
Geostatistische Bearbeitung unsicherer Baugrunddaten zur Berücksichtigung in Sicher- heitsnachweisen des Erd- und Grundbaus

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor – Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der
Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von
Matthias Schönhardt
Berga / Sachsen - Anhalt

Gutachter:

1. Prof. Dr.-Ing. K. J. Witt
2. Prof. Dr.-Ing. M. Ziegler
3. Prof. Dr. rer. nat. J. W. Einax

Tag der Disputation: 15.08.2005

Vorwort des Herausgebers

Das Hauptproblem des Erd- und Grundbaus wie auch der Ingenieurgeologie ist nach wie vor die unbefriedigende Präzision bei der Prognose der Baugrundeigenschaften, das Verhalten von Boden als Teil der Gründung und als Baustoff. Wir erkunden den Baugrund nur stichprobenartig. Das geologische Modell, eine zwei- bis drei- dimensionale parameterspezifische Klassifizierung des Baugrundes in Homogenbereiche, wird mit der subjektiven Erfahrung des Experten aus den wenigen punktuellen Aufschlüssen entwickelt. Den Homogenbereichen werden diskrete oder unsichere Kenngrößen zugeordnet. Analysiert man dieses Vorgehen im Hinblick auf Risiken, so stößt man während des gesamten Prozesses der Modellbildung, Nachweisführung und Bemessung auf Unsicherheiten und Unschärfen, die sich vom Baugrundmodell mit seinen geschätzten repräsentativen Parametern über die Berechnungsverfahren, über die Änderung der Eigenschaften bei der Ausführung bis hin zum Langzeitverhalten des Bodens unter den geänderten Randbedingungen ziehen. Zu Beginn der Arbeit auf diesem Gebiet bestand für uns die Frage, wie mit diesen Unsicherheiten umzugehen ist, wie sich diese auf die Zuverlässigkeit von Gründungen und auf geotechnische Konstruktionen auswirken und ob sich das, was ein erfahrener Experte intuitiv tut, indem er die verschiedene Informationen gewichtet zusammenführt, mit den Gesetzmäßigkeiten der mathematischen Statistik erfassen lässt.

Von diesem großen Rahmen ausgehend zeigte sich schon bald der Teilaspekt der Datenaufbereitung bei der Baugrundmodellierung als ein Kernthema der wissenschaftlichen Bearbeitung, zumal hier zunehmend in der Praxis Methoden herangezogen werden, deren Procedere der Anwender nicht mehr durchschaut und häufig in den Glauben verfällt, die leicht zu erzeugenden Darstellungen seien ein Abbild der Wirklichkeit. Die Zielstellung dieser Arbeit war es, den Einfluss der Unsicherheit bei der Beschreibung des Baugrundes zu analysieren. Zwei zentrale Fragen des geotechnischen Ingenieurwesens waren zu beantworten:

- Wie wirken sich Unsicherheiten der Erkundung und der Parameteridentifikation auf die Qualität des geologischen Modells aus?
- Ist es möglich, Unsicherheiten bei der Modellierung so zu quantifizieren, dass bei einer sequentiellen Erkundung die Schritte im Hinblick auf den größtmöglichen Informationsgewinn optimiert werden können?

Zunächst waren Entwicklungen auf dem Gebiet der Geostatistik und die Anwendung numerischer Simulationsmethoden erforderlich, mit denen Herr Schönhardt die Fortpflanzung von Unsicherheiten beim Kriging aufzeigen konnte. Bei Kenntnis der Kennwertunsicherheit ist es nun möglich, die Varianzen des Krigingschätzers und damit die Schärfe des Geologischen Modells zu quantifizieren um dann durch eine gezielte Nacherkundung an den Stellen größter Unsicherheit das Modell zu verbessern, zu schärfen.

Auch die kühnsten Fortschritte auf dem Gebiet der mathematischen Statistik und der Geostatistik können Unsicherheiten im geologischen Modell nicht beseitigen. Mit der Arbeit werden aber Wege aufgezeigt, wie sich die Unsicherheiten komplexer Baugrunddaten mit den aktuellen Methoden aufbereiten und transparent darstellen lassen. Für Standardfälle der Geotechnik ist ein derartiger Aufwand nicht angemessen, bei Beachtung der Regelwerke ist eine höhere Präzision auch nicht erforderlich. Die geostatistischen Methoden gewinnen aber dann an Bedeutung, wenn wir durch die Weiterentwicklung der Erkundungsmethoden ergänzend zu den direkten Aufschlüssen künftig häufiger Verfahren anwenden, die uns viele, aber dafür unscharfe Informationen über den Baugrund liefern, wie dies z. B. bei geophysikalischen Erkundungsmethoden der Fall ist.

Vorwort des Verfassers

Die Grundmotivation dieser Arbeit ist das Bestreben, aus den stets relativ geringen Erkundungsergebnissen über den Baugrund objektivere Aussagen für unbeprobte Regionen in einem Untersuchungsgebiet zu erhalten und zusätzlich die Unsicherheit der erkundeten Kenngrößen zu berücksichtigen, um den Einfluss auf einen probabilistischen Sicherheitsnachweis zu untersuchen. Die Kombination probabilistischer Verfahren mit geostatistischen Methoden zur geologischen Modellbildung und einem geotechnischen Sicherheitsnachweis war die Herausforderung. Während die Methoden zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit heute sehr weit entwickelt sind, ist die Nutzung unsicherer Halbraummodelle aufgrund mangelnder mathematischer und numerischer Konzepte ein erweiterter Ansatz. Die Arbeit konzentriert sich daher im Wesentlichen auf die Erfassung von Zusammenhängen zwischen der Unsicherheit der erkundeten Kenngrößen und den daraus abgeleiteten Unsicherheiten in den folgenden Etappen von der Erstellung des geologischen Modells bis hin zum Sicherheitsnachweis.

Für die Anregung, Förderung und Betreuung bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. K. J. Witt. Ebenso danke ich den Koreferenten Prof. Dr. rer. nat. J. W. Einax und Prof. Dr.-Ing. M. Ziegler für das Interesse an meiner Arbeit.

Den Herren J. Matthes und F. Gewalt möchte ich für die Hilfestellung bei der Entwicklung der Anwendung GeoStat und dem Austesten einiger Programmroutinen sowie für die damit verbundenen Verbesserungsvorschläge beispielhaft danken.

Für die zahlreichen fachlichen Diskussionen und Hinweise danke ich insbesondere Dr. rer. nat. J. Petigk.

Der wohl größte und herzlichste Dank gebührt meiner Frau Silke, die mich in allen Phasen der Erstellung dieser Arbeit unterstützte und mir den notwendigen Rückhalt gab.

M. Schönhardt

Inhaltsverzeichnis

1.	EINLEITUNG	12
2.	UNSICHERHEITEN IN DER GEOTECHNIK	14
3.	STATISTISCHE GRUNDLAGEN	19
3.1.	Dichteverteilungen	19
3.2.	Vertrauensfaktoren	27
3.3.	Unscharfe Mengen (Fuzzy Sets)	28
3.4.	Bayes'sche Statistik	29
3.5.	Gauß'sche Varianzenfortpflanzung	30
3.6.	Aussageunsicherheit	31
3.7.	Auswertung von Stichproben	32
4.	STATISTISCHER UND GEOSTATISTISCHER ANSATZ	35
4.1.	Prinzip der Autokorrelationsanalyse	37
4.2.	Geostatistische Auswertung regionalisierter Kenngrößen	38
5.	VARIOGRAPHIE MIT UNSICHERER KENNGRÖßEN	40
5.1.	Berücksichtigung von unsicheren Baugrundkenngrößen und unsicheren Lagekoordinaten im Vorfeld der Variographie	40
5.2.	Variographie	52
5.3.	Globaler Trend und Drift	80
5.4.	Anisotropie	82
5.5.	Beurteilungsmöglichkeiten zur [An]isotropie	93
6.	KRIGING MIT UNSICHEREN KENNGRÖßEN	96
6.1.	Allgemein	96
6.2.	Kriging Methoden	98
6.3.	Die Krigingvarianz	104
6.4.	Unsicherheitsfortpflanzung während des Krigings	109
7.	DIE GEOLOGISCHE MODELLBILDUNG	129
7.1.	Einleitung	129
7.2.	Halbraummodelle / geologische Modelle	130
7.3.	Fortpflanzung von Unsicherheiten in zusammengesetzten Halbraummodellen	132
7.4.	Methode der Smoothing Splines	133
7.5.	Baugrundmodell und Grenzzustand	134

8.	GREZZUSTÄNDE UND ZUVERLÄSSIGKEIT	136
8.1.	Allgemein	136
8.2.	Versagenswahrscheinlichkeit und Zuverlässigkeit	136
8.3.	Grenzzustand und Sicherheitsindex	138
8.4.	Bestimmung der operativen Versagenswahrscheinlichkeit	140
8.5.	Vorschläge zur Festlegung des Sicherheitsniveaus	146
9.	NACHWEIS VON GRÜNDUNGSELEMENTEN AN EINEM INDUSTRIESTANDORT	148
9.1.	Geologie des Standortes	148
9.2.	Geotechnisches Profil / Skizze zum Bauvorhaben	150
9.3.	Grenzzustandsuntersuchung	152
10.	DIE ANWENDUNG GEOSTAT UND SETZUNGSBERECHNUNG	165
11.	ZUSAMMENFASSUNG	175
12.	LITERATURVERZEICHNIS	177
13.	ANLAGEN	184
13.1.	Koordinatentransformation unter Reichweitenanisotropie	184
13.2.	Algorithmen ausgewählter Näherungsverfahren zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit	186
13.3.	Resultate des Krigings am Referenzstandort	189
13.4.	Resultate der Baugrundmodellierung / Standort Artern	197
13.5.	Datensätze	206

Verzeichnis der verwendeten Zeichen und Symbole

$a, a(\cdot)$	Schwellenwert des theoretischen Variogramms
$a_{\text{deterministisch}}$	Schwellenwert des theoretischen Variogramms für deterministische Kenngrößen
$b, b(\cdot)$	Reichweite des theoretischen Variogramms
c_j	Koeffizienten der Monome des Trendpolynoms
$\text{Cov}[X, Y]$	Kovarianz zwischen den Zufallsvariable X und Y
χ^2	Symbol der Chi ² -Verteilung, repräsentiert eine Chi ² -verteilte Zufallszahl
$\chi^2_{m, 1-\frac{\alpha}{2}}$	Wert der Chi ² -Verteilung für Freiheitsgrad m und Quantil α
d, d_i	Koeffizienten des Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes
δ_E	Autokorrelationslänge
δ_l, δ	Komprimierungsfaktoren, Anisotropieverhältnis
$\Delta[X]$	Modalwert
$E[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariable X
$\text{ERF}(b)$	Integral von 0 bis b über die Gaußverteilung.
$f(x) = f(X \mu, \sigma)$	Dichtefunktion von X
$F(x) = F(X \mu, \sigma)$	Verteilungsfunktion von X
$f_j(s_i)$	j-te Monom des Trendpolynoms am Ort s_i
f_{po}	Posteriorverteilung
f_{pr}	Priorverteilung
f_{Stutz}	Stutzungsfaktor der Dichtefunktion der Normalverteilung. Die Kenngrößen liegen im Intervall $[-f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma; f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma]$
$\phi(f)$	Integral von $-\infty$ bis f über die Gaußverteilung
GeoStat	Softwareentwicklung im Rahmen der Dissertation zur Analyse der Baugrundmodellbildung mit unsicheren Kenngrößen
GOK	Geländeoberkante
$\Gamma(\cdot)$	Gammafunktion
h	Vereinfachte Schreibweise für die Schrittweite in der Geostatistik. Es ist der Betrag des Abstandsvektors zweier Ortskoordinaten
KG	Kenngröße im Datenfeld
KG_{det}	Deterministische Kenngröße des Datenfeldes
$L(\cdot)$	Likelihoodfunktion

LNV	Lognormalverteilung
$\lambda_{ir}, \lambda_i(s_o)$	Wichtungsfaktoren im Kriginggleichungssystem im Bezug zum Ort s_o
λ_{VF}	Wichtungsfaktoren des Varianzenfortpflanzungsgesetzes
$M[X]$	Median, 50%-Quantil
m_s	mittlerer Anstieg des Erwartungswertes vom Schwellenwert in Abhängigkeit unsicherer Baugrundkenngößen für ungestützte Dichtefunktionen
$m_{s,f}$	mittlerer Anstieg des Schwellenwertes in Abhängigkeit von unsicheren Baugrundkenngößen für gestützte Dichtefunktionen bei f_{Stutz}
μ	Mittelwert der normalverteilten Zufallsvariable
μ, μ_x	Erwartungswert der Grundgesamtheit einer Normalverteilung
μ_L	Mittelwert der lognormalverteilten Zufallsvariable
$\hat{\mu}_L$	Schätzwert von μ_L
μ_{LM}	Langrange-Multiplikator
$N(\mu, \sigma)$	Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ
NW	Nuggetwert der theoretischen Variogrammfunktion
$P(X \leq x)$	Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X kleiner ist als ein definierter Grenzwert x
q_{Diff}	Wichtungsfaktor, bestimmt aus den Vertrauensfaktoren der Kenngrößen
$R(s_i)$	Residualwert am Ort s_i
ρ_μ	Schätzwert des Mittelwertes
ρ_σ	Schätzwert der Standardabweichung
s_{ir}, s_{i+h}	Orte mit kartesischen Koordinaten
σ, σ_x	Standardabweichung der Normalverteilung
σ^2	Varianz der Grundgesamtheit / Stichprobe einer Normalverteilung
σ^2_{Ff}	Resultierende Varianz aus dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz
σ_L	Parameter der Lognormalverteilung
$\hat{\sigma}_L$	Schätzwert von s_L
σ^2_K	allgemeine Abkürzung für die Krigingvarianz
σ^2_{OK}	Ordinary Krigingvarianz

σ_{SK}^2	Simple Krigingvarianz
σ_{UK}^2	Universal Krigingvarianz
σ_{Daten}	Standardabweichung der Datengesamtheit mit sicheren Kenngrößen
σ_{Ratio}	Verhältnis aus σ_{Zufall} und σ_{Daten}
$\sigma_{Ratio,Grenz}$	Verhältnis aus σ_{Zufall} und σ_{Daten} ab dem die Reichweite des theoretischen Variogramms quasi konstant ist.
σ_{Result}	Summe aus σ_{Zufall} und σ_{Daten}
σ_{Zufall}	Standardabweichung der unsicheren Kenngröße
σ_{grenz}	Normalverteilte Zufallszahlen mit $N(0,1)$ werden im Intervall $[-\sigma_{grenz}, +\sigma_{grenz}]$ generiert (Definition in GeoStat), siehe f_{stutz}
$T(s_i)$	Trendanteil bzw. Trendpolynom am Ort s_i
$t_{m,1-\alpha/2}$	Wert der Studentverteilung für Freiheitsgrad m und Quantil α
V_s	mittlerer Anstieg der Standardabweichung vom Schwellenwert in Abhängigkeit unsicherer Baugrundkenngößen für ungestutzte Dichtefunktionen
$V_{s,f}$	mittlerer Anstieg der Standardabweichung vom Schwellenwert in Abhängigkeit unsicherer Baugrundkenngößen für gestutzte Dichtefunktionen bei f_{stutz}
V, V_x	Variationskoeffizient der Stichprobe
$Var[x]=E[X-\mu]^2$	Varianz der Zufallsvariable X
VF_{KG}	Vertrauensfaktor der Kenngröße
\bar{x}	Mittelwert der Stichprobe
$x(\cdot)$	Realisation der Zufallsgröße X
$\hat{z}(s_0)$	Schätzwert oder Prognosewert am Ort s_0
$z(s_i)$	Kenngröße am Ort s_i

Abbildungsverzeichnis

Bild 1:	Kategorien der Unsicherheiten nach [4]	14
Bild 2:	Gegenüberstellung der Dichtefunktion der Normalverteilung und der Lognormalverteilung für den gleichen Datensatz	19
Bild 3:	Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer Normalverteilung [61]	20
Bild 4:	Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer Lognormalverteilung [61]	22
Bild 5:	Beispiel einer Korndurchmesserverteilung im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz mit Testgrenzen [61]	23
Bild 6:	Dichtefunktion der χ^2 -Verteilung für verschiedene N	25
Bild 7:	Gegenüberstellung der Dichtefunktion der gestutzten Normalverteilung und der gestutzten Lognormalverteilung für den gleichen Datensatz	26
Bild 8:	Zusammenhang zwischen der Varianz aus der gestutzten Verteilungsfunktion bei $f_{\text{stutz}} \cdot \sigma$ und der Varianz der ungestutzten Verteilungsfunktion im aufgespannten Intervall $[-f_{\text{stutz}} \cdot \sigma, f_{\text{stutz}} \cdot \sigma]$	27
Bild 9:	Möglichkeit der Darstellung von Fuzzy-Sets	28
Bild 10:	Darstellung der Abweichung unter Berücksichtigung des 1. Restgliedes der Taylorreihenentwicklung	31
Bild 11:	Ermittlung des charakteristischen Wertes für eine Baugrundkenngröße in Anlehnung an den EC 7 für Stichproben ohne Trend	33
Bild 12:	Beispielhafte Darstellung einer Autokorrelationsfunktion (oben) und Variogrammfunktion (unten)	36
Bild 13:	Struktur der geostatistischen Modellbildung	38
Bild 14:	Zusammenfassung von mehreren Feld- und Laboruntersuchungen zu einer Kenngröße mit statistischen Parametern. Hier repräsentiert durch eine Dichtefunktion	40
Bild 15:	Verknüpfung der Varianz der Kenngrößen im Untersuchungsgebiet und Kenngrößenvarianzen an den Erkundungsorten	41
Bild 16:	Isotrope Variographie - Modul aus GeoStat: Zufallsgrößengenerierung durch Definition der Streubreite und der statistischen Verteilungsparameter	45
Bild 17:	Erwartungswert der numerisch ermittelten Varianzen	46
Bild 18:	Erwartungswert der numerisch ermittelten Erwartungswerte	46
Bild 19:	Histogramm für den KW 2 des Datensatzes ArternOK_Schicht, Grafik aus GeoStat	47
Bild 20:	Isotrope Variographie - Modul aus GEOSTAT: Zufallsgrößengenerierung durch Definition der Streubreite und der statistischen Verteilungsparameter für unsichere Lagekoordinaten	48
Bild 21:	Experimentelles Variogramm und approximiertes theoretisches Variogramm	53
Bild 22:	Wertepaarbildungen mit und ohne definierte Toleranzkriterien	55
Bild 23:	Definition der allgemeinen Regression für $\sigma_{\varepsilon}^2(x)$	62
Bild 24:	Gegenüberstellung der Regressionsergebnisse der analytischen linearisierten Regression und der numerischen Approximation	64

Bild 25: Grafische Auswertung der Tabelle 12 für den Parameter a	69
Bild 26: Grafische Auswertung für den Schwellenwert a für Datensatz ArternOK_Schicht	70
Bild 27: Grafische Auswertung für den Parameter b	74
Bild 28: Grafische Auswertung für den Parameter b	74
Bild 29: Grafische Auswertung für die Standardabweichung des Parameters a	75
Bild 30: Grafische Auswertung für die Standardabweichung des Parameters a	76
Bild 31: Verlauf der Standardabweichung des Parameters b	78
Bild 32: Verlauf der Standardabweichung des Parameters b	79
Bild 33: Verlauf der Standardabweichung des Parameters b	79
Bild 34: Lokale Fluktuationen und globaler Trend	
Bild 35: Variogramm ohne Schwellenwert	80
Bild 36: Zweidimensionale Darstellung der richtungsabhängigen Reichweiten für den anisotropen Zustand [links] und den isotropen Zustand [rechts]	83
Bild 37: Winkel der Hauptanisotropierichtung in Abhängigkeit von σ_{Ratio} für den Datensatz Zufallsdaten	84
Bild 38: Standardabweichung des Winkels der Hauptanisotropierichtung zu Bild 37	85
Bild 39: Richtungsabhängige Reichweite für den Datensatz Zufallsdaten für die Hauptanisotropierichtung und der zugehörigen orthogonalen Richtung	86
Bild 40: Anisotropieverhältnis ermittelt aus Quotient aus der Reichweite der Hauptanisotropierichtung und der zugehörigen orthogonalen Richtung aus Bild 39	86
Bild 41: Gegenüberstellung des Schwellenwertes der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)	89
Bild 42: Gegenüberstellung der Reichweite der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)	89
Bild 43: Gegenüberstellung des Schwellenwertes der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)	90
Bild 44: Gegenüberstellung der Reichweite der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)	90
Bild 45: Anisotropierichtung des konstruierten Zufallfeldes (links) und Anisotropieellipsoid der deterministischen Eingangsgrößen in der Aufsicht – Exponentielle Regression (rechts)	91
Bild 46: Visualisierung des Einflusses unsicherer Kenngrößen (kreisförmig = isotrop) in der Aufsicht	91
Bild 47: Reichweitenanisotropie im Halbraum (x-Richtung maximaler Reichweite, y-Richtung minimaler Reichweite, z-dritte orthogonale Richtung)	94
Bild 48: Datenpaarbildung beim Test auf Reichweitenanisotropie	95
Bild 49: Informationswandlung in Indikatoren	103
Bild 50: Exemplarische Darstellung der Krigingvarianz σ_k^2 für Testfeld_1 und Testfeld_2 (siehe Anhang 13.5.4 und 13.5.5)	105

Bild 51: Unterschiedliche Schätznachbarschaften mit gleichem Prognoseergebnis und gleicher Krigingvarianz am Prognoseort	105
Bild 52: Varianz des Schätzers für eine Kenngrößenvarianz $\text{Var}[X_i]=4$ für 100 Simulationen auf der Grundlage des Varianzenfortpflanzungsgesetzes.	107
Bild 53: Modell zur Auswertung der Krigingvarianz in Abhängigkeit verschiedener Variogrammfunktionen	108
Bild 54: Gegenüberstellung der Krigingvarianz und der Varianz des Schätzers	110
Bild 55: Ordinary Krigingergebnisse für den Datensatz Zufallsdaten KW4 und KW5	111
Bild 56: Krigingresultate für den unsicheren Schwellenwert	112
Bild 57: Krigingresultate für die unsichere Reichweite	114
Bild 58: Krigingresultate für unsicheren Schwellenwert und unsichere Reichweite	116
Bild 59: Krigingresultate für unsicheren Schwellenwert und unsichere Reichweite sowie unsicherer Kenngrößen	117
Bild 60: Wichtungsfaktoren λ für den Schwerpunkt der Gitterstruktur vom Datensatz Zufallsdaten unter Berücksichtigung von 3 Stützstellen in der Schätznachbarschaft (als halbes Quadrat dargestellt)	118
Bild 61: Krigingresultate für Parameter a und b unsicher sowie unsicher Kenngrößen	119
Bild 62: Krigingergebnisse für die anisotrope Annahme für Datensatz Zufallsdaten KW4 und KW5	121
Bild 63: Vorschlag für den Unsicherheitsplot des Krigingschätzers	124
Bild 64: Nicht abgedeckte Bereiche im Unsicherheitsplot	125
Bild 65: Verhältnis der Krigingvarianz zur Kenngrößenvarianz (links); Beispiel eines Unsicherheitsplots (rechts)	126
Bild 66: Kenngrößenanordnung in Anlehnung an [27]	127
Bild 67: Inkonsistente Bereiche in zusammengesetzten Halbraummodellen infolge unsicherer Schichtgrenzen	131
Bild 68: Zusammengesetztes Halbraummodell	132
Bild 69: Anpassung eines Datenbereiches über die Methoden der Smoothing Splines	134
Bild 70: Einwirkungen S_i und Widerstände R mit der zugehörigen Versagenswahrscheinlichkeit p_f	139
Bild 71: Darstellung der Versagenswahrscheinlichkeit und des Sicherheitsindex [77]	142
Bild 72: Abhängigkeit zwischen dem probabilistischen Sicherheitsmaß P_f und der erforderlichen Realisationsanzahl M	146
Bild 73: Geologische Übersichtskarte des Thüringer Beckens	148
Bild 74: Vereinfachtes Baugrundprofil	149
Bild 75: Datenbasis Kernerkundung mit Schnittführung für die subjektive Schätzung	151
Bild 76: Datenbasis Kern- und Detailerkundung mit Schnittführung für die subjektive Schätzung	151
Bild 77: Baugrundprofil aus subjektiver Schätzung mit deterministisch bestimmten Setzungsanteilen	153

Bild 78: Grafische Darstellung der Resultate aus Tabelle 20	155
Bild 79: Organigramm der Auswertung	156
Bild 80: Regionale Situation am Prognoseort, übereinstimmend mit dem Ort von DS 4 für die Kernerkundung	157
Bild 81: Regionale Situation am Prognoseort, übereinstimmend mit dem Ort von DS 4 für die Kern- und Detailerkundung	158
Bild 82: Grundstruktur von GeoStat	165
Bild 83: Systemvorgabenmodul – Gitterdimensionsparameter	165
Bild 84: Struktur im Modul – Eingabewerte	166
Bild 85: Modul – Map File erstellen	166
Bild 86: Modul – Variographie isotrop	167
Bild 87: Modul – Variographie anisotrop	168
Bild 88: Modul – Raumkriging	169
Bild 89: Modul – Baugrundsichtung	170
Bild 90: Modul – Grafik Intern	171
Bild 91: Modul – Grafik Aguila	172
Bild 92: Auswertung zweidimensionaler Stichproben – Fenster 1	173
Bild 93: Auswertung zweidimensionaler Stichproben – Fenster 2	173
Bild 94: Anwendung Setzungsberechnung	174
Bild 95: Richtungsdefinitionen der Koordinatentransformation	184
Bild 96: Transformation des Anisotropieellipsoides in eine Kugel	185
Bild 97: Ausgewählte Baugrundprofile für den Datenort P4, bestimmt durch die subjektive Schätzung mit anwachsender Datengrundlage. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil	197
Bild 98: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Datengrundlage. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil	198
Bild 99: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil	199
Bild 100: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil	200
Bild 101: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil	201
Bild 102: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.	202
Bild 103: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.	203
Bild 104: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.	204
Bild 105: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.	205

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Übersicht der Anzahl der Simulationen bei der Variation der Orte, Arbeitsprogramm	48
Tabelle 2:	Ergebnisse der Variogrammanalysen mit deterministischen KG und unsicheren Lagekoordinaten – Exponentielle Regression für Datensatz Fehlertest_Zufall KW3	49
Tabelle 3:	Ergebnisse der Variogrammanalysen mit deterministischen KG und unsicheren Lagekoordinaten – Gauß'sche Regression für den Datensatz Fehlertest_Zufall KW3	49
Tabelle 4:	Ergebnisse der exponentiellen Variogrammanalyse streuenden Orten für den Datensatz ArternOK_Schicht – KW 2	50
Tabelle 5:	Auswertung des Datensatz 3 für unsichere Kenngrößen und sichere Lagekoordinaten	51
Tabelle 6:	Auswertung des Datensatz 3 für unsichere Kenngrößen und unsichere Lagekoordinaten	51
Tabelle 7:	Gegenüberstellung der Varianzfortpflanzung für den Differenzenausdruck der Variogrammfunktion aus GeoStat mit dem Datensatz ArternOK_Schicht KW 2 für $\sigma_{\text{Daten}} = \sigma_{\text{Zufall}}$ und $h = 20\text{m}$	57
Tabelle 8:	Gegenüberstellung von $\text{Var}[Z]$ und $\sigma_{\gamma(h)}^2$ für Ergebnisse von Berechnungsdurchläufen des Programms GeoStat mit dem Datensatz Fehlertest_Zufall KW5 für $\sigma_{\text{Ratio}}=1$ und $h = 80\text{m}$	60
Tabelle 9:	Gegenüberstellung von $\mu_{2\gamma(h)}$ und $\mu_{\gamma(h)}$ für Ergebnisse von Berechnungsdurchläufen des Programms GeoStat mit dem Datensatz Fehlertest_Zufall KW5 für $\sigma_{\text{Ratio}} = \sigma_{\text{Zufall}}$ und $h = 80\text{m}$	60
Tabelle 10:	Auswertung ArternOK_Schicht KW 3 zur Bestimmung der Varianz der Experimentellen Variogrammwerte $\gamma(h)$ mit $\sigma_{\text{Zufall}}=4,4$ und $\sigma_{\text{Daten}} = 6,346$	66
Tabelle 11:	Auswertung ArternOK_Schicht KW3 zur Bestimmung der Varianz der experimentellen Variogrammwerte. $\sigma_{\text{Zufall}}=\sigma_{\text{Daten}} = 2,884$ beispielhaft für die Abstandsklassen $h=20$ und $h=120$	67
Tabelle 12:	Mittelwerte für den Parameter der exponentiellen Variogrammfunktion aus jeweils 1000 Simulationen für verschiedene σ_{Ratio}^2 unter Annahme der ungestutzten Normalverteilung für σ_{Zufall}	69
Tabelle 13:	Mittelwertdarstellung für den Schwellenwert a des exponentiellen, Gauß'schen und des sphärischen Modells in Abhängigkeit von σ_{Ratio}^2	72
Tabelle 14:	Standardabweichung für den Parameter a des exponentiellen, Gauß'schen und des sphärischen Modells in Abhängigkeit der Zufallsgrößenstreuung σ_{Ratio}^2	77
Tabelle 15:	Zusammenfassung der Krigingergebnisse Zufallsdaten KW 5, $\sigma_{\text{Daten}}=3,654$, exponentielles Modell, Ordinary Kriging, 3 Stützstellen	122
Tabelle 16	Definition der Sicherheitsklassen nach [19]	147
Tabelle 17	Definition des Sicherheitsindex β nach [19]	147

Tabelle 18:	Zusammenhang zwischen Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheitsindex nach [19]	147
Tabelle 19:	Bodenmechanische Kenngrößen, erste Annahme	150
Tabelle 20:	Fundamentbreiten in Abhängigkeit der Standardabweichung der Steifemoduln basierend auf der Monte-Carlo-Simulation und zugehörige Schiefstellungen für die Sicherheitsindizes	154
Tabelle 21:	Schätznachbarschaft: P4 / Kernerkundung / 5 Stützstellen / isotrop	159
Tabelle 22:	Wertebereich der Schätznachbarschaft: P4 / Kern- und Detailerkundung / 5 Stützstellen / isotrop	160
Tabelle 23:	Fundamentbreiten in Abhängigkeit des isotropen Baugrundmodells und der Modellierungsetappe mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.	161
Tabelle 24:	Fundamentbreiten in Abhängigkeit des isotropen Baugrundmodells und der Modellierungsetappe mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.	162
Tabelle 25:	Intervalle der Fundamentbreiten unter Annahme der Isotropie aus allen generierten Baugrundmodellen mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.	163
Tabelle 26:	Intervalle der Fundamentbreiten unter Annahme der Anisotropie aus allen generierten Baugrundmodellen mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.	163
Tabelle 27:	Fundamentbreiten in Abhängigkeit der Anisotropie und der Modellierungsetappe mit konstantem Steifemodul und unsicheren Schichtgrenzen, $\sigma_{\text{Ratio}}=5,0$.	164
Tabelle 28:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_K_3_iso)	189
Tabelle 29:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_K_5_iso)	190
Tabelle 30:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_D_3_iso)	191
Tabelle 31:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_D_5_iso)	192
Tabelle 32:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_K_3_iso)	193
Tabelle 33:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_K_5_iso)	194
Tabelle 34:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_D_3_iso)	195
Tabelle 35:	Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_D_5_iso)	196

1. Einleitung

Bedingt durch die Genese und durch anthropogene Einflüsse ist die geologische Zusammensetzung des Baugrundes heterogen und anisotrop. Infolge des meist geringen Erkundungsumfanges unterliegen die beschreibenden Kenngrößen (Baugrunddaten) einer zufälligen und systematischen räumlichen Streuung. Durch direkte und indirekte Methoden der Baugrunderkundung sind diese ableitbar. Die Messergebnisse sind unsicher als Folge von Messunsicherheiten, auftretender Dateninkonsistenz und Heterogenität sowie Datenübertragung und Datenbereitstellung.

Aus den Baugrunderkundungen werden in der Praxis zunächst Schichtenverzeichnisse erstellt, um Homogenbereiche zu definieren. Das Schichtenmodell kann auch als geologisches Modell bezeichnet werden. Es basiert auf der Festlegung der Schichtgrenzen oder auf der Definition der Schichtmächtigkeiten. Solche dreidimensionalen geologischen Modelle beruhen stets auf mehreren zweidimensionalen Datensätzen, die miteinander verknüpft werden. Dabei werden die Baugrunddaten innerhalb der zweidimensionalen Datensätze als deterministisch vorausgesetzt. Da das geologische Modell auf deterministischen Datensätzen beruht, ist es selbst deterministisch.

Für mathematisch gesicherte Schätzungen der Schichtgrenzen beziehungsweise der Schichtmächtigkeiten im geologischen Modell in unbeprobten Bereichen des Untersuchungsgebietes haben sich geostatistische Methoden bewährt.

Innerhalb eines Homogenbereiches werden dann die beschreibenden Kenngrößen oft als unsichere Parameter in probabilistischen Sicherheitsnachweisen berücksichtigt. Das aus beiden Ansätzen abgeleitete übliche Rechenmodell basiert auf deterministischen geologischen Modellen mit unsicheren Parametern in dessen Homogenbereichen.

Aufbauend auf dieser dem Stand der Wissenschaft entsprechenden Herangehensweise wird in der vorliegenden Arbeit die Fortpflanzung der Unsicherheiten von Baugrunddaten bis zur geologischen Modellbildung auf der Grundlage geostatistischer Methoden untersucht. In den einzelnen Etappen werden analytische und numerische Zusammenhänge zwischen den unsicheren Baugrunddaten und den geostatistischen Parametern abgeleitet. Es ist das Ziel ein geologisches Modell mit abschätzbaren Unsicherheiten als Grundlage für probabilistische Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau zu generieren. Damit kann neben den unsicheren Parametern in einem probabilistischen Sicherheitsnachweis auch das unsichere geologische Modell eingeführt und dessen Einfluss auf den Grenzzustand ausgewertet werden.

Für die geologische Modellierung auf der Grundlage geostatistischer Methoden mit unsicheren Kenngrößen existiert keine Softwarelösung. In marktüblichen Anwendungen wie GSTAT, Variowin, Earthvision oder Surfer ist der Berechnungsprozess ausschließlich mit deterministischen Kenngrößen möglich. Als Teilleistung dieser Arbeit wurde daher die Softwareanwendung GeoStat entwickelt. Mit ihr wurden alle numerischen Auswertungen auf der Grundlage der Monte Carlo Simulation durchgeführt.

Geostat beinhaltet die Module:

- statistische Auswertung von eindimensionalen und zweidimensionalen Datensätzen, auch unter Berücksichtigung von Korrelationen
- isotrope und anisotrope Variographie für bis zu dreidimensionale Datensätze
- isotropes und anisotropes Kriging
- Baugrundmodellierung mit optionaler Nutzung regionaler Informationsverbesserung
- Visualisierung von zwei- und dreidimensionalen geologischen Modellen

Die Unsicherheiten der Kenngrößen werden in den Modulen durch Dichtefunktionen, Vertrauensfaktoren, Fuzzy-Verteilungen und Bayes'sche Methoden angenähert.

In der vorliegenden Dissertation werden in Kapitel 2 Unsicherheiten und deren Ursachen in der Geotechnik beschrieben. Es werden ausgewählte Methoden aufgezeigt, durch die unsichere Baugrundkenngößen im Weiteren repräsentiert werden können. Die mathematischen Grundlagen dieser Methoden werden in prägnanter Form in Kapitel 3 dargestellt. Die Auswertung von Stichproben und die Ermittlung des charakteristischen Kennwertes sind wesentlicher Bestandteil. Aufbauend auf diesen Grundlagen wird in Kapitel 4 der statistische Ansatz dem geostatistischen Ansatz zur Beschreibung von Korrelationen zwischen kartesischen Lagekoordinaten und Baugrundkenngößen gegenübergestellt. Die Autokorrelation und die Variographie werden in ihren Grundlagen erläutert sowie Gemeinsamkeiten und Unterschiede aufgezeigt. In Kapitel 5 werden die Teilschritte der Variographie benannt. Die Resultate mit unsicheren Kenngrößen werden mit denen der deterministischen Kenngrößen verglichen, also die erweiterte Herangehensweise der bisherigen gegenübergestellt. Wenn es mathematisch möglich ist, werden analytische Zusammenhänge zwischen beiden aufgezeigt, ansonsten werden für unsichere Kenngrößen die Ergebnisse numerisch durch GeoStat erarbeitet. Die Erkenntnisse werden als Ausgangsinformation für Kapitel 6 genutzt. Es wird das Kriging, die Varianz des Krigingschätzers und die Krigingvarianz als wesentlicher Bestandteil der Geostatistik mit unsicheren Baugrundkenngößen beschrieben. Daraus wird ein so genannter Unsicherheitsplot, der die Varianz des Krigingschätzers und die Krigingvarianz verknüpft, abgeleitet, welcher für die bisherige Betrachtungsweise mit deterministischen Kenngrößen nicht erforderlich war. Im folgenden Kapitel wird die geologische Baugrundmodellierung in Verbindung mit den zuvor ermittelten unsicheren Krigingergebnissen verbal beschrieben. Die abgeleiteten Erkenntnisse bis zum Kapitel 7 ermöglichen die Erstellung eines unsicheren geologischen Halbraummodells für die probabilistische Sicherheitsnachweise in Kapitel 9. Die notwendigen Grundlagen für die Berücksichtigung unsicherer Kenngrößen in den Homogenbereichen des unsicheren geologischen Modells sind in Kapitel 8 zusammengefasst.

2. Unsicherheiten in der Geotechnik

Zufall und Unsicherheit sind wesentliche Merkmale für die Beschreibung von natürlichen Zusammenhängen. Beide Merkmale unterscheiden sich in Ihren Grundlagen. Unsicherheiten in zufälligen Ereignissen oder Prozessen die nicht vorhersagbar sind, werden auch als aleatorische Unsicherheiten bezeichnet. Für die Summe dieser Ereignisse oder Prozesse muss das nicht gelten. Als einfaches Beispiel hierfür ist das Werfen einer Münze zu nennen.

Ist die Beschreibung der Unsicherheit an das Subjekt gebunden und hängt diese vom Umfang des Wissens ab, so dass nur bekannte Unsicherheitseinflüsse einbezogen werden, wird von epistemischen Unsicherheiten gesprochen. Diese sind bedingt quantifizierbar.

Die Unsicherheiten in den Aussagen und Prognosen des geotechnischen Ingenieurwesens entstehen aus den spezifischen probabilistischen und stochastischen Einflüssen, die von der Baugrunderkundung bis zum Sicherheitsnachweis auftreten. Im Wesentlichen geht es um die Unsicherheit, die in der Bestimmung oder in der Annahme der Kenngrößen enthalten ist, und deren Fortpflanzung [3].

Nach [4] werden in der Geotechnik natürliche Unsicherheiten, wissensbasierte Unsicherheiten und Modellunsicherheiten unterschieden.

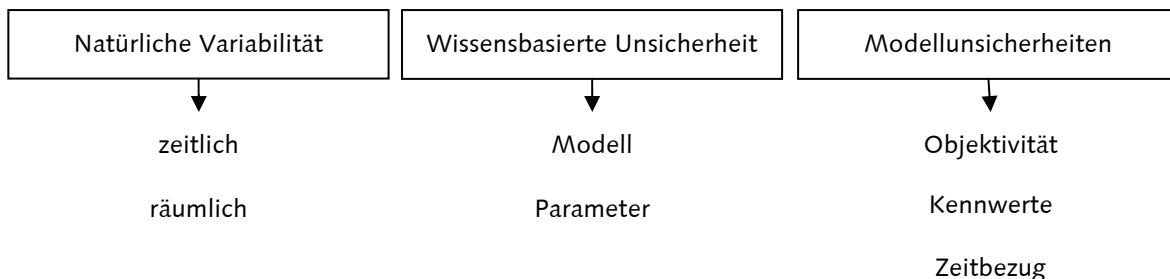


Bild 1: Kategorien der Unsicherheiten nach [4]

In probabilistischen Sicherheitsnachweisen sind beispielsweise beide Arten integriert, ohne dass im Detail zwischen aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten unterschieden wird.

Zahlreiche Aspekte im geotechnischen Planungsprozess erfordern umfassende geologische und geotechnische Kenntnisse über den anstehenden Baugrund. Der Baugrund kann in seinen Eigenschaften heterogen sein. Diese Heterogenitäten können nur selten erfasst werden, da das Flächenverhältnis zwischen erkundeter und beeinträchtigteter Baufläche sehr gering ist.

Die Anwendung statistischer Methoden ist eine Möglichkeit, Aussagen transparenter und objektiver zu treffen. Die Datenerhebung und die Datenauswertung sind entscheidend für die Beurteilung geotechnischer Grenzzustände.

Die Kriterien für die Datenauswertung richten sich nach:

- der Zuverlässigkeit der Datenquelle,
- dem eingesetzten Erkundungsverfahren,
- dem zugrunde liegenden Stichprobenumfang,
- der enthaltenen Datenstreuung,
- der Aktualität sowie
- der Redundanz des Datenmaterials.

Insbesondere sind subjektive Wertungen in Bestandsdaten geeignet einzuschätzen. Aussagen zu Baugrundkenngößen sind mit der Vorgabe von Intervallen für regionalisierte Standorte verbunden, da die Stichproben stets mit Unsicherheiten behaftet sind.

Diese können zum einen systematische Unsicherheiten sein, die gleichgerichtete Abweichungen der Stichprobenelemente verursachen. Sie können durch geeignete Messanordnungen und eine sorgfältige Kalibrierung der Instrumente reduziert werden. Zum anderen verursachen die Umgebungsbedingungen während der Messung sowie menschliche und technologische Unzulänglichkeiten zufällige Unsicherheiten. Diese sind minimierbar, aber nicht völlig vermeidbar [1]. Systematik und Zufälligkeit der Unsicherheit schließen einander aus. Zwischen diesen beiden Extremen kann der Unsicherheitsbegriff korrelierter Beobachtungen angesiedelt werden. Bei den korrelierten Unsicherheiten handelt es sich um eine zufällige Unsicherheit, in welcher aber ein Teilbereich der Verteilungsfunktion bevorzugt wird [36].

Für die weitere Verwendung der diskreten und partiell subjektiv bewerteten Datengesamtheit zur Beschreibung des zeitdiskreten stochastischen Prozesses ist diese durch stetige oder in definierten Teilbereichen stetige Funktionen sowie durch diskrete Multiplikatoren anzunähern. Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen $X(\omega, t)$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω und dem Parameterraum T . Wenn der Parameterraum abzählbar ist, wird von einem zeitdiskreten stochastischen Prozess oder Punktprozess gesprochen [94].

Im Weiteren werden zur Prozessbeschreibung

- Dichteverteilungen und Verteilungsfunktionen (gestutzt und ungestutzt)
- Intervalle, Wichtungsfaktoren und Wahrscheinlichkeiten sowie
- Fuzzy Sets

genutzt. Die einzelnen Methoden sind in den GeoStat-Modulen isotrope und anisotrope Variographie und isotropes und anisotropes Kriging integriert.

Während es bei probabilistischen Fragen um die Realisation von einzelnen Zufallsvariablen und um deren Verteilung geht, hängt ein Ereignis bei stochastischen Prozessen von der Gesamtheit mehrerer Zeit- oder Raumfunktionen ab. Die sich ergebenden Autokorrelations- beziehungsweise Variogrammfunktionen, Seite 35 ff., bilden dabei die Grundlage für die Beschreibung der zeitdiskreten Prozesse.

Bei einem geotechnischen Sicherheitsnachweis als Punktprozess, ist zu analysieren, ob das Ergebnis auf der Widerstandseite durch einen gleitenden Mittelwert kontrolliert wird oder ob zeitliche und/oder räumliche Extremwerte den betrachteten Grenzzustand auslösen können.

Zusätzlich zur Unsicherheit existieren Ungenauigkeiten und die Vagheiten der Aussage [1], [40]. Die Ungenauigkeit, beispielsweise Beobachtungs- und Messungenauigkeiten, kann durch Intervallangaben eingegrenzt werden. Mit der Vagheit werden so genannte weiche Informationen, linguistische Terme, beschrieben. Mit der Fuzzy Logic ist deren Quantifizierung möglich.

Mittels der Methoden der Unsicherheitsfortpflanzung können die Auswirkungen von Unsicherheit, Ungenauigkeit und Vagheit auf die Resultate des zeitdiskreten stochastischen Prozesses analysiert werden.

Die subjektive Schätzung, zumeist Expertenschätzung, ist in der Geotechnik weit verbreitet, da die Anzahl von objektiv zur Verfügung stehenden Baugrundinformationen gering ist. Diese Schätzungen enthalten stets ein Maß an Voreingenommenheit. Die Psychologie der Schätzungen kann nach [58] klassifiziert werden, wie nachfolgend beschrieben werden:

Verfügbarkeit von Vorinformationen

Das Schätzergebnis ist abgeleitet von vorangegangenen Untersuchungen oder Ereignissen. Die Folgeschätzung baut auf diesen Erkenntnissen auf, die sie als gegeben akzeptiert. Das aktuell zu schätzende Ereignis beruht auf einer Kette von Ereignissen, die sich untereinander bedingen. Diese Methode bildet die Grundlage der Bayes'schen Schätzung.

Repräsentativität von Vorinformationen

Das Schätzergebnis dient der Zuordnung einer Untersuchung oder eines Ereignisses zu einer Grundgesamtheit. Es wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit welcher die Schätzung einem bestimmten Prozess zugeordnet werden kann. Die Grundlage bildet das Vertrauen in Repräsentativität kleiner Mengen.

Diese Methode ist insbesondere die Basis für Indikatorschätzungen in der Statistik und der Geostatistik. Sie wird in der Aufstellung von so genannten Nullhypothesen in diver-

sen statistischen Methoden als auch zur Abgrenzung von Homogenbereichen in geostatistischen Prozessen eingesetzt.

Probleme ergeben sich insbesondere, wenn Grundgesamtheiten zu detailliert definiert sind und deren Unterschiede sich lediglich auf Details beziehen. Die entsprechenden Grundgesamtheiten kann dann nicht eindeutig zugeordnet werden.

Korrespondenz und Anpassung

Basierend auf einer vorgegebenen Schätzung eines Ereignisses, Erstschätzung, oder einer Untersuchung werden korrespondierende Ereignisse oder Untersuchungen, die nicht als Folge der Erstschätzung, sondern als abgeleitete Schätzung anzusehen sind, bestimmt. Das Interesse bezieht sich auf reflektierte Schätzungen (ergänzende Schätzungen) eines Prozesses.

Ist die Vorgabe unvollkommen, so sind die Schätzergebnisse der korrespondierenden Schätzung voreingenommen gegenüber der Erstschätzung.

Die analytischen und numerischen Methoden zur Berücksichtigung der Unsicherheiten der Eingangswerte von stochastischen Prozessen können nach [58] unterteilt werden in:

- Methoden, die den Einfluss der Variation der Eingangswerte auf das Schätzergebnis untersuchen – Sensitivitätsanalyse
- Methoden, die Unsicherheiten der Schätzergebnisse infolge der Unsicherheiten der Eingangskennwerte reflektieren – Unsicherheitsfortpflanzung
- Methoden, die die Bedeutung der Eingangsunsicherheiten in Bezug auf deren relativen Beitrag zur Unsicherheit der Schätzergebnisse untersuchen – Unsicherheitsanalyse

Der Einsatz dieser Methoden ist subjektiv und abhängig vom zu lösenden Problem. Verschiedene Untersuchungen [13], [37], [93] kamen zu dem Ergebnis, dass keine Handlungsvorschrift in dem Sinn existiert, dass ein bestimmtes Problem mit einer bestimmten Methode erfolgreich untersucht werden kann. Die verschiedenen analytischen und numerischen Modelle sind durch ihren funktionellen Ablauf charakterisiert.

Dabei sind die Methoden zur Berücksichtigung von Unsicherheiten auf die Analytik der Wahrscheinlichkeitstheorie angewiesen. Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie sind Ereignisse, die als Mengen aufgefasst werden und denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet sind. Wahrscheinlichkeiten sind reelle Zahlen zwischen null und eins. Die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu Ereignissen muss gewissen Mindestanforderungen genügen [94].

In dieser Arbeit werden ausgerichtet auf die Problemstellung stets verschiedene Ansätze zur Beschreibung der Streuung und der Unsicherheit auf Kenngrößen untersucht und gegenübergestellt. Es wird dabei kein Anspruch auf Vollständigkeit der Varianten erh-

ben. Insbesondere wird die Auswirkung der systematischen Unsicherheiten, der zufälligen Unsicherheiten und der subjektiven Wichtungen untersucht.

Die Berechtigung zur Anwendung statistischer Methoden auf der Grundlage der Tschebyschewschen Ungleichung sowie Hinweise zum Zweck der statistischen Bodenmechanik wurden in [31] erläutert. Die statistischen Grundlagen sind nachfolgend zusammengefasst.

3. Statistische Grundlagen

3.1. Dichteverteilungen

Die stetige Dichteverteilung beschreibt die Stichprobenelemente durch einen funktionellen typisierten Verlauf, mit dem Ziel, aus den Einzelinformationen auf die zugehörige Grundgesamtheit zu schließen. Für die Beschreibung von Baugrundkenngrößen eignen sich aus der Summe der Verteilungsfunktionen insbesondere die Normalverteilung und die Lognormalverteilung [32], [61]. Diese beiden Verteilungstypen unterscheiden sich durch die untere Grenze. Während die Lognormalverteilung gegen null strebt, so strebt die Normalverteilung gegen $-\infty$. Werte kleiner null sind für Baugrund- und Geometrie-kenngrößen nicht nutzbar. Die Dichtefunktion wird an die Stichprobe angepasst. Wenn für die mathematische Modellierung Einzelwerte benötigt werden, so erfolgt deren Generierung durch die Anwendung von Zufallszahlengeneratoren. Die generierten Zufallszahlen sind Funktionswerte der Dichtefunktion.

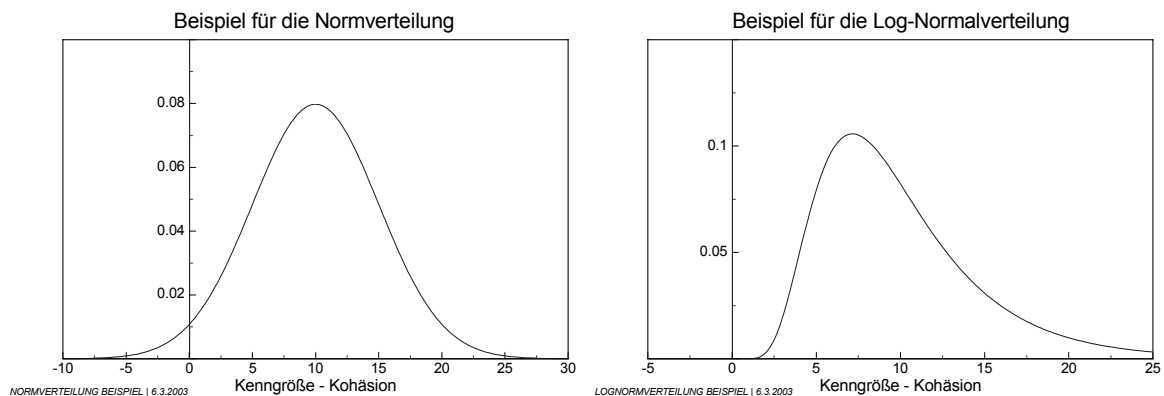


Bild 2: Gegenüberstellung der Dichtefunktion der Normalverteilung und der Lognormalverteilung für den gleichen Datensatz

Für stetige Verteilungen können im Hinblick auf weitere Formulierung der Erwartungswert und die Varianz stetiger Zufallsgrößen allgemein formuliert werden:

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x dx$$

$$E[x - \mu]^2 = \text{Var}[X] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x^2 dx - \mu^2 \tag{3.1}$$

3.1.1. Normalverteilung

Eine stetige Zufallsgröße X , die alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann, unterliegt einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$, wenn die Dichte- und die Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$\text{Dichtefunktion} \quad f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

$$\text{Verteilungsfunktion} \quad F(x|\mu, \sigma) = P(X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.3)$$

mit μ als Erwartungswert oder Schwerpunkt der Normalverteilung und der Standardabweichung σ .

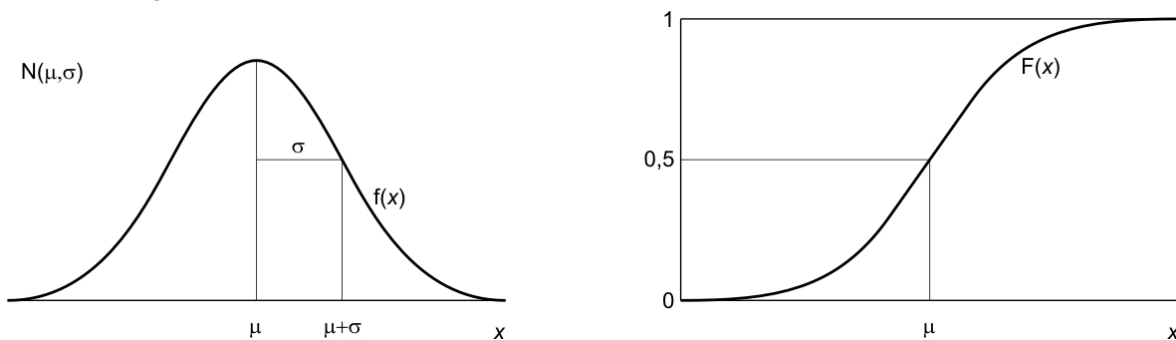


Bild 3: Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer Normalverteilung [63]0

Die Parametern μ und σ^2 einer normalverteilten Zufallsvariablen X sind gleich dem

$$\text{Erwartungswert} \quad E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot x dx \quad (3.4)$$

$$\text{und der Varianz} \quad E[X - \mu]^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot (x - \mu)^2 dx \quad (3.5)$$

Die Dichtefunktion hat an der Stelle μ ihr Maximum. Der Wert an dieser Stelle ist proportional zu $1/\sigma$. Die Normalverteilung ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswertes. Die Wendepunkte liegen bei $x = \mu - \sigma$ und $x = \mu + \sigma$.

Die standardisierten normalverteilten Zufallsvariablen haben den Erwartungswert $E[X] = 0$ und die Varianz $\text{Var}[X] = 1$. Wenn X nach $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist, gilt für die standardisierte Zufallsvariable U

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3.6)$$

Des Weiteren gilt für die

$$\text{Dichtefunktion} \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (3.7)$$

$$\text{Verteilungsfunktion} \quad F(u_0) = \int_{-\infty}^{u_0} f(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u_0} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (3.8)$$

$$\alpha\text{-Quantile} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u_\alpha} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (3.9)$$

So ist z.B. für $\alpha = 0,05$ das α -Quantil $u_\alpha = -1,64$ und für $\alpha = 0,95$ ist $u_\alpha = 1,64$. Für die weiteren Betrachtungen mit GeoStat sind die Sigmaregeln [50] von Bedeutung. Wegen

$$P(X \leq x) = P(X \cdot \sigma + \mu \leq x) = P\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(X \leq u_\alpha) = \alpha \quad (3.10)$$

gilt allgemein

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) = 0,9545$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) = 0,9974$$

$$P(\mu - 4 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 4 \cdot \sigma) = 0,9999$$

Die Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen X verteilen sich bei einer großen Anzahl von Versuchen ($N \rightarrow \infty$) so, dass etwa 68% aller Werte im 1σ - Bereich, etwa 95% aller Werte im 2σ - Bereich und über 99% aller Werte im 3σ - Bereich liegen. Praktisch alle liegen Werte im 4σ - Bereich.

