben Maß wie die Vorspannung.

In Bild 3.16c und Bild 3.17 wird deutlich: erhöhte Zugsteifigkeit der Umschnürung hat nur mäßigen Effekt auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons. Im besonderen der

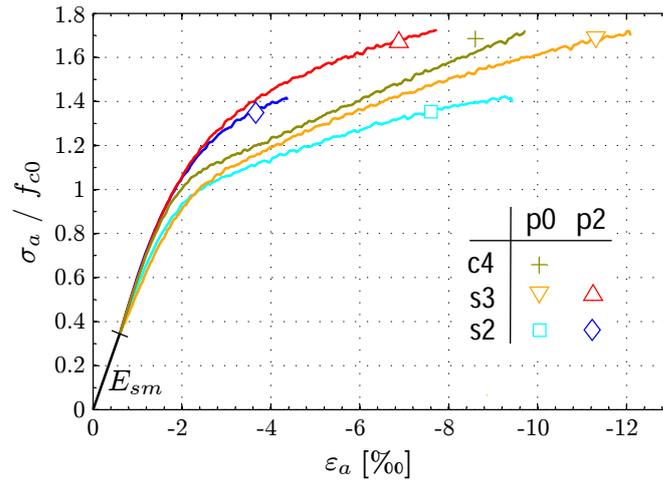


Bild 3.17: Spannung-Dehnung axial, bis zur Überlast, für Serie B; Vergleich des Einflusses von Zugsteifigkeit und Vorspannung der Umschnürung

Verlauf der Kurve bei Überschreiten von  $F_{c0}$  ist nahezu unbeeinflusst. Hier ist Steigerung der Zugsteifigkeit um den Faktor 2.5 (von s2 auf c4) deutlich weniger wirksam als die Vorspannung p2 (Bild 3.17). Erst bei weiterem Anstieg axialer Last wirkt sich die größere Zugsteifigkeit aus.

Umschnürte Zylinder mit Kohlefaser und ungespanntem Stahl gleicher Zugsteifigkeit haben ähnliche axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven im untersuchten Lastbereich. Die Ergebnisse von Parametersätzen gleicher Zugsteifigkeit (s2 mit c2 und s3 mit c3) sind also in axialer Richtung vergleichbar.

In tangentialer Richtung jedoch, steigt bei Kohlefaserbändern die gemessene Dehnung der äußersten Lage erst an, nachdem  $F_{c0}$  überschritten wurde (Bild 3.16c). Bei der gleichen axialen Last hingegen, sind stahluumschnürte Zylinder gleicher Zugsteifigkeit bereits deutlich tangential und also auch radial gedehnt (Bild 3.16a und Bild 3.16b). Vermutlich werden die äußeren Lagen erst mit zunehmender Last aktiviert, so dass die gemessene Dehnung auf der Bandoberfläche abweicht von der tatsächlichen Dehnung der Betonoberfläche, die  $\varepsilon_r$  entspricht. Dieser Effekt der verzögert gemessenen tangentialen Dehnungen bei Kohlefaserbändern nimmt zu mit der Anzahl der verwendeten Lagen (5 bei c2, 13 bei c4). Hiermit wird das Problem der Aktivierung von Umschnürungen aus CFVK bestätigt, wie in Abschnitt 2.5.1 auf S. 49 erläutert. Die gemessene tangentiale Dehnung der Bandoberfläche wird nicht weiter verwendet, da ihre Abweichung von  $\varepsilon_r$  nicht bestimmbar ist.

Nach Belastung bis zur Überlast und anschließender vollständiger Entlastung wurde die Umschnürung entfernt. Die Betonoberfläche der Zylinder war unversehrt; im Vergleich zum unbelasteten Zustand wurde keine Zunahme der Rissbildung festgestellt. Erst nachfolgende Wiederbelastung, bis zum Bruch offenbarte deutliche Unterschiede in den Festbetoneigenschaften, abhängig von den Parametern der Umschnürung: Je geringer die Zugsteifigkeit oder Vorspannung der Umschnürung war, umso weniger steif war der vorbelastete Beton und umso geringer war die Bruchlast  $F_R$ .

Die in Bild 3.18a beispielhaft für s2 gezeigten Spannungs-Dehnungs-Kurven der Wiederbelastung sind nahezu linear oder sogar mit zunehmendem Anstieg der Tangente. D. h. die Wiederbelastung verursacht keine neue Rissbildung und damit Schädigung bis zum Beginn

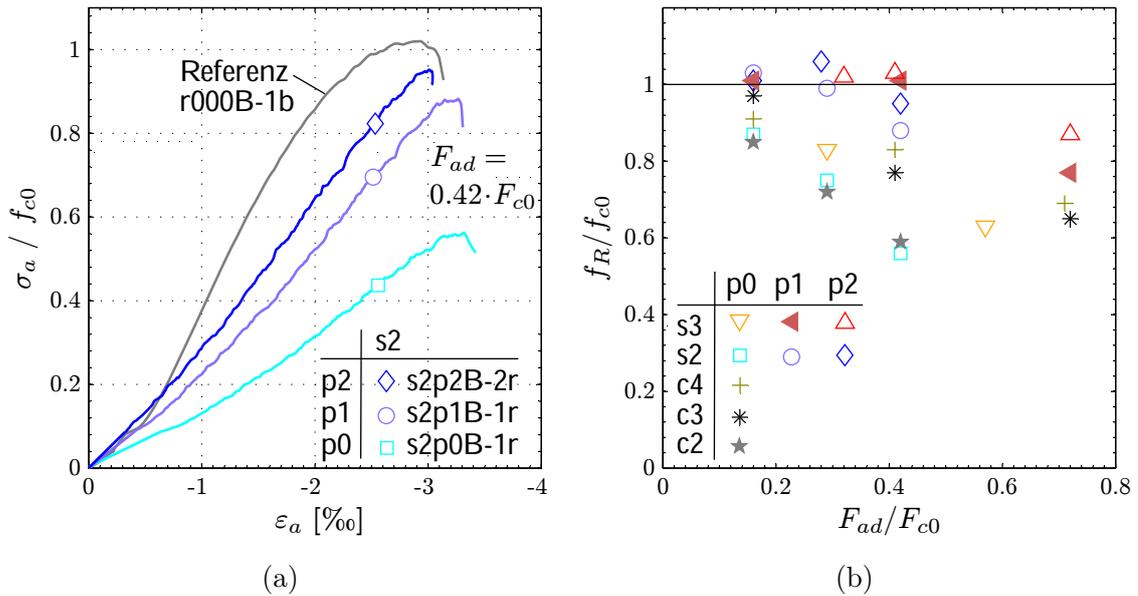


Bild 3.18: Ergebnisse der Wiederbelastung ohne Umschnürung: (a) Spannung-Dehnung axial für s2 und (b) Restfestigkeit in Abhängigkeit der Überlast, Serie B

des Bruchs. Die Bruchlast  $F_R$  entspricht somit der verbleibenden Traglast des vorbelasteten Betonzylinders; Aus  $F_R$  kann die Restfestigkeit  $f_R$  des umschnürten Betons bestimmt werden.

In Bild 3.18a wird deutlich: Bei nicht vorgespannter Umschnürung ist die Abnahme von Steifigkeit und Bruchlast im Vergleich zur Referenz wesentlich stärker (3.18a).

Bild 3.18b zeigt für alle Wiederbelastungen die normierte Restfestigkeit in Abhängigkeit von der Überlast  $F_{ad}$  auf dem umschnürten System. Werte enthält Tabelle 3.8. Es wird klar: bei ungespannter Umschnürung nimmt die Restfestigkeit deutlich und nahezu linear mit der Überlast ab; durch Vorspannung bleibt  $f_R$  bis zu wesentlich größeren  $F_{ad}$  erhalten. Vorspannung erweist sich wirksamer als drastische Erhöhung der Zugsteifigkeit der Umschnürung. Beispielsweise bei 42 % Überlast sinkt  $f_R$  ohne Vorspannung auf 56 % von  $f_{c0}$  ab (s2p0B-1). Durch Erhöhung der Zugsteifigkeit um den Faktor 1.75, erreicht  $f_R$  66 % (s3p0B-1). Mit Vorspannung hingegen bleibt  $f_R$  bei 95 % (s2p2B-2).

### 3.4.4 Serie C

In Serie C wurde untersucht, wie sich der Einfluss der Umschnürung unter zyklischer Überlast ändert. Bild 3.1-Serie C zeigt das zugehörige Lastschema. Die obere Last der Zyklen  $F_{wo}$  war 109 % von  $F_{c0}$  für Zugsteifigkeit s1 und 117 % für Zugsteifigkeit s2. Die untere Last  $F_{wu}$  war 63 % von  $F_{c0}$ . Tabelle 3.9 enthält Parameter und Ergebnisse.

Mit Stahlumschnürung s2 wurden Versuche mit 1, 5 und 100 Zyklen ausgeführt. Nach vollständigem Entlasten und Entfernen der Umschnürung war kein Schaden der Betonzylinder sichtbar. Axiale und radiale plastische Dehnungen des Betons nahmen in jedem Zyklus zu, besonders in den ersten fünf bis zehn Zyklen, mit abnehmender Tendenz bis zum letzten

Stahlumschnürung Zug- steifigkeit	Vor- spannung	$F_{ad}$	Kennung	$-\sigma_{rpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Zyklen $n$ [-]	$-\varepsilon_{a,n}$ [%]	$f_R/f_{c0}$ [-]
s1	p0	$0.09 F_{c0}^a$	s1p0C-50w	0.02	2 <sup>b</sup>	–	–
	p1		s1p1C-50w/r	1.4	50	4.6	0.95
s2	p0	$0.17 F_{c0}^a$	s2p0C-1w/r		1	3.4	0.83
			s2p0C-50w/r	<0.05	50	6.1	0.70
			s2p0C-100w/r		100	6.0	0.71
	p2	$0.17 F_{c0}^a$	s2p2C-1w/r	2.7	1	2.4	1.00
			s2p2C-50w/r	2.8	50	3.8	1.01
			s2p2C-100w/r	2.7	100	3.8	0.98

<sup>a</sup> Mittelwert  $F_{c0} = -640$  kN

<sup>b</sup> Bruch des Betons im dritten Zyklus

Tabelle 3.9: Parameter und Ergebnisse Zylinderdruckversuche Serie C

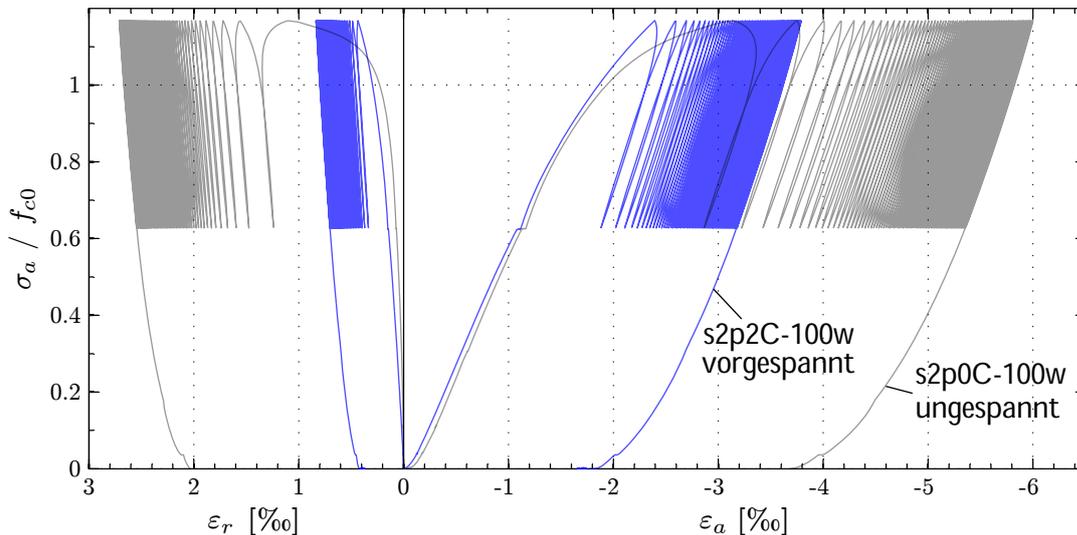


Bild 3.19: Radiale und axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven, 100 Zyklen, s2, Serie C

Zyklus. Jedoch, wie Bild 3.19 zeigt, waren die Dehnungen mit vorgespannter Umschnürung wesentlich geringer, als beim ungespannten Fall.

Die Restfestigkeit des Betons wurde wie in Serie B ermittelt. Die normierten Werte  $f_R$  zeigt Bild 3.20a. Im ersten Zyklus waren die Werte  $f_R$  ähnlich wie in Serie B. Der ungespannte Prüfkörper hat nach 50 Zyklen ein verringertes  $f_R$  im Vergleich zum ersten Zyklus, nämlich 70 % von  $f_{c0}$ . Bis zum 100. Zyklus erfolgt keine weitere Reduktion; die Entfestigung scheint sich zu stabilisieren.

Der vorgespannt umschnürte Zylinder hingegen, hat bis zum 100. Zyklus fast noch die volle Festigkeit (98 % von  $f_{c0}$ ). Eine deutliche Abnahme von  $f_R$  bei höheren Zyklenzahlen ist unwahrscheinlich, da die Inkremente der plastischen Dehnungen schon sehr klein sind und weiter abnehmen.

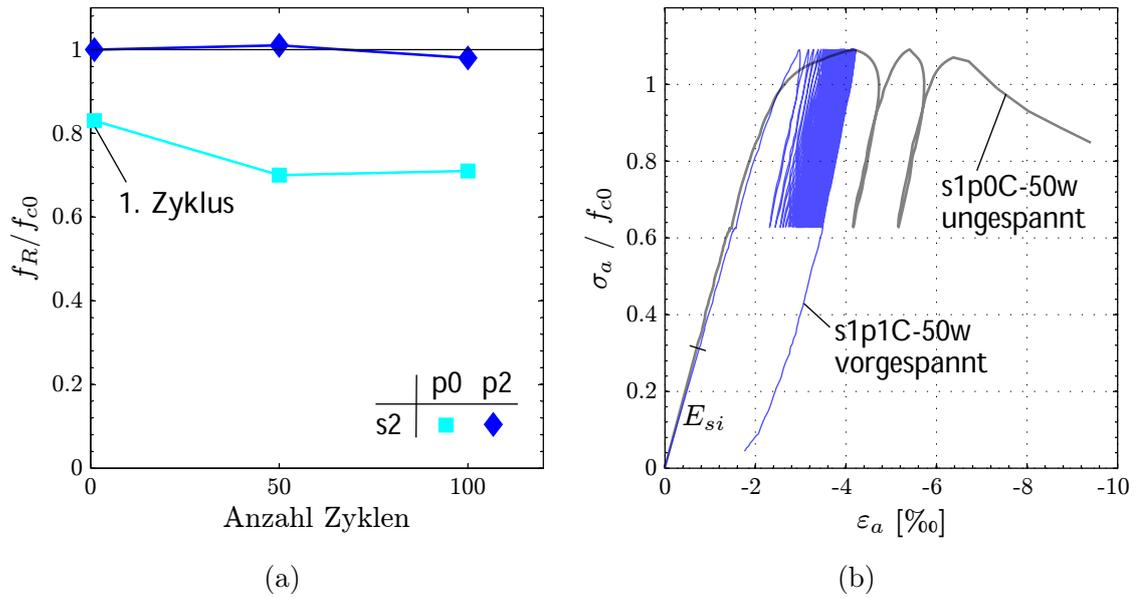


Bild 3.20: Ergebnisse Serie C: (a) Restfestigkeit in Abhängigkeit der Zyklenanzahl, für s2 und (b) Spannung-Dehnung axial, bei geringem Umschnürungsmodul, mit s1

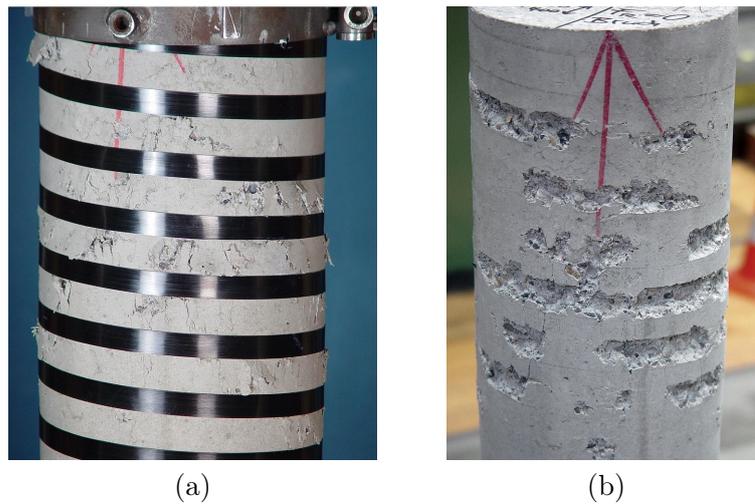


Bild 3.21: Zylinder s1p0C-50w: (a) nach dem Bruch im dritten Zyklus und (b) nach Entfernen von Umschnürung und Bruchstücken

Besonders bei sehr niedrigem Umschnürungsmodul wird die Wirksamkeit der Vorspannung klar. Dazu zeigt Bild 3.20b die axialen Spannungs-Dehnungs-Kurven mit Zugsteifigkeit s1. Der Beton des ungespannt umschnürten Zylinders versagte schon beim dritten Anfahren der Überlast (auslaufende Spannungs-Dehnungs-Kurve, infolge Abschalten der Druckmaschine), wohingegen vorgespannt 50 Zyklen ausgeführt wurden, mit 95 % Restfestigkeit.

Wie in Bild 3.21 zu sehen, platzte der Beton bei ungespannter Umschnürung zwischen den Bändern ab. Das Abplatzen wurde zwar durch die großen Bandzwischenräume bei der Umschnürung s1 begünstigt, hat aber seine Ursache in den großen axialen Stauchungen.

Stahlschnürung		Kennung	$-\sigma_{rpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$e$ [mm]	Last* [kN]	$a$ [mm]	$a_{Rest}$ [mm]
Zug- steifigkeit	Vor- spannung						
s2	p0	s2p0D-1	<0.05	13	-592	3.3	2.1
	p2	s2p2D-2	2.7		-601	0.7	0.2

\* Mittelwert  $F_{c0} = -664$  kN

Tabelle 3.10: Parameter und Ergebnisse Zylinderdruckversuche Serie D

Der vorgespannte Zylinder mit sonst gleicher Konfiguration, hatte keine sichtbaren Schäden an der Zylinderoberfläche. Offenbar wurde der effektiv umschnürte Kern des Zylinders ausreichend durch die vorgespannte Umschnürung gestützt, so dass die Stauchungen gering blieben.

### 3.4.5 Serie D

Zwei Prüfkörper in Serie D liefern einen experimentellen Ausblick zum Nutzen der Vorspannung bei ausmittiger Drucklast bzw. Normalkraft mit Biegung in Betondruckgliedern.

In Bild 3.22 ist die Versuchsanordnung skizziert. Die Last wurde über Rollenlager eingeleitet, mit einachsiger Ausmitte  $e = 13$  mm zur Zylinderachse. Damit war der Anteil der Biegespannung an der gesamten Randfaserspannung 41 %, zu Beginn der Belastung.

Gemessen wurde zusätzlich die horizontale Verschiebung von Kopf, Fuß und halber Höhe des Zylinders mittels von Wegaufnehmern (W1, W2, W3 in Bild 3.22). Damit wurde die absolute Ausbiegung  $a$  des Zylinders ermittelt, bereinigt um die Verschiebungen an Kopf und Fuß. Parameter und Ergebnisse enthält Tabelle 3.10.

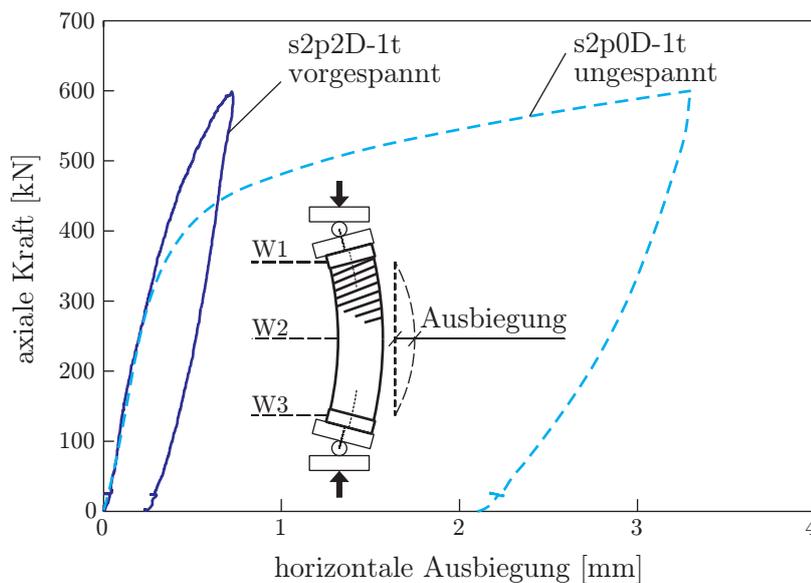


Bild 3.22: Serie D: Biegung mit Normalkraft

### 3 Versuche

Fe	Mn	Si	Cr	C	Ni	N	S	P	Al	O
~ 62	27.2	5.69	5.02	0.047	0.033	0.012	<0.009	<0.003	<0.003	0.002

Tabelle 3.11: Zusammensetzung Fe-Mn-Si-Cr nach Herstellerangaben; Massenanteile in %

Bild 3.22 zeigt die Kraft-Ausbiegungs-Kurven für die ungespannte und vorgespannte Variante. Bei Überlast war die Ausbiegung mit ungespannter Umschnürung um den Faktor 4.7 größer. Die bleibende Ausbiegung  $a_{Rest}$  nach Entlastung war 2.1 mm ohne Vorspannung und nur 0.2 mm mit Vorspannung.

Unter Einbezug der Ergebnisse von Serie B und Serie C belegen die Tastversuche in Serie D den Effekt vorgespannter Umschnürung bei gebogenen Druckgliedern: Plastische Verformungen werden vermieden; Vorspannung erhält die Restfestigkeit. Die geringere Auslenkung bei Vorspannung kann ein entscheidender Vorteil bei Stabilitätsproblemen sein.

## 3.5 FGL-Temperatur-Zugversuche

An einer ausgewählten Formgedächtnislegierung wurden der Vorgang der Vorspannung sowie anschließende Zugbelastung simuliert, so dass Rückschlüsse auf das Verhalten des Materials als vorgespannte Umschnürung möglich werden.

Der Draht aus Fe-Mn-Si-Cr (Eisen-Mangan-Silizium-Chrom) wurde angefertigt und zur Verfügung gestellt vom Unternehmen AWAJI SANGYO K.K, Tokyo, Japan.

Die Versuche erfolgten an der Empa und an der Bauhaus-Universität.

### 3.5.1 Materialeigenschaften und Probenvorbereitung

Die Zusammensetzung der verwendeten eisenbasierten Legierung Fe-Mn-Si-Cr ist in Tabelle 3.11 angegeben, die physikalischen Eigenschaften der Drähte in Tabelle 3.12.

Eigenschaft	Wert	Einheit
kritische Spannung (Martensit)	200... 300	N/mm <sup>2</sup>
Zugfestigkeit (Austenit)	680... 1000	N/mm <sup>2</sup>
Elastizitätsmodul (Austenit)	170000	N/mm <sup>2</sup>
Bruchdehnung	16... 30	%
Dichte	7.2... 7.5	g/cm <sup>3</sup>
thermischer Ausdehnungskoeffizient	$16 \cdot 10^{-6}$	1/K
spezifischer elektrischer Widerstand	$100 \cdot 10^{-6} \dots 130 \cdot 10^{-6}$	$\Omega$ cm
$M_s$	-20... +25	°C
$A_f$	180... 185	°C

Tabelle 3.12: Materialeigenschaften Fe-Mn-Si-Cr nach Herstellerangaben

Der Draht hat einen Durchmesser von 1.2 mm, wurde hergestellt im Induktionsschmelzverfahren in Luft, dann heiß gewalzt und kalt gezogen.

Im Lieferzustand hat das Material kein Formgedächtnis, was durch Differentialkalorimetrie nachgewiesen wurde. Deshalb musste zunächst eine Wärmebehandlung durchgeführt werden: Der Draht wurde auf 950 °C erhitzt, diese Temperatur für 30 min gehalten und in Luft abgekühlt.

Nach den vorliegenden Erkenntnissen befindet sich das Material nach dem Drahtziehen bei Raumtemperatur im hochgradig plastisch verformten Martensit mit erschöpftem Formgedächtnis. Wärmebehandlung erzeugt wieder einen kfz-Austenit, der nach Abkühlen auf Raumtemperatur in einen homogenisierten aber metastabilen Zustand übergeht. D. h., da  $M_s$  nur knapp unterschritten wird, vollzieht sich höchstens eine teilweise Umwandlung zu einem hdP-Martensit, zudem nur mit beliebiger Ausrichtung der Varianten (Erläuterung dazu siehe Abschnitt 2.4.6). Erst wenn die Umwandlung durch eine mechanische Spannung unterstützt wird, entsteht eine bevorzugte Martensitvariante mit Formgedächtnis.

Die unterstützende Zugspannung wurde in der Zugprüfmaschine dehnungsgesteuert erzeugt. Die zugehörige Vordehnung wurde nach Literaturangaben ausgewählt. In [22, 109, 135] wurden zwischen 1 % und 2 % Vordehnung gute Werte für Dehnungsrückbildung infolge FGE erzielt, jedoch abnehmend mit steigender Vordehnung. Für Rückumwandlungsspannung hingegen belegen Ergebnisse für eine ähnliche Legierung in [65] einen umgekehrten Trend; gute Werte wurden für Vordehnungen größer 1.5 ‰ festgestellt, Tendenz steigend oder gleichbleibend mit zunehmender Vordehnung. Noch größere Vordehnung von 4.0 % wurde in [53] erfolgreich genutzt. In [131] wurde inzwischen für eine ähnliche Legierung (Fe-17%Mn-5Si-10Cr-4Ni-1VC) nachgewiesen, dass die erzielbare Rückumwandlungsspannung oberhalb 4 % Vordehnung nachlässt.

### 3.5.2 Aufbau und Ablauf der Versuche

Die Versuche wurden an beiden Standorten in Zugprüfmaschinen mit Klimakammer ausgeführt, ihre Kennzeichnung ist AS1 und FM2. Die Versuche AS1 wurden an der Empa ausgeführt und die Versuche FM2 an der Bauhaus-Universität Weimar. Der Ablauf der Versuche war ähnlich, jedoch konnte bei AS1 auch gekühlt werden. Das Kühlen der Probe unter Raumtemperatur diente zur Simulation wechselnder Umgebungstemperaturen bei der Anwendung.

Der Versuch FM2 hat eine Zusatzinstallation zur elektrischen Widerstandsmessung bei elektrisch isolierter Probe. Die Ergebnisse davon sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Bild 3.23 zeigt die Drähte aus Fe-Mn-Si-Cr zwischen den Spannköpfen der Zugprüfmaschinen, bereit zur Belastung. Eine Zusammenfassung der Parameter der Versuche gibt Tabelle 3.13. Zur besseren Übersicht wird der Versuchsablauf in folgende Etappen unterteilt, die in Bild 3.25 kenntlich gemacht sind.

- I. Vordehnen und Entlasten
- II. Vorlast halten, Traverse fest
- III. Temperaturzyklus über Raumtemperatur (RT)
  - a) Erwärmen auf  $T_{hoch}$
  - b) Temperatur halten

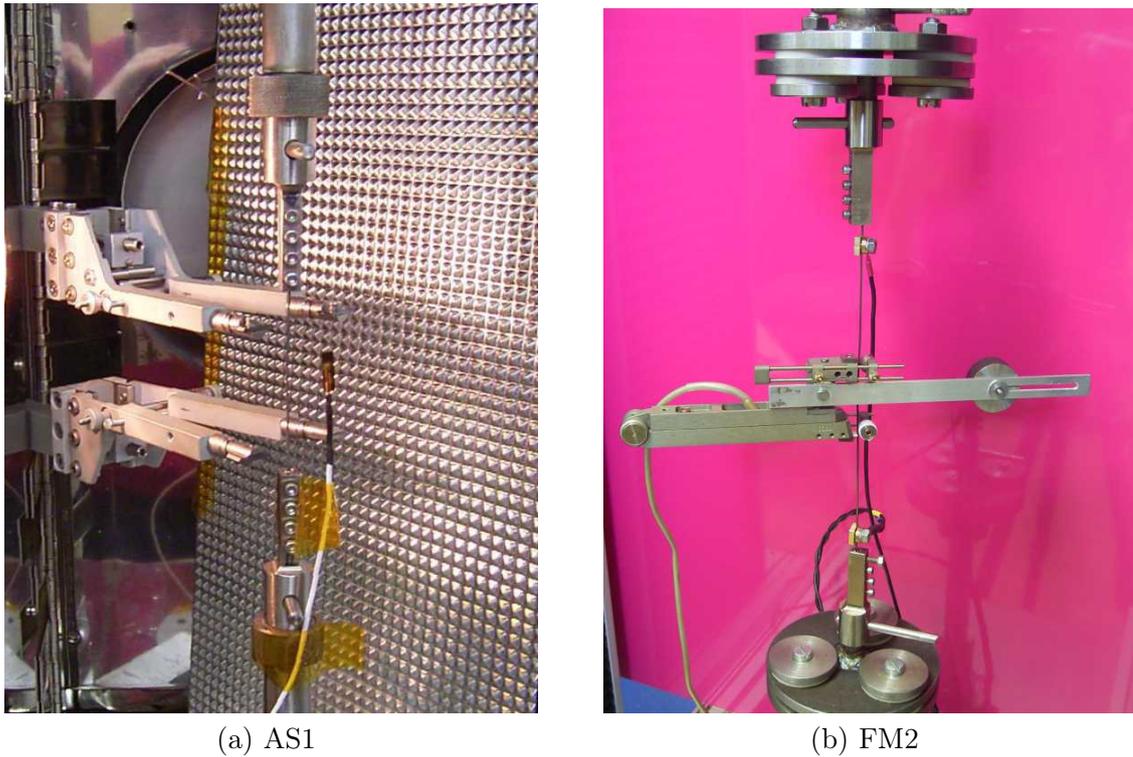


Bild 3.23: FGL-Drahnte eingespannt in Zugprüfmaschinen

Parameter/ Ergebnis	Einheit	AS1	FM2
Prüfmaschine		Zwick Z010	TIRAtest 28100
Durchmesser Draht	[mm]		1.13
Vordehnung	[%]	2.0	4.7
freie Probenlänge	[mm]	80	200
Vorlast	[N]	15	43
Raumtemperatur RT	[°C]	23	20
Heiz-, Kühlgeschwindigkeit*	[°C/min]		7.5
Höchste Temperatur $T_{hoch}$	[°C]	215	195
Haltezeit von $T_{hoch}$	[min]	15	7
Tiefste Temperatur $T_{tief}$	[°C]	-20	RT
Haltezeit von $T_{tief}$	[min]	~10	-
Spannkraft nach III.c/ IV (bei RT)	[N]	204/ 204	216/ 233
Spannkraft nach V.b/ V.c (bei $T_{tief}$ / RT)	[N]	189 /128	-
Spannkraft Ende	[N]	113	233
Vorspannung Ende	[N/mm <sup>2</sup> ]	100	206

\* Bei FM2 ungesteuertes Abkühlen

Tabelle 3.13: Parameter und Ergebnisse Versuche FGL

c) Abkühlen auf RT

IV. Halten bei RT

V. nur AS1: Temperaturzyklus unter RT

a) Abkühlen auf  $T_{tief}$

b) Temperatur halten

c) Erwärmen auf RT

d) Halten bei RT

VI. Be- und Entlasten im vorgespannten Zustand, bei RT

### 3.5.3 Vordehnen

Im Versuch AS1 wurden 2.0% als Vordehnung gewählt. Bild 3.24 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kurve. Der Elastizitätsmodul  $E_{AM}$  ist  $108000 \text{ N/mm}^2$  zu Beginn der Belastung, zwischen 0 und 150 N Last. Dieser Wert ist deutlich kleiner als der Elastizitätsmodul des Austenits  $E_A$  (Tabelle 3.12). Das ist Beleg für ein Phasengemisch. Bei etwa 250 N neigt sich die Kurve deutlich, zurückzuführen auf spannungsinduzierte Martensitbildung nach Überschreiten der kritischen Spannung. Derart vorgedehnte Proben zeigen eine Umwandlung in der Differentialkalorimetrie, wenn sie über  $A_f$  erhitzt werden. Die Voraussetzungen für Formgedächtnis bestehen also.

Die Vordehnung wurde für Versuch FM2 auf 4.7% festgesetzt.

### 3.5.4 Temperaturzyklus – Ergebnisse und Diskussion

Beim Erwärmen einer metallischen Probe muss mit Ausdehnung gerechnet werden, so auch bei FGL unterhalb von  $A_s$ . Deshalb wird vor dem Temperaturzyklus eine Vorlast bei Raumtemperatur (RT) aufgebracht und gehalten. Die Traverse der Prüfmaschine wird fest

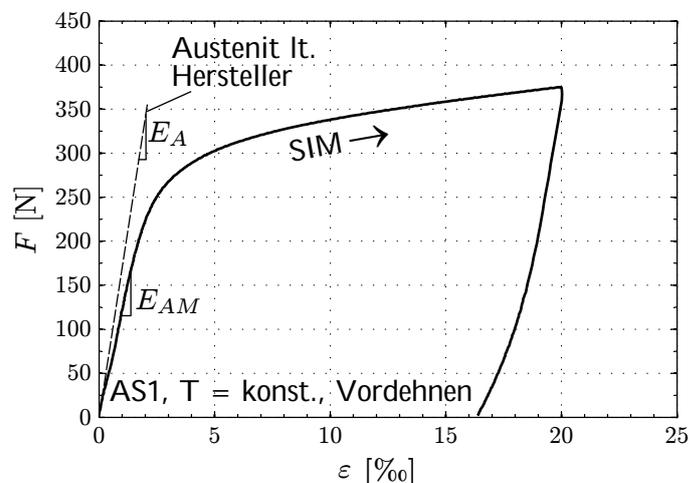


Bild 3.24: Vordehnen AS1

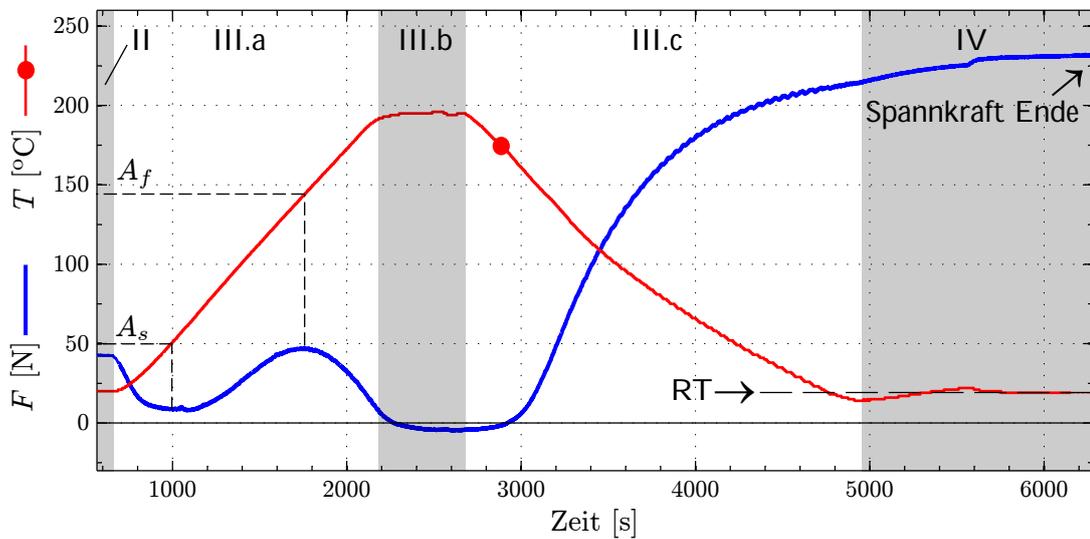
### 3 Versuche

gehalten. Diese Etappe II ist in Bild 3.25 gekennzeichnet. Nach Etappe II wird ausschließlich die Temperatur variiert.

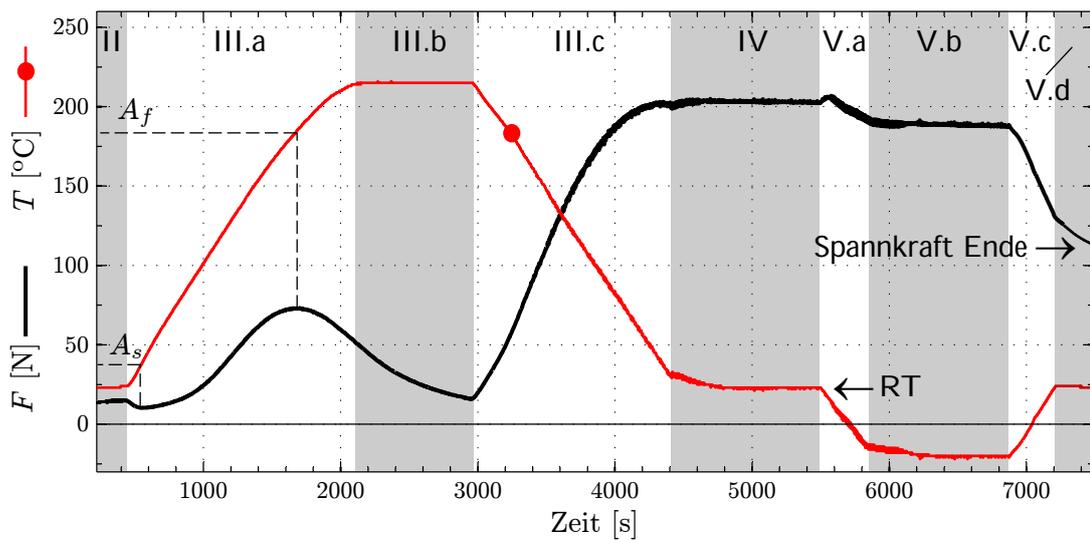
Messkurven von Kraft und Temperatur der Temperaturzyklen sind in Bild 3.25 über die Zeit aufgetragen. Ausgewählte Ergebnisse zur Spannkraft enthält Tabelle 3.13.

Nach Beginn des Heizens in Etappe III.a, fällt die Kraft erwartungsgemäß ab, bis  $A_s(\sigma)$  erreicht wird und wieder Kraft infolge Rückumwandlung aufgebaut wird. Noch vor  $T_{hoch}$  neigt sich die Kraft-Zeit-Kurve wieder, vermutlich durch Temperaturexpansion.

Mit der Höchstkraft in III.a wird  $A_f(\sigma)$  identifiziert. Die Umwandlungstemperaturen sind verschieden in den beiden Versuchen. Als Ursachen kommen die Unterschiede in Vordehnung und Vorlast in Frage.



(a) FM2



(b) AS1

Bild 3.25: Temperaturzyklen Fe-Mn-Si-Cr

Verschieden ist auch der Verlauf der Temperatur-Kraft-Kurve beim Halten von  $T_{hoch}$  in Etappe III.b: FM2 taucht in den Druckbereich ein (Bild 3.25a), die Probe entzieht sich durch seitliches Ausweichen; AS1 hingegen bleibt unter Zug, fällt aber auch bei konstanter Temperatur weiter ab (Bild 3.25b). Als Ursache liegt thermische Trägheit des Gestänges und der Spannköpfe nahe. Diese massiven Teile könnten für Kraftabnahme infolge zeitversetzter Erwärmung und Verlängerung verantwortlich sein. Für diese Annahme spricht der weitere Anstieg der Kraft in Etappe IV bei FM2, der allerdings bei AS1/IV nicht festgestellt wurde, wohl aber eine Abnahme der Kraft bei Raumtemperatur in AS1/V.d.

Relaxation der Legierung ist kein wahrscheinlicher Grund für die Abnahme der Kraft, denn in AS1/IV und AS1/V.b bleibt eine wesentlich höhere Kraft konstant bei gehaltener Temperatur. Wahrscheinlich ist vielmehr die angesprochene Trägheit des Versuchsaufbaus für AS1 nur beim Erwärmen und für FM2 beim Erwärmen und Kühlen.

Beim Abkühlen in Etappe III.c steigt die Kraft wieder an; bei AS1 sofort, bei FM2 zeitversetzt, da das Ausweichen der gedrückten Probe erst kompensiert werden muss. Der nahezu lineare Anstieg der Kraft mit der Temperatur in III.c, basiert offensichtlich auf reiner thermischer Verkürzung der Probe. Bei Temperaturen zwischen 100 °C und 150 °C beginnt sich die Temperatur-Kraft-Kurve wieder zu neigen, um in AS1 sogar noch vor Raumtemperatur ein Plateau zu erreichen. Offenbar wird  $\sigma_{krit}$  überschritten und Martensit durch SIM gebildet (Bild 2.15). Die Steifigkeit der Probe nimmt ab.

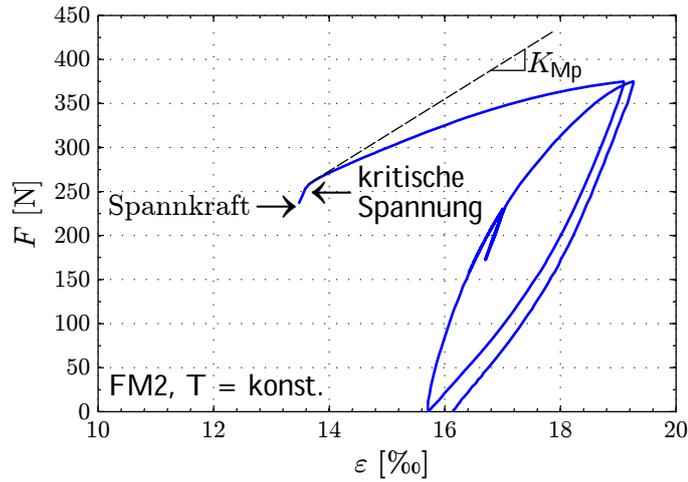
In Versuch AS1, Etappe V (Bild 3.25b), wurde die durch FGE vorgespannte Probe auf  $T_{tief} = -20$  °C unterkühlt. Das entspricht extremen winterlichen Verhältnissen im Bauwesen. Bei der Abkühlung wird die Spannkraft weiter reduziert, da  $\sigma_{krit}$  sinkt. Thermische Längenverkürzung muss erneut zu SIM führen. Infolge Heizen auf Raumtemperatur sinkt die Kraft noch weiter ab, da sich die Probe verlängert und somit entspannt. Am Ende des Temperaturzyklus, nach kurzer Haltezeit (mit thermischer Trägheit) bleibt eine Spannkraft von 113 N in Versuch AS1. In Versuch FM2 beträgt der Wert 233 N. Für zugehörige Spannungen siehe Tabelle 3.13.

Die erzielten Spannkräfte bilden den Ausgangspunkt für rein mechanische Last in Etappe VI.