3.1.2. Lognormalverteilung

Sind die Logarithmen x_i einer Zufallsvariablen X normalverteilt, so heißt X logarithmisch normalverteilt beziehungsweise lognormalverteilt. Die Lognormalverteilung ist von 0 bis $+\infty$ definiert. Die Zufallsgröße X hat die

$$\text{Dichtefunktion} \quad f(x|\mu_L, \sigma_L) = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2}} \quad (3.11)$$

$$\text{Verteilungsfunktion} \quad F(b|\mu_L, \sigma_L) = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^b e^{-\frac{(\ln x - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2}} dx \quad (3.12)$$

mit den Parametern

$$\text{Erwartungswert} \quad E[X] = e^{\mu_L + \frac{\sigma_L^2}{2}} \quad (3.13)$$

$$\text{Varianz} \quad \text{Var}[X] = e^{2\mu_L + \sigma_L^2} \cdot (e^{\sigma_L^2} - 1) \quad (3.14)$$

μ_L und σ_L sind hierbei einfach Parameter. Diese bezeichnen, im Gegensatz zur Normalverteilung, nicht den Erwartungswert und die Standardabweichung.

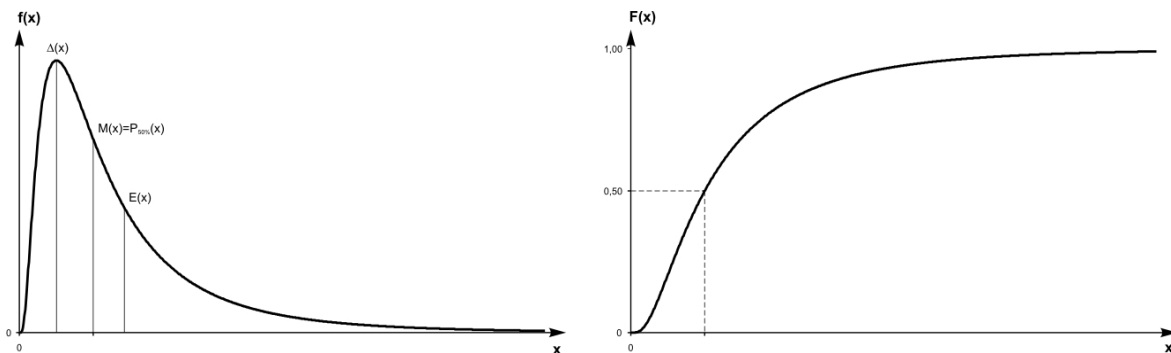


Bild 4: Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer Lognormalverteilung [63]

Der Erwartungswert $E[X]$ der Lognormalverteilung ist geometrisch nicht so anschaulich wie bei der Normalverteilung. Beim Modalwert $\Delta[X]$ nimmt die Dichte $f(x)$ ein Maximum an. Der Median $M[X]$ ist das 50%-Quantil.

Der Erwartungswert $E[X]$ der Lognormalverteilung ergibt sich wie bei der Normalverteilung aus dem arithmetischen Mittel der Stichprobe. Der Median der Lognormalverteilung ermittelt sich aus dem geometrischen Mittel der Stichprobe.

$$E_{\text{NV}}[X] = \bar{x}_{\text{arithm}} = \mu_{x(\text{NV})} = M_{\text{NV}}[X]$$

$$M_{\text{LNV}}[X] = \bar{x}_{\text{geom}} = m_{x(\text{LNV})}$$

Die Standardabweichung σ_x der Stichprobe, als Wurzel aus der Varianz, lässt sich in der Lognormalverteilung nicht darstellen.

Mit dem Erwartungswert und der Varianz

$$E[X] = e^{\mu_L + \frac{\sigma_L^2}{2}} = \mu_x$$

$$\text{Var}[X] = e^{2\mu_L + \sigma_L^2} \cdot (e^{\sigma_L^2} - 1) = \sigma_x^2$$

ist die eindeutige Abbildung der Normalverteilung auf die Lognormalverteilung möglich.

Für die Parameter μ_L und σ_L gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mu_L &\approx \ln(m_{x(LNV)}) \\ \mu_L &= \ln(\mu_x) - 0,5 \cdot \sigma_L^2 \\ \sigma_L &= (\ln(V_x^2 + 1))^{0,5} \\ V_x &= \frac{\sigma_x}{\mu_x} = (e^{\sigma_L^2} - 1)^{0,5}\end{aligned}\tag{3.15}$$

Im lognormalen Wahrscheinlichkeitsnetz sind folgende Schätzer für die Parameter μ_L und σ_L gültig [50]

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_L &= \ln b \\ \hat{\sigma}_L &= \frac{1}{2} \ln \frac{c}{a} = \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{c}{b}\end{aligned}\tag{3.16}$$

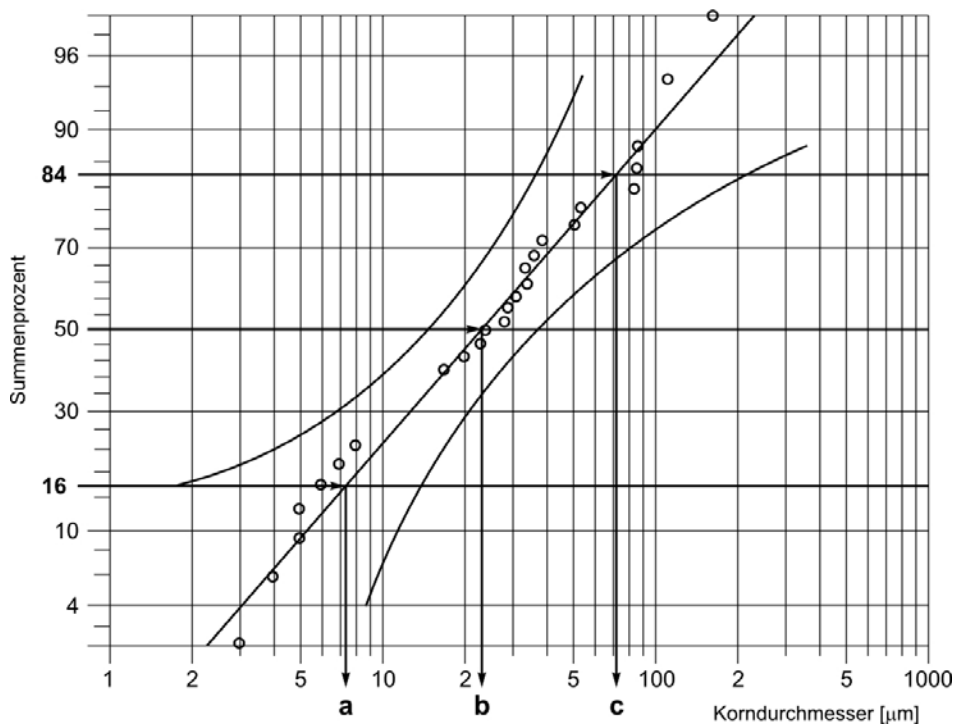


Bild 5: Beispiel einer Korndurchmesserverteilung im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz mit Testgrenzen [63]

Auf diese Weise wird der Streubereich $f_{\text{Stütz}} \cdot \sigma$ analog der Sigmaregeln der Standardnormalverteilung auf die Lognormalverteilung transformiert.

Die Grenzen a und c lassen sich für jede Streubreite $f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma_L$ schätzen. Sie sind definiert

$$\begin{aligned} a_{30,9\%} &= e^{\mu_L - 0,5 \cdot \sigma_L} & c_{69,1\%} &= e^{\mu_L + 0,5 \cdot \sigma_L} \\ a_{16\%} &= e^{\mu_L - 1 \cdot \sigma_L} & c_{84\%} &= e^{\mu_L + 1 \cdot \sigma_L} \\ a_{2,3\%} &= e^{\mu_L - 2 \cdot \sigma_L} & c_{97,7\%} &= e^{\mu_L + 2 \cdot \sigma_L} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Infolge der Nullpunktverschiebung ergeben sich dreiparametrische Lognormalverteilungen. Ist eine untere Begrenzung x_0 für die Zufallsvariable X gegeben, so resultiert die Dichtefunktion

$$f(x|\mu_L, \sigma_L, x_0) = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(x - x_0)} \cdot e^{-\frac{(\ln(x-x_0) - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2}} \quad (3.18)$$

Die dreiparametrische Lognormalverteilung wird zur Generierung lognormalverteilter Zufallszahlen in GeoStat benutzt.

3.1.3. χ^2 - Verteilung

Haben N unabhängigen Zufallsgrößen $x_{1,\dots,k}$ mit derselben Normalverteilung den Zusammenhang

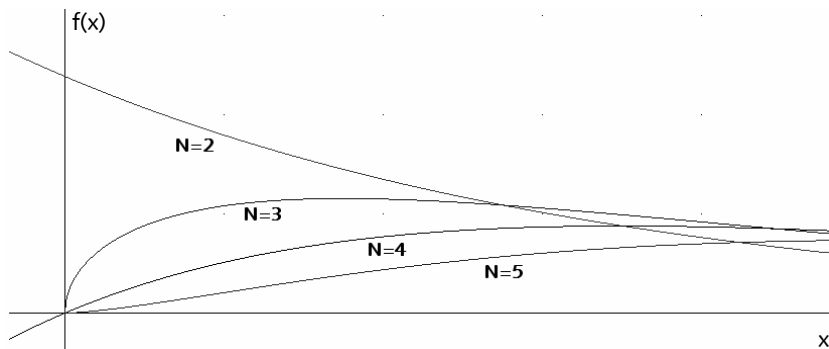
$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (3.19)$$

so sind diese nach PEARSON χ^2 -verteilt. Die Chi²-Verteilung ist vom Stichprobenumfang N abhängig. Die Dichtefunktion kann angegeben werden mit

$$f(x) = A_N \cdot z^{\frac{N-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad A_N = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \quad (3.20)$$

Sind die $x_{1,\dots,k}$ unabhängige Zufallsgrößen mit $N(0, \sigma)$, so besitzt

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^N X_k^2 & \text{die Dichtefunktion} & f(x) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot f_{\chi^2} \left(\frac{x}{\sigma^2} \right) \\ X &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N X_k^2 & \text{die Dichtefunktion} & f(x) = \frac{N}{\sigma^2} \cdot f_{\chi^2} \left(\frac{N \cdot x}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$


 Bild 6: Dichtefunktion der χ^2 -Verteilung für verschiedene N

Der Erwartungswert und die Standardabweichung beziehungsweise Varianz kann angegeben werden mit

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot z^{\frac{N-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x \cdot dx \quad (3.22)$$

$$E[X] = N$$

$$\text{Var}[X] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot z^{\frac{N-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x - E[X])^2 \cdot dx \quad (3.23)$$

$$\text{Var}[X] = 2 \cdot N$$

3.1.4. Gestutzte Verteilungsfunktionen

Sind die Stichprobenumfänge genügend groß und liegen bereits Informationen zur Grundgesamtheit der Stichprobe einer Baugrundkenngroße vor, so kann subjektiv entschieden werden, dass der kleinste beziehungsweise der größte Wert das Minimum beziehungsweise das Maximum der Grundgesamtheit, die Schwankungsbreite, widerspiegeln. Liegt nur ein geringer Stichprobenumfang vor, so können Informationen aus bestehenden Messungen und Rückschlüsse aus der Grundgesamtheit subjektiv durch die Definition von Wahrscheinlichkeitsintervallen zur Festlegung der Schwankungsbreite genutzt werden. Es wird angenommen, dass alle Realisationen innerhalb dieser Schwankungsbreite auftreten. Die Eingangsparameter für numerische Auswertungen werden auf der Grundlage von Zufallszahlengeneratoren mit Hilfe von gestutzten Verteilungsfunktionen in GeoStat bestimmt.

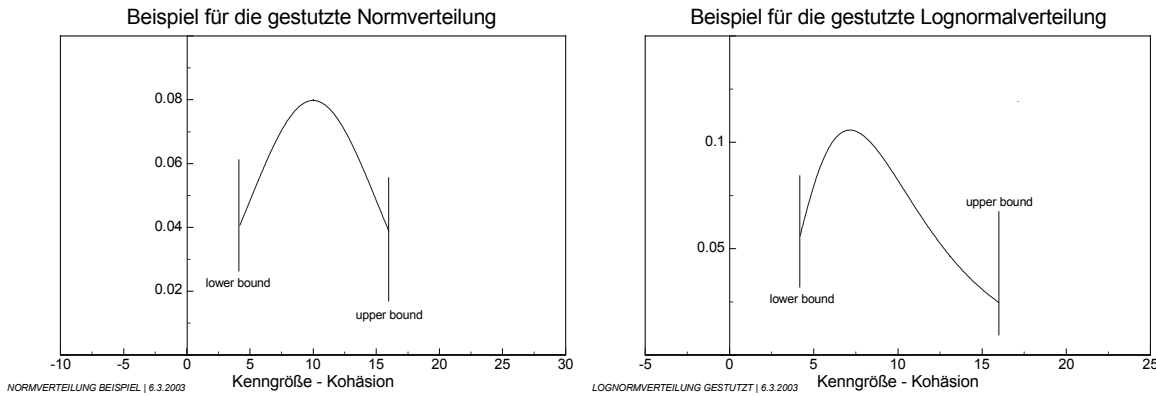


Bild 7: Gegenüberstellung der Dichtefunktion der gestutzten Normalverteilung und der gestutzten Lognormalverteilung für den gleichen Datensatz

Das Integral über die gestutzte Verteilungsfunktion ist kleiner eins. Für die weiteren Auswertungen sind der Erwartungswert und die Varianz einer Normalverteilung von Interesse, die innerhalb der Schranken der gestutzten Verteilung eine ungestutzte Verteilung beschreiben. Es wird definiert

ungestutzt : $X \rightarrow f(x), F(x), \mu, \sigma^2$
 gestutzt ($a \leq x \leq b$): $Y \rightarrow f_1(x), F_1(x), \mu_1, \sigma_1^2$

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \text{ mit } a \leq x \leq b \tag{3.24}$$

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{F(b) - F(a)} \text{ mit } a \leq x \leq b$$

Bei symmetrischen Verteilungen und symmetrischer Stutzung gilt

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu \\ \sigma_1^2 &= \frac{\int_{x=a}^b f(x) \cdot (x - \mu_1)^2 dx}{F(b) - F(a)} \end{aligned} \tag{3.25}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \mu - f \cdot \sigma \\ b &= \mu + f \cdot \sigma \end{aligned}$$

Für einen Stutzungsfaktor f ergibt sich der Zusammenhang zwischen σ^2 und σ_1^2

$$\sigma_1(f) = - \frac{\sqrt{2} \cdot f \cdot e^{(-0.5 \cdot f^2)} - \text{ERF}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot f\right) \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot \text{ERF}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot f\right)} \tag{3.26}$$

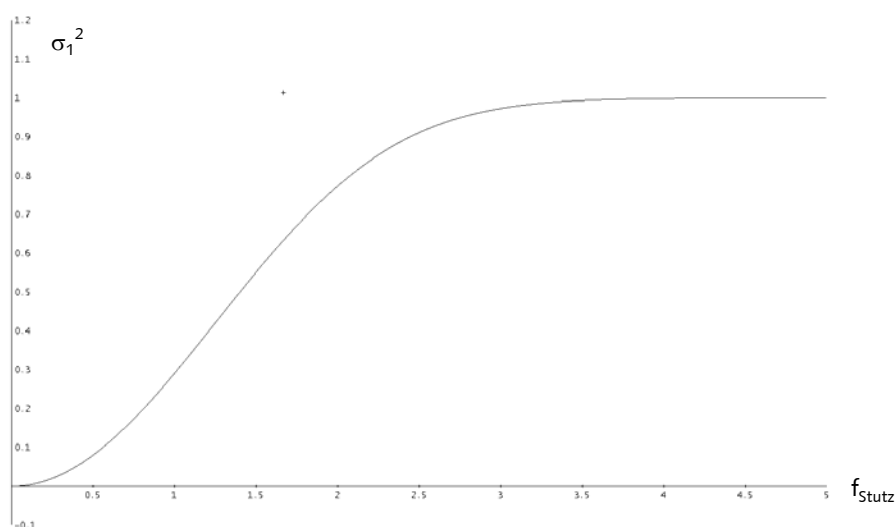


Bild 8: Zusammenhang zwischen der Varianz aus der gestutzten Verteilungsfunktion bei $f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma$ und der Varianz der ungestutzten Verteilungsfunktion im aufgespannten Intervall $[-f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma, f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma]$

3.2. Vertrauensfaktoren

Daten aus unterschiedlichen Datenquellen sind auch unterschiedlich „sicher“. Beispielsweise werden Daten, die aus aktuellen Laborversuchen gewonnen wurden, wohl als sicherer eingestuft als jene, die lange zurückliegenden Gutachten entnommen wurden. Die Beurteilung der Daten ist jedoch subjektiv vom Betrachter abhängig. Das Grundmaß zur Beurteilung der Unsicherheit einer Eingangsgröße ist also ein subjektiver Vertrauensfaktor, der hier mit VF_{KG} bezeichnet wird. Für unterschiedliche Maße an Vertrauen werden unterschiedliche VF_{KG} vergeben. Dabei bewegt sich VF_{KG} zwischen null (unsicher/ höchstunwahrscheinlich) und eins (sicher/ höchstwahrscheinlich).

Der Vertrauensfaktor ist nicht mit Wichtungen gleichzusetzen. Die Summe aller Vertrauensfaktoren ist ungleich eins.

In der Anwendung GeoStat wird in Abhängigkeit der Vertrauensfaktoren der Kenngröße VF_{KG} über ein Bildungsgesetz eine Wichtung q_{Diff} für die Differenz zweier Kenngrößen bestimmt. Die Wichtung leitet sich aus dem Minimum, dem Maximum beziehungsweise dem Mittelwert der Vertrauensfaktoren VF_{KG} ab.

$$q_{\text{Diff}} = \text{Minimum}(VF_{KG1}, VF_{KG2})$$

$$q_{\text{Diff}} = \text{Maximum}(VF_{KG1}, VF_{KG2})$$

$$q_{\text{Diff}} = \text{Mittel}(VF_{KG1}, VF_{KG2})$$

(3.27)

3.3. Unscharfe Mengen (Fuzzy Sets)

Fuzzy Sets sind ein geeignetes Mittel um unsichere Daten zu beschreiben. Diese Methode ist ein „robusterer nichtprobabilistischer Ansatz“, der auch auf geotechnische Probleme angewendet werden kann. In [27] wird die Theorie der Fuzzy-Logik folgendermaßen zusammengefasst:

- Die Fuzzy-Logik geht davon aus, dass alles nur zu einem gewissen Grad zutrifft. Sie berücksichtigt die Elastizität des Wahrheitswertes aller Aussagen.
- Als Sonderfall der Fuzzy-Logik hat die Boolesche Algebra die Elastizität gleich null.
- Fuzzy-Systeme arbeiten zwar mit unscharfen Größen, werden aber mit Hilfe exakter Regeln eindeutig beschrieben.
- Die Fuzzy-Logik ermöglicht die Darstellung und Veranschaulichung von Unsicherheiten mit mathematischen Mitteln.“

Bei diesen Mengen sind somit Zugehörigkeitsgrade zwischen null und eins zulässig.

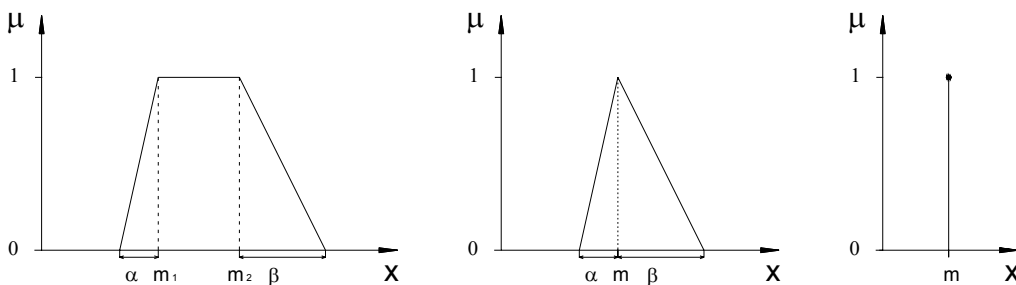


Bild 9: Möglichkeit der Darstellung von Fuzzy-Sets

Die verschiedenen Verläufe sind durch zwei Kenngrößen, die Einflussbreite und die Toleranz, beschrieben:

Einflussbreite: $\text{supp}(\mu) = T(\mu) := \{x \mid x \in G, \mu(x) > 0\}$ ist Support, Träger oder Einflussbreite der Fuzzy-Menge

Toleranz: Das Intervall $[m_1, m_2] = \{x \mid \mu(x) = 1\}$ ist die Toleranz der Fuzzy-Menge

Im Weiteren werden ausschließlich dreiecksförmige Fuzzy-Sets genutzt. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks entspricht in GeoStat dem Quadrat der gewählten Streubreite. Die Toleranzgrenze ist definiert zu

$$\sigma_{\text{grenz}} = f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma \tag{3.28}$$

Alternativ kann die untere und obere Schranke entsprechend der kleinsten beziehungsweise größten vorgekommenen Kenngröße gewählt werden. Die Fuzzy-Verteilung ist entsprechend der Forderung in (3.28) anzupassen, indem μ angepasst wird.

3.4. Bayes'sche Statistik

Der Bayes'sche Satz in der Wahrscheinlichkeitslehre sowie die BAYES-Methode innerhalb der Statistik sind eng verbunden mit dem Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeiten. Die subjektive Wahrscheinlichkeit ist besonders in der Geotechnik von Interesse, da hier meist nur kleine Stichproben genommen werden können, die eine Baugrundsituation hinreichend für Sicherheitsnachweise beschreiben sollen. Mit Hilfe von Vorwissen und der Bayes'schen Regel kann sogar die Information einer Stichprobe der Größe $N=1$ in die Abschätzung eines bestimmten Kennwertes einfließen [63]0, [75].

Es wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass sich die Kenngrößen von Ort zu Ort unterscheiden, also innerhalb eines Untersuchungsgebietes nicht konstant sind. Zudem stammt die zu untersuchende statistische Größe aus einer Unterklasse $G_i\{u_i\}$ einer breiten Grundgesamtheit $G\{u\}$. Zumal der Umfang von Stichproben in der Geotechnik sehr klein ist, wird der Erfahrung des Ingenieurs bei der Interpretation der Messergebnisse eine größere Bedeutung beigemessen. Er hat die Möglichkeit, einzelnen Daten mehr Gewicht zu geben, oder auch seine Vorinformationen mit Hilfe der BAYES-Methode einzubringen.

Die Erfahrungen mit ähnlichen Böden und Baugrundverhältnissen bieten Informationen, die aber nicht direkt auf den zu untersuchenden Fall angewendet werden dürfen. Sie werden als Priorinformationen oder als Priorverteilung bei der Ermittlung der Parameter in der Schätzung des Kennwertes berücksichtigt. Zusätzliche Laborversuche repräsentieren die lokale Situation [20].

Die Likelihoodfunktion $L(\cdot)$ ist ein Instrument um die vorhandene Priorverteilung f_{pr} zu verbessern. Das Resultat ist die Posteriorverteilung f_{po} .

$$f_{po}(u) = k \cdot L(x_1, x_2, \dots, x_j | u) \cdot f_{pr}(u) \quad (3.29)$$

Hierbei ist x_1, \dots, x_j eine Stichprobe. Für den zu schätzenden Parameter u , eine Zufallsvariable, liegt eine Vorinformation in Form einer Priorverteilung $f_{pr}(u)$ vor. $L(x_1, x_2, \dots, x_j | u)$ ist die Likelihoodfunktion und k ein konstanter Faktor. Somit stellt $f_{po}(u)$ die Posteriorverteilung und damit eine verbesserte Schätzung für die „reale“ Verteilung und den Parameter u dar.

Die Parameterermittlung einer möglichen Posteriorverteilung ist von der Likelihoodfunktion sowie der Priorverteilung abhängig. Für normalverteilte Gesamtheiten gibt [63] eine mögliche Likelihoodfunktion folgendermaßen an

$$L(\mu_x) \sim \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.30)$$

Bei der Schätzung aller Parameter der Normalverteilung ist die Likelihoodfunktion jeweils identisch, jedoch müssen geeignete Priorverteilungen in die Berechnungen eingehen. Mit der oben genannten Likelihoodfunktion folgt für die Posteriorverteilung

$$f_{po}(\mu_x | \bar{x}, \sigma_x^2, \mu_0, \sigma_0^2) \sim k \cdot e^{-\frac{(\bar{x} - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(\mu_x - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (3.31)$$

Das Produkt der Dichten zweier Normalverteilungen ist wieder eine Normalverteilung. Die Posteriorverteilung kann umgeformt werden zu:

$$f_{po}(\mu_x | \bar{x}, \sigma_x^2, \mu_0, \sigma_0^2) = k' \cdot e^{-\frac{(\mu_x - \mu')^2}{2\sigma'^2}} \quad \text{mit } k' = k \cdot e^{-\frac{(\mu_0 - \bar{x})^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_0^2)}} \quad (3.32)$$

Zwischen den Schätzern μ' , σ'^2 und den Parametern der Prior- und Likelihoodverteilung bestehen daher nach [63] und [66] die folgende Beziehungen

$$\mu' = \frac{\bar{x} \cdot \sigma_0^2 + \mu_0 \cdot \sigma_x^2}{\sigma_0^2 + \sigma_x^2} \quad \text{und} \quad \sigma'^2 = \frac{\sigma_0^2 \cdot \sigma_x^2}{\sigma_0^2 + \sigma_x^2} \quad (3.33)$$

Die Bayes'sche Statistik reduziert die Varianz einer Datengesamtheit in Abhängigkeit von zusätzlichen Informationen. Falls etappenweise neue Informationen zur Verfügung stehen, lässt sich diese so berücksichtigen, indem die berechneten a-posteriori Werte wiederum als a-priori Werte angenommen werden.

Letztlich werden der Erwartungswert und die Varianz der normalverteilten Datengesamtheit infolge neuer Informationen angepasst. Die BAYES-Methode ist in GeoStat integriert, muss aber im Weiteren nicht näher berücksichtigt werden, da die Posteriorverteilung eine normalverteilte Zufallsgröße repräsentiert.

3.5. Gauß'sche Varianzenfortpflanzung

Um die Unsicherheitsfortpflanzung untersuchen zu können, wird davon ausgegangen, dass die Unsicherheiten klein gegenüber den betrachteten Ausgangswerten sind. In diesem Fall können diese durch die Angabe von Intervallen erfasst werden. Die einzelnen Kenngrößen gehen über eine funktionelle Abhängigkeit in ein Endresultat ein. Die Kenngröße Z , ist dann mit Unsicherheiten behaftet, die sich aus den einzelnen Kenngrößen x_i ermitteln.

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_j)$$

Die Werte x_i sind Mittelwerte von Realisationen der einzelnen Kenngrößen, die die Varianz s_i^2 besitzen. Die TAYLOR-Entwicklung nach den Unsicherheiten bedingt eine Funktion $f(x)$ die in Abhängigkeit der j zu berücksichtigenden Restglieder j -mal differenzierbar ist und deren Kenngrößen x_j voneinander stochastisch unabhängig sind. Die Verteilungsarten sind nicht vorgeschrieben [8]. Es gilt für die Unsicherheit Δf :

$$\Delta f = f(x_1, x_2, \dots, x_j) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j)$$

$$\Delta f \sim \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j = \sum_{i=1}^j \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i = a_i \Delta x_i \quad (3.34)$$

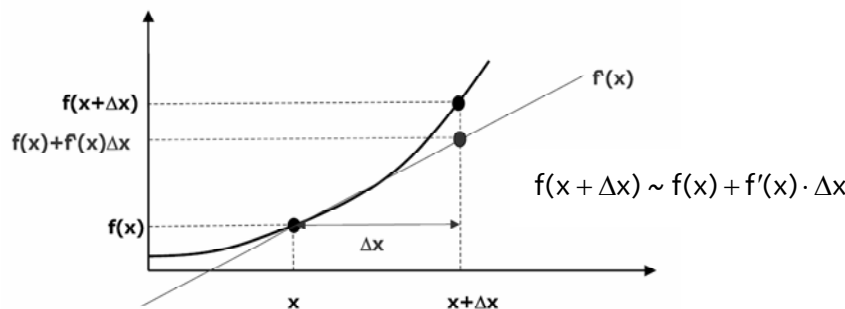


Bild 10: Darstellung der Abweichung unter Berücksichtigung des 1. Restgliedes der Taylorreihenentwicklung

Die partiellen Ableitungen sind stets an der Stelle \bar{x}_i zu bestimmen. Die Varianz ermittelt sich dann zu

$$\sigma_{Ff}^2 = (d_1 \cdot \sigma_{x_1})^2 + (d_2 \cdot \sigma_{x_2})^2 + \dots + (d_k \cdot \sigma_{x_k})^2 = \sum_{j=1}^k (d_j \cdot \sigma_{x_j})^2 \quad (3.35)$$

Die Gauß'sche Varianzenfortpflanzung beschreibt die Varianzenentwicklung innerhalb des diskreten stochastischen Prozesses, siehe Gleichung (5.23).

Für die Untersuchung der Varianzenfortpflanzung der unsicheren Kenngrößen wird zusätzlich die Randbedingung gestellt

$$\sum d_i = 1 \quad (3.36)$$

3.6. Aussageunsicherheit

Statistische Aussagesicherheiten von Schätzwerten einer Zufallsvariable können im Rahmen der klassischen Statistik durch Konfidenzintervalle beziehungsweise Testgrößen für verschiedene statistische Parameter ausgedrückt werden. Die Beurteilung von Unsicherheiten führt zur Fragestellung des erforderlichen Datenumfanges zur Untermauerung von Aussagen. Basierend auf [38] und [63] werden für die im Weiteren verwendeten Signifikanzbereiche die folgenden Zusammenhänge bereitgestellt.

Signifikanzgrenzen für Mittelwerte

$$t_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \geq |\mu - \rho_\mu| \cdot \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \quad \text{mit } m = N - 1 \quad (3.37)$$

Signifikanzbereich für die Streuung

$$\chi^2_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \geq (N-1) \cdot \left(\frac{\rho_\sigma}{s}\right)^2$$

$$\chi^2_{m,\frac{\alpha}{2}} \leq (N-1) \cdot \left(\frac{\rho_\sigma}{s}\right)^2 \quad \text{mit } m = N - 1 \quad (3.38)$$

3.7. Auswertung von Stichproben

Für alle geotechnischen Fragestellungen ist es erforderlich, Kenntnisse über die Beschaffenheit des Baugrundes zu erlangen, um Aussagen über die geotechnischen Verhältnisse in einem Bezugsgebiet zu formulieren. Neben der statistischen Auswertung von Stichproben sind Vorkenntnisse und örtliche Erfahrungen bedeutend.

Der Baugrund ist heterogen. Auch bei der ordnungsgemäßen Untersuchung des Baugrundes ist zu bedenken, dass die entnommenen Bodenproben nur Stichproben einer Grundgesamtheit sind. Die DIN 4020 formuliert diesen Hintergrund im Abschnitt 4.2: „Aufschlüsse im Boden und Fels sind als Stichprobe zu bewerten. Sie lassen für zwischenliegende Bereiche nur Wahrscheinlichkeitsaussagen zu“. Geologische und geotechnische Randbedingungen sind so einzufügen, dass eine Verdichtung des Aufschlussnetzes zu einer stetigen Verbesserung des Informationsgehaltes der Grundgesamtheit führt und Aussagen in zwischenliegenden Bereichen ermöglicht. Als Grundgesamtheit wird die Gesamtmenge aller möglichen Einheiten und Ereignisse bezeichnet. Einer statistischen Auswertung liegt im Allgemeinen nur eine Teilmenge, eine Stichprobe, zugrunde [38], [101]. Stichproben spiegeln stets nur partielle Informationen wieder. Es ist zwischen abhängigen und unabhängigen Stichproben zu unterscheiden [22].

Im Ergebnis der statistischen Auswertungen wird die Angabe eines charakteristischen Wertes $\text{charKW}[X]$ gemäß der Definition des Eurocode 7 (EC7) [23] für die geotechnische Kenngröße X angestrebt. Die Bestimmung kann in Abhängigkeit von integrierten Trendverläufen erfolgen [6].

In Anlehnung an [49], [78] und den EC 7 wird der charakteristische Wert, der für den Grenzzustand maßgeblichen Größe so abgeleitet, dass die rechnerische Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines ungünstigeren Wertes nicht größer als 5% ist. Der angegebene Algorithmus in Bild 11 resultiert in der Bestimmung des 5% Fraktils der Mittelwertverteilung einer geotechnischen Kenngröße.

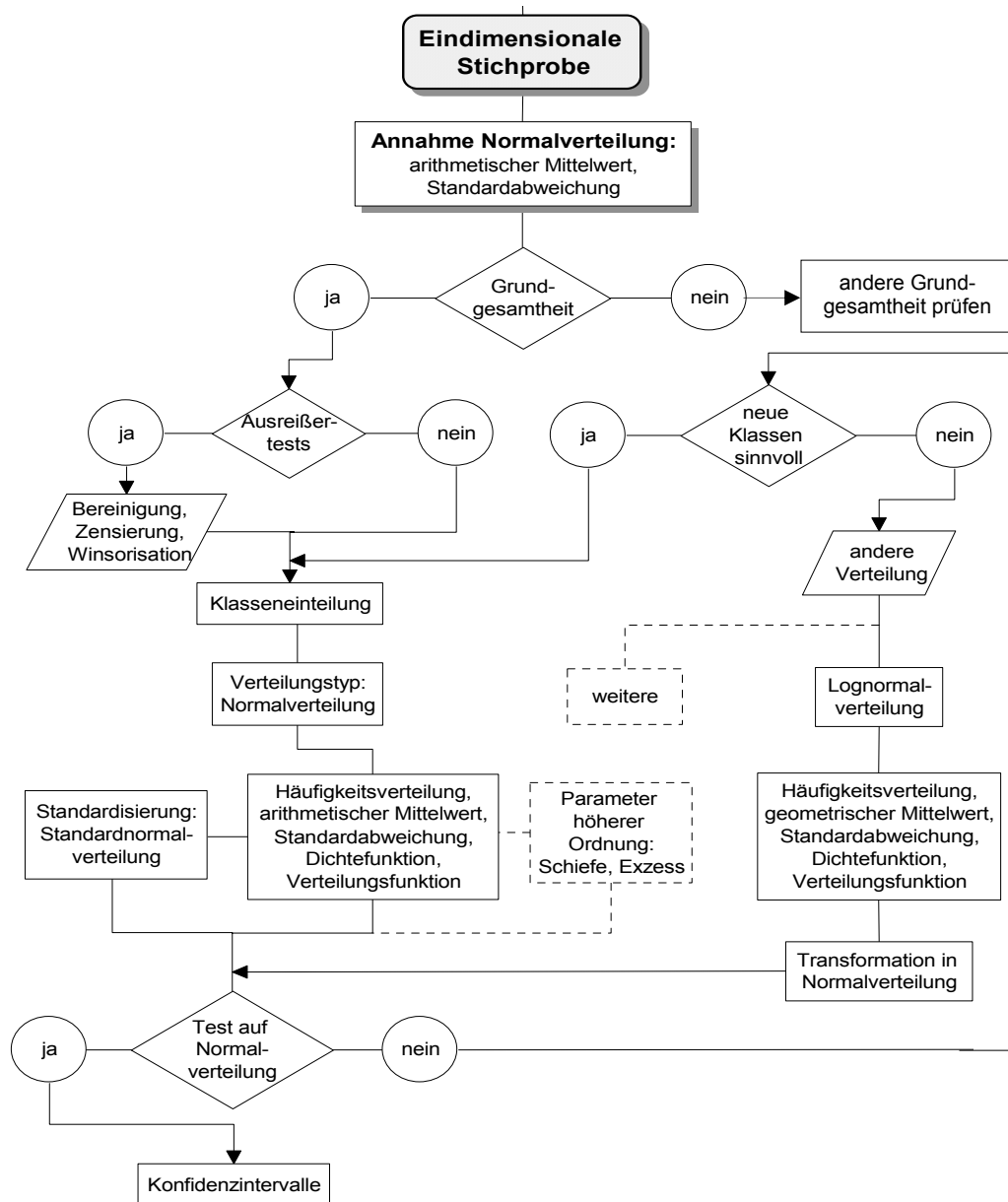


Bild 11: Ermittlung des charakteristischen Wertes für eine Baugrundkenngröße in Anlehnung an den EC 7 für Stichproben ohne Trend

Aus dem Konfidenzintervall für den Mittelwert (S. 32) leitet sich der charakteristische Kennwert mit dem Freiheitsgrad $m=N-1$ ab.

$$\text{char KW}[X] = E[X] - t_{m, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\text{Var}[X]}{m}} \quad (3.39)$$

Datenmengen enthalten manchmal ungewöhnlich kleine oder große Werte, die so genannten Ausreißer. Diese sind durch statistische Methoden aber auch durch Zensierung, Winsorisation oder Bereinigung [61], [83] zu eliminieren, um der Verfälschung der Datengesamtheit entgegenzuwirken.

Die Auswertung der Daten erfolgt im Modul statistische Auswertung in GeoStat in Anlehnung an die Methoden in [38], [63]. In Abhängigkeit der Größe der Stichprobe werden stets Ausreißer nach der allgemeinen 4σ -Regel, dem zweiseitigen Ausreißertest, dem Ausreißertest nach Dixon, der Faustregel nach Tukey, dem Ausreißertest nach Namilov sowie dem Pearson Ausreißertest bestimmt.

Die verbleibende Stichprobenmenge wird in Klassen mit subjektiv definierten Klassenbreiten eingeteilt. Die Anzahl der Einzelwerte in den entsprechenden Klassen bildet die Grundlage für die Anpassungstests der Dichtefunktion. Eine Anzahl statistischer Anpassungstests setzt aufgrund der genannten Zusammenhänge voraus, dass die zu bearbeitende Stichprobe einer Normalverteilung $X=N(\mu,\sigma)$ oder der Standard-Normalverteilung $Y=N(0,1)$ unterliegt.

$$x_i = \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \quad (3.40)$$

$$y_i = \mu_y + x_i \cdot \sigma_y$$

Durch die Aufstellung der Nullhypothese, der Frage nach der möglichen Beschreibung der Stichprobe durch eine Normalverteilung, kann auf der Grundlage des χ^2 -Tests, des G-Tests, des Kolmogoroff-Smirnoff Tests, des Schnelltests nach David, des Shapiro-Wilk Tests und des Test auf Schiefe und Exzess entschieden werden.

Durch die mögliche Transformation der Lognormalverteilung in eine Normalverteilung kann dieses Modul auch Tests auf Lognormalverteilung ausführen.

Nach Bestätigung der Nullhypothese werden für die Daten der Stichprobe die Maßzahlen der beschreibenden Dichtefunktion ermittelt. Es wird unterschieden zwischen Punkt- und Intervallschätzungen. Mittels der Punktschätzung werden beispielsweise die Standardabweichung und der Mittelwert der Grundgesamtheit auf der Grundlage des Mittelwertes und der Standardabweichung der Stichprobe definiert. Mittels der Intervallschätzung ist es möglich Vertrauensbereiche anzugeben, in welchen sich der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit befindet. Der untere Grenzwert des Konfidenzintervalls auf der Basis des 90% Quantils, also das 5% Fraktile, für den Erwartungswert gibt nach Definition den charakteristischen Kennwert an.

Alternative Methoden zur Festlegung und zur Interpretation von charakteristischen Kennwerten können 0 entnommen werden.

4. Statistischer und geostatistischer Ansatz

Die Entscheidungen im geotechnischen Planungsprozess hängen wesentlich von der Zuverlässigkeit der Datengrundlage ab. Mit der Bewertung der verfügbaren Daten erhebt sich zunächst die Frage nach deren Repräsentativität. Vermeintlich sichere Aussagen über den Baugrund an einer Beprobungsstelle können zufällige oder systematische Unsicherheiten aufweisen. Andererseits können die Beprobungsstellen wie auch die ermittelten Kenngrößen unvollständig sein, um die relevanten Fragen zu beantworten. Dies alles ist nicht nur eine Frage des Beprobungsumfangs, sondern auch der Beprobungsstrategie. Die Datenqualität und die Repräsentativität der Baugrunddaten kann durch statistische Methoden beurteilt werden. Durch statistische und geostatistische Ansätze sind optimale Orte für Nacherkundungen ableitbar.

Ziel der Baugrunderkundung ist zunächst das geologische Halbraummodell, eine parameterspezifische räumliche Abgrenzung von Homogenbereichen. Bei der Ausarbeitung müssen Vorinformationen systematisch bewertet und verarbeitet, Modelle und Szenarien aufgestellt, verifiziert oder falsifiziert werden. Kommt man dabei zumindest zu semiquantitativen Aussagen, lässt sich der Aufwand von zusätzlichen Erkundungen den Folgen von Fehlentscheidungen gegenüberstellen.

Generell wird zwischen statistischen und geostatistischen Verfahren unterschieden. Die statistische und geostatistische Analyse bildet die Grundlage für die Untersuchung von Strukturen ortsabhängiger Grundgesamtheiten. Beide Methoden ermitteln Korrelationen zwischen den zu betrachtenden Baugrundkenngößen und deren räumlicher Lage beziehungsweise der zeitlich veränderten Situation. Im Gegensatz zu klassisch-statistischen Verfahren basiert der geostatistische Ansatz auf der Theorie der regionalisierten Variablen. Ein räumlicher Prozess wird dabei in eine (stationäre) deterministische, großräumige Komponente und eine räumlich korrelierte lokale Zufallskomponente getrennt. Die Geostatistik unterstellt, dass die Kenngrößen innerhalb eines bestimmten Gebietes einander ähnlich sind, und dass mit zunehmender Distanz die Ähnlichkeit zwischen den Werten abnimmt.

Neben den statistischen Korrelationen zwischen Kenngrößen beruht die geologische Baugrundmodellierung auf Autokorrelationsbeziehungen beziehungsweise Variogramfunktionen. Diese beschreiben den Zusammenhang einer Baugrundkenngöße oder einer geometrischen Kenngröße, beispielsweise der Homogenbereichmächtigkeit, in Abhängigkeit der regionalen Lage des Ortes oder in Abhängigkeit des Abstandes zweier Aufschlusspunkte. Es wird in der Geostatistik vorausgesetzt, dass die Änderung einer Eigenschaft oder einer Kenngröße nur unter Berücksichtigung der räumlichen Zusammenhänge, ausgedrückt durch Distanz, Nachbarschaft und Richtung, erklärt werden kann.

Der Verlauf einer Autokorrelationsfunktion beschreibt den direkten räumlichen Zusammenhang zwischen der Kenngröße und ihrer Lage im Untersuchungsgebiet, während das Variogramm den Zusammenhang zwischen Kenngrößendifferenzen und deren Abstand

zueinander formuliert. In Bild 12 ist anhand des Monotonieverlaufes der Unterschied zwischen den Betrachtungsweisen am Beispiel der Kohäsion dargestellt.

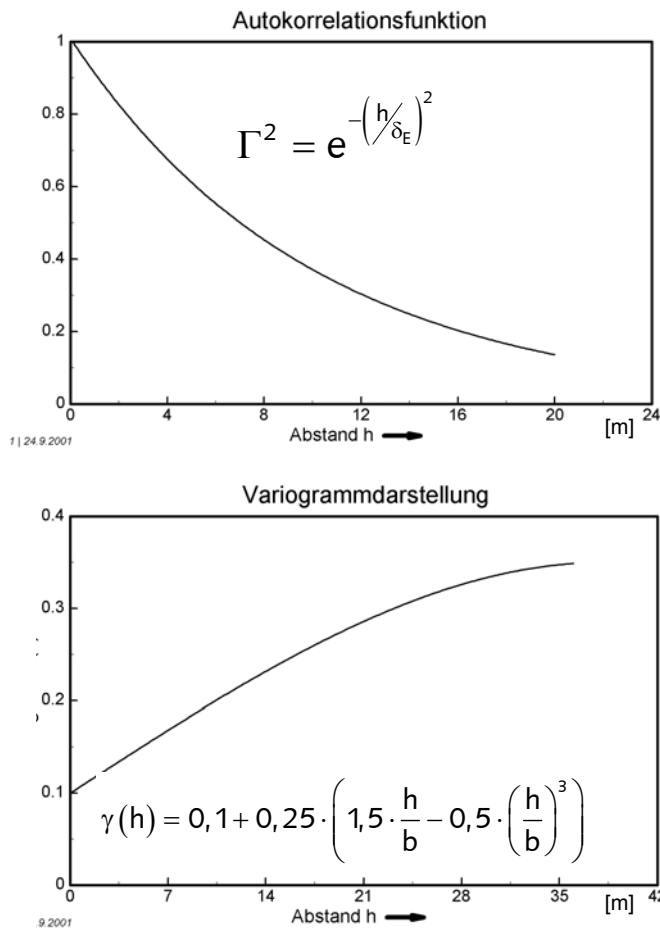


Bild 12: Beispielhafte Darstellung einer Autokorrelationsfunktion (oben) und Variogrammfunktion (unten)

Der exponentielle Ansatz der Autokorrelationsfunktionen, wie in [65] vorgeschlagen, genügt meist nicht, um die partiell sprunghaften Änderungen von Baugrundkenngrößen widerspiegeln zu können. Der Funktionsverlauf ist stetig, monoton fallend und beginnt im Abstand $h=0$ stets mit $\Gamma^2=1$. Die Autokorrelationslänge δ_E ist dabei ein Maß für den räumlichen Zusammenhang der Kennwerte in einem definierten Abstand. Sie kann aber nicht als Grenze der räumlichen Korrelation angesehen werden. Die Autokorrelationslänge δ_E ergibt sich aus der Exponentialfunktion an der Stelle $\delta_E = e^{-1}$, siehe [47], [64].

Zum Unterschied dazu wird in der Geostatistik die räumliche Korrelation regionalisierter Variablen unter stärkerer Berücksichtigung geologischer Aspekte beschrieben.

Für Nachweis- und Bemessungsverfahren werden drei unterschiedliche Variablenarten verwendet [47]:

- Zustandsvariable für primäre veränderliche Eigenschaften des Bodens, z.B. Dichte;
- Abgeleitete Variable (mit Feld- und Laboruntersuchungen aus Zustandsvariablen ermittelt, z.B. Scherfestigkeit);
- Geometrische Variable (Lage einer Schichtgrenze bzw. die Schichtdicke)

Vorrangig werden zur Ermittlung von Bodenparametern abgeleitete Variablen benutzt. Stehen Korrelationen zur Verfügung, die den Zusammenhang zwischen Zustandsvariablen und abgeleiteten Variablen beschreiben, können auch Zustandsvariable allein den Ausgangspunkt für die Modellierung des Baugrundes bilden. Geometrische Variable werden beispielsweise zur Beschreibung von Schichtmächtigkeiten und Schichtgrenzen verwendet.

Für das theoretische Variogramm existiert eine vielfältige Funktionsmenge. Durch die unterschiedlichen Eigenschaften kann der Charakteristik der räumlichen Korrelation Rechnung getragen werden. Unabhängig davon können Variogrammfunktionen frei gewählt werden [11].

Durch die geostatistische und statistische Betrachtungsweise kann anisotropes Verhalten im Untersuchungsgebiet beschrieben werden. Sie ist auf unterschiedliche Wirksamkeit und Reichweite geologischer Prozesse zurückzuführen. In [90] wird darauf verwiesen, dass Anisotropie in der horizontalen Ebene auftreten kann. In [47] wird der Zusammenhang zwischen den Korrelationslängen in der Ebene zusammenfassend dargestellt, und in [65] wird das Anisotropieverhältnis des Reibungswinkels zwischen den beiden horizontalen und der vertikalen Halbraumrichtung mit 1:1:5 angegeben. Die Korrelationslänge einer charakteristischen Eigenschaft ist demzufolge in vertikale Richtung ein fünftel der horizontalen Richtungen.

Die Basis zur Berücksichtigung anisotropen Verhaltens bildet stets ein lokales Koordinatensystem, in welchem zwei Achsrichtungen mit der minimalen und maximalen Reichweite übereinstimmen. Die Verhältnisse der Halbachsen spiegeln die Anisotropieverhältnisse wider, siehe S. 82 ff.

4.1. Prinzip der Autokorrelationsanalyse

Zunächst werden bei dieser Methode die Autokorrelationskoeffizienten Γ^2 für die aus den Untersuchungen erhaltenen Stichproben berechnet. Diese sind abhängig vom Abstand der Erkundungsorte.

$$\Gamma^2 = \frac{\text{Cov}[Z(s_i) \cdot Z(s_i + h)]}{\sqrt{\text{Var}[Z(s_i)] \cdot \text{Var}[Z(s_i + h)]}} \quad (4.1)$$

Die Schreibweise s_i und s_i+h ist eine Vereinfachung, die auch in der Geostatistik genutzt wird. Die Variable s_i bezeichnet hier karthesische Koordinaten im Halbraum. Mit s_i+h sind alle diejenigen Ortskoordinaten zusammengefasst, die vom Ort s_i die Distanz h haben. Mit dieser Distanz ist der Betrag des Vektors h gemeint, so dass h nicht als expliziter Wert angesehen werden darf. Entsprechend dem Sinn der mathematischen Formulierung ist teils der Vektor und teils sein Betrag anzuwenden.

4.2. Geostatistische Auswertung regionalisierter Kenngrößen

Der grundlegende Bestandteil der Geostatistik ist das Semivariogramm oder die Semivarianz als Maß für die räumliche Abhängigkeit zwischen Zufallsgrößen entlang einer definierten Orientierung im Untersuchungsgebiet. Die geostatistische Modellbildung entstammt den Methoden zur Lagerstätten erkundung. Diese werden auf den südafrikanischen Bergbauingenieur KRIGE [48] zurückgeführt, welcher diese zur Berechnung der Vorräte der Goldlagerstätte Witwatersrand verwendete. Diese Theorie wurde in den 50er Jahren durch MATHERON [54], [55] weiterentwickelt. Der strukturelle Ablauf einer geostatistischen Analyse kann Bild 13 entnommen werden.

Ausgehend von einer ausreichenden Anzahl von Stichprobenwerten wird über die Aufstellung des experimentellen und theoretischen Variogramms, welches die Grundlage für die geostatistische Interpolation bildet, ein Baugrundmodell für eine Kenngröße erstellt. Das Semivariogramm ist definiert als das 0,5-fache des Erwartungswertes der quadratischen Abweichungen zwischen den Punktepaaren $Y(s_i)$ und $Y(s_i+h)$. Die Stichproben müssen die betrachtete Grundgesamtheit „repräsentativ“ beschreiben [61]. Basierend auf einfachen Schätzverfahren werden die untersuchten Bodenparameter als zufällig verteilte Variablen angesehen.

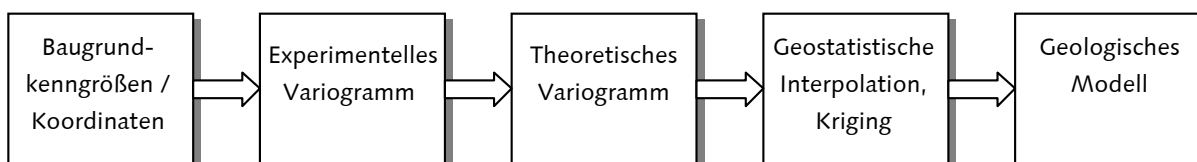


Bild 13: Struktur der geostatistischen Modellbildung

Im Falle einer zweidimensionalen deterministischen Betrachtungsweise, wie zum Beispiel bei der Schätzung von Geländehöhen oder Homogenbereichsgrenzen, bieten Erkenntnisse in der Geostatistik bereits praktikable Lösungen an.

Ausgehend von der Datengesamtheit der Baugrundkenngößen und deren Lagekoordinaten wird die Auswirkung der Kenngößenunsicherheit auf die Datengesamtheit, auf das experimentelle Variogramm und das theoretische Variogramm im nachfolgenden Kapitel erörtert.

5. Variographie mit unsicherer Kenngrößen

5.1. Berücksichtigung von unsicheren Baugrundkenngößen und unsicheren Lagekoordinaten im Vorfeld der Variographie

Die traditionelle geostatistische Betrachtungsweise berücksichtigt die Baugrundkenngößen als deterministisch regionalisierte Variablen oder als Erwartungswert einer Kenngröße. Der Wert einer Kenngröße ist beispielsweise der charakteristische Kennwert, vergleiche Absatz 3.7, ermittelt aus verschiedenen Labor- oder Feldversuchen direkt oder in der Nähe des später in das geologische Modell übernommenen Erkundungsortes. Neben den einzelnen Kenngrößen wird die Datengesamtheit eines Erkundungsgebietes durch einen Erwartungswert und die zugehörige Varianz charakterisiert.

Mit der Angabe eines Quantilwertes als Repräsentationsgröße sind die Vorinformationen aus den zugrunde liegenden Auswertungen verloren. Dieser in Gutachten angegebene Quantilwert ist in den seltensten Fällen eine ausschließlich statistisch abgeleitete Kenngröße. Vielmehr wird diese durch subjektive Entscheidungen auf der vermeintlich sicheren Seite angegeben. Dieser Eingriff in einen statistischen Algorithmus ermöglicht es später nicht, auf die Ausgangsdatenmenge zu schließen. Darauf aufbauende Algorithmen, wie die Geostatistik, können dann nur unbefriedigende Resultate liefern.

Gemäß der Gleichung (5.9) kann die geostatistische Bearbeitung durch unsichere Kenngrößen einerseits und durch unsichere Abstände der Erkundungsorte andererseits beeinflusst werden. Mit der Anwendung GeoStat ist es möglich, die Unsicherheiten der Eingangskenngrößen sowie die Unsicherheit aus der Lagebestimmung direkt zu berücksichtigen.

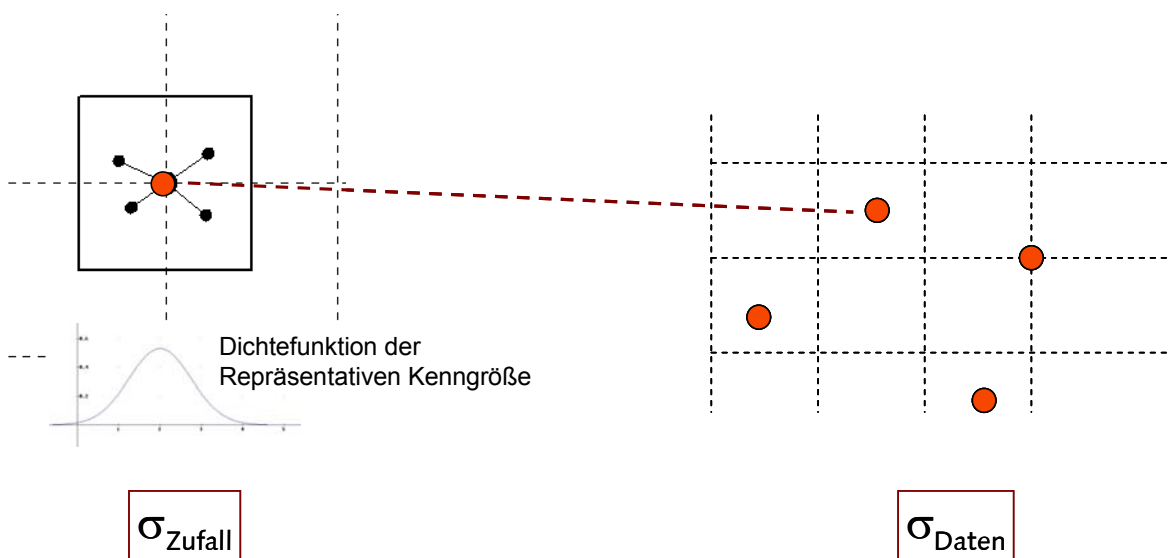


Bild 14: Zusammenfassung von mehreren Feld- und Laboruntersuchungen zu einer Kenngröße mit statistischen Parametern, hier repräsentiert durch eine Dichtefunktion

Die unsicheren Kenngrößen und die unsicheren Lagekoordinaten können durch „vollständige“ statistische Verteilungsfunktionen, durch gestutzte statistische Verteilungsfunktionen, durch Vertrauensfaktoren sowie mit Fuzzy-Set Annahmen repräsentiert werden. Die Grundlagen hierfür sind in Kapitel 3 beschrieben.

Überwiegend sind die Kenngrößen, die den Baugrund direkt oder indirekt beschreiben, normalverteilt oder lognormalverteilt [61]. Die erwähnten Verteilungsfunktionen werden somit im Weiteren eingeschränkt auf die Normalverteilung und die Lognormalverteilung. Zunächst wird der Einfluss der unsicheren Kenngrößen auf den weiteren Berechnungsablauf untersucht. Die Lagekoordinaten der Aufschlusspunkte bleiben deterministisch. Zusätzlich zu den statistischen Parametern der Baugrundkenngößen eines Untersuchungsgebietes (Bild 14 rechts) wird an jedem einzelnen Erkundungsort die Kenngröße durch einen Erwartungswert 1. und 2. Ordnung beschrieben (Bild 14 links). In Bild 15 ist die Kombination beider Unsicherheiten am Beispiel der Varianzenentwicklung grafisch dargestellt. Die Ableitung wird im nächsten Abschnitt vorgenommen.

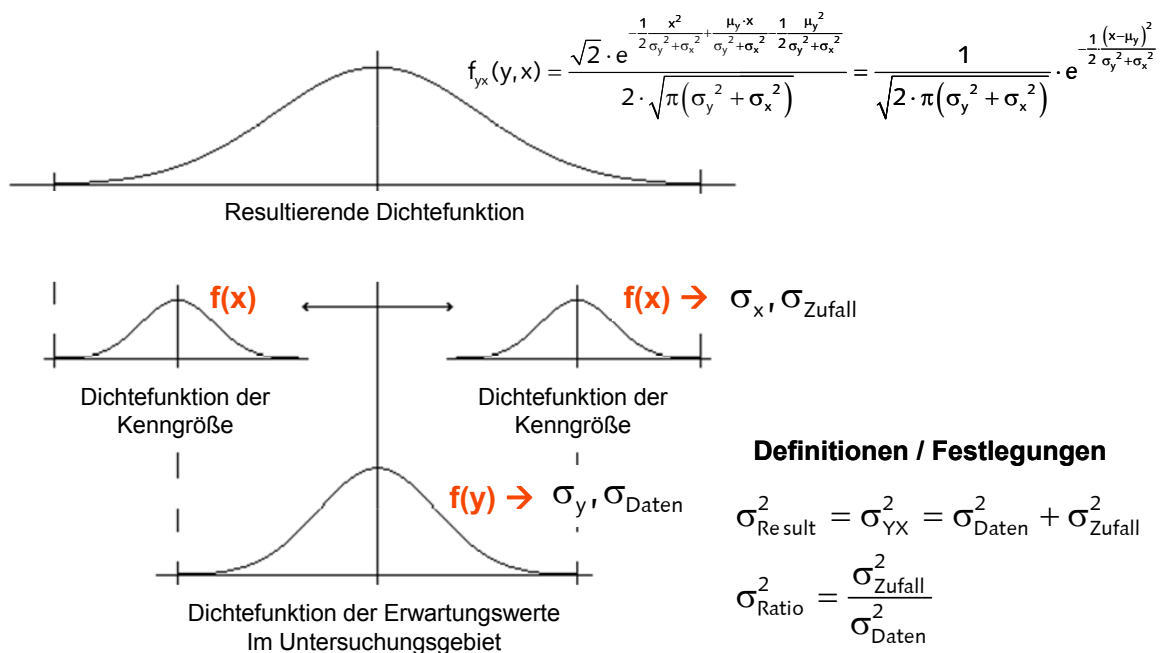


Bild 15: Verknüpfung der Varianz der Kenngrößen im Untersuchungsgebiet und Kenngrößenvarianzen an den Erkundungsorten

Anschließend wird der Einfluss der unsicheren Lagekoordinaten ausgewertet. Infolge der guten Bestimmbarkeit ist dieser relativ gering. Die Kenngrößen an den Aufschlusspunkten bleiben deterministisch.

Während in den beiden vorangegangenen Schritten der Einfluss der Kenngrößenunsicherheit und der Einfluss der unsicheren Lagekoordinaten separat betrachtet wurden, soll nun pragmatisch der kombinierte Einfluss auf die Variographie ausgewertet werden.

5.1.1. Einfluss unsicherer Kenngrößen mit deterministischen Lagekoordinaten auf die Datengesamtheit im Untersuchungsgebiet

Im Vorfeld der Variographie wird zunächst der Einfluss der Kenngrößenunsicherheit auf die statistischen Parameter der Datengesamtheit untersucht, vergleiche mit Bild 15. Die regionale Lage wird vernachlässigt.

Für normalverteilte Unsicherheiten ist für diese Gesamtbetrachtung eine analytische Ableitung möglich. Die Resultate werden durch GeoStat verifiziert. Auf der Grundlage dieser Ergebnisse werden die im Weiteren stets verwendeten Grundparameter σ_{Ratio} , σ_{Result} , σ_{Daten} und σ_{Zufall} definiert.

Analytische Ableitung für normalverteilte Kenngrößen

Unter Annahme, dass die Gesamtheit der Baugrundkenngößen im Untersuchungsgebiet durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann, ergibt sich allgemein

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2} \quad (5.1)$$

Diese Voraussetzung ist genau dann erfüllt, wenn die Reichweite des Variogrammes gegen null geht und das Untersuchungsgebiet stationär ist.

Zusätzlich ist nun jede einzelne Kenngröße X unsicher. Diese Unsicherheit wird ebenfalls durch eine Normalverteilung repräsentiert. Jede Baugrundkenngöße des Untersuchungsgebietes ist somit ein bestimmter Quantilwert, häufig der Erwartungswert einer solchen Verteilung. Im Fall der Normalverteilung gilt

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2} \quad (5.2)$$

Der kombinierte stochastische Punktprozess kann für einen gültigen Satz von Kenngrößen $E[X_i]$ durch bedingte Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden. Es gilt allgemein

$$f_y(y | E[X_1], E[X_2], \dots) = f_{ox}(x) \quad (5.3)$$

Sind die einzelnen Kenngrößen nicht genau bekannt, sondern nur ihre Wahrscheinlichkeitsdichten, gilt für zwei Dimensionen

$$f_{yx}(y, x) = f_{x,y}(y | x) \cdot f_x(x)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(y, x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{y,x}(y | x) \cdot f_x(x) dy \quad (5.4)$$

$f_{xy}(y, x)$ Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte von x und y

$f_{y,x}(y|x)$ bedingte Wahrscheinlichkeit von y infolge x

$f_x(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte von x

Im Speziellen mit den genannten Verteilungsfunktionen ergibt sich

$$f_{yx}(y, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y | x) \cdot f_x(x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2} dy$$

Die Standardabweichungen σ_x, σ_y sind ungleich null. Als Ergebnis der Integration resultiert die stetige Funktion

$$f_{yx}(y, x) = \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} - \frac{\mu_y \cdot x}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu_y^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}}}{2 \cdot \sqrt{\pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \quad (5.5)$$

mit dem Erwartungswert und der Varianz

$$\mu_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{yx}(x) \cdot x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \cdot x dx$$

$$\mu_{yx} = \mu_y \quad (5.6)$$

$$\sigma_{yx}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{yx}(x) \cdot (x - \mu_x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \cdot (x - \mu_x)^2 dx$$

$$\sigma_{yx}^2 = \sigma_y^2 + \sigma_x^2$$

Für weitere Auswertungen werden nachfolgend das dritte und vierte Zentralmoment, die Schiefe und der Exzess angegeben

$$\begin{aligned}
 m_{yx,3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{yx}(x) \cdot \frac{(x - \mu_x)^3}{\sigma_x^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi (\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \cdot \frac{(x - \mu_x)^3}{\sigma_x^3} dx \\
 m_{yx,3} &= 0 \\
 m_{yx,4} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{yx}(x) \cdot \frac{(x - \mu_x)^4}{\sigma_x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi (\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \cdot \frac{(x - \mu_x)^4}{\sigma_x^4} dx \\
 m_{yx,4} &= 3
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

In Anlehnung an die Ableitungen, vergleiche auch Bild 15, wird definiert

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{Daten}} &= \sigma_Y \quad \sigma_{\text{Zufall}} = \sigma_X \\
 \sigma_{\text{Result}}^2 &= \sigma_{YX}^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 \\
 \sigma_{\text{Ratio}} &= \frac{\sigma_{\text{Zufall}}}{\sigma_{\text{Daten}}}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Numerische Verifikation

Hinsichtlich der beschriebenen aleatorischen und epistemischen Unsicherheiten der Erkundungsdaten soll im Folgenden die Varianzenfortpflanzung numerisch überprüft werden.

Auf der Grundlage der Dichtefunktion $f_x(x)$ für die unsicheren Kenngrößen, vergleiche mit (5.2), wird ein Zufallswert ermittelt, der die einzelne Kenngröße repräsentiert. In GeoStat wird vorausgesetzt, dass die Eingangskenngrößen durch stetige oder in definierten Teilbereichen stetige Funktionen beschrieben werden können. Anhand der ungestutzten Normalverteilung werden die Auswirkungen der Unsicherheiten in den Eingangsgrößen aufgezeigt und der analytischen Ableitung gegenübergestellt.

Der Erwartungswert $E[X]$ dieser Normalverteilung entspricht der bis dahin deterministischen Kenngröße. Die Schwankungsbreite $f_{\text{Stutz}} \cdot \sigma$ wird durch die subjektive Wahl des Faktors zwischen $-4 \leq f_{\text{Stutz}} \leq 4$ definiert. Durch diesen können auch gestutzte Verteilungsfunktionen nachgebildet werden.

Wird die Unsicherheit der betrachteten Kenngrößen als lognormalverteilt angenommen, so ist aufgrund der Eigenschaften der Lognormalverteilung die äquivalente Simulation eines Zufallswertes nicht möglich.

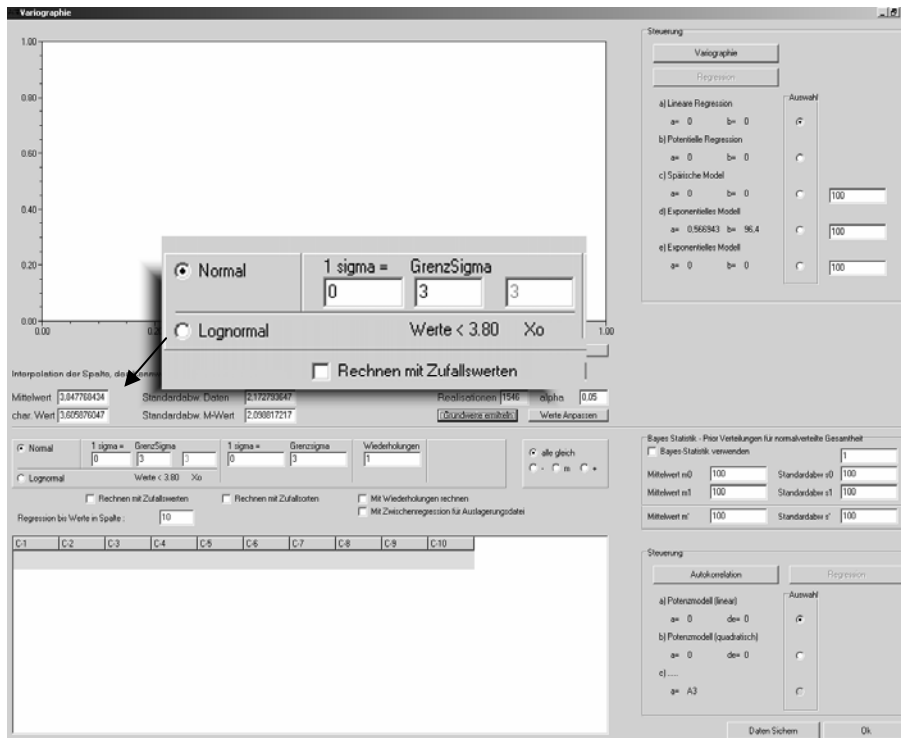


Bild 16: Isotrope Variographie - Modul aus GeoStat: Zufallsgrößengenerierung durch Definition der Streubreite und der statistischen Verteilungsparameter

GeoStat kann in einem Zwischenschritt die Zufallszahlengenerierung als Ausgangspunkt für die geostatistische Interpolation separat auswerten. Es werden hierzu acht verschiedene Referenzdatensätze verwendet, die im Anhang dargestellt sind. Diese bestehen aus Lageparametern und den jeweiligen Baugrundkenngößen. Zusätzlich zu den Datensätzen ArternM_Schicht, ArternOK_Schicht, ArternM_Schicht_Kern, ArternOK_Schicht_Kern und Artern3D, welche auf realen Baugrunddaten basieren, werden hier die Datensätze Fehlertest_zufall, Zufallsdaten und Datensatz 3 verwendet. Jeder dieser Datensätze ist wiederum in Teildatensätze untergliedert. Diese Letzteren sind mathematisch generierte Kenngrößen mit vorgegebenen Bildungsgesetzen.

Beispielhaft kann auf der Basis des Datensatzes Fehlertest_zufall das Ergebnis der analytischen Ableitung für den Erwartungswert und die Varianz untermauert werden, Bild 17 und Bild 18.

Varianz aus numerischen Simulationen

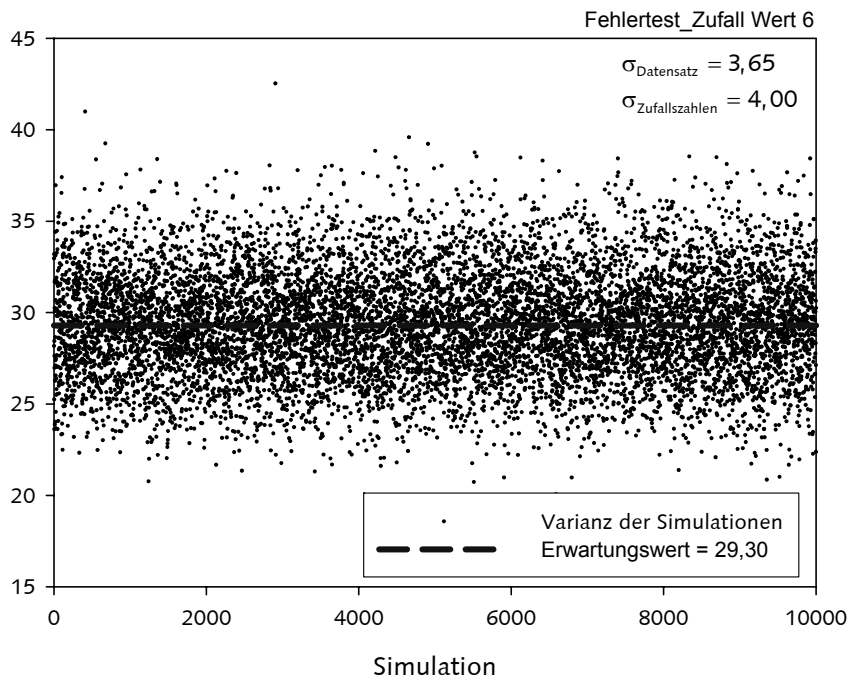


Bild 17: Erwartungswert der numerisch ermittelten Varianzen

Erwartungswert aus numerischen Simulationen

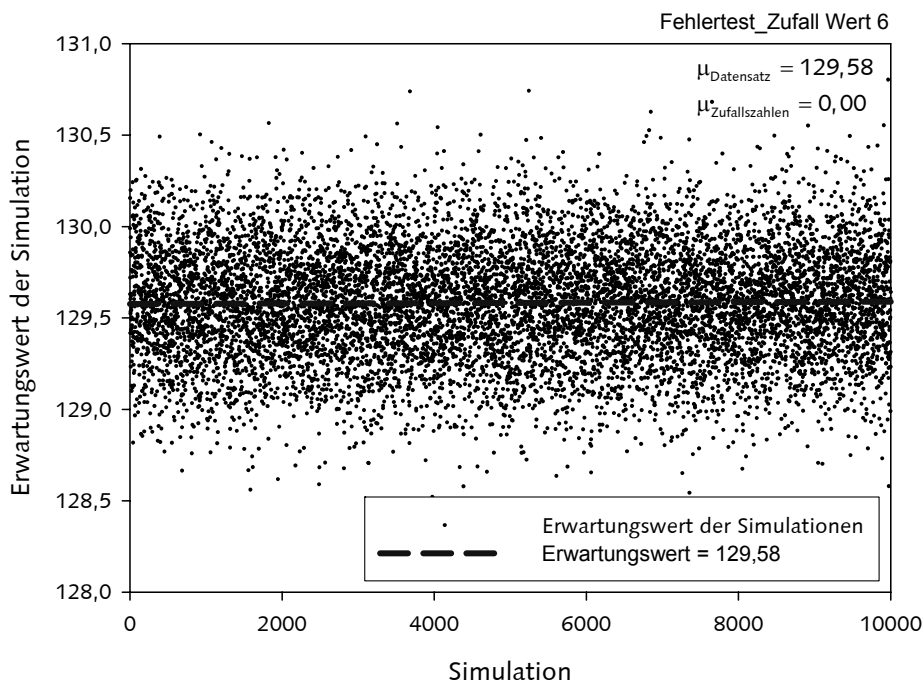


Bild 18: Erwartungswert der numerisch ermittelten Erwartungswerte

Die numerischen Resultate spiegeln die theoretischen Erwartungen wider.

Es gilt analog der analytischen Ableitung für die Simulation am Beispiel von Bild 17 und Bild 18

$$\mu_{\text{Result}} = \mu_{\text{Daten}}$$

$$129,58 = 129,58$$

$$\sigma_{\text{Result}}^2 = \sigma_{\text{Daten}}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2$$

$$29,30 \sim 3,65^2 + 4,00^2 = 29,32$$

Für Regionen mit einer geringeren Messgrößendichte kann es zu größeren Abweichungen kommen, da die Einzelkenngößen unregelmäßig verteilt sind, Bild 19.

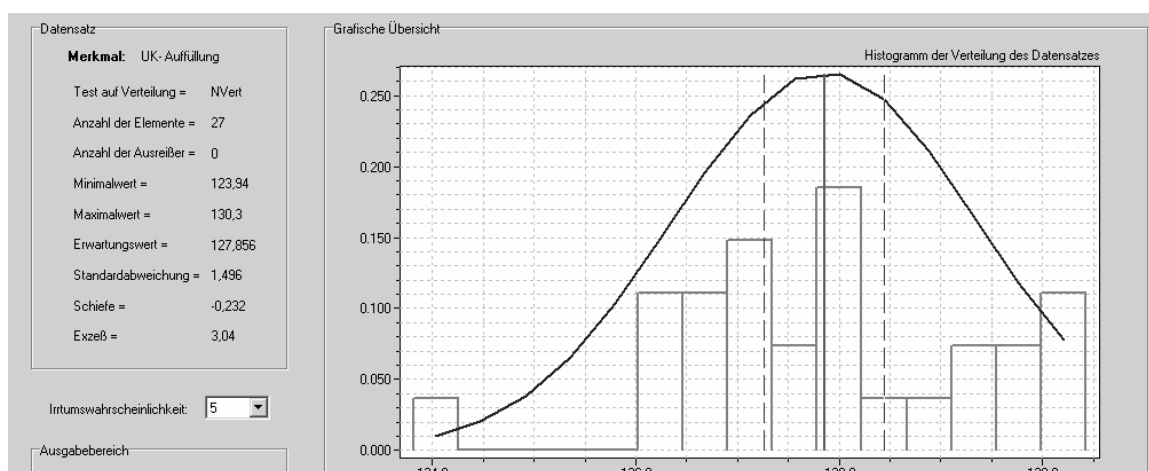


Bild 19: Histogramm für den KW 2 des Datensatzes ArternOK_Schicht, Grafik aus GeoStat

5.1.2. Einfluss unsicherer Lagekoordinaten mit deterministischen Kenngrößen

Während Baugrunduntersuchungen werden die Lagekoordinaten eines Aufschlusses ziemlich genau bestimmt, so dass diese eigentlich nicht als unsicher angesehen werden können. Da die kartesischen Lagekoordinaten über die Abstandsklassendefinition, vergleiche Abschnitt 5.2, das experimentelle Variogramm beeinflussen, soll trotzdem eine normalverteilte Unsicherheit vorausgesetzt werden.

Die Unsicherheit der Lagekoordinaten wird durch eine Normalverteilung repräsentiert, siehe Bild 20. Der Zufallsort wird als Zufallszahl im Halbraum bestimmt. Die jeweiligen Ausgangskordinaten werden als Erwartungswert der Normalverteilung angesehen. Die Varianz wird vorgegeben.

Entgegen den Betrachtungen für unsichere Kenngrößen sind die unsicheren Lagekoordinaten nicht funktionell mit dem exponentiellen Variogramm verknüpft und damit nicht mit den Baugrundkenngößen. Sie bestimmen lediglich die Zuordnung der Kenngrößendifferenzen zu den empirische festgelegten Abstandsklasse. Eine explizite mathematische Beweisführung ist nicht möglich.

Als Ausweg wird der Einfluss der unsicheren Lagekoordinaten vorweggenommen direkt an den Parametern der theoretischen Variogrammfunktionen untersucht, vergleiche Abschnitt 5.2.3. Exemplarisch wird die Auswertung für den Datensatz Fehlertest_Zufall KW 3 aufgezeigt.

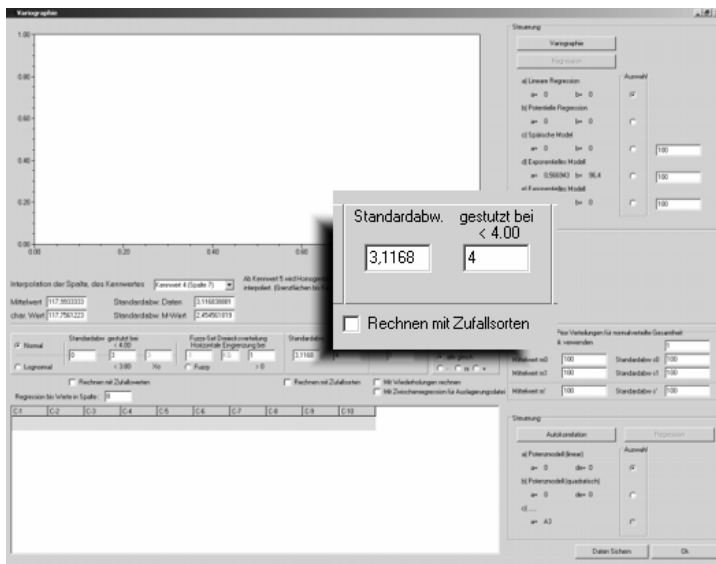


Bild 20: Isotrope Variographie - Modul aus GEOSTAT: Zufallsgrößengenerierung durch Definition der Streubreite und der statistischen Verteilungsparameter für unsichere Lagekoordinaten

Es wurden Untersuchungen für vier vorgegebene Standardabweichungen und zwei verschiedene Streubereiche durchgeführt. Je Regressionstyp, Standardabweichung und Simulationsbereich wurden 1000 Variogrammanalysen in GeoStat simuliert.

Der durchschnittliche Abstand der Erkundungen beträgt $RW=20,0$ m. Der mittlere Abstand aller Erkundungen zueinander $135,0$ m.

Variation der Orte		Exponentielles Variogramm	Gauß'sches Variogramm
Standardabweichung	Simulationsbereich		
0,0 = 0,0 RW	$3 \cdot \sigma$	1	1
2,0m = 0,1 RW	$3 \cdot \sigma$	1000	1000
5,0m = 0,25 RW	$3 \cdot \sigma$	1000	1000
7,5m = 0,375 RW	$3 \cdot \sigma$	1000	1000
20,0m = 1 RW	$3 \cdot \sigma$	1000	1000

* Erläuterung zum exponentiellen und Gauß'schen Variogramm s. S. 54

Tabelle 1: Übersicht der Anzahl der Simulationen bei der Variation der Orte, Arbeitsprogramm

Die Resultate unter Verwendung der exponentiellen und Gauß'schen Variogrammfunktionen, siehe S. 54 ff., sind in Abhängigkeit der Gitterasterweite RW nachfolgend dargestellt.

Für die in Tabelle 2 und Tabelle 3 dargestellten theoretischen Variogrammergebnisse ist zu erkennen, dass der Einfluss der unsicheren Lagekoordinaten untergeordnet ist. Im Vergleich zum Abstand ist ein markanter Anstieg der Reichweite, Parameter b, erst bei einer Standardabweichung von $0,375 \cdot RW$ zu verzeichnen. Der Schwellenwert, Parameter a, ist unabhängig von den unsicheren Lagekoordinaten.

Standardabweichung σ in m Simulationsbereich	Unsichere Lagekoordinaten				
	0,0·RW 3σ	0,1 · RW 3σ	0,25·RW 3σ	0,375·RW 3σ	1,0·RW 3σ
Simulationsanzahl	100	100	100	100	100
vorgegebene Grenzreichweite	160	160	160	160	160
Schrittweite h	20	20	20	20	20
Parameter a	13,21	13,24	13,24	13,25	13,25
Standardabweichung		0,043	0,070	0,092	0,092
Variationskoeffizient		0,0033	0,005	0,007	0,007
Parameter b	0,540	0,533	0,688	1,526	1,520
Standardabweichung		0,006	0,782	2,110	2,110
Variationskoeffizient		0,012	1,134	1,387	1,387

Tabelle 2: Ergebnisse der Variogrammanalysen mit deterministischen KG und unsicheren Lagekoordinaten – Exponentielle Regression für Datensatz Fehlertest_Zufall KW3

Standardabweichung σ Simulationsbereich	Unsichere Lagekoordinaten				
	0,0·RW 3σ	0,1 · RW 3σ	0,25·RW 3σ	0,375·RW 3σ	1,0·RW 3σ
Simulationsanzahl	100	100	100	100	100
vorgegebene Grenzreichweite	160	160	160	160	160
Schrittweite h	20	20	20	20	20
Parameter a	13,21	13,25	13,24	13,25	13,25
Standardabweichung		0,044	0,070	0,093	0,092
Variationskoeffizient		0,003	0,005	0,007	0,007
Parameter b	3,361	3,361	3,599	4,743	4,742
Standardabweichung		1e-15	1,19	2,908	2,909
Variationskoeffizient		3,98e-16	0,331	0,6133	0,6133

Tabelle 3: Ergebnisse der Variogrammanalysen mit deterministischen KG und unsicheren Lagekoordinaten – Gauß'sche Regression für den Datensatz Fehlertest_Zufall KW3

Da eine Abweichung der Koordinaten, z.B. durch Messunsicherheiten, um 21,0 m und mehr unwahrscheinlich ist, kann beobachtet werden, dass die Berücksichtigung der Varianz der Orte von untergeordneter Bedeutung ist, beziehungsweise generell vernachlässigt werden kann. Gleiches kann für den Datensatz ArternOK_Schicht gezeigt werden, der die Grundlage für den Sicherheitsnachweis bildet.

Die Abstände der Detailerkundungen betragen ca. 15 m. Der mittlere Abstand aller Erkundungen ca. 74,1 m.

Unsichere Lagekoordinaten					
Standardabweichung σ	0,0	2,0	5,0	7,5	15,0
Simulationsbereich	3σ	3σ	3σ	3σ	3σ
Simulationsanzahl	100	100	100	100	100
vorgegebene Grenzreichweite	160	160	160	160	160
Schrittweite h	20	20	20	20	20
Parameter a	3,065	3,061	3,181	3,130	2,732
Standardabweichung		0,232	0,611	0,694	0,530
Variationskoeffizient					
Parameter b	41,855	42,621	47,444	46,290	30,457
Standardabweichung		9,166	22,623	25,530	24,986
Variationskoeffizient					

Tabelle 4: Ergebnisse der exponentiellen Variogrammanalyse streuenden Orten für den Datensatz ArternOK_Schicht – KW 2

Äquivalent zu den vorangegangenen Untersuchungen für Fehlertest_Zufall, wie auch für alle zur Verfügung stehenden Datensätze, sind die Lageeinflüsse erst für hohe Schwankungsbreiten relevant. Dieser Effekt ist neben den Untersuchungskordinaten auch auf die Abstandsklasse des Variogramms zurückzuführen. Wäre diese größer, würde sich der maximale erzeugte Abstand zweier Messgrößen infolge berücksichtigter Unsicherheiten erhöhen, aber noch der bisherigen Abstandsklasse unterliegen. Extrem hohe Standardabweichungen der Lagekoordinaten und geringe Abstandsklassen führen dennoch zu einem Verschwinden der regionalen Korrelation.

5.1.3. Einfluss unsicherer Kenngrößen und unsicherer Lagekoordinaten

Die beiden vorangegangenen Auswertungen werden nun kombiniert. Vorweggenommen haben die unsicheren Lagekoordinaten auch hier keinen markanten Einfluss. Äquivalent der Ableitung für unsichere Kenngrößen mit deterministischen Lagekoordinaten gelten die ermittelten Zusammenhänge aus Gleichung (5.8).

Für den Datensatz 3 mit anisotroper Auswertung sind die Resultate für unsichere Kenngrößen mit sicheren als auch unsicheren Lagekoordinaten den folgenden beiden Tabellen zu entnehmen.

Exponentielle Regression

	deterministische Eingangsgrößen	unsichere Eingangsgrößen [σ_{Ratio}]							
		0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1	1,25	1,5
Anzahl der Durchführungen	1	200	200	200	200	200	200	200	200
Vorgegebene Grenzreichweite	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Vordefinierte Schrittweite	25	25	25	25	25	25	25	25	25
Schrittweite in Grad	15	15	15	15	15	15	15	15	15
Aufweitung in Grad	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375
Winkel alpha (um Z)	45	45	45	45	45	45	30	30/60	60
Winkel beta (um Y)	15	15	15	15	15	15	30	30/45	45
Winkel gamma (um X)	90	105	105	120	165	165	165	165	165
Orthogonale Richtung	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Maß für Reichweite Richtung 1 / Max	1057	1057,0	1057,2	1057,6	1058,5	1061,0	1070,3	1106,2	1138,6
Maß für Reichweite Richtung 1 / Min	557	601,4	717,9	791,5	887,1	967,0	1023,0	1067,9	1104,0
Maß für Reichweite Richtung 2 / Min	50	5,0	5,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
Maß für Reichweite Richtung 3 / Mit	180	196,5	172,7	81,5	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
Komprimierungsfaktor Richtung 1 / Max	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Komprimierungsfaktor Richtung 1 / Min	0,5270	0,5690	0,6791	0,7484	0,8381	0,9114	0,9558	0,9654	0,9696
Komprimierungsfaktor Richtung 2 / Min	0,0473	0,0047	0,0047	0,0057	0,0057	0,0057	0,0056	0,0054	0,0053
Komprimierungsfaktor Richtung 3 / Mit	0,1703	0,1859	0,1633	0,0771	0,0057	0,0057	0,0056	0,0054	0,0053

Tabelle 5: Auswertung des Datensatz 3 für unsichere Kenngrößen und sichere Lagekoordinaten

Exponentielle Regression

Variation des Ortes	Variation des Kennwertes	σ_{Ratio}	deterministische Eingangsgrößen	unsichere Eingangsgrößen							
				$\sigma_{Ratio} = 5$ ungestutzt				$\sigma_{Ratio} = 20$ ungestutzt			
			0,2	0,75	1	1,25	0,2	0,75	1	1,25	
Anzahl der Durchführungen			1	200	200	200	200	200	200	200	200
Vorgegebene Grenzreichweite			200	200	200	200	200	200	200	200	200
Vordefinierte Schrittweite			25	25	25	25	25	25	25	25	25
Schrittweite in Grad			15	15	15	15	15	15	15	15	15
Aufweitung in Grad			9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375	9,375
Winkel alpha (um Z)			45	45	45	60	60	60/225	-	-	-
Winkel beta (um Y)			15	15	15	15	15	15/0	-	-	-
Winkel gamma (um X)			90	120	165	165	165	165	165	165	165
Orthogonale Richtung			-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Maß für Reichweite Richtung 1 / Max			1057	1054,4	1058,4	1072,1	1108,0	1065,4	1114,6	1143,0	1171,3
Maß für Reichweite Richtung 1 / Min			557	791,5	981,2	1034,1	1076,0	1019,2	1075,3	1106,6	1135,9
Maß für Reichweite Richtung 2 / Min			50	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
Maß für Reichweite Richtung 3 / Mit			180	91,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
Komprimierungsfaktor Richtung 1 / Max			1	1	1	1	1	1	1	1	1
Komprimierungsfaktor Richtung 1 / Min			0,5270	0,7507	0,9271	0,9646	0,9711	0,9566	0,9647	0,9682	0,9698
Komprimierungsfaktor Richtung 2 / Min			0,0473	0,0057	0,0057	0,0056	0,0054	0,0056	0,0054	0,0052	0,0051
Komprimierungsfaktor Richtung 3 / Mit			0,1703	0,0863	0,0057	0,0056	0,0054	0,0056	0,0054	0,0052	0,0051

Tabelle 6: Auswertung des Datensatz 3 für unsichere Kenngrößen und unsichere Lagekoordinaten

Die Parameter der theoretischen Variogrammfunktionen werden fast ausschließlich durch unsichere Kenngrößen beeinflusst. Unsichere Lagekoordinaten im Rahmen normaler Abweichungen haben hingegen fast keinen Einfluss. Werden beide Unsicherheiten überlagert, so ist die Kenngrößenunsicherheit dominant. Wie bereits in Abschnitt 5.1.2 ausgewertet, werden die nachfolgenden Untersuchungen ausschließlich für unsichere Kenngrößen durchgeführt.

5.2. Variographie

5.2.1. Allgemein

Die Variographie ist das Bindeglied zwischen den erfassten Kenngrößen aus Baugrunduntersuchungen und dem Prozess der räumlichen Interpolation als Grundlage für das geologische Modell. Es ist zu unterscheiden zwischen dem experimentellen und dem theoretischen Variogramm. Im experimentellen Variogramm sind diskrete Werte $\gamma(h)$ aufgetragen, die sich aus den Kenngrößendifferenzen einer Abstandsklasse ableiten.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [x(s_i) - x(s_i + h)]^2 \quad (5.9)$$

Die Approximation des experimentellen Variogramms durch das theoretische Variogramm, eine stetige Funktion, kann beispielsweise auf der Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen. Der Funktionstyp kann subjektiv gewählt werden, siehe Bild 21.

Es ist dabei häufig zu beobachten, dass sich das experimentelle Variogramm innerhalb der Reichweite einem Schwellenwert annähert. Ist dieser Wert deutlich erkennbar, so kann er zur Schätzung der Varianz der Datengesamtheit genutzt werden. Die Informationen des experimentellen Variogramms sind maßstabsbezogen. Kleinere Maßstäbe, das heißt Informationen nahe dem Ursprung, geben Hinweise auf die Art der Stetigkeit der regionalisierten Variablen. Wechseln die Werte der Variablen sehr plötzlich in sehr kleinen Abstandsdifferenzen Δh nahe dem Ursprung, so wird dies als Nugget-Effekt bezeichnet. Der Bedeutung nach hat diese Kenngröße keine räumliche Erhaltungsneigung. Somit könnte dieser Wert ein Maß für eine Struktur im mikroskaligem Bereich oder auch für aufgetretene Messunsicherheiten sein.

Im Weiteren wird das experimentelle Variogramm durch das theoretische Variogramm ersetzt. Die Variogrammfunktion garantiert, dass sich für jede Linearkombination von Kenngrößen eine positive Varianz ergibt, was nicht der Fall sein muss, wenn die Werte des experimentellen Variogramms benutzt werden würden. Die Modellfunktionen sind meist über die zwei Kenngrößen – Reichweite und Schwellenwert – definiert.

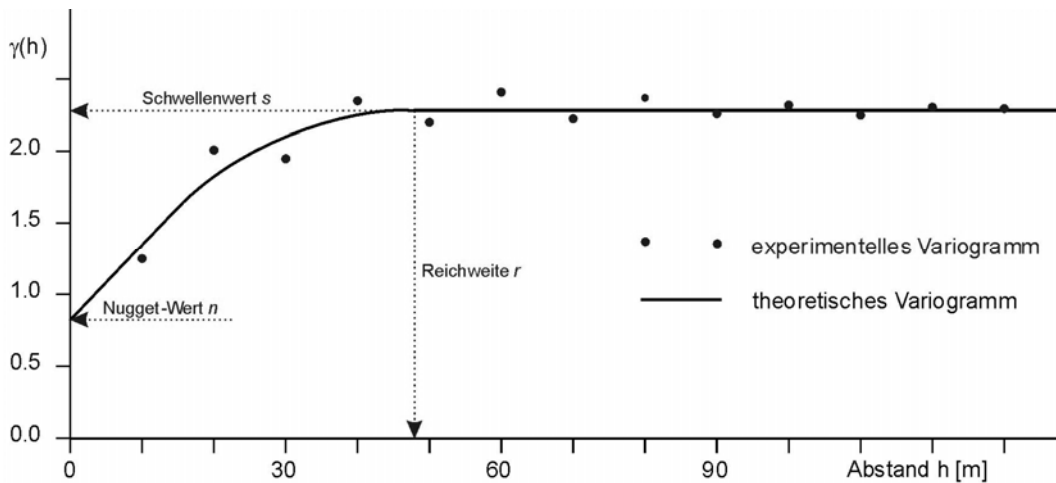
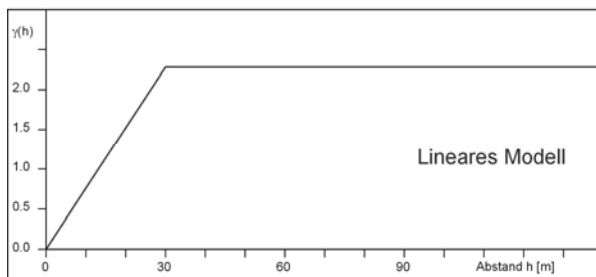


Bild 21: Experimentelles Variogramm und approximiertes theoretisches Variogramm

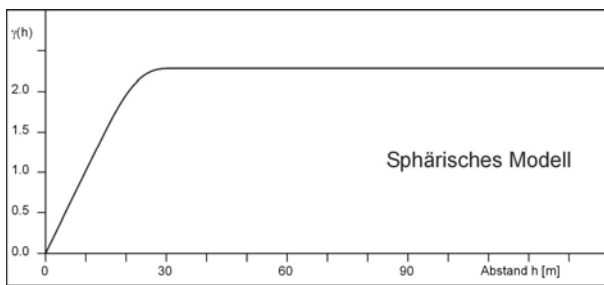
Es ist darauf zu verweisen, dass eine Grundgesamtheit durch verschiedene theoretische Variogramme beschrieben werden kann. Häufig sind die Kenngrößen im Untersuchungsgebiet trendbehaftet oder anisotrop, so ist es erforderlich, richtungsabhängige Variogramme zu generieren. Die häufig verwendeten Variogrammfunktionen sind nachfolgend abgebildet. Als weitere Modelle können das Power Modell und das Wijsian Modell angeführt werden [47].

Lineares Modell



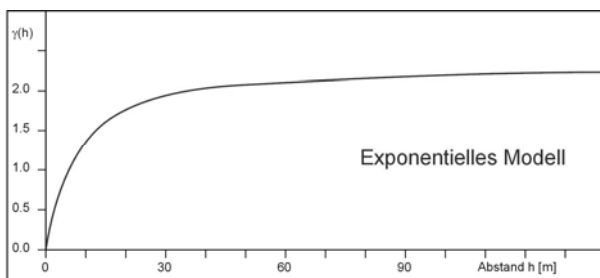
$$\gamma(h) = \begin{cases} a \cdot h + NW & , 0 \leq h < r \\ a \cdot h_{\max} & , r \leq h \end{cases} \quad (5.10)$$

Sphärisches Modell



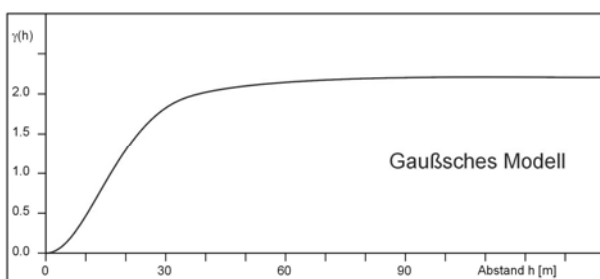
$$\gamma(h) = \begin{cases} NW + a \cdot \left(1,5 \cdot \frac{h}{b} - 0,5 \cdot \left(\frac{h}{b} \right)^3 \right), & 0 \leq h < b \\ NW + a & , b \leq h \end{cases} \quad (5.11)$$

Exponentielles Modell



$$\gamma(h) = NW + a \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{h}{b}}} \right) \quad (5.12)$$

Gauß'sches Modell



$$\gamma(h) = NW + a \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\left(\frac{h}{b} \right)^2}} \right) \quad (5.13)$$

Um den Prozess der Transformation des experimentellen Variogramms in das theoretische Variogramm vollziehen zu können, sollte jede Abstandsklasse h mindestens 30 Wertepaare [44] beziehungsweise 50-70 Datenpaare [47] beinhalten. Diese Anhaltswerte sind empirisch. Eine fundierte Begründung wird von den Autoren nicht gegeben.

Der Abstandsvektor h soll dabei stets kleiner als die Hälfte der maximalen Distanz zwischen den Punkten im Datenfeld sein. Eine regelmäßige Anordnung der Erkundungsorte erweist sich als vorteilhaft [25] gegenüber zufälligen Anordnungen, genau dann wenn Besonderheiten der Anordnungen im Vorfeld der Interpolation nicht erkannt oder bearbeitet werden. Es wurde festgestellt, dass die Varianz der folgenden Krigingprognose, siehe Kapitel 6, in einem quadratischen Raster geringer ist als bei rein zufälliger Anordnung der Punkte.

In der geotechnischen Praxis weichen die Erkundungspunkte meist von einem regelmäßigen Raster ab. Gründe dafür sind zum einen vorhandene Bebauung und Unzugänglichkeiten des Geländes, zum anderen die Notwendigkeit der Erkundung an markanten Orten. So ist es üblich, dass die Erkundungsdichte im Untersuchungsgebiet unterschiedlich stark ausgebildet ist.

Durch diese Unregelmäßigkeiten bei der Anordnung der Erkundungspunkte kommt es im Rahmen der Variogrammanalyse für festgelegte Schrittweiten nicht immer zur Bildung von Wertepaaren [53]. Um dennoch genug Werte zur Bestimmung der Korrelation von Variablen zu bekommen, werden in der Variographie verschiedene Adaptionen verwendet.

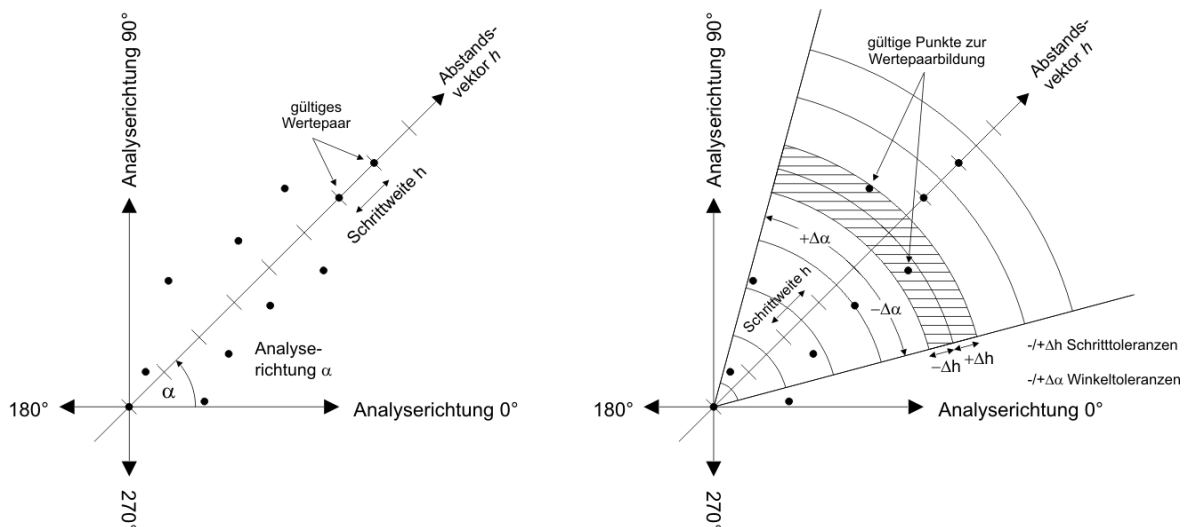


Bild 22: Wertepaarbildung mit und ohne definierte Toleranzkriterien

Ein in der Erkundungspraxis oft verwendetes Verfahren ist die Einführung von Toleranzkriterien. Bild 22 zeigt deutlich die höhere Anzahl von Wertepaaren in einer Abstands-kategorie durch die Definition von Toleranzkriterien. Bei der Größe für die Schritttoleranz Δh und der Winkelaufweitung $\Delta\alpha$ ist immer ein Kompromiss mit der Schrittweite h zu suchen, da sich

- zu große Toleranzen
- hohe Anzahl berücksichtigter Datenpaare,
- geglättete Variogramme,
- mögliches Übersehen vorhandener Anisotropie,

zu kleine Toleranzen

- niedrigere Anzahl berücksichtigter Datenpaare,
- sehr erratische Semivariogrammwerte,
- Modellanpassung an Werte schlecht möglich,

deutlich auf die geostatistische Modellierung auswirken.

In der Praxis ist es unwahrscheinlich, dass 30 oder mehr Wertepaare in einer Abstandsklasse existieren, da die Beobachtungspunkte meist irregulär verteilt sind.

Mit der gewählten Variogrammfunktion ist die Voraussetzung geschaffen, Aussagen über den ungetroffenen Bereich auf Grundlage des Krigings zu treffen. Besteht der Anspruch auf realitätsnähere Schätzergebnisse, so sind zusätzlich zur Variographie weitere Besonderheiten wie [An]Isotropien und/oder Trendverläufe in einem Datensatz zu berücksichtigen, soweit diese erkennbar sind.

5.2.2. Analytische Betrachtung zur Unsicherheitsfortpflanzung in der Variographie

Für die Unsicherheitsfortpflanzung in der Variographie sind, vergleiche mit Abschnitt 5.1, nur die unsicheren Kenngrößen zu berücksichtigen. Durch die Variogrammfunktion werden die Wichtungsfaktoren im Kriginggleichungssystem λ_i beeinflusst, siehe Abschnitt 6.2.1. Um eine Verbindung zwischen den unsicheren Baugrundkenngrößen und den Wichtungsfaktoren herzustellen, wird die Fortpflanzung der Kenngrößenunsicherheit über das experimentelle Variogramm zum theoretischen Variogramm untersucht.

Die aufgezeigten analytischen Zusammenhänge werden durch numerische Auswertungen mit dem GeoStat Modul isotrope Variographie hinterlegt. Auswertungen zum theoretischen Variogramm sind ausschließlich numerisch möglich.

Experimentelles Variogramm

Die analytische Ableitung der experimentellen Variogrammwerte ist nur für Sonderfälle geschlossen möglich. Es wird nachfolgend von isotrop verteilten Kenngrößen im Halbraum ausgegangen. Es gelten die allgemeinen Voraussetzungen für die Variographie. Unter Annahme, dass die der Untersuchung zugrunde liegenden Kenngrößen normal verteilt sind, wird die Gleichung (5.9) ausgewertet.

Zunächst wird die Unsicherheitsfortpflanzung für den Klammerausdruck

$$z(i) = x(s_i) - x(s_i + h) \quad (5.14)$$

untersucht. Es wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Kenngrößen voneinander abhängig sind, zumindest die Unkorreliertheit nicht vorausgesetzt werden kann. Die Zuordnung der Kenngrößen aus einem Wertepaar der Abstandsklasse h erfolgt wahlweise in die Datenmenge $x(s_i)$ beziehungsweise $x(s_i+h)$.

Es gilt dann für den Erwartungswert

$$E[Z(i)] = E[X(s_i)] - E[X(s_i + h)] \tag{5.15}$$

und für die Varianz gemäß der linearen Varianzenfortpflanzung, siehe Abschnitt 3.5, für korrelierte Kenngrößen

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z(i)] &= \text{Var}[X(s_i)] + \text{Var}[X(s_i + h)] - 2 \cdot \text{Cov}[X(s_i), X(s_i + h)] \\ \text{Var}[Z(i)] &= \sum_{k=1}^N (X(s_i)_k - E[X(s_i)])^2 + \sum_{l=1}^N (X(s_i + h)_l - E[X(s_i + h)])^2 \\ &\quad - 2 \cdot \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{l,k}) \cdot (X(s_i)_k - E[X(s_i)]) \cdot (X(s_i + h)_l - E[X(s_i + h)]) \end{aligned} \tag{5.16}$$

wobei $\delta_{l,k} = 0$ für $l \neq k$ und $\delta_{l,k} = 1$ für $l = k$ ist. In $X(s_i)$ sind die Minuenden und in $X(s_i+h)$ die Subtrahenden der Differenz zusammengefasst. Für die Laufvariablen gilt dann $l = k$. Am Beispiel des Datensatzes ArternOK_Schicht KW 2 lässt sich dieser Zusammenhang für die Varianzen an ausgewählten Simulationen aufzeigen. Es ist $\sigma_{xi}^2 = \text{Var}[X(s_i)]$ und $\sigma_{xh}^2 = \text{Var}[X(s_i+h)]$

σ_{xi}^2	σ_{xh}^2	$\text{Cov}[X(s_i), X(s_i+h)]$	σ_z^2 GeoStat	σ_z^2 analytisch
1,82757	1,70069	-0,203747	3,93	3,93
3,60649	3,56638	0,543349	6,08	6,08
2,01862	1,9782	0,357847	3,28	3,28

Tabelle 7: Gegenüberstellung der Varianzfortpflanzung für den Differenzenausdruck der Variogrammfunktion aus GeoStat mit dem Datensatz ArternOK_Schicht KW 2 für $\sigma_{xi} = \sigma_{xh}$ und $h = 20m$

Werden nun die Substitutionen mit $z(i)$ ausgeführt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \frac{1}{2N} \sum_1^N (z(i))^2 \\ 2\gamma(h) &= \frac{1}{N} \sum_1^N (z(i))^2 \end{aligned}$$

Für unkorrelierte und standardnormalverteilte $z(i)^2$ ist dieser Ausdruck χ^2 -verteilt [8]. Die χ^2 -Verteilung ist eine stetige Verteilung mit der Dichte

$$f_{\chi^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{N/2} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot t^{\frac{N}{2}-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

und der Summenverteilung

$$F_{\chi^2}(x) = P(\chi^2 \leq x) = \frac{1}{2^{N/2} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot \int_0^x t^{\frac{N}{2}-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} dt \quad \text{für } t > 0 \quad (5.18)$$

Gemäß den Gesetzmäßigkeiten für stetige Zufallsvariable ergibt sich der Mittelwert $E[Z]$ und die Standardabweichung $\text{Var}[Z]$ zu

$$E[Z] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot z^{\frac{N-2}{2}} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot z \cdot dz \quad (5.19)$$

$$\mu_z = N$$

$$\text{Var}[Z] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot z^{\frac{N-2}{2}} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot (z - E[Z])^2 \cdot dz \quad (5.20)$$

$$\sigma_z^2 = 2 \cdot N$$

Für χ^2 -verteilte Zufallsvariablen X , Y gilt darüber hinaus

$$Y = d \cdot X : F_Y(x) = P(Y < x) = P(d \cdot X < x) = F_X\left(\frac{x}{d}\right) \quad \text{und somit} \quad (5.21)$$

f_Y	Dichtefunktion von Y
f_X	Dichtefunktion von X
d	konstanter Parameter
P	Wahrscheinlichkeit

$$f_Y(x) = \frac{1}{d} \cdot f_X\left(\frac{x}{d}\right)$$

Der Mittelwert für die Y -Substitution ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mu_y &= \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot y dy = \int_0^{\infty} f_X\left(\frac{y}{d}\right) \cdot \frac{1}{d} \cdot y dy \quad \text{mit } x = \frac{y}{d} & \mu_y & \text{Mittelwert von } Y \\ & & \mu_x & \text{Mittelwert von } X \\ &= \int_0^{\infty} f_X(x) \cdot \frac{1}{d} \cdot d \cdot (d \cdot x) dx = d \cdot \int_0^{\infty} f_X(x) \cdot x dx & d & \text{konstanter Parameter} \\ &= d \cdot \mu_x & & \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Varianz für die Y-Substitution ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= \int_0^{\infty} f_x(x) \cdot x^2 dx - \mu_x^2 \\
 \sigma_y^2 &= \int_0^{\infty} f_y(y) \cdot y^2 dx - \mu_y^2 = \int_0^{\infty} f_x\left(\frac{y}{d}\right) \cdot \frac{1}{d} \cdot y^2 dx - d^2 \cdot \mu_x^2 \quad \text{mit } x = \frac{y}{d} \\
 &= \int_0^{\infty} f_x(x) \cdot \frac{1}{d} \cdot d \cdot (d^2 \cdot x^2) dx - d^2 \cdot \mu_x^2 \\
 &= d^2 \cdot \left[\int_0^{\infty} f_x(x) \cdot x^2 dx - \mu_x^2 \right] = d^2 \cdot \sigma_x^2
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

σ_y^2 Varianz von Y
 σ_x^2 Varianz von X

Konkret gilt somit für den vorliegenden Spezialfall des experimentellen Variogramms nach [8] für unabhängige $Z(i)$, die $N(0, \sigma)$ verteilt sind,

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N Z(i)^2 \tag{5.24}$$

mit der Dichtefunktion

$$f(2\gamma(h)) = \frac{N}{\text{Var}[Z]} \cdot f_{\chi^2} \left(\frac{N \cdot 2\gamma(h)}{\text{Var}[Z]} \right) \tag{5.25}$$

Unter Verwendung der funktionellen Zusammenhänge in (5.22) und (5.23) ergeben sich für den Erwartungswert und die Varianz der experimentellen Variogrammparameter infolge der vorangegangenen Betrachtungen

$$\begin{aligned}
 E[2\gamma(h)] &= \mu_{2\gamma(h)} = \text{Var}[Z] \\
 \text{Var}[2\gamma(h)] &= \sigma_{2\gamma(h)}^2 = \frac{2}{N} \cdot (\text{Var}[Z])^2
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 E[\gamma(h)] &= \mu_{\gamma(h)} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{2\gamma(h)} = \frac{\text{Var}[Z]}{2} \\
 \text{Var}[\gamma(h)] &= \sigma_{\gamma(h)}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{N} \cdot (\text{Var}[Z])^2 = \frac{1}{2 \cdot N} \cdot (\text{Var}[Z])^2
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

Durch die nachfolgende Überprüfung der theoretischen Zusammenhänge an allen einzelnen Datensätzen wurde festgestellt, dass die Varianzen der Variogrammwerte der einzelnen Abstandsklassen nicht proportional dem Faktor $1/N$ aus Gleichung (5.27) sind.