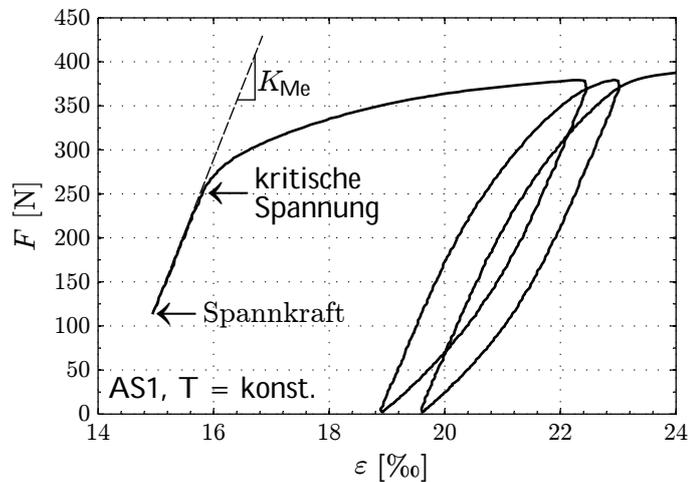
### 3.5.5 Vorgespannter Zustand – Ergebnisse und Diskussion

Die erzielten Spannkräfte wurden gehalten und die Probe dehnungsgesteuerter Belastung bei Raumtemperatur unterzogen. Gemessene Kraft-Dehnungs-Kurven zeigt Bild 3.26.

In Versuch FM2 neigte sich Kraft-Dehnungs-Kurve unmittelbar bei neuer Zuglast (Bild 3.26a). Ein kurzes Kurvenstück größerer Steifigkeit zu Beginn, ist vermutlich zurückzuführen auf die bereits erläuterte thermische Trägheit des Versuchsaufbaus. Die damit verbundene zeitversetzte Ausdehnung des Zuggestänges und der Probe erlaubte eine geringfügige Entspannung, während der Haltezeit der Spannkraft. Infolge dessen fällt  $\sigma$  wieder unter  $\sigma_{krit}$ . Diese Entspannung ermöglicht elastische Wiederbelastung bis die kritischen Spannung wieder erreicht ist. Für eine Nutzung des vorgespannten Materials muss jedoch die vorhandene Steifigkeit, auch nach Überschreiten von  $\sigma_{krit}$  berücksichtigt werden: Die Tangentenneigung  $K_{Mp}$  des Plateaus der Kurve unmittelbar nach  $\sigma_{krit}$  fällt rapide auf Werte zwischen 10000 N/mm<sup>2</sup> und 30000 N/mm<sup>2</sup> ab.



(a) FM2



(b) AS1

Bild 3.26: Belastung Fe-Mn-Si-Cr nach Vorspannung durch FGE

Wird die Legierung jedoch unterkühlt und wieder erwärmt – wie in Versuch AS1 – so liegt die Vorspannung weit unter  $\sigma_{krit}$  (Bild 3.26b). Verantwortlich dafür ist Längenausdehnung der Probe, die in Entspannung resultiert. Als unerwünschte Folge dessen ist die Spannkraft wesentlich niedriger als ohne Unterkühlung. Als Vorteil kann jedoch gewertet werden, dass die Legierung elastisch wiederbelastet werden kann. Eine elastische Dehnung von etwa 1‰ steht im Versuch AS1 zur Verfügung. Das kann für eine Umschnürung relevant sein in Anbetracht der kleinen tangentialen Dehnungen der untersuchten umschnürten Zylinder (Bild 3.16).

Der Anstieg der Wiederbelastungskurve  $K_{Me}$  (Bild 3.26b) ist  $138000 \text{ N/mm}^2$  nach Vorspannen durch Formgedächtnis, also höher als der Elastizitätsmodul des metastabilen Phasengemischs  $E_{AM}$  aber geringer als  $E_A$ . Der Wert  $K_{Me}$  hängt ab von der Phasenfraktion des Martensit, die von der Lastgeschichte bestimmt wird. Das wird durch die Pfade vollständiger Ent- und Wiederbelastungen bei höheren Dehnungen in beiden Versuchen bewiesen; SIM reduziert die Steifigkeit der Legierung.

Nach Erreichen von  $\sigma_{krit}$  neigt sich die Kraft-Dehnungs-Kurve von AS1 wie für den Versuch FM2 beschrieben.

Die Bruchdehnung im Versuch AS1/VI war 23 % bei einer Bruchspannung von 623 N/mm<sup>2</sup>.

### 3.5.6 Fazit für Modellbildung und Baupraxis

In der untersuchten Legierung Fe-Mn-Si-Cr führt das Vorspannen mittels Formgedächtnis zu einem Phasengemisch an Stelle eines reinen Austenits. Spannungen und Temperaturen bei der Abkühlung beeinflussen die Phasenfraktion. Der Martensit entsteht spannungsinduziert. Nach den vorliegenden Erkenntnissen betrifft dieser Effekt auch andere FGL.

Im Vorspannzustand bildet sich unmittelbar weiterer Martensit, sobald mechanisch belastet wird. Die Steifigkeit der Legierung ist dann sehr gering; der Lastpunkt bewegt sich auf dem Plateau der Spannungs-Dehnungs-Kurve, da die kritische Spannung erreicht ist.

Für eine abschätzende Modellbildung, für Lasten nach dem Vorspannzustand, kann es ausreichend sein, lediglich das Plateau der Spannungs-Dehnungs-Kurve zu modellieren. Das kann vereinfachend multilinear oder sogar linear an Hand von Versuchen erfolgen.

Durch Unterkühlung und anschließende Erwärmung, der vorgespannten FGL, entsteht ein elastisch nutzbarer Bereich im Vorspannzustand, der bei Wiederbelastung genutzt werden kann. Allerdings wird die Vorspannung dadurch reduziert. In Bild 3.27 ist dieser Zusammenhang prinzipiell skizziert. Punkt 1 in der Abbildung entspricht dem Vorspannzustand, nach thermischen Vorspannen mittels FGE und Rückkehr zur Raumtemperatur (RT). Wird nun zur Temperatur  $T_{tief}$  unterkühlt (Bild 3.27a), so entsteht zwar eine Zwangszugdehnung infolge normaler Temperaturverkürzung, jedoch sinkt gleichzeitig die kritische Spannung  $\sigma_{krit}$  ab, wie in Bild 2.15b dargestellt. Die Folge ist spannungsinduzierte Martensitbildung (SIM). Die Steifigkeit der Legierung sinkt, die Spannung wird auf  $\sigma_{P2}$  verringert. Wird anschließend wieder bis RT erwärmt, reduziert sich die Spannung weiter, nun aber infolge normaler Temperatúrausdehnung.

Nach den vorliegenden Ergebnissen sind die Spannungs-Temperatur-Kurve (Bild 3.27a) und die Spannungs-Dehnungs-Kurve (Bild 3.27b) zwischen den Punkten 2 und 3 linear elastisch und unabhängig von den Formgedächtniseigenschaften. D. h., wenn einmal Punkt 3 erreicht ist, dann kann zwischen  $\sigma_{P3}$  und  $\sigma_{P2}$  linear elastisch be- und entlastet werden. Dieser Spannungsbereich verringert sich aber, wenn wieder gekühlt wird. Bei einer winterlichen Temperatur  $T_W$ , steigt die Spannung auf  $\sigma_{P4}$ . Nur  $\Delta\sigma$  ist also elastisch nutzbar, bis  $\sigma_{krit}$  wieder erreicht wird und sich die Spannungs-Dehnungs Kurve zu Punkt 5 neigt (Bild 3.27b). Für bautechnische Zwecke müsste dieser Umstand beachtet werden.

Wenn geringe Spannkkräfte ausreichen, so könnte der Effekt einer planmäßigen Unterkühlung und Erwärmung durchaus sinnvoll sein, da der Elastizitätsmodul der Wiederbelastungskurve  $K_{Me}$  deutlich steifer ist, als der Tangentenmodul nach Erreichen von  $\sigma_{krit}$ .

Die gesicherte Unterkühlung einer Umschnürung aus FGL am Bauteil ist technisch nicht unproblematisch. Für Kühlung unter  $-20^\circ\text{C}$  kommt z. B. Trockeneis in Frage. Allerdings ist diese Kühlung nicht steuerbar.

### 3 Versuche

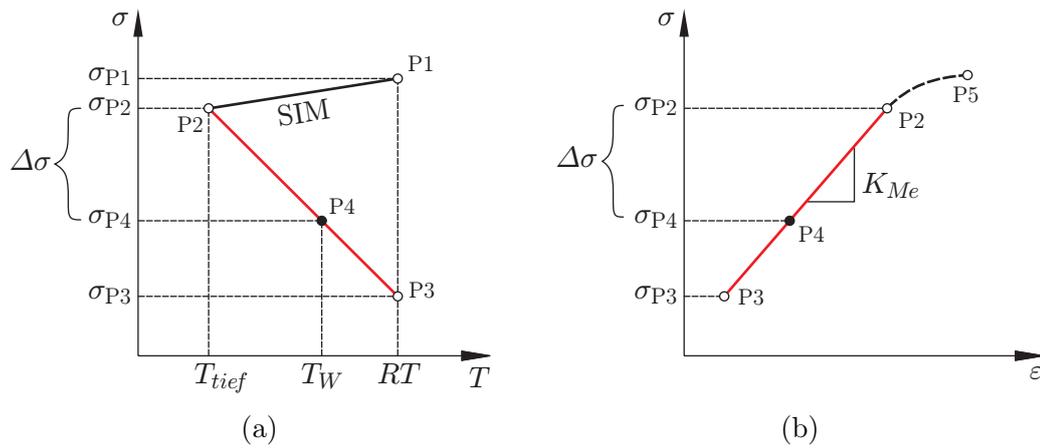


Bild 3.27: Effekt von Unterkühlung und Erwärmung der FGL im Vorspannzustand prinzipiell: (a) Spannung-Temperatur und (b) Spannung-Dehnung

Allein die in den Versuchen erzielten Vorspannungen sind nicht ausreichend groß, um bautechnische Anwendungen zu motivieren. Jedoch belegen jüngste Ergebnisse anderer Forscher, dass weit größere Vorspannungen erzielbar sind. Für eine verbesserte Variante der hier genutzten Legierung wurden bereits  $580 \text{ N/mm}^2$  Vorspannung nachgewiesen [131].

Always use the method that works best. Whether it is scientific or empirical or in-between, that is secondary.

(S. Popovics [173])

## 4 Modellbildung

### 4.1 Restfestigkeit des umschnürten Betons

Gegenstand dieses Abschnittes ist ein Modell für die einaxiale Restfestigkeit  $f_R$  des Betons von umschnürten Betonzylindern in Abhängigkeit der mehraxialen Vorbelastung  $\sigma_a(\varepsilon_a, \sigma_r)$  mit Umschnürung. Diese Fragestellung ist in Bild 4.1, an Hand der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurven skizziert.

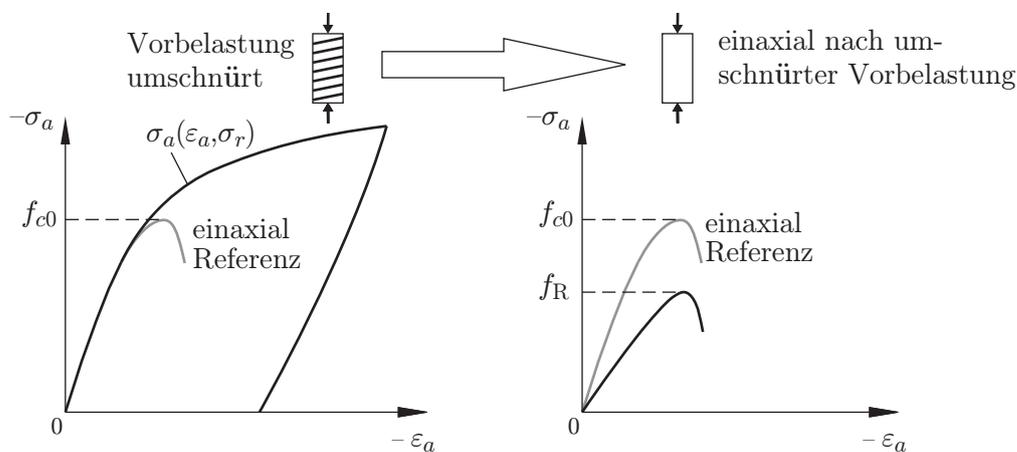


Bild 4.1: Einaxiale Restfestigkeit des Betons nach umschnürter Vorbelastung

Wie in den Versuchen festgestellt wurde, verhindert Querdruck  $\sigma_r$  die Abnahme der Restfestigkeit des Betonkerns. Dies ist gleichbedeutend mit Verhinderung von Rissbildung als maßgebliche Ursache der Entfestigung bzw. Schädigung des Betons.

In Abschnitt 2.2.8 wurde die freigesetzte Energie als ein möglicher Indikator für die Rissbildung im einaxialen Fall beschrieben. Dieser Ansatz wird in den folgenden Abschnitten auf den umschnürten Zylinder ausgedehnt und mit einem Restfestigkeitsgesetz verknüpft.

Die verwendete Vorzeichenkonvention und Achsrichtungen sind in Anhang A erläutert. Zu den Bezeichnungen der Richtungen am Zylinder und zur Vergleichbarkeit mit dem Würfel siehe Anhang B.

#### 4.1.1 Energieanteile mehraxial

Um die Entfestigung des Betons zu quantifizieren, soll der energetische Unterschied zwischen dem Betonkörper und einem linear-elastischen Referenzkörper gleicher Geometrie

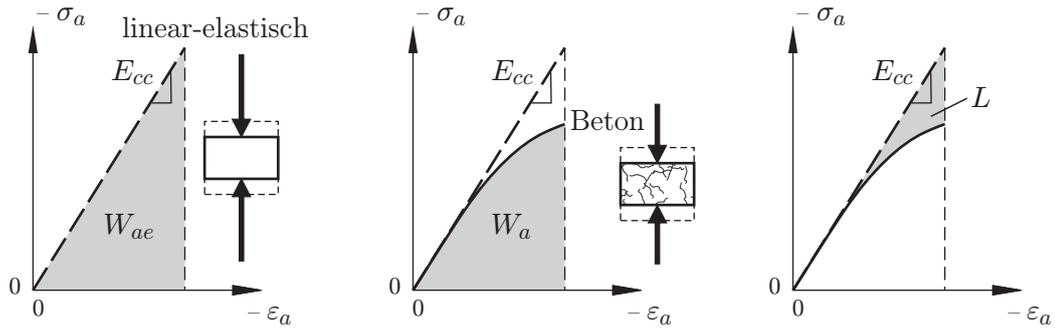


Bild 4.2: Grafische Interpretation der Energieanteile in axialer Richtung

herangezogen werden. Bild 4.2 zeigt diesbezüglich die grafische Interpretation der Energieanteile, die in axialer Richtung entstehen:  $W_{ae}$  ist der axiale Anteil der Formänderungsenergie eines linear-elastischen Zylinders (ohne Entfestigung).  $W_a$  ist der axiale Anteil der Formänderungsenergie des Betons.  $L$  ist die axiale Energiefreisetzung, mit

$$L = W_{ae} - W_a. \quad (4.1)$$

$E_{cc}$  ist die Anfangstangente an die axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve des umschnürten Systems.

Wie in Abschnitt 2.2.8 eingeführt, wird angenommen, die axiale Energiefreisetzung  $L$  sei repräsentativ für die Energieumwandlung durch Rissbildung und damit Entfestigung. Sollten in  $L$  noch andere energetische Anteile enthalten sein, wie z. B. Wärme aus Reibung, so wird angenommen, dass alle Anteile proportional mit der Last ansteigen.

Bisher wurden nur Energieanteile beschrieben, die sich aus der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve ergeben. Am umschnürten Zylinder ist der Spannungszustand jedoch mehrachsiger. Auch in radialer Richtung besteht ein energetischer Unterschied zwischen Beton und linear-elastischem Referenzkörper. Dies ist prinzipiell in Bild 4.3 für umschnürte Zylinder dargestellt: Bei gegebener axialer Stauchung  $\varepsilon_a$  ist die überproportional steigende Querdehnung  $\varepsilon_r$  des Betons größer als die Querdehnung des linear-elastischen Referenzkörpers (Bild 4.3c). Infolge dessen wird beim umschnürten Beton auch ein größerer Querdruck  $\sigma_r$  aktiviert (Bild 4.3a). Die Spannungs-Dehnungs-Linien der radialen Richtung beginnen bei  $\sigma_{rp}$ , wenn die Umschnürung vorgespannt wird. Ohne Vorspannung ist  $\sigma_{rp} = 0$ .

Die Energiedifferenz in Querrichtung  $\Gamma$  ist

$$\Gamma = W_{re} - W_r, \quad (4.2)$$

mit dem radialen Anteil der Formänderungsenergie des linear-elastischen Zylinders  $W_{re}$  und dem radialen Anteil der Formänderungsenergie des Betons  $W_r$ . Die Flächen, die der Hälfte der radialen Energieanteile entsprechen, sind in Bild 4.3a wie folgt markiert:  $W_{re}$  hat einen weißen Untergrund,  $\Gamma$  hat einen grauen Untergrund,  $W_r$  ist schraffiert und überdeckt  $W_{re}$  und  $\Gamma$ . Wegen der Rotationssymmetrie (vgl. Anhang B, (B.8)) sind die vollen radialen Energieanteile jeweils das Doppelte der dargestellten Flächen.

Die Aussagekraft von  $\Gamma$  bezüglich der Entfestigung ist völlig unklar. Deshalb muss geklärt werden: Welchen Anteil haben die radialen Energieanteile an der gesamten Energiebilanz? Kann die radiale Energiedifferenz  $\Gamma$  vernachlässigt werden, ohne die axiale Energiefreisetzung  $L$  als Anzeiger für die Entfestigung zu entkräften?

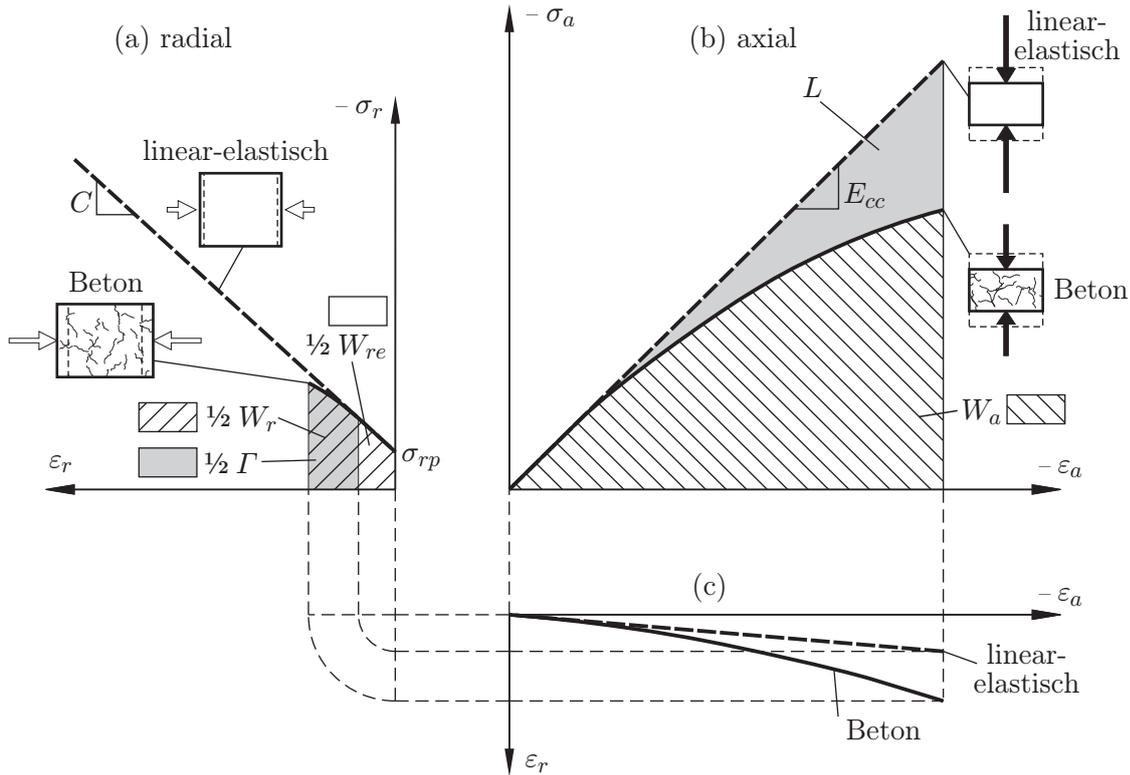


Bild 4.3: Prinzipielle Spannungs-Dehnungs Linien und Formänderungsenergie mehraxial; für Beton und linear-elastischen Körper, umschnürt

#### 4.1.2 Berechnung der Energieanteile

Die gesamte Formänderungsenergie des umschnürten Zylinders infolge axialer Last ist:

$$W_{ges} = W_a + W_r = \int \sigma_a d\varepsilon_a + 2 \int \sigma_r d\varepsilon_r. \quad (4.3)$$

Diese Gleichung gilt unabhängig von den Materialeigenschaften des Zylinders und unabhängig von der Art der Umschnürung. Beim Betonzyylinder sind  $\sigma_a$  und  $\sigma_r$  nichtlinear. Auch das Material der Umschnürung kann sich nichtlinear Verhalten. Ein mögliches Modell für  $\sigma_a(\varepsilon_a)$  des umschnürten Betons wird in Abschnitt 4.2 vorgestellt.

Hingegen für den linear-elastischen Referenzzylinder mit linear-elastischer Umschnürung sind die axiale und radiale Spannung  $\sigma_{ae}$  und  $\sigma_{re}$  lineare Funktionen. Sie werden mit dem Index e kenntlich gemacht. Ihre exakten Gleichungen sind in Anhang B.6 unter Berücksichtigung von radialer Vorspannung und elastischen Vorspannverlusten hergeleitet. Im Folgenden sollen jedoch die vereinfachten Gleichungen nach Anhang B.7 genutzt werden:

$$\sigma_{ae}(\varepsilon_a) = E_{cc} \varepsilon_a, \quad (4.4)$$

$$\sigma_{re}(\varepsilon_r) = -C\varepsilon_r + \sigma_{rp}. \quad (4.5)$$

In (4.4) wurde keine axiale Spannung aus Vorspannen berücksichtigt ( $\sigma_{ap} = 0$ ). Vereinfachend darf  $E_{cc} = E_{c0}$  eingesetzt werden. Damit wird eine geringfügige Erhöhung der axialen Steifigkeit infolge Umschnürung vernachlässigt. Diese Annahme ist in Anhang B.9 begründet. Die elastische radiale Dehnung  $\varepsilon_{re}$  in (4.5) ist bei gegebener axialer Dehnung

## 4 Modellbildung

verschieden von  $\varepsilon_r$  des Betons. Wie in Anhang B.7 begründet, wird analog zu (B.37) vereinfachend genutzt:

$$\varepsilon_{re}(\varepsilon_a) = -\nu_{cc} \varepsilon_a. \quad (4.6)$$

Dabei werden die Dehnungen des Betons im Vorspannzustand zu Null gesetzt. Nicht vernachlässigt werden darf jedoch die Quervorspannung  $\sigma_{rp}$ . Die konstante Querdehnzahl des linear-elastischen, umschnürten Zylinders  $\nu_{cc}$  in (4.6) ist gemäß (B.21):

$$\nu_{cc} = \frac{\nu}{1 + \frac{C}{E_{c0}}(1 - \nu - 2\nu^2)}. \quad (4.7)$$

Für die Quervorspannung  $\sigma_{rp}$  in (4.5) kann ein exakter Wert errechnet werden, gemäß (B.31) für freie Längsausdehnung oder (B.34) für vollständig verhinderte Längsausdehnung. Diese Werte  $\sigma_{rp}$  gelten sowohl für den linear-elastischen Zylinder als auch für den Betonzylinder, wenn angenommen wird, dass der Vorspannvorgang des Betons bei kleiner axialer Last auch elastisch ist.

Mit den gegebenen elastischen Gleichungen ist es möglich, die Formänderungsenergien des linear-elastischen Zylinders geschlossen zu berechnen: Der axiale Anteil  $W_a$  von (4.3) wird durch Integration von (4.4) zur axialen Formänderungsenergie des linear-elastischen Zylinders

$$W_{ae} = \frac{1}{2} E_{cc} \varepsilon_a^2. \quad (4.8)$$

Analog folgt für die radiale Formänderungsenergie des linear-elastischen Zylinders aus Integration von (4.5):

$$W_{re} = 2 \left( -\frac{1}{2} C \varepsilon_{re}^2 + \sigma_{rp} \varepsilon_{re} \right). \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Versuchsdaten und Fazit zur Relevanz der radialen Energiedifferenz

Um die Größenordnung der einzelnen Energieanteile bewerten zu können, sollen die in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Gleichungen angewendet werden. Dabei wird kein Spannungs-Dehnungs-Modell für den Beton verwendet, sondern die aus den Versuchen ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kurven der Serie B in Abschnitt 3.4.3. Es wird angenommen, die Energiebilanz in den Versuchen sei repräsentativ für umschnürte Druckglieder.

In den Versuchen wurden Kraft, axiale Verschiebung und tangentielle Dehnung gemessen. Aus Kraft und axialer Verschiebung wurden  $\sigma_a$  und  $\varepsilon_a$  errechnet. Die tangentielle Dehnung  $\varepsilon_t$  entspricht der radialen Dehnung  $\varepsilon_r$  und kann direkt genutzt werden. Sie dient auch als Eingangswert zur analytischen Bestimmung der radialen Spannung  $\sigma_r$  aus der tangentialen Spannung der Umschnürung. Dazu werden die effektiven Spannungs-Dehnungs-Kurven der Umschnürung aus Stahlband genutzt, die in Bild 4.32 gegeben sind. Darin wird das nichtlineare Verhalten der Stahlbänder erfasst. Details sind in Abschnitt 4.4.1 angegeben.

Alle Messungen beginnen nach dem Vorspannen. Die Kurven der Versuche sind also kompatibel mit dem vereinfachten Vorspannzustand, der in Anhang B.7 beschrieben ist. Die zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Kurven des linear-elastischen, umschnürten Zylinders sind in Bild B.4c prinzipiell gezeigt. Der Vorspannzustand im Versuch hat eine freie Längsausdehnung des Zylinders. Deshalb gilt:  $\sigma_{ap} = 0$ . Gemäß Anhang B.9 wird angenommen  $E_{cc} = E_{c0}$ . Für  $E_{c0}$  wird der Mittelwert  $E_{sm} = 18860 \text{ N/mm}^2$  der Serie B verwendet, wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben. Als Querdehnzahl des linear-elastischen, umschnürten Systems

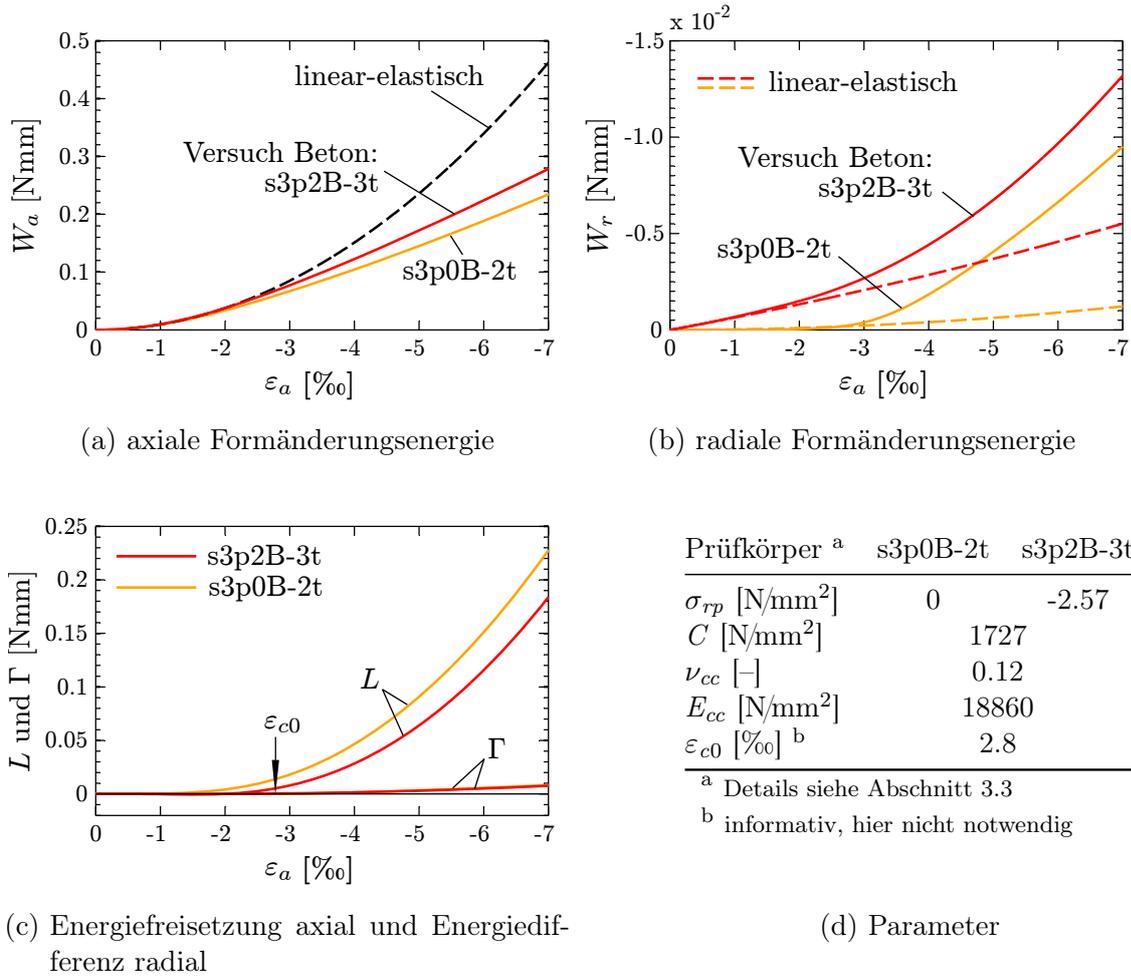


Bild 4.4: Energieanteile aus Versuchen und linear-elastischer Zylinder.

$\nu_{cc}$  wird 0.12 eingesetzt. Dies ist ein typischer Wert bei geringer axialer Last, der aus den Versuchsergebnissen bestimmt wurde. Mit diesen Werten wird die Quervorspannung  $\sigma_{rp}$  für freie Längsausdehnung nach (B.30) berechnet. In Tabelle B.1 sind entsprechende Werte für die  $\sigma_{rp}$  der Serie B angegeben.

Bild 4.4 zeigt typische Ergebnisse der Berechnungen beispielhaft; Zu sehen sind die Energieanteile zweier Prüfkörper mit Vorspannung der Umschnürung (s3p2) und ohne (s3p0).

Generell wurde festgestellt: Die radialen Formänderungsenergien sind um mindestens eine Zehnerpotenz kleiner als  $W_a$ , im Bereich der Messung und verwendeten Parameter. Zudem ist die Energiedifferenz in radialer Richtung wesentlich kleiner als die axiale Energiefreisetzung. So ist  $\Gamma$  nach Überschreiten von  $\varepsilon_{c0}$  höchstens 10 % von  $L$ , für die betrachteten Prüfkörper; Tendenz abnehmend mit steigender axialer Last. Markant ist auch, dass sich vorgespannter und ungespannter Prüfkörper wesentlich deutlicher in  $L$  unterscheiden als in  $\Gamma$ .

Auf Grundlage dieser Erkenntnis werden die radialen Energieanteile für die weitere Betrachtung vernachlässigt. Allein die axiale Energiefreisetzung wird für das Restfestigkeitsmodell benutzt.

#### 4.1.4 Schädigungsindikator

Bisher wurde gezeigt, wie die axiale Energiefreisetzung  $L$  berechnet wird. Es wurde argumentiert, dass  $L$  maßgebliche Information zur Schädigung des mehraxial beanspruchten Betons enthält. Jedoch ist  $L$  allein nicht direkt geeignet, um ein Indikator für das qualitative Maß der Schädigung zu sein, weil der Betrag von  $L$  keinen Grenzwert hat, gegen den er bei steigender axialer Last streben würde. Deshalb wird ein auf  $L$  aufbauender Schädigungsindikator  $D$  analog zu (2.5) formuliert:

$$D = \frac{L}{W_{ae}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq D \leq 1. \quad (4.10)$$

Bei  $D = 0$  ist der Beton ungeschädigt bzw. hat die volle Festigkeit, bei  $D = 1$  hat er keine Festigkeit mehr.

Notwendig zur Bestimmung von  $D$  ist die Kenntnis der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des Betons. Sowohl Messungen bei Druckversuchen als auch theoretische Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sind somit nutzbar, um die Schädigung qualitativ zu ermitteln. Ein mögliches Spannungs-Dehnungs-Modell wird in Abschnitt 4.2 entwickelt.

#### 4.1.5 Restfestigkeitsgesetz

Der Schädigungsindikator  $D$  selbst lässt noch keine Quantifizierung der Entfestigung zu. Dazu ist ein Zusammenhang zwischen  $D$  und der Restfestigkeit  $f_R$  notwendig.

Wird für diese Beziehung eine lineare Abhängigkeit gemäß Bild 4.5 unterstellt, so sind zwei Stützpunkte  $(D, f_R)$  ausreichend, um eine entsprechende Funktion zu definieren:  $(1, 0)$  und  $(D_{c0}, f_{c0})$ . Der Wert  $D_{c0}$  ist der Schädigungsindikator, der sich im einaxialen Fall ergibt, wenn die Festigkeit  $f_{c0}$  erreicht wird. Der Wert  $f_{Re}$  in Bild 4.5 kann als fiktive Anfangsfestigkeit des Betons aufgefasst werden. Diese Annahme entspricht der Tatsache, dass ohne Umschnürung bereits vor dem Erreichen von  $f_{c0}$  Risse im Beton entstehen, die entfestigend wirken.

Als Restfestigkeitsgesetz wird definiert:

$$f_R(D) = f_{c0} \frac{1 - D}{1 - D_{c0}}. \quad (4.11)$$

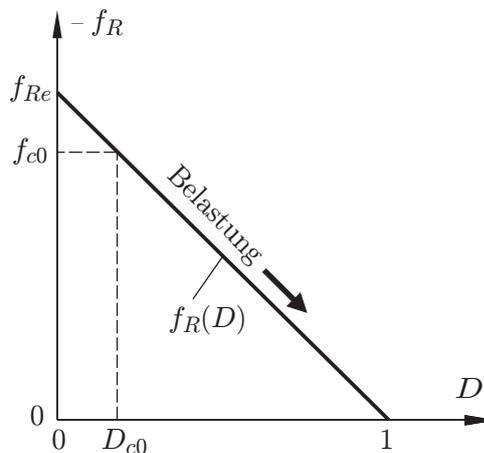
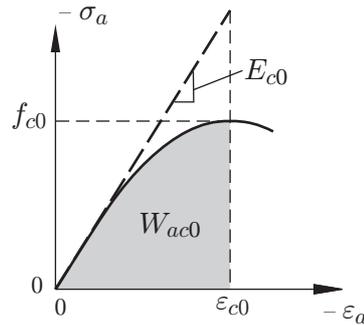


Bild 4.5: Funktion für Restfestigkeit

Bild 4.6: Grafische Interpretation von  $W_{ac0}$ 

Unter Anwendung von (4.1) und (4.10) ist der Schädigungsindikator  $D_{c0}$  des nicht umschnürten Betons bei Bruchlast:

$$D_{c0} = \frac{W_{ae} - W_{ac0}}{W_{ae}}. \quad (4.12)$$

In (4.12) ist  $W_{ac0}$  die Formänderungsenergie des Betons unter der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Kurve bis zur einaxialen Festigkeit bei  $\varepsilon_{c0}$ . In Bild 4.6 ist  $W_{ac0}$  skizziert.

Eine Gleichung für  $W_{ac0}$  wird in Abschnitt 4.2.3 auf Seite 101 ff angegeben, basierend auf einer bestimmten Funktion der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Linie.

## 4.2 Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons

### 4.2.1 Überblick

Ziel dieses Teils der Modellbildung ist die axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve von umschnürtem Beton.

Bild 4.7 gibt einen Überblick zu den Eingangsparametern für den Beton und zum Zusammenspiel mit den anderen Teilmodellen. Die axiale Stauchung  $\varepsilon_a$  ist die führende Größe analog weggesteuerter Belastung. Radiale Vorspannung  $\sigma_{rp}$  wird berücksichtigt.

Für die Umschnürung wird ein unabhängiges Spannungs-Dehnungs-Modell vorausgesetzt; So wird in der Formulierung des Betonmodells nicht unterschieden, ob mit Stahl, FVK oder FGL umschnürt ist. Durch diese Trennung können sowohl komplexe Modelle des umschnürenden Materials berücksichtigt werden, als auch einfache einaxiale Spannungs-Dehnungs-Kurven, z. B. aus einem Zugversuch. Nichtlineares Material der Umschnürung erfordert Anpassungen an der Schnittstelle zwischen den beiden Spannungs-Dehnungs Modellen. Die Schnittstelle ist in Bild 4.7 durch unterbrochene Pfeile dargestellt.

Das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons umfasst axiale und radiale Spannungen und Dehnungen. Es liefert Stützpunkte der  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$  Kurve für das Restfestigkeitsmodell.

Das Spannungs-Dehnungs-Modell ist nach Überschreiten von  $f_{c0}$  nur anwendbar, solange die Umschnürung ausreicht, um weiter steigende axiale Spannungen zu ermöglichen. In Bild 4.8 trifft dies auf die Kurve A vollständig zu; In Kurve B jedoch ist das Modell nur bis Erreichen von  $f_{cc}$  anwendbar. Auf Grund dieser Einschränkung ist Lokalisierung nicht relevant, wie an Abschnitt 2.2.5 dargelegt wurde.

#### 4 Modellbildung

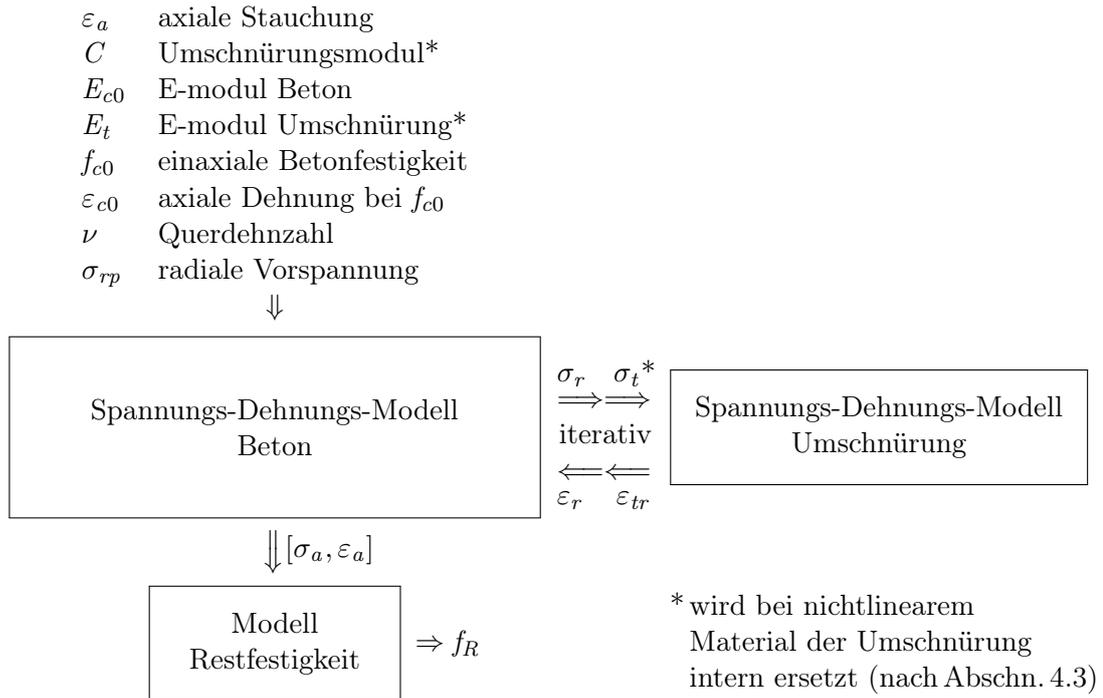


Bild 4.7: Eingangsparameter und Interaktion mit anderen Teilmodellen.

Grundsätzlich werden zwei charakteristische Teile der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve unterschieden, wie in Bild 4.9 dargestellt.

Teil 1: axialer Spannungs-Dehnungs-Verlauf, mit zunehmender Krümmung der Kurve, bis zum Erreichen eines Anstiegs  $K_{cp}$ , im Punkt  $(\sigma_{aK}, \varepsilon_{aK})$ . Dieser Punkt soll als Übergangspunkt bezeichnet werden.

Teil 2: Kurve, die dem Anstieg  $K_{cp}$  folgt. Dieser Anstieg wird im Folgenden als plastische Tangente bezeichnet.

Diese Teile wurden besonders an Versuchen mit linear-elastischer Umschnürung beobachtet.  $K_{cp}$  ist dann eine Konstante. Beispiele zeigen Bild 2.19b und Bild 3.16c.

Besitzt die Umschnürung hingegen nichtlineares Materialverhalten, so nimmt auch die Krümmung der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve nach dem Übergangspunkt möglicher-

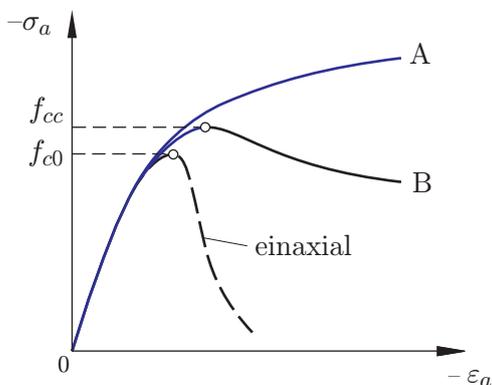


Bild 4.8: Anwendungsbereich des Modells

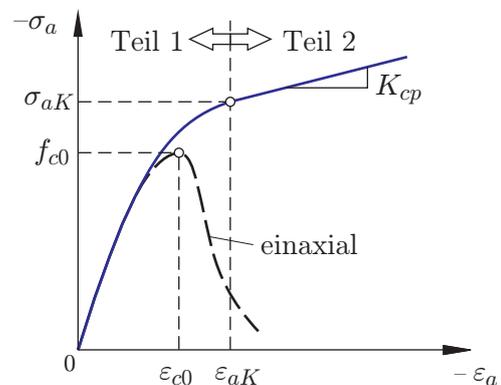


Bild 4.9: Unterteilung  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$  Kurve

weise wieder zu, wenn die Steifigkeit der Umschnürung nachlässt. Das Modell soll auch diesen Effekt abbilden. Deshalb ist der Anstieg der plastischen Tangente  $K_{cp}$  eine Variable.