Es hat sich gezeigt, dass als obere Schranke zur Abschätzung der Varianz angegeben werden kann

$$\text{Var}[\gamma(h)] \leq \frac{(\text{Var}[Z])^2}{2} \tag{5.28}$$

Dazu wurde die Ungleichung (5.28) durch GeoStat überprüft. Es wurde festgestellt, dass für sehr kleine σ_{Ratio} die vorbeschriebene Ungleichung weniger erfüllt wird. Im Datensatz Fehlertest_zufall fiel die Genauigkeit der Ungleichung bei einem $\sigma_{\text{Ratio}} = 0,125$ auf 65%. Für größere Verhältnisse von σ_{Ratio} konnte die Ungleichung bei über 90% der Fälle bestätigt werden.

σ_z^2	$\mu_{2\gamma(h)}$	$\sigma_{2\gamma(h)}^2$	$2(\sigma_z^2)^2 / \sigma_{2\gamma(h)}^2$	$2(\mu_{2\gamma(h)}^2)^2 / \sigma_{2\gamma(h)}^2$
58,1171	58,1172	6575,47	1,03	1,03
50,3931	50,3930	5919,29	0,86	0,86
51,4695	51,4694	5182,54	1,02	1,02
52,0616	52,0616	4450,93	1,22	1,22
56,3276	56,3276	5498,98	1,15	1,15
48,2279	48,2278	4694,06	0,99	0,99
53,071	53,0710	5093,69	1,11	1,11
44,2272	44,2272	3620,75	1,08	1,08

Tabelle 8: Gegenüberstellung von $\text{Var}[Z]$ und $\sigma_{\gamma(h)}^2$ für Ergebnisse von Berechnungsdurchläufen des Programms GeoStat mit dem Datensatz Fehlertest_Zufall KW5 für $\sigma_{\text{Ratio}}=1$ und $h = 80\text{m}$

Der funktionelle Zusammenhang zwischen den statistischen Parametern von $\gamma(h)$ und $2\gamma(h)$ wurde in der nachfolgenden Tabelle verifiziert.

$\text{Var}[Z]= \mu_{2\gamma(h)}$	$\mu_{\gamma(h)}$	$\mu_{2\gamma(h)} / \mu_{\gamma(h)}$
58,1171	29,0586	2,0
50,3931	25,1965	2,0
51,4695	25,7347	2,0

Tabelle 9: Gegenüberstellung von $\mu_{2\gamma(h)}$ und $\mu_{\gamma(h)}$ für Ergebnisse von Berechnungsdurchläufen des Programms GeoStat mit dem Datensatz Fehlertest_Zufall KW5 für $\sigma_{\text{Ratio}} = \sigma_{\text{Zufall}}$ und $h = 80\text{m}$

Zusammenfassend ist die Unsicherheit der experimentellen Variogrammparameter infolge unsicherer Kenngrößen erheblich, Tabelle 8 Spalte 3. Es konnte nachgewiesen werden, dass die simulierten experimentellen Variogrammwerte einer Abstandsklasse normalverteilt sind. Mit den getroffenen Annahmen in Tabelle 8 hat der Erwartungswert lediglich einen Dichtewert von $3,4 \cdot 10^{-4}$. Der Dichtewert ist von σ_{Result} abhängig. Eine prinzipielle Abschätzung zur Quantifizierung der Größenordnung ist genau dann möglich, wenn die Abstandsklasse h und der dazugehörige Toleranzbereich so gewählt werden, dass quasi alle Kenngrößen in diesen Bereich fallen. Die Datengesamtheit ist dann in einer Abstandsklasse zusammengefasst, vergleiche mit Abschnitt 5.1.1, oder die Zuordnungen der Kenngrößen zur entsprechenden Abstandsklasse sind bekannt.

Theoretisches Variogramm

Für die simulierten experimentellen Variogrammwerte jeder Abstandsklasse sind statistische Parameter der zugrunde liegenden Normalverteilung bestimmbar. Die theoretische Variogrammfunktion wird an diese diskreten Werte approximiert.

Es besteht nun das Ziel, die Fortpflanzung der Unsicherheiten der experimentellen Variogrammwerte infolge der Regression beziehungsweise Approximation durch ein möglichst einfaches mathematisches Modell zu beschreiben.

Ein Sonderfall ist die Regression mit normalverteiltem Zufallsanteil $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$. Für den Schätzwert y_i gilt nach [63]

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon \quad (5.29)$$

beziehungsweise wenn die Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung des überlagerten Zufallsanteils ε proportional zur Funktion $g(x)$ sind,

$$y_i = g(x_i) \cdot (1 + \lambda \cdot \varepsilon) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\sigma_\varepsilon}{g(x_i)} \quad (5.30)$$

Für einen weiteren Fall kann die Variablenrennung durch logarithmische Transformation erfolgen, so dass der Schätzwert y_i wieder als Linearkombination ausgedrückt werden kann.

$$\ln(y_i) = \ln(g(x_i)) + \ln((1 + \lambda \cdot \varepsilon)) \quad (5.31)$$

Die Verfahren der Regressionsanalyse können mit Zuordnung entsprechender theoretischer Variogrammodelle unterteilt werden in:

- Lineare Regression (Lineares Variogrammodell)
- Logarithmisch lineare Regression (Potentielles Variogrammodell)
- Allgemeine nichtlineare Regression (sphärisches, exponentielles und Gauß'sches Variogrammodell)

Parameterschätzung für die lineare Regression nach der Maximum Likelihood Methode

Für die lineare Regressionsgleichung gilt

$$g(x_i) = y_i = a_x + b_x \cdot (x_i + \varepsilon) \tag{5.32}$$

Für jeden experimentellen Variogramwert ist ε der normalverteilte Zufallsanteil $N(0, \sigma_\varepsilon)$. Die Dichtefunktion von y_i kann unter Berücksichtigung der Regeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten angegeben werden

$$f_{x,y}(x,y) = f_{x,y}(y|x) \cdot f_x(x)$$

da $x = \text{konstant} \rightarrow f_x(x) = 1$

$f_{x,y}(y|x)$ wird von der Dichtungsfunktion von ε bestimmt es gilt

$$f_{x,y}(y|x) = f_\varepsilon(\varepsilon)$$

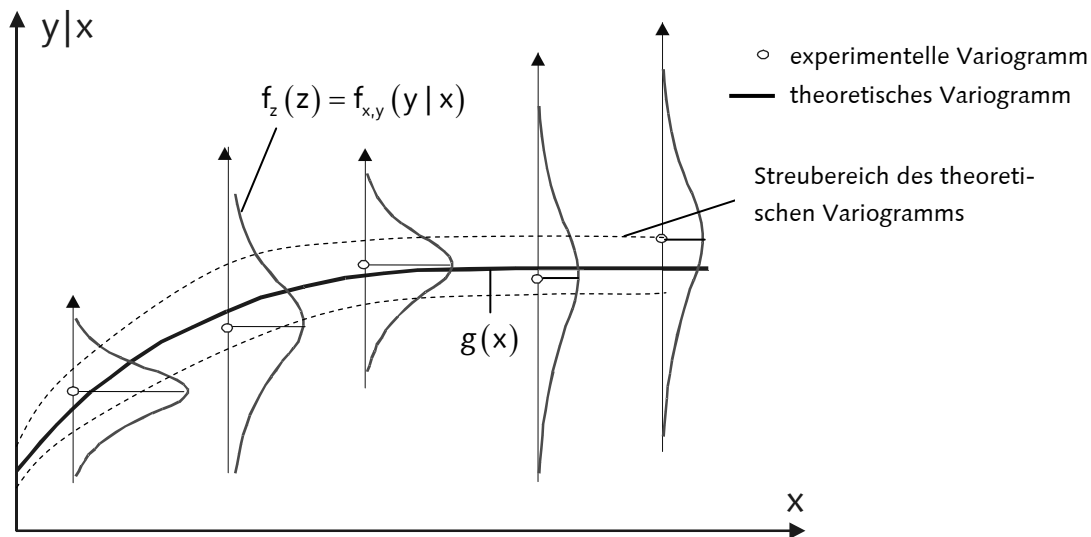


Bild 23: Definition der allgemeinen Regression für $\sigma_\varepsilon^2(x)$

Im Weiteren wird ε als unabhängig von x_i betrachtet. Es gilt für die Unsicherheit $\sigma_\varepsilon^2(x) = \sigma_\varepsilon^2$.

Die Zufallsgröße Y hat dann den Erwartungswert und die Varianz

$$\begin{aligned} E[Y] &= \mu_y = a_x + b_x \cdot x \\ \text{Var}[Y] &= \sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die lineare Regression beruht auf der bekannten Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate. Die Parameter und die Varianz der Parameter ergeben sich zu

$$a = \frac{\bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{(n-1) \cdot s_x^2} \quad (5.34)$$

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$s_b^2 = \frac{n \cdot s_{\text{Rest}}^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(1-r^2) \cdot s_y^2}{(n-2) \cdot s_x^2} \quad (5.35)$$

$$s_a^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot s_{\text{Rest}}^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(n-1) \cdot s_x^2 + n \cdot \bar{x}^2}{n} \cdot s_b^2$$

Die Varianz der linearen Funktionsparameter entspricht der Varianz der Funktionsparameter des linearen theoretischen Variogramms basierend auf den Erwartungswerten der experimentellen Variogrammwerte.

Die Unsicherheiten der experimentellen Variogrammwerte kann nicht analytisch integriert werden. Die Fortpflanzung der Unsicherheiten kann nur numerisch untersucht werden. Die Lineare Variogrammfunktion ist in dieser Arbeit von untergeordneter Bedeutung. Das Modell wird nicht weiter verfolgt.

Parameterschätzung für logarithmisch linearisierte Regressionsmodelle

Die allgemein angewandten Variogrammfunktionen sind nicht linear. Für einen Sonderfall des Potenzmodells kann durch logarithmische Transformation die Regression auf ein lineares Ausgleichsproblem zurückgeführt werden.

Es gilt

$$y = a \cdot x^b \quad (5.36)$$

oder durch Logarithmieren

$$\ln(y) = \ln(a) + b \cdot \ln(x) \quad (5.37)$$

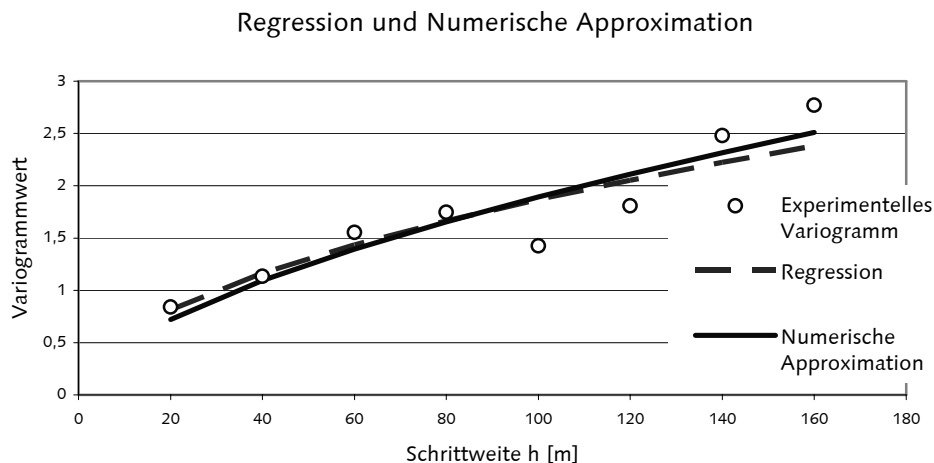


Bild 24: Gegenüberstellung der Regressionsergebnisse der analytischen linearisierten Regression und der numerischen Approximation

Wie in Bild 24 zu erkennen ist, ist das Resultat der Regression und der numerischen Approximation nicht identisch.

Die Differenz zwischen Regressionsgerade und experimentellem Variogrammwert wird für kleine Schrittweiten h durch die Eigenschaft der Logarithmusfunktion übergewichtet. Der mathematische Nachweis ist in [8] angeführt.

Die so gewonnenen Regressionsergebnisse sind mit der numerischen Approximation nicht vergleichbar, so dass weiterführende analytische Untersuchungen verworfen werden. Im Weiteren beruhen daher alle Auswertungen auf der numerischen Approximation in GeoStat. Die Approximation der Variogrammfunktion basiert in GeoStat auf der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate in Anlehnung an [14].

Mathematisch ist zwischen Regressionsanalyse und Approximation zu unterscheiden. Die Regression beruht stets auf einem mathematischen Modell während die Approximation eine numerische Näherungslösung ist. Im Weiteren wird vereinfacht der Begriff Regression auch für numerische Näherungslösungen verwendet.

Parameterschätzung für die allgemeine nichtlineare Regression

Die allgemeine nichtlineare Regression kann ausschließlich auf numerischem Weg erfolgen. In der Variographie betrifft das insbesondere das sphärische Modell, das exponentielle Modell und das Gauß'sche Modell.

Diese Modelle werden durch den Parameter a , den Schwellenwert, und den Parameter b , die Reichweite, bestimmt. Die Variogrammfunktionen können verallgemeinert formuliert werden als

$$y_i = a \cdot g(h_i) \quad (5.38)$$

Für das sphärische Variogramm gilt dann beispielsweise

$$g(h) = \left(\frac{3 \cdot h}{2 \cdot b} - \frac{1 \cdot h^3}{2 \cdot b^3} \right)$$

ist die Reichweite b kein unsicherer Parameter, so ist die Varianz von $g(h)$ gleich null. Mittels der Überführung

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot g(h_i))^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

ergibt sich das zugeordnete

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n g(h_i) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n g(h_i)^2}$$

Die Vorgehensweise setzt voraus, dass der Startwert für b das Auffinden eines lokalen Minimums und insbesondere eines globalen Minimums ermöglicht. Es gibt keinen festen Wert für b , sondern es müssen verschiedene Werte für b als Startwert probiert werden. Aus den ermittelten lokalen Minima kann dann auf ein globales Minimum geschlossen werden.

Eine weiterführende analytische Auswertung im Hinblick auf die Fortpflanzung von Unsicherheiten ist nicht geschlossen möglich, so dass die weiteren Resultate ausschließlich auf umfangreichen numerischen Simulationen mit GeoStat beruhen.

5.2.3. Numerische Betrachtung zur Unsicherheitenfortpflanzung in der Variographie
Nach Ausschluss der unsicheren Lagekoordinaten als maßgebenden Einfluss auf die Resultate der Variographie werden die Auswirkungen der unsicheren Kenngrößen getrennt nach isotroper und anisotroper Betrachtungsweise auf die theoretischen Variogrammparameter detailliert untersucht. Zunächst werden die aufgezeigten funktionellen Zusammenhänge für das experimentelle Variogramm verifiziert, vergleiche mit Abschnitt 5.2.2. Im Weiteren wird durch numerische Simulation in GeoStat der Einfluss unsicherer Kenngrößen auf häufig genutzte theoretische Variogrammfunktionen ausgewertet.

Experimentelles Variogramm – Isotropes Datenfeld

Unter Annahme der Isotropie wird die Auswertung am Datensatz ArtenOK_Schicht für den KW3 beispielhaft dargestellt, Tabelle 10.

Simulation	Abstandsklasse h =							
	20	40	60	80	100	120	140	160
1	19.126	20.839	21.236	22.177	13.591	21.819	24.571	26.951
2	28.782	22.757	26.874	30.750	29.219	16.011	18.480	28.303
3	17.511	32.400	33.587	33.589	40.565	18.027	45.363	32.051
4	14.231	19.930	25.079	32.276	27.120	18.053	16.260	18.204
97	30.637	31.312	35.162	35.868	29.010	27.885	25.107	23.697
98	19.275	21.070	25.248	23.681	28.491	24.549	25.943	13.942
99	31.672	33.907	25.973	40.751	28.400	27.028	25.135	29.449
100	18.437	24.049	25.577	23.051	23.384	18.523	19.286	33.097
	22.946	24.236	25.383	25.591	24.695	23.521	23.745	25.364

Tabelle 10: Auswertung ArternOK_Schicht KW 3 zur Bestimmung der Varianz der experimentellen Variogrammwerte $\gamma(h)$ mit $\sigma_{\text{Ratio}}=4,4$ und $\sigma_{\text{Zufall}} = 6,346$

Die Auswertung der zugehörigen Einzelschritte ist in Tabelle 11 zusammengefasst dargestellt. Für die Abstandsklasse $h=20$ wurden 58 Abstandspaare und für die Abstandsklasse $h=120$ wurden 32 Abstandspaare ermittelt. Mit den Ableitungen, siehe Gleichung (5.8) gilt

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Result}} &= \mu_{\text{Daten}} \\ \sigma_{\text{Result}}^2 &= \sigma_{\text{Daten}}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

gilt

$$\mu(x_i) = \mu(x_{i+h}) \approx \mu_{\text{Daten}} = 127,849$$

bei einer Simulationsanzahl von $N=100$, der jeweiligen Anzahl der Wertepaare, einer Standardabweichung $\sigma_{\text{Daten}} = 1,4422$ und einem Regelsignifikanzbereich von 95% darf der Mittelwert ρ gemäß der Definition S. 32 in der Abstandsklasse $h = 20\text{m}$ schwanken

$$\begin{aligned} \rho_{\mu} &= \mu \pm t_{58,1-\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\ \rho_{\mu} &= 127,849 \pm 2,001 \cdot \frac{1,4422}{\sqrt{58}} \\ \rho_{\mu} &\in [127,47; 128,23] \end{aligned}$$

und in der Abstandsklasse $h = 120\text{m}$

$$\begin{aligned} \rho_{\mu} &= \mu \pm t_{31,1-\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\ \rho_{\mu} &= 127,849 \pm 2,04 \cdot \frac{1,4422}{\sqrt{32}} \\ \rho_{\mu} &\in [127,33; 128,37] \end{aligned}$$

Jede Abstandsklasse hat separate Grenzwerte. Für die Varianzen gelten im Mittel über alle Abstandsklassen ohne Berücksichtigung der regionalen Korrelationen, also für die Datensamtheit, als obere Abschätzung in Anlehnung an Gleichung (5.8)

$$\sigma(x_i)^2 = \sigma(x_{i+h})^2 \approx \sigma_{\text{Daten}}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2 = (1,4422)^2 + (6,346)^2 = 42,35$$

$$\mu_{\gamma(h)} \approx \frac{42,35}{2} = 21,18$$

Resultate für h = 20		Simulationen N=100									
Paare	$\mu(x_i)$	$\sigma(x_i)^2$	$\mu(x_{i+h})$	$\sigma(x_{i+h})^2$	$\mu(x_i) - \mu(x_{i+h})$	$\sigma(z)^2$	$\text{Cov}(x_i, x_{i+h})$	$\text{Korr}(x_i, x_{i+h})$	$\mu(2\gamma(h))$	$\sigma(2\gamma(h))^2$	
58	127.100	20.013	127.484	23.006	-0.384	38.772	2.124	0.099	38.252	2232.940	
58	129.512	29.874	128.269	21.225	1.244	56.999	-2.950	-0.117	57.563	3683.620	
58	126.683	20.133	127.015	21.285	-0.332	35.524	2.947	0.142	35.021	1631.610	
58	129.912	19.948	130.289	17.265	-0.377	28.816	4.199	0.226	28.461	1140.490	
58	126.485	30.144	127.559	29.788	-1.074	61.175	-0.621	-0.021	61.274	4436.230	
58	129.276	19.794	127.853	27.048	1.423	37.166	4.838	0.209	38.549	2226.780	
58	127.413	27.849	127.156	29.804	0.258	64.387	-3.367	-0.117	63.343	5124.570	
58	127.215	21.987	128.031	22.172	-0.816	36.843	3.657	0.166	36.873	1820.230	
58	127.655	22.950	127.567	22.514	0.088	46.030	-0.283	-0.009	45.893	3147.433	
Resultate für h = 120		Simulationen N=100									
Paare	$\mu(x_i)$	$\sigma(x_i)^2$	$\mu(x_{i+h})$	$\sigma(x_{i+h})^2$	$\mu(x_i) - \mu(x_{i+h})$	$\sigma(z)^2$	$\text{Cov}(x_i, x_{i+h})$	$\text{Korr}(x_i, x_{i+h})$	$\mu(2\gamma(h))$	$\sigma(2\gamma(h))^2$	
32	128.410	26.431	128.379	16.743	0.031	45.045	-0.935	-0.044	43.638	2587.420	
32	127.517	16.234	127.021	25.697	0.495	32.802	4.564	0.223	32.022	2016.260	
32	128.211	20.446	129.482	16.516	-1.271	35.550	0.706	0.038	36.053	2337.550	
32	129.349	23.690	129.007	20.823	0.342	37.150	3.681	0.166	36.107	1640.380	
32	126.387	20.673	127.929	20.445	-1.541	39.011	1.053	0.051	40.168	1792.870	
32	128.222	15.705	128.009	16.152	0.213	25.154	3.352	0.210	24.414	1225.820	
32	127.804	29.379	128.249	22.000	-0.445	57.365	-2.993	-0.118	55.770	3881.490	
32	126.692	17.858	127.251	27.039	-0.559	50.360	-2.732	-0.124	49.098	3509.500	
32	126.323	31.920	126.116	25.166	0.207	55.756	0.665	0.023	54.057	3939.400	
32	127.290	20.220	127.270	21.899	0.020	38.240	1.940	0.092	37.045	1334.560	
32	127.464	22.522	127.522	22.752	-0.058	47.020	-0.873	-0.033	47.043	3226.321	

Tabelle 11: Auswertung ArternOK_Schicht KW3 zur Bestimmung der Varianz der experimentellen Variogrammwerte. $\sigma_{\text{Zufall}} = \sigma_{\text{Daten}} = 2,884$ beispielhaft für die Abstandsklassen h=20 und h=120

Für die Varianz der Differenzen $\mu_{x_i} - \mu_{x_{i+h}}$ gilt

für die Abstandsklasse h=20m

$$\sigma_z^2 = \text{Var}[Z(i)] = \text{Var}[X(i)] + \text{Var}[X(i+h)] - 2 \cdot \text{Cov}[X(i), X(i+h)]$$

$$\sigma_z^2 = \text{Var}[Z(i)] = 22,95 + 22,51 - 2 \cdot (-0,283) = 46,03$$

für die Abstandsklasse h=120m

$$\sigma_z^2 = \text{Var}[Z(i)] = 22,52 + 22,75 - 2 \cdot (-0,873) = 47,02$$

und damit zusammengefasst für den empirischen Variogrammwert, vergleiche mit Tabelle 10,

$$E[\gamma(20)] = \mu_{\gamma(20)} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{2\gamma(20)} = \frac{\sigma_z^2}{2}$$

$$\gamma(20) = \frac{46,03}{2} = 23,01$$

$$E[\gamma(120)] = \mu_{\gamma(120)} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{2\gamma(120)} = \frac{\sigma_z^2}{2}$$

$$\gamma(120) = \frac{47,02}{2} = 23,51$$

und für dessen Varianzen als grobe obere Abschätzung

$$\text{Var}[\gamma(20)] \leq \frac{(\sigma_z^2)^2}{2} \leq \frac{46,03^2}{2} = 1059,38$$

$$\text{Var}[\gamma(120)] \leq \frac{(\sigma_z^2)^2}{2} \leq \frac{47,02^2}{2} = 1105,44$$

Mit analytischen Methoden sind die Abschätzung der experimentellen Variogrammwerte und deren Unsicherheiten für das isotrope Untersuchungsgebiet auf der sicheren Seite liegend möglich. Die regionale Situation, insbesondere die Reichweite der Korrelation, im Untersuchungsgebiet kann somit ohne numerische Hilfsmittel veranschaulicht werden.

Theoretisches Variogramm – Isotropes Datenfeld

Der Übergang vom experimentellen Variogramm zum theoretischen Variogramm ist ein Regressionsproblem. Wie bereits beschrieben, kann die Fortpflanzung der Unsicherheiten beziehungsweise der Varianzen der exponentiellen Variogrammwerte nicht analytisch nachvollzogen werden.

Für die verschiedenen favorisierten Variogrammfunktionen werden nun empirische Zusammenhänge für die Unsicherheit des Schwellenwertes und die Unsicherheit der Reichweite aus den unsicheren experimentellen Variogrammwerten abgeleitet.

Das sphärische, das exponentielle und das Gauß'sche Variogrammmodell sind für die Beschreibung der hier gewählten Datensätze besonders geeignet. Sie zeichnen sich durch einen geringen Regressionskoeffizienten aus. Zunächst wird wieder vorausgesetzt, dass die Kenngrößenunsicherheit $N(0, \sigma_{\text{Zufall}})$ verteilt ist.

Beispielhaft werden anhand des exponentiellen Variogramms die Abhängigkeiten dargestellt. Dieses wird durch den Schwellenwert a und die Reichweite b charakterisiert. Das Auftreten von Nuggetwerten wird in GeoStat nicht weiter untersucht.

Das exponentielle Variogramm ist definiert

$$\gamma(h) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{h}{b}}} \right) = a \cdot g(h) \tag{5.40}$$

In Abhängigkeit von σ_{Ratio} sind die Erwartungswerte der Variogrammparameter für die Teildatensätze des Datensatzes Zufallsdaten in Tabelle 12 für normalverteilte ungestutzte Kenngrößenunsicherheit aufgezeigt.

Zufallsdaten - exponentielles Modell											
											normalverteilt, ungestutzt
σ_{Ratio}^2	0,000	0,010	0,250	1,000	2,250	4,000	9,000	16,000	25,000	36,000	100,000
σ_{Ratio}	0,010	0,100	0,500	1,000	1,500	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	10,000
KW2 - a	0,015	0,015	0,017	0,023	0,034	0,048	0,091	0,152	0,228	0,326	0,870
KW2 - b	0,531	0,537	0,536	0,939	1,428	2,009	2,516	2,798	3,035	2,847	2,830
KW3 - a	0,367	0,370	0,423	0,570	0,842	1,223	2,273	3,798	5,663	8,051	21,565
KW3 - b	0,531	0,538	0,537	0,815	1,316	2,044	2,056	2,258	2,540	2,866	3,154
KW4 - a	1,468	1,477	1,683	2,330	3,426	4,872	9,129	15,291	22,467	32,272	87,782
KW4 - b	0,541	0,537	0,536	0,773	1,339	1,789	2,897	2,588	3,079	3,039	2,649
KW5 - a	13,212	13,307	15,174	20,769	30,277	43,424	82,079	134,871	206,879	286,573	786,417
KW5 - b	0,540	0,535	0,536	0,840	1,705	1,916	2,631	2,742	2,533	2,994	3,591

Tabelle 12: Mittelwerte für den Parameter der exponentiellen Variogrammfunktion aus jeweils 1000 Simulationen für verschiedene σ_{Ratio}^2 unter Annahme der ungestutzten Normalverteilung für σ_{Zufall}

Exponentielles Modell - Parameter a

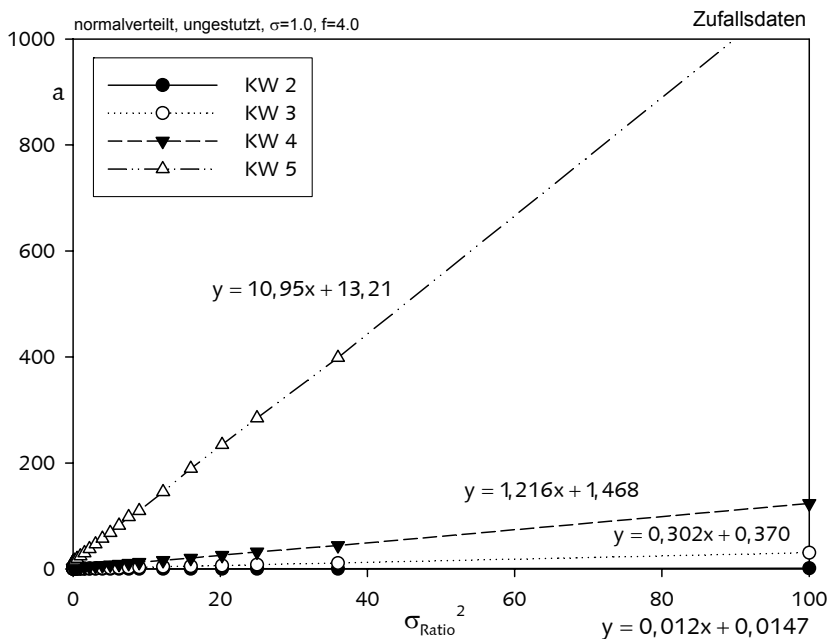


Bild 25: Grafische Auswertung der Tabelle 12 für den Parameter a

Zwischen dem Varianzenverhältnis σ_{Ratio}^2 und dem Schwellenwert a , welcher proportional zu σ_{Daten}^2 ist, besteht ein linearer Zusammenhang. Um ausschließlich die Relation zwischen den Kenngrößenvarianzen, unabhängig von der Datenfeldstreuung, und dem Parameter a zu beschreiben, wird der Erwartungswert μ_s durch den funktionellen Ansatz

$$\mu_s \approx m_s \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{Zufall}}}{\sigma_{\text{Daten}}} \right)^2 + a_{\text{deterministisch}} \tag{5.41}$$

$$\mu_s \approx m_s \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 \cdot x + a_{\text{deterministisch}}$$

definiert. Der Parameter m_s ist eine charakteristische Kenngröße des Datensatzes. Er ist eine Funktion der Datenvarianz und der Reichweite im Untersuchungsgebiet. Für den Datensatz Zufallsdaten ergibt sich

	Wert 3	Wert 4	Wert 5	Wert 6
m_s	0,818	0,814	0,820	0,820

$$E[m_s] = 0,818$$

Für den Datensatz ArternOK_Schicht des Untersuchungsgebietes lassen sich die Zusammenhänge in Bild 26 aufzeigen.

Exponentielles Modell - Parameter a

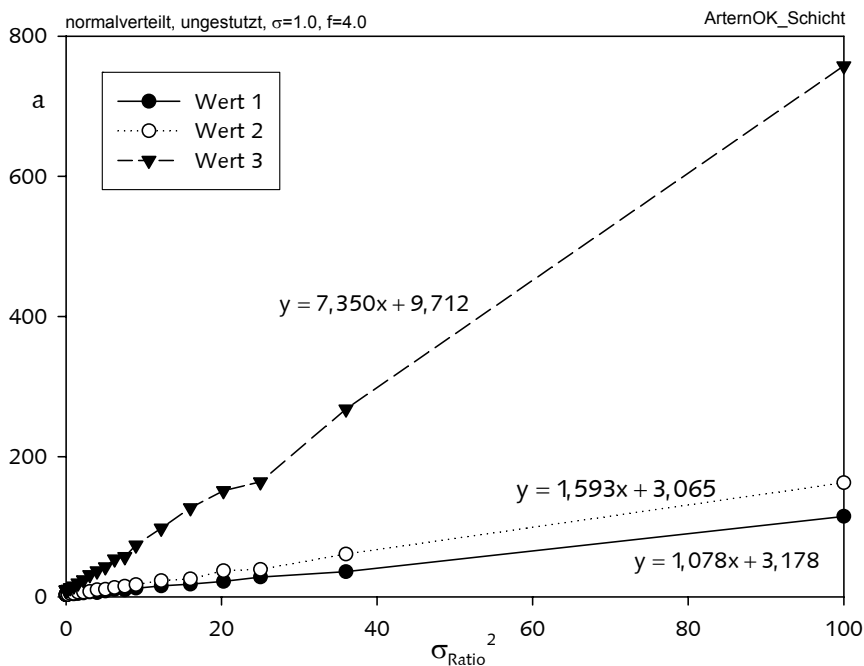


Bild 26: Grafische Auswertung für den Schwellenwert a für Datensatz ArternOK_Schicht

Für den Anstiegparameter m_s ergibt sich

	Wert 1	Wert 2	Wert 3
m_s	0,908	0,767	0,789

$$E[m_s] = 0,821$$

Für alle weiteren Datensätze ergeben sich äquivalente Auswertungen. Der Parameter $E[m_s]$ ist dabei relativ unabhängig von der Annahme normalverteilter oder lognormalverteilter Unsicherheiten für den jeweiligen Datensatz. Er ist jedoch abhängig von der Streubreite der Kenngrößen sowie der Reichweite im Datensatz.

$$E[m_s] = f(\text{Streubreite der Zufallszahlen, Reichweitenänderung})$$

Gelten statistische Verteilungen mit einem Datenintervall $[E[x]-3\sigma, E[x]+3\sigma]$ als ungestutzt, so kann $E[m_{s,f}]$ für gestutzte Verteilungen $[E[x]-f_{\text{stutz}}\cdot\sigma, E[x]+f_{\text{stutz}}\cdot\sigma]$ über das Integral der Dichtefunktion empirisch abgeschätzt werden mit

$$E[m_{s,f}] = (2 \cdot \phi(f) - 1) \cdot E[m_s] \tag{5.42}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind Ergebnisse für die verschiedenen Datensätze zusammengestellt. Dabei wurde nach der Dichtefunktion der Zufallszahlen sowie deren Stutzung unterschieden. Der markierte Kennwert für die Zufallsdaten entspricht dabei dem markierten Kennwert des Fehlertest_Zufall Datensatzes.

Exponentielles Modell

			Variation der Kennwerte ungestutzt						Variation der Kennwerte gestutzt $s=2,2 \ f=1,65$						Variation der Kennwerte gestutzt $s=1,0 \ f=1,818$						Variation der Kennwerte Fuzzy [-3;3]			
			normalverteilt			lognormalverteilt			normalverteilt			lognormalverteilt			normalverteilt			lognormalverteilt						
			m	x+	n	m	x+	n	m	x+	n	m	x+	n	m	x+	n	m	x+	n	m	x+	n	
Artern_OKSchicht	KW2	1,4104																						
	KW3	2,0799	1,078	x+	3,178	0,980	x+	3,178	0,946	x+	3,178													x+
	KW4	9,3208	1,596	x+	3,065	1,399	x+	3,065	1,448	x+	3,065													x+
			7,350	x+	9,712	6,757	x+	9,712	6,247	x+	9,712													x+
Kunstdaten	KW2	0,0003	0,012	x+	0,015	0,012	x+	0,015							0,009	x+	0,015	0,009		0,015	0,018	x+	0,015	
	KW3	0,2123	0,302	x+	0,370	0,304	x+	0,370							0,212	x+	0,370	0,212		0,370	0,461	x+	0,370	
	KW4	3,2113	1,216	x+	1,468	1,195	x+	1,468							0,861	x+	1,468	0,842		1,468	1,792	x+	1,468	
	KW5	13,3517	10,950	x+	13,210	10,860	x+	13,210							7,715	x+	13,210	7,272		13,210	16,540	x+	13,210	
Fehlertest_Zufall	KW2	0,0000							0,000	x+	0,000	0,000	x+	0,000										x+
	KW3	0,0000							1,179	x+	1,435	0,926	x+	1,435										x+
	KW4	0,0000							5,118	x+	6,519	3,794	x+	6,519										x+
	KW5	0,0000							10,910	x+	13,210	7,803	x+	13,210										x+
																								x+

Exponentielles Modell - Faktoren

			Variation der Kennwerte ungestutzt						Variation der Kennwerte gestutzt $s=2,2 \ f=1,65$						Variation der Kennwerte gestutzt $s=1,0 \ f=1,818$						Variation der Kennwerte Fuzzy [-3;3]			
			normalverteilt			lognormalverteilt			normalverteilt			lognormalverteilt			normalverteilt			lognormalverteilt						
			m_s			m_s			m_s			m_s			m_s			m_s			m_s			m_s
Artern_OKSchicht	KW2	1,4104	0,764			0,695			0,671															
	KW3	2,0799	0,767			0,673			0,696															
	KW4	9,3208	0,789	0,773	0,725	0,697	0,670	0,679																
Kunstdaten	KW2	0,0149	0,818			0,799								0,575		0,581							1,227	
	KW3	0,3709	0,814			0,821								0,572		0,571							1,242	
	KW4	1,4835	0,820			0,806								0,580		0,568							1,208	
	KW5	13,3517	0,820	0,818	0,813	0,813								0,578	0,577	0,545	0,561	1,239	1,230					
Fehlertest_Zufall	KW2	0,0001							0,822		0,682													
	KW3	1,4595							0,808		0,634													
	KW4	6,2530							0,818		0,607													
	KW5	13,3546							0,817	0,814	0,584	0,609												

Gauß'sches Modell

	σ^2_{Daten}	Variation der Kennwerte ungestutzt			Variation der Kennwerte gestutzt $s=2,2 \quad f=1,65$			Variation der Kennwerte gestutzt $s=1,0 \quad f=1,818$			Variation der Kennwerte Fuzzy [-3;+3]			
		normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	Fuzzy [-3;+3]			
		m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	
Artern_OKSchicht	KW2	1,4104	0,943	x+ 2,100	0,915	x+ 2,100	0,924	x+ 2,100						
	KW3	2,0799	1,420	x+ 2,738	1,335	x+ 2,738	1,410	x+ 2,738						
	KW4	9,3208	6,307	x+ 9,712	5,957	x+ 9,712	6,100	x+ 9,712						
Kunstdaten	KW2	0,0149	0,012	x+ 0,015	0,012	x+ 0,015			0,009	x+ 0,015	0,009	x+ 0,015	0,018	x+ 0,015
	KW3	0,3709	0,302	x+ 0,370	0,304	x+ 0,370			0,212	x+ 0,370	0,212	x+ 0,370	0,461	x+ 0,370
	KW4	1,4835	1,215	x+ 1,468	1,194	x+ 1,468			0,881	x+ 1,468	0,842	x+ 1,468	1,791	x+ 1,468
	KW5	13,3517	10,950	x+ 13,210	10,850	x+ 13,210			7,712	x+ 13,210	7,268	x+ 13,210	16,540	x+ 13,210
	Fehlertest_Zufall	KW2	0,0001					0,000	x+ 0,000					
	KW3	1,4595					1,179	x+ 1,435						x+ 1,435
	KW4	6,2530					5,117	x+ 6,511						x+ 6,511
	KW5	13,3546					10,900	x+ 13,210						x+ 13,210

Gauß'sches Modell - Faktoren

	σ^2_{Daten}	Variation der Kennwerte ungestutzt			Variation der Kennwerte gestutzt $s=2,2 \quad f=1,65$			Variation der Kennwerte gestutzt $s=1,0 \quad f=1,818$			Variation der Kennwerte Fuzzy [-3;+3]				
		normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	Fuzzy [-3;+3]				
		m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n		
Artern_OKSchicht	KW2	1,4104	0,669		0,649		0,655								
	KW3	2,0799	0,683		0,642		0,678								
	KW4	9,3208	0,677	0,676	0,639	0,643	0,654	0,662							
Kunstdaten	KW2	0,0149	0,820		0,806				0,575		0,581	x+	1,230		
	KW3	0,3709	0,814		0,820				0,572		0,572	x+	1,242		
	KW4	1,4835	0,819		0,805				0,580		0,568	x+	1,207		
	KW5	13,3517	0,820	0,818	0,813	0,811			0,578	0,577	0,544	x+	0,561	1,239	1,229
	Fehlertest_Zufall	KW2	0,0001					0,821							x+
	KW3	1,4595					0,808							x+	
	KW4	6,2530					0,818							x+	
	KW5	13,3546					0,816	0,816						x+	

Sphärisches Modell

	σ^2_{Daten}	Variation der Kennwerte ungestutzt			Variation der Kennwerte gestutzt $s=2,2 \quad f=1,65$			Variation der Kennwerte gestutzt $s=1,0 \quad f=1,818$			Variation der Kennwerte Fuzzy [-3;+3]			
		normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	Fuzzy [-3;+3]			
		m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	m	x+ n	
Artern_OKSchicht	KW2	1,4104	1,188	x+ 2,685	1,124	x+ 2,519	1,156	x+ 2,685						
	KW3	2,0799	1,797	x+ 3,280	1,657	x+ 3,280	1,684	x+ 3,280						
	KW4	9,3208	7,969	x+ 11,410	7,435	x+ 11,410	7,544	x+ 11,410						
Kunstdaten	KW2	0,0149	0,015	x+ 0,018	0,015	x+ 0,018			0,015	x+ 0,018	0,011	x+ 0,018	0,022	x+ 0,018
	KW3	0,3709	0,368	x+ 0,449	0,371	x+ 0,449			0,259	x+ 0,449	0,259	x+ 0,449	0,563	x+ 0,449
	KW4	1,4835	1,485	x+ 1,779	1,459	x+ 1,779			1,052	x+ 1,779	1,028	x+ 1,779	2,188	x+ 1,779
	KW5	13,3517	13,380	x+ 16,020	13,260	x+ 16,020			9,424	x+ 16,020	8,878	x+ 16,020	20,210	x+ 16,020
	Fehlertest_Zufall	KW2	0,0000					0,000	x+ 0,000					
	KW3	0,0000					1,440	x+ 1,754						x+ 1,754
	KW4	0,0000					6,251	x+ 1,779						x+ 1,779
	KW5	0,0000					13,320	x+ 16,109						x+ 16,109

Sphärisches Modell - Faktoren

	σ^2_{Daten}	Variation der Kennwerte ungestutzt			Variation der Kennwerte gestutzt $s=2,2 \quad f=1,65$			Variation der Kennwerte gestutzt $s=1,0 \quad f=1,818$			Variation der Kennwerte Fuzzy [-3;+3]			
		normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	normalverteilt		lognormalverteilt	Fuzzy [-3;+3]			
		m_s		m_s		m_s		m_s		m_s		m_s		
Artern_OKSchicht	KW2	1,4104	0,842		0,797		0,820							
	KW3	2,0799	0,864		0,797		0,810							
	KW4	9,3208	0,855	0,854	0,798	0,797	0,809	0,813						
Zufallsdaten	KW2	0,0149	1,001		0,974				0,981		0,739		1,498	
	KW3	0,3709	0,992		1,000				0,699		0,698		1,518	
	KW4	1,4835	1,001		0,983				0,709		0,693		1,475	
	KW5	13,3517	1,002	0,998	0,993	0,992			0,706	0,705	0,665	0,685	1,514	1,502
	Fehlertest_Zufall	KW2	0,0001					1,009						
	KW3	1,4595					0,987							
	KW4	6,2530					1,000							
	KW5	13,3546					0,997	0,995						

Tabelle 13: Mittelwertdarstellung über den Schwellenwert a des exponentiellen, Gauß'schen und des sphärischen Modells in Abhängigkeit von σ^2_{Ratio}

Die Erwartungswerte $E[m_s]$ sind dabei für verschiedene Datengesamtheiten innerhalb des Untersuchungsgebietes annähernd konstant, da die Reichweiten für die Teildatensätze in Abhängigkeit von σ_{Ratio} sich annähernd konstant gezeigt haben.

Entsprechend der Charakteristik der exponentiellen Variogrammformfunktion beeinflusst das Produkt $m_s \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2$ direkt den Schwellenwert. Die Berücksichtigung von Kenngrößenunsicherheiten führt somit auf das Problem einer Schwellenwertanisotropie verglichen mit der deterministischen Betrachtungsweise. Der Schwellenwert im exponentiellen, im Gauß'schen und im sphärischen Variogrammmodell ist proportional zur Varianz der Datengesamtheit σ_{Result}^2 .

Unter der Annahme, dass die Reichweite des exponentiellen Variogramms gegen null strebt, strebt $g(h)$ gegen eins. Diese ermöglicht die auf der sicheren Seite liegende Abschätzung für den Schwellenwert in Bezug zur Kenngrößenunsicherheit

$$\begin{aligned}
 a(\sigma_{\text{Ratio}}^2) &= E[m_s] \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2 + a_{\text{deterministisch}} \\
 a(\sigma_{\text{Ratio}}^2) &= E[m_s] \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2 + \sigma_{\text{Daten}}^2 = E[m_s] \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2 + \sigma_{\text{Daten}}^2
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

Unter der Voraussetzung einer ungestutzten Dichtefunktion für σ_{Zufall} und einer Reichweite $b \rightarrow 0$ reduziert sich die Variogrammfunktion auf einen Schwellenwert, die Varianz des Datenfeldes σ_{Result} . Es gilt für die Grenzwertbetrachtung der bereits bekannte Zusammenhang

$$a(\sigma_{\text{Ratio}}^2)_{\text{max}} = \sigma_{\text{Zufall}}^2 + \sigma_{\text{Daten}}^2 = \sigma_{\text{Result}}^2
 \tag{5.44}$$

und für den maximal möglichen Erwartungswert $E[m_s]_{\text{max}} = 1,0$. Dieser Wert ist eine obere Abschätzung für die $E[m_s]$ und ist, wie noch gezeigt wird, hinreichend genau für Betrachtungen zur Standardabweichung des Krigingschätzers.

Für den Parameter b , der die Reichweite symbolisiert, lassen sich keine derartigen Zusammenhänge aufzeigen. Die Reichweite des Datensatzes ist nicht nur von der Datenvarianz abhängig, sondern auch von der Lage der Daten. Es bleibt einzig zu erkennen, dass die Reichweite der Datengesamtheit eines Untersuchungsgebietes mit zunehmender Datenvarianz sich asymptotisch einem Grenzwert nähert. Dieser ist für den Datensatz Zufallsdaten in Bild 27 und für ArternOK_Schicht in Bild 28 dargestellt. Dieses Verhalten ist theoretisch nicht zwingend. Es verweist beispielsweise auf bedingte Zusammenhänge im Rahmen der Genese. Im Umkehrschluss wären bei abweichenden Verhalten in einem Untersuchungsgebiet antropogene Einwirkungen die Ursache, was aber an weiteren Baugrunddatensätzen noch zu zeigen wäre.

Das Varianzenverhältnis $\sigma_{\text{Ratio,grenz}}^2$, ab welchem dieser Zustand zu erkennen ist, kann einheitlich mit $\sigma_{\text{Ratio}}^2 \leq 4,00$ oder $\sigma_{\text{Ratio}} \leq 2,00$ für eine Datengesamtheit mit ungestutzter Dichtefunktion angegeben werden. Allgemein kann die folgende empirische Formel in Abhängigkeit vom Stützungsfaktor f_{Stutz} der äquivalenten normalverteilten Dichtefunktion abgeleitet werden

$$\sigma_{\text{Ratio,grenz}}^2 = \left(2,0 \cdot \sigma_{\text{Zufall}} \cdot \frac{1}{(2 \cdot \phi(f_{\text{Stutz}}) - 1) \cdot \sigma_{\text{Zufall}}} \right)^2 = \left(\frac{2}{2 \cdot \phi(f_{\text{Stutz}}) - 1} \right)^2
 \tag{5.45}$$

Der Verweis auf die äquivalent normalverteilte Dichtefunktionen in vorgegeben Schranken bezieht sich insbesondere auf die Resultate der Fuzzy-verteilten Unsicherheit, siehe S. 79.

Exponentielles Modell - Parameter b

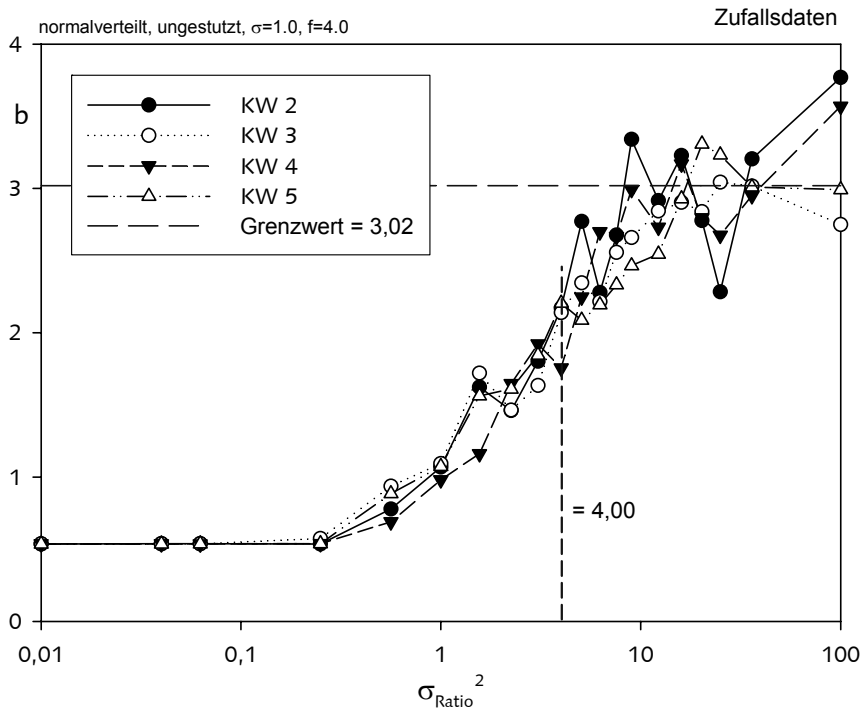


Bild 27: Grafische Auswertung für den Parameter b

Exponentielles Modell - Parameter b

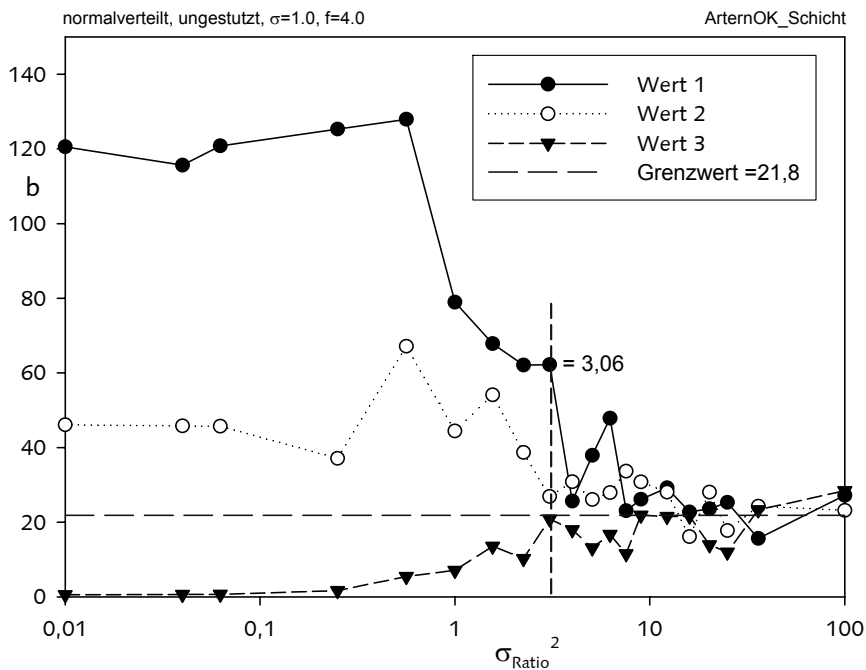


Bild 28: Grafische Auswertung für den Parameter b

Neben dem Verhalten der Erwartungswerte der exponentiellen Variogrammparameter ist die Varianz dieser von besonderem Interesse. Für den Schwellenwert a sind diese in Bild 29 und Bild 30 dargestellt.

Exponentielles Modell - Parameter a
Standardabweichung

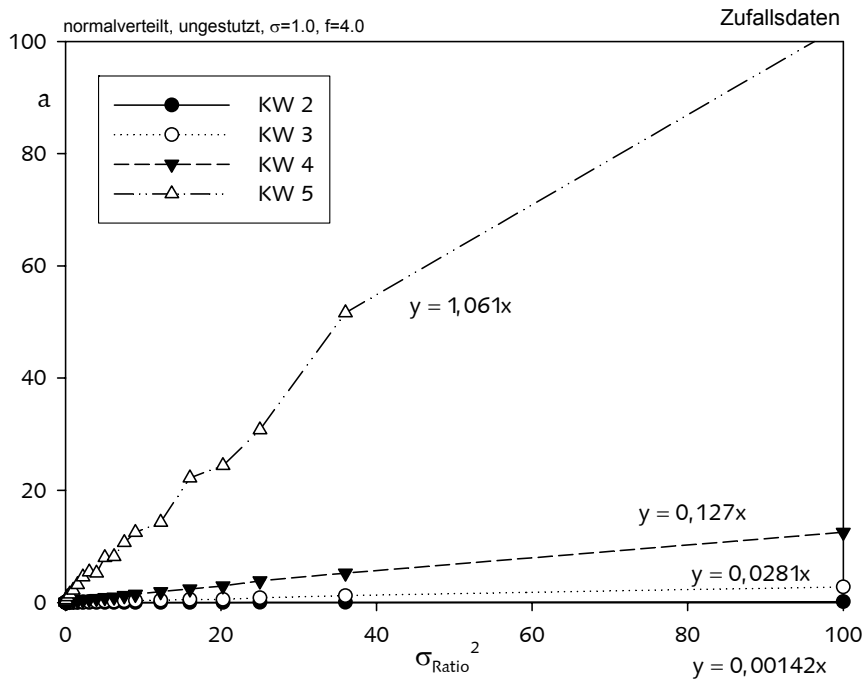


Bild 29: Grafische Auswertung für die Standardabweichung des Parameters a

Die Standardabweichung des Schwellenwertes wächst ähnlich seinem Erwartungswert mit wachsenden σ_{Ratio}^2 von null beginnend linear an. Daher wird für dessen Beschreibung ein ähnlicher Ansatz wie zum Erwartungswert gewählt. Es wird berücksichtigt, dass für $\sigma_{\text{Zufall}} = 0$ die Varianz des Schwellenwertes null ist.

$$\mu_{V_s} \approx v_s \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{Zufall}}}{\sigma_{\text{Daten}}} \right)^2 \tag{5.46}$$

$$\mu_{V_s} \approx v_s \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2$$

Für den Datensatz Zufallsdaten ergibt sich

	Wert 3	Wert 4	Wert 5	Wert 6
v_s	0,095	0,076	0,086	0,079

$$E[v_s] = 0,084$$

Für den Datensatz ArternOK_Schicht des Untersuchungsgebietes lassen sich die Zusammenhänge in Bild 26 aufzeigen.