### 4.2.2 Spannungs-Dehnungs-Funktion Teil 1

Für die inkrementelle Berechnung des ersten Teiles der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve wird eine bekannte Funktion für nicht umschnürten Beton zu Grunde gelegt, wie sie auch in einschlägigen Richtlinien und Normen des Betonbaus zu finden ist [1, 37]. Die Funktion basiert auf einem Vorschlag von GRASSER [71]. In (4.13) werden die Terme  $\sigma_{ap}$  und  $k_S$  zur Originalfunktion hinzugefügt:

$$\sigma_a(\varepsilon_a) = k_S f_{c0} \frac{k \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \eta} + \sigma_{ap} \quad (4.13a)$$

mit:

$$k = \frac{E_{c0} \varepsilon_{c0}}{f_{c0}} \quad (4.13b)$$

$$\eta(\varepsilon_a) = \frac{\varepsilon_a}{k_S \varepsilon_{c0}}. \quad (4.13c)$$

Der Term  $\eta$  normiert die Kurve zu  $\varepsilon_{c0}$ . Die axiale Spannung im Vorspannzustand  $\sigma_{ap}$  kann mittels der elastischen Grundgleichungen bestimmt werden, die in Anhang B.6 hergeleitet werden. Im Sonderfall freier Längsausdehnung im Vorspannzustand gilt  $\sigma_{ap} = 0$ . Anhang B.7 gibt eine exakte Lösung für einen zweiten Sonderfall des Vorspannzustands an: Bei vollständig verhinderter Längsausdehnung kann  $\sigma_{ap}$  aus (B.33) bzw. (B.27) berechnet werden. Sollen Vorspannverluste der Umschnürung infolge elastischem Abbau der Vordehnungen vernachlässigt werden, dann kann  $\sigma_{ap}$  einfach nach (B.40) berechnet werden.

Die Anfangstangenten von umschnürtem und einaxialem System sind nahezu gleich. Dies wird in Anhang B.9 gezeigt. Ohne Verlust an Genauigkeit kann angenommen werden:  $E_{cc} = E_{c0}$ . Deshalb wird im Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons nicht zwischen  $E_{cc}$  und  $E_{c0}$  unterschieden.

Die Funktion  $\sigma_a$  wird in Abhängigkeit des Querdruckes mit dem Faktor  $k_S$  selbständig gestreckt (Bild 4.10), um zu simulieren, was auch im Versuch festgestellt wird: Querdruck führt dazu, dass die Krümmung der Kurve erst bei höheren axialen Dehnungen zunimmt. In Bild 4.10a ist die normierte Form  $\sigma_a(\eta)$  prinzipiell dargestellt. Bild 4.10b zeigt  $\sigma_a(\varepsilon_a)$ . Die Kurve für nicht umschnürten Beton ergibt sich mit  $k_S = 1$ .

Für den Faktor  $k_S$  wird folgende Gleichung gewählt:

$$k_S = 1 + \nu \left( \frac{\varepsilon_{aVm}(\sigma_r)}{\varepsilon_{aVm}(\sigma_r=0)} - 1 \right). \quad (4.14)$$

Hierin ist  $\nu$  die Querdehnzahl des Betons. Der Streckfaktor  $k_S$  wird abhängig gemacht von der axialen Dehnung beim Minimum der Volumendehnung  $\varepsilon_{aVm}$ , die vom Querdruck  $\sigma_r$  abhängt und die zu ihrem Wert im einaxialen Fall  $\varepsilon_{aVm}(\sigma_r=0)$  normiert ist. In Bild 4.11 ist  $\varepsilon_{aVm}$  im Diagramm der Volumendehnung  $\varepsilon_V$  gekennzeichnet. Hierin ist  $\varepsilon_{Vp}$  die Volumendehnung im Vorspannzustand. Bild 4.12 zeigt einen typischen Plot der linearen Funktion  $k_S$ . Die Streckung erfolgt proportional zu  $\varepsilon_{aVm}$ .

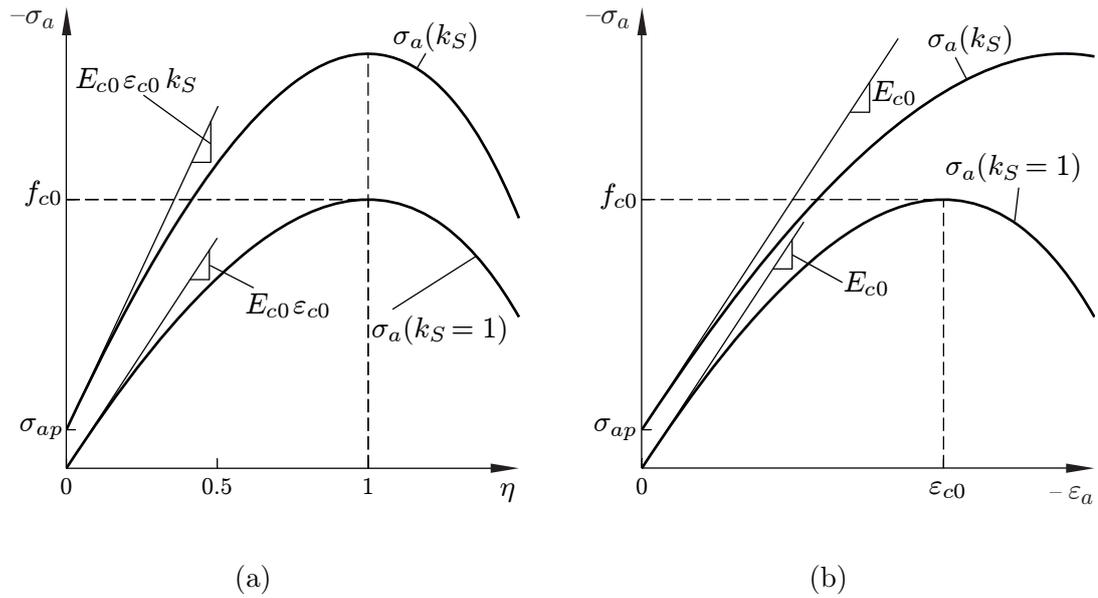


Bild 4.10: Angepasste GRASSER-Funktion: (a) Dehnung normiert, (b) ohne Normierung

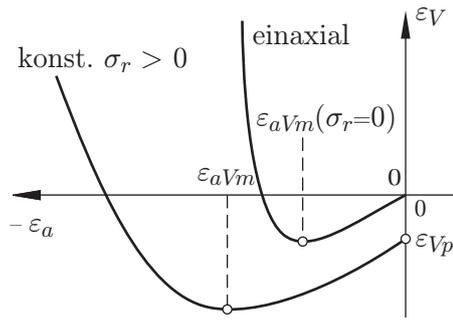


Bild 4.11:  $\varepsilon_a$  bei  $\min \varepsilon_V$

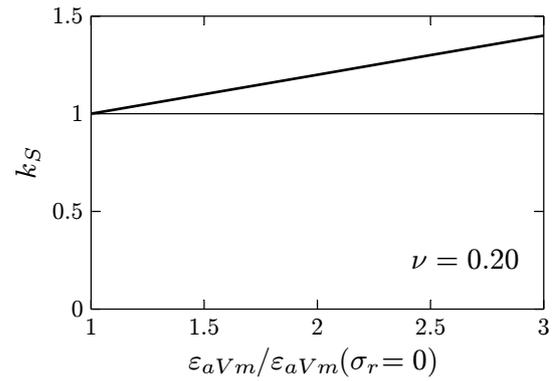


Bild 4.12: Funktion für  $k_S$

Unbeeinflusst von der Streckung bleibt der Elastizitätsmodul  $E_{c0}$  in der Form  $\sigma_a(\varepsilon_a)$  in Bild 4.10b. Der angepasste Anfangsanstieg  $E_{c0} \cdot \varepsilon_{c0} \cdot k_S$  in der GRASSERSchen Form der Spannungsfunktion in Bild 4.10a ergibt sich aus Einsetzen von (4.13c) in  $\Delta\sigma_a/\Delta\eta$  und Vereinfachen mit  $\Delta\sigma_a/\Delta\varepsilon_a = E_{c0}$ .

Die Annahmen für  $k_S$  setzen voraus, dass der Kurvenverlauf der Volumendehnung für eine gegebene radiale Spannung  $\sigma_r$  bekannt ist. Dem widmet sich Abschnitt 4.2.6.

Die axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve wird mit dem beschriebenen Verfahren nicht als geschlossene Funktion bestimmt, sondern inkrementell als Wertetabelle  $[\sigma_a, \varepsilon_a]$ . Bild 4.13 macht dies anschaulich: Die resultierende Kurve entsteht aus der Verbindung von Stützpunkten einer Kurvenschar  $\sigma_a(\varepsilon_a, \sigma_r)$ , für gegebene  $\varepsilon_a$ .

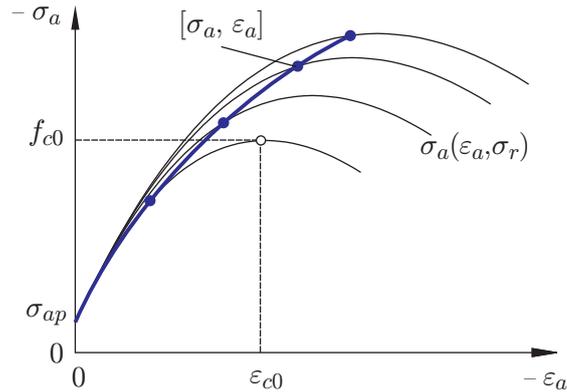


Bild 4.13: Inkrementelle axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve Teil 1

### 4.2.3 Einaxiale Formänderungsenergie analytisch

In Abschnitt 4.1.5 wird die Formänderungsenergie  $W_{ac0}$  genutzt, die bis zur einaxialen Höchstspannung  $f_{c0}$  umgesetzt wird. Die entsprechende Fläche unter der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Kurve ist in Bild 4.6 skizziert.

Für das vorgestellte Betonmodell kann  $W_{ac0}$  durch Integration von (4.13a) indirekt bestimmt werden:

$$H = \int_0^1 \sigma_a \, d\eta. \quad (4.15)$$

$H$  ist die Fläche unter der zu  $\epsilon_{c0}$  normierten Funktion (4.13a). Die obere Integrationsgrenze ist  $\eta = 1$ . Auswertung des Integrals (4.15) liefert:

$$H = f_{c0} \left[ 1 + \frac{3}{2a} + \frac{1}{a^2} - \frac{ka+1}{a^3} \ln(a+1) \right] \quad \text{mit : } a = k - 2. \quad (4.16)$$

Nach multiplizieren mit  $\epsilon_{c0}$ , erhält man die Formänderungsenergie, der nicht normierten Funktion:

$$W_{ac0} = \epsilon_{c0} H. \quad (4.17)$$

### 4.2.4 Anstieg der plastischen Tangente

Nach dem ersten Teil der axialen Spannungs-Dehnungs-Linie mit zunehmender Krümmung, bestimmt vor allem der vorhandene Umschnürungsdruck den weiteren Verlauf. Bei fehlendem oder geringem Querdruck fällt die Kurve ab; bei ausreichendem Querdruck steigt sie weiter an (vgl. Bild 2.5a). In beiden Fällen wird der Beton plastisch verformt.

Für Betondruckglieder mit ausreichender, linear-elastischer Umschnürung besitzt die axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve im plastischen Bereich eine Tangente mit nahezu konstantem Anstieg  $K_{cp}$  bis zum Bruch, wie in Bild 4.14 skizziert. Dies belegen zahlreiche Versuchsergebnisse mit Umschnürungen aus Kohle- oder Glasfasern ([110, 149, 210, 252]). Ausgewählte Ergebnisse zeigen Bild 2.19b und Bild 3.16c.

Allerdings ist  $K_{cp}$  für ein und denselben Beton verschieden, je nachdem, ob weniger oder mehr Material für die Umschnürung aufgewendet wird. Weiterhin zeigen die Versuche, dass  $K_{cp}$  sich auch unterscheidet zwischen Prüfkörpern mit gleichem Umschnürungsmodul  $C$ ,

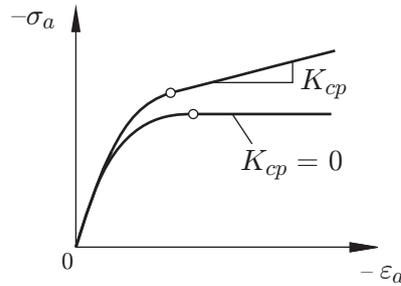


Bild 4.14: Plastische Tangente prinzipiell

aber verschiedenen Betonfestigkeiten. Es ist also notwendig, den Einfluss, sowohl von  $C$  als auch von  $f_{c0}$ , auf die plastische Tangente zu erfassen.

Zu diesem Zweck wurden sieben Serien von Druckversuchen aus der Literatur und eigene Versuche analysiert. Die Quellen sind in Tabelle 4.1 und als Legende in den Grafiken der Daten angegeben (Bild 4.15, Bild 4.17).

In all diesen Versuchen war das Material der Umschnürungen überwiegend elastisch. Variiert wurde entweder die Betonfestigkeit bei gleicher Umschnürung oder die Menge der Umschnürung bei gleicher Betonfestigkeit. Alle Ergebnisse zeigen eine ausgeprägte plastische Tangente. Bild 4.15 zeigt die Werte für die plastische Tangente in den Versuchen bei gegebenen Umschnürungsmoduln.

Die Auswertung der Daten deutet auf einen systematischen Einfluss von  $C$  und  $f_{c0}$  auf  $K_{cp}$ . Dafür sollen geeignete Beziehungen gefunden und für das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons nutzbar gemacht werden. Zu diesem Zweck wird eine nichtlineare Regressionsanalyse in zwei Stufen durchgeführt: In der ersten Stufe wird zunächst eine Funktion  $K_{cp}(C)$  gewählt. Für diese Funktion wird der Betrag der enthaltenen Koeffizienten  $a_i$  per Regressionsanalyse für verschiedene Betonfestigkeiten bestimmt. Für die Koeffizienten werden in der zweiten Stufe geeignete Funktionen  $a_i(f_{c0})$  gewählt, für die wieder eine Regression erfolgt. Die somit berechneten Konstanten werden als typisch angenommen für das Verhalten des Betons im Bereich der genutzten Parameter. In den Ausgleichsrechnungen wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate angewendet. Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, wird die Betonfestigkeit  $f_{c0}$  in den Gleichungen der Koeffizienten mit ihrem Betrag eingesetzt.

Quelle	$f_{c0,cyl}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$C$ [N/mm <sup>2</sup> ]
[252] Xiao, Y. und Wu. H.; (2000)	55.2	1047
	43.8	523 – 1570
[210] Shahawy, M. et al. (2000)	49.0	542 – 2169
	19.4	542 – 2711
[110] Karabinis, A. I. und Rousakis, T. C.; (2002)	38.5	281 – 842
	35.7	
[149] Mirmiran, A. und Shahawy, M.; (1997)	32.0	635 – 1603

Tabelle 4.1: Literaturquellen mit Parameterbereichen für Regression  $K_{cp}$

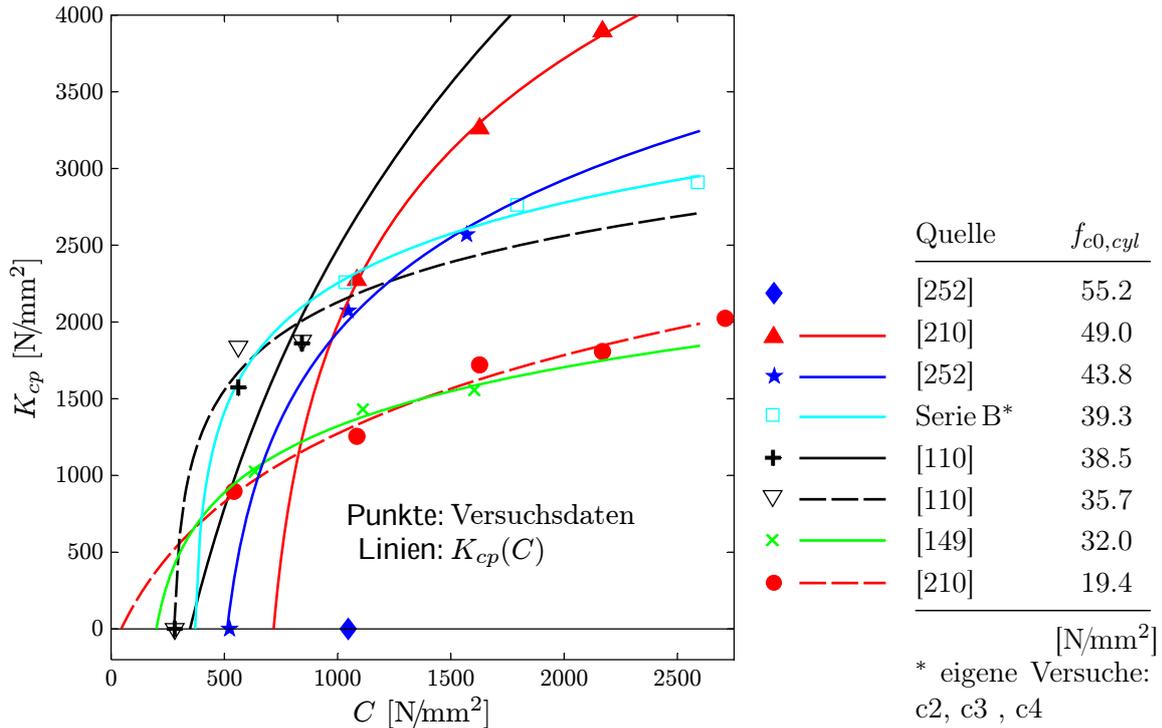


Bild 4.15: Versuchsdaten und Regressionsanalyse plastischer Anstieg

Die gewählte Funktion für die plastische Tangente ist:

$$K_{cp}(C) = 1 \cdot 10^6 [(C - a_1)^{a_2} - (C_0 - a_1)^{a_2}] . \tag{4.18}$$

Der Graph dieser Potenzfunktion ist in Bild 4.16 dargestellt. Sie enthält die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  sowie den Term  $C_0$ , die ihrerseits Funktionen von  $f_{c0}$  sind. Das Minimum der Funktion liegt bei  $C = a_1$ .

$C_0$  ist die rechte Nullstelle von (4.18), also derjenige Umschnürungsmodul, bei dem sich exakt  $K_{cp} = 0$  einstellen würde. Die entsprechende axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve ist in Bild 4.14 skizziert. Nur wenige Versuchsergebnisse sind für diesen Fall vorhanden. Bild 4.17 zeigt die verfügbaren Daten von  $C_0$  als Punkte. Gleichwohl lässt sich ein eindeutiger Zusammenhang mit der gewählten Funktion

$$C_0 = b |f_{c0}|^3 \quad \text{mit: } b = 0.0061 \tag{4.19}$$

herstellen, deren konstanter Koeffizient  $b$  per Regressionsanalyse gefunden wird. Der Graph von (4.19) ist in Bild 4.17 geplottet.

Die Kurve  $C_0(f_{c0})$  in Bild 4.17 enthält eine wichtige Information: Die Betonfestigkeit beeinflusst den mindestens erforderlichen Umschnürungsmodul, der gewährleistet, dass die Spannungs-Dehnungs-Kurve nach Überschreiten von  $\varepsilon_{c0}$  weiter ansteigt; Höher feste Betone erfordern dazu mehr Umschnürung; Bei Beton mit geringerer Festigkeit ist weniger Umschnürung dafür ausreichend. Diese Folgerung korrespondiert mit der Tatsache, dass bei Beton höherer Festigkeit die Querdehnung geringer ist und somit auch der Querdruck bei Erreichen von  $f_{c0}$ .

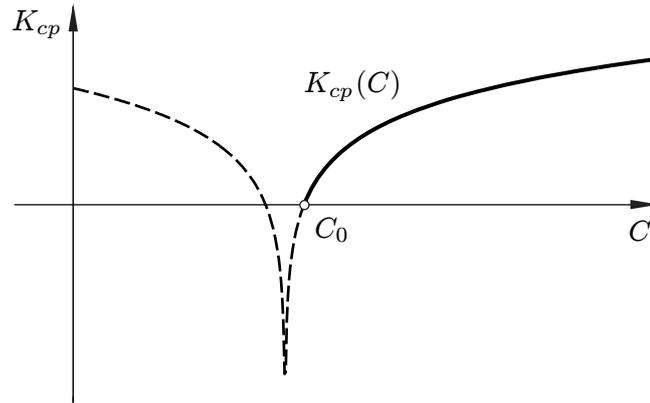


Bild 4.16: Graph der gewählten Funktion  $K_{cp}(C)$

In der zweiten Stufe der Regressionsanalyse werden die folgenden Funktionen für  $a_1(f_{c0})$  und  $a_2(f_{c0})$  gewählt und ihre konstanten Koeffizienten bestimmt:

$$a_1 = 28.83 |f_{c0}| - 784.25 \quad (4.20)$$

$$a_2 = 4.34 \cdot 10^{-7} |f_{c0}|^3 - 2.07 \cdot 10^{-5} f_{c0}^2 - 7.70 \cdot 10^{-5} |f_{c0}| + 0.014205 \quad (4.21)$$

Einheiten:  $a_2[-]$ ,  $f_{c0}[\text{N/mm}^2]$ .

Der Koeffizient  $a_1$  hat die Einheit von  $f_{c0}$ . Der Koeffizient  $a_2$  ist ohne Einheit, jedoch muss  $f_{c0}$  in  $\text{N/mm}^2$  eingesetzt werden. Bild 4.15 zeigt die Kurven  $K_{cp}(C)$  nach (4.18), die sich aus der Anwendung der Koeffizienten auf die Parameter der Versuchsdaten ergeben.

Die gefundenen Funktionen und ihre Koeffizienten beschreiben die Eigenschaften des Betons, in Abhängigkeit eines einzigen Materialparameters des Betons:  $f_{c0}$ . Jetzt kann  $K_{cp}$  auch für andere Betonfestigkeiten und Umschnürungsmoduln berechnet werden. An Bild 4.18 veranschaulicht eine Parameterstudie den Einfluss von  $C$  und  $f_{c0}$ . Gezeigt sind die Kurven nach (4.18), für Betonfestigkeiten von  $30 \text{ N/mm}^2$  bis  $55 \text{ N/mm}^2$ , in Schritten von  $2.5 \text{ N/mm}^2$ . Bei geringen und mittleren Festigkeiten, hat  $C$  offenbar weniger Einfluss auf die plastische Tangente, als bei höherer Festigkeit  $f_{c0}$ .

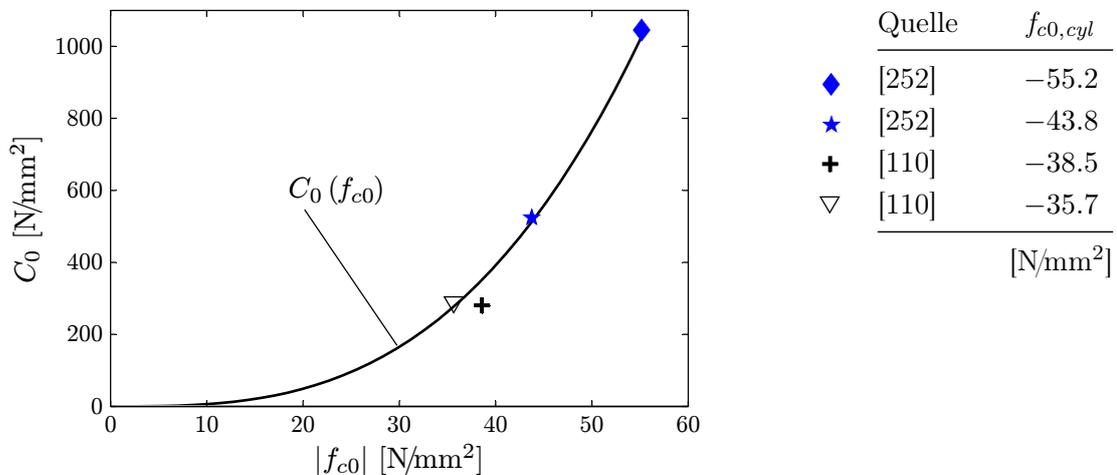


Bild 4.17: Versuchsdaten und Regressionsanalyse  $C_0$

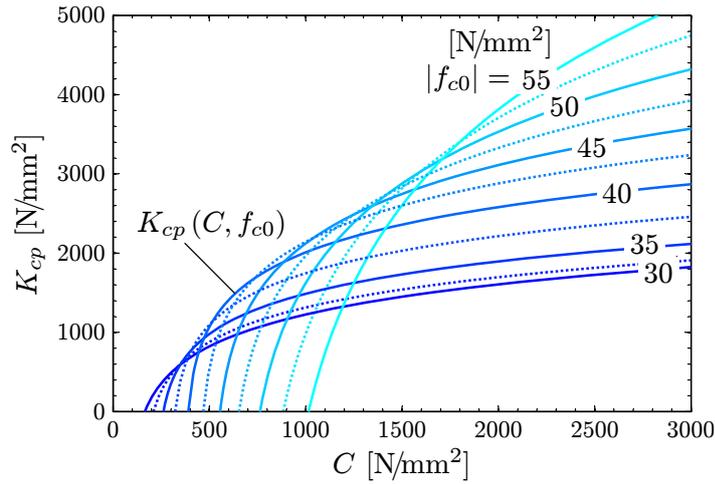


Bild 4.18: Parameterstudie für  $K_{cp}(C, f_{c0})$

### 4.2.5 Übergangspunkt

Den Übergangspunkt vom ersten Teil der Spannungs-Dehnungs Kurve zur plastischen Tangente zeigt (Bild 4.19), in der mit (4.13c) zu  $\varepsilon_{c0}$  normierten Form der Spannungs-Dehnungs-Beziehung  $\sigma_a(\eta)$ .

Im Bereich der plastischen Tangente wird die Normierung ohne Streckfaktor fortgesetzt mit:

$$\eta_{cp}(\varepsilon_a) = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{c0}}. \quad (4.22)$$

Nach Einsetzen von (4.22) in  $K_{cpN} = \Delta\sigma_a / \Delta\eta$  und Vereinfachen mit  $\Delta\sigma_a / \Delta\varepsilon_a = K_{cp}$ , ergibt sich der Anstieg an die normierte plastische Tangente zu

$$K_{cpN} = K_{cp} \varepsilon_{c0}. \quad (4.23)$$

Die Stelle des Übergangs bei  $\eta_K$  wird ermittelt durch Gleichsetzen von  $K_{cpN}$  mit der ersten Ableitung von (4.13a)

$$\frac{d\sigma_a(\eta)}{d\eta} = k_S f_{c0} \frac{k - 2\eta - \eta^2(k - 2)}{(1 + (k - 2)\eta)^2}. \quad (4.24)$$

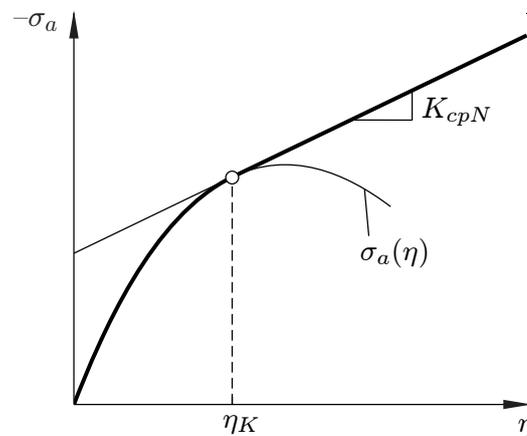
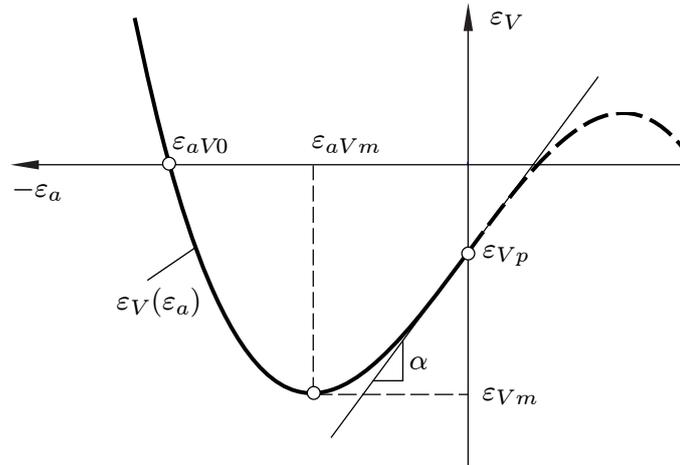


Bild 4.19: Übergangspunkt

Bild 4.20: Funktion  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$ 

Die Koordinate des Übergangspunktes  $\eta_K$  ergibt sich aus der Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$0 = \frac{d\sigma_a(\eta)}{d\eta} - K_{cpN}. \quad (4.25)$$

Hierzu kann z. B. das NEWTON'sche Iterationsverfahren genutzt werden. Die axiale Dehnung am Übergangspunkt ist nach Umstellen von (4.13c):

$$\varepsilon_{aK} = \eta_K k_S \varepsilon_{c0}. \quad (4.26)$$

#### 4.2.6 Funktion für Volumendehnung

Für das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons wird die radiale Dehnung  $\varepsilon_r$  benötigt, um die Interaktion mit der Umschnürung erfassen zu können. An Stelle einer Funktion  $\varepsilon_r(\varepsilon_a)$  soll aber eine Funktion der Volumendehnung  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  dafür genutzt werden, denn gemäß (2.2) ist  $\varepsilon_r$  in  $\varepsilon_V$  enthalten. Vorteile im Vergleich zur Funktion  $\varepsilon_r(\varepsilon_a)$  sind: Der Kurvenverlauf enthält aussagekräftige Informationen zum Zustand des Betons. Außerdem hat die Kurve  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  charakteristische Punkte, wie den Nulldurchgang der Volumendehnung und das Minimum der Volumendehnung  $\varepsilon_{Vm}$ , die für eine Modellbildung günstig sind. So wird in (4.14) bereits der Nulldurchgang, abhängig von der radialen Spannung  $\sigma_r$ , verwendet. Die Funktion  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  muss also den Einfluss von  $\sigma_r$  berücksichtigen.

Bild 4.20 zeigt den Graph einer Polynomfunktion 3. Grades, die für das Modell gewählt wird. Die Funktionsgleichung ist

$$\varepsilon_V(\varepsilon_a) = c_1 \varepsilon_a^3 + \alpha \varepsilon_a + \varepsilon_{Vp}. \quad (4.27)$$

Da das quadratische Glied fehlt, enthält sie nur zwei unbekannte Koeffizienten,  $c_1$  und  $\alpha$ , sowie ein konstantes Glied  $\varepsilon_{Vp}$ . Diese Unbekannten werden mit den folgenden Randbedingungen bestimmt.

- (1) Der Anstieg der Tangente  $\alpha$  im Wendepunkt der Kurve auf der Ordinatenachse entspricht dem Anstieg mit linear-elastischem Materialverhalten:

$$\alpha = \left( \frac{d\varepsilon_V}{d\varepsilon_a} \right)_{WP} = 1 - 2\nu. \quad (4.28)$$

- (2) Der Schnittpunkt der Kurve mit der Ordinatenachse markiert den Vorspannzustand näherungsweise. Die Volumendehnung im Vorspannzustand ist

$$\varepsilon_{Vp} = \varepsilon_{ap} + 2\varepsilon_{rp}. \quad (4.29)$$

Vereinfachend wird auf eine Verschiebung der Kurve um den Betrag  $\varepsilon_{ap}$  parallel zur Abszisse verzichtet.

- (3) Beim Nulldurchgang der Volumendehnung,  $\varepsilon_V = 0$ , ist die axiale Dehnung  $\varepsilon_{aV0}$ . Dieser charakteristische Punkt wird abhängig von  $\sigma_r$  empirisch bestimmt.

Die Volumendehnung im Vorspannzustand  $\varepsilon_{Vp}$  kann an Hand der linear-elastischen Lösung ermittelt werden. Exakte Gleichungen für  $\varepsilon_{ap}$  und  $\varepsilon_{rp}$  des linear-elastischen, umschnürten Zylinders sind in Anhang B.7 angegeben. In Anbetracht der, mit dem vorgestellten Verfahren erzielbaren Genauigkeit, scheint es jedoch sinnvoll, die Gleichungen mit vereinfachten Annahmen nach Anhang B.8 zu nutzen. Demnach gilt bei verhinderter Längsausdehnung im Vorspannzustand:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ap} &= 0 \\ \varepsilon_{rp,\varepsilon 0} &= \frac{\sigma_{rp} (1 - \nu - 2\nu^2)}{E_{c0}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Bei freier Längsausdehnung im Vorspannzustand gilt:

$$\varepsilon_{ap} = -\frac{2\sigma_{rp}\nu}{E_{c0}} \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{rp,\sigma 0} = \frac{\sigma_{rp} (1 - \nu)}{E_{c0}}. \quad (4.32)$$

Als Grundlage für die empirische Bestimmung des Nulldurchgangs gemäß Randbedingung (3), dienen die umfangreichen Ergebnisse zur Volumendehnung in [97]. Ein Auszug daraus ist in Bild 2.20a auf Seite 50 gezeigt. Der Querdruck wurde während der Belastung konstant gehalten. Verwendet wurden drei verschiedene Betone mit Wasser-Zement-Werten (w/z) von 0.40, 0.55 und 0.75. Die entsprechenden Werte  $f_{c0,cyl}$  waren 21.2 N/mm<sup>2</sup>, 43.5 N/mm<sup>2</sup> und 65.7 N/mm<sup>2</sup>.

Bild 4.21 zeigt Stützpunkte des Nulldurchgangs, die an Hand der Versuchskurven in [97] ermittelt wurden. Die Daten werden in einer, für die Modellbildung günstigen, normierten Form dargestellt. Insgesamt sind 24 Versuche mit verschiedenen Querdrücken, zuzüglich Versuche ohne Querdruck für jeden Beton, enthalten. Die Normierung erfolgt zur axialen Dehnung beim Nulldurchgang ohne Querdruck in der Form

$$k_{aV0} = \frac{\varepsilon_{aV0}(\sigma_r)}{\varepsilon_{aV0}(\sigma_r=0)} \quad (4.33)$$

und zur Betonfestigkeit in der Form

$$k_r = \frac{\sigma_r}{f_{c0}}. \quad (4.34)$$

Für die Beziehung  $k_{aV0}(k_r)$  wird folgende lineare Funktion gewählt

$$\frac{\varepsilon_{aV0}}{\varepsilon_{aV0}(\sigma_r=0)} = c_2 \frac{\sigma_r}{f_{c0}} + 1 \quad \text{mit: } c_2 = 23.07. \quad (4.35)$$

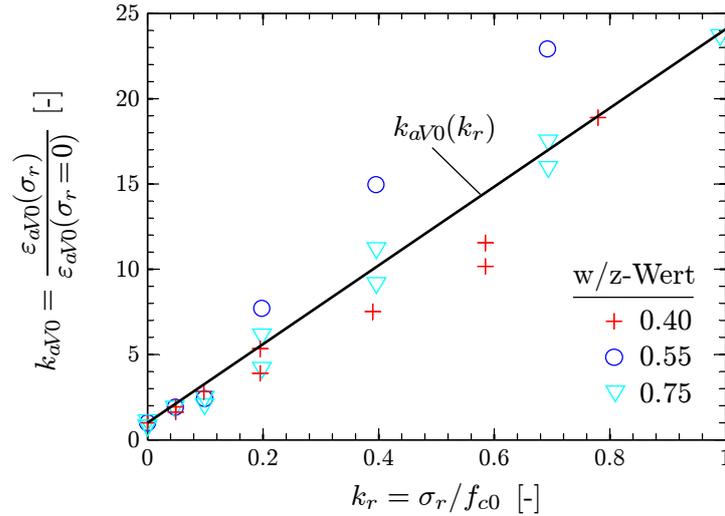


Bild 4.21: Nulldurchgang der Volumendehnung, Versuchsdaten nach [97] und Funktion

Der Koeffizient  $c_2$  wird per linearer Regression berechnet. In Bild 4.21 ist die Funktion mit den Versuchsdaten enthalten. Der offensichtliche Einfluss des  $w/z$ -Wertes wird außer Acht gelassen.

Mit (4.35) wird die dritte Randbedingung erfüllt, wenn ein Wert für  $\varepsilon_{aV0}(\sigma_r=0)$  bekannt ist. Nach [164] ist  $\varepsilon_{aV0}(\sigma_r=0)$  für Normalbeton näherungsweise 90 % von  $\varepsilon_{c0}$ .

Jetzt kann Randbedingung (3) genutzt werden, um den noch unbekanntem Koeffizienten  $c_1$  in (4.27) zu berechnen. Aus  $\varepsilon_V(\varepsilon_{aV0}) = 0$  folgt:

$$c_1 = \frac{-\alpha \varepsilon_{aV0} - \varepsilon_{Vp}}{\varepsilon_{aV0}^3}. \quad (4.36)$$

Gleichung (4.27) ist damit vollständig bestimmt. Die Funktion der Volumendehnung  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  kann für einen konstanten Querdruck berechnet werden. Umstellen von (2.2) liefert die zugehörige radiale Dehnung

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_V - \varepsilon_a). \quad (4.37)$$

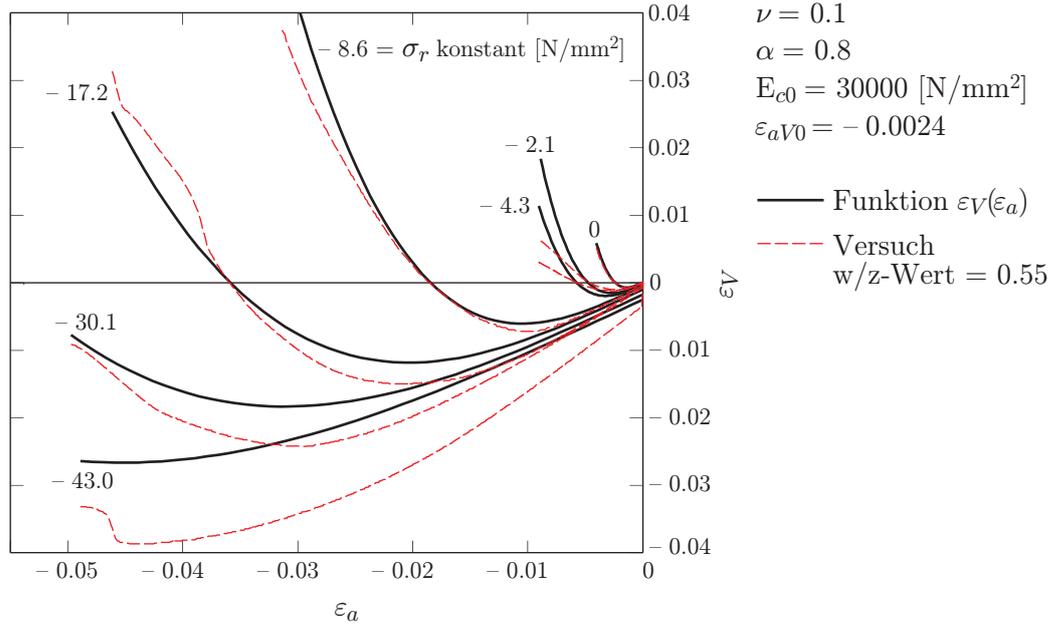
Bild 4.22 vergleicht Versuchsergebnisse aus [97] mit Kurven, die nach dem vorgestellten Verfahren berechnet wurden.

Nachdem die Funktion  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  bekannt ist, kann der in (4.14) benötigte Wert  $\varepsilon_{aVm}$  analytisch bestimmt werden. Dies erfolgt durch finden einer der beiden Nullstellen, der ersten Ableitung der kubischen Gleichung (4.27):

$$\frac{d\varepsilon_V(\varepsilon_a)}{d\varepsilon_a} = 3c_1\varepsilon_a^2 + \alpha = 0. \quad (4.38)$$

Durch Anwendung der Lösungsformel der quadratischen Gleichung auf (4.38) ergibt sich die gesuchte Nullstelle und damit die axiale Dehnung beim Minimum der Volumendehnung zu

$$\varepsilon_{aVm} = -\sqrt{\frac{\alpha \varepsilon_{aV0}^3}{3(\alpha \varepsilon_{aV0} + \varepsilon_{Vp})}}. \quad (4.39)$$


 Bild 4.22: Funktion  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  und Versuchsergebnisse aus [97]

#### 4.2.7 Lösung für unbekanntem Querdruck

Im bisher entwickelten Formelapparat wurde angenommen, der Querdruck  $\sigma_r$  sei bekannt. Tatsächlich aber, muss er für jede Last  $\varepsilon_a$  erst bestimmt werden. Das gleiche gilt für die radiale Dehnung  $\varepsilon_r$ . Dazu werden im Folgenden zwei unabhängige Ansätze für die  $\varepsilon_r$ - $\sigma_r$  Beziehung miteinander verknüpft. Das sind: die von  $\sigma_r$  abhängige Funktion der Volumendehnung und die Wechselwirkung mit der Umschnürung. Nur mit einem der beiden Ansätze wäre die Zahl der Unbekannten zu groß. Jedoch, beide Ansätze gemeinsam ermöglichen es,  $\sigma_r$  und  $\varepsilon_r$  iterativ zu berechnen.

In Abschnitt 4.2.6 wird  $\varepsilon_V(\varepsilon_a)$  in (4.27) angegeben. Darin geht  $\sigma_r$  als Konstante zur Bestimmung der Koeffizienten ein. Ist jedoch  $\sigma_r$  variabel und  $\varepsilon_a$  vorgegeben, so wird (4.27) zu  $\varepsilon_V(\sigma_r)$ . Einsetzen in (4.37) führt zu einer ersten Gleichung für die unbekannte radiale Dehnung

$$\varepsilon_{r1}(\sigma_r) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_V(\sigma_r) - \varepsilon_a \right). \quad (4.40)$$

Eine zweite unabhängige Gleichung für  $\varepsilon_r$  kann indirekt aus dem Spannungs-Dehnungsmodell der Umschnürung gewonnen werden: Wenn jedem Wert  $\varepsilon_t$  eindeutig ein Wert  $\sigma_t$  zugeordnet ist, kann dieses als  $\varepsilon_t(\sigma_t)$  geschrieben werden. Dieser Term steht nicht zwangsläufig für eine geschlossene Funktion, er kann auch eine Wertetabelle sein, die z. B. eine gemessene Kurve repräsentiert. Da  $\varepsilon_r = \varepsilon_t$  gilt und mit (2.12)  $\sigma_t$  durch  $\sigma_r$  ersetzt werden kann, entsteht

$$\varepsilon_{r2}(\sigma_r). \quad (4.41)$$

Materialeigenschaften und Auslastung der Umschnürung beeinflussen  $\varepsilon_{r2}$ .

Die gesuchte radiale Spannung ist derjenige Wert  $\sigma_r$ , bei dem gilt:  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$ . Das gesuchte  $\sigma_r$  ist also die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$g(\sigma_r) = \varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2} = 0. \quad (4.42)$$

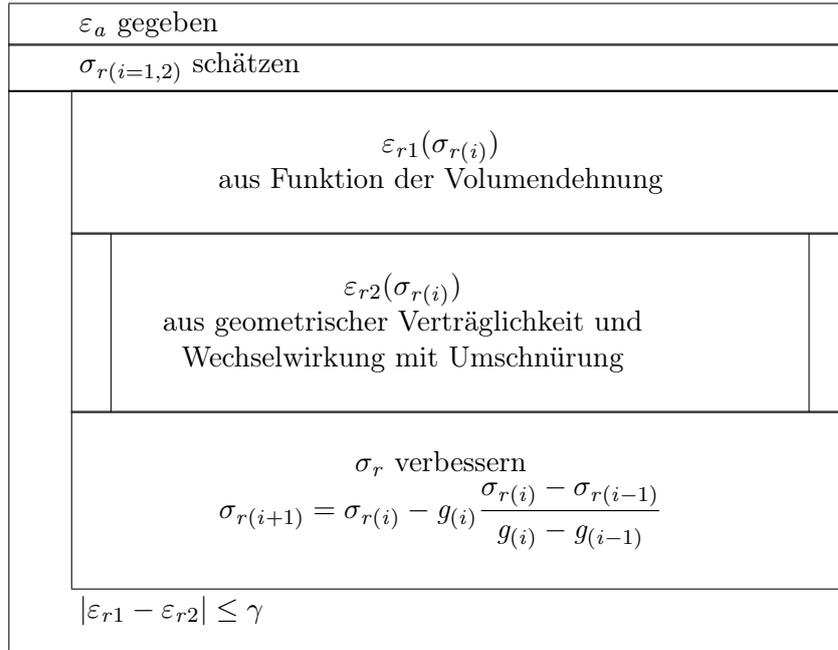


Bild 4.23: Berechnungsablauf radiale Spannung und Dehnung mit Sekantenverfahren

Für diese Problemstellung stehen numerische Lösungsverfahren zur Verfügung. Anwendbar ist z. B. das Sekantenverfahren. Dabei ist die Einführung einer Toleranz  $\gamma$  im Abbruchkriterium  $|\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}| \leq \gamma$  sinnvoll. Bild 4.23 zeigt dafür den Ablauf der iterativen Berechnung.

Innerhalb dieses Ablaufes wird  $\varepsilon_{r2}$  vom Spannungs-Modell der Umschnürung abgefragt. Dieser Vorgang ist in Bild 4.7 dargestellt, als wechselseitige Pfeile zwischen den Spannungs-Dehnungs-Modellen von Beton und Umschnürung.

#### 4.2.8 Berechnungsablauf gesamtes Spannungs-Dehnungs-Modell

Eine Übersicht des gesamten Berechnungsablaufes für das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons zeigt Bild 4.24. Die entsprechend kommentierte axiale Spannungs-Dehnungs-Kurve ist in Bild 4.25 dargestellt.

Die axiale Dehnung am Übergangspunkt  $\varepsilon_{aK}$  zwischen Teil 1 und Teil 2 der Kurve ist eine Variable und wird für jede Laststufe  $\varepsilon_a$  neu bestimmt. Bei nichtlinearem Material der Umschnürung wird jeweils die zugehörige plastische Tangente  $K_{cp}(C)$  genutzt. Die dafür notwendige Modifikation des Umschnürungsmoduls wird in Abschnitt 4.3 beschrieben.

In Teil 1 der Kurve folgt  $\sigma_a$  aus (4.13). Sobald  $\varepsilon_a$  einmal  $\varepsilon_{aK}$  überschreitet, wird der vorhergehende Übergangspunkt als endgültiger Übergangspunkt gesetzt mit der Koordinate  $[\sigma_{aKe}, \varepsilon_{aKe}]$ . Diese Annahme ist eine Näherungslösung. Für eine genauere Lösung müsste iteriert werden, bis im Rahmen der gewählten Toleranz gilt  $\varepsilon_a = \varepsilon_{aKe}$ . Darauf wird hier verzichtet.

Im Teil 2 der Kurve kann  $\sigma_a$  aus den Koordinaten des endgültigen Übergangspunktes und dem Anstieg  $K_{cp}$  errechnet werden:

$$\sigma_a(\varepsilon_a) = \sigma_{aKe} + K_{cp}(\varepsilon_a - \varepsilon_{aKe}) . \tag{4.43}$$

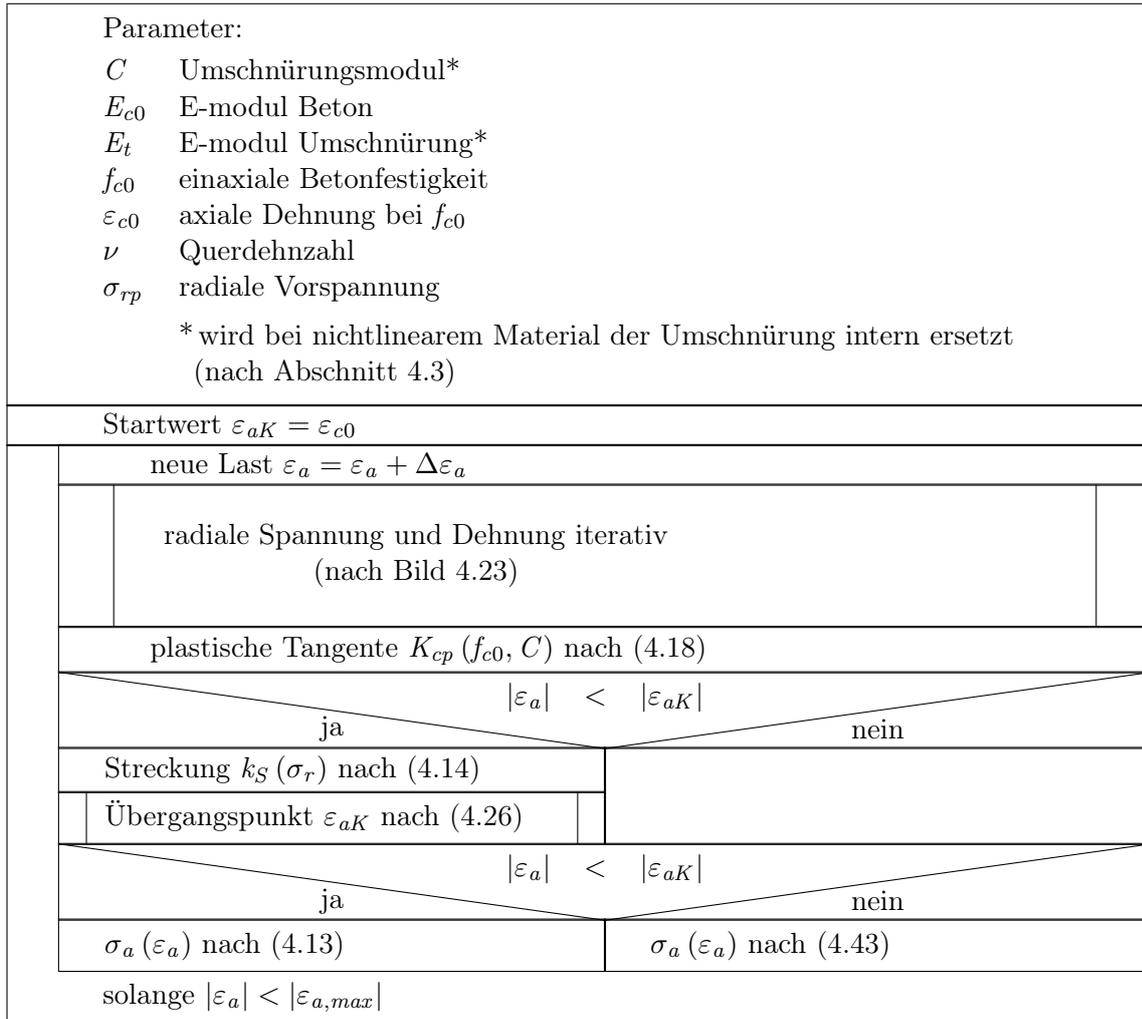


Bild 4.24: Struktogramm der gesamten Spannungs-Dehnungs-Berechnung

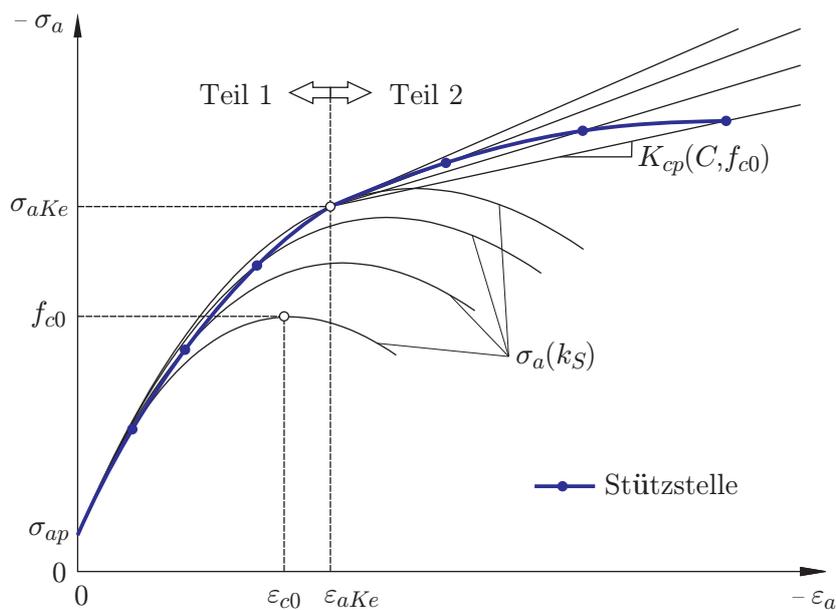


Bild 4.25: Aufbau der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve

Der zweite Teil der Kurve besteht also aus Stützstellen, die aus einer Schar von Geraden mit verschiedenem Anstieg  $K_{cp}$  gebildet werden. All diese Geraden gehen durch den endgültigen Übergangspunkt. Ist die Umschnürung linear-elastisch, dann bleibt  $K_{cp}$  konstant.

Die Kurve endet, sobald eine gegebene maximale Dehnung  $\varepsilon_{a,max}$  erreicht wird oder ein Abbruchkriterium in den Spannungs-Dehnungs-Modellen von Umschnürung oder Beton erfüllt wird.

### 4.3 Schnittstelle zum Modell der Umschnürung

Die Schnittstelle zwischen den Spannungs-Dehnungs-Modellen des Betons und der Umschnürung ist in Bild 4.7 auf Seite 98 skizziert. Für die Parameter  $C$ ,  $E_t$  und die variable tangential Spannung  $\sigma_t$  ist vermerkt, dass sie bei nichtlinearem Material der Umschnürung intern ersetzt werden. Intern bedeutet: abhängig von der Last und dem Material der Umschnürung. In diesem Abschnitt wird dieser Sachverhalt erläutert.

#### 4.3.1 Linear-elastische Umschnürung

Zunächst wird die Standardsituation für linear-elastische Umschnürung beschrieben.

Bei gegebener radialer Spannung  $\sigma_r$  wird die tangential Spannung in der Umschnürung  $\sigma_t$  aus (2.12) berechnet. Dem liegt aber die in Bild 4.26a dargestellte Annahme zu Grunde, dass  $\sigma_t$  überall im umschnürenden Querschnitt gleich ist. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass  $\sigma_t$  direkt von der gesamten tangentialen Dehnung der Umschnürung auf dem Zylinderumfang  $\varepsilon_t$  abhängt. Diese Dehnung hat einen Anteil aus Vordehnung  $\varepsilon_{tp}$  und einen Anteil infolge Interaktion mit dem Zylinder  $\varepsilon_{tr}$ :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{tp} + \varepsilon_{tr} . \tag{4.44}$$

Die Verträglichkeitsbedingung (2.9) wird deshalb zu

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{tr} . \tag{4.45}$$

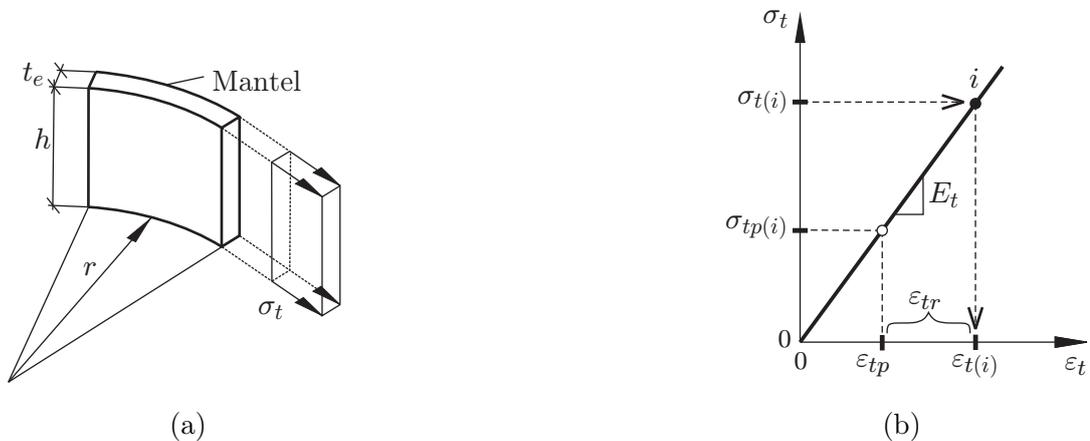


Bild 4.26: Linear-elastische Umschnürung: (a) Annahme für  $\sigma_t$  und (b) Modell

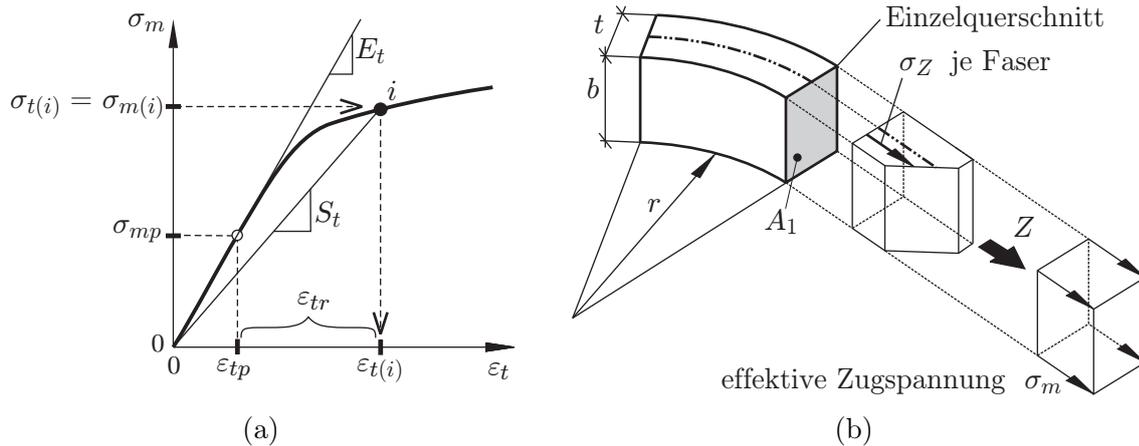


Bild 4.27: Elasto-plastische Umschnürung: (a) effektive Spannungs-Dehnungs-Kurve und (b) effektive Zugspannung

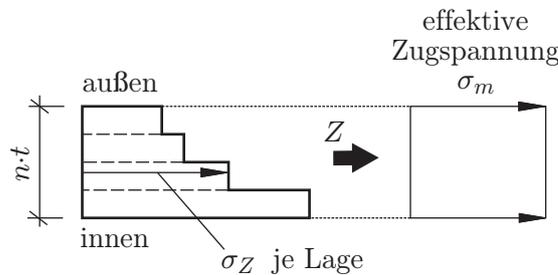


Bild 4.28: Effektive Zugspannung bei unterschiedlich ausgelasteten Lagen

Wie Bild 4.26b zeigt, kann aus gegebenen  $\sigma_{t(i)}$  mit dem Elastizitätsmodul  $E_t$  direkt  $\varepsilon_{t(i)}$  berechnet werden.  $\sigma_t$  und  $\varepsilon_t$  sind gleich der einaxialen Spannung und Dehnung im Zugversuch  $\sigma_Z$  und  $\varepsilon_Z$ .

Die gesuchte radiale Dehnung nach dem Vorspannen ergibt sich nach Einsetzen von (4.44) in (4.45) zu:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{t(i)} - \varepsilon_{tp} \cdot \sigma_m \quad (4.46)$$

Für linear-elastische Umschnürung ist keine Anpassung der Schnittstelle notwendig.

### 4.3.2 Elasto-plastische Umschnürung und effektive Zugspannung

Hat die Umschnürung eine elasto-plastische Spannungs-Dehnungs-Kurve, wie in Bild 4.27a gezeigt, dann wird in zwei Punkten von den bisherigen Annahmen abgewichen:

- (1) Der Lastpunkt  $i$  auf der Spannungs-Dehnungs-Kurve, ist nicht mehr mit  $E_t$  verknüpft. Deshalb ist der Umschnürungsmodul  $C$  (2.19) nicht mehr für die Steuerung der Funktionen im Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons tauglich.
- (2) Wenn die Umschnürung bei der Montage um den Zylinder gebogen wird, sind die Spannungen im umschnürenden Querschnitt nicht mehr gleich. Sobald das Material plastiziert, wird die Spannungsverteilung unsymmetrisch, wie in Bild 4.27b dargestellt. Eine entsprechende Dehnungsverteilung für eine einlagige Umschnürung ist in Bild 2.23d

## 4 Modellbildung

auf Seite 56 gegeben. Die umschnürende Kraft  $Z$  kann nicht mehr durch einen Wert  $\sigma_t$  generiert werden. Die Zuordnung zur tangentialen Dehnung ist nicht möglich.

Mit nachfolgenden Anpassungen kann das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons jedoch unverändert genutzt werden. An Stelle von  $C$  wird der effektive Umschnürungsmodul

$$C_e = \frac{S_t t_e}{r} \quad (4.47)$$

verwendet. Darin ist  $S_t$  der Sekantenmodul der effektiven Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Umschnürung im aktuellen Lastpunkt, wie in Bild 4.27a dargestellt. In dieser Beziehung ist  $\sigma_m$  eine gleichmäßige Spannung in tangentialer Richtung, die die Zugkraft  $Z$  in der Umschnürung abbildet; sie soll als effektive Zugspannung bezeichnet werden:

$$\sigma_m = \frac{Z}{A_1}. \quad (4.48)$$

Abbildung 4.27b macht diesen Zusammenhang anschaulich.

Die effektive Zugspannung ist gleich im Einzelquerschnitt  $A_1$  und in einem rechnerischen Mantel der effektiven Dicke  $t_e$ , was in Abschnitt 2.5.5 begründet wurde. Sie muss jedoch am Einzelquerschnitt berechnet werden, da die tatsächliche Dicke  $t$  die Dehnungsverteilung beeinflusst. Die Zugkraft wird mit

$$Z = \int \sigma_Z(\varepsilon_Z) dA_1 \quad (4.49)$$

berechnet. Darin wird ein einaxiales Materialgesetz genutzt, wie z. B. für Stahl in Bild 2.14b gezeigt. Voraussetzung ist eine geometrische Verknüpfung von  $\varepsilon_Z$  mit  $\varepsilon_t$ .

Mit der  $\sigma_m$ - $\varepsilon_t$  Kurve kann das gesuchte  $\varepsilon_r$  auch für elasto-plastische Umschnürung nach (4.46) berechnet werden.

Das Konzept der effektiven Zugspannung könnte z. B. auch auf mehrlagige Umschnürung aus FVK angewendet werden. Wie in Bild 4.28 skizziert, offenbaren Versuche, dass die Lagen unterschiedlich ausgelastet werden. Mit der vorgestellten Methode könnte auch dieser Fall mit dem Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons dieser Arbeit untersucht werden.

### 4.3.3 Nichtlinear-elastische Umschnürung

Abbildung 4.29 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kurve eines nichtlinear-elastischen Materials mit den Bezeichnungen an der Schnittstelle zum Modell des Betons. Dieser Fall entspricht z. B. einer Umschnürung aus FVK, die sich mit steigender Last versteift.

Im Unterschied zu linear-elastischer Umschnürung (Abschnitt 4.3.3) muss lediglich der effektive Umschnürungsmodul (4.47) berücksichtigt werden. Auch hier gilt  $\varepsilon_t = \varepsilon_Z$ .

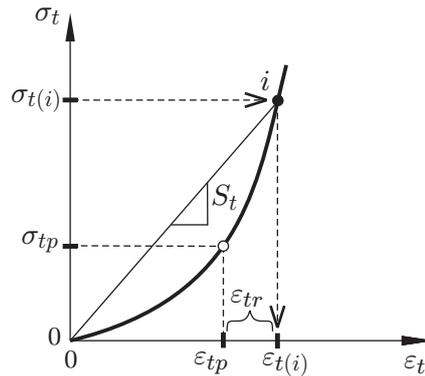


Bild 4.29: Anpassung für nichtlinear-elastische Umschnürung

## 4.4 Modelle für die zu untersuchenden Umschnürungen

### 4.4.1 Stahlband der Versuche

In den Versuchen wurden Stahlbänder mit 0.5 mm und 0.8 mm Dicke verwendet. Deren axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven,  $\sigma_Z$ - $\varepsilon_Z$ , sind in Bild 3.3 dargestellt. Bei der Montage am Zylinder werden die Bänder gebogen und teilweise vorgespannt. Abbildung 2.23 zeigt entsprechende Dehnungsverteilungen. Bei anschließender axialer Belastung wurde die tangentielle Dehnung  $\varepsilon_t$  mit Dehnmessstreifen auf der Bandoberfläche gemessen. Allein aus dieser Dehnung muss die tangentielle Spannung berechnet werden, von der die radiale Spannung des Betons  $\sigma_r$  direkt abhängt. Das Modell für die Umschnürung ist also mit entscheidend dafür, wie wirklichkeitsnah die Interaktion mit dem Beton erfasst wird.

Wie Bild 4.30 zeigt, dehnt sich die äußere Randfaser der Bänder bereits im Montagezustand plastisch, wenn vorgespannt wird. Die entsprechenden Werte der Dehnung, für verschiedene Versuchsparameter, sind auf der Kurve des einaxialen Zugversuchs markiert. Der Biegeanteil  $\varepsilon_B$  wird nach (2.13) berechnet. Die gesamte Randfaserdehnung  $\varepsilon_P + \varepsilon_B$  folgt aus (3.3). Tabelle 4.2 gibt zugehörige Werte für die Serien B bis D der Zylinderdruckversuche an. Der Zylinderradius ist immer 75 mm. Die Biegedehnung für die Bänder ist 3.32 ‰ für das 0.5 mm dicke Band und 5.31 ‰ für das 0.8 mm dicke Band. Der Elastizitätsmodul ist für beide Typen 187500 N/mm<sup>2</sup>.

Das erwartete Kraft-Dehnungs-Verhalten nach dem Montagezustand ist also nichtlinear, insbesondere bei den vorgespannten Bändern. Die Stahlbänder sind vom elasto-plastischen Typ. Die Schnittstelle zum Modell des Betons ist dafür in Abschnitt 4.3.2 beschrieben. Demnach muss die Kurve der effektiven Zugspannung  $\sigma_{m-\varepsilon_t}$  berechnet werden. Vordehnung  $\varepsilon_P$  und Biegedehnung  $\varepsilon_B$  sind dabei zu berücksichtigen.

Zu diesem Zweck wurden Berechnungen mit der Methode der finiten Elemente (FEM) ausgeführt, mit dem Programm Ansys11 [14]. Details zur Finite-Elemente-Berechnung (FE-Berechnung), wie Randbedingungen, Laststufen und ausgewählte Ergebnisse, sind in Anhang D gegeben. Im Folgenden werden nur die wesentlichen Punkte zusammengefasst.

Das FE-Modell ist in Bild 4.31 dargestellt. Die Symmetrie wird ausgenutzt. Der Viertelzylinder hat ein Volumenelement über die Höhe. An den Mantelknoten ist das Volumen-

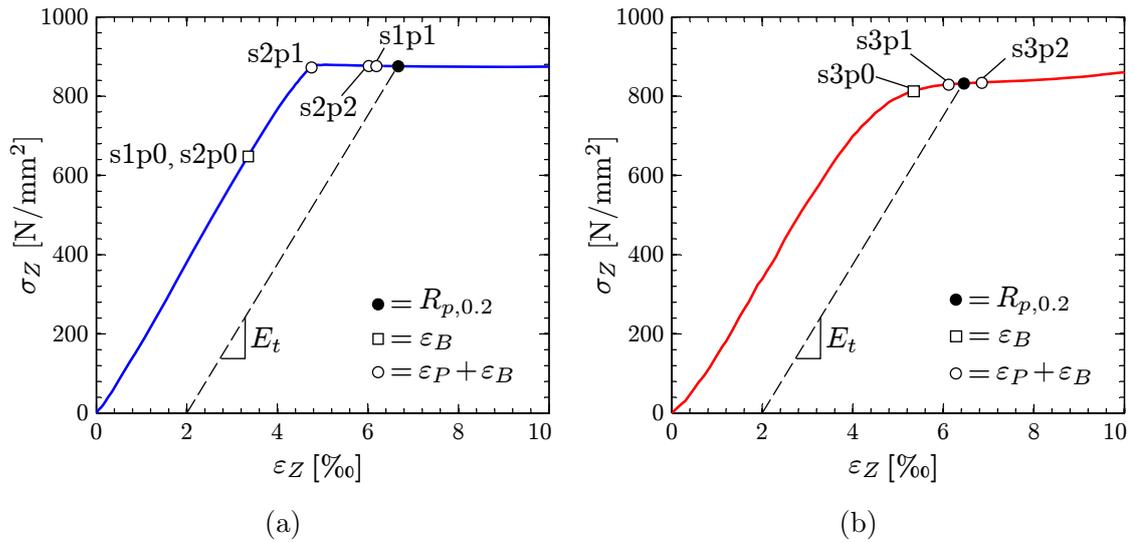


Bild 4.30: Äußere Randfaserdehnung im Vorspannzustand: (a)  $t=0.5$  mm, (b)  $t=0.8$  mm

$t \times b = A_1$ [mm × mm = mm <sup>2</sup> ]	Kennung	$Z_a$ [kN]	$\sigma_{tpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\varepsilon_P$ [%]	$\varepsilon_P + \varepsilon_B$ [%]	$\sigma_{mp}^*$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{rp}^*$ [N/mm <sup>2</sup> ]
$0.5 \times 12.7 = 6.35$	s1p0, s2p0	–	–	–	3.32	0	0
	s1p1	3.4	535	2.86	6.18		
	s2p1	1.7	268	1.43	4.75	262	–1.39
	s2p2	3.2	504	2.69	6.01	501	–2.65
$0.8 \times 19 = 15.2$	s3p0	–	–	–	5.31	0	0
	s3p1	2.3	151	0.81	6.12	146	–1.35
	s3p2	4.4	289	1.54	6.85	277	–2.55

\* berechnet mit FE-Modell

Tabelle 4.2: Vorspannzustand der Stahlbänder in Umschnürungen Serie B bis D

element mit umlaufenden Balkenelementen gekoppelt, die das Stahlband abbilden. Die gewählten Elementtypen sind: Solid 45 für den Zylinder und Beam 188 für das Band. Mit Beam 188 ist ein elasto-plastisches Materialgesetz anwendbar. Dafür wurden die Kurven des einaxialen Zugversuchs multilinear vereinfacht (Anhang D.1).

Das Volumenelement hat linear-elastische Materialeigenschaften. Ziel ist nicht Beton zu simulieren, sondern eine radiale Dehnung bei axialer Last zu generieren. Allein dafür wäre kein Zylindermodell nötig. Mit dem Zylindermodell jedoch wird auch der elastische Vorspannverlust einer gegebenen nominalen Vorspannung richtig erfasst.

Nach dem Vorspannen der Balkenelemente, mit den Parametern  $\varepsilon_B$  und  $\varepsilon_P$  (Tabelle 4.2), wird der Zylinder schrittweise mit einer axialen Verschiebung belastet. Daraus werden Zugkraft und Mittelfaserdehnung in einem Beam 188-Element ausgewertet. Sie ergeben mit (4.48) die gesuchte Kurve  $\sigma_m - \varepsilon_t$ .

In Anhang D.4 wird nachgewiesen, dass der Verlauf der  $\sigma_m - \varepsilon_t$  Kurve nach dem Montagezustand nicht von der Vorspannung abhängt. D. h. die Kurve ohne Vorspannung kann

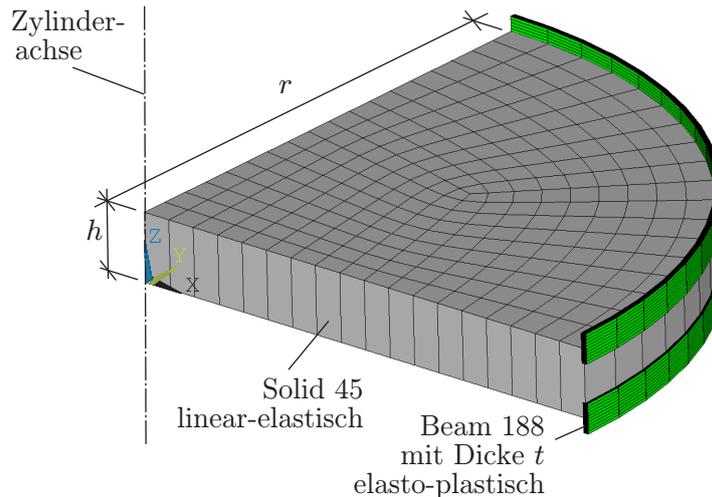


Bild 4.31: FE-Modell

auch für Vorspannung genutzt werden, wenn der Wert der effektiven Vorspannung  $\sigma_{mp}$  anderweitig berechnet wird.

Ergebnisse zeigt Bild 4.32, im Vergleich mit dem einaxialen Zugversuch, für die Banddicken 0.5 mm und 0.8 mm, beispielhaft ohne Vorspannung. In der Ansicht der gesamten Kurve bis zur Bruchdehnung, in Bild 4.32a und Bild 4.32b, scheinen die Unterschiede nicht relevant zu sein.

In den durchgeführten Druckversuchen sind die größten radialen Dehnungen aber zwischen 4 ‰ und 6 ‰. Die Ausschnitte der Kurve, in Bild 4.32c und Bild 4.32d, zeigen dafür deutliche Unterschiede zwischen  $\sigma_Z$  und  $\sigma_m$ . Wird  $\sigma_{m(i)}$  gegeben, wie in Bild 4.27a skizziert, so ist in diesem Bereich die tatsächliche Dehnung um 1 ‰ bis 2 ‰ größer als die mit der einaxialen Kurve berechneten Werte. Diese Abweichung ist nur wenig kleiner als  $\varepsilon_{c0}$  des Betons. Die genauere Modellbildung für die Stahlbänder ist also gerechtfertigt.

Deshalb dienen nach der vorgestellten Methode berechnete Kurven der effektiven Zugspannung als Modell der Umschnürung gemäß Abschnitt 4.3.2.

#### 4.4.2 Formgedächtnislegierung der Versuche

In Abschnitt 3.5 wurde das Materialverhalten der Formgedächtnislegierung Fe-Mn-Si-Cr untersucht. Ergebnisse daraus werden für Parameterstudien am vorgespannt umschnürten Zylinder genutzt.

Abbildung 3.26b zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kurve des Versuchs AS1, für Zuglast nachdem thermisch vorgespannt wurde. Die großen, überwiegend plastischen Dehnungen sind relativ zum Nullpunkt am Beginn der Vordehnung, deren Kurve in Bild 3.24 gezeigt ist. Ohne Unterkühlung war die Vorspannung  $204 \text{ N/mm}^2$  (siehe Tabelle 3.13 und Bild 3.25b-VI). Nach Unterkühlen verblieb eine Vorspannung von  $100 \text{ N/mm}^2$ . Der Anstieg der elastischen Wiederbelastung  $K_{Me}$  ist  $138000 \text{ N/mm}^2$ .

Die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Kurve AS1 wird, wie in Bild 4.33 dargestellt, als einaxiales Materialmodell für die Umschnürung genutzt. Ungleiche Spannungen über die Dicke der Umschnürung werden dabei nicht erfasst. Mit diesen Annahmen ist die in Ab-

#### 4 Modellbildung

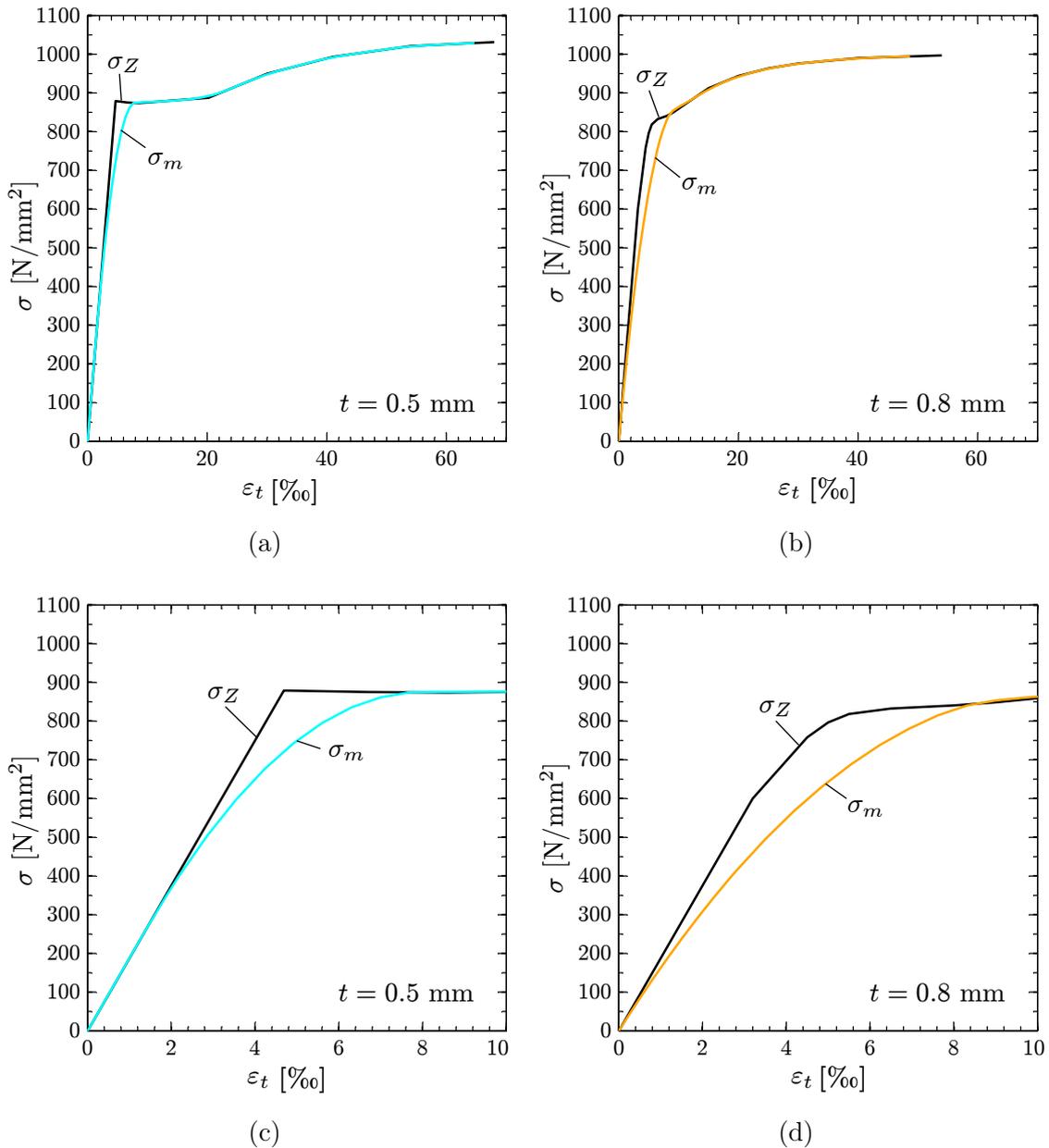


Bild 4.32: Spannung im Zugversuch einaxial und berechnete effektive Zugspannung  $\sigma_m$

schnitt 4.3.3 beschriebene Form der Schnittstelle zur Umschnürung nutzbar. Da keine Entlastung der Umschnürung betrachtet wird, wirkt diese wie nichtlinear-elastisch. Es ist also ausreichend den Sekantenmodul  $S_t$  zu berechnen.

In Bild 4.33 sind die Dehnungen im Vergleich zur Messung angepasst: Der Spannungs-Dehnungs-Ursprung ist jetzt im Schnittpunkt des Anstiegs  $K_{Me}$  mit der Abszisse. Dies ist eine Annahme, die für den Vorspannzustand der FGL getroffen wird. Folgendes Gedankenexperiment soll die Annahme anschaulich machen: Ein Stahlband wird per Hand plastisch gedehnt, dann wieder teilweise entlastet und erst dann mit gehaltender Spannung am Zylinder montiert. Bei Querausdehnung des Zylinders folgt die  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve des Bandes wieder dem Elastizitätsmodul, genau wie ein ungespannt montiertes Band.

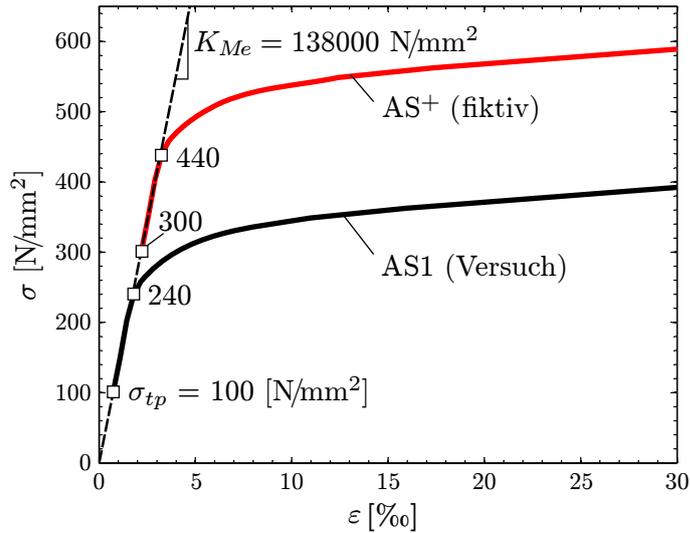


Bild 4.33: Materialmodell für vorgespannte FGL, basierend auf Versuch AS1

Modell	Vorspannzustand	$\sigma_{tp}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Kennung
AS <sup>+</sup>	$\sigma_{krit}$	440	AS <sup>+</sup> pk
	unterkühlt	300	AS <sup>+</sup> pu
AS1	$\sigma_{krit}$	240	AS1pk
	unterkühlt	100	AS1pu

Tabelle 4.3: Materialmodelle und Varianten der Vorspannung mit FGL

Die getroffene Annahme, für die absolute Dehnung der vorgespannten Umschnürung, beeinflusst nicht die Berechnung der radialen Dehnung und damit Spannung des Betons, denn  $\epsilon_{tr}$  wird relativ zum Vorspannzustand berechnet (Bild 4.3.3). Auswirkung hat die Annahme jedoch auf den plastischen Anstieg  $K_{cp}$ , im zweiten Teil des Spannungs-Dehnungs-Modells des Betons, der in Abschnitt 4.2.4 beschrieben ist.

Die im Versuch mit Fe-Mn-Si-Cr erzielte Vorspannung ist niedriger als veröffentlichte Werte für eine ähnliche Legierung [131]. Deshalb soll ein zweites FGL-Material simuliert werden. Vereinfachend wird die gemessene  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve von AS1, entlang des Anstiegs  $K_{Me}$  zu höheren Spannungen verschoben. Die resultierende Kurve AS<sup>+</sup> ist in Bild 4.33 dargestellt.

Für die Modelle AS1 und AS<sup>+</sup> sind in Bild 4.33 je zwei Werte der Spannung markiert: die Vorspannung nach Unterkühlen und die Spannung am Ende der elastischen Wiederbelastung, die  $\sigma_{krit}$  entspricht. Ohne Unterkühlung wäre die Vorspannung in etwa gleich  $\sigma_{krit}$ , also im Zustand der spannungsinduzierten Martensitbildung. Die verschiedenen Vorspannzustände sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

Das Modell für FGL ist in dieser Arbeit stark vereinfacht: Erstens ist es einaxial. Zweitens werden aus nur einem konkreten Vorspannprozess (Versuch AS1) verschiedene Vorspannzustände extrapoliert. Trotzdem werden die beiden wesentlichen Merkmale der vorgespannten FGL erfasst, nämlich die Vorspannung und die relativ geringen Tangentenmoduln der Spannungs-Dehnungs-Kurve. Die Vereinfachung soll lediglich grundlegende

## 4 Modellbildung

Abschätzungen ermöglichen, ungeachtet des thermodynamisch komplexen Verhaltens der FGL.

### 4.4.3 CFVK der Versuche

Die Bänder aus kohlefaserverstärktem Kunststoff werden als linear-elastisch angenommen. Ihr Elastizitätsmodul ist in Tabelle 3.4 angegeben. Abschnitt 4.3.1 beschreibt, wie die entsprechende Schnittstelle zum Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons formuliert ist.

# 5 Verifikation und Parameterstudien

## 5.1 Restfestigkeitsmodell mit Versuchsdaten

Das Restfestigkeitsmodell des Betons wurde in Abschnitt 4.1 formuliert. Demnach wird die Restfestigkeit  $f_R$  aus der axialen Energiefreisetzung berechnet. Die Energiefreisetzung jeder beliebigen Laststufe kann aus dem linear-elastischen Verhalten eines Referenzkörpers und der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des Betons berechnet werden.

Das Modell soll zunächst mit den Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche der Serie B überprüft werden. Ausgewählte Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche zeigt Bild 3.16. Parameter und wichtige Messwerte fasst Tabelle 3.8 zusammen. Nach jeder Belastung bis zur Kraft  $F_i = F_{c0} + F_{ad,i}$  (Bild 3.1 Serie B) wurde die Restfestigkeit im Bruchversuch ermittelt. Deshalb existiert zu jeder Überlast  $F_{ad}$  ein gesicherter Wert  $f_R$ . Die Spannungs-Dehnungs-Kurven haben den Index t, die Bruchversuche den Index r. Vereinfachend wird der Begriff Überlast synonym verwendet: sowohl für die Kraft  $F_{ad}$  als auch für eine axiale Spannung, die  $f_{c0}$  übersteigt.

Die axiale Formänderungsenergie des linear-elastischen Referenzkörpers wird mit  $E_{cc} = E_{sm} = 18860 \text{ N/mm}^2$  berechnet. Die Herkunft von  $E_{sm}$  wird in Abschnitt 3.4.1 erläutert. Der Wert  $W_{ac0}$  stammt von der Messung für den Referenzzylinder r000B-1b, dessen  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$ -Kurve in Bild 3.16 mit dargestellt ist.