Exponentielles - Parameter a
Standardabweichung

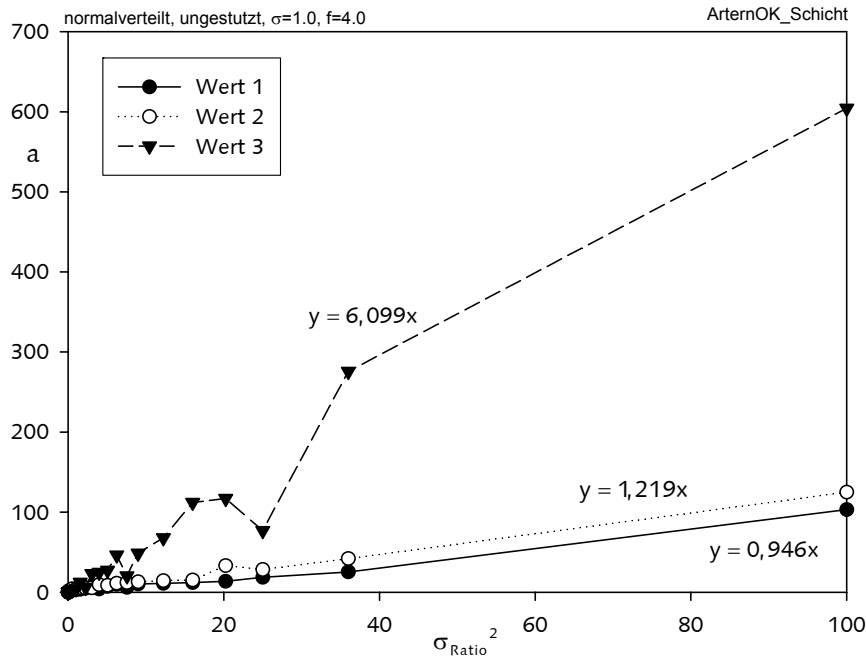


Bild 30: Grafische Auswertung für die Standardabweichung des Parameters a

	Wert 1	Wert 2	Wert 3
v_s	0,095	0,086	0,079

$E[v_s] = 0,084$

Für alle weiteren Datensätze ergeben sich äquivalente Auswertungen. Der Erwartungswert $E[v_s]$ ist abhängig vom theoretischen Variogrammmodell, der Annahme der Dichtefunktion der Kenngrößen, der Streubreite sowie der Reichweitenänderung. Analytische Zusammenhänge können infolge σ^2_{Ratio} nicht abgeleitet werden. Qualitativ erhöht sich die Standardabweichung des Schwellenwertes mit zunehmender Kenngrößenstreuung und zunehmender Streubreite $f \cdot \sigma_{Zufall}$. Für normalverteilte Kenngrößen ist die Standardabweichung von a stets größer als für lognormalverteilte Kenngrößen.

$E[v_s] = f(\text{Dichteverteilung, Streubreite der Zufallszahlen, Reichweitenänderung})$

Gelten statistische Verteilungen mit einem Datenintervall $[E[x]-3\sigma, E[x]+3\sigma]$ als ungestutzt, so kann zumindest μ_{vs} für gestutzte Verteilungen $[E[x]-f_{Stutz} \cdot \sigma, E[x]+f_{Stutz} \cdot \sigma]$ abgeschätzt werden mit

$E[v_{s,f}] = (2 \cdot \phi(f_{Stutz}) - 1) \cdot E[v_s]$ (5.47)

Die Standardabweichung des Parameters b , der Reichweite des theoretischen Variogramms, verhält sich ähnlich zur Mittelwertfunktion. Es ist zu erkennen, dass die Standardabweichung des Parameters b mit zunehmendem Varianzenverhältnis σ_{Ratio}^2 sich asymptotisch einem Grenzwert nähert. Dieser ist für den Datensatz Zufallsdaten in Bild 31 und für ArternOK_Schicht in Bild 32 jeweils dargestellt.

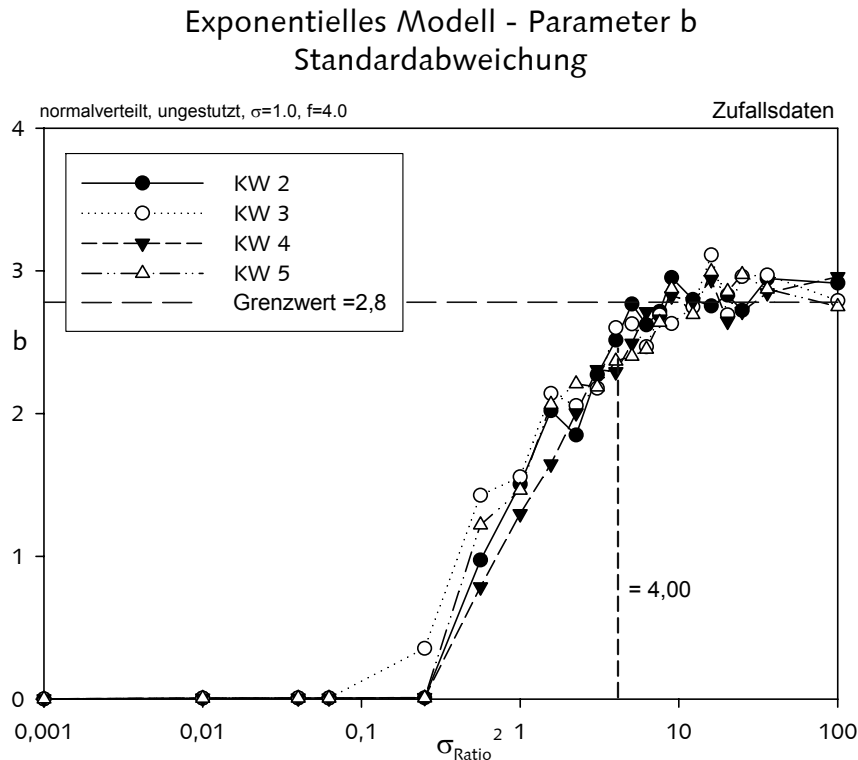


Bild 31: Verlauf der Standardabweichung des Parameters b

Wie durch den Verlauf der verschiedenen Datensätze in Bild 31 zu erkennen ist, ist die Reichweite unabhängig von den Kenngrößen selbst, sondern nur abhängig zu deren Relativedifferenz. Da die Teildatensätze durch Multiplikation auseinander hervorgehen, ist der Verlauf der Parameter b sowie deren Standardabweichungen deckungsgleich, siehe Abschnitt 13.5.2.

Das Varianzenverhältnis $\sigma_{\text{Ratio,grenz}}^2$ ab welchem dieser Zustand zu erkennen ist, kann auch hier einheitlich mit $\sigma_{\text{Ratio}}^2 \leq 4,00$ oder $\sigma_{\text{Ratio}} \leq 2,00$ für eine Datengesamtheit mit ungestutzter Dichtefunktion angegeben werden. Allgemein kann die folgende empirische Formel in Abhängigkeit vom Stützungsfaktor f_{stutz} der äquivalenten normalverteilten Dichtefunktion abgeleitet werden

$$\sigma_{\text{Ratio,grenz}}^2 = \left(2,0 \cdot \sigma_{\text{Zufall}} \cdot \frac{1}{(2 \cdot \phi(f_{\text{stutz}}) - 1) \cdot \sigma_{\text{Zufall}}} \right)^2 = \left(\frac{2}{2 \cdot \phi(f_{\text{stutz}}) - 1} \right)^2 \quad (5.48)$$

Exponentielles Modell - Parameter b Standardabweichungen

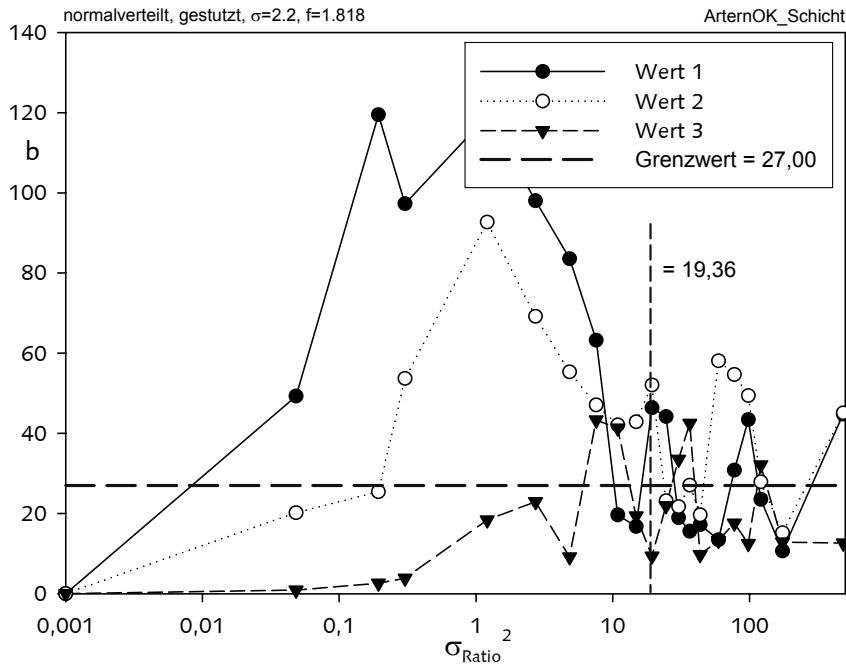


Bild 32: Verlauf der Standardabweichung des Parameters b

Werden fuzzy-verteilte Zufallszahlen im Intervall $[-3;+3]$ generiert, wie für den Datensatz Zufallsdaten nachfolgend zu erkennen ist, ist diese durch eine äquivalente Normalverteilung zu ersetzen. Diese äquivalente Normalverteilung hat die Parameter $E[x] = 0$, $E[x]^2 = (1,213)^2$ und $f_{\text{Stutz}} \sim 3,30$. Der Parameter $\sigma^2_{\text{Ratio,Grenz}}$ ergibt sich zu 5,88.

Exponentielles Modell - Parameter b Standardabweichungen

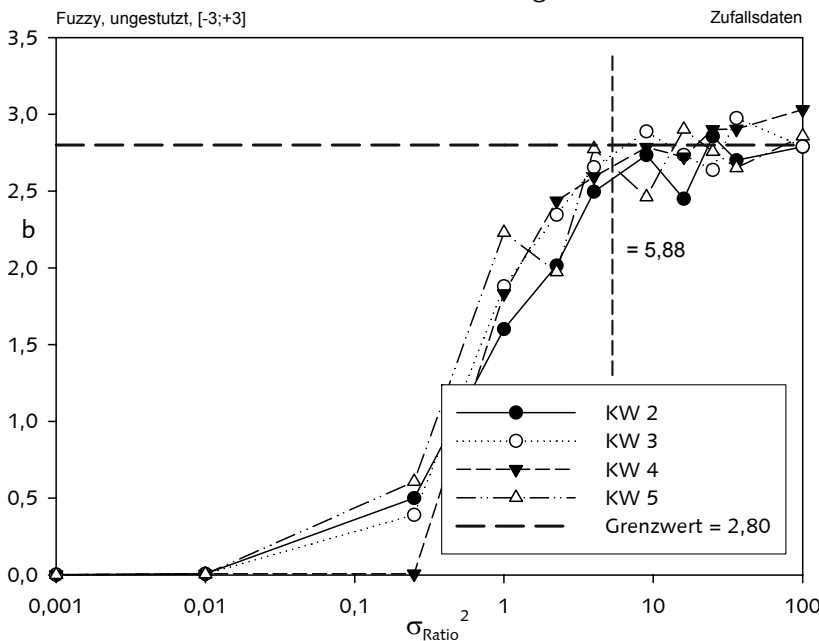


Bild 33: Verlauf der Standardabweichung des Parameters b

5.3. Globaler Trend und Drift

5.3.1. Allgemein

In vielen Fällen ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen im Untersuchungsraum nicht konstant, so dass von der Existenz eines unterlagerten Trends ausgegangen werden kann. Hierbei ist zwischen zwei Arten, dem globalen Trend und dem lokalen Trend, der so genannten Drift, zu unterscheiden. Der globale Trend ist über den gesamten Betrachtungsraum als einheitlich anzusehen. Die Drift beschreibt hingegen die lokale Fluktuation eines Teilgebietes im Betrachtungsraum. Daraus leitet sich ab, dass der globale Trend und die Drift regionalisiert entgegengesetzt wirken können. Eine klare Trennung dieser beiden Phänomene ist anhand der Datenlage oft nicht möglich, zudem hängt ihre Wahrnehmung ganz entscheidend vom gewählten Betrachtungsmaßstab ab.

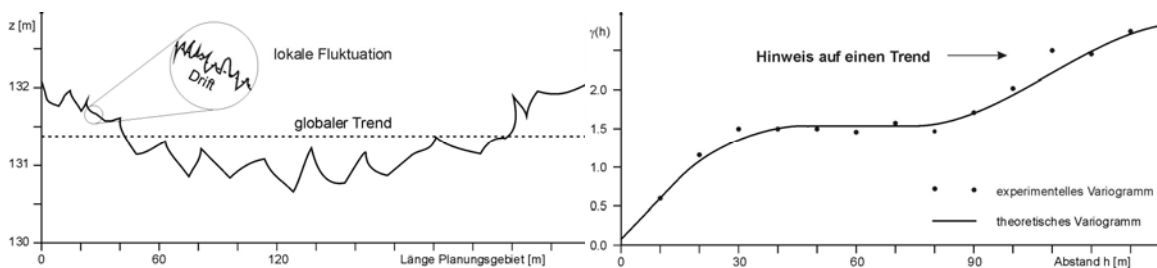


Bild 34: Lokale Fluktuationen und globaler Trend

Bild 35: Variogramm ohne Schwellenwert

Die physikalische Ursache für das Vorhandensein eines Trends ist im Allgemeinen ein räumlicher oder zeitlicher Prozess, dessen Auswirkung auf die Variable das Ausmaß der lokalen Schwankungen übersteigt. Beispielsweise geht global die Dichtezunahme über die Tiefe mit der Zunahme der Scherfestigkeit und der Steifigkeit einher. Lokal kann dieser Zusammenhang durch Vernässungen aufgehoben sein.

Hinweise auf einen Trend im Untersuchungsraum gibt unter anderem das Variogramm, das in Richtung des Trends keinen Schwellenwert aufweist, siehe Bild 32. Dieser typische Verlauf ist ein Zeichen für fehlende Stationarität der Zufallsvariablen. Allgemeiner formuliert, besteht in diesem Bereich keine stochastische Abhängigkeit zwischen Datenort und Datenwert mehr. Das Vorhandensein eines globalen Trends ist vor Beginn der geostatistischen Untersuchung zu prüfen. Dies kann beispielsweise durch die Approximation einer linearen Polynomfunktion erfolgen, siehe Gleichung (5.50).

Die geostatistische Interpolation auf der Grundlage des Krigings unterstellt einen trendfreien Untersuchungsraum. Um die Trendfreiheit sicherzustellen, wird wie beispielsweise in [68] beschrieben, eine Approximationsfunktion $T(s_i)$ für den globalen Trend ermittelt. Die Funktionswerte werden den Residuen $R(s_i)$, der bekannten Datengesamtheit, hinzuaddiert.

Die Kenngröße setzt sich damit allgemein zusammen

$$X(s_i) = R(s_i) + T(s_i) + \varepsilon(s_i) \quad (5.49)$$

Der Trend kann vernachlässigt werden, wenn seine Auswirkung in geringen Entfernungen vernachlässigbar klein ist. Dies ist möglich, wenn beim Kriging nur Punkte aus der Nachbarschaft des zu schätzenden Punktes verwendet werden. Die Schätzung ist dann als hinreichend genau anzusehen. Ist dieser nicht vernachlässigbar, wird der Prognoseunsicherheit, der nur vom Variogramm beziehungsweise der Probenpunktkonfiguration abhängt, unrealistisch hoch.

Der globale Trend wird meist durch einen linearen Ansatz approximiert. Dieser erweist sich als sinnvoll, da Funktionen höherer Ordnung zu oszillieren beginnen und somit starke Abweichungen erzeugen. Der allgemeine lineare Funktionsansatz wird wie folgt definiert:

$$T(s_i) = \sum_{j=1}^k c_j \cdot f_j(s_i) \quad (5.50)$$

Die endgültige Wahl der Ansatzfunktion sowie der darin zu berücksichtigenden Anzahl der Stützstellen ist subjektiv und kann nur durch die eigene Beurteilung des Datensatzes erfolgen. Als hilfreich erweisen sich Erfahrungswerte im Umgang mit Trendpolynomen oder aufwendige Parameterstudien. Soll beispielsweise nach subjektiver Bewertung des Datensatzes der globale Trend in einem 2½D-Modell durch eine Ebene approximiert werden, so gilt für den ebenen Ansatz

$$T(s_i) = c_1 + c_2 \cdot x_i + c_3 \cdot y_i \quad (5.51)$$

Die Parameter x_i und y_i sind hier die Koordinaten des Ortes s_i . Mit Kenntnis des globalen Trends werden an allen Erkundungspunkten die Residuen neu bestimmt. Diese werden nun als nicht trendbehaftete Zufallsvariablen behandelt. Nach erfolgter geostatistischer Analyse wird dieser globale Trendanteil der Residuen dem Prognosewert wieder hinzugefügt.

Die Drift als lokaler Trend im Datenfeld wird innerhalb des Universal Krigings berücksichtigt, vergleiche Abschnitt 6.2.3. Für jeden Prognoseort wird die Trendkomponente neu bestimmt. Die Vorgehensweise ist identisch zum globalen Trend. Entsprechend der Anzahl der zu berücksichtigenden Stützstellen beim Kriging gibt es drei Möglichkeiten. Zum einen kann diese Anzahl so gewählt werden, dass genauso viele Gleichungen wie Unbekannte existieren. Hieraus resultiert ein Gleichungssystem mit eindeutiger Lösung, so dass die gewählten Stützpunkte innerhalb der Ansatzfunktion liegen.

Eine weitere Möglichkeit für die Bestimmung der Trendfläche besteht darin, mehr Stützstellen zu berücksichtigen als unbekannte Koeffizienten vorliegen. In diesem Fall ist kei-

ne eindeutige Lösung erreichbar. Um dennoch ein Ergebnis zu erhalten, wird das Gauß'sche Ausgleichsprinzip genutzt. Allgemein gilt:

$$T(s_i, c_1, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^J \left[\sum_{j=1}^k c_j \cdot f_j(s_i) - X(s_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^J r_i^2 \Rightarrow \min \quad (5.52)$$

Die dritte Möglichkeit besteht darin, weniger Stützstellen als unbekannte Koeffizienten in die Berechnung des Trendpolynoms einzubeziehen. Auch hier besitzen die oben angegebenen Gleichungen Gültigkeit. Die Varianzgleichungen bieten eine gute Lösungsmöglichkeit an. Im Ergebnis werden jedoch überzählige Monome abgespalten, indem Koeffizienten zu null werden. Die abgespaltenen Monome unterscheiden sich für jeden Prognoseort, so dass die Krigingresultate nur bedingt vergleichbar sind, siehe S 155 ff. Damit wird die Ansatzfunktion solange reduziert, bis eine eindeutige Lösung für sie existiert.

5.3.2. Globaler Trend und Drift bei unsicheren Kenngrößen

Für die Beurteilung des Einflusses unsicherer Kenngrößen sind zunächst folgende bereits abgeleitete Überlegungen vorzunehmen:

- Ist ein globaler Trend in einem Datenfeld enthalten, so nimmt die Varianz der Kenngrößen mit zunehmender Abstandsklasse zu, siehe Bild 34.
- Die resultierende Varianz σ_{Result}^2 ergibt sich aus der Summe der Kenngrößenunsicherheit σ_{Zufall}^2 und der Datensatzvarianz σ_{Daten}^2 (Gleichung (5.8))

Ist nun $\sigma_{\text{Zufall}} \ll \sigma_{\text{Daten}}$, so bleibt der globale Trend im Datenfeld erhalten. Ist hingegen $\sigma_{\text{Zufall}} \gg \sigma_{\text{Daten}}$, so verschwindet der globale Trend infolge der unsicheren Kenngrößen. Den nachfolgenden Resultaten vorgegriffen, sollte ein festgestellter globaler Trend im Datenfeld der Erwartungswerte eliminiert werden. Es wird damit die Wahrscheinlichkeit verringert, den globalen Trend mit einer Schwellenwertanisotropie zu verwechseln. Das kann insbesondere dann geschehen, wenn die Approximation der theoretischen Variogrammfunktion automatisiert erfolgt.

Für das Verhalten der Drift können derartige qualitative Ableitungen nicht gemacht werden. Ihre Schwankung ist um ein vielfaches höher mit der Unsicherheit der Kenngrößen verbunden. Detaillierte Untersuchungen wurden nicht durchgeführt.

5.4. Anisotropie

Anisotropie beschreibt die Richtungsabhängigkeit des räumlichen Zusammenhangs einer Zufallsvariable. Sie ist eindeutig bestimmbar, wenn sich ein Merkmal entlang der Vorzugsrichtung ausbreitet. Entgegen der häufig verwendeten Unterteilung in geometrische und zonale Anisotropie [44], [56], welche sich nur unvollständig beschreiben lässt, wird

die Klassifizierung in Schwellenwertanisotropie, Reichweitenanisotropie und Nuggeteffektanisotropie in Anlehnung an [102] gewählt. Die häufig betrachtete Art der Anisotropie ist dabei die richtungsabhängige Reichweite. Unter der Voraussetzung, dass Nuggeteffekt und Schwellenwert nicht richtungsabhängig sind, lassen sich die Reichweiten für zweidimensionale Werte beispielsweise in einem Rosendiagramm darstellen. Hat das Diagramm eine elliptische Form liegt eine Reichweitenanisotropie vor. Die Halbachsen der Ellipse sind die Anisotropierichtungen.

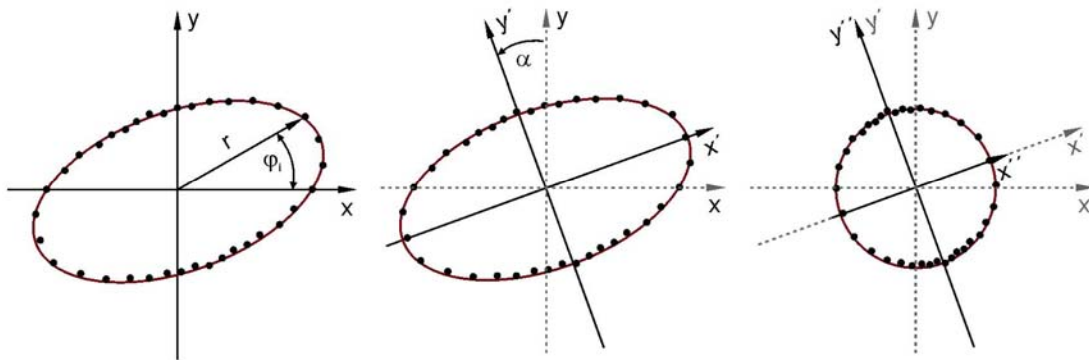


Bild 36: Zweidimensionale Darstellung der richtungsabhängigen Reichweiten für den anisotropen Zustand [links] und den isotropen Zustand [rechts]

Das Anisotropieverhalten des Datenfeldes unter Berücksichtigung unsicherer Baugrunderkenngrößen entspricht nicht dem Anisotropieverhalten des deterministischen Datenfeldes. Durch die Variation der Eingangskenngrößen ändern sich die experimentellen Variogrammwerte und im geringen Maß die Anzahl der Wertepaare je Abstandsklasse. Letzteres ist wie bereits erwähnt vernachlässigbar. Vorweggenommen sei, dass die Veränderung des Anisotropieverhaltens vom Verhältnis der unsicheren Eingangskenngrößen zur Varianz des Datenfeldes abhängt.

5.4.1. Reichweitenanisotropie

Deterministische Betrachtungsweise

Bei der Reichweitenanisotropie werden in unterschiedlichen Richtungen auch verschiedene Reichweiten ermittelt. Sind Schwellenwert und Nuggetwert nicht richtungsabhängig, d.h. für alle Variogramme in den entsprechenden Richtungen konstant, kann das Variogramm beispielhaft folgendermaßen beschrieben werden:

$$\gamma_1(h) = a_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{b_1}\right) \right], \quad \gamma_2(h) = a_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{b_2}\right) \right], \quad \dots, \quad \gamma_i(h) = a_i \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{b_i}\right) \right] \quad (5.53)$$

Die b_1, b_2, \dots, b_n sind die entsprechenden Reichweiten. Liegt eine Reichweitenanisotropie vor, kann diese in den isotropen Raum durch Komprimierungsfaktoren auf der Basis der Anisotropieverhältnisse, siehe S. 94 ff., überführt werden. Alternativ ist in [91] und [102] eine Variogrammfunktion für den zweidimensionalen Raum angegeben, die die Reichweitenanisotropie in einer Funktion darstellt.

Betrachtungsweise mit unsicheren Kenngrößen

Im exponentiellen, im Gauß'schen sowie im sphärischen Modell kennzeichnet der Parameter b die Reichweite in der gewählten Richtung im Datenfeld. Die Richtung mit der maximalen Reichweite, $b \rightarrow \text{Maximum}$, wird hier als Hauptanisotropierichtung definiert. Im zweidimensionalen kartesischen System ergibt sich orthogonal zu dieser eine Reichweite, die kleiner ist als die der Hauptanisotropierichtung. Es handelt sich aber nicht zwingend um die Richtung mit der minimalen Reichweite. Im dreidimensionalen kartesischen Fall würde nach der Bestimmung der Raumrichtung mit der maximalen Reichweite in der orthogonalen Ebene die minimale Reichweite der Ebene mit dem zugehörigen Richtungswinkel gesucht. Die verbleibende dritte Richtung ergibt sich aus geometrischen Betrachtungen. Im Fall einer idealen Reichweitenanisotropie würden die drei Richtungen die Halbachsen eines Ellipsoids beschreiben.

Für alle Datensätze wurde das Verhalten der Hauptanisotropierichtung und der zugehörigen Reichweite untersucht. Die Resultate für den Datensatz Zufallsdaten sind beispielhaft im Bild 37 dargestellt.

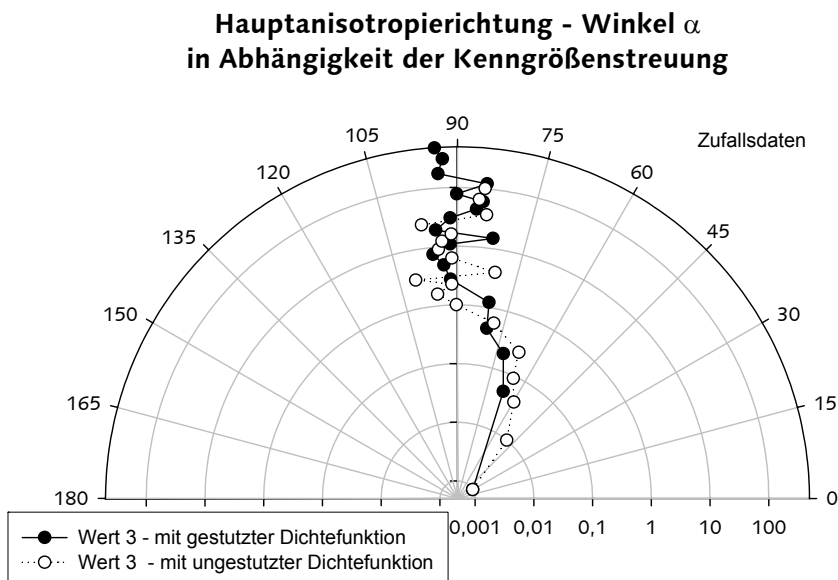


Bild 37: Winkel der Hauptanisotropierichtung in Abhängigkeit von σ_{Ratio} für den Datensatz Zufallsdaten

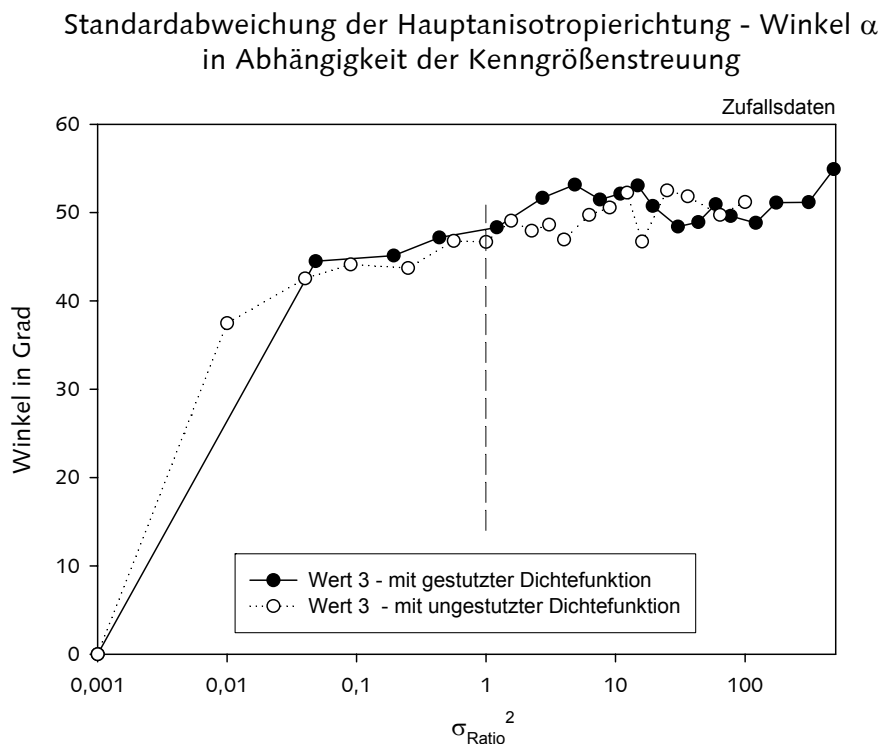


Bild 38: Standardabweichung des Winkels der Hauptanisotropierichtung zu Bild 37

Ab einem Varianzenverhältnis $\sigma_{\text{Ratio}}=1,0$ beträgt die Standardabweichung des Winkels α näherungsweise 45 Grad. Ab diesem Varianzenverhältnis schwankt die ermittelte Anisotropierichtung in der Ebene stets zwischen 0 und 180 Grad mit dem Mittelwert 90 Grad. Der Winkel der Hauptanisotropierichtung ist dabei gleichverteilt.

Wie beispielhaft am Datensatz ArternOK_Schicht für das exponentielle Modell gezeigt wurde, siehe Bild 28 und Bild 32, ist die Reichweite ab $\sigma_{\text{Ratio,Grenz}}^2$ in jede Richtung quasi konstant.

Die Reichweitenanisotropie unter Berücksichtigung unsicherer Kenngrößen verschwindet nicht, siehe Bild 40. Der mit zunehmender Kenngrößenunsicherheit angestrebte Schwellenwert ist ein Merkmal des Datenfeldes.

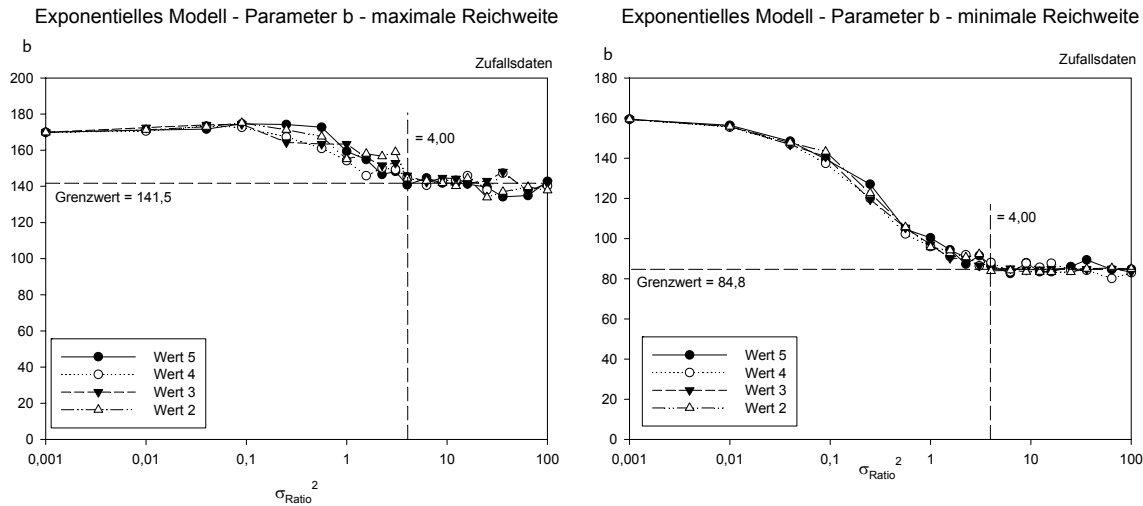


Bild 39: Richtungsabhängige Reichweite für den Datensatz Zufallsdaten für die Hauptanisotropierichtung und der zugehörigen orthogonalen Richtung

Anisotropieverhältnis für exponentielles Modell

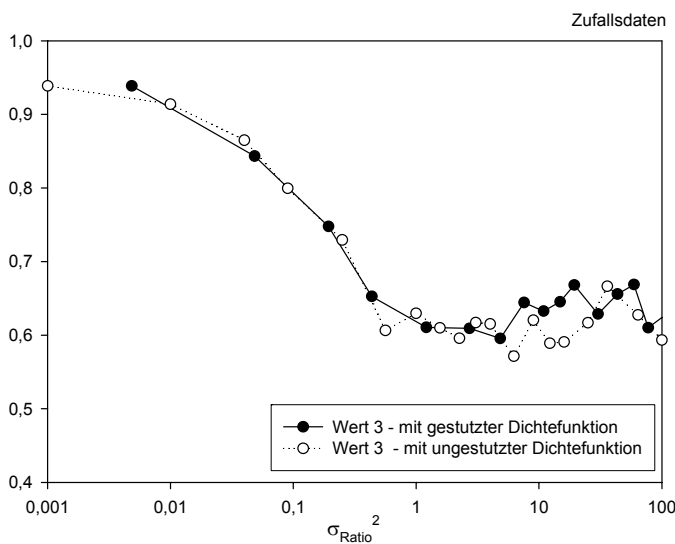


Bild 40: Anisotropieverhältnis ermittelt aus Quotient aus der Reichweite der Hauptanisotropierichtung und der zugehörigen orthogonalen Richtung aus Bild 39

Die Anisotropie wird durch die Kenngrößenunsicherheit verstärkt, das Anisotropieverhältnis nimmt ab. Der Schwellenwert ist stets richtungsabhängig. Er wird des Weiteren beeinflusst durch die Diskretisierung der geostatistischen Untersuchung sowie der Anordnung der Punkte im Datenfeld.

5.4.2. Schwellenwertanisotropie

Bei der Schwellenwertanisotropie zeigt das experimentelle Variogramm in verschiedenen Raumrichtungen signifikant unterschiedliche Schwellenwerte. Eine solche Konstellation ergibt sich beispielsweise wenn im Untersuchungsgebiet in einer Richtung ausgeprägte

Eigenschaftsänderungen des Baugrundes vorkommen, die das Gebiet zonieren und somit richtungsabhängige Varianzunterschiede verursachen. Sie kann meist durch die Verknüpfung von zwei oder mehreren theoretischen Variogrammen, so genannter verschachtelter Variogramme, beschrieben werden [56]. Daraufhin kann mit einfachen Transformationen des Koordinatensystems nicht gearbeitet werden, weil die richtungsabhängigen Modellfunktionen nicht ineinander zu überführen sind. Sei beispielsweise der Schwellenwert in einer Raumrichtung wesentlich größer als in den anderen, so kann zunächst eine isotrope Variogrammfunktion an das experimentelle Variogramm in der Raumrichtung mit den vermeintlich kleinsten Schwellenwert angepasst werden. Dann addiert man eine geometrisch anisotrope Funktion, die so gewählt ist, dass sie nur in der gewünschten verbleibenden Raumrichtung einen Effekt hat, d.h. es werden sehr große Anisotropieverhältnisse unterstellt, indem die Funktion mit einer großen Reichweite versehen wird. Das zugrunde liegende Zufallsfunktionenmodell kann sich beispielsweise aus zwei unkorrelierten Prozessen $X_1(s_i)$ und $X_2(s_i)$ in der Form $X(s_i) = X_1(s_i) + X_2(s_i)$ zusammensetzen. Sind diese stationär, gilt der Zusammenhang für eine beliebige Schrittweite h nach [15]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_X(\alpha h) = \text{Cov}[X(h=0)] - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{Cov}[X(\alpha h)] \quad (5.54)$$

mit

$$\gamma_X(\alpha h) = \frac{1}{2N} \cdot \sum_{j=1}^N [x(i) - x(i + \alpha h)]^2 \quad (5.55)$$

Zum besseren Verständnis wird der Übergang zwischen der Variogramm- und Kovarianzschreibweise aufgezeigt.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X(h=0)] - \text{Cov}[X(\alpha h)] &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N [x(i)]^2 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N x(i) \cdot x(i + \alpha h) \\ &= \frac{1}{2N} \cdot \left\{ 2 \sum_{j=1}^N [x(i)]^2 - 2 \sum_{j=1}^N x(i) \cdot x(i + \alpha h) \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^N [x(i)]^2 - 2 \sum_{j=1}^N x(i) \cdot x(i + \alpha h) + \sum_{j=1}^N [x(i + \alpha h)]^2 \right\} \\ \text{da } \sum_{j=1}^N [x(i)]^2 &= \sum_{j=1}^N [x(i + \alpha h)]^2 \\ &= \frac{1}{2N} \cdot \sum_{j=1}^N [x(i) - x(i + \alpha h)]^2 \\ \text{Cov}[X(\alpha h)] &= E \left[\left(x(i) - \underbrace{E[x(i)]}_{=0} \right) \cdot \left(x(i + \alpha h) - \underbrace{E[x(i + \alpha h)]}_{=0} \right) \right] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N x(i) \cdot x(i + \alpha h) \quad (5.56) \end{aligned}$$

Der Erwartungswert von $x(i)$ ist nach der Trendbereinigung gleich null.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X(h=0)] &= E \left[\left(x(i) - \underbrace{E[x(i)]}_{=0} \right) \cdot \left(x(i+\alpha h) - \underbrace{E[x(i+\alpha h)]}_{=0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N x(i) \cdot x(i+\alpha h) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N [x(i)]^2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Als weitere Ursache für verschiedene Schwellenwerte gelten die Annahmen nach [102]:

1. Ein stationäres Modell zweiter Ordnung ist zugewiesen, aber die räumliche Korrelation verschwindet nicht ($\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{Cov}[Z(\alpha h)] \neq 0$).
2. Das zugewiesene Modell ist nicht passend.

Annahme 2 ist wahrscheinlicher als Annahme 1, besonders dann, wenn das Untersuchungsgebiet groß gegenüber der zu erwartenden Reichweite ist. Als Beweis gegen eine Stationarität zweiter Ordnung können Daten aus einem großen Untersuchungsgebiet mit unterschiedlichen Schwellenwerten stehen. Das gleiche gilt für experimentelle Variogramme, die keinen Schwellenwert besitzen, siehe [44]. In [102] werden beispielhafte Prozesse mit unterschiedlichen Schwellenwerten in unterschiedlichen Richtungen dazu vorgestellt.

Eine Ursache für richtungsabhängige Schwellenwerte besteht im Nichtverschwinden der Korrelation in einer Richtung. In diesem Fall ist die oben erwähnte Deutung der Reichweite als Abstand zwischen zwei Werten ab dem keine Korrelation mehr existiert, nicht korrekt, insbesondere bei einer asymptotischen Annäherung. Dieses Problem wird in [15] diskutiert. Dieses Nichtverschwinden der Korrelation über große Abstände kann die Aussagekraft des Semivariogramms beeinträchtigen.

Betrachtungsweise mit unsicheren Kenngrößen

Im exponentiellen, im Gauß'schen sowie im sphärischen Modell kennzeichnet der Parameter a den Schwellenwert, der die Varianz des Datenfeldes in der gewählten Richtung repräsentiert. Der Schwellenwert ist direkt abhängig von der Datenvarianz der Eingangskenngrößen. Er darf nur im Zusammenhang mit der Varianz des Datenfeldes σ_{Result} angegeben werden. Mit zunehmender Varianz der Eingangskenngrößen nimmt die Varianz des Datenfeldes linear zu, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben. Der Anstieg der Geraden ist dabei stets im Verhältnis zur berücksichtigten Datenvarianz kleiner eins.

In Bezug zu σ_{Ratio} können unter Anisotropie Anstiege des Schwellenwertes größer eins auftreten, da diese Parameter sich auf die Varianz einer Teilmenge der Datengesamtheit bezieht. Bei anisotroper Betrachtungsweise existiert in jeder orthogonalen Richtung ein

voneinander abweichender Schwellenwert, siehe Bild 41, obwohl für $\sigma_{\text{Zufall}}=0$ die Schwellenwerte $a_{\text{deterministisch}}$ annähernd identisch sind.

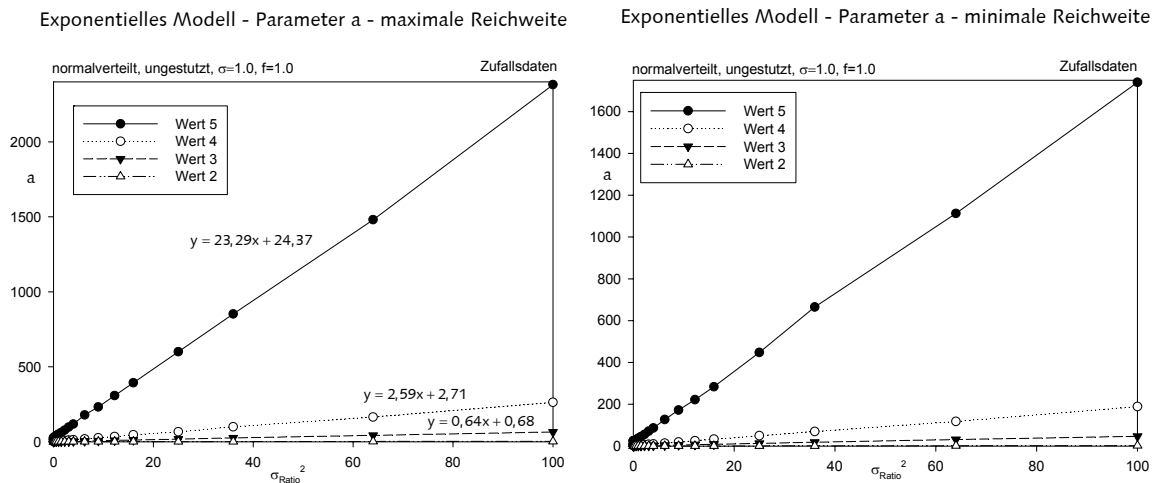


Bild 41: Gegenüberstellung des Schwellenwertes der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)

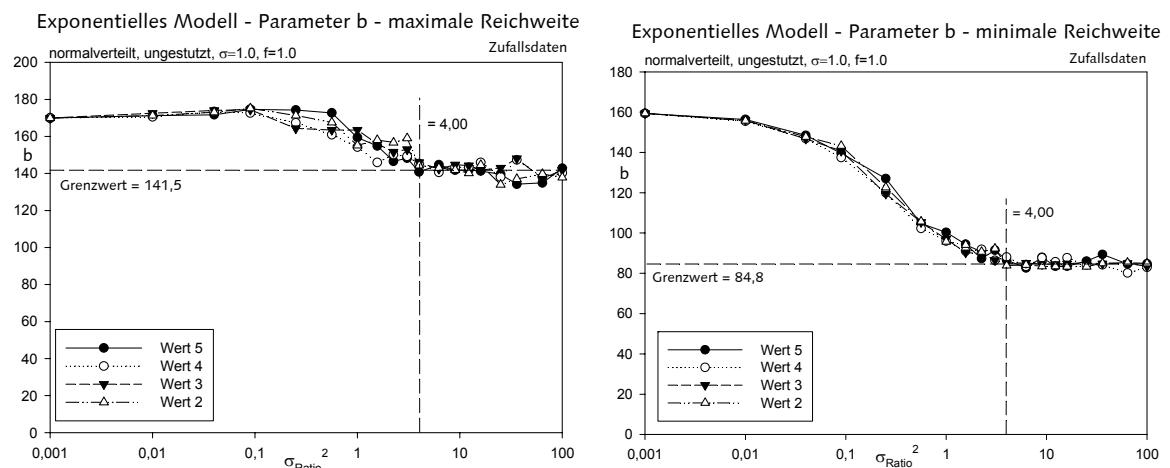


Bild 42: Gegenüberstellung der Reichweite der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)

In Anlehnung an das Auswertungsschema S. 70 ff. für den Schwellenwert ergibt sich

	Wert 3	Wert 4	Wert 5	Wert6	E[m]
m_s (max RW)	1,752	1,725	1,745	1,744	1,742
m_s (min RW)	1,213	1,240	1,240	1,282	1,244

Das Verhältnis der Schwellenwerte ist nicht notwendig konstant, da die zugrunde liegende Teilmenge abhängig von der unsicheren Hauptanisotropierichtung ist, siehe Bild 37.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sigma_{\text{Result},1}^2}{\sigma_{\text{Result},2}^2} = \frac{\sigma_{\text{Daten},1}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2}{\sigma_{\text{Daten},2}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{Daten},i}^2 \neq \sigma_{\text{Daten}}^2 \quad (5.58)$$

Äquivalente Resultate können für den Referenzdatensatz ArternOK_Schicht gezeigt werden,

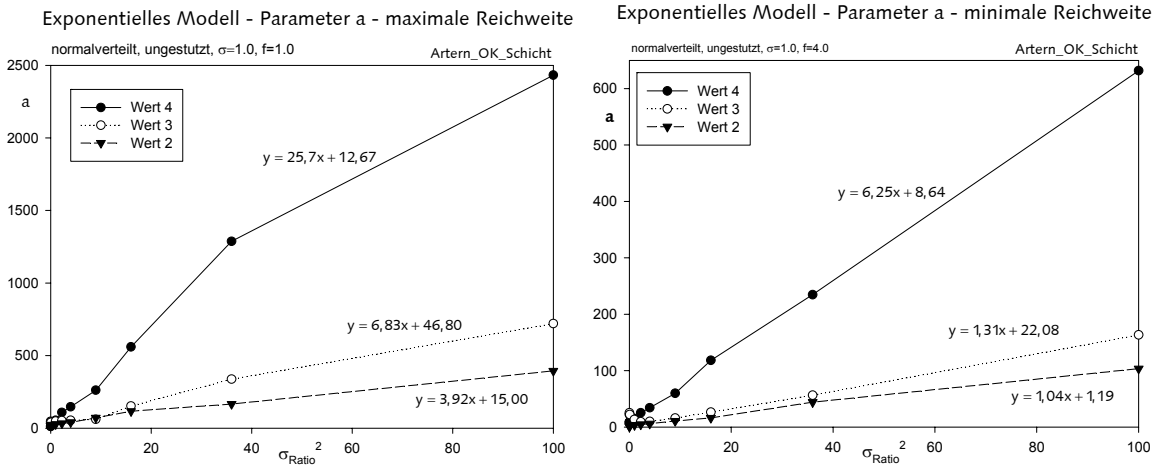


Bild 43: Gegenüberstellung des Schwellenwertes der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)

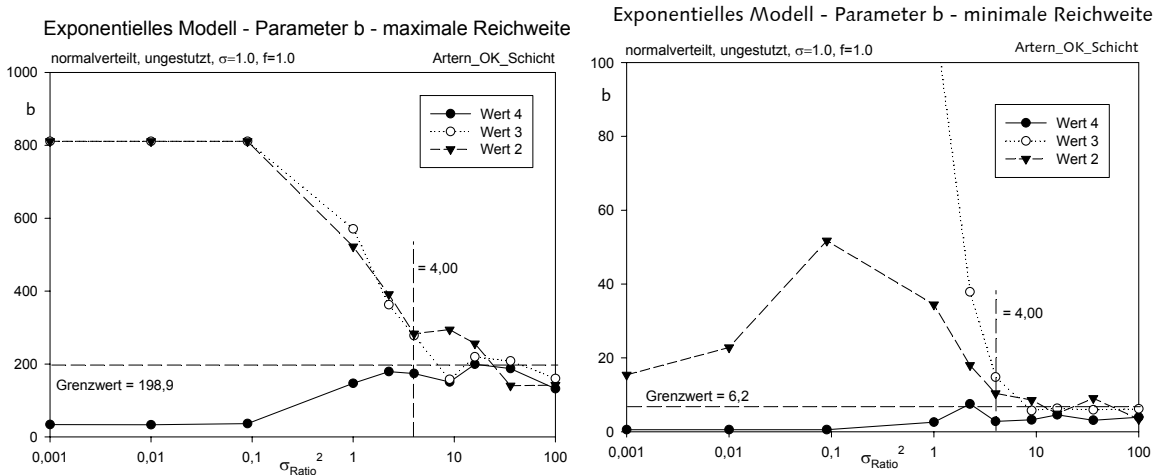


Bild 44: Gegenüberstellung der Reichweite der Hauptanisotropierichtung (links) und der zugehörigen orthogonalen Richtung (rechts)

In Anlehnung an das Auswertungsschema S. 70 ff. für den Schwellenwert ergibt sich

	Wert 2	Wert 3	Wert 4	E[m]
m_s (max RW)	2,779	3,284	2,757	2,940
m_s (min RW)	0,737	0,630	0,671	0,679

Im Unterschied zur isotropen Betrachtungsweise unterscheiden sich die Anstiegsparameter m_s in den Hauptanisotropierichtungen beider Datensätze, sowie die Reichweiten nach $\sigma_{Ratio, Grenz}^2 = 4,0$, siehe Gleichung (5.45). Während für sichere Baugrundkenngößen nur ArternOK_Schicht eine Schwellenwertanisotropie zeigt, ergeben die Auswertungen für unsichere Kenngrößen, dass in beiden Datensätzen eine kombinierte Schwellenwert- und Reichweitenanisotropie vorzufinden ist.

Durch das Bildungsgesetz des dreidimensionalen Datensatzes 3, vergleiche Bild 45, wurde eine Hauptanisotropierichtung und eine reine Schwellenwertanisotropie subjektiv vorgegeben. Die Reichweite ist in den orthogonalen Halbraumrichtungen identisch.

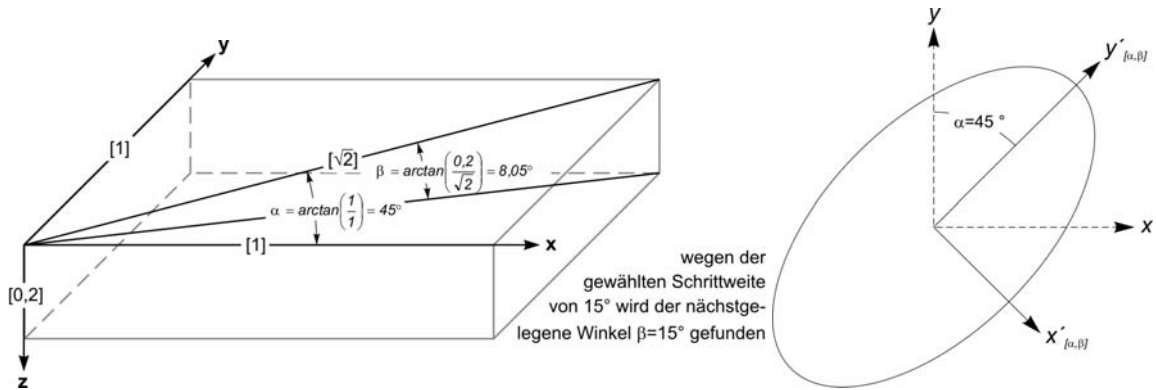


Bild 45: Anisotropierichtung des konstruierten Zufallfeldes (links) und Anisotropieellipsoid der deterministischen Eingangsgrößen in der Aufsicht – Exponentielle Regression (rechts)

Die Auswertung wurde für sichere Lagekoordinaten in Tabelle 5 gezeigt. Die Variogrammanalysen mit geringer Relativstreuung σ_{Ratio} zeigen annähernd die gleichen Ergebnisse wie die Analysen mit deterministischen Eingangsgrößen. Mit zunehmender Kenngrößenvarianz gleichen sich die Reichweiten des Anisotropieellipsoids an.

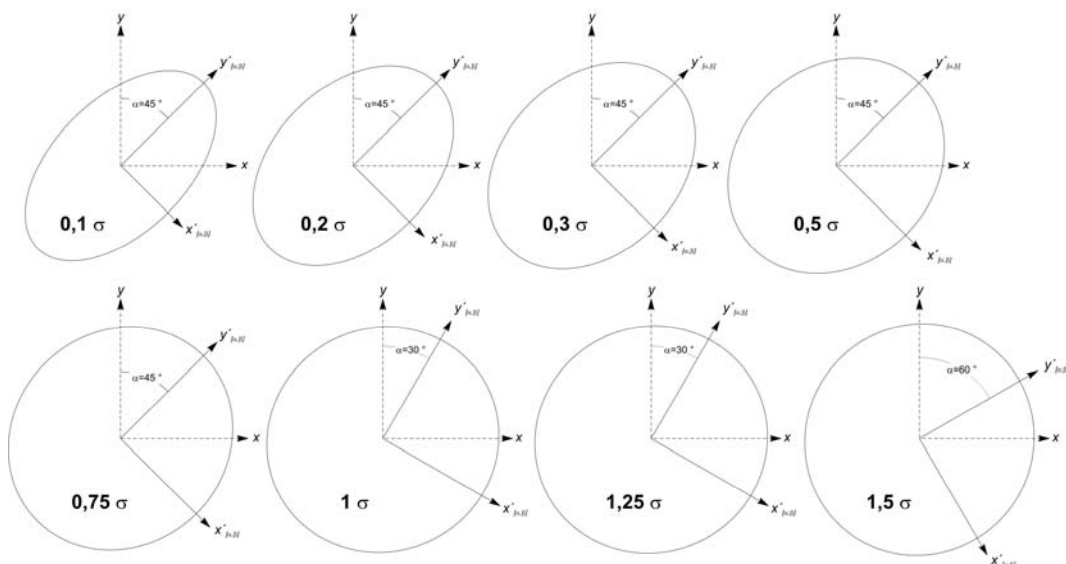


Bild 46: Visualisierung des Einflusses unsicherer Kenngrößen (kreisförmig = isotrop) in der Aufsicht

Der Komprimierungsfaktor in Richtung der minimalen Reichweite nähert sich dem Betrag eins, und das anisotrope Zufallfeld geht somit in ein isotropes Zufallfeld über, siehe Bild 46. Die erzeugte Schwellenwertanisotropie konnte nachgebildet werden.

Es bleibt zu bemerken, dass ein als isotrop erscheinendes Datenfeld auch ein anisotropes Datenfeld mit hoher Kenngrößenunsicherheit sein kann. Mit Gleichung (5.58) gilt

$$\sigma_{\text{Zufall}}^2 \gg \sigma_{\text{Daten},1}^2, \sigma_{\text{Daten},2}^2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \approx 1 \quad (5.59)$$

5.4.3. Nuggeteffektanisotropie

Liegt in verschiedenen Richtungen ein unterschiedlicher Nuggeteffekt vor, lässt sich dieser als

$$\gamma_1(0) \neq \gamma_2(0) \neq \gamma_3(0)$$

beschreiben. Der Nuggetwert selbst setzt sich zusammen aus dem Nuggeteffekt des Punktprozesses sowie der Varianz des weißen Rauschens, der Bestimmungsunsicherheit. Detaillierte Beschreibungen können [102] entnommen werden.

Ist das Modell für einen Punktprozess $X(s)$ geeignet, dann ist der Nuggeteffekt dem räumlichen Prozess und nicht den Messunsicherheiten zuzuschreiben. Als zweite Möglichkeit für das Auftreten von richtungsabhängigen Nuggeteffekten nennt [102] die nicht exakte Beschreibung der Messunsicherheit mittels weißen Rauschens. Die hier auftretenden Nuggeteffektanisotropien haben die gleiche Ursache wie die Schwellenwertanisotropien infolge korrelierender Messunsicherheiten.

Betrachtungsweise mit unsicheren Kenngrößen

Die Nuggeteffektanisotropie wurde im Rahmen der Untersuchungen, bedingt durch die Einschränkungen von GeoStat nicht betrachtet.

5.5. Beurteilungsmöglichkeiten zur [An]isotropie

Die Schranke zwischen dem isotropem und anisotropem Zustand ist nicht objektiv definiert. Sie richtet sich nach der vorherrschenden Anisotropieart. Da eine vollständige Isotropie in der Geostatistik stets ausgeschlossen werden kann, ist der Zahlenwert der Schranke meist subjektiv bestimmt.

Liegt eine Anisotropie im Datenfeld vor, so ist es insbesondere für die spätere Modellbildung wesentlich diese auch zu erkennen. Für deterministische Kenngrößen konnte lediglich der Test nach BACZKOWSKI als explizite Methode herausgearbeitet werden. Für unsichere Kenngrößen werden Vorschläge unter Nutzung von GeoStat angegeben.

5.5.1. Test nach Baczkowski [1]

Dieser Test auf Isotropie beruht auf einem experimentellen Variogramm, das in verschiedene Richtungen berechnet wird. Die Beobachtungspunkte liegen auf einem regulären Gitter und der Prozess ist intrinsisch stationär. Das experimentelle Variogramm $\gamma^*(h,k)$ berechnet sich zu:

$$\gamma^*(h,k) = \frac{1}{2(m-h) \cdot (n-k)} \cdot \sum_{x=1}^{m-h} \sum_{y=1}^{n-k} [z(x+h,y+k) - z(x,y)]^2 \quad (5.60)$$

Hierbei sind beispielhaft für eine zweidimensionale Betrachtungsweise $z(x,y)$ die Datenpunkte auf dem orthogonalen Gitter. Die Testgröße errechnet sich folgendermaßen:

$$U_h = \log \left(\frac{\gamma^*(h,0)}{\gamma^*(0,h)} \right) \quad (5.61)$$

Dabei ist (x,y) eine zufällig auf dem Gitter gewählte Position. Anschließend ist eine neue Position (x',y') aus der Menge $\{(x+h,y), (x-h,y), (x,y+h), (x,y-h)\}$ zu wählen. Jede Position aus dieser Menge, die innerhalb des gegebenen Gitters liegt wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt. Man setzt $(x,y) = (x',y')$ und wiederholt den vorherigen Schritt.

Es ergibt sich nach o. g. Gleichung:

$$\gamma^*(h,0) = \frac{1}{[2n(m-h)]} \cdot \sum \{z(x,y) - z(x',y')\}^2 \quad (5.62)$$

Für die andere Richtung wird analog vorgegangen:

$$\gamma^*(0,h) = \frac{1}{[2m(n-h)]} \cdot \sum \{z(x,y) - z(x',y')\}^2 \quad (5.63)$$

Falls der Prozess isotrop ist, liegen beide Schätzwerte nahe beieinander. Unter der Hypothese der Isotropie hat die Testgröße U_h einen Erwartungswert von Null. Starke Abweichungen von Null deuten auf Anisotropie hin [11]. Das Anisotropieverhältnis in der Ebene gibt das Verhältnis der Reichweiten zueinander an.

5.5.2. Test auf Reichweitenanisotropie in GeoStat

Neben dem Vergleich der experimentellen Variogrammwerte in senkrecht aufeinander stehenden Richtungen kann eine Reichweitenanisotropie durch das Verhältnis der Reichweiten der theoretischen Richtungsvariogramme bestimmt werden. Im Programm GeoStat ist es möglich senkrecht aufeinander stehende Richtungsvariogramme für beliebige Schrittweiten zu berechnen. Die Hauptanisotropierichtung wird mit der Richtung maximaler Reichweite gleichgesetzt. In der orthogonal verlaufenden Ebene wird das theoretische Variogramm mit minimaler Reichweite bestimmt. Die dritte Richtung steht orthogonal auf den vorangegangenen Raumrichtungen. In dieser wird die dazwischenliegende Reichweite bestimmt.

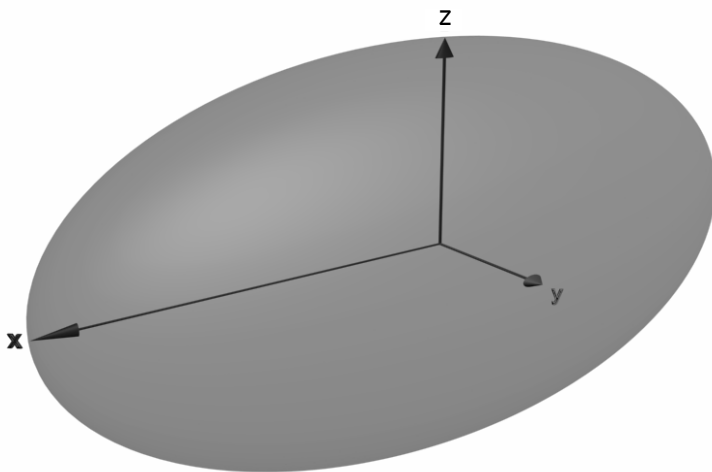


Bild 47: Reichweitenanisotropie im Halbraum (x-Richtung maximaler Reichweite, y-Richtung minimaler Reichweite, z-dritte orthogonale Richtung)

Die Reichweitenfaktoren δ_i bilden das Anisotropieverhältnis ab. Entsprechend vordefinierter normierter Verhältnisse kann Isotropie oder Anisotropie zugeordnet werden.

Mit der Notation in Bild 47 gilt

$$\delta_1 = \frac{\text{Reichweite in x - Richtung}}{\text{Reichweite in x - Richtung}} \quad \delta_2 = \frac{\text{Reichweite in y - Richtung}}{\text{Reichweite in x - Richtung}} \quad \delta_3 = \frac{\text{Reichweite in z - Richtung}}{\text{Reichweite in x - Richtung}}$$

Es ist also subjektiv, ab welchen Verhältnissen der Bearbeiter Anisotropie oder Isotropie dem Datenfeld unterstellt. Es ist ferner darauf hinzuweisen, dass die Richtung maximaler Reichweite von der Größe des Suchsegmentes und der damit jeweils berücksichtigten Datenpaaranzahl zusammenhängt.

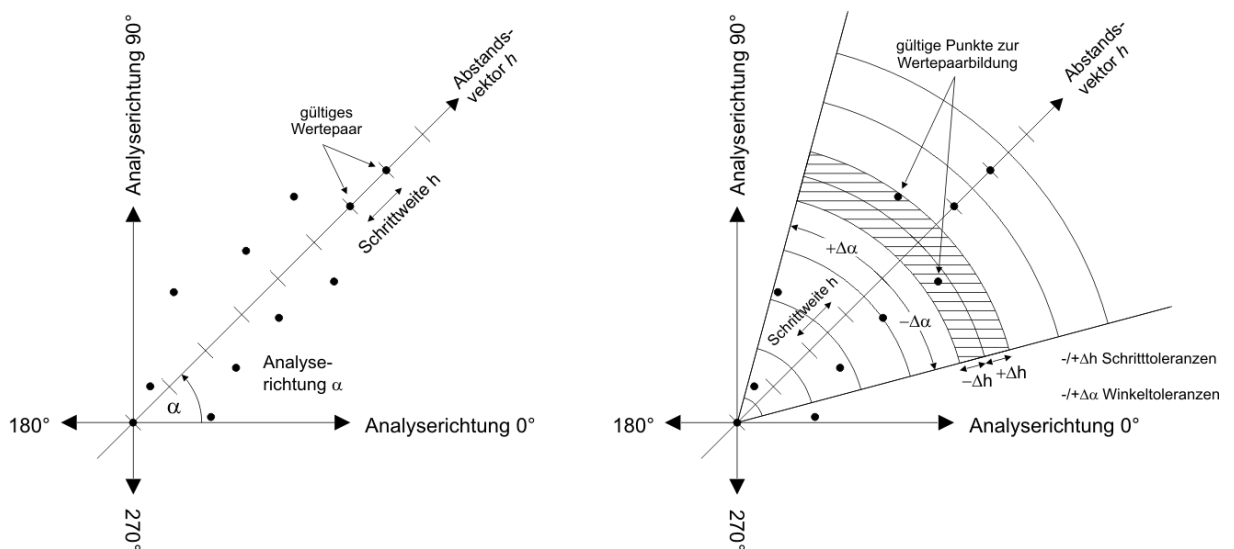


Bild 48: Datenpaarbildung beim Test auf Reichweitenanisotropie

Mit Hilfe der Komprimierungsfaktoren δ_i kann dieser anisotrope Zustand in einen isotropen Zustand, wie in Anlage S. 184 ff. aufgezeigt, überführt werden.

Unter Voraussetzung kartesischer Koordinaten ist in der Ebene nur eine Aussage über die maximale Reichweite und der zugehörigen minimalen Reichweite möglich. Die zugehörige minimale Reichweite muss aber nicht die kleinste sein.

Es ist weiterhin zu beachten, dass bei Reichweitenanisotropie das Komprimierungsverhältnis mit zunehmender Datenunsicherheit ab $\sigma^2_{\text{Ratio}}=4,0$ konstant und kleiner eins bleibt, siehe Bild 40. Die Anisotropie verschwindet nicht. Für jeden hier genutzten Datensatz außer Datensatz 3 war dieses Verhalten zu erkennen. Dies ist nicht zu verwechseln mit dem Eintreten konstanter Reichweiten für den isotropen Betrachtungsfall, siehe Bild 27 und Bild 28. Der Unterschied zwischen isotropen und anisotropen Zustand ist stets durch die Kombination des Reichweitenverhältnisses mit der Datenunsicherheit geprägt. Verschwindet die Anisotropie mit zunehmender Datenunsicherheit σ^2_{Ratio} , kann davon ausgegangen werden, dass die Reichweitenanisotropie von einer Schwellenwertanisotropie überlagert wird.

6. Kriging mit unsicheren Kenngrößen

6.1. Allgemein

Das Kriging ist die beste lineare unverzerrte Prognose für Schätzungen im unbeprobten Bereich. Es beschreibt die räumlichen Zusammenhänge und die räumliche Verteilung der Grundgesamtheit.

Mit linearen Interpolationsverfahren wird ein diskreter Wert im unbeprobten Bereich einer Grundgesamtheit auf der Basis eines gewichteten Mittels der benachbarten Kenngrößen bestimmt. Entgegen nicht statistischen Interpolationsverfahren wird beim Kriging die diskrete Kenngröße so geschätzt, dass der Erwartungswert der Prognoseunsicherheit null und die Varianz der Prognoseunsicherheit ein Minimum wird. Auf diese Art werden systematische Unsicherheiten ausgeschlossen, da zusätzlich zur Varianzminimierung die Summe der einzelnen Gewichte eins sein muss. Das gilt nicht für das Simple Kriging. Ohne näher auf die Durchführung des Verfahrens an dieser Stelle einzugehen, werden nachfolgend Interaktionsbeziehungen zwischen den Kennwerten des Variogramms und dem Algorithmus des Krigings dargestellt.

Die Schätzung mittels Kriging weist dabei die folgenden Merkmale auf

- Die Schätzung ist unverzerrt (Mittelwert der Schätzwerte = Mittelwert der Messwerte).
- Die Schätzung ist exakt (an Stützpunkten ist die Schätzvarianz, Krigingvarianz gleich null).
- Die Schätzung ist geglättet.
- Die Schätzvarianzen sind unabhängig von den Messwerten.
- Die Schätzwerte sind untereinander unabhängig.
- Geclusterte Messwerte/redundante Daten können berücksichtigt werden.

Sollten die Anforderungen an die Stationarität des Datenfeldes verletzt sein, können so genannte Hybridverfahren [81] eingesetzt werden, so dass bedingt nicht-stationäre Prozesse mit geostatistischen Verfahren analysiert werden können. Zu diesen gehören das Kriging mit globalem Trend, das Kriging mit variierenden Mittelwerten sowie in Ansätzen das Universal Kriging [30].

Jede Form des Krigings beruht auf dem gewählten theoretischen Variogramm auf dessen Grundlage die Wichtungsfaktoren λ_i errechnet werden. Unterscheiden sich zwei Variogramme durch ihren Schwellenwert, so hat dies nur einen geringen Einfluss auf das Schätzergebnis. Die Krigingvarianz, vergleiche Abschnitt 6.3, steigt mit zunehmendem Schwellenwert an. Unterscheiden sich zwei Variogramme durch ihre Reichweite, so hat dies sowohl einen Einfluss auf das Schätzergebnis als auch auf die Krigingvarianz. Ist die Reichweite sehr klein, so sind die betrachteten Werte quasi unabhängig voneinander.

Der Krigingschätzer nähert sich dem arithmetischen Mittelwert der Schätznachbarschaft. Je größer die Aussageweite wird, desto kleiner wird die Krigingvarianz. Die Werte liegen im statistischen Abstand näher beieinander. Als Schätznachbarschaft werden die Kenngrößen der Datengesamtheit zusammengefasst, die zur Bestimmung des Schätzers an unbeprobten Orten des Untersuchungsgebietes einbezogen werden.

Durch Variogramme mit parabolischem Verhalten am Ursprung werden räumliche Zusammenhänge modelliert, die im kleinen Bereich stark ausgeprägt sind.

Für die Modellierung von Homogenbereichen erweist es sich partiell als vorteilhaft, die zu modellierende Kenngröße zu verändern, indem diese mit einem konstanten Faktor multipliziert wird oder ein konstanter Summand addiert wird [74]. Die faktorielle Erweiterung von Baugrundkenngößen wird beispielsweise für Regionen mit geringen Kenngrößenschwankungen favorisiert, um die Rechenungenauigkeiten zu erhöhen und die Rundungsunsicherheiten zu minimieren. Für den Krigingschätzer gilt dann.

$$\hat{z}_\varepsilon(s_o) = \hat{z}(s_o) \cdot \varepsilon \quad (6.1)$$

Die Schätzung im „verzerrten“ Datenfeld ist eine Linearkombination aus der Schätzung im „unverzerrten“ Datenfeld und dem konstanten Faktor.

Die summarische Erweiterung der Baugrundkenngößen wird insbesondere dann angewendet, wenn durch die Kenngrößenvarianz infolge von Unsicherheiten Werte kleiner null simuliert werden können. Innerhalb statistischer Auswertungen können diese zu ungewollten Vorzeichenwechseln führen.

$$\hat{z}_\varepsilon(s_o) = \hat{z}(s_o) + \varepsilon \quad (6.2)$$

Auch hier ist die Schätzung im „verzerrten“ Datenfeld eine Linearkombination aus der Schätzung im „unverzerrten“ Datenfeld und dem Verschiebungsbetrag ε .

Neben der Anpassung der Datengesamtheit im Vorfeld des Krigings beschreiben diese Zusammenhänge auch die Auswirkung systematischer Unsicherheiten auf das geologische Modell.

Kriging gehört zu den exakten Interpolationsmethoden, d.h. die Schätzung erzeugt an allen in die Schätzung einbezogenen Stützstellen den dort wirklich erhobenen Datenwert. Diese Tatsache basiert auf der nachfolgend beschriebenen Minimierung der Schätzvarianz. Damit kommt Kriging besonders für Datensätze in Frage, bei denen die Daten nur geringe Unsicherheiten aufweisen. Ebenso gut eignet sich diese Methode für die Beschreibung von sich sprunghaft ändernden Phänomenen.

Die Unsicherheit der Kenngrößen wird durch unsichere theoretische Variogrammparameter repräsentiert. Die Abhängigkeiten wurden in Kapitel 5 aufgezeigt. Im GeoStat Modul – isotropes und anisotropes Kriging – werden die unsicheren theoretischen Vario-

grammparameter als Ausgangswerte für das Kriging genutzt. Zusätzlich wird die Unsicherheit der Baugrundkenngrößen erneut berücksichtigt. Die Unsicherheitsfortpflanzung bis hin zum Krigingschätzer und der Krigingvarianz wird durch numerische Simulation untersucht.

6.2. Kriging Methoden

Das Kriging repräsentiert eine lineare Prognose. Hinsichtlich des Einsatzgebietes und der Art des zu interpolierenden Kennwertes werden verschiedene Krigingmethoden unterschieden, die einzeln oder kombiniert eingesetzt werden können. Allgemein gilt

$$\hat{z}(s_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot z(s_i) \quad (6.3)$$

Das Ziel ist die Schätzung des unbeprobten Bereiches zwischen bekannten, gewöhnlich benachbarten Stützstellen. Spiegeln die Schätzungen die vorliegenden Baugrundkenngrößen optimal wieder, so entspricht der Mittelwert der Schätzer dem Mittelwert der Datengesamtheit. Ein guter Schätzer zeichnet sich durch Unverzerrtheit und eine minimale Schätzvarianz aus. Diese Eigenschaften führen zum blue (best linear unbiased estimator) und zum mathematischen Problem der Optimierung.

$$\begin{aligned} E[\hat{z}(s_i) - z(s_i)] &= 0 \\ \text{Var}[\hat{z}(s_i) - z(s_i)] &\rightarrow \text{Minimum} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Gemäß den Stationaritätsannahmen, welche nötig sind um das stochastische Modell der regionalisierten Variable anzuwenden, setzt sich die Zufallsvariable aus einer Ortskomponente, dem globalen Trendanteil sowie einem Prozess des Rauschens zusammen, Gleichung (5.49). Die Ortskomponente repräsentiert ein stationäres Zufallsfeld mit einem Mittelwert $\mu(s_i)$. Die Trendkomponente und der Unsicherheitsterm $\varepsilon(s_i)$ haben den Erwartungswert null. Es gilt

$$E[Z(s_i)] = E[R(s_i)] = \mu(s_i), \quad E[T(s_i)] = 0 \quad \text{und} \quad E[\varepsilon(s_i)] = 0 \quad (6.5)$$

Im Sinne des zeitdiskreten stochastischen Modells werden die Datenwerte $z(s_i)$ als Realisationen der regionalisierten Variablen $Z(s_i)$ und der Schätzer $\hat{z}(s_0)$ als die Realisation des linearen Regressionsschätzers $\hat{Z}(s_0)$ aufgefasst, der ebenfalls eine regionalisierte Zufallsvariable ist.

Infolge der Art der zu interpolierenden Kenngröße und der parallelen Behandlung der Driftkomponente sind diverse Modellspezifikationen beim Kriging zu diskretisieren. Die hier erwähnten Verfahren (Simple Kriging, Ordinary Kriging und Universal Kriging) können allenfalls als ein Auszug bestehender Krigingmodelle verstanden werden. Anhand

dieser wird die Fortpflanzung von Unsicherheiten untersucht. Weitere Krigingverfahren wie beispielsweise Co-Kriging und Blockkriging sind Spezialalgorithmen, die ihre Grundlage in den hier beschriebenen Varianten finden [57].

6.2.1. Simple Kriging [SK]

Das Simple Kriging betrachtet die Driftkomponente $T(s_i)$ im Halbraum als bekannt und konstant über das gesamte Zufallsfeld.

$$T(s_i) = T \quad (6.6)$$

Simple Kriging kommt ohne Variogrammanalyse aus und ist die räumliche Variante der multiplen Regression. Hierbei wird ein über den gesamten Betrachtungsraum konstanter Erwartungswert für $Z(s_i)$ vorausgesetzt und durch den Mittelwert der gemessenen Daten geschätzt. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \hat{z}(s_0) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) [z(s_i) - T] + T \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot z(s_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \right] \cdot T \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot z(s_i) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dabei muss die eigentliche Prognose $\hat{z}(s_0)$ den folgenden Kriterien genügen

Linearität (Homogenität) :

$$\hat{z}(s_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(s_i) = \lambda' \cdot z \quad (6.8)$$

Unverzerrtheit :

$$E[z(s_0) - \hat{z}(s_0)] = E\left[z(s_0) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot z(s_i)\right] = \mu - \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \mu = 0 \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (6.9)$$

Die Varianz der Schätzung ist ein Maß für deren Güte.

$$\begin{aligned} \sigma_E^2(s_0) &= \text{Var}[\hat{z}(s_0) - z(s_0)] \\ &= \text{Var}[\hat{z}(s_0)] + \text{Var}[z(s_0)] - 2 \cdot \text{Cov}[\hat{z}(s_0), z(s_0)] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot \lambda_j(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_j] + \text{Cov}[0] - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_0] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Für die nach diesem Gleichungssystem bestimmten optimalen Gewichte nimmt die Krigingvarianz ihren minimalen Wert an.

Kovarianzschreibweise:

$$\sigma_{SK}^2(s_0) = \text{Cov}[0] - \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_0] \quad (6.11)$$

$$\text{Cov}[0] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (Z(s_i))^2$$

Variogrammschreibweise [89]:

$$\sigma_{SK}^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(s_i - s_0) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i - s_j) \quad (6.12)$$

Das Gleichungssystem des Simple Krigings besitzt eine eindeutige Lösung. Die Krigingvarianz ist positiv, falls $K = \text{Cov}[s_i - s_j]$ positiv definit ist, das heißt in der Praxis, wenn:

- $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$
- das gewählte Kovarianzmodell zulässig ist.

Wenn sich der Ort s_0 des zu schätzenden Wertes weiter von den benachbarten Messorten s_i entfernt, dann wird $\text{Cov}[s_i - s_0]$ kleiner, während $\text{Cov}[s_i - s_j]$ unverändert bleibt. In diesem Fall nehmen die Simple Kriging Gewichte ab und das Gewicht des stationären Mittelwertes nimmt zu. Je weiter der Ort s_0 des zu schätzenden Wertes von den umgebenden Datenorten s_i entfernt ist, desto mehr wird der Schätzwert durch das stationäre Mittel bestimmt.

6.2.2. Ordinary Kriging [OK]

Mit dem Ordinary Kriging kann eine unbekannte und zumindest lokal konstante Drift berücksichtigt werden. Damit ist das Ordinary Kriging im Prinzip eine Sonderform des Universal Kriging, siehe Abschnitt 6.2.3, wobei hier mit einem Trendpolynom nullter Ordnung gearbeitet wird.

$$T(s_i) = T \quad (6.13)$$

Bei diesem Krigingmodell liegen in den Schätzumgebungen der Orte s_0 konstante Erwartungswerte vor. Diese sind zunächst nicht bekannt, können jedoch in die Schätzung integriert werden. Das zu lösende lineare Gleichungssystem ist nachfolgend angegeben

$$\gamma(s_i - s_0) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(s_0) \cdot \gamma(s_i - s_j) + \mu_{LM} \quad (6.14)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j(s_0) = 1 \quad (6.15)$$

Der Ergebnisvektor $[\lambda_i, \mu_{LM}]$ wird unter der Voraussetzung, dass die Matrix von vollem Rang ist, eindeutig bestimmt. Das Gleichungssystem des Ordinary Krigings kann sowohl in der Schreibweise der Kovarianzfunktion als auch in der Variogrammschreibweise dargestellt werden. Für den Schätzer gilt

$$\hat{z}(s_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot z(s_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \right] \cdot T \quad (6.16)$$

Es gilt ferner die Forderung nach der Unverzerrtheit, woraus sich die Nebenbedingung ableitet, dass die Summe der Schätzwichte zu eins werden muss, Gleichung (6.15).

$$E[\hat{z}(s_0) - z(s_0)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot T - T = T \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) - 1 \right] = 0 \quad (6.17)$$

Die Forderungen nach Erwartungstreue und Minimierung der Schätzvarianz führen zur Definition des Lagrange-Parameter μ_{LM} .

$$\sigma_E^2(s_0) + 2\mu_{LM} \cdot \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) - 1 \right] = L(\lambda_1(s_0), \dots, \lambda_T(s_0); 2\mu_{LM}) \quad (6.18)$$

Für die optimal bestimmten Schätzwichte nimmt die Schätzvarianz des Ordinary Kriging ihren minimalen Wert an.

Kovarianzschreibweise:

$$\sigma_{OK}^2 = \text{Cov}[0] - \sum_{i=1}^n \lambda_i(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_0] - \mu_{LM} \quad (6.19)$$

Variogrammschreibweise in Anlehnung an [89] mit Erweiterung nach [30]

$$\sigma_{OK}^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(s_i - s_0) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i - s_j) - 2\mu_{LM} \quad (6.20)$$

6.2.3. Universal Kriging [UK]

Beim Universal Kriging wird eine unbekannte Drift mit bekanntem Berechnungsmodell bestimmt. Hierbei ist die Drift während der Prognose für unbekannte Stützstellen zu ermitteln, d.h. die Berechnung der Drift ist in die Schätzung integriert. Die Driftfunktion kann allgemein durch die Summe von insgesamt p -Monomen wie folgt angegeben werden:

$$T(s_i) = \sum_{k=1}^{p+1} c_{k-1} \cdot f_{k-1}(s_i) \quad (6.21)$$

Analog zum Ordinary Kriging lässt sich das Gleichungssystem des Universal Kriging ableiten.

$$\gamma(s_i - s_0) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(s_0) \cdot \gamma(s_i - s_j) + \sum_{l=1}^{k+1} c_{l-1} \cdot f_{l-1} \quad (6.22)$$

Dieses Gleichungssystem beinhaltet für den nichtstationären Fall zusätzlich zu den Schätzwichten die Koeffizienten des Ansatzpolynoms. Auf diese Weise wird für jeden Schätzpunkt s_0 auf Basis seiner Schätznachbarschaft $Z(s_0)$ eine lokale Drift berücksichtigt.

Die Ansatzfunktion für die Drift wird äquivalent der Vorgehensweise beim globalen Trend nach subjektiver Beurteilung des Datensatzes im Vorfeld der Schätzung festgelegt, siehe Abschnitt 5.3.1. Dementsprechend ist die Drift im Universal Krigings nur begrenzt beeinflussbar.

Der Einsatz des Universal Kriging ist nur dann besonders sinnvoll, wenn sich über kurze Distanzen variierende lokale Trendverläufe ergeben, die deutlich vom globalen Trend abweichen.

Äquivalent zur Ableitung der Schätzvarianz für das Simple und Ordinary Kriging lässt sich die Krigingvarianz darstellen in

Kovarianzschreibweise [30]

$$\sigma_{UK}^2(s_0) = \text{Cov}[0] - \sum_{i=1}^N \lambda_i(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_0] - \sum_{l=1}^{k+1} c_{l-1} \cdot f_{l-1} \quad (6.23)$$

Variogrammschreibweise in Anlehnung an [15]

$$\sigma_{UK}^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(s_i - s_0) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i - s_j) - 2 \cdot \sum_{l=1}^{k+1} c_{l-1} \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot f_{l-1}(s_i) - f_{l-1}(s_0) \right] \quad (6.24)$$

6.2.4. Indikator-Kriging

Ein verteilungsfreies Verfahren zur Schätzung der räumlichen Kontinuität ist der Indikatoransatz [41], [85]. Hierbei wird nicht mehr die räumliche Kontinuität der absoluten Werte betrachtet, sondern die räumliche Kontinuität der Kenngrößen in Bezug zu einem Grenzwert z_k . Dazu wird jedem Wert $z(x_i)$ ein Indikatorwert $I(x_i; z_k)$ zugeordnet:

$$I(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } z(x_i) \leq z_k \\ 0 & \text{wenn } z(x_i) > z_k \end{cases} \quad (6.25)$$

Das Indikatorvariogramm $\gamma_1(h, z_k)$ berechnet sich für den Grenzwert z_k dann aus:

$$\gamma_1(h, z_k) = \frac{1}{2N} \cdot \sum_{i=1}^N [I(x_i, x_k) - I(x_{i+h}, x_k)]^2 \quad (6.26)$$

Der Wert des Indikatorvariogramms $\gamma_i(h, z_k)$ bestimmt die Anzahl der Wertepaare, die in gleiche Richtung von einem vorgegebenen Grenzwert abweichen. Indikatorvariogramme eignen sich zur Beschreibung der räumlichen Kontinuität von heteroskedastischen Datensätzen. Die Varianz eines Datensatzes ist homoskedastisch, wenn sie unabhängig von der Größe der gemessenen Werte ist. Anderenfalls ist sie heteroskedastisch, es besteht eine Abhängigkeit zwischen der Varianz und der Größe der gemessenen Werte, der so genannte Proportionalitätseffekt. Während normalverteilte Datensätze fast immer homoskedastisch sind, haben lognormalverteilte Datensätze ganz überwiegend einen deutlichen Proportionalitätseffekt [39].

Das Indikatorkriging Verfahren wird beispielsweise zur Homogenbereichsbildung eingesetzt. Am Erkundungsort wird der vertikale Informationsvektor entsprechend der vertikalen Gitternetzteilung gegliedert. Die Zugehörigkeit zu einem Homogenbereichsabschnitt entscheidet über die zuzuordnenden Indikatoren, siehe Bild 69.

Erkundungsprofil am Ort s

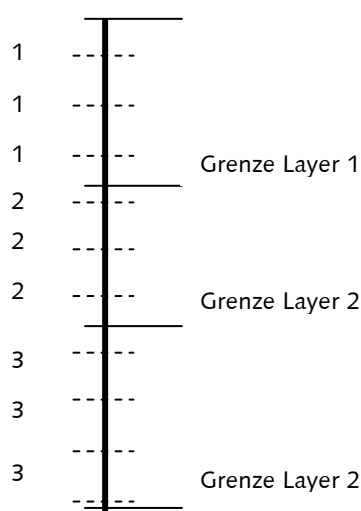


Bild 49: Informationswandlung in Indikatoren

Innerhalb von GeoStat dient das Indikatorkriging zur Konsistenzsicherung von dreidimensionalen Halbraummodellen, die aus zweidimensionalen Datensätzen zusammengesetzt werden. Detaillierte Ausführungen zum Indikatorkriging können [42] entnommen werden.

6.3. Die Krigingvarianz

6.3.1. Allgemein

Der Krigingschätzer $\hat{z}(s_o)$ für unbeprobte Orte wie auch die Kenngrößen $z(s_o)$ sind Zufallsvariablen. Die Differenz aus beiden ist ebenfalls eine Zufallsvariable. Wie aus dem Ergebnis der experimentellen Variographie in den vorangegangenen Kapiteln abzuleiten, ist diese

$$\hat{z}(s_o) - z(s_o) \quad (6.27)$$

normalverteilt mit dem Erwartungswert null und der Krigingvarianz σ_k^2 . Ist zudem die Kovarianz- oder Variogrammfunction bekannt, was allgemein zutrifft, dann gilt basierend auf der Vysochanskii-Petunin Ungleichung [92], die eine Erweiterung der Tchebysheff's Ungleichung ist

$$P(|\hat{z}(s_o) - z(s_o)| > 2 \cdot \sigma_k) \approx 0,05 \quad (6.28)$$

Das entspricht einem 95% Konfidenzintervall für den Schätzer $\hat{z}(s_o)$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt dieser innerhalb des Intervalls:

$$[\hat{z}(s_o) - 2 \cdot \sigma_k, \hat{z}(s_o) + 2 \cdot \sigma_k]$$

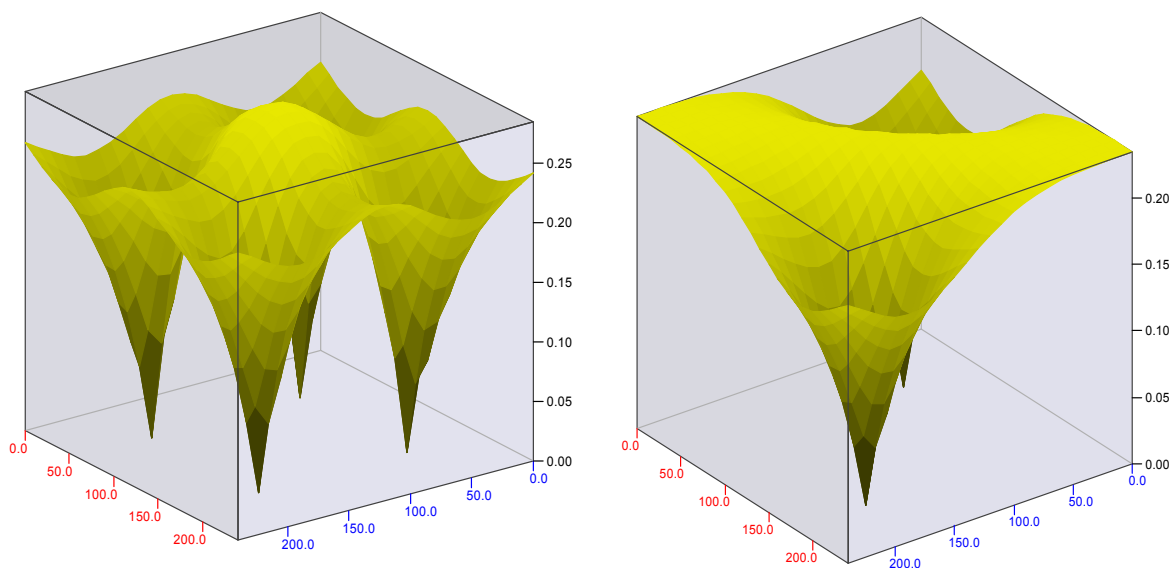
Ist hingegen nicht bekannt, ob die obige Differenz normalverteilt ist, jedoch eine andere stetige Verteilungsfunktion angesetzt werden kann, gilt

$$P(|\hat{z}(s_o) - z(s_o)| > 3 \cdot \sigma_k) \approx 0,05 \quad (6.29)$$

$$[\hat{z}(s_o) - 3 \cdot \sigma_k, \hat{z}(s_o) + 3 \cdot \sigma_k]$$

Die Krigingvarianz spiegelt nach [86] zwei Aspekte wider:

- eine lokale Wechselwirkung, die in Beziehung zu der räumlichen Anordnung der Daten in der Krigingnachbarschaft im Datenfeld steht und
- eine regionale Abhängigkeit/Wechselwirkung, wobei die Variabilität regional differenziert wiedergegeben wird



je vier Messorte im Datenfeld

Bild 50: Exemplarische Darstellung der Krigingvarianz σ_k für Testfeld_1 und Testfeld_2 (siehe Anhang 13.5.4 und 13.5.5)

Die Krigingvarianz ist nicht direkt abhängig von den Schätzern im Datenfeld, wie am Beispiel für ein gleichseitige Dreieck im Bild 51 zu erkennen ist.

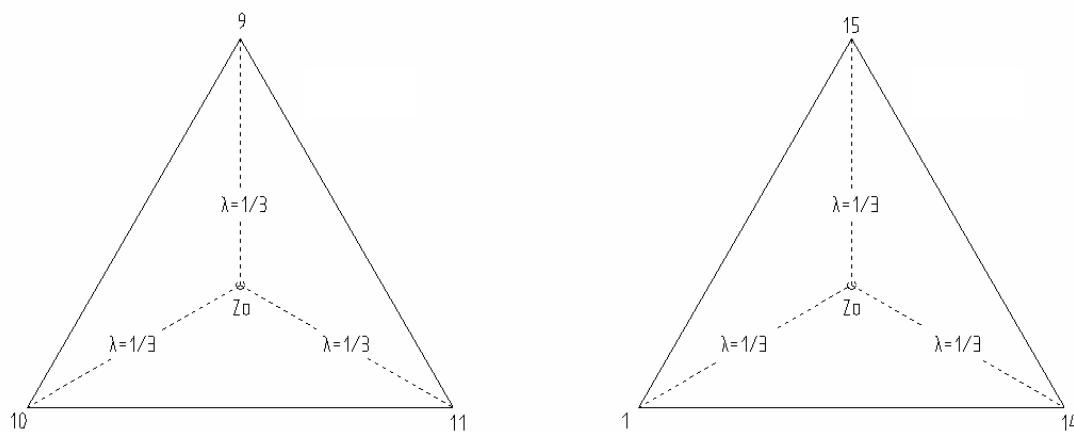


Bild 51: Unterschiedliche Schätznachbarschaften mit gleichem Prognoseergebnis und gleicher Krigingvarianz am Prognoseort Z_0

Ausgehend davon, dass die Schätznachbarschaften einen Ausschnitt aus einem Datenfeld mit $\sigma_{\text{Result}}^2 = 1,0$ darstellen, entspricht die Krigingvarianz im linken Fall von Bild 51 der Varianz des Schätzwertes Z_0 , während im rechten Fall die Krigingvarianz die Varianz des Schätzers unterschätzt, obwohl in beiden Fällen sich für den Schätzer $Z_0=10$ ergibt. Die Krigingvarianz ist des Weiteren, wie nachfolgend gezeigt wird, modellabhängig.

In der Nähe von Messorten ist die Krigingunsicherheit kleiner als im Fall größerer Distanzen zu den Messorten, siehe Bild 50.

Eine räumlich gehäufte Anordnung von Messorten trägt weniger Informationen als isolierte Messorte. Während in Bild 50 links eine regelmäßige Messortanordnung zu erkennen ist, sind diese rechts konzentriert in Paaren angeordnet. Die Regionen hoher Unsicherheit überwiegen rechts, oder das Integral über die Krigingvarianz ist rechts größer als links.

Ist die Variogrammfunktion für das gesamte Untersuchungsgebiet einheitlich, so reflektiert die Krigingvarianz hauptsächlich die modellbedingte Varianz des Schätzers, aber nicht die Unsicherheit des Schätzers am Prognoseort gegeben durch seine direkte Schätznachbarschaft. Letztere kann beispielsweise durch die Varianzenfortpflanzung beschrieben werden. Wird die Krigingvarianz differenziert ermittelt, beispielsweise wenn Proportionalitätseffekte vorliegen, so beschreibt sie hauptsächlich die regionale Modulation [86].

Abgeleitet aus dem vorangegangenen Kapiteln gilt für das Simple Kriging

$$\begin{aligned}\sigma_{SK}^2(s_0) &= \text{Cov}[0] - \sum_{i=1}^n \lambda_i(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_0] \\ \text{Cov}[0] &= \text{Var}[z(s_0)] \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i(s_0) \cdot \text{Cov}[s_i - s_0] &= \text{Var}[\hat{z}(s_0)] \\ \sigma_{SK}^2(s_0) &= \text{Var}[z(s_0)] - \text{Var}[\hat{z}(s_0)] \quad \text{oder} \quad \text{Var}[\hat{z}(s_0)] = \text{Var}[z(s_0)] - \sigma_{SK}^2(s_0)\end{aligned}\tag{6.30}$$

Für die Ordinary und Universal Krigingvarianz sind noch die entsprechenden Additionsterme hinzuzufügen.

Die Krigingvarianz ist in unmittelbarer Umgebung eines Messortes gering und am Messort selbst null unabhängig von der Unsicherheit der Kenngrößen. Die Parameter der theoretischen Variogrammfunktion beeinflussen dieses Verhalten nicht, vergleiche Abschnitt 6.3.2.

Die Varianz des Schätzers muss infolge der Erwartungstreue des Krigings der Varianz der Kenngröße entsprechen, wenn der Prognoseort mit dem Datenort der Kenngröße zusammenfällt. Da die Krigingvarianz nicht in der Lage ist diesem Kriterium gerecht zu werden, ist die Kenngrößenvarianz als paralleler Ansatz zur Krigingvarianz erneut zu berücksichtigen, vergleiche Bild 52. Dieser unterliegt dabei dem Varianzenfortpflanzungsgesetz, Abschnitt 3.5.

$$\text{Var}[\hat{z}(s_0)] = \sum_{i=1}^n d_i^2 \cdot \text{Var}[z(s_i)] \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^N d_i = 1\tag{6.31}$$

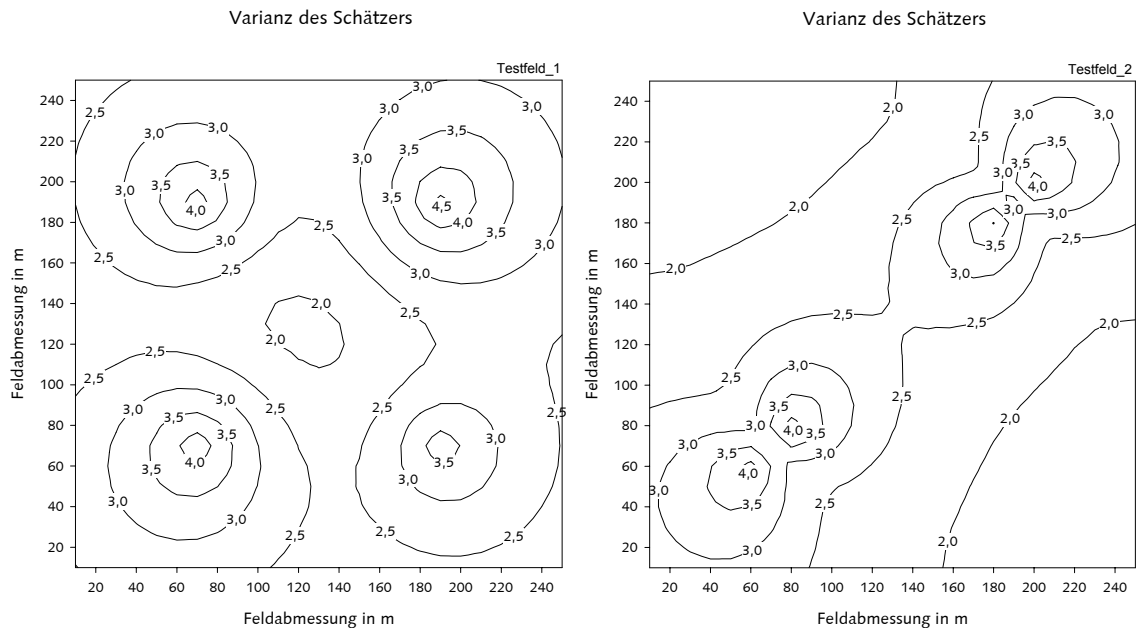


Bild 52: Varianz des Schätzers für eine Kenngrößenvarianz $\text{Var}[X]=4$ für 100 Simulationen auf der Grundlage des Varianzenfortpflanzungsgesetzes.

Zusammengefasst bildet die Krigingvarianz die Grundlage für Auswertungen zur Fortpflanzung von methodenbedingten Unsicherheiten infolge des Krigings. Sie repräsentiert die mittlere zu erwartende Varianz des Schätzers. Sie ist aber kein exaktes Maß bezogen auf die zugrunde liegende Schätzvarianz.

6.3.2. Modellbedingte Abhängigkeit der Krigingvarianz von der theoretischen Variogrammfunktion

Am Beispiel in Bild 53 wird der Einfluss des unsicheren Schwellenwertes und der unsicheren Reichweite der verschiedenen Variogrammfunktionen infolge der Kenngrößenunsicherheit untersucht, um in den nachfolgenden Abschnitten Zusammenhänge ableiten zu können. Als Krigingvarianzmodell wird das aus dem Ordinary Kriging übernommen. Es gilt gemäß Gleichung (6.20)

$$\sigma_{\text{OK}}^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(s_i - s_0) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i - s_j) - 2\mu_{\text{LM}} \quad (6.32)$$

Für das Beispiel ergeben sich die Wichtungsfaktoren zu $\lambda_i = 1/3$. Die Krigingvarianz nimmt stets das Maximum im Schwerpunkt der zur Schätzung herangezogenen Stützstellen an.

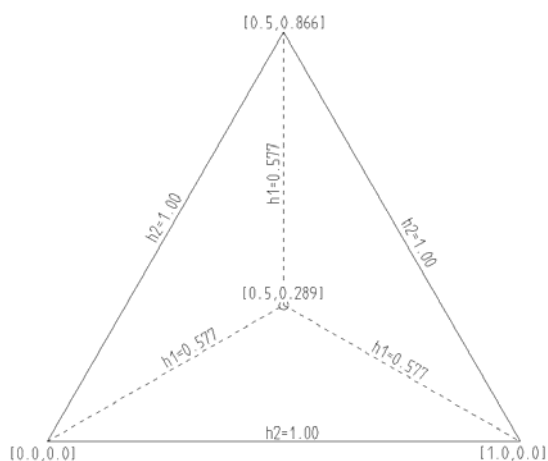


Bild 53: Modell zur Auswertung der Krigingvarianz in Abhängigkeit verschiedener Variogrammfunktionen

Es gilt für σ_{OK}^2 im Schwerpunkt mit Schätzung durch 3 Stützstellen für das exponentielle Modell

$$\sigma_{OK}^2 = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left[a \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_1}{b}} \right) \right] \cdot 3 \right] - \left[6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[a \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_2}{b}} \right) \right] \right] - 2 \cdot \left[a \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_1}{b}} \right) - \frac{2}{3} \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_2}{b}} \right) \right]$$

$$\sigma_{OK}^2 = a \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[1 - e^{-\frac{h_2}{b}} \right]$$

für $b \rightarrow \infty$ für $h_2 \rightarrow b$ für $h_2 \gg b$

$\sigma_{OK}^2 \approx 0,0 \cdot a$

$\sigma_{OK}^2 = 0,4214 \cdot a$

$\sigma_{OK}^2 = \frac{2}{3} \cdot a$

Für das gegebene Modell schwankt die Krigingvarianz für $a=1,0$ in Abhängigkeit von h_2 zu b zwischen 0,0 und $2/3$, während sie zum Parameter a direkt proportional ist. Wird berücksichtigt, dass der Schwellenwert proportional zur resultierenden Datensatzvarianz ist (Abschnitt 5.2.3), ergibt sich der maximal mögliche Wert zu $\sigma_{Result}^2 \cdot 2/3$.

Für das Gauß'sche Modell gilt:

$$\sigma_{OK}^2 = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left[a \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{h_1}{b}\right)^2} \right) \right] \cdot 3 \right] - \left[6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[a \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{h_2}{b}\right)^2} \right) \right] \right] - 2 \cdot \left[a \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{h_1}{b}\right)^2} \right) - \frac{2}{3} \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{h_2}{b}\right)^2} \right) \right]$$

$$\sigma_{OK}^2 = a \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[1 - e^{-\frac{h_2}{b}} \right]$$

für $b \rightarrow \infty$ für $h_2 \rightarrow b$ für $h_2 \gg b$

$\sigma_{OK}^2 \approx 0,0 \cdot a$

$\sigma_{OK}^2 = 0,4214 \cdot a$

$\sigma_{OK}^2 = \frac{2}{3} \cdot a$

Für das gegebene Modell schwankt die Krigingvarianz für $a=1,0$ in Abhängigkeit von h_2 zu b zwischen $0,0$ und $2/3$, während sie zum Parameter a , der resultierenden Datenvarianz σ^2_{Result} direkt proportional ist.

Somit ergibt sich der maximal mögliche Wert zu $\sigma^2_{\text{Result}} \cdot 2/3$. Die maximale Krigingvarianz des Gauß'schen Modells entspricht dabei stets der des exponentiellen Modells. Sie unterscheiden sich im Verlauf zwischen den Extrema. Für das sphärische Modell gilt analog

$$\sigma_{\text{OK}}^2 = a \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[1,5 \cdot \frac{h_2}{b} - 0,5 \cdot \left(\frac{h_2}{b} \right)^3 \right]$$

für $b \rightarrow \infty$ für $h_2 \rightarrow b$

$$\sigma_{\text{OK}}^2 \approx 0,0 \cdot a \qquad \qquad \sigma_{\text{OK}}^2 = \frac{2}{3} \cdot a$$

Hier schwankt die Krigingvarianz für $a=1,0$ in Abhängigkeit von h_2 zu b zwischen 0 und $2/3$ während sie zum Parameter a , der resultierenden Datenvarianz σ^2_{Result} direkt proportional ist. Des Weiteren ist die maximale Krigingvarianz unabhängig von der Reichweite b und von der Lage des Schätzzortes.

6.4. Unsicherheitsfortpflanzung während des Krigings

Der Zusammenhang zwischen Messgrößen $z(s)$ und den Schätzern $\hat{z}(s)$ ist im Kriging Gleichungssystem nichtlinear, so dass die Varianzenfortpflanzung beziehungsweise Erwartungswertentwicklung auf der Grundlage statistischer Dichtefunktionen und subjektiver Wichtungen nicht analytisch nachvollzogen werden kann.

Es werden drei grundsätzliche Wege bei der Bestimmung der Unsicherheitsfortpflanzung besprochen

- Berücksichtigung der Kenngrößenvarianz durch variierende Parameter der theoretischen Variogrammfunktion als Fortsetzung der bisherigen Vorgehensweise unter Annahme deterministischer Messgrößen,
- Beibehaltung der Kenngrößenvarianz und Berechnung mit deterministischen theoretischen Variogrammparametern, beispielsweise den Erwartungswerten der vorangegangenen Betrachtungen und
- Berücksichtigung der Kenngrößenvarianz sowie Berechnung mit variierenden theoretischen Variogrammparametern.

Für den Fall, dass systematische Unsicherheiten in Form von konstanten Faktoren oder Additionstermen wirken, kann die direkte Ableitung [74] entnommen werden. Das Ziel ist die partiell empirische Beschreibung der Unsicherheitsfortpflanzung in Relation zur

Krigingvarianz. Aus dem Kriging unter Berücksichtigung von unsicheren Kenngrößen resultieren zwei Arten von Unsicherheiten, siehe Bild 54.

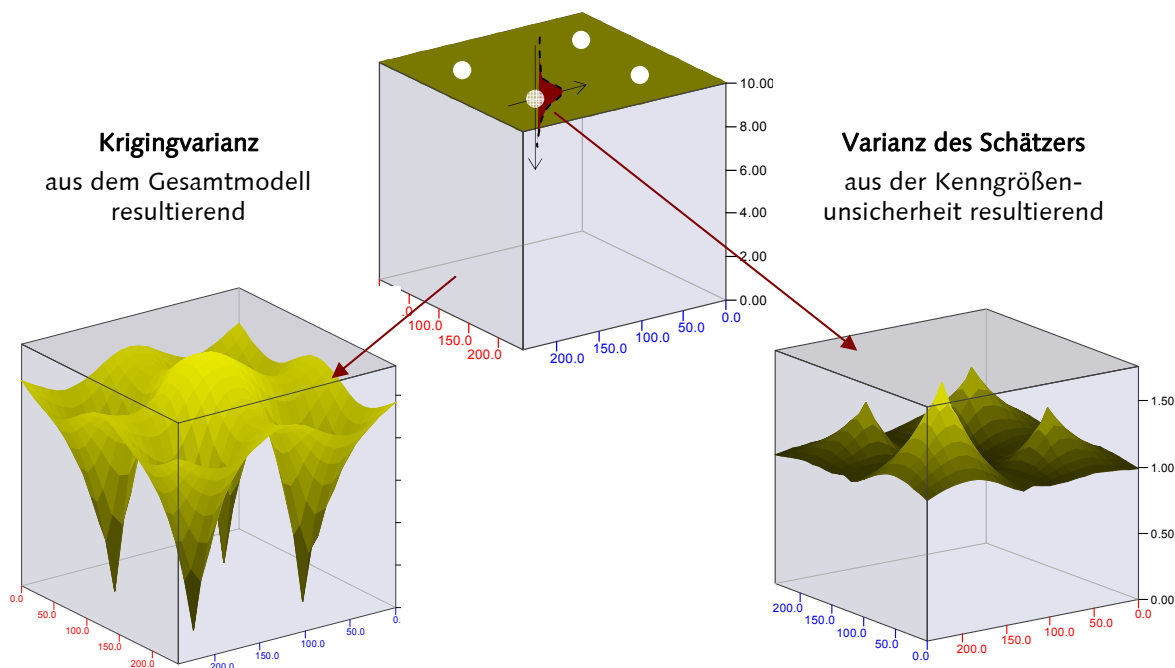


Bild 54: Gegenüberstellung der Krigingvarianz und der Varianz des Schätzers

Während die Krigingvarianz die Modellunsicherheit repräsentiert, gibt die Varianz des Schätzers die Varianz der Schätznachbarschaft wieder.

6.4.1. Berücksichtigung der Kenngrößenstreuung durch unsichere Parameter der theoretischen Variogrammfunktion

Die Berücksichtigung von unsicheren Kenngrößen bedingt wie in den vorangegangenen Abschnitten variierende theoretische Variogrammparameter für das exponentielle, das Gauß'sche und das sphärische Modell in Abhängigkeit von σ^2_{Ratio} . Da nicht alle Resultate detailliert gezeigt werden können, sind nachfolgend Auswertungen für die isotrope Betrachtung ausgewählter Kennwerte der Datensätze Zufallsdaten und ArternOK_Schicht, basierend auf dem exponentiellen Variogrammodell, dargestellt. Die Resultate für sichere Kenngrößen sind in Bild 55 abgebildet.

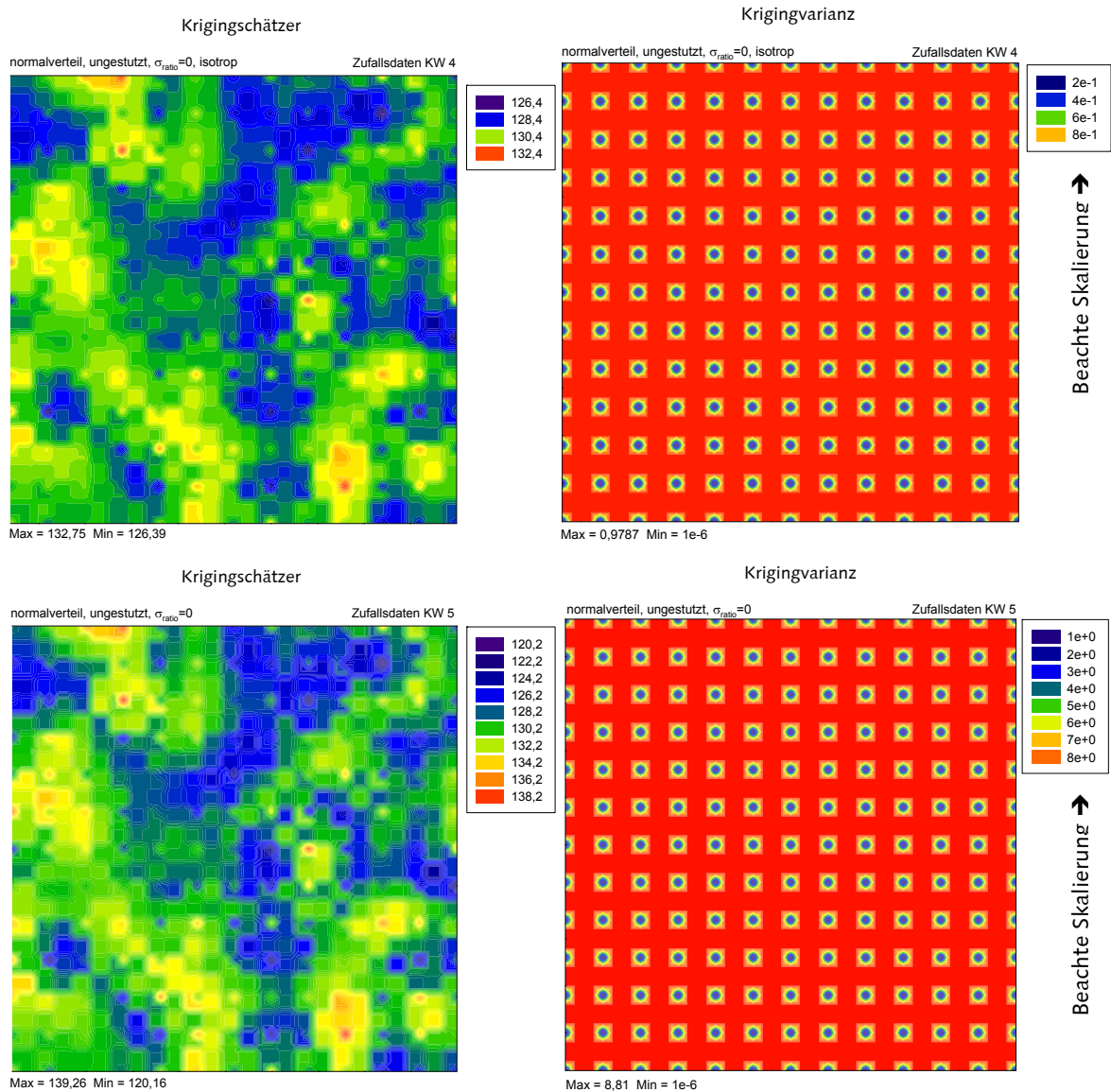


Bild 55: Ordinary Krigingergebnisse für den Datensatz Zufallsdaten KW4 und KW5

Neben der qualitativen Beurteilung werden quantitative Zusammenhänge, aufbauend auf den Abschätzungen der vorangegangenen Absätze, aufgezeigt.