Bild 5.1 zeigt zwei typische berechnete Restfestigkeits-Überlast-Kurven, vom Beginn der Belastung bis zur jeweils gewählten Überlast. Restfestigkeit und Überlast sind zu  $f_{c0}$  normiert. Neben den Kurven sind die Kennungen für die Parametersätze angegeben. Die Kurven beginnen bei der fiktiven Restfestigkeit  $f_{Re}$ . Mit zunehmender Entfestigung neigen sich die Kurven. Dem Ende jeder Kurve ist ein Messwert  $f_R$  zugeordnet. Die normierte axiale

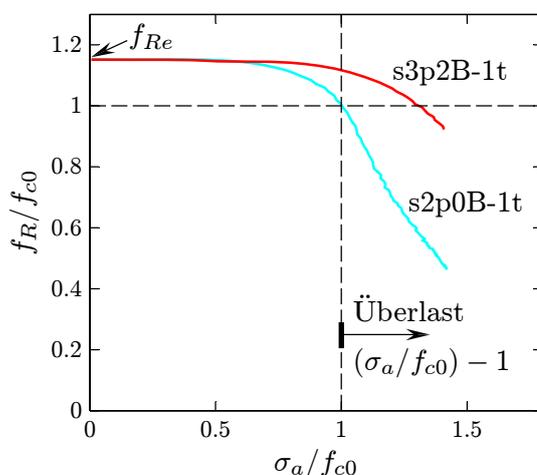


Bild 5.1: Restfestigkeitskurven und Überlast prinzipiell

Übersicht Parametersätze  
der Umschnürung:

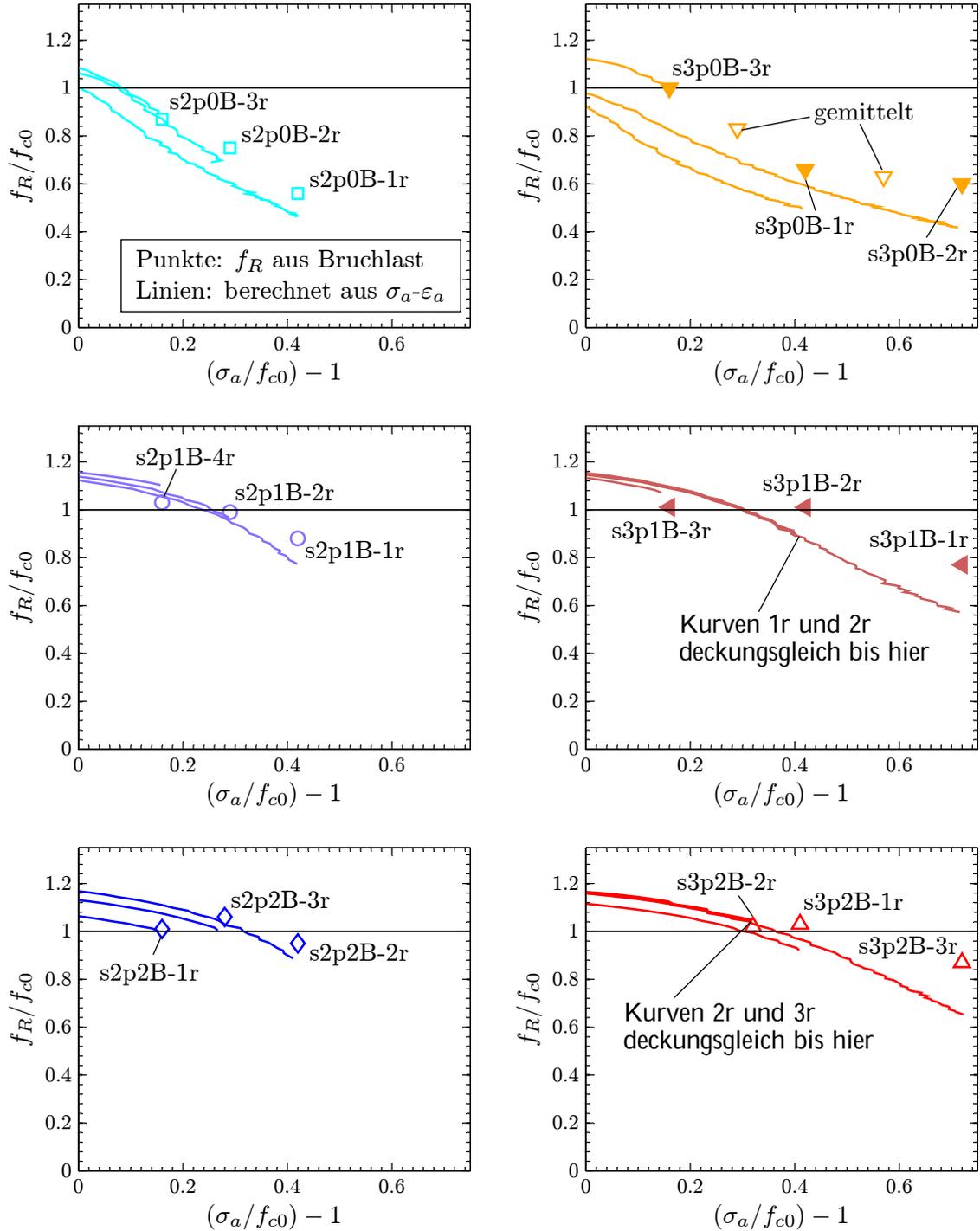
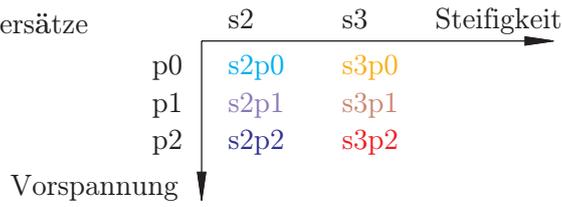


Bild 5.2: Ergebnisse des Restfestigkeitsmodells mit  $\sigma_a-\epsilon_a$  der Zylinderdruckversuche

Spannung  $\sigma_a/f_{c0} = 1$  entspricht einer Überlast  $F_{ad} = 0$ , bzw.  $\sigma_a/f_{c0} - 1 = 0$ . In nachfolgenden Abbildungen wird ausschließlich der Überlastbereich dargestellt.

Bild 5.2 zeigt die aus den gemessenen  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$ -Kurven berechneten Restfestigkeits-Überlast-Kurven, zusammen mit den Messwerten  $f_R$ . Dargestellt sind alle Parametersätze für stahlumschnürte Zylinder. Auf Grund des wirklichkeitsnahen Modells für diese Art der Umschnürung dürfen davon die genauesten Ergebnisse erwartet werden. Die in der Grafik verwendeten Symbole und Farben entsprechen der Zuordnung in Tabelle 5.3.

Es wird festgestellt: Die berechneten Kurven folgen annähernd dem Pfad, der durch die Messwerte von  $f_R$  vorgegeben wird. Tendenziell wird die Restfestigkeit vom Modell etwas unterschätzt, insbesondere mit zunehmender Überlast. Bei nicht vorgespannter Umschnürung (s2p0 und s3p0) sind die  $f_R$ -Überlast-Kurven nahezu linear. Die Restfestigkeit sinkt deutlich ab. Mit Vorspannung der Umschnürung (s2p1, s2p2, s3p2, s3p2) sind die  $f_R$ -Überlast-Kurven nichtlinear. Die Restfestigkeit bleibt bis zu wesentlich höheren Überlasten erhalten als im ungespannten Fall.

Mit Vorspannung weisen die  $f_R$ -Überlast-Kurven für kleine  $F_{ad}$  sogar Restfestigkeiten aus, die größer als die einaxiale Festigkeit sind. Dieses Ergebnis ist natürlich in den Modellannahmen begründet. Eine theoretische Erklärung dafür ist: Im Vergleich zum einaxialen Fall wird der Beton innerhalb der Umschnürung verdichtet; Rissbildung erfolgt homogen verteilt. Deshalb könnte die Restfestigkeit über  $f_{c0}$  liegen. Dafür gibt es allerdings keinen experimentellen Beweis. Solange dieser aussteht, sollte die Restfestigkeit nicht größer als die einaxiale Festigkeit angesetzt werden.

Grundsätzlich erweist sich das gewählte Modell als tauglich, die Entwicklung der Restfestigkeit mit der Überlast abzubilden.

## 5.2 Spannungs-Dehnungs-Modell Beton

In Abschnitt 4.2 wurde das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons formuliert. Dieses Modell soll an Hand von Spannungs-Dehnungs-Kurven der Versuche der Serie B verifiziert werden. Für stahlumschnürte und CFVK-umschnürte Zylinder sind  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$ -Kurven und  $\sigma_a$ - $\varepsilon_r$ -Kurven der Versuche in Bild 3.16 gezeigt.

In Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2 sind die Materialparameter des Betons und davon abhängige sowie andere Modellparameter angegeben, die für die Berechnung aller Parametersätze konstant sind. Tabelle 5.3 gibt eine Übersicht der Parameter der Umschnürung. Darin sind auch die Symbole und Farben zugeordnet, die in den Grafiken benutzt werden. Weitere

---


$$\begin{aligned}
 f_{c0} &= -32.9 \text{ N/mm}^2 \\
 \varepsilon_{c0} &= -2.8 \text{ ‰} \\
 E_{cc} &= E_{sm} = E_{c0} = 18860 \text{ N/mm}^2 \\
 \nu &= 0.17
 \end{aligned}$$


---

Tabelle 5.1: Materialparameter Beton

---

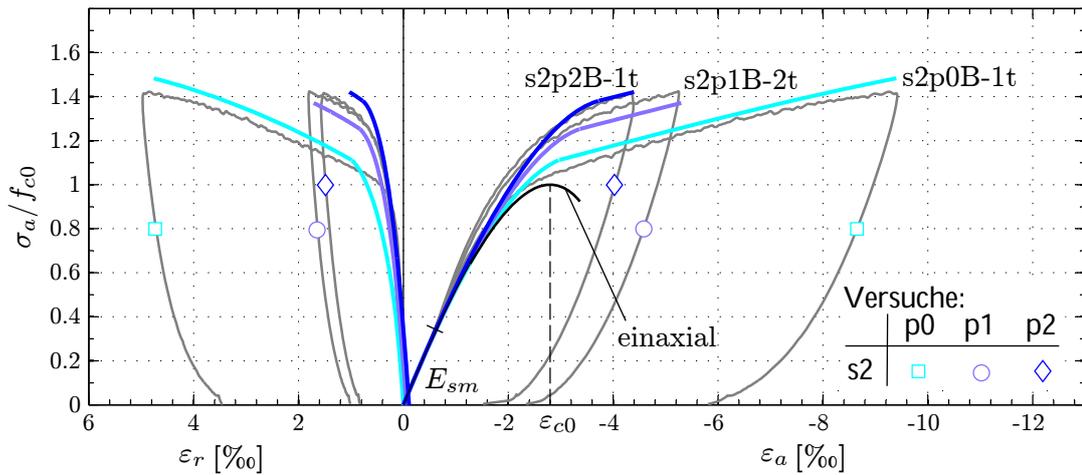

$$\begin{aligned}
 &\text{für } K_{cp} \text{ nach (4.18)} \\
 a_1 &= 164 \text{ N/mm}^2 \text{ nach (4.20)} \\
 a_2 &= 0.0047 \text{ nach (4.21)} \\
 C_0 &= 217 \text{ N/mm}^2 \text{ nach (4.19)}
 \end{aligned}$$


---

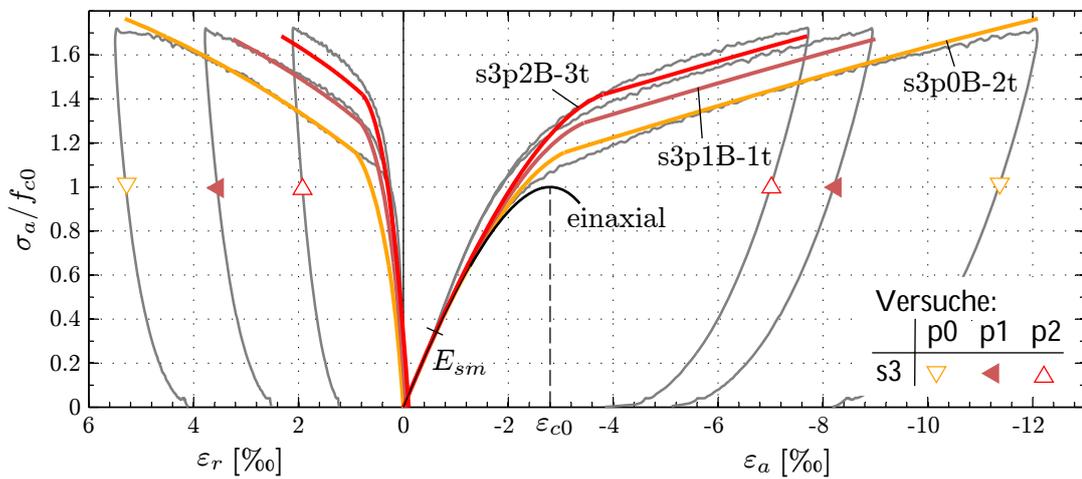

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \varepsilon_V \text{ nach (4.27)} \\
 \varepsilon_{aV0} (\sigma_r = 0) &= 0.9 \varepsilon_{c0} \\
 \alpha &= 0.66 \text{ N/mm}^2 \text{ nach (4.28)}
 \end{aligned}$$


---

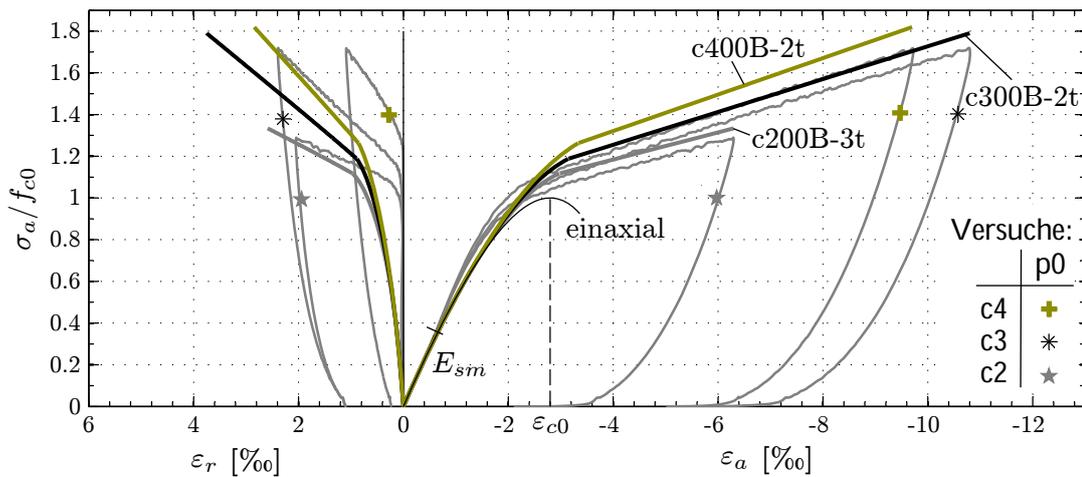
Tabelle 5.2: Modellparameter



(a) Stahlumschnürung s2



(b) Stahlumschnürung s3



(c) CFVK-Umschnürung

Bild 5.3: Axiale Spannung – axiale und radiale Dehnung; Versuche und Berechnung

Symbol/ Farbe	Kennung	$t$ [mm]	$n$ [-]	$t_e$ [mm]	$C$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$C$ relativ zu s2p0	$\sigma_{rp}^{**}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{rp}/f_{c0}$
□	s2p0				992*	100 %	–	–
○	s2p1	0.5	1	0.397	992*	100 %	–1.39	4.2 %
◇	s2p2				927*	93 %	–2.65	8.1 %
▽	s3p0				1570*	158 %	–	–
◀	s3p1	0.8	1	0.691	1394*	140 %	–1.35	4.1 %
△	s3p2				1345*	136 %	–2.55	7.8 %
★	c2p0		5	0.687	1034	104 %	–	–
*	c3p0	0.15	9	1.190	1793	181 %	–	–
+	c4p0		13	1.719	2690	271 %	–	–

\*  $C_e$  im Montagezustand mit Anfangsanstieg von  $S_t$ , vgl. Bild 5.4d

\*\* nach Tab. 4.2

Tabelle 5.3: Parameter der Umschnürung für die Verifikation

Parameter der Umschnürung, wie  $E_t$  und  $s$ , die der Steifigkeit (s2, s3, etc.) zu Grunde liegen, sind Tabelle 3.5 zu entnehmen. Der Zylinderradius ist 75 mm. Das Modell der Umschnürung ist in Abschnitt 4.4.1 beschrieben.

Bild 5.3 stellt die berechneten Spannungs-Dehnungs-Kurven des Betons (farbig mit Kennung) den Versuchskurven (grau mit Symbol) gegenüber. Für die Zylinder mit Stahlschnürung (Bild 5.3a und Bild 5.3b) wird eine akzeptable Abbildung der Versuchskurven erreicht. Die Neigung der plastischen Tangente wird sehr gut getroffen. Bei vorgespannter Umschnürung scheint  $\sigma_a$  tendenziell unterschätzt zu werden. In den verschiedenen Phasen der Belastung liegen die berechneten Kurven teilweise über und teilweise unter denen des Versuchs. Vor Erreichen der plastischen Tangente sind die Abweichungen zwischen Versuch und Berechnung am größten. Hierbei muss anerkannt werden, dass Ergebnisse von Versuchen mit Beton einer großen Streuung unterliegen, was auch in den Daten dieser Arbeit zum Ausdruck kommt.

Besonders hervorzuheben ist die verhältnismäßig gute Übereinstimmung der berechneten radialen Dehnungen  $\varepsilon_r$  mit den Messwerten, sowohl was den Verlauf als auch den Endwert angeht (Bild 5.3a und Bild 5.3b). Demnach ist das vorgestellte Modell gut geeignet, die Interaktion mit der Umschnürung abzubilden. Das wird nicht zuletzt durch die funktionalisierte Volumendehnung erreicht. Die Kurven der Volumendehnung für die Parametersätze der Versuche zeigen Bild 5.4a bis Bild 5.4c. Sowohl der Einfluss der Zugsteifigkeit der Umschnürung als auch der Einfluss der Vorspannung werden plausibel abgebildet. Die Entwicklung des effektiven Umschnürungsmoduls  $C_e$  mit der axialen Last zeigt Bild 5.4d.

Bild 5.3c zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kurven des Betons für CFVK-umschnürte Zylinder. Dass die gemessenen radialen Dehnungen nicht realistisch sind, wurde bereits in Abschnitt 3.4.3 auf Seite 77 erläutert. Die drastische Abweichung der  $\sigma_a$ - $\varepsilon_r$ -Kurven war also zu erwarten. Offensichtlich stimmen aber auch bei den  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$ -Kurven Rechnung und Versuch weniger gut überein als bei den stahlschnürten Zylindern. Die berechneten Anstiege der plastische Tangente sind nur geringfügig zu hoch. Generell wird aber  $\sigma_a$  zu hoch berechnet. Dies ist zurückzuführen auf die zu starke Streckung des ersten Teiles der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve. So wird mit den Parametern der Zugsteifigkeit c3 sogar

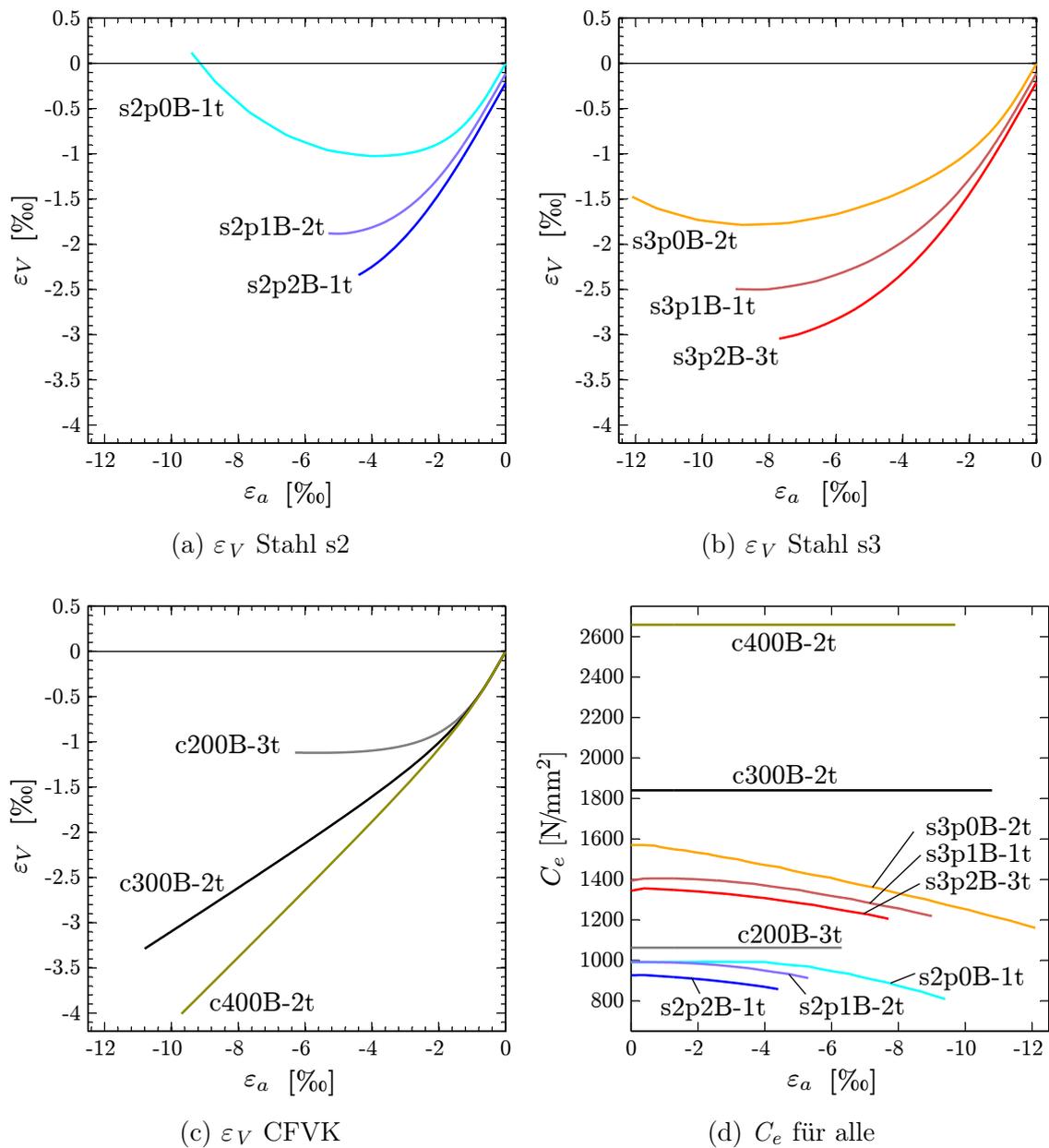


Bild 5.4: Berechnete Volumendehnung  $\varepsilon_V$  und effektive Umschnürungsmoduln  $C_e$

die Versuchskurve c4 erreicht, die aber Umschnürung mit 1.5-facher Zugsteifigkeit von c3 hat.

Tabelle 5.4 vergleicht die axialen Spannungen von Versuch und Rechnung, bei der jeweiligen Höchstlast  $F_i$  für die CFVK-umschnürten Zylinder. Die Abweichung scheint mit der Anzahl der Lagen  $n$  der Kohlefaserbänder zu wachsen. Vermutlich verhält sich die mehrlagige Umschnürung besonders am Beginn der Belastung tangential weniger steif als es die einaxialen Parameter angeben. Dieser Aktivierungseffekt wurde bereits in Abschnitt 2.5.1 diskutiert. Ausschlaggebend für die Abweichung könnte also eine Überschätzung des tatsächlich vorhandenen Umschnürungsmoduls  $C$  sein. Genauere Berechnung des Betonverhaltens wäre nach diesen Schlussfolgerungen nur mit einem zusätzlichen wirklichkeitsnahen Modell der mehrlagigen CFVK-Umschnürung möglich. Wie in Bild 4.28 und Bild 4.29 skiz-

Kennung	$n$	$\varepsilon_a$ [%o]	$\sigma_a$ Rechnung [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_a$ Versuch [N/mm <sup>2</sup> ]	Abweichung
c2p0	5	6.4	-43.7	-42.4	3.1 %
c3p0	9	10.9	-58.9	-56.9	3.5 %
c4p0	13	9.7	-59.8	-56.9	5.1 %

Tabelle 5.4: Endwert von  $\sigma_a$  bei CFVK-Umschnürung

ziert, bietet die Schnittstelle zum Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons Ansatzpunkte dafür.

Das Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons bietet eine akzeptable Annäherung an das tatsächliche Verhalten im Bereich der untersuchten Parameter. Voraussetzung ist allerdings ein wirklichkeitsnahes Modell der Umschnürung. Für die stahluumschnürten Zylinder ist dies gegeben. In weiteren Untersuchungen sollte geklärt werden, ob das zeitabhängige Verhalten des Betons relevant ist und inwieweit die empirisch gefundenen Koeffizienten in den Gleichungen von plastischer Tangente und Volumendehnung auf sämtliche Normalbetone anwendbar sind.

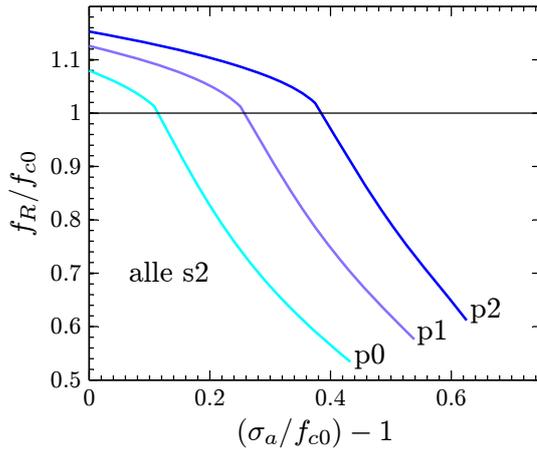
### 5.3 Restfestigkeit mit Spannungs-Dehnungs-Modell

Restfestigkeitsmodell und Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons ermöglichen die Berechnung der Restfestigkeit  $f_R$  für beliebige Umschnürungen und gegebene  $\varepsilon_a$ . Zunächst soll diese vollständige Berechnung mit den von Messwerten stammenden  $f_R$  verifiziert werden. Dazu werden die Parameter der Versuche der Serie B verwendet, wie in Abschnitt 5.2 angegeben (Tabellen 5.1, 5.2, 5.3).

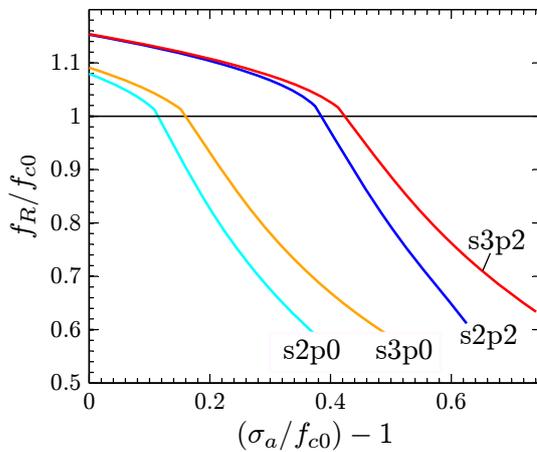
Bild 5.5 zeigt berechnete Restfestigkeits-Überlast-Kurven für stahluumschnürte Zylinder. Die Werte sind zu  $f_{c0}$  normiert. Wichtige Parameter, wie Zugsteifigkeit und Vorspannung der Umschnürung, sind nochmals in Bild 5.5c zusammengestellt. Die berechneten  $f_R$ -Überlast-Kurven lassen die beiden Teile der  $\sigma_a$ - $\varepsilon_a$ -Kurve erkennen. Ein deutliche Zunahme der Neigung der Kurven markiert den Übergangspunkt. Bei allen Parametersätzen fällt  $f_R$  erst unter  $f_{c0}$  wenn der Übergangspunkt überschritten wird.

Bild 5.5a zeigt den Einfluss der Vorspannung am Beispiel der Stahluumschnürung s2. In Bild 5.5b sind die Stufen der Vorspannung p0 (ohne) und p2 (8.2% von  $f_{c0}$ ) für zwei Zugsteifigkeiten gegenübergestellt. Die Kurven entsprechen der experimentellen Erkenntnis: Für die gewählten Parameter ist Vorspannung wirksamer für den Erhalt der Restfestigkeit als Erhöhung der Zugsteifigkeit der Umschnürung.

An aus dem Versuch bekannten Stützpunkten  $[\sigma_a, f_R]$  können die berechneten Kurven überprüft werden. Bild 5.6 zeigt diese Auswertung, für die gesamte Serie B der Versuche, zu  $f_{c0}$  normiert: Den Versuchswerten  $f_R$  werden die bei gleicher Überlast berechneten Werte  $f_R$  gegenübergestellt. Die gestrichelte Diagonale mit Anstieg 1 entspricht der bestmöglichen Übereinstimmung. Wie auch in Abschnitt 5.1 festgestellt werden bei stahluumschnürten Zylindern, mit  $f_R < f_{c0}$  im Versuch, die Restfestigkeiten mit dem Gesamtmodell teilweise zu gering berechnet. Dies trifft insbesondere für vorgespannte Umschnürung zu. Im rechten oberen Feld des Diagramms ( $x > 1, y > 1$ ) befinden sich die Stützpunkte mit vorgespannter Umschnürung, für die im Versuch  $f_{c0} < f_R$  festgestellt wurde. Diese Werte werden vom Gesamtmodell teilweise zu hoch berechnet. Wie bereits an anderer Stelle



(a) Einfluss der Vorspannung



(b) Zugsteifigkeit vs. Vorspannung

$f_{c0} = -32.9 \text{ N/mm}^2$   
 Material Umschnürung: Stahl

Zugsteifigkeit:

Kennung	s2	s3
t [mm]	0.5	0.8
C [N/mm <sup>2</sup> ]	992 <sup>a</sup>	1727 <sup>a</sup>
C <sub>e</sub> [N/mm <sup>2</sup> ]	992 <sup>b</sup>	1570 <sup>b</sup>
C <sub>e</sub> relativ	100 %	158 %

<sup>a</sup> nominal

<sup>b</sup> im Montagezustand

Vorspannung:

Kennung	p0	p1	p2
$\sigma_{rpN}/f_{c0}$	-	4.2 %	8.2 %

(c) Parameter

Bild 5.5: Berechnete Restfestigkeits-Überlast-Kurven

erläutert wurde, sollte  $f_R$  deshalb nicht höher als die einaxiale Festigkeit angesetzt werden.

In Bild 5.6 wird für die Prüfkörper mit CFVK-Umschnürung scheinbar eine relativ gute Übereinstimmung ausgewiesen. Jedoch wird dieses Ergebnis positiv von den beiden entgegengesetzten Abweichungen der Teilmodelle beeinflusst: Einerseits wird  $f_R$  im Restfestigkeitsmodell tendenziell unterschätzt, andererseits wird mit den angenommenen Parametern der CFVK-Umschnürung die  $\sigma_a-\varepsilon_a$ -Kurve vom Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons überschätzt. Die vom Gesamtmodell berechneten Werte  $f_R$  bei CFVK-Umschnürung sind deshalb unter Vorbehalt zu werten.

Da die festgestellten Abweichungen eine konservative Prognose für  $f_R$  liefern, kann das Gesamtmodell für praktische Berechnungen eingesetzt werden. Bei der Tragwerksbemessung sollte  $f_R$  jedoch nicht größer als  $f_{c0}$  angesetzt werden.

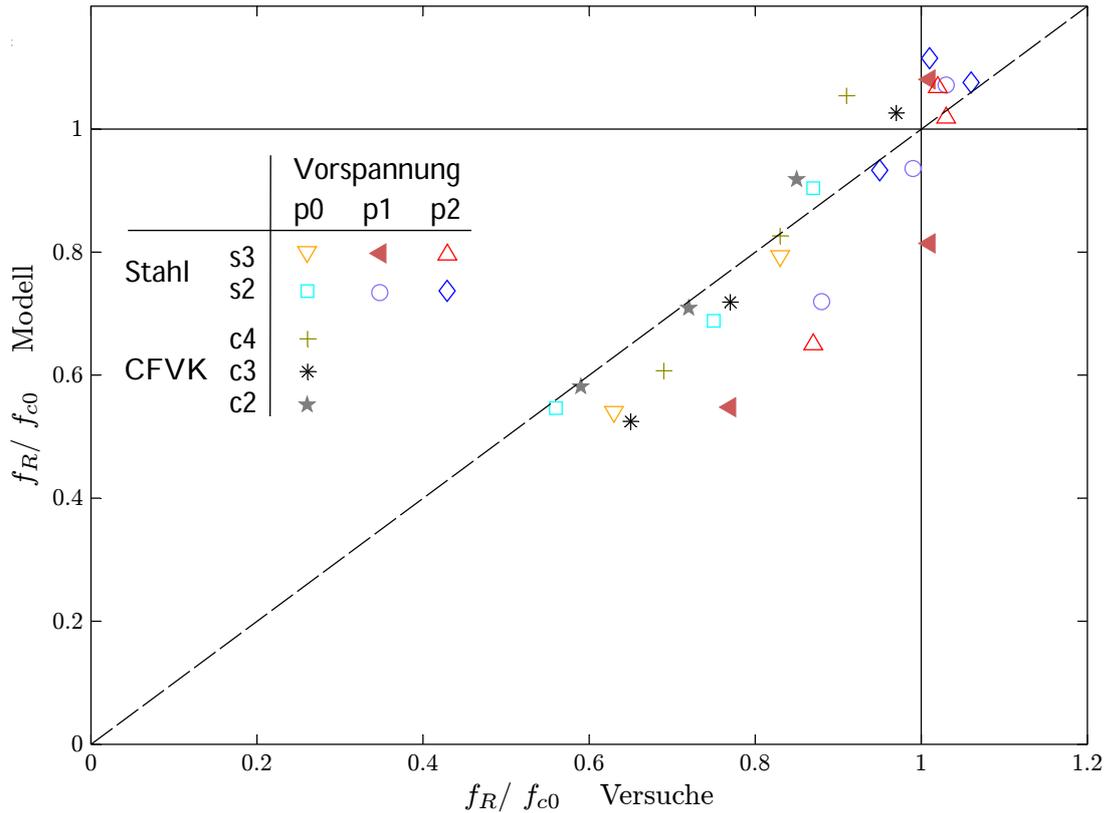


Bild 5.6: Vergleich Restfestigkeiten aus Gesamtmodell und Versuch

## 5.4 Vorspannung und höherer Materialeinsatz im Vergleich

Nach erfolgreicher Verifikation können die Modelle genutzt werden, um das Spannungs-Dehnungs-Verhalten und die Restfestigkeit auch für andere Parameterkonstellationen zu untersuchen. Nachfolgende Parameterstudie gibt einen Überblick zum Effekt der vorgespannten Umschnürung im gesamten Parameterbereich, der in Tabelle 5.5 angegeben ist. Variiert werden der Umschnürungsmodul  $C$ , die radiale Vorspannung  $\sigma_{rp}$  und die einaxiale Betonfestigkeit  $f_{c0}$ . Die Parameterstudie untersucht insbesondere die Frage, ob der Effekt der vorgespannten Umschnürung auch mit ungespannter Umschnürung erreicht werden kann, wenn für diese mehr Material eingesetzt wird. Der Materialeinsatz ist mit dem Umschnürungsmodul gekoppelt.

Vereinfachend wird eine linear-elastische Umschnürung vorausgesetzt. Im Vergleich dazu müssen Ergebnisse der Restfestigkeit bei Umschnürungen mit nichtlinear-entfestigendem Materialverhalten (Stahl, FGL) niedriger sein. Der höchste angenommene Umschnürungs-

$C$	= 267*...2500 [N/mm <sup>2</sup> ]	$E_{cc} = E_{c0} = 30000$ N/mm <sup>2</sup>
$\sigma_{rp}/f_{c0}$	= 0 ... 10 [%]	$\varepsilon_{c0} = -2.5$ ‰
$f_{c0}$	= -25, -35, -45 [N/mm <sup>2</sup> ]	$\nu = 0.15$

\* 560 N/mm<sup>2</sup> bei  $f_{c0} = -45$  N/mm<sup>2</sup>

Tabelle 5.5: Eingangswerte für Parameterstudie  $C$ - $\sigma_{rp}$ - $f_{c0}$

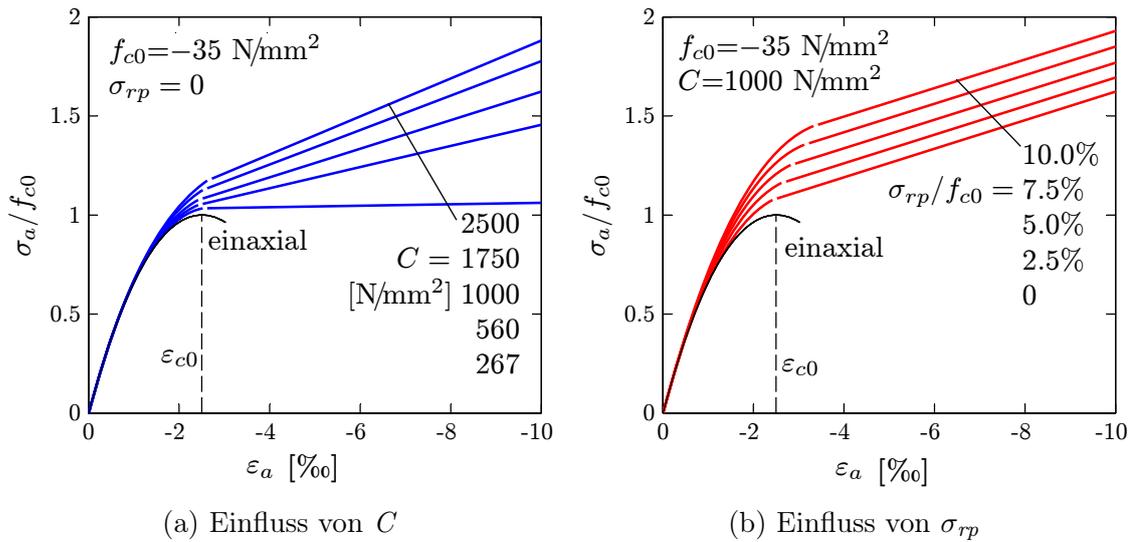


Bild 5.7: Axiale Spannungs-Dehnungs-Kurven für Parameterstudie

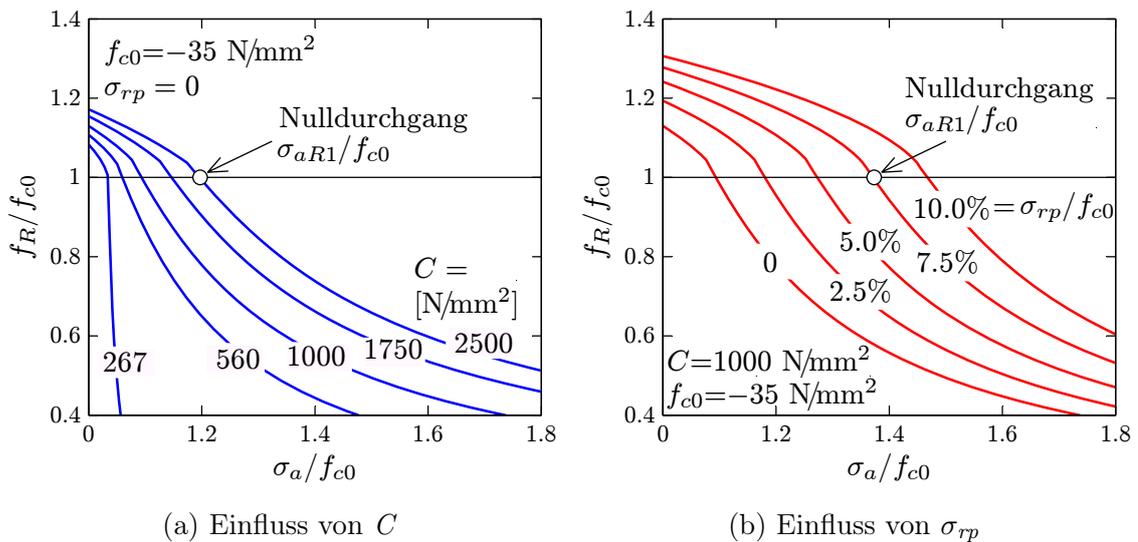
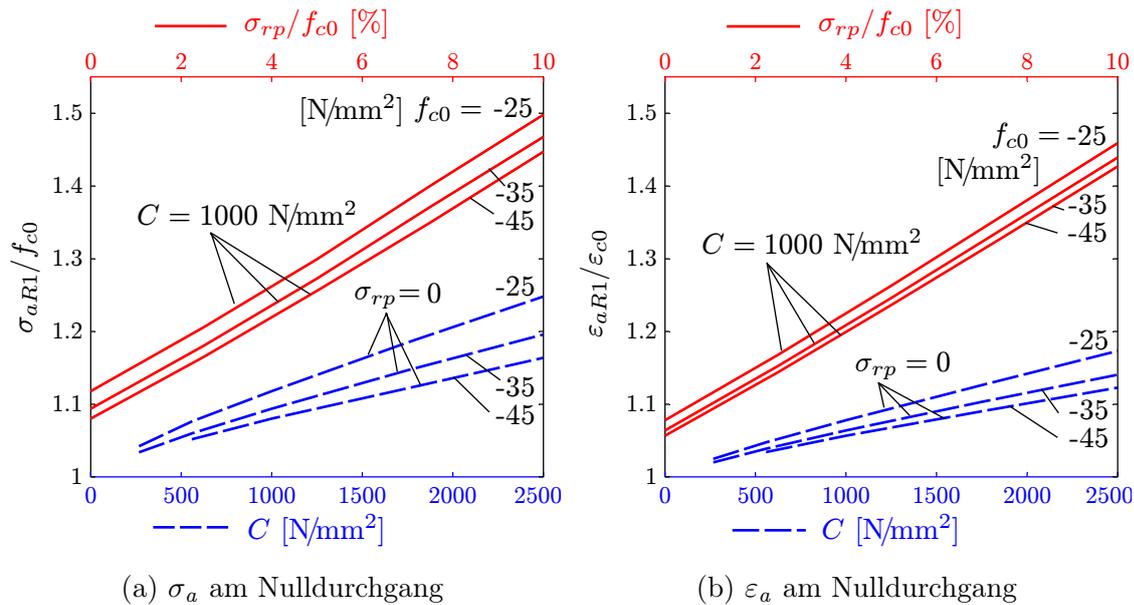


Bild 5.8: Kurven der Restfestigkeit

modul ist  $2500 \text{ N/mm}^2$ . Gemäß Bild 3.10 ist dies ein sehr hoher Wert, der baupraktisch nur mit großem Aufwand erreicht werden kann.

Bild 5.7 zeigt die axialen Spannungs-Dehnungs-Kurven für eine Betonfestigkeit. In Bild 5.7a wird deutlich, wie der Umschnürungsmodul  $C$  maßgeblich den Anstieg der plastischen Tangente beeinflusst. Hingegen hat die Vorspannung  $\sigma_{rp}$  vor allem Auswirkung auf die Streckung der  $\sigma_a$ - $\epsilon_a$ -Kurve vor dem Übergangspunkt, wie in Bild 5.7b gezeigt. Der Übergangspunkt ist durch eine Lücke in den Kurven markiert.

Die Restfestigkeits-Überlast-Kurven in Bild 5.8a zeigen ohne Vorspannung einen starken Rückgang von  $f_R$  bei steigender Überlast, insbesondere bei niedrigen Werten von  $C$ . Am Beispiel  $C = 1000 \text{ N/mm}^2$  ist in Bild 5.8b zu sehen, dass selbst geringe Vorspannung wirksam ist. Allerdings nimmt der Einfluss von  $\sigma_{rp}$  auf die Restfestigkeit mit steigender

Bild 5.9: Einfluss von  $\sigma_{rp}$  und  $C$  auf den Nulldurchgang der Restfestigkeit.

Überlast ab; vorgespannte und ungespannte Kurven nähern sich einander an. Dieser Trend wird mit steigender Vorspannung abgeschwächt.

Als Kennwert für die Wirksamkeit der Umschnürung sollen die axiale Spannung  $\sigma_{aR1}$  bzw. die axiale Dehnung  $\varepsilon_{aR1}$  am Nulldurchgang der Restfestigkeits-Überlast-Kurve benutzt werden. In Bild 5.8 ist die normierte Stelle  $\sigma_{aR1}/f_{c0}$  am Beispiel je einer Kurve bezeichnet. Solange  $\sigma_{aR1}$  bzw.  $\varepsilon_{aR1}$  nicht überschritten werden, hat der Beton mindestens die einaxiale Festigkeit  $f_{c0}$ .