Die Krigingschätzer der Datensätze in Bild 55 sind gemäß ihrer Generierung in den Erwartungswerten gleich und ihrer Standardabweichung um den Faktor drei verschieden. Gemäß den Ableitungen zur Krigingvarianz am gleichseitigen Dreieck unterscheiden sich die maximalen Krigingvarianzen um den Faktor

$$\frac{\sigma_{KW5}^2}{\sigma_{KW4}^2} = \frac{3,654^2}{1,218^2} = \frac{a_{KW5}}{a_{KW4}} = \frac{13,21}{1,468} = \frac{\sigma_{k,KW5,max}^2}{\sigma_{k,KW4,max}^2} = \frac{8,81}{0,9787} = 9,00 \quad (6.33)$$

Der Parameter a der ausgewählten Variogrammmodelle entspricht stets dem Schwellenwert und damit unter Annahme sicherer Kenngrößen der Varianz des Datenfeldes.

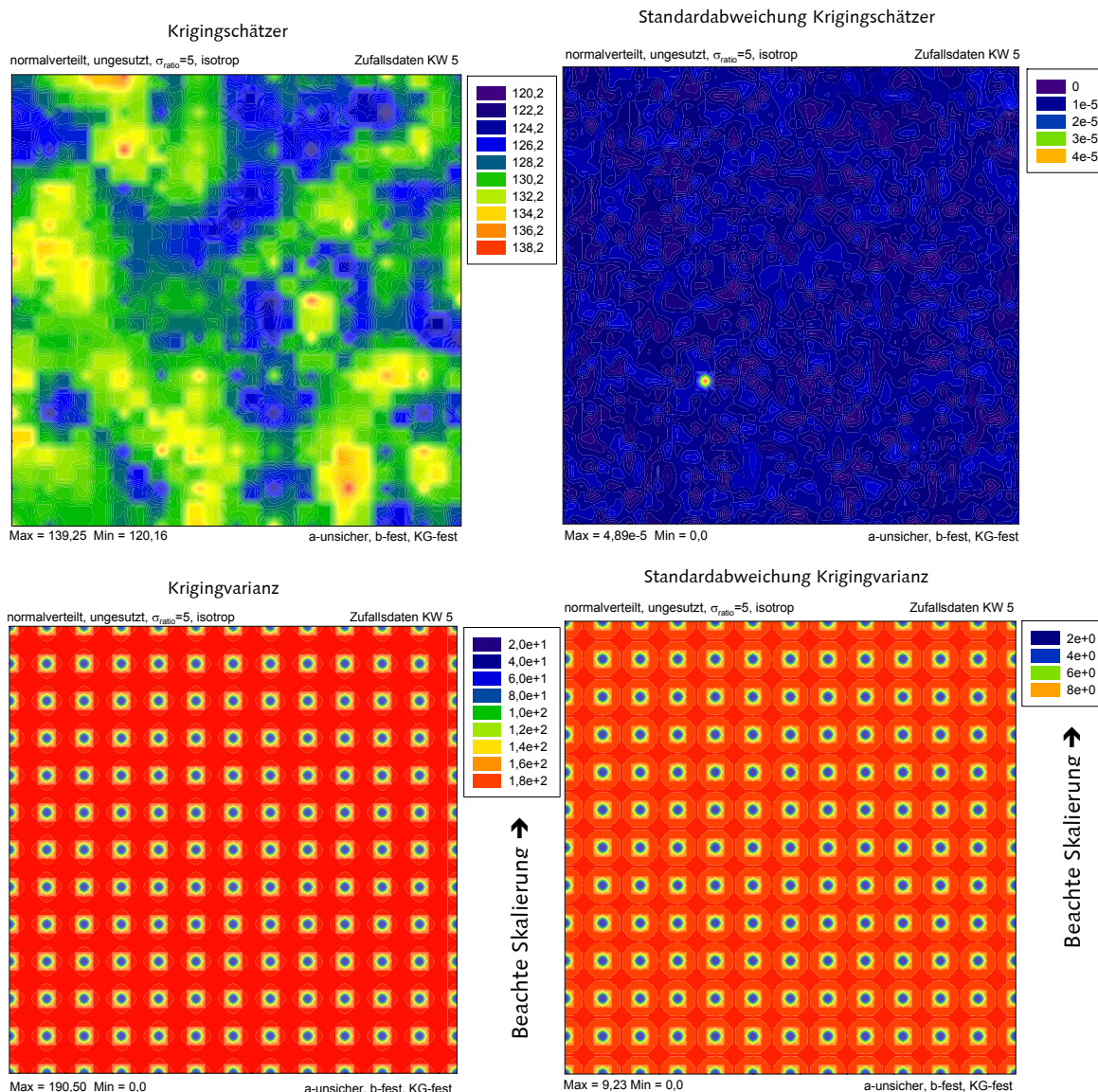


Bild 56: Krigingresultate für den unsicheren Schwellenwert

Der Schwellenwert hat quasi keinen Einfluss auf das Schätzergebnis. Die Standardabweichung des Schätzers ist nahezu null. Der Einfluss auf die Krigingvarianz ist nicht vernachlässigbar. Infolge der berücksichtigten Kenngrößenvarianz von $\sigma_{\text{Ratio}} = 5,0$ erhöht sich die Varianz des Datenfeldes ohne Berücksichtigung regionaler Effekte, siehe Gleichung (5.8)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Result}}^2 &= \sigma_{\text{Daten}}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2 = \sigma_{\text{Daten}}^2 + (5,0)^2 \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 = 26,0 \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 \\ \sigma_{\text{Result}}^2 &= 26,0 \cdot (3,654)^2 = 347,14 \\ \sigma_{\text{Result}} &= 18,63 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Infolge des Reichweiteneinflusses wird zum einen nicht die gesamte Kenngrößenvarianz in die Varianz des Schwellenwertes des theoretischen Variogramms überführt, S. 68 ff., und zum anderen bei der Ermittlung der Krigingvarianz erneut ein faktorieller Anteil

kleiner eins infolge der Reichweite eingeführt, S. 59 und S. 107. Es kann für den Datensatz Zufallsdaten KW5 gemäß Bild 25 folgende Abschätzung getroffen werden

$$a = 10,95 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2 + 13,21 = 10,95 \cdot (5,0)^2 + 13,21 = 286,96 \quad (6.35)$$

Der Reichweiteneinfluss auf die Krigingvarianz entspricht hier einem konstanten Faktor, da b zunächst als sicherer Parameter betrachtet wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Ok}, \sigma_{\text{Ratio}}=0, \text{max}}^2 &= a \cdot f(b) \\ f(b) &= \frac{8,81}{13,21} = 0,667 \\ \sigma_{\text{Ok}, \sigma_{\text{Ratio}}=5, \text{max}}^2 &= (10,95 \cdot 25 + 13,21) \cdot f(b) = 286,96 \cdot 0,667 = 191,40 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die maximale Krigingvarianz aus Bild 56 kann analytisch nachvollzogen werden. Würden stets die Abschätzungen auf der sicheren Seite erfolgen, wie in den einzelnen Kapitel vorgeschlagen, ergibt sich eine theoretische Krigingvarianz, die einer statistischen Abschätzung gleicht, siehe Gleichung (6.34), ohne regionale Zusammenhänge zu berücksichtigen, von

$$\sigma_{\text{Ok}, \sigma_{\text{Ratio}}=5, \text{max}, \text{th.}}^2 = 26,0 \cdot \sigma_{\text{Daten}}^2 = 26,0 \cdot (3,654)^2 = 347,14$$

die damit 1,80x größer als die tatsächliche ist. Das Resultat untermauert die Vorteile der Geostatistik, da die Krigingvarianz das methodenbedingte Konfidenzintervall für den Schätzer vorgibt, siehe Gleichung (6.28) und (6.29). Ähnliche Aussagen lassen sich für die Standardabweichung der Krigingvarianz treffen. Für den Datensatz Zufallsdaten KW5 wurde die Dichtefunktion der Normalverteilung für den Schwellenwert a bei $1,0 \cdot \sigma_{\text{Zufall}}$ gestutzt, damit keine negativen Schwellenwerte während der Simulation auftreten können. Infolge dieser Schranke gilt

$$\begin{aligned} f_{\text{Stutz}} &= 2 \cdot \phi(1) - 1 = 0,683 \\ \sigma_{\sigma_{\text{Ok}, \sigma_{\text{Ratio}}, \text{max}}^2}^2 &= (1,061 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2)^2 \cdot (f_{\text{Stutz}} \cdot f(b))^2 \\ \sigma_{\sigma_{\text{Ok}, \sigma_{\text{Ratio}}, \text{max}}^2} &= 1,061 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2 \cdot f_{\text{Stutz}} \cdot f(b) \\ \sigma_{\sigma_{\text{Ok}, 5,0, \text{max}}^2} &= 1,061 \cdot 25,0 \cdot 0,683 \cdot 0,667 = 12,08 \end{aligned}$$

Auch die maximale Standardabweichung der Krigingvarianz aus Bild 56 ist analytisch ableitbar.

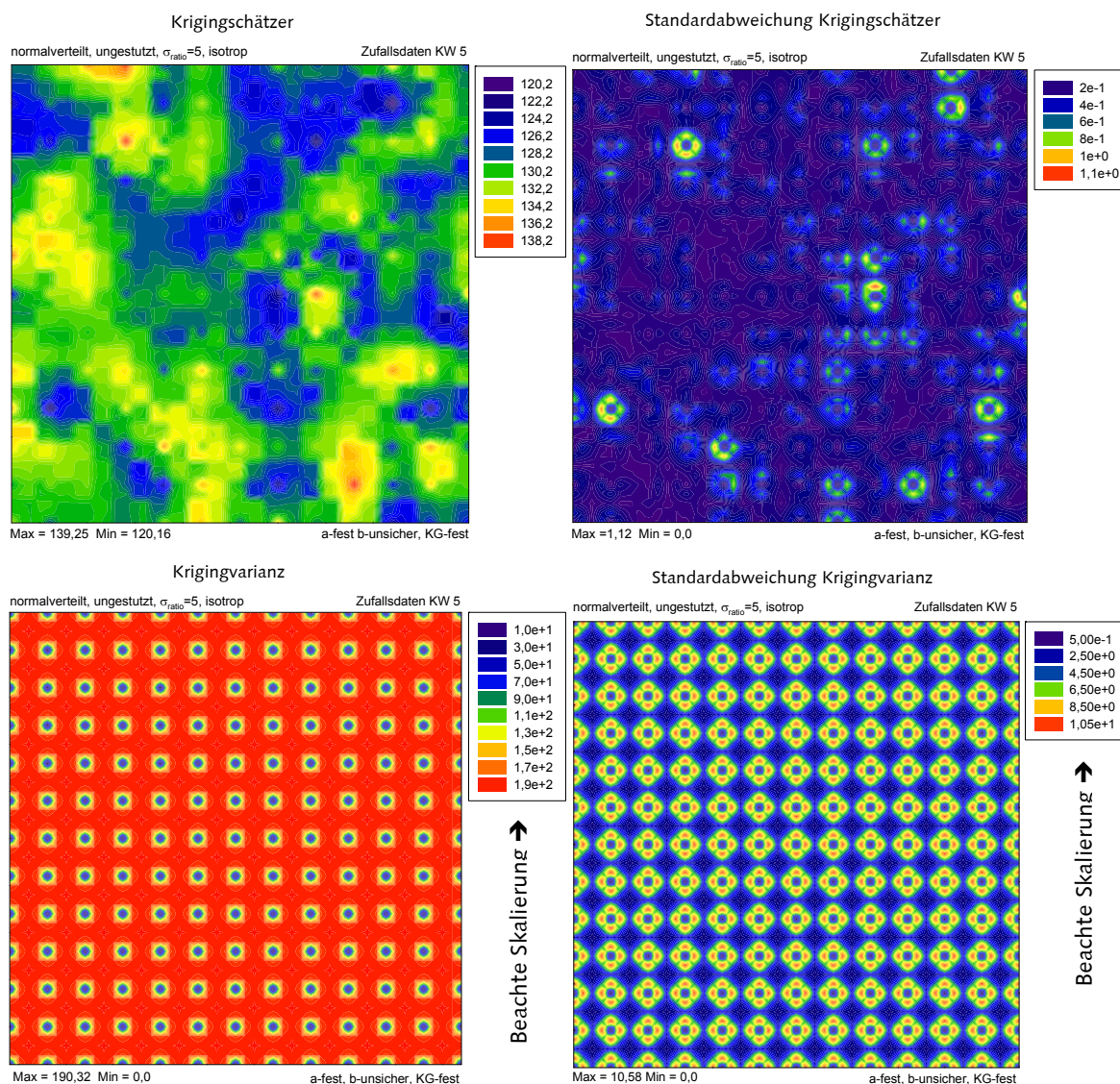


Bild 57: Krigingresultate für die unsichere Reichweite

Im Gegensatz zum Schwellenwert hat die Reichweite b einen Einfluss auf das Schätzergebnis. Für $b \rightarrow 0$ bzw. $h \rightarrow \infty$ strebt der Reichweitenterm gegen eins, und somit die Varianz des Schätzer infolge unsicherem b gegen die Resultate des unsicheren Schwellenwertes. Für die Regionen im Abstand $h < b$ hat der Reichweitenterm bei normalverteilter Reichweitenunsicherheit für das

- exponentielle Modell bei $h=0,69 \cdot b$ die maximale Standardabweichung,
- Gauß'sche Modell bei $h=0,83 \cdot b$ die maximale Standardabweichung,
- sphärische Modell bei $h=0,35 \cdot b$ die maximale Standardabweichung.

Die maximale Standardabweichung stellt sich ein, wenn der Reichweitenterm $g(h)$, vergleiche mit Gleichung (5.38), der drei Modelle den Wert 0,5 annimmt.

Die Varianz des Schätzers sowie die Varianz der Krigingvarianz wird ihr Maximum an diesen Orten annehmen. Vernachlässigt man den Effekt der Lage des Schätzzortes kann die maximale Varianz auf der Grundlage der Varianzenfortpflanzung abgeschätzt werden. Für eine Reichweite $b \ll$ Ortskoordinatendifferenz der Schätznachbarschaft gilt unabhängig von der Anzahl der zu berücksichtigenden Stützstellen für die maximale Standardabweichung des Schätzers auf der Grundlage des Varianzenfortpflanzungsgesetzes, für Prognoseorte nahe der Stützstelle

$$\sigma_{\hat{z}_o, b, \max} = \sqrt{1,0 \cdot \sigma_{\text{Result}}^2} = \sigma_{\text{Result}}$$

Das Minimum ergibt sich, wenn alle Orte der Schätznachbarschaft zum Schätzzort den gleichen Abstand aufweisen und dieser Abstand mit dem Ort maximaler Standardabweichung des jeweiligen Modells übereinstimmt. Für $n=3$ Stützstellen gilt

$$\sigma_{\hat{z}_o, b, \min} = \sqrt{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{\text{Result}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sigma_{\text{Result}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \sigma_{\text{Result}} \rightarrow \sigma_{\hat{z}_o, b, \min} = 0,577 \cdot \sigma_{\text{Result}}$$

Für alle verwendeten Beispieldatensätze stellten sich für die Standardabweichung der Krigingvarianz stets Werte kleiner der Abschätzung für den zugehörigen Schwellenwert ein. Die Lage der maximalen Standardabweichung ist wie beschrieben von der Reichweite abhängig. Auf die Krigingvarianz haben geringe Reichweiten nahezu keinen Einfluss.

Sind beide Parameter des theoretischen Variogramms unsicher, überlagern sich die Unsicherheiten der einzelnen Parameter. Unter der Voraussetzung, dass der Schwellenwert a und die Reichweite b unkorreliert sind, gilt auch hier das Varianzenfortpflanzungsgesetz. Die Kovarianzterme können vernachlässigt werden. Anhand der Resultate in

Bild 58 ist abzuleiten

- Der Krigingschätzer ist nahezu unbeeinflusst.
- Die Standardabweichung des Krigingschätzers ist maßgeblich durch die Reichweite beeinflusst.
- Die Krigingvarianz wird für kleine Reichweiten durch den Schwellenwert beeinflusst. Der Schwellenwerteinfluss kann empirisch abgeschätzt werden. Für große Reichweiten kann der Reichweitenanteil größer als der Schwellenwertanteil sein. Eine empirische Abschätzung ist nicht möglich (siehe Datensatz ArternOK_Schicht).
- Die Standardabweichung der Krigingvarianz wird vom Schwellenwert und der Reichweite bestimmt. Die resultierende Standardabweichung ergibt sich aus der Varianzensumme am Schätzzort infolge unsicherer Reichweite und unsicherem Schwellenwert. Eine empirische Abschätzung ist nicht möglich.

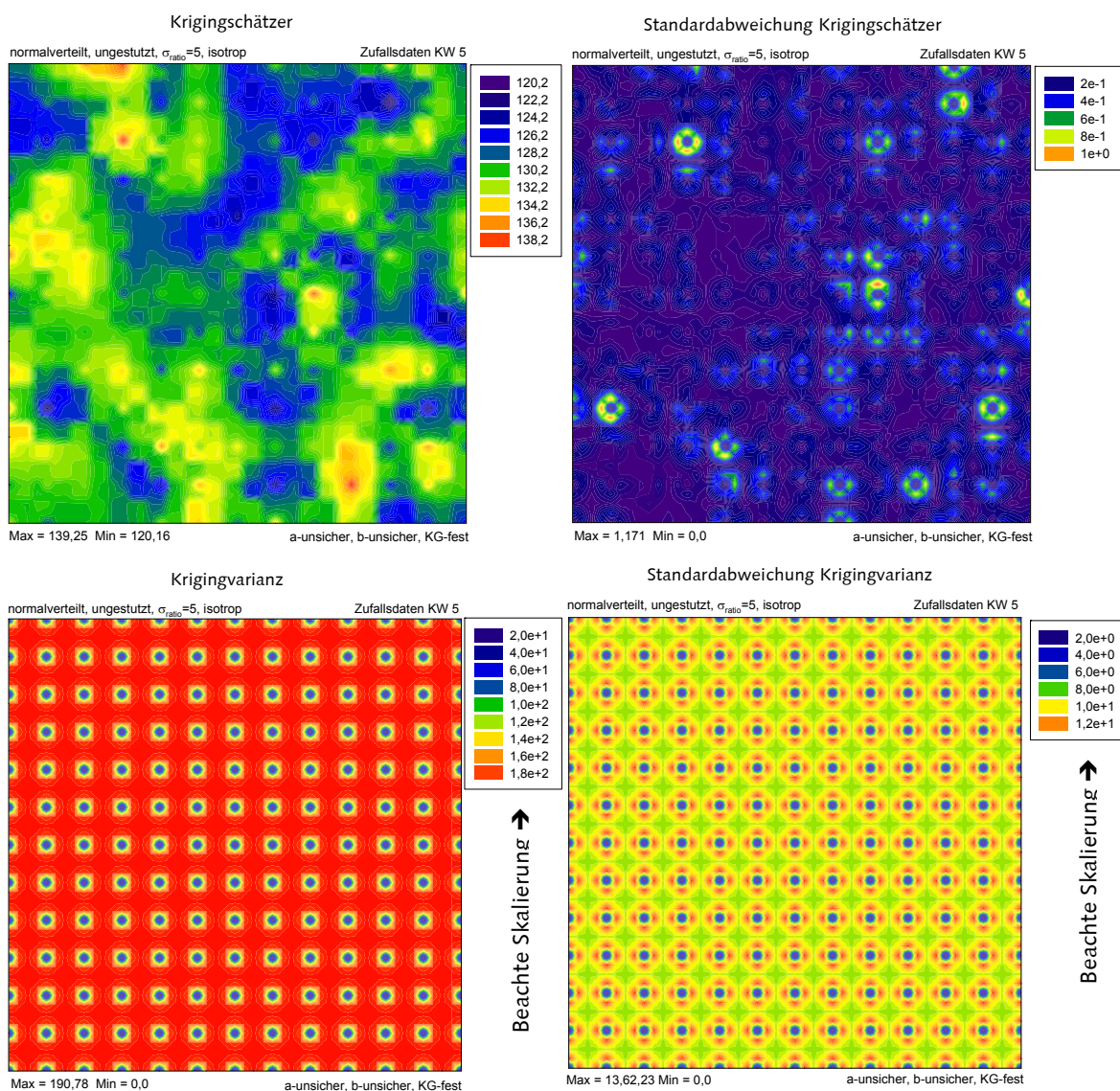


Bild 58: Krigingresultate für unsicheren Schwellenwert und unsichere Reichweite

Zuzüglich zum unsicheren Schwellenwert und der unsicheren Reichweite wird die Kenngrößenunsicherheit einbezogen. Wie bereits erwähnt, unterliegt die Schätzung allein basierend auf der Kenngrößenunsicherheit dem Varianzenfortpflanzungsgesetz. Die Wichtungsfaktoren für die Schätznachbarschaft ergeben sich als Resultat des Abstandes zum Schätzort.

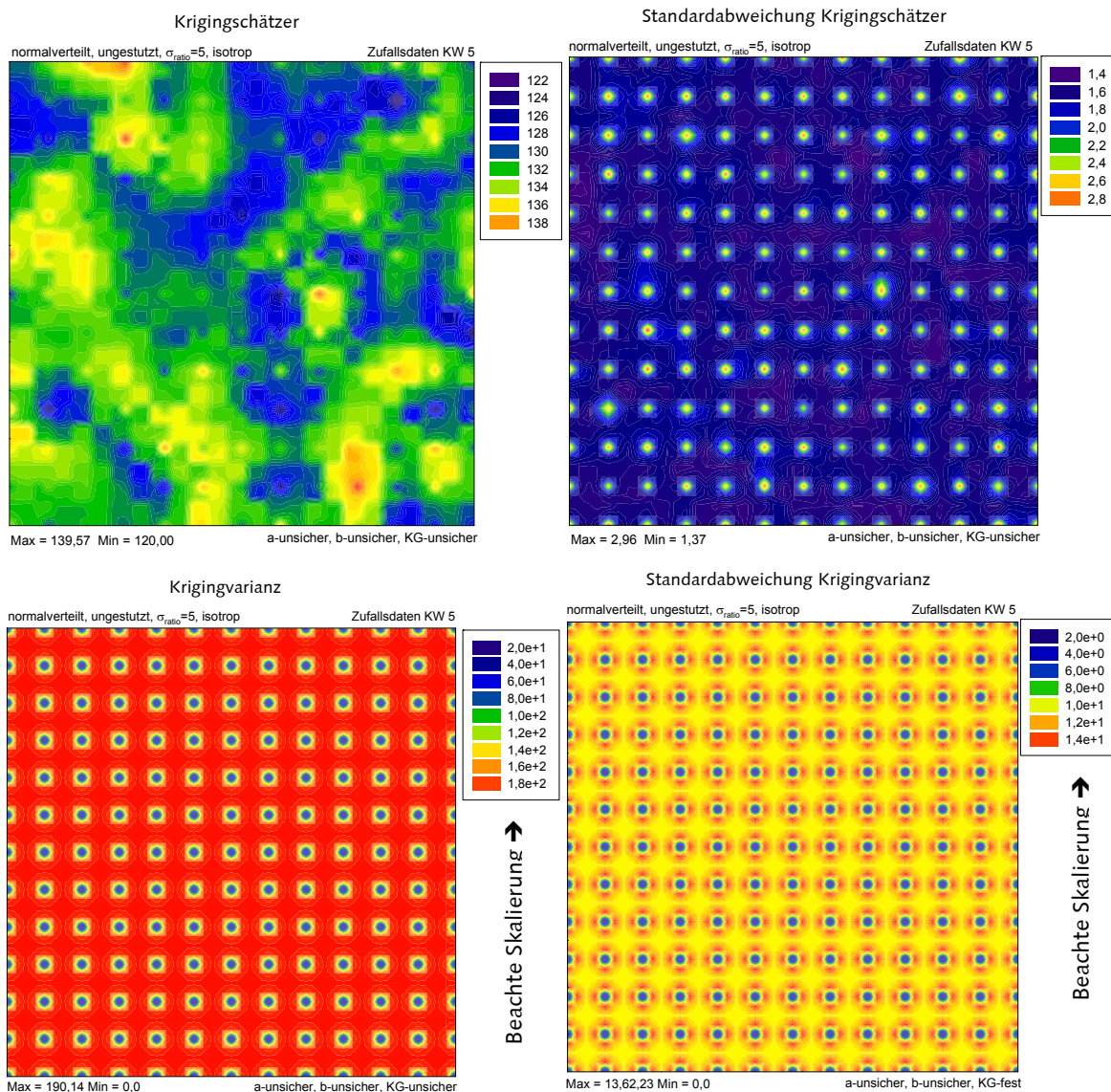


Bild 59: Krigingresultate für unsicheren Schwellenwert und unsichere Reichweite sowie unsichere Kenngrößen

Werden diese mit den vorangegangenen Ergebnissen überlagert, ist abzuleiten:

- Der Krigingschätzer ist unbeeinflusst von der Kenngrößenunsicherheit.
- Die Standardabweichung des Krigingschätzers wird gleichermaßen durch die Kenngrößenvarianz sowie die Reichweitenvarianz beeinflusst. Beide sind nicht additiv. Die Reichweitenvarianz beeinflusst den Wichtungsfaktor im Varianzenfortpflanzungsgesetz.
- Die Krigingvarianz und deren Standardabweichung werden nicht durch die Kenngrößenvarianz beeinflusst.

Für die obere Abschätzung der Standardabweichung des Krigingschätzers gilt für drei Stützstellen und ein reguläres Gitter, gemäß dem Datensatz Zufallsdaten, bezogen auf den Schwerpunkt des regulären quadratischen Gitters

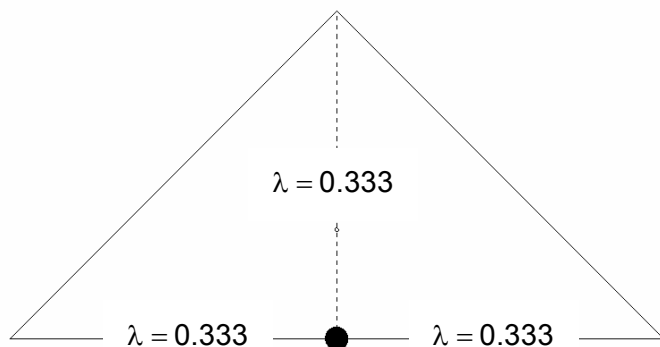


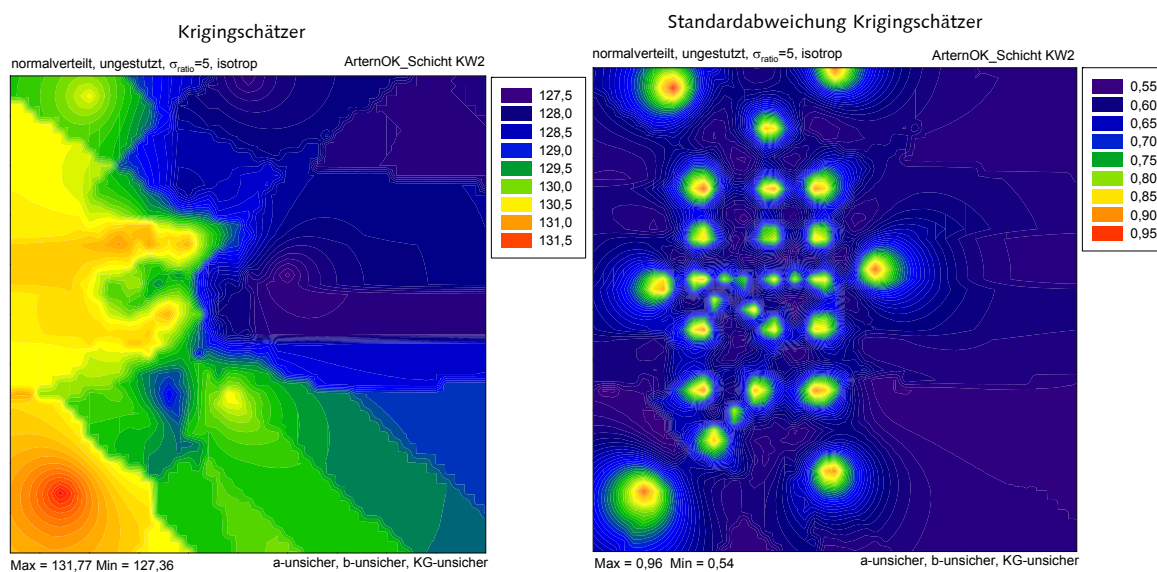
Bild 60: Wichtungsfaktoren λ für den Schwerpunkt der Gitterstruktur vom Datensatz Zufallsdaten unter Berücksichtigung von 3 Stützstellen in der Schätznachbarschaft (als halbes Quadrat dargestellt)

$$\sigma_{\hat{z}_o} = \sqrt{(0,333)^2 \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2 + (0,333)^2 \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2 + (0,333)^2 \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2}$$

$$\sigma_{\hat{z}_o} = \sqrt{3} \cdot 0,333 \cdot \sigma_{\text{Zufall}}$$

$$\sigma_{\hat{z}_o, \sigma_{\text{Ratio}}=5} = 0,576 \cdot 5,0 = 2,88 \approx 2,96 \text{ (vergleiche Bild 59)}$$

Für den Referenzstandort Artern sind die Resultate für unsichere Variogrammparameter und unsichere Kenngrößen dem Bild 61 zu entnehmen.



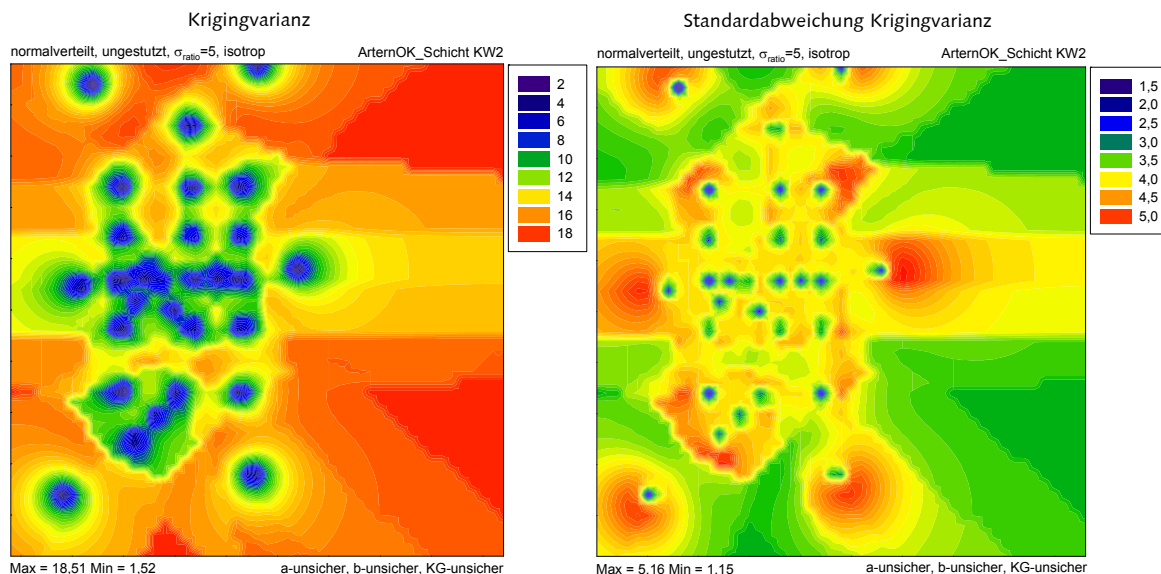


Bild 61: Krigingresultate für Parameter a und b unsicher sowie unsicherer Kenngrößen

Die Krigingresultate spiegeln den Datensatz wider. Das Minimum und das Maximum des Krigingschätzers sind identisch mit entsprechenden Kenngrößen im Datensatz.

Das genutzte exponentielle Variogrammmodell basiert auf den abgeleiteten empirischen Zusammenhängen, vergleiche Abschnitt 5.2.3.

$$\begin{aligned}
 a &= 1,078 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2 + 3,178 & \sigma_a &= 0,946 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2 \\
 a &= 1,078 \cdot 25 + 3,178 = 30,128 & \sigma_a &= 0,946 \cdot 25 = 23,65 \\
 b &= 23,68 & \sigma_b &= 61,12
 \end{aligned}$$

$$\gamma(h) = 30,128 \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{23,68}} \right)$$

Damit negative Simulationswerte ausgeschlossen werden können, wird die Normalverteilung zur Beschreibung der Unsicherheit bei 0,34 gestutzt. Mit

$$f_{\text{stutz}} = 2 \cdot \phi(0,34) - 1 = 0,262$$

Die maximale Standardabweichung des Schätzers ergibt sich näherungsweise zu

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\hat{z}_0} &= \sqrt{f^2 \cdot \sigma_{\text{Zufall}}^2} \\
 \sigma_{\hat{z}_0} &= 0,262 \cdot \sigma_{\text{Zufall}} \\
 \sigma_{\hat{z}_0, \sigma_{\text{Ratio}}=5} &= 0,262 \cdot 5,0 = 1,31 \approx 0,96 \quad (\text{vergleiche Bild 61})
 \end{aligned}$$

Die Krigingvarianz für kleine Reichweiten würde sich ergeben zu

$$\sigma_{Ok, \sigma_{Ratio}=0, \max}^2 = a \cdot f(b) = 0,956$$

$$f(b) = \frac{0,956}{3,178} = 0,30$$

$$\sigma_{Ok, \sigma_{Ratio}=5, \max}^2 = 30,128 \cdot 0,30 = 9,03$$

Die maximale Krigingvarianz beträgt 18,51. Somit ist der Reichweitenanteil maßgebend. Die empirische Abschätzung ist nicht möglich. Analoge Zusammenhänge lassen sich für alle weiteren Datensätze aufzeigen.

Zusammenfassend kann mit den Resultaten aus Abschnitt 5.2, die Aussagen zur Unsicherheit der Variogrammparameter bereitstellen, und dem Varianzenfortpflanzungsgesetz unterliegen, vergleiche Abschnitt 3.5, die maximale Unsicherheit der Krigingprognose und die maximale Krigingvarianz abgeschätzt werden. Der Einfluss der Reichweite auf die Krigingvarianz war durch deren Stellung in den Variogrammfunktionen nicht explizit quantifizierbar. Für kleine Reichweiten genügt somit das Wissen über die Unsicherheit der Variogrammparameter, während für große Reichweiten die Unsicherheit der Krigingprognose und die Krigingvarianz nur durch Simulation bestimmt werden können.

6.4.2. Berücksichtigung der Kenngrößenstreuung und variierende Parameter der theoretischen Variogrammfunktion im anisotropen Datenfeld

Basierend auf der Auswahl des vorangegangenen Abschnittes sind für die anisotrope Betrachtung die Resultate für sichere Kenngrößen des Datensatzes Zufallsdaten in Bild 62 abgebildet.

Die Teildatensätze des Datensatzes Zufallsdaten sind gemäß ihrer Generierung in den Erwartungswerten gleich und in ihrer Standardabweichung um den Faktor drei verschieden. Wie für den isotropen Fall unterscheiden sich die maximalen Krigingvarianzen um den Faktor

$$\frac{\sigma_{KW5}^2}{\sigma_{KW4}^2} = \frac{3,654^2}{1,218^2} = \frac{a_{KW5}}{a_{KW4}} = \frac{23,29}{2,59} = \frac{\sigma_{k, KW5, \max}^2}{\sigma_{k, KW4, \max}^2} = \frac{2,47}{0,275} = 9,0$$

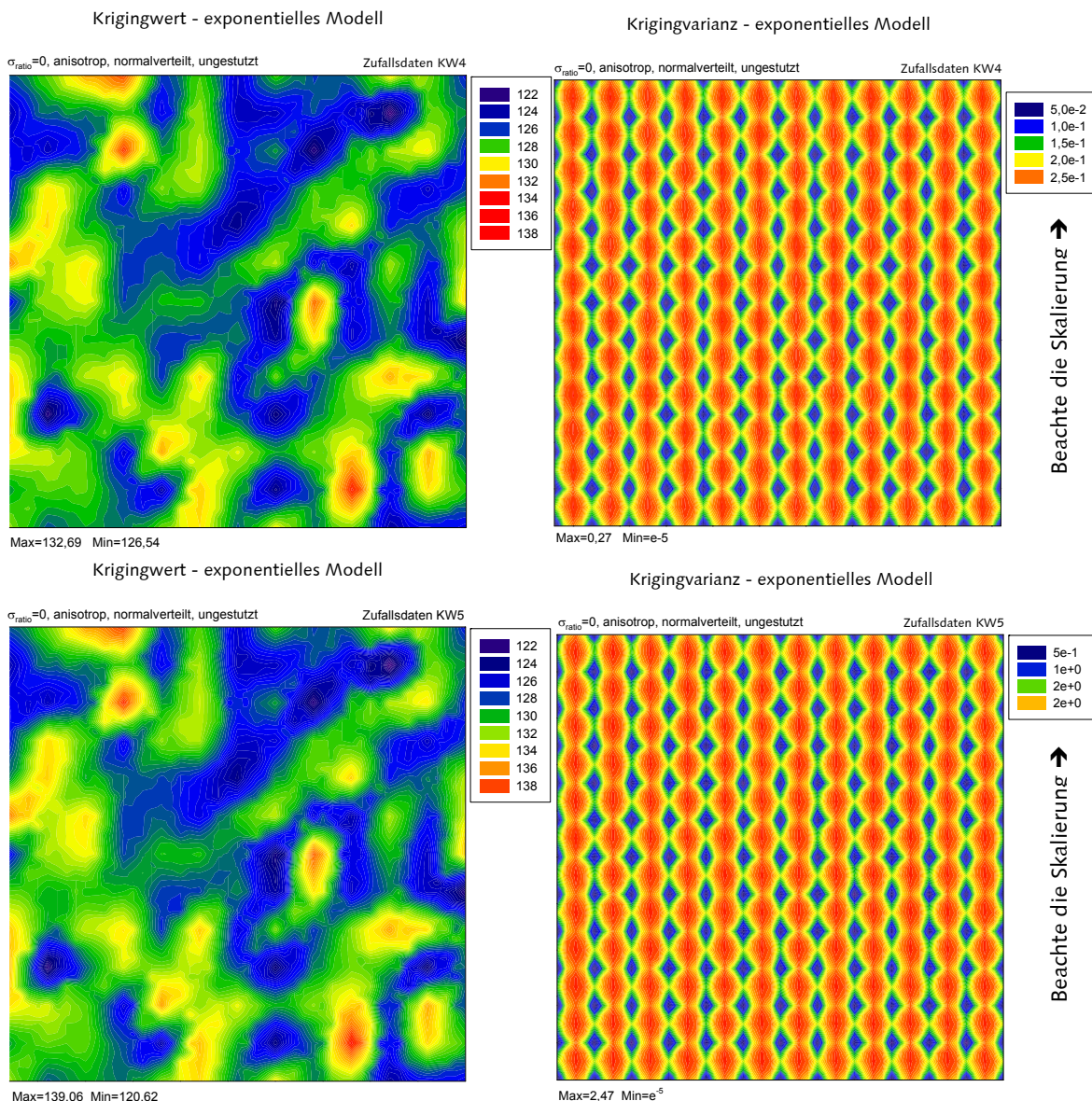


Bild 62: Krigingergebnisse für die anisotrope Annahme für Datensatz Zufallsdaten KW4 und KW 5

Die maximalen Krigingvarianzen der anisotropen Betrachtung waren dabei stets geringer als die zugehörigen Krigingvarianzen der isotropen Untersuchung. Im Allgemeinen ist jedes Datenfeld anisotrop. Die Annahme der Isotropie ist eine Vereinfachung. Die geringere Krigingvarianz als Modellunsicherheit spiegelt das wider.

Ohne im Einzelnen die Teilschritte der isotropen Betrachtungsweise darzustellen, werden die verschiedenen Variationen der unsicheren Eingangsparameter für das Krigingergebnis tabellarisch aufgezeigt. Dazu werden die berechneten Ergebnisse der signifikantesten Stellen, dem Gitternetzpunkt (Stütz) und der Feldmitte (Mitte) aufgeführt.

Es gelten für die anisotrope Betrachtungsweise dieselben Schlussfolgerungen wie für die isotrope Betrachtungsweise. Unter Berücksichtigung der richtungsabhängigen Schwellenwerte sind analoge empirische Zusammenhänge über das Anisotropieverhältnis (Anisovh) für den Schwellenwert ableitbar. Infolge der unsicheren Reichweite können keine

Korrelationen dargestellt werden. Die Standardabweichung des Krigingschätzers korrespondiert mit der Standardabweichung σ_{Result} der Kenngrößen auf der Grundlage der Varianzenfortpflanzung. Zusammengefasst gilt:

- Der Krigingschätzer ist unbeeinflusst von der Kenngrößenunsicherheit.
- Die Standardabweichung des Krigingschätzers wird gleichermaßen durch die Kenngrößenvarianz sowie der Reichweitenvarianz beeinflusst. Beide sind nicht additiv. Die Reichweitenvarianz beeinflusst den Wichtungsfaktor im Varianzenfortpflanzungsgesetz.
- Die Krigingvarianz und deren Standardabweichung werden nicht durch die Kenngrößenvarianz beeinflusst.
- Die Krigingvarianz für anisotrope Betrachtung ist stets geringer als die Krigingvarianz für isotrope Betrachtung an einem Datenfeld

Nr.	unsicher			Mittelwert Krigingwert		Standardabweichung Krigingwert		Krigingvarianz		Standardabweichung Krigingvarianz		Krigingvarianz / Varianz Krigingwert	
	a	b	KG	Mitte	Stütz	Mitte	Stütz	Mitte	Stütz	Mitte	Stütz	Mitte	Stütz
deterministisch $\sigma_{\text{ratio}}=0,0$; $\sigma_{\text{Zufall}}=0,0$; $\alpha=-82,11$; $a=24,37$; $b=172,06$; Anisov.= 0,67													
01				122	138	-	-	e^{-5}	2,47	-	-	-	-
$\sigma_{\text{ratio}}=0,5$; $\sigma_{\text{Zufall}}=1,827$; $\alpha=-82,11$; $a=30,19$; $\sigma_a=1,28$; $b=169,60$; $\sigma_b=41,57$; Anisovh.= 0,67													
02	x		x	121	139	0,28	0,51	3,1	0,02	0,13	$2e^{-3}$	39	0,1
03		x	x	121	139	0,28	0,51	3,3	0,02	0,88	$6e^{-3}$	42	0,1
04	x	x	x	121	139	0,28	0,52	3,3	0,02	0,89	$6e^{-3}$	42	0,1
$\sigma_{\text{ratio}}=4,0$; $\sigma_{\text{Zufall}}=14,616$; $\alpha=-82,11$; $a=397,01$; $\sigma_a=81,60$; $b=138,97$; $\sigma_b=42,74$; Anisov.= 0,67													
05	x			121	139	0	$4e^{-5}$	49	0,3	10	0,1	e^{10}	e^{10}
06		x		121	139	$2e^{-5}$	0,07	54	0,3	18	0,1	$2,5e^9$	$1e^4$
07			x	121	139	2,2	4,0	e^7	e^6	e^{-5}	e^{-6}	e^7	e^4
08	x	x		121	139	$2e^{-5}$	0,08	54	0,3	25	0,2	$2,5e^9$	$8e^3$
09	x		x	121	139	2,2	4,1	49	0,3	10	0,2	10	$2e^{-2}$
10		x	x	121	139	2,2	4,1	54	0,3	18	0,2	11	$2e^{-2}$
11	x	x	x	121	139	2,2	4,0	54	0,3	24	0,2	11	$2e^{-2}$

Tabelle 15: Zusammenfassung der Krigingergebnisse Zufallsdaten KW 5, $\sigma_{\text{Daten}}=3,654$, exponentielles Modell, Ordinary Kriging, 3 Stützstellen

In der durchgeführten Analyse wurde der Einfluss unsicherer Hauptrichtungswinkel und unsicherer Anisotropieverhältnisse vernachlässigt. Anisotrope Auswertungen sind generell nur mit der Programmentwicklung GeoStat möglich.

Für den Datensatz ArternOK_Schicht sind die Resultate im Rahmen der Grenzzustandsauswertung ab Kapitel 9 aufgezeigt

6.4.3. Auswertung zu den Ergebnissen

Die verschiedenen Ansätze für die Berücksichtigung der Unsicherheit der Eingangskenngrößen erzeugen stets die gleichen Krigingschätzer. Die Art und Größe der Unsicherheit kann daraus nicht abgeleitet werden. Als zusätzliche Beurteilungsmaße sind die Standardabweichung des Krigingschätzers und die Krigingvarianz notwendig. Die Standardabweichung der Krigingvarianz ist als Informationsmaß zu sehen. Für das isotrope Datenfeld kann für die Standardabweichung des Krigingschätzers folgendes abgeleitet werden:

- Sie nimmt ihr Maximum an den Lagekoordinaten der Kenngrößen an. Diese Standardabweichung entspricht der Standardabweichung der Kenngrößen.
- Zwischen den Stützstellen strebt sie gegen ein lokales Minimum und unterliegt dabei dem Varianzenfortpflanzungsgesetz. Die Einflussfaktoren der berücksichtigten Schätznachbarschaft bestimmen sich in Relation zum Abstand vom Schätzzort. Die statistische Betrachtungsweise entspricht dabei der Annahme einer linearen theoretischen Variogrammfonktion.
- Sie ist abhängig von der Reichweite unter Annahme des exponentiellen, Gauß'schen oder sphärischen Modells. Die Modellansätze führen zu Abweichungen in Bezug auf den zuvor beschriebenen linearen Zusammenhang der Schätzwerte und des relativen Abstandes zum Prognoseort.
- Sie ist nahezu unbeeinflusst vom Schwellenwert.

Für die Krigingvarianz als Modellparameter konnte gezeigt werden:

- Sie nimmt ihr Maximum zwischen den Stützstellen ein. Der Maximalwert der Krigingvarianz stellt sich zwischen den Stützpunkten und für extrapolierte Werte gleichermaßen ein.
- An den Stützstellen des Datenfeldes ist die Krigingvarianz null. Fallen die Stützstellen nicht mit der Gitterstruktur zusammen, stellen sich abweichende Minimalwerte in deren Umgebung ein.
- Die Krigingvarianz ist gleichermaßen vom Schwellenwert und der Reichweite abhängig. Für kleine Reichweiten kann diese empirisch abgeschätzt werden
- Die Krigingvarianz wird nicht durch die Varianz der Kenngrößen beeinflusst.
- Die Krigingvarianz für anisotrope Betrachtung ist stets kleiner als die Krigingvarianz für isotrope Betrachtung eines Datenfeldes

Äquivalent zur Krigingvarianz für das Modell mit sicheren Kenngrößen wird die Ableitung eines Unsicherheitsplots angestrebt. Es soll mit diesem möglich sein eine obere und untere Schranke der zu erwartenden Schätzer anzugeben. An den Stützstellen wird die Varianz der Kenngrößen übertragen, während im Feld die Krigingvarianz als Unsicherheitsmaß übernommen wird, siehe Bild 63.

Die Krigingvarianz ist in den ausgewerteten Datensätzen sowie am Beispiel des gleichseitigen Dreiecks stets größer als die Varianz infolge der Fortpflanzung der Kenngrößenunsicherheit.

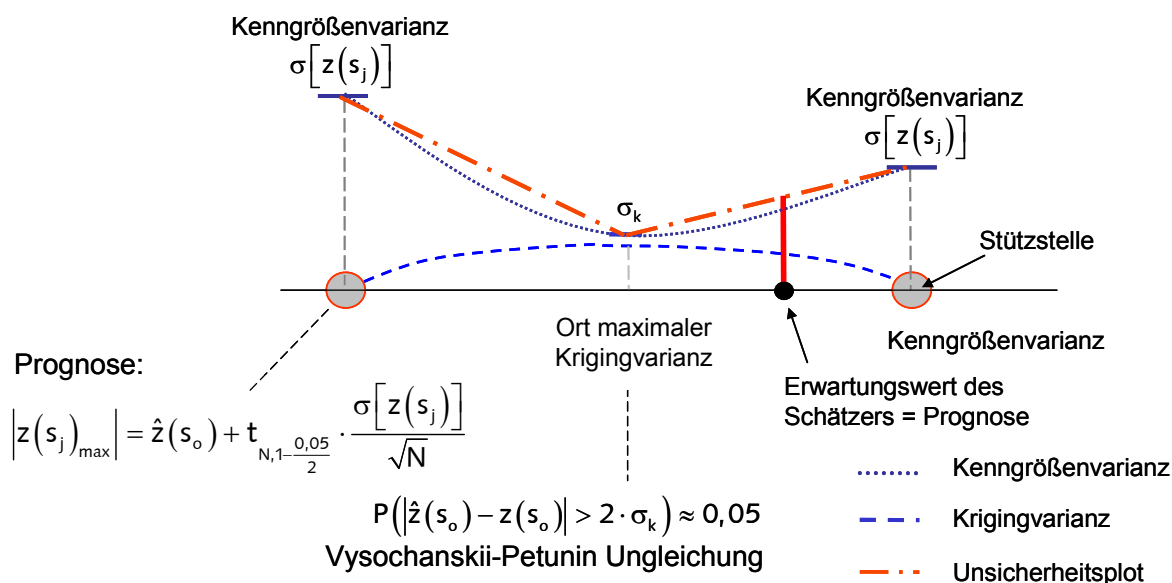


Bild 63: Vorschlag für den Unsicherheitsplot des Krigingschätzers

Die Fortpflanzung der Kenngrößenunsicherheit basiert dabei auf der Varianzenfortpflanzung. Die Wichtungsfaktoren sind proportional zum inversen Abstand der Schätznachbarschaft zum Prognoseort und ihre Summe ist auf eins normiert. Am Beispiel des gleichseitigen Dreiecks, siehe Abschnitt 6.3.2, für das exponentielle Modell mit $h \sim b$ und unter Annahme gleicher Kenngrößenvarianz an der herangezogenen drei Stützstellen gilt für die Krigingvarianz

$$\sigma_{OK}^2 = a \cdot \frac{2}{3}$$

Die Wichtungsfaktoren für die Varianzenfortpflanzung sind für die drei Stützstellen identisch, da sie den gleichen Abstand zum Prognoseort aufweisen. Unter Voraussetzung, dass auch hier die Summe der Wichtungsfaktoren eins ist, ergibt sich $d_i = 1/3$. Und somit die Varianz des Schätzers zu, siehe Abschnitt 3.5

$$\sigma_{\hat{z}_o}^2 = \sigma_{KG}^2 \cdot \frac{1}{3}$$

Für eine Reichweite $b \rightarrow 0$ strebt der Schwellenwert a gegen die Varianz der Kenngröße σ_{KG}^2 . Das Verhältnis kann als sichere Schätzung für die Krigingvarianz als Modellvarianz, S. 104 ff., zurückgeführt werden. Die Krigingvarianz ist entsprechend Bild 63 kleiner als die Kenngrößenvarianz.

Für zusätzlich unsichere Variogrammparameter hat sich gezeigt, dass die Krigingvarianz die Varianz der Kenngrößen um ein Vielfaches überschreiten kann. Ist die Krigingvarianz größer als die Kenngrößenvarianz werden in den Abschnitten zwischen dem Ort maximaler Krigingvarianz und der Stützstelle die Modellvarianzen unterschätzt, Bild 64.

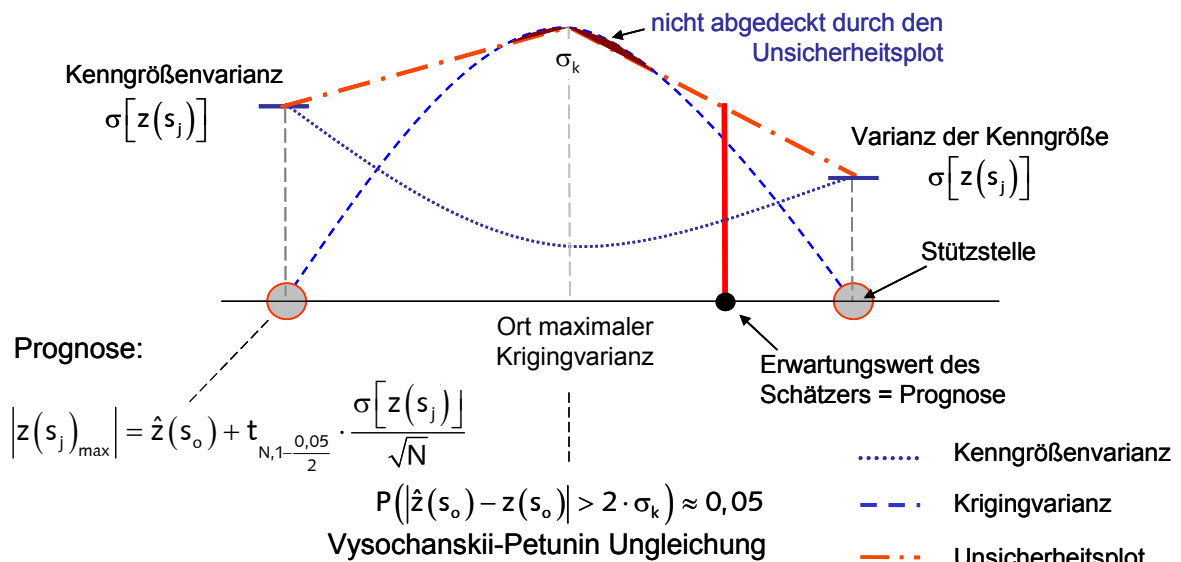


Bild 64: Nicht abgedeckte Bereiche im Unsicherheitsplot

Eine allgemeine empirische Beziehung kann nicht abgeleitet werden, da der Varianzanteil des Reichweitenterms nicht abgeschätzt werden konnte. Folgende Überlegungen sind zu treffen:

- Das Simple und Ordinary Kriging sowie angelehnte Methoden ohne Driftpolynom entsprechen einem Interpolationsalgorithmus. Aus der Linearität der Schätzung kann für normalverteilte Unsicherheiten die Varianz des Schätzers aus der Varianzenfortpflanzung ermittelt werden. Diese Varianz ist stets kleiner als die Kenngrößenvarianz. Daher kann die Krigingvarianz als Modellunsicherheit nach oben mit der Kenngrößenvarianz oder mit der Obergrenze des zugehörigen Signifikanzniveaus abgeschätzt werden.
- Das Universal Kriging baut zusätzlich zum Interpolationsalgorithmus auf einem Driftpolynom auf. Der Schätzer kann nun erheblich vom Vorgabebereich der Stützstellen abweichen. Als Maß für die Modellunsicherheit sind daraufhin Krigingvarianzen größer der Kenngrößenvarianz aufgetreten. Eine Abschätzung ist nicht möglich.