In Bild 5.9 ist der Einfluss von  $C$ ,  $\sigma_{rp}$  und  $f_{c0}$  auf den Nulldurchgang veranschaulicht. In den Diagrammen ist die Stelle des Nulldurchgangs in der Form  $\sigma_{aR1}/f_{c0}$  bzw.  $\varepsilon_{aR1}/\varepsilon_{c0}$  normiert. Dieser Auswertung liegen 27 Kombinationen von  $C$ ,  $\sigma_{rp}$  und  $f_{c0}$  und die daraus resultierenden  $f_R$ -Überlast-Kurven zu Grunde. Bild 5.9a zeigt den dominierenden Einfluss der Vorspannung auf  $\varepsilon_{aR1}$ . Selbst sehr große Werte von  $C$  sind ohne Vorspannung weniger wirksam als radiale Vorspannung von etwa 5% der einaxialen Betonfestigkeit, bei einem mittleren Umschnürungsmodul von  $1000 \text{ N/mm}^2$ . Allerdings wird festgestellt, dass der Nulldurchgang im gewählten Parameterbereich keinesfalls mehr als das 1.5-fache von  $f_{c0}$  sein kann. Für  $\varepsilon_{aR1}$  lassen sich an Hand von Bild 5.9b ähnliche Schlussfolgerungen ziehen.

Das Fazit der Parameterstudie ist: Hinsichtlich der Restfestigkeit ist Vorspannung der Umschnürung, besonders bei Überlasten bis etwa 150% von  $f_{c0}$ , wesentlich wirksamer als ungespannte Umschnürung mit deutlich mehr Materialeinsatz. Mit steigender Überlast nimmt der Einfluss der Vorspannung ab.

## 5.5 FGL-Umschnürung

Der technische Nutzen von vorgespannter Umschnürung wurde grundlegend geklärt. Nun kann sich weitergehende Forschung damit befassen, wie eine vorgespannte Umschnürung

Symbol/ Farbe	Kennung	$t_e$ [mm]	$C$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$C$ relativ zu AS	$\sigma_{tp}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{rp}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{rp}/f_{c0}$
—	AS1pk	0.397	730 <sup>a</sup>	100 %	240	−1.27	3.6 %
—	AS1pu				100	−0.53	1.5 %
—	AS <sup>+</sup> pk				440	−2.33	6.7 %
—	AS <sup>+</sup> pu				300	−1.59	4.5 %
▽	s3p0	0.691	1570 <sup>b</sup>	215 %	—	—	—
*	c3p0	1.190	1793	246 %	—	—	—

<sup>a</sup> nach (2.19) mit  $E_t = K_{Me} = 138000 \text{ N/mm}^2$  und  $r = 75 \text{ mm}$

<sup>b</sup>  $C_e$  im Montagezustand, mit Anfangsanstieg von  $S_t$ , vgl. Bild 5.4d

Tabelle 5.6: Parameter der Umschnürung für Vergleich mit FGL

wirtschaftlich hergestellt werden kann. Einen Beitrag dazu liefert die folgende abschätzende Parameterstudie mit Umschnürung aus FGL.

Ein vereinfachtes Materialmodell für zwei Formgedächtnislegierungen nach dem thermischen Vorspannen ist in Abschnitt 4.4.2 angegeben. Der Typ AS1 entspricht den Ergebnissen der Versuche mit Fe-Mn-Si-Cr, die in Abschnitt 3.5 beschrieben sind. Der Typ AS<sup>+</sup> ist fiktiv und orientiert sich an AS1 und Literaturdaten. Tabelle 4.3 und Bild 4.33 geben einen Überblick zu den je zwei angenommenen Varianten der Vorspannung pro FGL. Bei Varianten mit der Kennung -pk ist die FGL bis zur kritischen Spannung vorgespannt. Die Kennung -pu hingegen sagt aus, dass im Vorspannzustand nach vorangehender Unterkühlung ein elastischer Anstieg nutzbar ist.

Tabelle 5.6 gibt einen Überblick über die Parameter der Umschnürung. Die Varianten der FGL werden mit Umschnürung s3p0 aus Stahl und c3p0 aus CFVK verglichen, die auch in den Zylinderdruckversuchen eingesetzt wurden. Die Umschnürungen s3p0 und c3p0 sind zwar nicht vorgespannt, jedoch ist ihr Umschnürungsmodul wesentlich höher als der für die FGL gewählte (siehe  $C$  relativ in Tabelle 5.6). Auch das Materialvolumen der ungespannten Umschnürungen ist verglichen mit den FGL deutlich höher, nämlich 1.74-fach für das Stahlband (s3p0) und sogar 3.0-fach für das CFVK-Band (c3p0). Bild 5.10b zeigt die  $\sigma_t$ - $\varepsilon_t$ -Kurven für alle Umschnürungen dieser Parameterstudie.

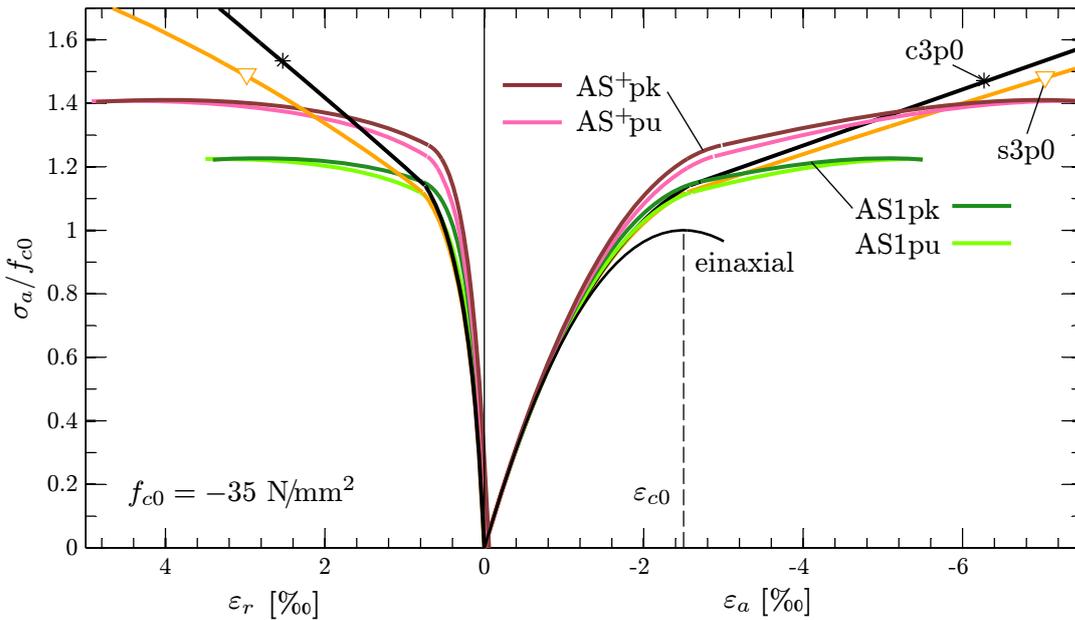
Für den Beton wird eingesetzt:  $f_{c0} = -35 \text{ N/mm}^2$ ,  $\varepsilon_{c0} = -2.5 \text{ ‰}$ ,  $E_{cc} = E_{c0} = 30000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.17$ .

Bild 5.10a zeigt die berechneten Spannungs-Dehnungs-Kurven des Betons für den Vergleich der FGL-Umschnürung. In Bild 5.10c sind die zu  $f_{c0}$  normierten Restfestigkeits-Überlast-Kurven dargestellt.

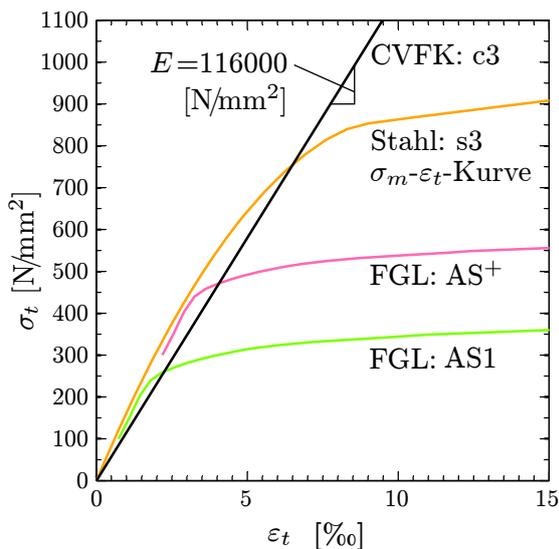
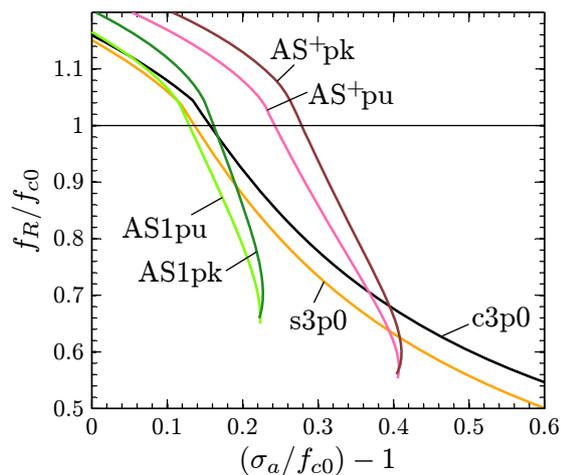
Die Ergebnisse für die Varianten der Vorspannung (-pu, -pk) der beiden FGL-Umschnürungen unterscheiden sich nur geringfügig. Demnach würde der Effekt der Umschnürung nur geringfügig ungünstiger ausfallen, wenn nach dem Vorspannen unterkühlt wird.

Mit FGL-Umschnürung AS1 wird nahezu keine Verbesserung im Vergleich zu s3p0 und c3p0 erreicht. Offenbar sind Vorspannung und Zugsteifigkeit zu gering.

Deutliche Verbesserung weist das Modell jedoch für AS<sup>+</sup> aus: Die axiale Spannung  $\sigma_a$  bei gegebenem  $\varepsilon_a$  ist zunächst größer als bei nicht vorgespannter Umschnürung, bei gegebenem  $\sigma_a$  ist der Beton weniger gestaucht (Bild 5.10a); die volle Restfestigkeit bleibt bis zu höheren Überlasten erhalten (Bild 5.10c). Diese Effekte schwinden jedoch rapide



(a) Normierte axiale Spannung und Dehnungen des Betons

(b)  $\sigma_t$ - $\epsilon_t$ -Kurven Umschnürung

(c) Restfestigkeit-Überlast-Kurven

Bild 5.10: Umschnürung aus FGL (AS1 und AS<sup>+</sup>) im Vergleich mit Stahl und CFVK

mit steigender Überlast. Die  $\sigma_a$ - $\epsilon_a$ -Kurve neigt sich stark und kreuzt die Kurven der ungespannten Umschnürungen bei einer Überlast von etwa 40%. Danach sind die ungespannten Umschnürungen auf Grund ihres hohen Umschnürungsmoduls auch hinsichtlich der Restfestigkeit überlegen.

Mit FGL-Umschnürung AS1 wird die axiale Höchstlast schon bei einer axialen Stauchung von 5,5‰ erreicht, mit AS<sup>+</sup> bei etwa 7‰. D.h. der effektive Umschnürungsmodul liegt dann nahe  $C_0$ . Danach ist das Spannungs-Dehnungs-Modell nicht mehr anwendbar.

Die Schlussfolgerungen aus der Parameterstudie mit FGL-Umschnürung sind:

- Die FGL-Umschnürung der Variante AS<sup>+</sup> führt zu besseren Ergebnissen als die verglichenen konventionellen Umschnürungen. Für FGL mit weniger guten Eigenschaften als AS<sup>+</sup> scheint eine wirtschaftliche Anwendung für Umschnürungen fraglich.
- Bis zu einer begrenzten Überlast bewahrt vorgespannte FGL-Umschnürung die Restfestigkeit besser als ungespannte Umschnürung, bei der wesentlich mehr Material eingesetzt werden muss und die deutlich zugsteifer ist.
- Die axiale Steifigkeit des umschnürten Betondruckglieds ist mit vorgespannter FGL-Umschnürung insbesondere vor Überschreiten von  $\varepsilon_{c0}$  erkennbar erhöht.
- Mit steigender Überlast nimmt der positive Effekt der vorgespannten FGL-Umschnürung drastisch ab, bedingt durch ihre geringe Zugsteifigkeit.

# 6 Zusammenfassung

## 6.1 Ergebnisse

An Hand von Versuchen, Modellen und Parameterstudien wurde das Tragverhalten axial belasteter zylindrischer Betondruckglieder mit vorgespannter Umschnürung untersucht und mit dem ungespannt umschnürten Fall verglichen. Unter besonderer Beachtung selbstvorspannbarer Formgedächtnislegierungen galt es die Eignung verschiedener Materialien für die vorgespannte Umschnürung zu bewerten.

Die ausgeführten Druckversuche an umschnürten Zylindern klären grundlegend den Nutzen der Vorspannung. Der wesentliche Vorteil ist: Vorspannung der Umschnürung verhindert die Entfestigung des umschnürten Betons bei Beanspruchung über der einaxialen Festigkeit. Weitere Auswirkungen auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons sind: höhere axiale Steifigkeit und geringere Querausdehnung des Betons. Menge, Zugsteifigkeit und Vorspannung des umschnürenden Materials bestimmen den Betrag der Überlast, bis zu dem der Beton Nennfestigkeit hat. Mit steigender Last nimmt der Einfluss der Vorspannung ab. Schon geringe Quervorspannung beeinflusst die Restfestigkeitsentwicklung nennenswert. Die in den Versuchen verwendeten moderaten Vorspannungen waren diesbezüglich wesentlich effektiver als drastische Steigerungen der Menge umschnürenden Materials. In den Versuchen wurde nachgewiesen, dass die genannten Effekte auch bei zyklischer Last auftreten. Die Untersuchungen zeigen außerdem: durch die Vorspannung der Umschnürung werden Traglast und Duktilität des umschnürten Betons nur unwesentlich beeinflusst. Nach Tastversuchen ist die vorgespannte Umschnürung auch für Druckglieder unter Biegung und Normalkraft wirksam.

Bei ungespannt montierter Umschnürung hingegen sinkt die Restfestigkeit deutlich und kontinuierlich ab, sobald die Last über die einaxiale Traglast des Betondruckglieds gesteigert wird. Das belegen sowohl die Versuche als auch die durchgeführten Berechnungen. In den Versuchen wurde beispielsweise schon bei 40 % Überlast etwa eine Halbierung der Restfestigkeit festgestellt. Ein erhebliches Sicherheitsrisiko besteht für ungespannt umschnürte Betondruckglieder, wenn erstens die Last größer war als die einaxiale Festigkeit und wenn zweitens die Umschnürung ausfällt. Schon kurzzeitige Überlastung ist dabei wirksam. Demzufolge sollten mit externen Umschnürungen verstärkte Betondruckglieder zukünftig unbedingt auch bezüglich ihrer Restfestigkeit bewertet werden, insbesondere wenn die erhöhte axiale Tragfähigkeit mit Umschnürung in Anspruch genommen wurde.

Um die Restfestigkeit ohne Bruchversuche prognostizieren zu können, wurde ein Modell entwickelt und verifiziert. Mit diesem kann die Entfestigung des umschnürten Betons infolge axialer Last berechnet werden, indem die freigesetzte Energie der axialen Richtung als Eingangswert für einen skalaren Schädigungsindikator genutzt wird. Die freigesetzte Energie ist die Differenz der axialen Formänderungsenergie des Betons und eines

linear-elastischen Referenzkörper. Die Formänderungsenergien werden an Hand der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurven berechnet. Das Restfestigkeitsmodell ist somit für existierende Spannungs-Dehnungs-Modelle des Betons universal anwendbar.

Eine wesentliche Voraussetzung für wirklichkeitsnahe Ergebnisse des Restfestigkeitsmodells ist die korrekte Bestimmung der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des umschnürten Betons. Zu diesem Zweck wurde ein eigenes semi-empirisches Spannungs-Dehnungs-Modell für den Beton vorgestellt und verifiziert, das die Interaktion zwischen Umschnürung und Beton im transversal-isotropischen Fall berücksichtigt. Die beiden charakteristischen Merkmale des Modells sind:

- Abbilden des mehraxialen Dehnverhaltens und damit der lastabhängigen Dilatanz des Betons über eine empirische Funktion der Volumendehnung, abhängig von der radialen Vorspannung;
- Steuern des plastischen Anstiegs der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve mit einer empirischen Funktion für die Tangentenneigung, die nur von einaxialer Festigkeit und Umschnürungsmodul abhängt.

Das Modell ist auf die Fragestellung dieser Arbeit zugeschnitten und verlangt nur wenige betonspezifische Eingangsparameter. Zur Simulation der Umschnürung können eigenständige Modelle des umschnürenden Materials mit dem Spannungs-Dehnungs-Modell des Betons kombiniert werden, das eine Schnittstelle dafür bietet.

Mit dem Ziel einer wirklichkeitsnahen Abbildung wurden insbesondere die in den Versuchen verwendeten Stahlbänder in der Modellbildung genauer berücksichtigt. An Hand von Finite-Elemente-Berechnungen kann gefolgert werden: Die Biegung während der Montage einlagiger elasto-plastischer Umschnürungen kann deutlichen Einfluss auf die effektive Zugkraft-Dehnungs-Kurve derartiger Umschnürungen haben. Dies hat vor allem Auswirkung auf die mit dem Gesamtmodell berechneten radialen Dehnungen des Betons und sollte deshalb berücksichtigt werden.

Eine zentrale Frage dieser Arbeit war die Eignung verschiedener Materialien als vorspannende Umschnürung. Zur fundierten Beantwortung wurden Berechnungen mit den vorgestellten Modellen und die ausgeführten Versuche herangezogen. Wie die Ergebnisse zeigen, könnten vor allem mit faserverstärkten Kunststoffen, aber auch mit Stahl die Effekte einer vorgespannten Umschnürung genutzt werden. Gleichwohl bleibt das mechanische Erzeugen der Vorspannung eine bautechnische Herausforderung.

Thermisch vorspannbare Formgedächtnislegierungen bieten einen Ansatzpunkt zur Lösung dieses Problems. Im axialen Temperatur-Zug-Versuch an der Legierung Fe-Mn-Si-Cr wurden  $206 \text{ N/mm}^2$  Vorspannung erreicht. Nach Kühlung unter Raumtemperatur fiel die Vorspannung noch auf  $100 \text{ N/mm}^2$  ab. Die Legierung ist jedoch im Vorspannzustand ein Phasengemisch, da die kritische Spannung und damit das pseudoplastische Plateau der Spannungs-Dehnungs-Kurve erreicht wurden. Es ist zu vermuten, dass diese Tatsache auf alle FGL zutrifft.

Obwohl die Zugsteifigkeit einer derart vorgespannten FGL-Umschnürung gering ist, konnte ihre positive Auswirkung auf Restfestigkeit und axiale Steifigkeit mit den in dieser Arbeit enthaltenen Modellen nachgewiesen werden. Ähnliche Ergebnisse sind auch mit nicht vorgespannter Umschnürung erreichbar, wenn entweder deren Zugsteifigkeit sehr hoch ist oder deutlich mehr Material für die Umschnürung eingesetzt wird.

Wie Berechnungen zeigen, ist FGL-Umschnürung, zumindest bis zu einer begrenzten Überlast, jedoch deutlich leistungsfähiger als ungespannte konventionelle Umschnürung, wenn das pseudoplastische Plateau der FGL im Vorspannzustand bei etwa  $450 \text{ N/mm}^2$  oder mehr liegt. An Hand dieser Ergebnisse kann gefolgert werden, dass FGL für Umschnürungen infrage kommen, wenn ihre Materialeigenschaften weiter verbessert werden und wenn akzeptiert werden kann, dass sie nur für begrenzte Überlasten wirksam sind.

## 6.2 Ausblick

Mit dem Restfestigkeitsmodell können bei sehr kleinen Überlasten und vorgespannter Umschnürung Restfestigkeiten berechnet werden, die deutlich größer als die einaxiale Festigkeit sind. Dies sollte zunächst experimentell umfänglicher abgesichert werden, bevor Restfestigkeiten im Bereich über der einaxialen Festigkeit in Ansatz gebracht werden.

Im vorgestellten semi-empirischen Modell des Betons werden einige Koeffizienten unabhängig von den Betoneigenschaften als konstant angenommen. Dies sollte unbedingt mit einer breiteren Basis von Versuchsergebnissen überprüft werden, bevor generelle Anwendung möglich wird.

Das verwendete vereinfachte Modell der FGL wird an der Schnittstelle zum Beton mittels eines fiktiven Spannungs-Dehnungs-Ursprungs angepasst. Durch alternative Berechnungen sollte diese Annahme untersetzt oder verbessert werden.

Mit dem Ziel vorgespannte Umschnürungen für nicht ausschließlich axial überlastete Betondruckglieder einzusetzen, sollten weitere Untersuchungen auch Schub- sowie Biegebeanspruchung des Druckglieds einschließen. Damit werden die Voraussetzungen komplettiert, das Verhalten von Stützen unter seismischer Last zu berechnen.

Einen Anknüpfungspunkt für weitere Forschung bieten auch die Tastversuche mit niederzyklischer Last in dieser Arbeit. Es wurde im Versuch gezeigt das Vorspannung der Umschnürung auch hier wirksam ist. Darüber hinaus sollten Lastamplituden und Belastungsgeschwindigkeiten untersucht werden, die für seismische Lasten relevant sind.

Weitere Schritte in Richtung einer alternativen Technik für vorgespannte Umschnürungen betreffen die Formgedächtnislegierungen selbst. Materialwissenschaftler und Ingenieure sind gefragt, die Werte von Steifigkeit und Vorspannung zu erhöhen. Gleichwohl gilt es, den Anteil von teuren Legierungselementen gering zu halten. In Anbetracht der jüngst veröffentlichten Ergebnisse einer thermisch auf  $580 \text{ N/mm}^2$  vorgespannten eisenbasierten FGL [131] können weitere Forschungen an Umschnürungen aus FGL empfohlen werden.

Auch die mechanische Vorspannung von Umschnürungen, z. B. aus CFVK, stellt eine interessante Alternative dar, deren Anwendbarkeit untersucht werden sollte.

Für die genannten Schritte können die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wegweisend sein, um zukünftig den wesentlichen Vorteil der Vorspannung von Umschnürungen in der Bau Praxis nutzbar zu machen, nämlich die deutlich geringere Entfestigung des umschnürten Betons bei Lasten über der einaxialen Traglast.



# Anhang A

## Vorzeichen, Hauptspannungen, Achsen

A.1	Vorzeichen . . . . .	140
A.2	Vorzeichen der Materialfestigkeit . . . . .	140
A.3	Hauptspannungen und deren Indizes . . . . .	140
A.4	Hauptspannungsachsen bei allseitig gedrücktem Körper . . . . .	141

## A.1 Vorzeichen

Für eine konsistente Darstellung werden in dieser Arbeit nachfolgende Konventionen eingehalten. Mit positivem Vorzeichen angenommen werden:

- Zugkraft und Zugspannung
- Längenzunahme und (Zug-)dehnung
- Volumendehnung bei Volumenzunahme

Dehnungen können sowohl positives als auch negatives Vorzeichen haben. Für negative Dehnung infolge Längenabnahme wird synonym der Begriff Stauchung benutzt. Bild A.1 zeigt, wie die Wirkungsrichtung von Spannungen, passend zur Vorzeichenkonvention, anschaulich dargestellt wird. Beispielhaft wird die Druckspannung einer Richtung auf ein infinitesimales Volumenelement angegeben.

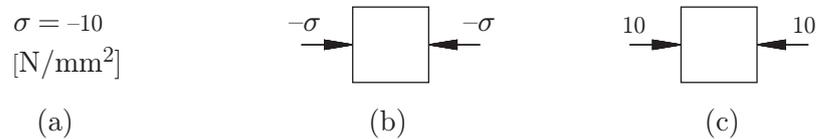


Bild A.1: Vorzeichenkonvention am Beispiel einer Druckspannung: (a) Variable, Betrag und Vorzeichen, (b) Pfeilrichtung mit Variable und Vorzeichen und (c) Pfeilrichtung mit Betrag

## A.2 Vorzeichen der Materialfestigkeit

In den Berechnungen dieser Arbeit werden Festigkeitswerte von Materialien vorzeichengerecht verwendet. Die Betonfestigkeit  $f_{c0}$ , z. B. wird mit negativem Vorzeichen eingesetzt, da sie eine Druckspannung ist. Wenn  $f_{c0}$  nur informativ genannt wird, so kann das Vorzeichen weggelassen werden.

## A.3 Hauptspannungen und deren Indizes

In jedem Punkt eines belasteten Körpers gibt es drei aufeinander senkrecht stehende Flächen, die frei von Schubspannungen sind. Die Normalspannungen auf diesen Flächen sind Extremwerte, sie werden als Hauptnormalspannungen (oder vereinfacht als Hauptspannungen) bezeichnet [70]. Wird der Körper allseits aus den Richtungen eines kartesischen Koordinatensystems gedrückt (Bild A.2a), wobei die jeweils gegenüberliegenden Spannungen gleich groß sind, und gilt  $\sigma_x = \sigma_y$ , dann ist das kartesische Koordinatensystem deckungsgleich mit den Achsen der Hauptspannungen (Bild A.2b).

Die Hauptspannungen werden nach ihrer Größe absteigend indiziert ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ). Bei einaxialer oder allseitiger Drucklast und negativem Vorzeichen für Druck, ist  $\sigma_3$  die betragsmäßig größte Hauptdruckspannung;  $\sigma_2$  und  $\sigma_1$  sind die betragsmäßig kleineren Druckspannungen (siehe Bild A.2b). Die Indizes werden für die zugehörigen Dehnungen übernommen.

#### A.4 Hauptspannungsachsen bei allseitig gedrücktem Körper

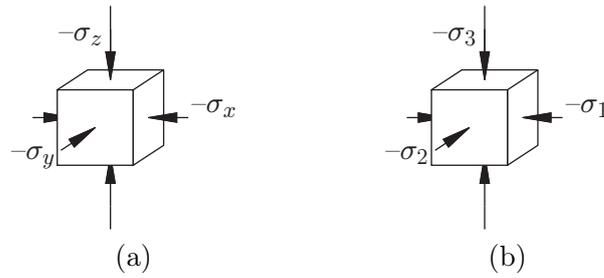


Bild A.2: Spannungen am Materialpunkt: (a) in kartesischen Koordinaten und (b) Hauptspannungen

#### A.4 Hauptspannungsachsen bei allseitig gedrücktem Körper

Bei einem dreiachsig beanspruchten Körper können die Spannungen in einem räumlichen Koordinatensystem veranschaulicht werden. Bild A.3 zeigt in Skizze (a) ein rechtsdrehendes kartesisches Koordinatensystem. Davon ausgehend wird in dieser Arbeit für allseitig gedrückten Beton jedoch das Koordinatensystem in Skizze (b) benutzt. Hier ist der Oktant zum Betrachter gedreht, der allseitigen Druck enthält. Zur besseren Orientierung sind außerdem die Achsrichtungen getauscht.



Bild A.3: Koordinatensystem: (a) Standard, (b) gedreht



# Anhang B

## Beziehungen am Zylinder

B.1	Geometrie und Richtungen . . . . .	144
B.2	Gleichheit radialer und tangentialer Dehnung . . . . .	144
B.3	Transversale Isotropie . . . . .	144
B.4	Umschnürungsdruck aus Ringzug . . . . .	144
B.5	Vergleich der Querspannungen an Würfel und Zylinder . . . . .	145
B.6	Elastische Grundgleichungen für den umschnürten Zylinder . . . . .	146
B.7	Vorspannzustand mit Umschnürung, exakt und vereinfacht . . . . .	150
B.9	Axialer Elastizitätsmodul des umschnürten Systems . . . . .	152

## B.1 Geometrie und Richtungen

Bild B.1 zeigt wichtige Richtungen am Zylinder und deren Bezeichnung. Davon abgeleitet sind die Indizes a-axial, r-radial und t-tangential.

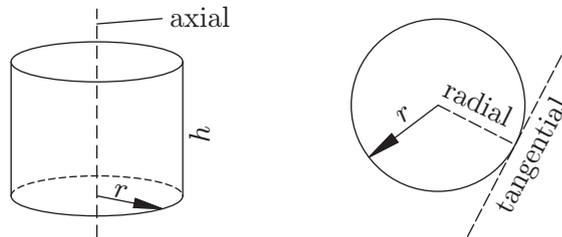


Bild B.1: Definition der Richtungen

## B.2 Gleichheit radialer und tangentialer Dehnung

Mit  $u = 2\pi r$  als Umfang des Zylinders sind die Dehnungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\Delta r}{r} \\ \varepsilon_t &= \frac{\Delta u}{u} = \frac{2\pi(r + \Delta r) - (2\pi r)}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}.\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t. \quad (\text{B.1})$$

## B.3 Transversale Isotropie

Ein Material, das nur eine ausgezeichnete Richtung hat, bei dem aber senkrecht dazu alle Richtungen gleichberechtigt sind, heißt transversal isotrop [178, S.143]. Dies trifft auf den Zylinder zu.

## B.4 Umschnürungsdruck aus Ringzug

Für eine Umschnürung gemäß Bild B.2 ist folgendes gesucht: radiale Spannung  $\sigma_r$  auf der Oberfläche des ummantelten Zylinders, die durch eine tangentielle Spannung  $\sigma_t$  im Mantel der Dicke  $t$  verursacht wird. Eine Lösung dieses Problems ist auch als Kesselformel bekannt, da  $\sigma_r$  wie der Innendruck in einem zylindrischen Kessel wirkt.

Die tangentielle Zugkraft im Mantel pro Einheit der Zylinderhöhe  $h$  ist einerseits

$$F_t = \sigma_t t h. \quad (\text{B.2})$$

Wird  $F_t$  an den Symmetrieachsen des Querschnitts frei geschnitten, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte einer Richtung

$$\sum F \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow.$$

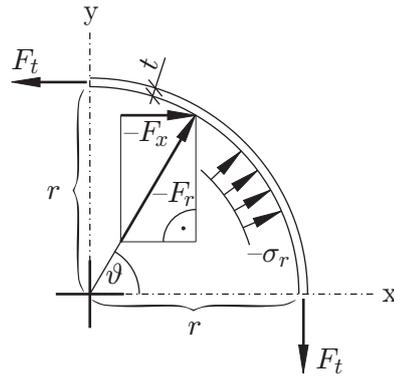


Bild B.2: Bezeichnungen am umschnürten Zylinder

eine zweite Gleichung für die Zugkraft im Mantel:

$$0 = -F_t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_x(\vartheta) \, d\vartheta \quad (\text{B.3})$$

mit:

$$F_x(\vartheta) = F_r \cos \vartheta$$

$$F_r = \sigma_r r \, d\vartheta \, h .$$

Auswertung des Integrals (B.3) liefert:

$$F_t = -\sigma_r h r \sin \vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_t = -\sigma_r h r . \quad (\text{B.4})$$

Durch Gleichsetzen von (B.2) und (B.4)

$$\sigma_t t h = -\sigma_r h r$$

und Umstellen erhält man die gesuchte Beziehung

$$\sigma_r = -\sigma_t \frac{t}{r} . \quad (\text{B.5})$$

## B.5 Vergleich der Querspannungen an Würfel und Zylinder

Die Auswirkungen von Querdruck auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton wurde in der Literatur an Hand von Würfeln oder Zylindern untersucht. Es soll hier anschaulich gezeigt werden, dass deren Spannungszustand gleich ist, wenn der Querdruck allseits gleich ist.

Bild B.3 zeigt als Draufsicht ein infinitesimales Volumenelement in ebenen polaren Koordinaten (Zylinderkoordinaten), mit radialer Spannung  $\sigma_r$  und Ringspannung  $\sigma_\vartheta$ . Das Volumenelement befindet sich innerhalb eines Würfels. Die Spannungen auf den Würfelseiten  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  sind in kartesischen Koordinaten gegeben.

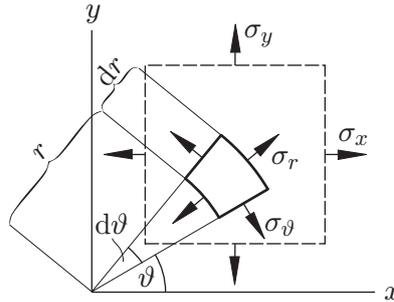


Bild B.3: Spannungskomponenten in kartesischen und ebenen polaren Koordinaten

Die Transformation der Spannungen von kartesischen zu ebenen polaren Koordinaten [70] vereinfacht sich in Abwesenheit von Schubspannungen zu

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_x \sin^2 \vartheta + \sigma_y \cos^2 \vartheta.\end{aligned}\tag{B.6}$$

Wenn gilt:

$$\sigma_x = \sigma_y\tag{B.7}$$

dann werden die Gleichungen (B.6) zu

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \sigma_x (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)$$

und vereinfacht zu

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \sigma_x.\tag{B.8}$$

Also ist der Spannungszustand in Würfel und Zylinder identisch, wenn die Querdrücke auf den Würfelseiten und der Umschnürungsdruck auf dem Zylindermantel gleich groß sind. Außerdem wird klar, dass  $\sigma_r$  und  $\sigma_\vartheta$  überall im Zylinderquerschnitt gleich groß sind.

Mit den Ausführungen zu den Hauptspannungen in Anhang A ergibt sich außerdem, dass die Hauptspannungen bei Würfeln und Zylindern identisch sind, wenn gilt  $\sigma_z = \sigma_a$  und  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$ .

## B.6 Elastische Grundgleichungen für den umschnürten Zylinder

In der vorliegenden Arbeit dient der umschnürte linear-elastische Zylinder als Vergleichsmaßstab für den umschnürten Zylinder aus Beton (siehe Abschnitt 4.1.1). Auch das Verhalten des umschnürten Betonzylinders im Vorspannzustand wird als vollkommen linear-elastisch betrachtet. Deshalb werden im Folgenden grundlegende Gleichungen der Spannungen und Dehnungen hergeleitet, die für den linear-elastischen Zylinder mit linear-elastischer Umschnürung gelten. Die Umschnürung wird als Mantel angenommen, über dessen Dicke Dehnung und Spannung konstant sind. Der umschnürende Mantel darf keine axiale Steifigkeit haben.

Die allgemeinen Grundgleichungen zur Elastizitätstheorie in diesem Absatz werden aus [178] wiedergegeben. Linear-elastisches Materialverhalten kann für den einaxialen Fall

durch das HOOKEsche Gesetz mit  $E$  als Proportionalitätskonstante bzw. Elastizitätsmodul beschrieben werden:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (\text{B.9})$$

Das für den dreiaxialen Fall verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz kann in einem Gleichungssystem formuliert werden. Für den Sonderfall eines isotropen Materials lautet es in Form der sechs unabhängigen Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Die Dehnungen, Gleitungen, Normalspannungen und Schubspannungen sind mit  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  und  $\tau$  bezeichnet. Die POISSONSche Zahl bzw. Querdehnzahl ist  $\nu$ .

Für ein Hauptachsensystem sind die Schubspannungen Null, damit entfallen die Gleitungen  $\gamma$ . Wie bereits gezeigt, ist das kartesische Hauptachsensystem am umschnürten und axial belasteten Zylinder deckungsgleich mit axialer und radialer Richtung. Wenn die  $z$ -Achse parallel zur Rotationsachse des Zylinders ist, dann gilt  $\sigma_z = \sigma_a$  und  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$ . Damit vereinfacht sich (B.10) zu

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_{c0}} [\sigma_r - \nu(\sigma_r + \sigma_a)] \quad (\text{B.11})$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_{c0}} (\sigma_a - \nu 2\sigma_r). \quad (\text{B.12})$$

In (B.11) und (B.12) wurde  $E$  mit dem Elastizitätsmodul des Betons  $E_{c0}$  gleichgesetzt. Als Gleichung für  $\sigma_r$  wird (B.5)

$$\sigma_r = -\sigma_t \frac{t}{r}$$

genutzt, wobei die Spannung der Umschnürung gemäß (B.9) wie folgt eingesetzt wird:

$$\sigma_t = E_t (\varepsilon_{tpN} + \varepsilon_{tr}). \quad (\text{B.13})$$

$E_t$  ist der Elastizitätsmodul der Umschnürung. Die nominale tangentielle Dehnung  $\varepsilon_{tpN}$  wird durch Vorspannung verursacht; Sie ist die Solldehnung. Es wird angenommen, dass die Umschnürung beim Vorspannen auf der Zylinderoberfläche gleiten kann oder über eine Zwangsspannung erzeugt wird. Die tangentielle Dehnung  $\varepsilon_{tr}$  entsteht infolge der geometrischen Kopplung gemäß (B.1). Es gilt  $\varepsilon_r = \varepsilon_{tr}$ . Durch Einsetzen wird (B.5) zu

$$\sigma_r = -(\varepsilon_r + \varepsilon_{tpN}) E_t \frac{t}{r}. \quad (\text{B.14})$$

Diese Gleichung vereinfacht sich durch Substitution mit dem Umschnürungsmodul gemäß (2.19)

$$C = \frac{E_t t_e}{r},$$

mit  $t = t_e$ , zu

$$\sigma_r(\varepsilon_r) = -C\varepsilon_r + C\varepsilon_{tpN}. \quad (\text{B.15})$$

Der negative Umschnürungsmodul  $C$  ist also der konstante Anstieg der  $\sigma_r$ - $\varepsilon_r$  Kurve. Der konstante Term  $C\varepsilon_{tpN}$  ist gleich der nominalen radialen Vorspannung  $\sigma_{rtpN}$ . In Bild B.4a und Bild B.4b sind Funktionsgraphen für  $\sigma_r(\varepsilon_r)$  prinzipiell dargestellt.

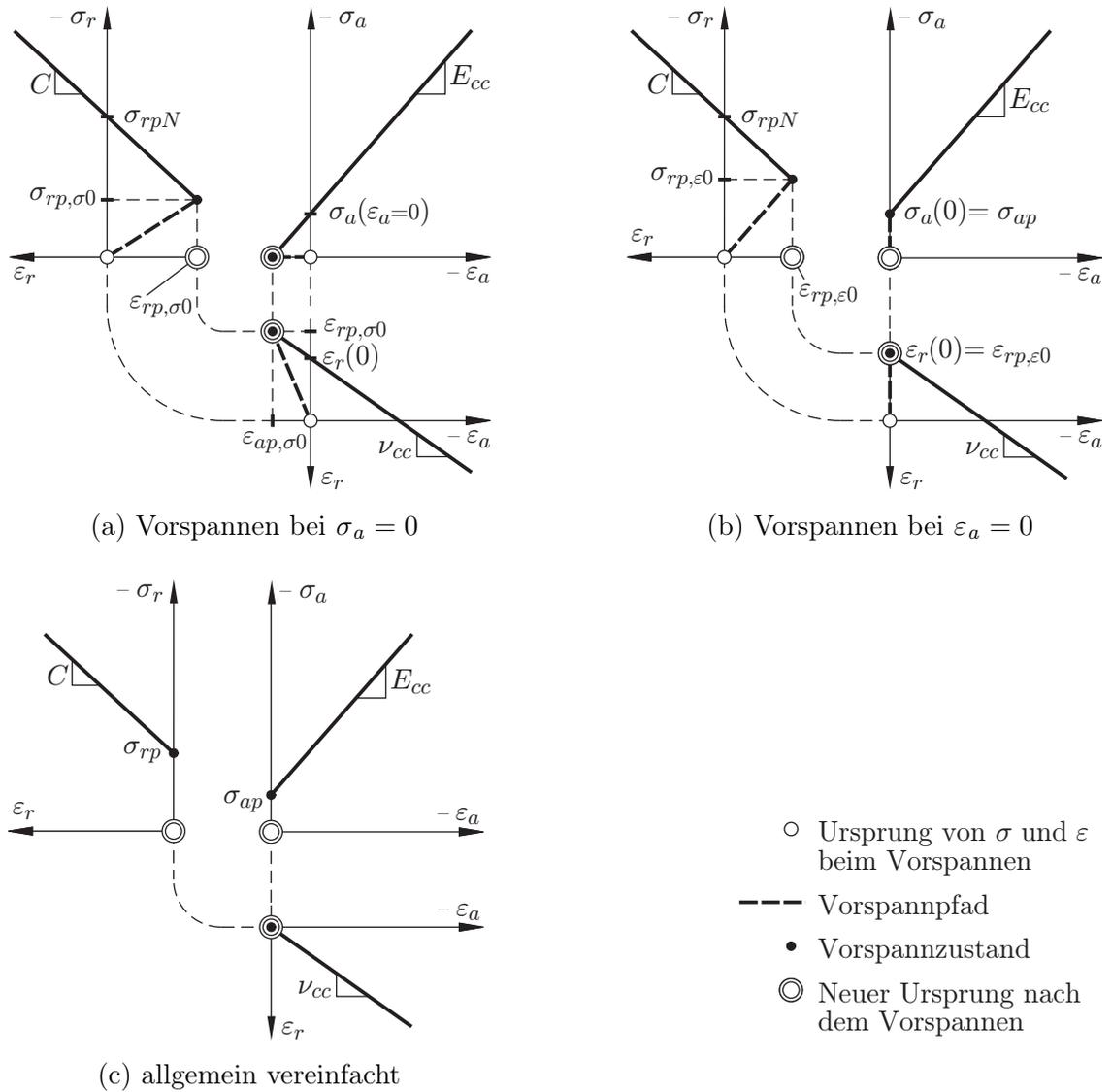


Bild B.4: Spannungen und Dehnungen beim Vorspannen: (a,b) exakt und (c) vereinfacht

Einsetzen von (B.15) in (B.12) und Vereinfachen liefert:

$$\sigma_a = E_{c0}\varepsilon_a - 2C\nu(\varepsilon_r + \varepsilon_{tpN}) . \quad (\text{B.16})$$

Einsetzen von (B.15) in (B.11) und Vereinfachen führt weiterhin zu:

$$\varepsilon_r = -\frac{C\varepsilon_{tpN} - C\nu\varepsilon_{tpN} + \nu\sigma_a}{C + E_{c0} - C\nu} . \quad (\text{B.17})$$

In (B.17) wird  $\sigma_a$  durch (B.16) ersetzt. Nach Vereinfachen ist

$$\varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_{tpN} - \nu\varepsilon_a}{1 + \frac{C}{E_{c0}}(1 - \nu - 2\nu^2)} - \varepsilon_{tpN} . \quad (\text{B.18})$$

Mit dieser Gleichung werden axiale und radiale Dehnung am linear-elastischen umschnürten Zylinder direkt verknüpft. Durch Einsetzen von (B.18) in (B.14) kann die radiale Spannung direkt aus  $\varepsilon_a$  berechnet werden.

Der Charakter der Funktion  $\varepsilon_r(\varepsilon_a)$  wird deutlicher nach Umwandeln von (B.18) in

$$\varepsilon_r(\varepsilon_a) = -\frac{\nu}{1 + \frac{C}{E_{c0}}(1 - \nu - 2\nu^2)}\varepsilon_a + \left( \frac{1}{1 + \frac{C}{E_{c0}}(1 - \nu - 2\nu^2)} - 1 \right) \varepsilon_{tpN}, \quad (\text{B.19})$$

also in die Normalform einer linearen Funktion nach folgendem Schema:

$$\varepsilon_r(\varepsilon_a) = -\nu_{cc}\varepsilon_a + \varepsilon_r(0). \quad (\text{B.20})$$

Darin ist der Term

$$\nu_{cc} = \frac{\nu}{1 + \frac{C}{E_{c0}}(1 - \nu - 2\nu^2)} \quad (\text{B.21})$$

der konstante Anstieg der radialen Dehnung, nach dem Vorspannen, der als Querdehnzahl des umschnürten Systems interpretiert werden kann. Der konstante Term

$$\varepsilon_r(0) = \left( \frac{1}{1 + \frac{C}{E_{c0}}(1 - \nu - 2\nu^2)} - 1 \right) \varepsilon_{tpN} \quad (\text{B.22})$$

ist der Schnittpunkt der Kurve mit der Achse der radialen Dehnung.

Zur Herleitung von  $\sigma_a(\varepsilon_a)$  wird  $\varepsilon_r$  in (B.16) durch (B.18) ersetzt. Vereinfachen führt zu

$$\sigma_a = E_{c0}\varepsilon_a + \frac{2E_{c0}(\nu^2\varepsilon_a - \nu\varepsilon_{tpN})}{\frac{E_{c0}}{C} + 1 - \nu - 2\nu^2}. \quad (\text{B.23})$$

Diese Funktion wird wiederum anschaulicher, wenn in die Normalform der linearen Funktion umgewandelt wird:

$$\sigma_a(\varepsilon_a) = E_{c0} \left( 1 + \frac{2\nu^2}{\frac{E_{c0}}{C} + 1 - \nu - 2\nu^2} \right) \varepsilon_a - \frac{2E_{c0}\nu}{\frac{E_{c0}}{C} + 1 - \nu - 2\nu^2} \varepsilon_{tp}. \quad (\text{B.24})$$

(B.24) wird zusammengefasst zu

$$\sigma_a(\varepsilon_a) = E_{cc}\varepsilon_a + \sigma_a(0). \quad (\text{B.25})$$

Der Term

$$E_{cc} = E_{c0} \left( 1 + \frac{2\nu^2}{\frac{E_{c0}}{C} + 1 - \nu - 2\nu^2} \right) \quad (\text{B.26})$$

ist der konstante Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve, des linear-elastischen Zylinders, nach dem Vorspannen. Er kann als axialer Elastizitätsmodul des umschnürten Systems interpretiert werden. Die Konstante

$$\sigma_a(0) = -\frac{2E_{c0}\nu}{\frac{E_{c0}}{C} + 1 - \nu - 2\nu^2} \varepsilon_{tpN} \quad (\text{B.27})$$

markiert den Schnittpunkt der Kurve mit der Achse der axialen Spannung.

Eine Funktion  $\sigma_r(\varepsilon_a)$  für den Querdruck ergibt sich nach Einsetzen von (B.20) in (B.15) und Vereinfachen zu

$$\sigma_r(\varepsilon_a) = \nu_{cc} C \varepsilon_a - \left( \varepsilon_r(0) + \varepsilon_{tpN} \right) C. \quad (\text{B.28})$$

Auch diese Funktion ist linear.

Mit (B.15), (B.20) und (B.25) sind jetzt drei anschauliche lineare Funktionen  $\sigma_r(\varepsilon_r)$ ,  $\varepsilon_r(\varepsilon_a)$  und  $\sigma_a(\varepsilon_a)$  gegeben, die das Verhalten des linear-elastischen, umschnürten Zylinders beschreiben. Die nominale Vorspannung und der Vorspannverlust infolge Elastizität des Zylinders werden berücksichtigt. Die zugehörigen Funktionsgraphen und Konstanten sind in Bild B.4 prinzipiell dargestellt.

## B.7 Vorspannzustand mit Umschnürung, exakt und vereinfacht

Mit den bisher angegebenen Funktionen werden Spannungen und Dehnungen am linear-elastischen, umschnürten Zylinder verknüpft. Allerdings sind die Spannungen und Dehnungen im Vorspannzustand noch unbekannt. Mindestens notwendig ist aber die Kenntnis der radialen Querverstauchung infolge Vorspannen, da die tatsächlich erzielte Vorspannung davon abhängt.

Eine geschlossene analytische Lösung für den Vorspannzustand ist nur möglich, wenn eine Spannung oder Dehnung bekannt ist. Für zwei Sonderfälle ist dies der Fall: Bei freier Längsausdehnung mit  $\sigma_a = 0$  und bei vollständig verhinderter Längsausdehnung mit  $\varepsilon_a = 0$ . Freie Längsausdehnung beim Vorspannen ist für die Versuche dieser Arbeit zutreffend. An einem realen Bauteil wird der Vorspannzustand zwischen den beiden Sonderfällen liegen.

Für freie Längsausdehnung sind die prinzipiellen Spannungs-Dehnungs-Linien in Bild B.4a gezeigt. Die axiale Ausdehnung im Vorspannzustand  $\varepsilon_{ap,\sigma 0}$  ist die Nullstelle von (B.25), also

$$\varepsilon_{ap,\sigma 0} = -\frac{\sigma_a(0)}{E_{cc}}. \quad (\text{B.29})$$

Einsetzen von (B.29) in (B.28) liefert den Querdruck im Vorspannzustand bei  $\sigma_a = 0$ :

$$\sigma_{rp,\sigma 0} = C \left( \nu_{cc} \varepsilon_{ap,\sigma 0} - \varepsilon_r(0) - \varepsilon_{tpN} \right). \quad (\text{B.30})$$

Die zugehörige radiale Stauchung erhält man durch Einsetzen von (B.29) in (B.20):

$$\varepsilon_{rp,\sigma 0} = -\nu_{cc} \varepsilon_{ap,\sigma 0} + \varepsilon_r(0). \quad (\text{B.31})$$

Der Sonderfall eines axial starren Zylinders ist in Bild B.4a gezeigt. Es gilt

$$\varepsilon_{rp,\varepsilon 0} = \varepsilon_r(0). \quad (\text{B.32})$$

Die axiale Spannung aus Vorspannen bei  $\varepsilon_a = 0$  kann aus (B.27) bestimmt werden, da gilt:

$$\sigma_{ap} = \sigma_a(0). \quad (\text{B.33})$$

Der Querdruck im Vorspannzustand ergibt sich aus der mit  $\varepsilon_a = 0$  vereinfachten Gleichung (B.28) zu

$$\sigma_{rp,\varepsilon 0} = -C \left( \varepsilon_r(0) + \varepsilon_{tpN} \right). \quad (\text{B.34})$$

Kennung	$C$ [N/mm <sup>2</sup> ] (Tab. 3.5)	$\sigma_{rpN}$ [N/mm <sup>2</sup> ] (Tab. 3.6)	$\varepsilon_{rp,\sigma 0}$ [‰] (B.31)	$\sigma_{rp,\sigma 0}$ [N/mm <sup>2</sup> ] (B.30)	Verlust
s1 p1	496	-1.40	-0.04	-1.38	1.4 %
s2 p1	992	-1.40	-0.04	-1.36	2.8 %
s2 p2	992	-2.70	-0.08	-2.62	2.8 %
s3 p1	1727	-1.40	-0.04	-1.33	4.8 %
s3 p2	1727	-2.70	-0.08	-2.57	4.8 %

Tabelle B.1: Vorspannverluste für Serie B

Mit den exakten Gleichungen des Vorspannzustands können jetzt der tatsächliche Querdruck  $\sigma_{rp}$  und die nachlassende Dehnung der Umschnürung ( $= \varepsilon_{rp}$ ) infolge Elastizität des Zylinders, errechnet werden. Diese Werte dienen der möglichst wirklichkeitsnahen Abbildung des Querdrucks.

Anwendung auf die Versuche der Serie B (Abschnitt 3.2) ergibt die in Tabelle B.1 angegebenen Werte. Es gilt der Sonderfall freier Längsausdehnung beim Vorspannen.  $E_{c0}$  wurde mit 30080 N/mm<sup>2</sup> eingesetzt, also dem Ergebnis der Standardversuche (Tabelle 3.2). Für  $\nu$  wurde 0.12 eingesetzt. Dies ist ein typischer Wert, wie er in den Versuchen zu Beginn der Belastung gemessen wurde.

Im Vergleich zur nominalen Vorspannung, ist die tatsächliche Vorspannung um bis zu 5 % geringer.

Die Dehnungen des Betons im Vorspannzustand sind erwartungsgemäß sehr klein. Werden diese Dehnungen für nachfolgende axiale Last vernachlässigt, so ergeben sich sinnvolle Vereinfachungen des Formelapparats. Bild B.4 zeigt einen Vorschlag dazu. Werden axiale und radiale Dehnungen nach dem Vorspannen zu Null gesetzt, so ergibt sich für nachfolgende axiale Last die in Bild B.4c dargestellte Situation. Die vereinfachten Funktionen der axialen und radialen Spannungs-Dehnungs-Kurven lauten dann:

$$\sigma_a(\varepsilon_a) = E_{cc} \varepsilon_a + \sigma_{ap}, \quad (\text{B.35})$$

$$\sigma_r(\varepsilon_r) = -C\varepsilon_r + \sigma_{rp}. \quad (\text{B.36})$$

Die Werte  $\sigma_{ap}$  und  $\sigma_{rp}$  werden aus der exakten Berechnung übernommen, mit  $\sigma_{ap} = 0$  bei freier Längsausdehnung im Vorspannzustand. Vereinfacht wird  $\varepsilon_r(\varepsilon_a)$  zu

$$\varepsilon_r(\varepsilon_a) = -\nu_{cc} \varepsilon_a. \quad (\text{B.37})$$

## B.8 Vorspannzustand vereinfacht ohne Umschnürung

Unter Umständen kann es ausreichend sein, die Dehnungen im Vorspannzustand näherungsweise am Zylinder ohne Umschnürung zu berechnen. Die Vorspannung wird dann nur durch einen konstanten Wert  $\sigma_r = \sigma_{rp}$  berücksichtigt. Vorspannverluste durch Abbau der nominalen Vorspannung  $\sigma_{rpN}$  infolge elastischer Stauchung des Zylinders werden nicht erfasst.

Für freie Längsausdehnung im Vorspannzustand mit  $\sigma_a = 0$  wird (B.12) zu

$$\varepsilon_{ap} = -\frac{2\sigma_{rp}\nu}{E_{c0}} \quad (\text{B.38})$$

und (B.11) zu

$$\varepsilon_{rp,\sigma 0} = \frac{\sigma_{rp}(1-\nu)}{E_{c0}}. \quad (\text{B.39})$$

Bei vollständig verhinderter Längsausdehnung mit  $\varepsilon_a = 0$  ergibt sich die Lösung wie folgt: Vereinfachen und Umstellen von (B.12) nach

$$\sigma_{ap} = 2\sigma_{rp}\nu. \quad (\text{B.40})$$

Gleichsetzen von (B.40) mit der nach  $\sigma_a$  umgestellten Gleichung (B.12) und anschließend Umstellen nach

$$\varepsilon_{rp,\varepsilon 0} = \frac{\sigma_{rp}(1-\nu-2\nu^2)}{E_{c0}}. \quad (\text{B.41})$$

## B.9 Axialer Elastizitätsmodul des umschnürten Systems

In Abschnitt 4.1 dieser Arbeit dient der Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des linear-elastischen Zylinders zum Berechnen der freigesetzten Energie. In Abschnitt 4.1.5 wird der darauf aufbauende Schädigungsindikator genutzt, um die Restfestigkeit des umschnürten Betons zu normieren. Sowohl umschnürter als auch nicht umschnürter linear-elastischer Zylinder gehen in die Berechnung ein. In diesem Abschnitt soll zur Vereinfachung des Formelapparats geklärt werden, ob für beide Fälle ein einheitlicher Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve angenommen werden kann.

Mit (B.26) wird der axiale Elastizitätsmodul des umschnürten Systems  $E_{cc}$  angegeben für den Fall, dass sowohl der Zylinder als auch die Umschnürung linear-elastisch sind.  $E_{cc}$  ist verschieden vom Elastizitätsmodul des Zylindermaterials, für den  $E_{c0}$  eingesetzt wird. Es gilt  $E_{cc} \geq E_{c0}$ . Bild B.5 zeigt eine Parameterstudie für das Verhältnis  $E_{cc}/E_{c0}$  in Abhängigkeit vom Umschnürungsmodul  $C$ , mit ausgewählten Werten von  $E_{c0}$  und  $\nu$ , die in etwa auf ihren praktisch sinnvollen Grenzen liegen. Wie in Bild 3.10 gezeigt, sind Werte für  $C$ , die zwischen  $500 \text{ N/mm}^2$  und  $3000 \text{ N/mm}^2$  liegen, repräsentativ für konventionelle, baupraktisch übliche Umschnürungen und auch für die Versuche in dieser Arbeit.

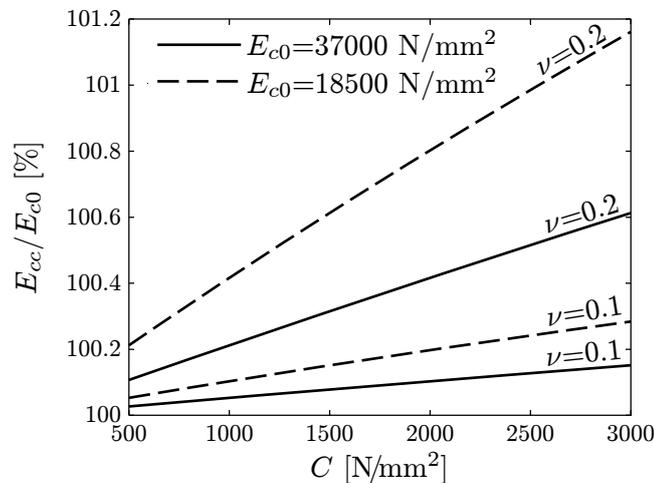


Bild B.5: Parameterstudie  $E_{cc}$  nach (B.26)

Offenbar ist  $E_{cc}$  im Bereich sinnvoller Parameterkombinationen nur geringfügig größer als  $E_{c0}$ , nämlich kaum mehr als 1.2% größer. Basierend auf dieser Erkenntnis wird vereinfachend  $E_{c0}$  für  $E_{cc}$  eingesetzt, wenn der Anstieg der axialen Spannungs-Dehnungs-Kurve des linear-elastischen, umschnürten Systems in Berechnungen dieser Arbeit genutzt wird.



# Anhang C

## Betoneigenschaften und Referenzzylinder

C.1	Betonrezeptur . . . . .	156
C.2	Referenzzylinder 600 mm . . . . .	156

### C.1 Betonrezeptur

Drei Chargen Beton wurden insgesamt hergestellt. Für alle Chargen wurde die selbe Rezeptur verwendet. Die Bereiche der Ist-Werte aller Chargen sind Tabelle C.1 zu entnehmen.

Zement CEM I 42.5 N	296 – 300 kg/m <sup>3</sup>
Wasser/Zement-Wert	0.62
Zuschlag	
0 – 4 mm	52 %
4 – 8 mm	21 %
8 – 16 mm	27 %

Tabelle C.1: Betonrezeptur Chargen I, II und III

### C.2 Referenzzylinder 600 mm

Serie	Beton-charge	Prüfalter [Tage]	Probenbezeichnung	$-F_{peak}$ [kN]	$-\varepsilon_{peak}$ [‰]	Bemerkung
A	I	132	r000A-1b	621.6	2.05	
			r000A-2b	615.5	2.02	
			Mittelwert	619	2.0	
B	II	33	r000B-1b	592.7	2.93	
			r000B-2b	571.0	2.73	
			r000B-3b	579.1	2.89	
			Mittelwert	581	2.8	
C	III	54	r000C-1b	643.1	2.00	
			r000C-2b	645.4	2.04	
			r000C-3b	631.5	1.86	
			Mittelwert	640	2.0	
D	II	242	–	664 <sup>a</sup>	–	<sup>a</sup> extrapoliert vom Mittelwert der Serie B, Prüfalalter 33 Tage, auf Basis des Verhältnisses der Würfeldruckfestigkeiten bei 242 Tagen und 33 Tagen: 581 kN · 44.0/38.5 = 664 kN

Tabelle C.2: Ergebnisse der Druckversuche der Referenzzylinder

Die Referenzzylinder mit 150 mm Durchmesser und 600 mm nominaler Höhe hatten keine Umschnürung, jedoch waren Verankerungsschellen wie bei den umschnürten Zylindern montiert (Bild 3.8 und Bild 3.9). Die Referenzzylinder der Serien A, B und C der Versuche wurden in der Druckprüfmaschine bis zum Bruch belastet. Tabelle C.2 fasst die wichtigsten Ergebnisse zusammen. Für Serie D wurden die Werte von Serie B extrapoliert, da Zylinder der Charge II mit zeitlichem Abstand genutzt wurden.

Die axiale Stauchung  $\varepsilon_{peak}$  bei Bruchlast  $F_{peak}$  wurde ermittelt aus der Verschiebung der Lastplatten und der Zylinderhöhe.



# Anhang D

## Zum Modell des Stahlbands der Versuche

D.1	Multilineare Kurven der einaxialen Zugversuche . . . . .	160
D.2	Finite-Elemente-Modell . . . . .	160
D.3	Laststufen . . . . .	162
D.4	Ausgewählte Ergebnisse . . . . .	163

### D.1 Multilineare Kurven der einaxialen Zugversuche

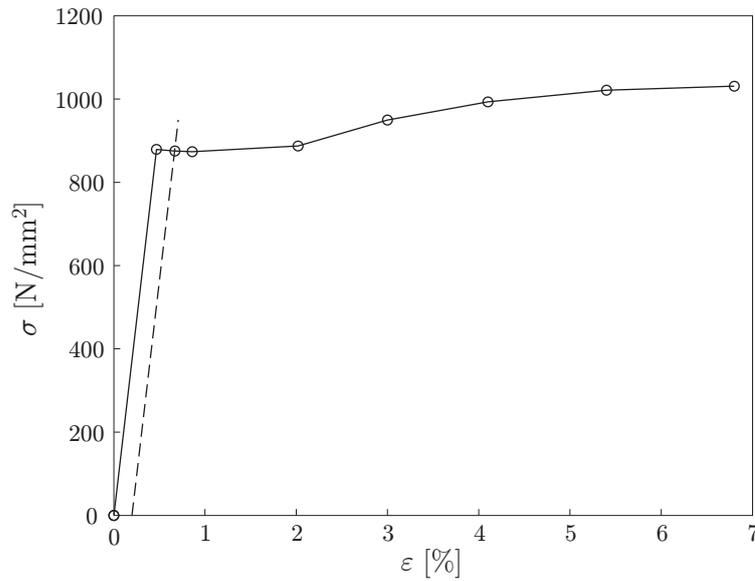


Bild D.1: Stahlband 0.5 mm

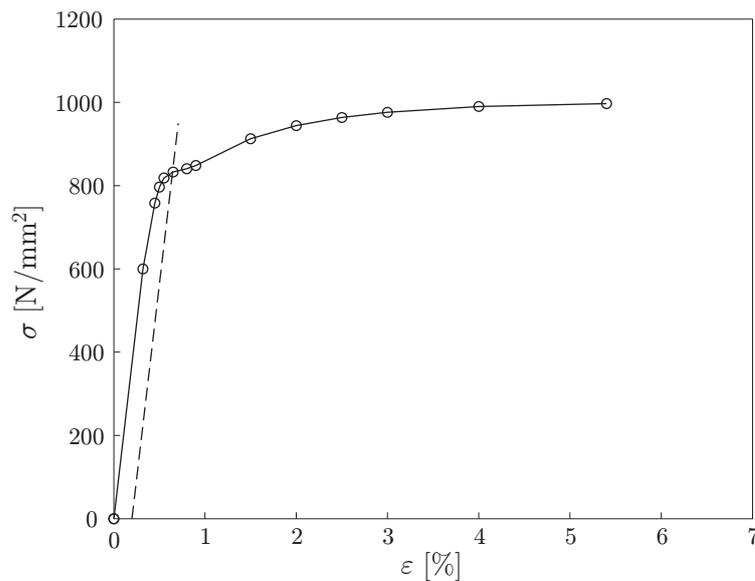


Bild D.2: Stahlband 0.8 mm

### D.2 Finite-Elemente-Modell

Der Anlass der FE-Berechnung wird in Abschnitt 4.4.1 beschrieben. Die Berechnungen wurden mit dem Programm Ansys in der Version 11 ausgeführt [14].

Bild D.3a zeigt die Vernetzung des Viertelzylinders mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$ . Für den Zylinder wurde das Element Solid 45 gewählt. Es hat acht Knoten und drei Verschiebungen als Freiheitsgrade je Knoten. Das Materialgesetz für Solid 45 ist linear-elastisch mit den Parametern nach Tabelle D.1.

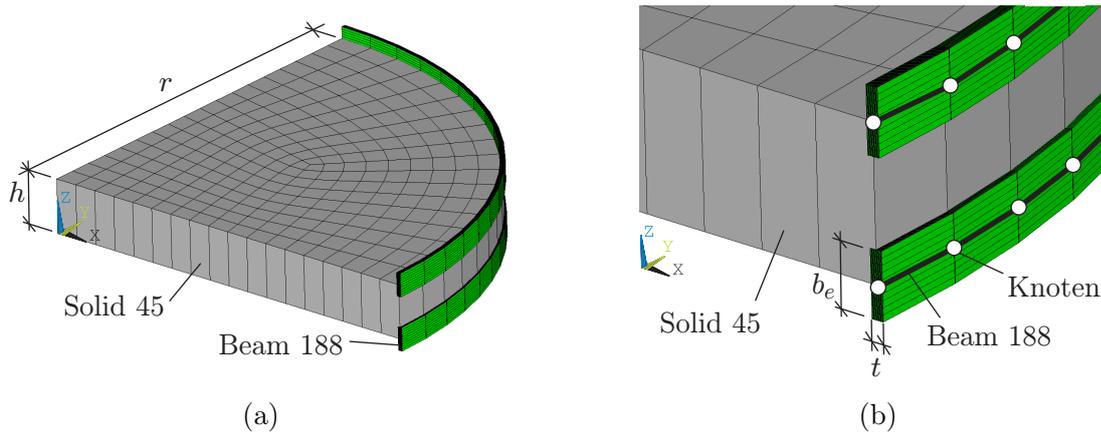


Bild D.3: Geometrie und Elemente: (a) gesamtes Modell und (b) Detail Umschnürung

Solid 45	Beam 188
$E = 30000 \text{ N/mm}^2$	$\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$
$\nu = 0.2$	$\nu = 0.3$
	MISO (Bild D.1 und Bild D.2)
	10 Schichten in $t$ -Richtung
	$t$
	$b_e$ nach (D.1)

Tabelle D.1: Parameter der Finiten Elemente

Als Abbild der Umschnürung werden die Knoten auf dem Mantel der Zylinder tangential, zusätzlich zum Solid 45, mit Beam 188-Elementen verbunden, wie in Bild D.3b dargestellt. Beam 188 ist ein Linienelement mit zwei Knoten. An jedem Knoten werden je drei Freiheitsgrade für Verschiebungen und Verdrehungen genutzt. Das Element hat die Eigenschaften eines Balkens nach TIMOSHENKO. Als Materialgesetz wird Multilineare isotrope Verfestigung (MISO) genutzt. Die Stützpunkte dafür wurden aus den Kurven der einaxialen Zugversuche der Stahlbänder gewonnen (Bild D.1 und Bild D.2). Weitere Parameter für die Beam 188-Elemente sind in Tabelle D.1 angegeben.

Die Breite der Balkenelement  $b_e$  in Bild D.3b entspricht nicht der tatsächlichen Breite der Umschnürung  $b$ , da  $h$  ungleich der Steigung  $s$  ist. Statt dessen wurde  $b_e$  nach folgender Formel angepasst, um die selbe Zugsteifigkeit zu erhalten wie bei der realen Umschnürung:

$$b_e = \frac{b h}{2 s}. \quad (\text{D.1})$$

Darin berücksichtigt der Faktor 2 die Symmetrie in axialer Richtung.

Die Randbedingungen für die Symmetrie sind in Bild D.4a dargestellt. Bild D.4b zeigt die Randbedingungen der Grundfläche. Alle Elemente sind ohne Masse. Alle lokalen Koordinatensysteme von Knoten und Elementen befinden sich im Zylinderkoordinatensystem wie in Bild D.4a gezeigt ( $u_\varrho, u_\vartheta, u_z$ ). Das kartesische Koordinatensystem in den Abbildungen dient nur zur Orientierung.

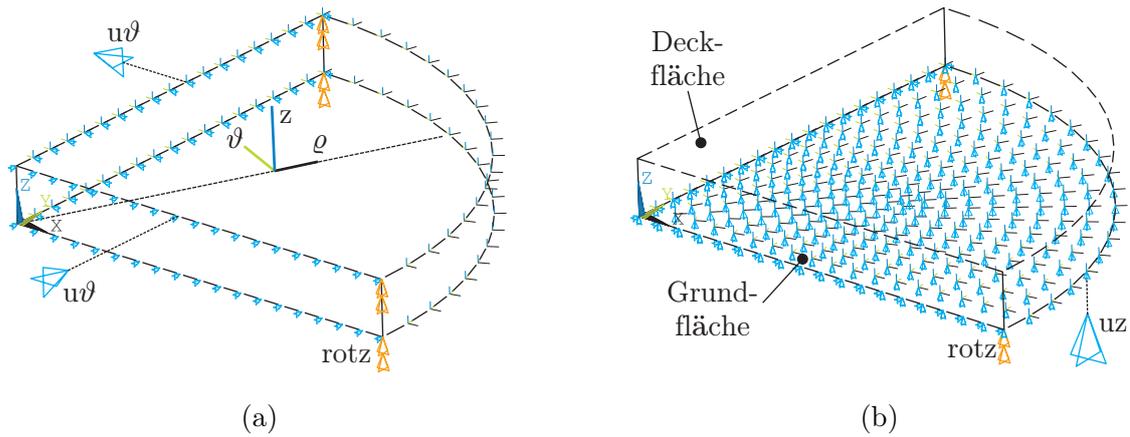


Bild D.4: Randbedingungen und lokale Koordinaten: (a) Symmetrie und (b) Grundfläche

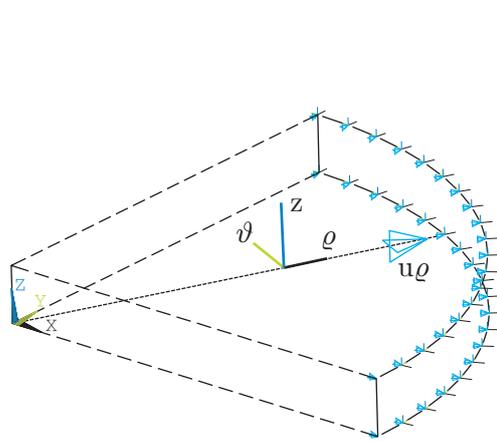


Bild D.5: Temporäre Randbedingung  $u_\rho$

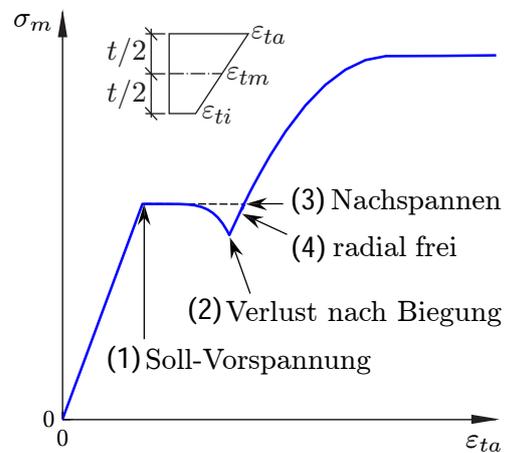


Bild D.6: Laststufen prinzipiell

### D.3 Laststufen

Die Montage der Umschnürung ist in Abschnitt 3.3.4 beschrieben. In Bild D.6 sind die entsprechenden Laststufen an der prinzipiellen  $\sigma_m$ - $\varepsilon_{ta}$ -Kurve markiert. Dabei ist  $\varepsilon_{ta}$  die äußere Randfaserdehnung des Stahlbandes. Folgende Laststufen simulieren die Montage in der FE-Berechnung:

- (1) Spannen des Bandes beim Aufziehen, vor Erreichen des Zylindermantels: gleichmäßige Temperaturlast  $\Delta T = \varepsilon_P / \alpha_T$  für Beam 188, mit  $\varepsilon_P$  nach Tabelle 4.2. Die Knoten des Zylindermantels sind radial unverschieblich gehalten, wie in Bild D.5 dargestellt.
- (2) Biegung beim Auftreffen auf den Zylindermantel: symmetrische, trapezförmige Temperaturlast  $T_B$  mit entgegengesetzten Vorzeichen in den Randfasern,  $T_B = \pm \varepsilon_B / \alpha_T$ , mit  $\varepsilon_B$  nach (2.13). Die vorgespannten Bänder beginnen von der äußeren Randfaser nach innen zu plastizieren. Das führt zur Entspannung.
- (3) Nachspannen bis zur Soll-Vorspannkraft durch gleichmäßige Abkühlung des Bandes. Es wird angenommen, dass noch Gleiten auf dem Beton möglich ist, nachdem die

Biegung erfolgte. Infolge dessen muss die Spannkraft ausgeglichen werden, bevor ein vollständiger Umschnürungsdruck den Zylinder staucht.

- (4) Freigeben der radialen Verschiebung der Knoten auf dem Zylindermantel; der Zylinder wird radial gestaucht; die Vorspannkraft in der Umschnürung nimmt ab. Damit ist der Montagezustand erreicht.

Die effektiven Spannungen im Montagezustand könnten zwar auch berechnet werden mit der geschlossenen linear-elastischen Lösung nach Anhang B.7. Jedoch für die nachfolgende nichtlineare Kraft-Dehnungs-Kurve ist das FE-Modell zielführend, da es Biegung, Nachspannen und elastischen Vorspannverlust erfasst.

Nach der Montage wird die tangentielle Dehnung der Umschnürung simuliert, indem alle Knoten der Deckfläche axial verschoben werden. Die resultierende Querausdehnung dehnt die Balkenelemente, bis die Bruchdehnung in der Randfaser von Beam 188 erreicht ist.

### D.4 Ausgewählte Ergebnisse

Kennungen für die verwendeten Parametersätze und zugehörige Parameter der Umschnürung sind Tabelle 4.2 zu entnehmen.

Bild D.7 zeigt die Auswertung der effektiven Zugspannung  $\sigma_m$  in Abhängigkeit von der Dehnung der äußeren Randfaser  $\varepsilon_{ta}$  für ausgewählte Parametersätze. Links ist der Ausschnitt auf den Dehnungsbereich bei der Montage gesetzt, rechts sind die Kurven vollständig zu sehen. Offensichtlich treffen die Kurven ungespannter Bänder (p0) den Montagezustand der vorgespannten Bänder. Danach liegen die Kurven aufeinander.

Für die selben Parametersätze ist  $\sigma_m$  in Bild D.8 bei gegebener radialer Dehnung des Zylindermantels  $\varepsilon_r$  dargestellt. In  $\varepsilon_r$  geht nur die Längenänderung der Mittelfaser von Beam 188 ein, die nicht auf Temperaturänderung zurückzuführen ist. Wird der temperaturbedingte Anteil der Mittelfaserdehnung addiert, so erhält man die gesamte Mittelfaserdehnung

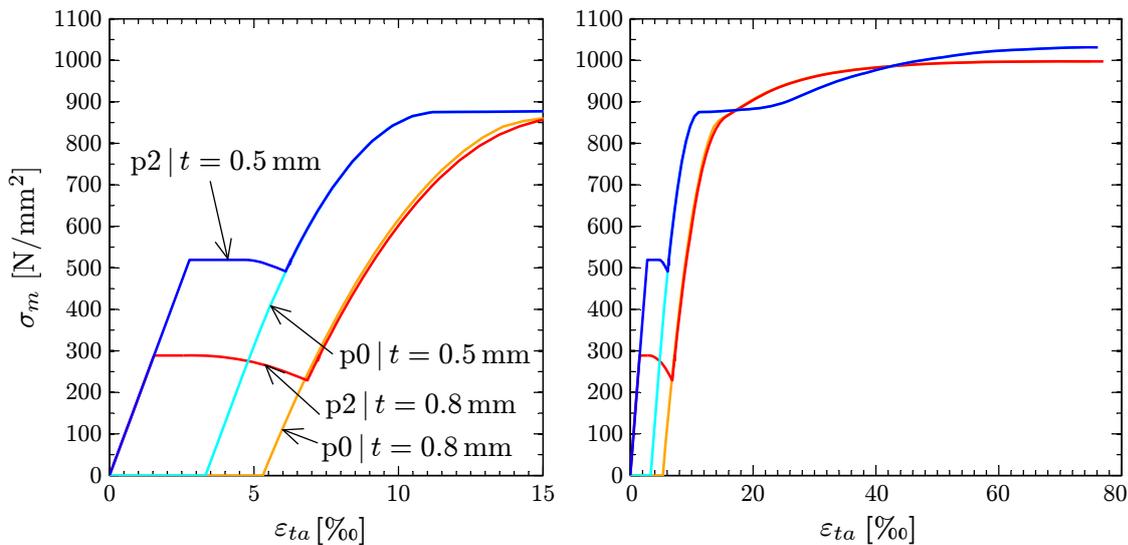


Bild D.7: Effektive Zugspannung – äußere Randfaserspannung Beam 188

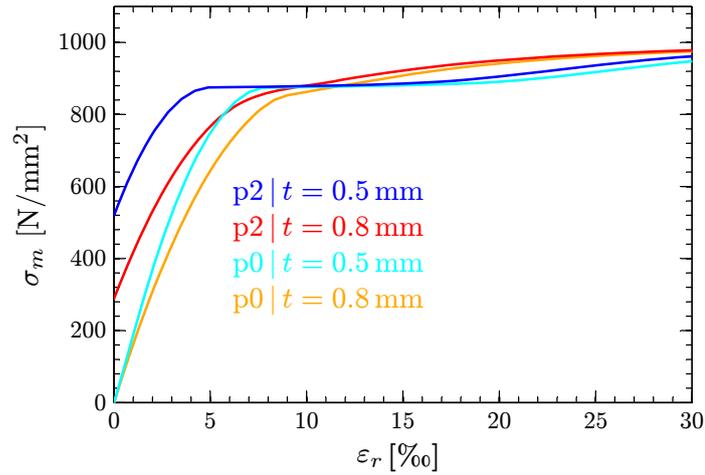


Bild D.8: Effektive Zugspannung – radiale Dehnung Solid 45

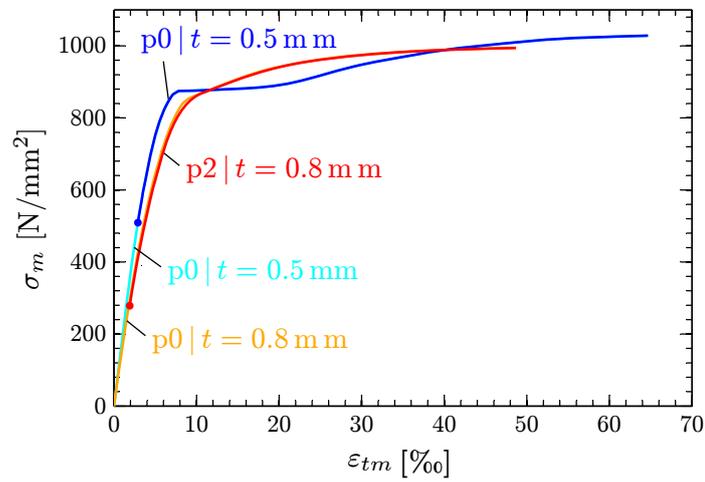


Bild D.9: Effektive Zugspannung – Dehnung der Mittelfaser Beam 188

$\varepsilon_{tm}$  des Balkens, inklusive der Vordehnung. Damit wird die  $\sigma_m$ - $\varepsilon_{tm}$ -Kurve erzeugt, wie in Bild D.9 gezeigt. Es wird deutlich: Wenn die Vorspannung  $\sigma_{mp}$  bekannt ist, dann kann die Kurve des ungespannten Stahlbands auch für den vorgespannten Fall genutzt werden. Die errechneten Werte  $\sigma_{mp}$  sind in Tabelle 4.2 angegeben.

# Literaturverzeichnis

- [1] Norm DIN EN 1992-1-1 Jan. 2011 . *Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1.*
- [2] Norm DIN EN 206-1 Jul. 2001 . *Beton - Teil 1: Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität*
- [3] Norm SIA 262 Jan. 2003 . *Betonbau.* – Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein (Hrsg.)
- [4] Norm SIA 262/1 Anhang G Jan. 2003 . *Betonbau.* – Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein (Hrsg.)
- [5] Norm EN 12390-3 2001 . *Prüfung von Festbeton - Teil 3: Druckfestigkeit von Probekörpern*
- [6] Norm EN 12390-5 2001 . *Prüfung von Festbeton - Teil 5: Biegezugfestigkeit von Probekörpern*
- [7] Norm EN 12390-6 2001 . *Prüfung von Festbeton - Teil 6: Spaltzugfestigkeit von Probekörpern*
- [8] Norm DIN 1048-2 1991 . *Prüfverfahren für Beton; Festbeton in Bauwerken und Bauteilen*
- [9] Norm DIN 1045-1 Aug. 2008 . *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion*
- [10] ABEL, E. ; LUO, H. Y. ; PRIDHAM, M. ; SLADE, A.: Issues concerning the measurement of transformation temperatures of NiTi alloys. In: *Smart Materials and Structures* 13 (2004), Nr. 5, S. 1110–1117
- [11] AHMAD, S. H. ; SHAH, S. P.: Stres-strain curves of concrete conned by spiral reinforcement. In: *Journal of the American Concrete Institute* 79 (1982), Nr. 6, S. 484–490
- [12] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Teubner, 1994
- [13] ANDRAWES, B. ; SHIN, M. ; WIERSCHEM, N.: Active confinement of reinforced concrete bridge columns. In: *Journal of Bridge Engineering* 15 (2010), Nr. 1, S. 81–89
- [14] ANSYS: *Release 11.0 Documentation for ANSYS.* SAS IP, Inc. Ansys, Inc., 2007
- [15] ASKELAND, D. ; PHULÉ, P.: *The science and engineering of materials.* 4. Thomson Brooks-Cole, 2003
- [16] BAHN, B. Y. ; HSU, C. T. T.: Stress-strain behavior of concrete under cyclic loading. In: *ACI Materials Journal* 95 (1998), Nr. 2, S. 178–193

- [17] BALMER, G.: Shearing strength of concrete under high triaxial stress - Computation of Mohr's envelope as a curve / United States Department of the Interior Bureau of Reclamation. 1949 (SP-23). – Forschungsbericht
- [18] BARCELLONA, A.: Shape memory alloys characterization by different methods. In: LAGOUDAS, D. C. (Hrsg.): *Smart Structures and Materials 2003 - Active Materials: Behaviour and Mechanics* Bd. 5053. San Diego : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2003, S. 239–249
- [19] BARGEL, H.-J.: *Werkstoffkunde*. Springer-Verlag, 2004
- [20] BARROS, M. H. F. M.: Elasto-plastic modelling of confined concrete elements following MC90 equations. In: *Engineering Structures* 23 (2001), Nr. 4, S. 311–318
- [21] BARUJ, A. ; KIKUCHI, T. ; KAJIWARA, S. ; SHINYA, N.: Effect of pre-deformation of austenite on shape memory properties in Fe-Mn-Si-based alloys containing Nb and C. In: *Materials Transactions* 43 (2002), Nr. 3, S. 585–588
- [22] BARUJ, A. ; KIKUCHI, T. ; KAJIWARA, S. ; SHINYA, N.: Improved shape memory properties and internal structures in Fe- Mn-Si-based alloys containing Nb and C. In: *Journal De Physique IV* 112 (2003), S. 373–376
- [23] BAŽANT, Z. P. (Hrsg.): *Fracture mechanics of concrete: Concepts, models and determination of material properties*. Bd. 1R-91. ACI Committee 446, 1991
- [24] BAŽANT, Z. P.: Modelling of compressive strain softening, fracture and size effect in concrete. In: BORST, de (Hrsg.) ; BIĆANIĆ (Hrsg.) ; MANG (Hrsg.) ; MESCHKE (Hrsg.): *Computational modelling of concrete structures*. Rotterdam, 1998, S. 249–264
- [25] BAŽANT, Z. P. ; OH, B. H.: Crack band theory for fracture of concrete. In: *Materials and Structures* 16 (1983), Nr. 3, S. 155–177
- [26] BAŽANT, Z. P. ; OH, B. H.: Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. In: *Journal of Engineering Mechanics* 111 (1985), Nr. 4, S. 559–582
- [27] BERTHAUD, Y.: Damage measurements in concrete via an ultrasonic technique. Part I experiment. In: *Cement and Concrete Research* 21 (1991), Nr. 1, S. 73–82
- [28] BETTEN, J.: Damage tensors in continuum mechanics. In: *Journal of theoretical and applied mechanics* 2 (1983), Nr. 1, S. 13–32
- [29] BINICI, B.: An analytical model for stress-strain behavior of confined concrete. In: *Engineering structures* 27 (2005), S. 1040–1051
- [30] BISBY, L. A. ; DENT, A. J. S. ; GREEN, M. F.: Comparison of confinement models for fiber-reinforced polymer-wrapped concrete. In: *ACI Structural Journal* 102 (2005), Nr. 1, S. 62–72
- [31] BONGERS, J. P. W. ; RUTTEN, H. S.: Concrete in multiaxial compression - a multi-level analysis. In: *Heron* 43 (1998), Nr. 3, S. 159–180
- [32] BUEHLER, W. J. ; WILEY, R. C.: The properties of TiNi and associated phases / U.S. Naval Ordnance Laboratory. 1961 (NOLTR 61-75 (AD266607)). – Forschungsbericht
- [33] CALLISTER, William D.: *Materials science and engineering: an introduction*. Wiley, 2003

- [34] CAROL, I. ; RIZZI, E. ; WILLAM, K.: A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. In: *International journal of solids and structures* 31 (1994), Nr. 20, S. 2835–2865
- [35] CARPINTERI, A.: *Nonlinear crack models for nonmetallic materials*. Kluwer Academic Publishers, 1999
- [36] CARPINTERI, A. ; VALENTE, S.: Size-scale transition from ductile to brittle failure: A dimensional analysis approach. In: MAZARS, J. (Hrsg.) ; BAŽANT, Z. P. (Hrsg.): *France-U.S. Workshop on Strain Localization and Size Effect Due to Cracking and Damage*, 1988, S. 477ff
- [37] CEB-FIB: *Bulletin d'information*. Bd. 203: *Model Code 90*. 1991
- [38] CEB-FIB: *Model code 1990 (Final version)*. Thomas Telford, 1993
- [39] CELEBI, M. ; BROWN, R. D.: Structural damage. In: *Earthquakes and Volcanoes* 25 (1994), Nr. 2, S. 94–102
- [40] CHABOCHE, J. L.: Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. In: *International Journal of Plasticity* 2 (1986), Nr. 2, S. 149–188
- [41] CHEN, W.-F.: *Constitutive equations for engineering materials*. Bd. 2: *Plasticity and modeling*. Elsevier, 1994
- [42] CHOI, E. ; CHUNG, Y. S. ; CHO, B. S. ; NAM, T. H.: Confining concrete cylinders using shape memory alloy wires. In: *The European Physical Journal, Special Topics* 158 (2008), S. 255–259
- [43] CHOI, E. ; CHUNG, Y.-S. ; CHOI, J.-H. ; KIM, H.-T. ; LEE, H.: The confining effectiveness of NiTiNb and NiTi SMA wire jackets for concrete. In: *Smart Materials and Structures* 19 (2010), S. 1–8
- [44] CONSIDÈRE, A. ; BLODNIG, J.: *Experimental-Untersuchungen über die Eigenschaften der Zement-Eisen-Konstruktionen*. Wien : Lehmann & Wentzel, 1902
- [45] CONTRAFATTO, L. ; CUOMO, M.: A framework of elastic-plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states. In: *International Journal of Plasticity* 22 (2006), S. 2271–2300
- [46] CURBACH, M. ; SPECK, K.: Mehraxiale Festigkeit von duktilem Hochleistungsbeton / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 2002 (Heft 524). – Forschungsbericht
- [47] CZADERSKI, C.: *Strengthening of reinforced concrete members by prestressed, externally bonded reinforcement with gradient anchorage*, ETH Zürich, Diss., 2012
- [48] CZADERSKI, C. ; HAHNEBACH, B. ; MOTAVALLI, M.: RC beam with variable stiffness and strength. In: *Construction and Building Materials* 20 (2006), S. 824–833
- [49] CZADERSKI, C. ; MOTAVALLI, M.: 40-year-old full-scale concrete bridge girder strengthened with prestressed CFRP plates anchored using gradient method. In: *Composite Part B: Engineering* 38 (2007), Nr. 7-8, S. 878–886
- [50] DE LORENZIS, L. ; TEPFERS, R.: Comparative study of models on confinement of concrete cylinders with fiber-reinforced polymer composites. In: *Journal of Composites for Construction* 7 (2003), Nr. 3, S. 219–237

- [51] DE SCHUTTER, G. ; TAERWE, L.: Random particle model for concrete based on Delaunay triangulation. In: *Materials and Structures* 26 (1993), Nr. 2, S. 67–73
- [52] DENG, Z. ; LI, Q. ; JIU, A. ; LI, L.: Behavior of concrete driven by uniaxially embedded shape memory alloy actuators. In: *Journal of Engineering Mechanics* 129 (2003), Nr. 6, S. 697–703
- [53] DONG, Z. Z. ; KAJIWARA, S. ; KIKUCHI, T. ; SAWAGUCHI, T.: Effect of pre-deformation at room temperature on shape memory properties of stainless type Fe-15Mn-5Si-9Cr-5Ni-(0.5-1.5)NbC alloys. In: *Acta Materialia* 53 (2005), Nr. 15, S. 4009–4018
- [54] DONG, Z. Z. ; KLOTZ, U. ; LEINENBACH, C. ; BERGAMINI, A. ; CZADERSKI, C. ; MOTAVALLI, M.: A novel Fe-Mn-Si shape memory alloy with improved shape recovery properties by VC precipitation. In: *Advanced Engineering Materials* 11 (2009), Nr. 1-2, S. 40–44
- [55] DOUGILL, J. W.: On stable progressively fracturing solids. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 27 (1976), Nr. 4, S. 423–437
- [56] ECKOLD, G.: *Design and manufacture of composite structures*. Woodhead Publishing, 1994
- [57] EGGELER, G. ; HORNBOGEN, E. ; YAWNY, A. ; HECKMANN, A. ; WAGNER, M.: Structural and functional fatigue of NiTi shape memory alloys. In: *Materials Science and Engineering A* 378 (2004), Nr. 1-2, S. 24–33
- [58] EIBL, J. ; BACHMANN, H.: Nachträgliche Verstärkung von Stahlbetonbauteilen mit Spritzbeton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 85 (1990), Nr. 1 bzw. 2, S. 1–4 bzw. 39–44
- [59] EIBL, J. ; IVÁNYI, G.: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton Schriftenreihe / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1976 (Heft 260). – Forschungsbericht
- [60] EL-TAWIL, S. ; ORTEGA-ROSALES, J.: Prestressing concrete using shape memory alloy tendons. In: *ACI Structural Journal* 101 (2004), Nr. 6, S. 846–851
- [61] ERFURT, W.: *Erfassung von Gefügeveränderungen in Beton durch Anwendung zerstörungsfreier Prüfverfahren zur Einschätzung der Dauerhaftigkeit*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2002
- [62] FARDIS, M. N. ; KHALILI, H. H.: Concrete encased in fiberglass reinforced plastic. In: *ACI Journal Proceedings* 78 (1981), Nr. 6, S. 440–446
- [63] FARDIS, M. N. ; KHALILI, H. H.: FRP-encased concrete as a structural material. In: *Magazine of Concrete Research* 34 (1982), Nr. 121, S. 191–202
- [64] FARJAMI, S. ; HIRAGA, K. ; KUBO, H.: Shape memory effect and crystallographic investigation in VN containing Fe-Mn-Si-Cr alloys. In: *Materials Transactions* 45 (2004), Nr. 3, S. 930–935
- [65] FEDERZONI, L. ; GUENIN, G.: Measurements of recovery stresses on a Fe-Mn-Cr-Si-Ni shape-memory alloy. In: *Journal De Physique IV* 5 (1995), Nr. C2, S. 525–530
- [66] FEESER, L.J. ; CHINN, J.: Strength and stiffness of spirally prestressed concrete cylinders. In: *PCI Journal* 7 (1962), Nr. 3, S. 55–62

- [67] GAMBLE, W. L. ; HAWKINS, N. M. ; KASPAR, I. I.: Seismic retrofitting experience and experiments in Illinois. In: BUCKLE, I. G. (Hrsg.) ; FRIEDLAND, I. M. (Hrsg.): *4th Nat. Wkshp. on Bridge Res. in Progr.* Buffalo, N.Y., 1996, S. 245–250
- [68] GARDNER, N. J. ; GODSE, R. M. ; WONG, T. F.: Laterally prestressed eccentrically loaded slender columns. In: *ACI Structural Journal* 89 (1992), Nr. 5, S. 547–554
- [69] GERSTLE, K. H. ; LINSE, D. ; BERTACCHI, P. ; KOTSOVOS, M.D. ; KO, H.-Y. ; NEWMAN, J.B. ; TAYLOR, M.A. ; TRAINA, L.A. ; ZIMMERMANN, R.M. ; BELOTTI, R.: Strength of Concrete under Multiaxial Stress States. In: *ACI Special Publication SP-55* (1978), S. 103–132
- [70] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer, 1954
- [71] GRASSER, E.: *Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen*, TH München, Diss., 1968
- [72] GRASSL, P.: Modelling of dilatation of concrete and its effect in triaxial compression. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2003), S. 1021–1033
- [73] GRASSL, P. ; JIRÁSEK, M.: Damage-plastic model for concrete failure. In: *International journal of solids and structures* 43 (2006), S. 7166–7196
- [74] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 221 (1921), S. 163–198
- [75] GROSS, D.: *Bruchmechanik*. Springer, 1996
- [76] GUNKO, L. P. ; TAKZEL, G. A. ; TITENKO, A. N.: Superelasticity of Fe-Ni-Co-Ti alloys with thermoelastic martensite. In: *Physics of Metals and Metallography* 91 (2001), Nr. 6, S. 624–628
- [77] HAMPEL, T.: *Experimentelle Analyse des Tragverhaltens von Hochleistungsbeton unter mehraxialer Beanspruchung*, Technische Universität Dresden, Diss., 2006
- [78] HANSEN, T. C.: Cracking and fracture of concrete and cement paste. In: *Causes, mechanism and control of cracking in concrete* Bd. SP-20. Philadelphia, 1968 (ACI Publication), S. 43–66
- [79] HARMON, T. G. ; GOULD, N. C. ; RAMAKRISHNAN, S. ; WANG, E. H.: Confined concrete columns subjected to axial load, cyclic shear, and cyclic flexure - Part I: Analytical models. In: *Aci Structural Journal* 99 (2002), Nr. 1, S. 32–41
- [80] HARMON, T. G. ; RAMAKRISHNAN, S. ; WANG, E. H.: Confined concrete subjected to uniaxial monotonic loading. In: *Journal of Engineering Mechanics-Asce* 124 (1998), Nr. 12, S. 1303–1309
- [81] HE, Z ; GALL, K. R. ; BRINSON, L. C.: Use of electrical resistance testing to re-define the transformation kinetics and phase diagram for shape-memory alloys. In: *Metallurgical and Materials Transactions A* 37A (2006), S. 579–687
- [82] HEGGER, J. ; KRAUSE, H. J.: Bemessung und konstruktive Durchbildung spritzbetonverstärkter Stahlbetonstützen. In: *Heft 467 DAfStb: Verstärken von Betonbauteilen*. 1996

- [83] HERWIG, A. ; MOTAVALLI, M.: Axial behavior of square reinforced concrete columns strengthened with lightweight concrete elements and unbonded GFRP wrapping. In: *Journal of Composites for Construction, ASCE* (2012), S. 747–752
- [84] HILL, R.: *The mathematical theory of plasticity*. London : Oxford University Press, 1950
- [85] HILLERBERG, A. ; MODÉER, M. ; PETERSSON, P. E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and Concrete Research* 6 (1976), Nr. 6, S. 773–781
- [86] HILSDORF, H. K. ; BRAMESHUBER, W.: Code-type formulation of fracture mechanics concepts for concrete. In: *International Journal of Fracture* 51 (1991), S. 61–72
- [87] HOBBS, D.W.: Strength of concrete under combined stresses. In: *Cement and Concrete Research* 1 (1971), Nr. 1, S. 41–56
- [88] HOBBS, D.W.: Strength and deformation properties of plain concrete subject to combined stress, Part 3: Results obtained on a range of flint gravel aggregate concretes / Cement and Concrete Association. 1974 (42.497). – Forschungsbericht
- [89] HOBBS, D.W. ; POMEROY, C.D. ; NEWMAN, J.B.: Design stresses for concrete structures subject to multiaxial stresses. In: *The Structural Engineer* 55 (1977), Nr. 4, S. 151–164
- [90] HODGSON, D.-E.: Damping applications of shape-memory alloys. In: *Materials Science Forum* Bd. 394-395. Trans Tech Publications, 2002, S. 69–74
- [91] HOLLAWAY, L.C. ; HEAD, P.R.: *Advanced polymer composites and polymers in the civil and infrastructure*. Elsevier, 2001
- [92] HORNBÖGEN, E.: *Werkstoffe: Aufbau und Eigenschaften von Keramik-, Metall-, Polymer- und Verbundwerkstoffen*. Springer, 2002
- [93] HORNBÖGEN, E.: Thermo-mechanical fatigue of shape memory alloys. In: *Journal of Materials Science* 39 (2004), Nr. 2, S. 385–399
- [94] HSU, T. T.: Microcracking of plain concrete and the shape of the stress-strain curve. In: *Journal of the American Concrete Institute* 60 (1963), Nr. 2, S. 209–223
- [95] HURLBUT, B. J.: *Experimental and computational investigation of strain-softening in concrete*, University of Colorado, Boulder, Master Thesis, 1985
- [96] HÄFNER, S.: *Grid-based procedures for the mechanical analysis of heterogeneous solids*, Bauhaus-Universität Weimar, Dissertation, 2007
- [97] IMRAN, I. ; PANTAZOPOULOU, S. J.: Experimental study of plain concrete under triaxial stress. In: *ACI Materials Journal* 93 (1996), Nr. 6, S. 589–601
- [98] IMRAN, I. ; PANTAZOPOULOU, S. J.: Plasticity model for concrete under triaxial compression. In: *Journal of Engineering Mechanics* 127 (2001), Nr. 3, S. 281–290
- [99] INGRAFFEA, A. R. ; SAOUMA, V.: Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In: SIH, G. C. (Hrsg.) ; DiTOMMASO, A. (Hrsg.): *Fracture mechanics of concrete: structural application and numerical calculation*. Martinus Nijhoff Publishers, 1985

- [100] IYENGAR, S. R. ; DESAYI, P. ; REDDY, K. N.: Stress-strain characteristics of concrete confined in steel binders. In: *Magazine of Concrete Research* 22 (1970), Nr. 72, S. 173–184
- [101] JANKE, L. ; CZADERSKI, C. ; MOTAVALLI, M. ; RUTH, J.: Applications of shape memory alloys in civil engineering structures - Overview, limits and new ideas. In: *Materials and Structures* 38 (2005), Nr. 279, S. 578–592
- [102] JANKE, L. ; CZADERSKI, C. ; RUTH, J. ; MOTAVALLI, M.: Experiments on the residual load-bearing capacity of prestressed confined concrete columns. In: *Engineering Structures* 31 (2009), Nr. 10, S. 2247–2256
- [103] JANKE, L. ; RUTH, J.: Alternative Vorspanntechnologien im Stahlbetonbau - Historisches und Zukunftsvisionen. In: *8. Informationstag des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau*. Weimar : Bauhaus-Universität Weimar, 2005, S. 1–8
- [104] JOST, N.: Microstructure and shape-memory-properties of thermo-mechanical treated Fe-Ni-Co-Ti-alloys. In: *Journal de Physique IV* 1 (1991), S. (C4) 445–450
- [105] JOST, N.: Thermal fatigue of Fe-Ni-Co-Ti shape-memory-alloys. In: *Materials Science and Engineering A - Structural Materials Properties Microstructure and Processing* 275 (1999), S. 649–653
- [106] K., Miyauchi ; S., Nishibayashi ; S., Inoue: Estimation of strengthening effects with carbon fiber sheet for concrete column. In: *FRPRCS-3* Bd. 1. Sapporo, Japan : Japan Concrete Institute, 1997, S. 217–224
- [107] KACHANOV, L. M.: Time to failure under creep conditions. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk* 8 (1958), S. 26–31
- [108] KAJIWARA, S.: Characteristic features of shape memory effect and related transformation behavior in Fe-based alloys. In: *Materials Science and Engineering A* 273-275 (1999), S. 67–88
- [109] KAJIWARA, S. ; BARUJ, A. ; KIKUCHI, T. ; SHINYA, N.: Low-cost high-quality Fe-based shape memory alloys suitable for pipe joints. In: LAGOUDAS, D. C. (Hrsg.): *Smart Structures and Materials 2003 - Active Materials: Behaviour and Mechanics* Bd. 5053. San Diego : SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2003, S. 250–261
- [110] KARABINIS, A. I. ; ROUSAKIS, T. C.: Concrete confined by FRP material: a plasticity approach. In: *Engineering Structures* 24 (2002), S. 923–932
- [111] KIKUCHI, T. ; KAJIWARA, S.: Shape-memory effect and related transformation behavior in an unaged Fe-Ni-Co-Ti alloy. In: *Materials Transactions JIM* 34 (1993), Nr. 10, S. 907–918
- [112] KIM, J. K. ; YI, S. T. ; PARK, C. K. ; EO, S. H.: Size effect on compressive strength of plain and spirally reinforced concrete cylinders. In: *ACI Structural Journal* 96 (1999), Nr. 1, S. 88–94
- [113] KLOSS, H.: Stabilität des Formgedächtniseffektes in FeNiCoTi-Legierungen. In: *Metall* 49 (1995), Nr. 6, S. 419–424
- [114] KNIPPERS, J. ; GABLER, M.: Faserverbundwerkstoffe im Bauwesen. In: KUHLMANN, U. (Hrsg.): *Stahlbau-Kalender 2007*. Ernst & Sohn, 2007

- [115] KOKORIN, A. V. ; CHERNENKO, V. A. ; BABII, O. M.: Investigation of reversion stresses generated in Fe-Ni-Co-Ti alloy. In: *Metallofizika i Noveishie Tekhnologii* 20 (1998), Nr. 2, S. 62–67
- [116] KOTSOVOS, M. D.: Effect of stress path on the behavior of concrete under triaxial stress states. In: *ACI Journal* 76 (1979), S. 213–223
- [117] KOTSOVOS, M. D. ; NEWMAN, J. B.: Fracture mechanics and concrete behaviour. In: *Magazine of Concrete Research* 33 (1981), Nr. 115, S. 103–112
- [118] KRAJGINOVIC, D.: Selection of damage parameter - Art or science? In: *Mechanics of Materials* 28 (1998), S. 165–179
- [119] KRAUSE, H. J.: *Zum Tragverhalten und zur Bemessung nachträglich verstärkter Stahlbetonstützen unter zentrischer Belastung*, RWTH Aachen, Dissertation, 1993
- [120] KRSTULOVIC-OPARA, N. ; NAU, J. ; WRIGGERS, P. ; KRSTULOVIC-OPARA, L.: Self-actuating SMA-HPFRC fuses for auto-adaptive composite structures. In: *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 18 (2003), Nr. 1, S. 78–94
- [121] KRSTULOVIC-OPARA, N. ; THIEDEMAN, P. D.: Active confinement of concrete members with self-stressing composites. In: *ACI Materials Journal* 97 (2000), Nr. 3, S. 297–308
- [122] KRSTULOVIC-OPARA, N. ; THIEDEMAN, P. D.: Active confinement of concrete members with self-stressing composites. In: *ACI Materials Journal* 97 (2000), Nr. 3, S. 297–308
- [123] KUBLA, G. ; HORNBOGEN, E.: On the effect of volume change and gamma'-precipitation hardening on the reversibility of martensitic transformation in Fe-Ni-Co-Ti-alloy. In: *Journal De Physique Iv* 5 (1995), Nr. C8, S. 475–480
- [124] KUHL, E.: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2000
- [125] KUPFER, H.B.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1973 (Heft 229). – Forschungsbericht
- [126] KURDYUMOV, G.V. ; KAMINSKY, E.: In: *Metallwirtschaft* 15 (1936)
- [127] KURT, C. E.: Concrete filled structural plastic columns. In: *ASCE Journal of the Structural Division* 104 (1978), Nr. 1, S. 55–63
- [128] LARBI, J. A.: *The cement paste-aggregate interfacial zone in concrete*, Tech. Univ. Delft, Dissertation, 1991
- [129] LAUNAY, P. ; GACHON, H.: Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress. In: *ACI Special Publication SP-34* (1972), S. 269–282
- [130] LEE, W. J. ; WEBER, B. ; FELTRIN, G. ; CZADERSKI, C. ; MOTAVALLI, M. ; LEINENBACH, C.: Phase transformation behavior under uniaxial deformation of an Fe-Mn-Si-Cr-Ni-VC shape memory alloy. In: *Materials Science and Engineering A* 581 (2013), S. 1–7
- [131] LEINENBACH, C. ; KRAMER, H. ; BERNHARD, C. ; EIFLER, D.: Thermo-mechanical properties of an Fe-Mn-Si-Cr-Ni-VC shape memory alloy with low transformation temperature. In: *Advanced Engineering Materials* 14 (2012), Nr. 1-2, S. 62–67

- [132] LEMAITRE, J.: *A course on damage mechanics*. Springer, 1992
- [133] LEUKART, M.: *Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2005
- [134] LI, H. J. ; DUNNE, D.: New corrosion resistant iron-based shape memory alloys. In: *ISIJ International* 37 (1997), Nr. 6, S. 605–609
- [135] LI, J. C. ; ZHANG, Z. ; JIANG, Q.: Properties and application of Fe-6Si-14Mn-9Cr-5Ni shape memory alloy. In: *Materials Science and Technology* 17 (2001), Nr. 3, S. 292–295
- [136] LI, L. ; LI, Q. ; ZHANG, F.: Behavior of smart concrete beams with embedded shape memory bundles. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 18 (2007), S. 1003–1014
- [137] LUSCHE, M.: *Beitrag zum Bruchmechanismus von auf Druck beanspruchtem Normal- und Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge*. Beton-Verlag, 1972
- [138] MACHADO, L. G. ; SAVI, M. A.: Medical applications of shape memory alloys. In: *Brazilian Journal of Medical and Biological Research* 36 (2003), Nr. 6, S. 683–691
- [139] MAJI, A. K. ; NEGRET, I.: Smart Prestressing with Shape-Memory Alloy. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124 (1998), Nr. 10, S. 1121–1128
- [140] MAKI, T.: Ferrous shape memory alloys. In: OTSUKA, K. (Hrsg.) ; WAYMAN, C. M. (Hrsg.): *Shape memory materials*. Cambridge University Press, 1999, S. 117–132
- [141] MANDER, J. B. ; PRIESTLEY, M. J. N. ; PARK, R.: Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete. In: *Journal of Structural Engineering-ASCE* 114 (1988), Nr. 8, S. 1827–1849
- [142] MANDER, J. B. ; PRIESTLEY, M. J. N. ; PARK, R.: Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. In: *Journal of Structural Engineering-Asce* 114 (1988), Nr. 8, S. 1804–1826
- [143] MARTIN, C.W.: Spirally prestressed concrete cylinders. In: *ACI Journal* 65 (1968), Nr. 10, S. 837–845
- [144] MEIER, U.: Strengthening of structures using carbon fibre/epoxy composites. In: *Construction and Building Materials* 9 (1995), Nr. 6, S. 341–351
- [145] MELTON, K. N.: Ni-Ti based shape memory alloys. In: DUERIG, T. W. (Hrsg.): *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. Butterworth-Heinemann, 1990, S. 21–35
- [146] MENNE, B.: Zur Traglast der ausmittig gedrückten Stütze mit Umschnürungsbewehrung / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1977 (Heft 285). – Forschungsbericht
- [147] METHA, P. K. ; MONTEIRO, P. J. M.: *Concrete - Microstructure, Properties and Materials*. McGraw-Hill, 1993
- [148] MINDESS, S.: Mechanical properties of the interfacial transition zone: A review. In: BUYUKOZTURK, O. (Hrsg.): *Interface fracture and bond* Bd. SP-156. ACI, 1995, S. 2–9
- [149] MIRMIRAN, A. ; SHAHAWY, M.: Dilation characteristics of confined concrete. In: *Mechanics Of Cohesive-Frictional Materials* 2 (1997), Nr. 3, S. 237–249

- [150] MOHAMEDBHAI, G. T. G.: Effect of exposure time and rates of heating and cooling on residual strength of heated concrete. In: *Magazine of Concrete Research* 38 (1986), Nr. 136, S. 151–158
- [151] MOHR, O.: Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. In: *Civilingenieur* (1882), Nr. 28, S. 113–156
- [152] MORAN, D. A. ; PANTELIDES, C. P.: Damage-based stress-strain model for fiber-reinforced polymer-confined concrete. In: *ACI Structural Journal* 102 (2005), Nr. 1, S. 54–61
- [153] MORGAN, N.: *The stability of NiTi shape memory alloys and actuator applications*, Cranfield University, Diss., 1999
- [154] MORTAZAVI, A. ; PILAKOUTAS, K. ; SON, K.: RC column strengthening by lateral pre-tensioning of FRP. In: *Construction and Building Materials* 17 (2003), Nr. 6-7, S. 491–497
- [155] MOST, T.: *Stochastic crack growth simulation in reinforced concrete structures by means of coupled finite element and meshless methods*, Bauhaus-Universität Weimar, Dissertation, 2005
- [156] MOTAVALLI, M. ; CZADERSKI, C. ; BERGAMINI, A. ; JANKE, L.: Shape memory alloys for civil engineering structures - On the way from vision to reality. In: *Architecture - Civil Engineering - Environment* 3 (2009), Nr. 4, S. 81–94
- [157] MOTAVALLI, M. ; CZADERSKI, C. ; PFYL-LANG, K.: Prestressed CFRP for strengthening of reinforced concrete structures: Recent developments at Empa, Switzerland. In: *Journal of Composites for Construction, ASCE* (2011), S. 194–205
- [158] MÜLLER, K. F.: Tragfähigkeit und Verformung wendelbewehrter Stahlbetonstützen unter mittiger Belastung. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 72 (1978), Nr. 5, S. 124–128
- [159] NAE, F. A. ; IKEDA, T. ; MATSUZAKI, Y.: The active tuning of a shape memory alloy pseudoelastic property. In: *Smart Materials and Structures* 13 (2004), Nr. 3, S. 503
- [160] NANNI, A. ; BRADFORD, N. M.: FRP jacketed concrete under uniaxial compression. In: *Construction and Building Materials* 9 (1995), Nr. 2, S. 115–124
- [161] OTSUKA, K. ; KAKESHITA, T.: Science and technology of shape-memory alloys: New developments. In: *MRS Bulletin* 27 (2002), Nr. 2, S. 91–100
- [162] OTSUKA, K. ; WAYMAN, C. M.: *Shape memory materials*. Cambridge University Press, 1999
- [163] OTSUKA, K. ; XU, Y. ; REN, X.: Ti-Ni-based shape memory alloys as smart materials. In: *Thermec 2003, 1-5 Bd.* 426-4. Trans Tech Publications, 2003, S. 251–258
- [164] PANTAZOPOULOU, S. J.: Role of expansion on mechanical behavior of concrete. In: *Journal of structural engineering* 121 (1995), Nr. 12, S. 1795–1805
- [165] PANTAZOPOULOU, S. J. ; MILLS, R. H.: Microstructural aspects of the mechanical response of plain concrete. In: *ACI Materials Journal* 92 (1995), Nr. 6, S. 605–615

- [166] PANTELIDES, C. P. ; YAN, Z.: Confinement model of concrete with externally bonded FRP jackets or posttensioned FRP Shells. In: *Journal of Structural Engineering* 133 (2007), Nr. 9, S. 1288–1296
- [167] PETERSSON, P.-E.: Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials / Lund Institute of Technology. 1981 (Report TVBM1006). – Forschungsbericht
- [168] PFYL-LANG, K. ; HUTH, O. ; GREEN, M. F. ; MOTAVALLI, M.: Seismic retrofit of square RC columns using prestressed non-laminated CFRP straps. In: *The 14th World Conference on Earthquake engineering*. Beijing, China, 2008
- [169] PILAKOUTAS, K.: *Repair and reinforcement of load bearing members*. September 1, 1998 1998
- [170] POPOV, V. L.: *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, 2009
- [171] POPOVICS, S.: A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. In: *Cement and Concrete Research* 3 (1973), Nr. 5, S. 583–599
- [172] POPOVICS, S.: *Fundamentals of portland cement concrete*. Bd. 1: *Fresh concrete*. Wiley, 1982
- [173] POPOVICS, S.: *Strength and related properties of concrete*. Wiley&Sons, 1998
- [174] POWERS, T. C.: Physical structure and engineering properties of concrete. In: *PCA Research Department Bulletin* 90 (1958), S. 1–28
- [175] PRIESTLEY, M. J. N. ; SEIBLE, F.: Design of seismic retrofit measures for concrete and masonry structures. In: *Construction and Building Materials* 9 (1995), Nr. 6, S. 365–377
- [176] PÖLLING, R.: *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*, Universität Bochum, Diss., 2001
- [177] REINHARDT, H.-W.: Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. In: *Heron* 29 (1984), Nr. 2
- [178] REINHARDT, H.-W.: Werkstoffe. In: MEHLHORN, G. (Hrsg.): *Der Ingenierbau* Bd. 4. Ernst&Sohn, 1997
- [179] REINHARDT, H.-W.: Beton. In: EIBL, J. (Hrsg.): *Betonkalender 2002* Bd. 91. Ernst&Sohn, 2002, S. 1–153
- [180] REINHARDT, H.W.: *Ingenieurbaustoffe*. Ernst & Sohn, 2010
- [181] REINHARDT, H.W. ; CORNELISSEN, H.A.W ; HORDIJK, D.A.: Tensile tests and failure analysis of concrete. In: *Journal of Structural Engineering* 112 (1986), Nr. 11, S. 2462–2477
- [182] RICHART, F. E. ; BRANDTZAEG, A. ; BROWN, R. L.: A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. In: *Engineering Experiment Station Bulletin No. 185*. Urbana : University of Illinois, 1928
- [183] RICHART, F. E. ; BRANDTZAEG, A. ; BROWN, R. L.: The failure of plain and spirally reinforced concrete in compression. In: *Engineering Experiment Station Bulletin No. 190*. Urbana : University of Illinois, 1929

- [184] ROGGE, A.: *Materialverhalten von Beton unter mehrachsiger Beanspruchung*, Technische Universität München, Diss., 2003
- [185] ROUSAKIS, T.: Experimental investigation of concrete cylinders confined by carbon FRP sheets, under monotonic and cyclic axial compressive load / Chalmers University of Technology, Division of Building Technology. 2001 (Report No. 44). – Forschungsbericht
- [186] RUDNICKI, J. W. ; RICE, J. R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23 (1975), S. 371–394
- [187] SAADAT, S. ; SALICHS, J. ; NOORI, M. ; HOU, Z. ; DAVOODI, H. ; BAR-ON, I. ; SUZUKI, Y. ; MASUDA, A.: An overview of vibration and seismic applications of NiTi shape memory alloy. In: *Smart Materials and Structures* (2002), Nr. 11, S. 218–229
- [188] SAADATMANESH, H. ; EHSANI, M. R. ; LI, M. W.: Strength and ductility of concrete columns externally confined with fiber composite straps. In: *ACI Structural Journal* 91 (1994), Nr. 4, S. 434–447
- [189] SAAFI, M. ; TOUTANJI, H.A. ; LI, Z.: Behavior of concrete columns confined with fiber reinforced polymer tubes. In: *ACI Materials Journal* 96 (1999), Nr. 4, S. 500–509
- [190] SAATCIOGLU, M. ; YALCIN, C.: External prestressing concrete columns for improved seismic shear resistance. In: *Journal of Structural Engineering-ASCE* 129 (2003), Nr. 8, S. 1057–1070
- [191] SAENZ, L. P.: Equation for the stress-strain curve of concrete, Discussion on the paper by P. Desayi and S. Krishnan. In: *ACI Journal Proceedings* 61 (1964), Nr. 9, S. 1229–1236
- [192] SAMAAAN, M. ; MIRMIRAN, A. ; SHAHAWY, M.: Model of Concrete Confined by Fiber Composites. In: *Journal of Structural Engineering - ASCE* 124 (1998), Nr. 9, S. 1025–1031
- [193] SATO, A. ; CHISHIMA, E. ; SOMA, K. ; MORI, T.: Shape memory effect in Gamma-Epsilon transformation in Fe-30Mn-1Si alloy single crystals. In: *Acta Metallurgica* 30 (1982), Nr. 6, S. 1177–1183
- [194] SATO, A. ; YAMAJI, Y. ; MORI, T.: Physical properties controlling shape memory effect in Fe-Mn-Si alloys. In: *Acta Metallurgica* 34 (1986), Nr. 2, S. 287–294
- [195] SCHEIBE, H.-J.: *Zum zyklischen Materialverhalten von Baustahl und dessen Berücksichtigung in Konstruktionsberechnungen*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 1990
- [196] SCHICKERT, G.: Schwellenwerte beim Betondruckversuch / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1980 (Heft 312). – Forschungsbericht
- [197] SCHICKERT, G. ; WINKLER, H.: Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1977 (Heft 277). – Forschungsbericht
- [198] SCHLANGEN, E.: Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. In: *Heron* 38 (1993), Nr. 2

- [199] SCHLEGEL, R.: *Numerische Berechnung von Mauerwerkstrukturen in homogenen und diskreten Modellierungsstrategien*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2004
- [200] SCHLEGEL, R.: Nichtlineare Berechnung von Beton und Stahlbetonstrukturen nach DIN 1045-1 mit ANSYS. In: *International Congress on FEM Technology with ANSYS CFX & ICEM CFD Conference*. Bonn, 2005
- [201] SCHLEGEL, R.: *ANSYS/Multiplas Manual Rev6*. Dynardo GmbH, 2009
- [202] SCHNEIDER, H.: *Kurze umschnürte Druckglieder aus ultrahochfestem Beton*, Universität Leipzig, Diss., 2007
- [203] SCHWABACH, E.: *Verformungs- und Degradationsverhalten von niederzyklisch uniaxial druckbeanspruchtem Beton*, Bauhaus-Universität, Weimar, Diss., 2005
- [204] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer, 2007
- [205] SEHITOGLU, H. ; EFSTATHIOU, C. ; MAIER, H. J. ; CHUMLYAKOV, Y.: Hysteresis and deformation mechanisms of transforming FeNiCoTi. In: *Mechanics of Materials* 38 (2006), Nr. 5-6, S. 538–550
- [206] SELLECK, S. F. ; LANDIS, E. N. ; PETERSON, M. L. ; SHAH, S. P. ; ACHENBACH, J. D.: Ultrasonic investigation of concrete with distributed damage. In: *ACI Materials Journal* 95 (1998), Nr. 1, S. 27–36
- [207] SFER, D. ; CAROL, I. ; GETTU, R. ; ETSE, G.: Study of the behavior of concrete under triaxial compression. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128 (2002), Nr. 2, S. 156–163
- [208] SHAH, S. P.: Critical stress, volume change, and microcracking of concrete. In: *Proceedings of ACI Journal* 65 (1968), Nr. 9, S. 770–781
- [209] SHAH, S. P. ; FAFITIS, A. ; ARNOLD, R.: Cyclic Loading Of Spirally Reinforced-Concrete. In: *Journal Of Structural Engineering-Asce* 109 (1983), Nr. 7, S. 1695–1710
- [210] SHAHAWY, M. ; MIRMIRAN, A. ; BEITELMAN, T.: Tests and modeling of carbon-wrapped concrete columns. In: *Composites Part B* 31 (2000), S. 471–480
- [211] SHEN, Y. M. ; DU, Y. L. ; SUN, B. C. ; LI, J. L.: A study of SMA used for threaded connections having loosening-proof and anti-break functions. In: *Shape Memory Materials and Its Applications* Bd. 394-3. Trans Tech Publications, 2001, S. 99–102
- [212] SHIN, M. ; ANDRAWES, B.: Experimental investigation of actively confined concrete using shape memory alloys. In: *Engineering Structures* 32 (2010), S. 656–664
- [213] SIEBEL, E.: *Schriftenreihe der Zementindustrie*. Bd. Heft 50: *Verformungsverhalten, Energieaufnahme und Tragfähigkeit von Normal- und Leichtbeton im Kurzzeitdruckversuch*. Düsseldorf : Beton-Verlag, 1989
- [214] SINHA, B. P. ; GERSTLE, K. H. ; TULIN, L. G.: Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. In: *ACI Journal Proceedings* 61 (1964), Nr. 2, S. 195–212
- [215] SLATE, F. O. ; HOVER, K. C.: Microcracking in concrete. In: CARPINTERI, A. (Hrsg.) ; INGRAFFEA, A. R. (Hrsg.): *Fracture mechanics of concrete*. Nijhoff Publishers, 1984, S. 137–159

- [216] SLATE, F. O. ; OLSEFSKI, S.: X-Ray study of internal structures and microcracking of concrete. In: *ACI Journal Proceedings* 60 (1963), Nr. 5, S. 575–588
- [217] SMITH, S. S. ; WILLAM, K. ; GERSTLE, K. H. ; STURE, S: Concrete over the top, or: Is there life after peak? In: *ACI Materials Journal* 86 (1989), Nr. 5, S. 491–497
- [218] SOROUSHIAN, P. ; CHOWDHURY, H. ; NOSSONI, A.: Design and experimental verification of pseudoelastic-based constant-force springs. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 14 (2003), Nr. 8, S. 475–481
- [219] SOROUSHIAN, P. ; OSTOWARI, K. ; NOSSONI, A. ; CHOWDHURY, H.: Repair and strengthening of concrete structures through application of corrective posttensioning forces with shape memory alloys. In: *Design of Structures 2001*. 2001 (Transportation Research Record), S. 20–26
- [220] SPOELSTRA, M. R. ; MONTI, G.: FRP-Confined Concrete Model. In: *Journal of Composites for Construction* 3 (1999), Nr. 3, S. 143–150
- [221] SPOONER, D. C. ; DOUGILL, J. W.: A quantitative assesment of damage sustained in concrete during compressive loading. In: *Magazine of Concrete Research* 27 (1975), Nr. 92, S. 151–160
- [222] SPOONER, D. C. ; POMEROY, C. D. ; DOUGILL, J. W.: Damage and energy dissipation in cement pastes in compression. In: *Magazine of Concrete Research* 28 (1976), Nr. 94, S. 21–29
- [223] STÖCKEL, D. ; HORNBOGEN, E. ; RITTER, F. ; TAUTZENBERGER, P.: *Legierungen mit Formgedächtnis*. Technische Akademie Esslingen, 1988
- [224] STÖCKL, S. ; MENNE, B.: Versuche an wandbewehrten Stahlbetonsäulen unter exzentrischer Belastung / Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1975 (Heft 251). – Forschungsbericht
- [225] TAMARAT, K. ; STAMBOULI, V. ; BOURAOUI, T. ; DUBOIS, B.: Structural study of Fe-Mn-Si and Fe-Mn-Cr shape memory steels. In: *Journal De Physique IV* 1 (1991), Nr. C4, S. 347–353
- [226] TAMUZS, V. ; TEPFERS, R. ; YOU, C. S. ; ROUSSAKIS, T. ; REPELIS, I. ; SKRULS, V. ; VILKS, U.: Behavior of concrete cylinders confined by carbon-composite tapes and prestressed yarns. In: *Mechanics of Composite Materials* 42 (2006), Nr. 1, S. 13–32
- [227] TENG, J. G. ; LAM, L.: Behavior and modelling of fiber reinforced polymer-confined concrete. In: *Journal of Structural Engineering - ASCE* 130 (2004), Nr. 11, S. 1713–1723
- [228] TORRENTI, J. M. ; DESRUES, J. ; BENAIJA, E. H. ; BOULAY, C.: Stereophotogrammetry and localization in concrete under compression. In: *Journal of Engineering Mechanics* 117 (1991), Nr. 7, S. 1455–1465
- [229] TOUTANJI, H. ; SAAFI, M.: Stress-strain behavior of concrete columns confined with hybrid composite materials. In: *Materials and Structures* 35 (2002), Nr. 250, S. 338–347
- [230] VAN GEEL, E.: *Concrete behaviour in multiaxial compression*, Techn. Univ. Eindhoven, Dissertation, 1998

- [231] VAN HUMBEECK, J.: The high damping capacity of shape memory alloys. In: *Zeitschrift für Metallkunde* 86 (1995), Nr. 3, S. 176–183
- [232] VAN HUMBEECK, J. ; STALMANS, R.: Characteristics of shape memory alloys. In: OTSUKA, K. (Hrsg.) ; WAYMAN, C. M. (Hrsg.): *Shape memory materials*. Cambridge University Press, 1999, S. 149–183
- [233] VAN MIER, J. G. M.: *Strain-Softening of concrete under multiaxial loading conditions*, Technische Universität Eindhoven, Diss., 1984
- [234] VAN MIER, J. G. M.: Fracture of concrete under complex stress. In: *Heron* 31 (1986), Nr. 3, S. 1–90
- [235] VAN MIER, J. G. M.: Mode I fracture of concrete: Discontinuous crack growth and crack interface grain bridging. In: *Cement and Concrete Research* 21 (1991), Nr. 1, S. 1–15
- [236] VAN MIER, J. G. M.: *Fracture processes of concrete*. CRC Press, 1996
- [237] VAN MIER, J. G. M.: Multi-scale interaction potentials (F r) for describing fracture of brittle disordered materials like cement and concrete. In: *International Journal of Fracture* 143 (2007), Nr. 1, S. 41–78
- [238] VAN MIER, J. G. M. ; VAN VLIET, M. R. A.: Uniaxial tension test for the determination of fracture parameters of concrete: state of the art. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), Nr. 2, S. 235–247
- [239] VAN MIER, J.G.M. ; REINHARDT, H.-W. ; VLUGT, B.W. Van d.: Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton. In: *Bauingenieur* 62 (1987), S. 353–361
- [240] ČERVENKA, V. ; JENDELE, L. ; ČERVENKA, J.: *ATENA Programm Documentation, Part 1, Theory*. Cervenka Consulting, 2005
- [241] VONK, R. A.: *Softening of concrete loaded in compression*, Technische Universität Eindhoven, Diss., 1992
- [242] VONK, R. A. ; RUTTEN, H. S. ; VAN MIER, J. G. M. ; FIJNEMAN, H. J.: Influence of boundary conditions on softening of concrete loaded in compression. In: SHAH, S. P. (Hrsg.) ; SWARTZ, S. E. (Hrsg.) ; BARR, B. (Hrsg.): *Fracture of Concrete and Rock: Recent Developments*, Elsevier, 1989, S. 711–720
- [243] WANG, D. ; WENXI, L. ; XIAODONG, X. ; DONG, Z. Z. ; CHEN, J.: Recovery stress relaxation characteristics in Fe-Mn-Si-based shape memory alloys. In: RUSSEL, S. M. (Hrsg.): *Proceedings of the International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies*. Pacific Grove, 2000
- [244] WATANABE, Y. ; MORI, Y. ; SATO, A.: Training effect in Fe-Mn-Si shape-memory alloys. In: *Journal of Materials Science* 28 (1993), Nr. 6, S. 1509
- [245] WAYMAN, C. M. ; DUERIG, T.W.: An introduction to martensite and shape memory. In: DUERIG, T. W. (Hrsg.): *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. Butterworth-Heinemann, 1990, S. 3–20

- [246] WEI, Z. G. ; SANDSTROM, R.: Characterization of the phase transformations in shape-memory alloys by modulated differential scanning calorimetry. In: *Materials Science and Engineering A - Structural Materials Properties Microstructure and Processing* 275 (1999), S. 352–356
- [247] WILLAM, K. ; HURLBUT, B. ; STURE, S.: Experimental constitutive and computational aspects of concrete failure. In: MEYER, C. (Hrsg.) ; OKAMURA, H. (Hrsg.): *U.S.-Japan Joint Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, ASCE. Tokyo, 1985, S. 149–172
- [248] WILLAM, K. ; WARNKE, E. P.: Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. In: *Concrete structures subjected to triaxial stresses*. Ismes-Bergamo, 1974, S. III/1–30
- [249] WINISTÖRFER, A.: *Development of nonlaminated advanced composite straps for civil engineering applications*, University of Warwick, Dissertation, 1999
- [250] WISCHERS, G.: Aufnahme und Auswirkungen von Druckbeanspruchungen auf Beton, Teil 1. In: *Betontechnische Berichte* (1978), Nr. 2, S. 63–67
- [251] WITTMANN, F. H.: Structure of Concrete with respect to crack formation. In: *Fracture mechanics of concrete*. Elsevier, 1983, S. 43–74
- [252] XIAO, Y. ; WU, H.: Compressive behavior of concrete confined by carbon fiber composite jackets. In: *Journal of Materials in Civil Engineering* 12 (2000), Nr. 2, S. 139–146
- [253] YAMAKAWA, T. ; NASROLLAHZADEH NESHELI, K. ; SATOH, H.: Seismic or emergency retrofit of RC short columns by use of prestressed aramid fiber belts as external hoops. In: *Journal of Structural and Construction Engineering, AIJ* 550 (2001), S. 135–141
- [254] YAN, Z. ; PANTELIDES, C. P. ; REAVELEY, L. D.: Posttensioned FRP composite shells for concrete confinement. In: *Journal of Composites for Construction* 11 (2007), Nr. 1, S. 81–90
- [255] YANG, J. H. ; CHEN, H. ; WAYMAN, C. M.: Development of Fe-based shape memory alloys associated with face-centered cubic-hexagonal close-packed martensitic transformations: Part II. Transformation behavior. In: *Metallurgical transactions. A, Physical metallurgy and materials science* 23 A (1992), Nr. 5, S. 1439