Die Obergrenze g_o und Untergrenze g_u des Signifikanzniveaus für die Varianz ergibt sich nach S. 32 zu

$$g_u = \sqrt{\frac{m}{\chi^2_{m, 1-\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s \quad \text{und} \quad g_o = \sqrt{\frac{m}{\chi^2_{m, \frac{\alpha}{2}}}} \cdot s \quad (6.37)$$

Im Bild 65 ist beispielhaft ein Verhältnisplot und ein Unsicherheitsplot für den Datensatz ArternOK_Schicht KW2 unter Verwendung des Ordinary Krigings gegenübergestellt.

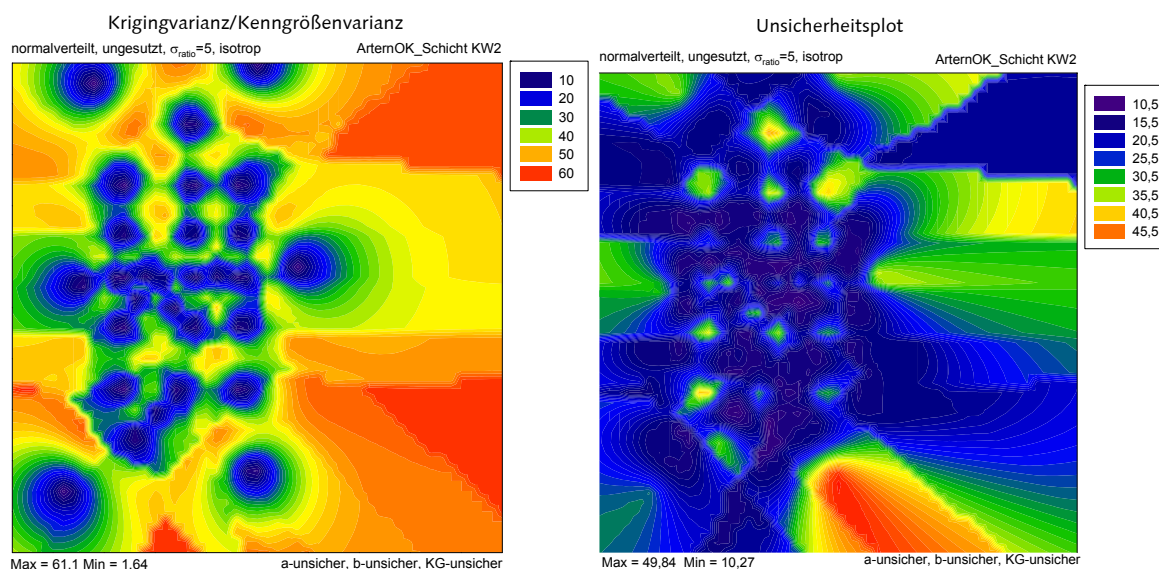


Bild 65: Verhältnis der Krigingvarianz zur Kenngrößenvarianz (links); Beispiel eines Unsicherheitsplots (rechts)

Können die unsicheren Kenngrößen durch eine Normalverteilung beschrieben werden, kann das 95% Konfidenzintervall, siehe S. 32, angegeben werden zu

$$\hat{z}_{o,\max} = \hat{z}_o + t_{m, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \quad (6.38)$$

$$\hat{z}_{o,\min} = \hat{z}_o - t_{m, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Die Varianz σ^2 ist dem Unsicherheitsplot zu entnehmen. Bei weiterer Auswertung zeigt sich, dass die Konfidenzschranken von der Krigingschätzung erheblich abweichen. Die Krigingschätzer dürfen daher nur unter Angabe des Unsicherheitsniveaus genutzt werden. Die bisher übliche Angabe der Krigingprognose und der Krigingvarianz ohne die Unsicherheit der Kenngrößen zu berücksichtigen, sollte in Frage gestellt werden.

6.4.4. Ergänzende Aspekte zum Kriging

Beim Kriging können auch negative Wichtungsfaktoren bei der Schätzwertbestimmung ermittelt werden. Nach [30] und [84] treten diese insbesondere dann auf,

- wenn die gemessenen Daten stark geclustert sind oder
- wenn die Daten bei kleinen Distanzen stark korreliert sind.

Eine beispielhafte Anordnung der Aufschlusspunkte wird in Anlehnung an [30] dargestellt. Die Standortkennwerte an u_1 und u_2 besitzen in Variante 1 den gleichen relativen Abstand zum Prognoseort u_0 . Aufgrund der Stationarität des Zufallsfeldes sind die zugehörigen Kovarianzen gleich. Die Wichtungsfaktoren λ sind aber durch die Anordnung der Kenngröße u_3 in unmittelbarer Nähe von u_2 verschieden. Dieser Effekt wird auch als Screening Effekt bezeichnet.

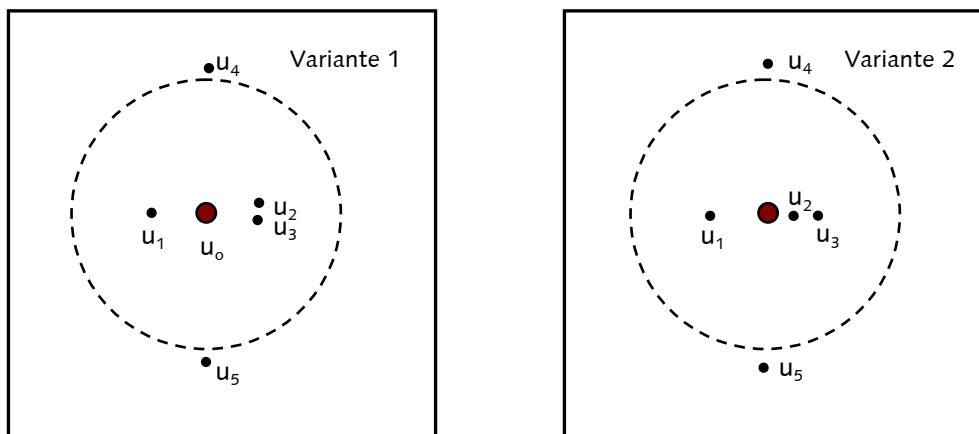


Bild 66: Kenngrößenanordnung in Anlehnung an [30]

Werden zur Bestimmung der Kenngröße am unbekanntem Ort u_0 auch die Kenngrößen an den Orten u_4 und u_5 verwendet, obwohl diese außerhalb der Reichweite gelegen sind, werden diese nicht mit dem Wichtungsfaktor $\lambda=0$ belegt. Stattdessen erhalten diese eine geringe positive oder auch eine negative Wichtung.

In [84] wird empfohlen, Standorte außerhalb der Korrelationsreichweite zu vernachlässigen. In GeoStat werden die Standorte numerisch bedingt berücksichtigt. Für das Kriging ist aber eine vordefinierte Stützstellenanzahl in der Schätznachbarschaft erforderlich. Sind beispielsweise k Standorte notwendig, obwohl sich nur $(k-1)$ Standorte innerhalb der Korrelationsreichweite befinden, so ist stets ein Standort außerhalb der Reichweite hinzuzunehmen. Dessen Wichtungsfaktor ist wie beschrieben entweder sehr klein oder negativ. Wird dieser nun zu $\lambda = 0$ gesetzt, so ist die Grundforderung des Krigings

$$\sum \lambda_i = 1$$

zunächst verletzt. Für die notwendige Korrektur der Unter- beziehungsweise Überge-
wichtung werden in [30] mehrere Vorgehensweisen empfohlen:

- Innerhalb des Algorithmus sind die negativen Wichtungen zu eliminieren. Die verbleibenden positiven Wichtungsfaktoren sind in ihrer Summe auf 1 zu normieren.
- Zu allen Wichtungsfaktoren ist ein konstanter Wert zu addieren, welcher dem kleinsten negativen Wichtungsfaktor entspricht. Anschließend ist die Summe aller Wichtungsfaktoren auf 1 zu normieren.
- Es sind alle unsicheren Wichtungsfaktoren auf eine gewählte untere Schranke anzuheben, beispielsweise 0. Anschließend ist die Summe aller Wichtungen auf 1 zu normieren.
- Das Krigingverfahren ist mit einem zusätzlichen Indikatorriging zu verbinden, das im Algorithmus das Auftreten von negativen Wichtungsfaktoren vermeidet.

Die Eliminierung von negativen Wichtungsfaktoren wird innerhalb von GeoStat nicht berücksichtigt. Durch manuelle Kontrolle wurden die Wichtungsfaktoren für die herangezogenen Referenzwerte überprüft, so dass negative Wichtungsfaktoren für diese ausgeschlossen werden konnten.

7. Die geologische Modellbildung

7.1. Einleitung

Die Beschreibung geotechnischer Prozesse erfordert die realitätsnahe Modellierung des Baugrundes. Unter Baugrundmodellen versteht man die Transformation von geowissenschaftlichen Beschreibungen des Baugrundes in anwendungsbezogene Rechenmodelle [87]. Das Baugrundmodell ist die Grundlage für technischen und formalen Verfahren beziehungsweise Regeln im Ingenieurwesen. Insbesondere ist durch die beschriebenen Methoden der Geostatistik in einem Baugrundmodell ortsabhängiger Kenngrößen auch deren räumliche Variabilität zu berücksichtigen. Ausgehend von den stichprobenhaften Erkundungen kann ein Baugrundmodell durch Interpolation mittels Krigingschätzer, der Verwendung von Autokorrelationsfunktionen oder anhand stochastischer Simulationsverfahren erstellt werden.

Die Kenntnis der Unsicherheit der einzelnen Kenngrößen, resultierend aus der Baugrunderkundung bis hin zur subjektiven Festlegung charakteristischer Parameter der unsicheren Kenngrößen, eröffnet zusätzlich die Möglichkeit die enthaltenen Unschärfen in Sicherheitsnachweisen zu quantifizieren. Mathematisch gesehen ist die Baugrundkenngröße eine Funktion des Ortes.

Die Vorgehensweise der Baugrundmodellierung wird nach [60] unterteilt in:

- Erkundung und Vereinfachung der geometrischen Verhältnisse, wie Schichtenverlauf, Lage von Bodeneinbauten und die Anordnung von Bauwerken, so dass Homogenbereiche gebildet werden können,
- Bestimmung der erforderlichen statischen und dynamischen Parameter des Bodens und des Bauwerks mit Hilfe von Versuchen und durch subjektive Erfahrungen des Bearbeiters,
- Aufstellung eines Rechenmodells unter Verwendung der Ergebnisse aus den ersten beiden Schritten, Analytische oder numerische Lösung des entstehenden Gleichungssystems.

Die Resultate der Baugrundmodellierung und die darauf aufbauenden Berechnungsalgorithmen können in regional vorhandene Expertensysteme integriert werden [67]. Sie dienen somit als Entscheidungsgrundlage und Entwurfsgrundlage für Behörden und Planer. Eine transparente Datenbasis ermöglicht des Weiteren die Implementierung einzelner Datenebenen in Geoinformationssysteme, beispielsweise in die digitalen Feldkarten. Die schichtenweise enthaltene Information erlaubt es, komplexe Situationen zu beschreiben und multivariat auszuwerten [21], [103].

Es ist in der Geotechnik zukünftig vorstellbar, qualifizierte und vollständige Informationen über den Baugrund, dessen Heterogenität und enthaltene anthropogenen Einflüsse

zu erhalten, indem einerseits die Felderkundungstechniken weiterentwickelt und andererseits die enormen Fortschritte in der Anwendung mathematischer Methoden zur Baugrundmodellierung genutzt werden. Durch seismische Erkundungsverfahren ist es beispielsweise möglich, die meist zu geringe Datenbasis aufzuwerten [45], [69], [70].

7.2. Halbraummodelle / geologische Modelle

Geologische Modelle sind allgemein üblich aus Homogenbereichen zusammengesetzt. Diese dienen der Vereinheitlichung der heterogenen Baugrundstruktur, so dass die Möglichkeit geschaffen wird, die anerkannten Berechnungs- und Wertungsmethoden anwenden zu können. Die Homogenbereiche sind das Resultate der Überführung von punktuell gewonnen Baugrundinformationen in eine räumliche Struktur [88]. Sie können nach DIN 4020 in der Gestalt von Schichten, Linsen, Keilen, Einschlüssen, Störungen, Störungszonen und Gängen auftreten. Insbesondere eignen sich Baugrundeigenschaften als Kriterium für die Definition solcher begrenzter Volumina, die sich dann durch unterschiedliche Material- oder/und Struktureigenschaften voneinander abgrenzen [71].

Die Entwicklungsetappen der geologischen Modellbildung können für eine unbeprobte Region im Untersuchungsgebiet unterteilt werden in:

- Die Homogenbereichsfolge wird subjektiv geschätzt. Jedem Homogenbereich werden deterministische Baugrundeigenschaften zugeordnet.
- Das räumliche geologische Modell wird auf der Grundlage statistischer oder geostatistischer Methoden auf der Basis von Homogenbereichen objektiv aufgebaut. Die Struktur des Modells ist deterministisch. Jedem Homogenbereich werden sichere Baugrundeigenschaften zugeordnet [52], [88], [96].
- Das räumliche geologische Modell wird auf der Grundlage statistischer oder geostatistischer Methoden auf der Basis von Homogenbereichen objektiv aufgebaut. Die Struktur des Modells ist deterministisch. Jedem Homogenbereich werden unsichere Baugrundeigenschaften zugeordnet [72], [73].
- Das räumliche geologische Modell wird auf der Grundlage statistischer oder geostatistischer Methoden auf der Basis von Homogenbereichen objektiv aufgebaut. Die Struktur des Modells ist unsicher. Jedem Homogenbereich werden unsichere Baugrundeigenschaften zugeordnet.

Die letzte Entwicklungsetappe ist Gegenstand dieser Arbeit und ist an die Entwicklung der Softwareanwendung GeoStat gekoppelt. Die Unsicherheiten der Krigingprognose werden in das geologische Modell integriert.

Für ein Halbraummodell als Rechenmodell, basierend auf geostatistischer Methoden, muss ausgeschlossen werden, dass

- die Oberflächen der Homogenbereiche sich verschneiden,
- innerhalb des betrachteten Halbraumes Fehlstellen enthalten sind,
- die Anordnung der Homogenbereiche an jedem Erkundungsort gleich ist.

Die Homogenbereichsgrenzen und die Mächtigkeit der Homogenbereiche werden meist voneinander unabhängig ermittelt, wenn die Datengrundlage zweidimensional ist. Durch die Varianzen der Schätzer in den einzelnen ebenen Interpolationen ist das zusammengesetzte Baugrundmodell partiell inkonsistent, besonders in Bereichen mit geringer Informationsdichte. Das Problem der Inkonsistenz zeigt sich ebenfalls bei der Berücksichtigung von Unsicherheiten von modellrelevanten Baugrundkenngrößen und Systemkenngrößen.

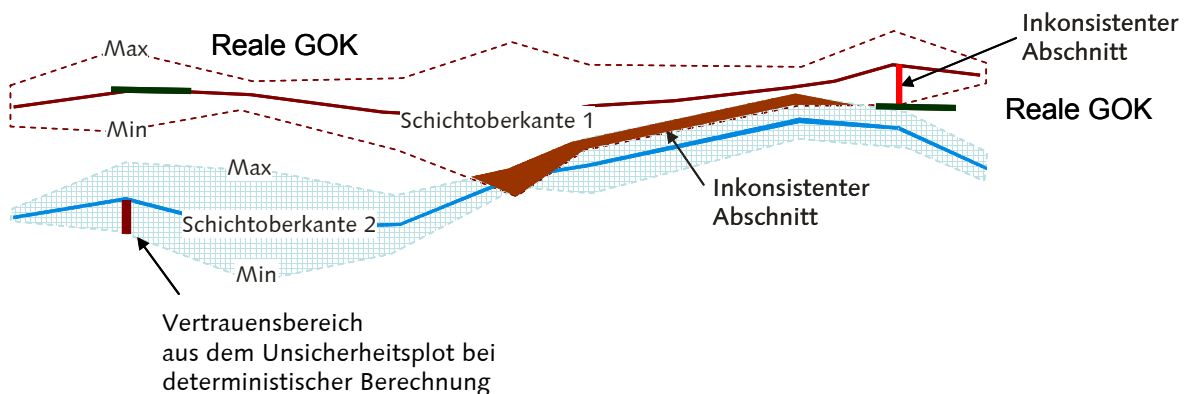


Bild 67: Inkonsistente Bereiche in zusammengesetzten Halbraummodellen infolge unsicherer Schichtgrenzen

Einfache Mittelungsalgorithmen zur Berücksichtigung der Problematik wurden bereits in [43] vorgeschlagen. Es ist mittels dieser aber nicht möglich Schätzunsicherheiten zu quantifizieren.

Auf der Grundlage der geostatistischen Methoden werden in [9] zur Herstellung der Modellkonsistenz die Regressionsmethode und die Methode der Smoothing Splines vorgeschlagen, welche es ermöglichen, die Güte der Schätzung zu quantifizieren.

Für die Bestimmung der Homogenbereiche, die sich durch geologische Schichtungen abgrenzen, wird die Methode der Smoothing Splines im Weiteren angewandt. Sie ist in der Lage die Homogenbereichsfolge sicherzustellen. Unter Verwendung von Zusatzinformationen kann sie das Modell regional nachjustieren. Im Wesentlichen findet eine nachträgliche Anpassung von Modellen durch die Integration von Referenzprofilen statt. Dieses Profil kann dabei nicht Bestandteil vorangegangener geostatistischer Analysen sein.

Ist beispielsweise die Höhenlage des Geländes an einem bislang unbeprobten Ort im Untersuchungsgebiet bekannt, kann das Modell mit Hilfe der Smoothing Splines angepasst werden. Dies gilt auch für 3D-Modelle.

Würden Klassifikationen des Baugrundes in Homogenbereiche spät oder gar nicht vorgenommen, was in der geotechnischen Praxis nicht üblich ist, kann auf die Herstellung der Modellkonsistenz verzichtet werden. Es werden damit keine zusätzlichen Unsicherheiten in das Halbraummodell integriert, die nicht quantifiziert werden können, da das geologische Modell bereits Resultat des Krigings wäre.

7.3. Fortpflanzung von Unsicherheiten in zusammengesetzten Halbraummodellen

Die vermeintliche einfache Modellierung von Homogenbereichen, in der ebene Modelle zu einem geologischen Modell zusammengefügt werden, hat den Nachteil, dass sich die Varianzen der Kennwerte im Hinblick auf geplante Auswertungen vervielfachen. Jede Kombination unsicherer Kenngrößen bedingt eine Vergrößerung der Unsicherheit des Kombinationsergebnisses. Ist die Kombination linear so gilt das Varianzenfortpflanzungsgesetz.

Abgeleitet aus Bild 68 ist beispielsweise die Mächtigkeit des Grundwasserstauers sowie die Mächtigkeit der Auffüllung für eine geotechnische Fragestellung von Interesse. Das Modell basiert auf der Schätzung der Homogenbereichsgrenzen.

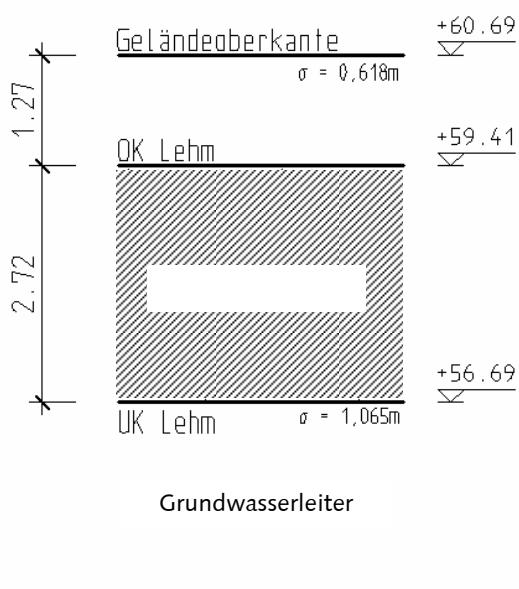


Bild 68: Zusammengesetztes Halbraummodell

Die Oberkanten der Homogenbereiche sind unsichere Kenngrößen. Sind die Unsicherheiten normalverteilt, errechnet sich für die Mächtigkeit D_{GS} des Grundwasserstauers der Erwartungswert und die Varianz zu

$$E[D_{GS}] = E[OK_Lehm] - E[UK_Lehm]$$

$$E[D_{GS}]^2 = E[OK_Lehm]^2 + E[UK_Lehm]^2$$

Unabhängig ob addiert oder subtrahiert wird, addieren sich die Varianzen der unsicheren Homogenbereichsgrenzen. Auch in dem hier gezeigten Sicherheitsnachweis werden zusammengesetzte geologische Modelle genutzt, so dass die Varianz des Sicherheitsnachweises, in Kapitel 9 die Abmessung des quadratischen Fundamentes, sich vergrößert.

Zukünftig sollte es das Ziel sein, das Anwachsen der Unsicherheit im Vorfeld der Baugrundmodellbildung auszuschließen. Dafür sollten möglichst wenige Vereinfachungen in Bezug zu den vorliegenden Messwerten getroffen werden. Das Rechnen mit abstrakten Informationen ist sicherer als das Rechnen mit Klassifizierungen. So ist beispielsweise das Rechnen mit Schichtoberkanten sicherer als das Rechnen mit Mächtigkeiten, insofern diese aus den Schichtoberkanten errechnet wurden.

7.4. Methode der Smoothing Splines

Die Methode beruht auf dem Vergleich einer prognostizierten Homogenbereichsfolge mit einer Referenzinformation. An jedem Gitternetzpunkt eines regulären Rasters werden die interpolierten Homogenbereichsgrenzen beziehungsweise –mächtigkeiten dem Referenzprofil gegenübergestellt. Es werden nach [9] zwei Möglichkeiten des Homogenbereichsverlaufes unterschieden:

- Alle Schätzwerte zu den Homogenbereichen sind positiv und somit im Schätzprofil vorhanden.
- Es existieren negative Schätzwerte zu Homogenbereichen und somit fehlen diese in bestimmten Schätzprofilen.

Die anzupassende Datenmenge im Untersuchungsgebiet wird subjektiv festgelegt. Hilfreich bei dieser Entscheidung können die bislang im Modell angegebenen Krigingvarianzen, die Varianzen des Unsicherheitsplots oder bestehende regionalgeologische Kenntnisse sein.

Im Folgenden sind die mittleren Homogenbereichsgrenzen aus einer gewählten Datenmenge einem Referenzprofil gegenübergestellt. Zusätzlich werden minimale und maximale Grenzwerte definiert. Die sich ergebenden Schnittpunkte der Profilkenngrößen liegen bei Modellkonsistenz auf einer Geraden mit einem Steigungswinkel von 45°. Dies ist aber meist nicht der Fall.

Daher werden Kurvenverläufe gesucht, die sich mit Angabe einer Schätzunsicherheit bestmöglich an die Kennwerte annähern und stets monoton steigend sind, vergleiche Bild 69. Die Anpassung einer Funktion mit linearen Methoden wäre wenig zufriedenstellend. Ein Polynomzug könnte monoton fallende Funktionsabschnitte haben. Die Methode der Smoothing Splines, in einfachster Form eine Aneinanderreihung kubischer Funktionsabschnitte, wird den Anforderungen gerecht. Hierbei ist für jedes Teilintervall eine separate Basisfunktion zu ermitteln, die schließlich zu einer Gesamtfunktion zusammengesetzt wird. Die Stetigkeit in den Übergängen der Definitionsbereiche der einzelnen Abschnitte wird durch mathematische Übergangs- und Randbedingungen sichergestellt.

Mit dem angepassten Kurvenverlauf wird es möglich, örtliche Zusatzinformationen oder auch lokale Anomalien in das Modell einzubeziehen, ohne dass der Wert der Interpolation durch andere Punkte in der Fläche beeinflusst wird.

Nachdem die optimale Splinefunktion gefunden ist, wird für jede Homogenbereichsgrenze innerhalb der repräsentativen Datenmenge ein neuer „angepasster“ Wert bestimmt. Hierzu werden die geostatistisch ermittelten Werte an der Splinefunktion gespiegelt und auf dem Referenzprofil abgebildet. Der dort angezeigte Wert ersetzt die Kenngröße im geologischen Profil, siehe Bild 69.

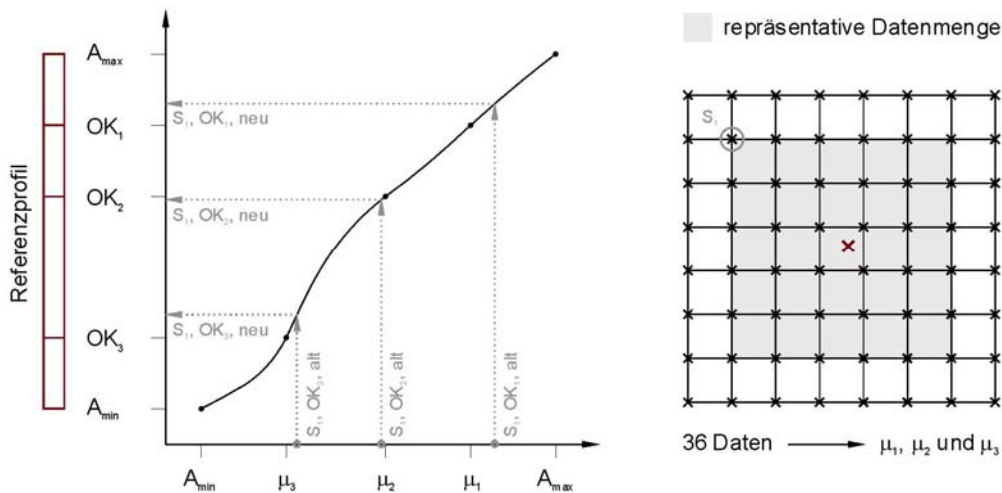


Bild 69: Anpassung eines Datenbereiches über die Methoden der Smoothing Splines

7.5. Baugrundmodell und Grenzzustand

Durch die Auswertung von Feld- und Laboruntersuchungen kann nur ein Bruchteil der Informationen zur Beschreibung des Baugrunds gewonnen werden. Um verlässliche geologische Modelle für einen heterogenen und anisotropen Baugrund zu erhalten und darauf basierende Auswertungen durchführen zu können, wären detailliertere Kenntnisse wünschenswert. Aus wirtschaftlichen Gründen, aus mangelnder Einsicht in die Notwen-

digkeit oder aus einem eingeschränkten Zeitrahmen ist eine umfangreiche Erkundung oft nicht möglich.

Nach veralteten Gesichtspunkten werden in [10] nachfolgende Empfehlungen für den Umgang mit Unsicherheiten angegeben:

- Akzeptiere, dass die anstehenden Baugrundverhältnisse mehr oder weniger abweichen und dass diese unsicher sind.
- Füge Sicherheitsfaktoren in Risikomanagementsysteme ein,
- Identifiziere geotechnische Gefahren in frühen Phasen der Projektplanung,
- Entscheide ob standardisierte oder hoch entwickelte geotechnische Annahmen sinnvoll sind,
- Erlaube für einzelne Untersuchungsprozesse parallele Untersuchungsmethoden, beispielsweise die Beobachtungsmethode.

Diese Herangehensweise kann nicht geteilt werden. Selbst mit einem geringen Datenumfang ist die Erstellung unsicherer geologischer Modelle mit unsicheren Baugrundkenngrößen möglich. Allgemein gilt, je geringer die Informationsbasis desto höher die Unsicherheiten. Es ist aber besser die Unsicherheiten quantifizieren zu können als diese, wie in [10] vorgeschlagen, zu verwischen.

Wie später gezeigt wird, ist die Ermittlung von Versagenswahrscheinlichkeiten abhängig von der Unsicherheit der Baugrundkenngrößen, der Unsicherheit des geologischen Modells und der Methode zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit. Es wäre daher ein robustes Maß zur Verifizierung der Versagenswahrscheinlichkeit wünschenswert. Aktuelle Richtungen der Zuverlässigkeits- und Entscheidungstheorie beruhen auf Rechenmodellen, die auf „abgeschwächten“ Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie basieren. Hierzu zählen unter anderen Intervallwahrscheinlichkeiten, konvexe Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, zufällige Mengen, Vertrauensmaße und Plausibilitätsmaße sowie unscharfe Mengen [26].

8. Grenzzustände und Zuverlässigkeit

8.1. Allgemein

Die analytischen und numerischen Methoden zur Auswertung von Grenzzuständen beziehungsweise zur Quantifizierung der Zuverlässigkeit beruhen auf der Definition eines Sicherheitsmaßes. Ein solches Maß ist beispielsweise der Sicherheitsabstand als Differenz zwischen Widerstand und Beanspruchung, als Kombination von Einwirkungen [16] .

Die Sicherheitsfestlegungen in der Vergangenheit beruhten zum größten Teil nicht auf einer Theorie oder Wissenschaft, sondern auf Erfahrungen mit früheren Bauwerken.

Durch die rasche Entwicklung entstehen neue Probleme, bei denen der Erfahrungsmechanismus versagt. Parallel wachsen die Sicherheitsanforderungen und mit Ihnen die Anforderungen an die Transparenz in der Zuverlässigkeitsanalyse.

Um den Anforderungen gerecht zu werden, ist es notwendig die Sicherheitsproblematik mit den Mitteln der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu behandeln [95], [100].

8.2. Versagenswahrscheinlichkeit und Zuverlässigkeit

Bauliche Anlagen des Grundbaus sollten unter Berücksichtigung der wirtschaftlichen Gegebenheiten ihre Gebrauchstauglichkeit während der gesamten Nutzungsdauer nicht verlieren. Nach [80] soll erreicht werden, dass konstruktive Anlagen sowie mögliche Versagensformen des Grundbaus hinreichend zuverlässig den auftretenden Beanspruchungen widerstehen. Dabei sollen die Tragfähigkeit und die Gebrauchstauglichkeit stets sichergestellt sein. Die erforderliche Zuverlässigkeit bezieht sich dabei auf die gesamte bauliche Anlage und hängt im Wesentlichen von den möglichen Folgen bei Nichterfüllen der an sie gestellten Anforderungen ab.

Die Anwendung statistischer Sicherheitsnachweise ermöglicht nach deren Detaillierungsgrad Aussagen zu erforderlichen Sicherheitsfaktoren beziehungsweise Versagenswahrscheinlichkeiten. Die Berechnungsverfahren werden in verschiedene Genauigkeitsstufen unterteilt [80]:

- Stufe I: Berechnungsmethode mit Teilsicherheitsbeiwerten – semiprobabilistische Methode
- Stufe II: Momentenmethode und Zuverlässigkeitstheorie I. Ordnung
- Stufe III: Zuverlässigkeitstheorie, Probabilistische Methode
- Stufe IV: Zuverlässigkeitstheoretische Optimierungsverfahren

Die Unsicherheit der Resultate geotechnischer Sicherheitsnachweise sind durch Risikoanalysen mit dem ökonomische Nutzen der Baumaßnahme verbunden [98], [99]. Die mit

der Auswertung von Grenzzuständen verbundenen Berechnungsverfahren werden als zuverlässigkeitstheoretische Optimierungsverfahren bezeichnet.

Entsprechend [28], [35], [76] kann die Durchführung einer Zuverlässigkeitsuntersuchung in folgende Arbeitsschritte unterteilt werden:

- Auswahl des zu untersuchenden Versagensmechanismus sowie die Wahl der zugehörigen beschreibenden Grenzzustandsfunktion,
- Festlegen der Zufallsvariablen und der Beziehungen untereinander, sowie deren Integration in das stochastische Modell,
- Festlegen eines Zuverlässigkeitsmaßes,
- Bestimmung eines Verfahrens zur Beurteilung des gewählten Zuverlässigkeitsmaßes.

Ein Bauwerk kann sich im Zustand des Versagens V oder im komplementären Zustand Nicht-Versagen \bar{V} befinden. Beiden Zuständen können Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit oder Ausfallwahrscheinlichkeit $p_f = P(V)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Grenzzustand während der Nutzungsdauer überschritten und damit das Versagen eintritt. Die Zuverlässigkeit $p_s = P(\bar{V})$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Überschreiten eines Grenzzustandes innerhalb der Nutzungsdauer nicht eintritt.

8.2.1. Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit

Das Verhalten von Bauwerken, ausgedrückt durch Grenzzustände, wird durch zufällige Kenngrößen bestimmt. Diese so genannten Basisvariablen X_i beschreiben beispielsweise geotechnische Kenngrößen. Sie lassen sich auf Grund statistischer Untersuchungen als Zufallsgrößen oder Zufallsprozesse darstellen. Durch die Anwendung der Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie kann die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Versagenszustandes theoretisch unter den folgenden Voraussetzungen bestimmt werden:

- Es existieren ausreichende statistische Informationen über die Basisvariablen X_i .
- Die mechanischen Gesetze über den Zusammenhang zwischen äußerem und innerem Widerstand des Tragwerkes sind mathematisch formulierbar.
- Der Grenzzustand, auf den sich die Versagenswahrscheinlichkeit bezieht, ist definiert und die Gesetze zum Rechnen mit Zufallsgrößen und Zufallsprozessen sind soweit vereinfacht aufbereitet, dass sie mit einem vertretbaren Aufwand auf das mechanische Problem anwendbar sind.

8.2.2. Die operative Versagenswahrscheinlichkeit

Sie ist nur ein Anteil an der Gesamtversagenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der berücksichtigten Basisvariablen. Die operative Versagenswahrscheinlichkeit, welche eine theoretische Wahrscheinlichkeit ist, kann als Vergleichsgröße und Entscheidungshilfe zu Quantifizierung von Aussagen über die Sicherheit und Zuverlässigkeit dienen. Sie ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die nur unter einem Komplex von Voraussetzungen gilt. Die operative Versagenswahrscheinlichkeit umfasst zwar nur einen Teilaspekt der Sicherheitsproblematik, aber es ist gerade der Teilaspekt, der für Bemessung und Konstruktion entscheidend ist. Die Quantifizierung der Versagenswahrscheinlichkeit ist empfindlich gegenüber Änderungen im stochastischen Modell.

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist eine Funktion der Zeit T . Je größer der Zeitraum ist, für den die Versagenswahrscheinlichkeit eines Grenzzustandes zu ermitteln ist, desto größer ist die Versagenswahrscheinlichkeit.

Zum Zeitpunkt $T=0$ ist stets der Zustand des Nicht-Versagens erfüllt

$$P_T(0) = 0; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P_f(T) = 1$$

Die Festlegung eines Bezugszeitraumes ist notwendig, um die Versagenswahrscheinlichkeit als Sicherheitsmaß verwenden zu können. Versagenswahrscheinlichkeiten können nur dann miteinander verglichen werden, wenn sie sich auf den gleichen Zeitraum beziehen. Die Nutzungsdauer des Tragwerks bietet sich als Bezug für die Zeit an.

8.3. Grenzzustand und Sicherheitsindex

Das Maß der Zuverlässigkeit lässt sich durch den Sicherheitsindex quantifizieren. Hierbei wird ausgehend von einem mechanischen Modell zunächst ein ausgewählter Grenzzustand $g(\cdot)$ in Abhängigkeit seiner Einflussgrößen betrachtet, und durch Zufallsparameter X_i formuliert

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0. \quad (8.1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung werden die sicheren Zustände von den unsicheren abgegrenzt. Da die Basisvariablen X_i Zufallsvariablen sind, ist auch der Grenzabstand Z eine Zufallsgröße. Der sichere Bereich kann durch die Beziehung angegeben werden

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0. \quad (8.2)$$

Das Versagen des Bauwerkes tritt ein, wenn

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0.$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit abgeleitet aus der Grenzzustandsfunktion kann durch verschiedene analytische und numerische Methoden ermittelt werden.

Die meist verwendeten sind

- die Methode der Sicherheitsfaktoren,
- diverse Sicherheitsindizes β_i und
- die direkte Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit $P_f(Z \leq 0)$

Das Nachweisformat zum semiprobabilistischen Bemessungskonzept, Methode der Teilsicherheitsfaktoren, wird nicht weiter erläutert, da dieses Stand der Technik ist. Es wird bereits in verschiedenen Normen, beispielsweise der DIN 1054 und EC 7, eingesetzt.

Die Zuverlässigkeit p_s als Komplementärereignis der Versagenswahrscheinlichkeit p_f ergibt sich aus:

$$p_s = 1 - p_f = 1 - g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (8.3)$$

X_i	die Basisvariablen
$g(\cdot)$	die Grenzzustandsfunktion
Z	der Sicherheitsabstand
$p_f(Z \leq 0)$	die operative Versagenswahrscheinlichkeit
p_s	die Zuverlässigkeit

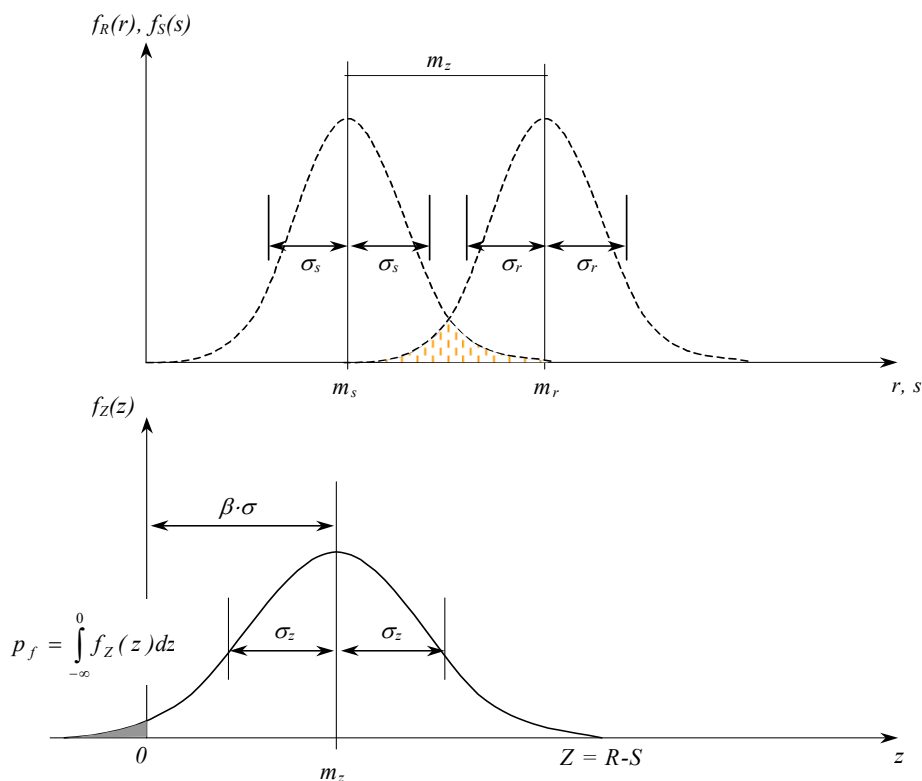


Bild 70: Einwirkungen S , und Widerstände R mit der zugehörigen Versagenswahrscheinlichkeit p_f

Da sowohl die Einwirkungen, denen ein Grenzzustand während der Nutzungsdauer unterliegt, als auch die Widerstände unsicher sind, besteht eine endliche Wahrscheinlichkeit p_f , dass die Beanspruchung größer ist als die Widerstand sind.

Die Sicherheitsindizes sind mit der Versagenswahrscheinlichkeit funktionell verknüpft, Tabelle 18.

8.4. Bestimmung der operativen Versagenswahrscheinlichkeit

Ein statisches System kann nach verschiedenen Grenzzuständen versagen und das in verschiedenen Tragwerkselementen oder Querschnitten. Die Zuverlässigkeitstheorie stellt Verfahren zur Ermittlung des Sicherheitsmaßes von verschiedenen Grenzzuständen zur Verfügung. Die probabilistischen Methoden dienen der Entscheidungsfindung unter unsicheren Bedingungen. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist keine Quantifizierung des Risikos [24]. Es ist zwischen der exakten Lösung und Näherungsverfahren zu unterscheiden. Die Algorithmen der im Weiteren genutzten Näherungsverfahren sind im Anhang dargestellt. Zum Verständnis wird zwischen dem X-Raum und dem Y-Raum unterschieden. Im so genannten X-Raum haben die unsicheren Parameter ihre typischen Verteilungsmerkmale. Für das Beispiel einer normalverteilten Basisvariablen gilt $X \in N[\mu, \sigma]$. Die Variablen aus dem X-Raum werden in den Y-Raum transformiert. Die transformierten Variablen liegen standardnormalverteilt vor mit $Y \in N[0, 1]$.

8.4.1. Exakte Lösung

Die exakte Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit bedingt die vollständige Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung der X_i . Allen Basisvariablen ist eine Dichtefunktion $f(X_1, X_2, \dots, X_m) = f_x(X_i)$ zugeordnet. Der X-Raum ist durch die Gleichung des Grenzzustandes geteilt in den sicheren Bereich V und in den unsicheren Bereich \bar{V} . Die Versagenswahrscheinlichkeit p_f ist gleich dem Integral der Verteilungsdichte f_x über den Versagensbereich

$$P_f = \int_{\{x|g(x) \leq 0\}} \dots \int_m f_x(X_1, X_2, \dots, X_m) dX_1 dX_2 \dots dX_m \quad (8.4)$$

Die Verteilungsdichten haben meist eine solche Form, dass eine geschlossene Integration auf Sonderfälle beschränkt bleibt. Sind alle Zufallsgrößen X_i normalverteilt und die Gleichung des Grenzzustandes linear, so lässt sich die Integration in geschlossener Form durchführen. Das Ergebnis bildet die Grundlage der Näherungsverfahren. Die m-dimensionale Verteilungsdichte lautet für normalverteilte, unabhängige Zufallsgrößen

$$f_x(X_1, X_2, \dots, X_m) = f_{x_1}(X_1) \cdot f_{x_2}(X_2) \cdot \dots \cdot f_{x_m}(X_m) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \prod_{i=1}^m \text{Var}[X_i]^{1/2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - E[X_i])^2}{\text{Var}[X_i]} \right)} \quad (8.5)$$

Ist die Grenzzustandsgleichung $g(x)$ linear, gilt

$$g(x) = c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i X_i. \quad (8.6)$$

Die c_i sind die nichtzufälligen Konstanten, die von der Struktur des statischen Systems abhängen. Die weiteren Untersuchungen werden nicht im Originalraum X der Basisvariablen, sondern in einem Raum Y der standardisierten Basisvariablen durchgeführt.

$$Y_i = \frac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (8.7)$$

Für die Verteilungsdichte der standardisierten Basisvariablen gilt

$$f_Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m Y_i^2 \right)} \quad (8.8)$$

Mit der Transformation geht die Grenzzustandsfunktion über in

$$h(Y_i) = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i \cdot E[X_i] + \sum_{i=1}^m c_i \cdot \text{Var}[X_i]^{1/2} \cdot Y_i = 0. \quad (8.9)$$

Bei der Überführung in die Hessesche Normalform ergibt sich

$$h(Y_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot Y_i + \beta = 0 \\ \alpha_i = \frac{c_i \cdot \text{Var}[X_i]^{1/2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m c_i^2 \cdot \text{Var}[X_i]}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{c_0 + \sum_{i=1}^m c_i \cdot E[X_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^m c_i^2 \cdot \text{Var}[X_i]}} \quad (8.10)$$

β ist der Sicherheitsindex. Er ist positiv, wenn der Koordinatenursprung des Y -Raumes im sicheren Bereich liegt, $h(0) > 0$, und er ist negativ, wenn der Ursprung im unsicheren Bereich liegt, $h(0) \leq 0$. Der absolute Betrag von β ist der kürzeste Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und der Grenzzustandsfunktion $h(Y_i) = 0$ im Y -Raum. Die α_i werden Wichtungsfaktoren genannt. Sie sind die negativen Richtungskosinusse des Lotes vom Koordinatenursprung auf $h(y)$ [80].

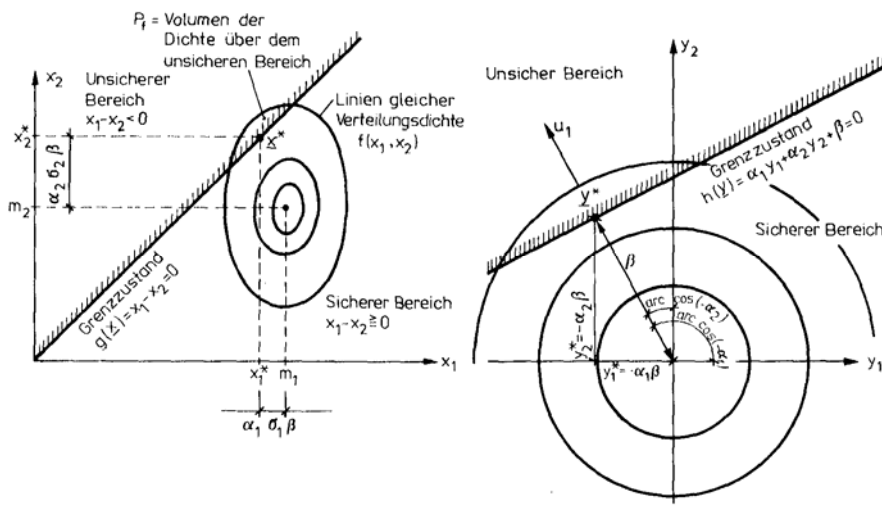


Bild 71: Darstellung der Versagenswahrscheinlichkeit und des Sicherheitsindex [80]

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird über die Integration der Verteilungsdichte im Y-Raum berechnet

$$p_f = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{(y|h(Y)<0)} \dots \int \prod_{i=1}^m e^{-\frac{Y_i^2}{2}} dY_i \quad (8.11)$$

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (8.12)$$

Der Sicherheitsindex β steht bei normalverteilten Zufallsgrößen im direkten Zusammenhang zur operativen Versagenswahrscheinlichkeit.

Die funktionellen Zusammenhänge beziehen sich auf unabhängige Basisvariablen und sind ausgenommen einiger Sonderfälle nicht geschlossen lösbar. Infolgedessen werden in den nächsten Abschnitten Näherungsverfahren zur Quantifizierung des Sicherheitsindex erwähnt. Die Näherungsverfahren sind Verfahren des Sicherheitsniveaus Stufe II. Diese werden ausschließlich für lineare Grenzzustandsgleichungen untersucht. Bei nichtlinearer Grenzzustandsgleichung ist diese vorab durch eine Taylorreihenentwicklung zu ersetzen.

8.4.2. Sicherheitsindex nach Cornell

Der Sicherheitsabstand Z wird aus den ersten beiden Momenten der gegebenen Zufallsgrößen X_i berechnet. Es gilt

$$Z = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i \cdot X_i \quad (8.13)$$

mit dem Erwartungswerte und der Varianz

$$E[Z] = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i \cdot E[X_i]$$

$$\text{Var}[Z] = \sum_{i=1}^m c_i^2 \cdot \text{Var}[X_i] + \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i \cdot c_j \cdot \text{Cov}[X_i, X_j]}_{i \neq j} \quad (8.14)$$

Der Sicherheitsabstand β_c wird nun als Verhältnis von Erwartungswert zu Standardabweichung definiert

$$\beta_c = \frac{E[Z]}{\sqrt{\text{Var}[Z]}} \quad (8.15)$$

Die Berechnung ist überschaubar, besitzt aber verschiedene Nachteile. Die spezielle mathematische Formulierung der Grenzzustandsgleichung stellt die entscheidendste und einschneidendste Abhängigkeit dar [80]. Von einem baupraktischen Sicherheitsmaß muss erwartet werden können, dass es unabhängig von einfachen mathematischen Umordnungen von $g(x)$ ist. β_c ist nicht invariant gegenüber äquivalenten Formulierungen des Grenzzustandsmodells. Der Algorithmus ist im Anhang beschrieben.

8.4.3. Sicherheitsindex nach Hasofer / Lind

Der Sicherheitsindex β_{HL} nach Hasofer/Lind [80] beschreibt den kürzesten Abstand zwischen dem Bemessungspunkt auf der Grenzzustandsgleichung und dem Koordinatenursprung im standardisierten Raum gemäß der exakten Lösung. Das Invarianzproblem des Sicherheitsindex nach Cornell ist eliminiert. Die Basisvariablen X_i werden in die normierten Basisvariablen Y_i überführt, siehe Abschnitt 8.4.1. Das Sicherheitsmaß ist definiert zu:

$$\delta = \min \left\{ \sqrt{\sum_{i=2}^m Y_i^2} \mid h(Y_i) = 0 \right\}. \quad (8.16)$$

Die Bestimmung des Sicherheitsindex wird auf eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zurückgeführt. Bei dieser Darstellung geht das Vorzeichen von β_{HL} verloren und gilt nur für positive β_{HL} , also für Konstruktionen mit kleiner Versagenswahrscheinlichkeit.

$$\beta_{HL} = \begin{cases} -\delta & \text{wenn } h(0) > 0 \\ +\delta & \text{wenn } h(0) < 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

Der Iterationszyklus für die Bestimmung des Sicherheitsindex nach Hasofer/Lind kann dem Anhang entnommen werden.

Das Verfahren konvergiert in Abhängigkeit von der Funktion $h(Y_i)$ gegen den minimalen Abstand δ oder gegen ein lokales Minimum. Bei komplizierten Verhältnissen ist es deshalb empfehlenswert die Iteration mit verschiedenen Startvektoren durchzuführen, um sich einen Überblick über die Lösungsmenge zu verschaffen und so das globale Minimum zu finden. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist sehr unterschiedlich. Sie ist umso besser, je "glatter" die Funktion $h(Y_i)$ ist.

8.4.4. Zuverlässigkeitstheorie 1.Ordnung

Bei dieser Methode wird vorausgesetzt, dass Informationen über den Verteilungstyp der Basisvariablen vorhanden sind. Die Entwicklung dieser Theorie ist mit den Namen LIND, RACKWITZ und FIEBLER [64] verbunden. Bei der Überführung der Basisvariablen X_i in die standardisierte normalverteilte Zufallsgröße Y_i sollen die Wahrscheinlichkeiten einander entsprechender Punkte gleich sein. Es muss für alle Basisvariablen und alle Punkte gelten $F_{X_i}(X_i) = \Phi(Y_i)$. Die dazugehörigen Transformationsbeziehungen sind

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(Y_i)) \quad \text{oder} \quad Y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i)). \quad (8.18)$$

Darin ist F_{X_i} die Verteilungsfunktion der Basisvariablen X_i , $F_{X_i}^{-1}$ deren inverse Funktion und Φ^{-1} die inverse Funktion der standardisierten Normalverteilung. Die Näherung dieser Vorgehensweise besteht nun darin, dass man die Grenzzustandsfunktion $h(Y_i)$ durch die Tangentialebene im Bemessungspunkt, der den Koordinatenursprung am nächsten liegt, ersetzt [80]. Für den Halbraum $h(y) < 0$ mit linearisierten Grenzzustand gilt

$$P_f = \Phi(-\beta). \quad (8.19)$$

Es können noch weitergehende Aussagen über die Beziehung zwischen Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit gemacht werden. Ist der unsichere Bereich in der Umgebung des Bemessungspunktes konvex, so ist $\Phi(-\beta)$ eine obere Schranke für P_f , und ist der sichere Bereich konkav, so ist $\Phi(-\beta)$ eine untere Schranke. Das Integral über die Dichtefunktion ergibt die Verteilungsfunktion $F_{\chi^2, m}(\beta^2)$ der χ^2 -Verteilung vom Freiheitsgrad m an der Stelle β^2 . Es gilt

$$\text{konvexer unsicherer Bereich} \quad \rightarrow \quad 0 < P_f < \Phi(-\beta)$$

$$\text{konkav sicherer Bereich} \quad \rightarrow \quad \Phi(-\beta) < P_f < 1 - F_{\chi^2, m}(\beta^2)$$

Die Konvergenz des rekursiven Algorithmus, siehe Anhang, entwickelt sich um so besser, desto mehr Ähnlichkeit zwischen den Verteilungen der X_i und der Normalverteilung be-

steht und je glatter die Grenzzustandsgleichung ist. Komplizierte Probleme können auch mehrere Lösungen besitzen. Die Lösung mit dem kleinsten Sicherheitsindex β ist für den Sicherheitsnachweis maßgebend.

8.4.5. Die Monte – Carlo – Methode

Die Monte-Carlo-Methode löst wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme mit statistischen Mitteln. Zur Lösung der Grenzzustandsgleichung Z werden Zufallszahlen X_i auf der Grundlage der statistischen Informationen (Verteilungstyp, Verteilungsparameter) erzeugt, in die Grenzzustandsgleichung eingesetzt und eine Realisation von Z ermittelt.

Nach mehrmaliger Wiederholung erhält man eine Stichprobe von Z , die mit den Regeln der Statistik ausgewertet wird. Ist die Stichprobe hinreichend groß, so sind die Häufigkeitsverteilungen Näherungswerte für die Wahrscheinlichkeiten.

Allgemein kann die Versagenswahrscheinlichkeit p_f als Resultat der Monte-Carlo-Simulation durch die nachfolgende Funktion

$$p_f = \frac{Z_{i,v}}{M} \quad \begin{array}{ll} p_f & \text{Versagenswahrscheinlichkeit} \\ Z_{i,v} & \text{Realisationen im Versagensbereich} \\ M & \text{Anzahl der Versuche} \end{array} \quad (8.20)$$

oder auf der Basis von Bild 70 bestimmt werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist in der Regel eine kleine Zahl. Um kleine Werte mit einer sehr hohen Genauigkeit berechnen zu können, benötigt man einen außerordentlich großen Stichprobenumfang, der praktisch nicht mehr realisierbar ist. Die Rechengenauigkeit dieser Methode ist umgekehrt proportional zur Wurzel der Realisationen. Nach [80] gilt

$$\sqrt{\frac{D}{M}} \sim \text{Rechengenauigkeit} \quad \begin{array}{ll} D & \text{Konstante zur Steuerung des Prozesses} \\ M & \text{Anzahl der Realisationen} \end{array} \quad (8.21)$$

Für die Steigerung der Rechengenauigkeit um 10% ist die Erhöhung der Realisationen um den Faktor 100 erforderlich. Um die Dichtefunktion der Realisationen der Grenzzustandsfunktion exakt bestimmen zu können, insbesondere für kleine Versagenswahrscheinlichkeiten, ist eine Simulationsanzahl gemäß Bild 72 erforderlich.

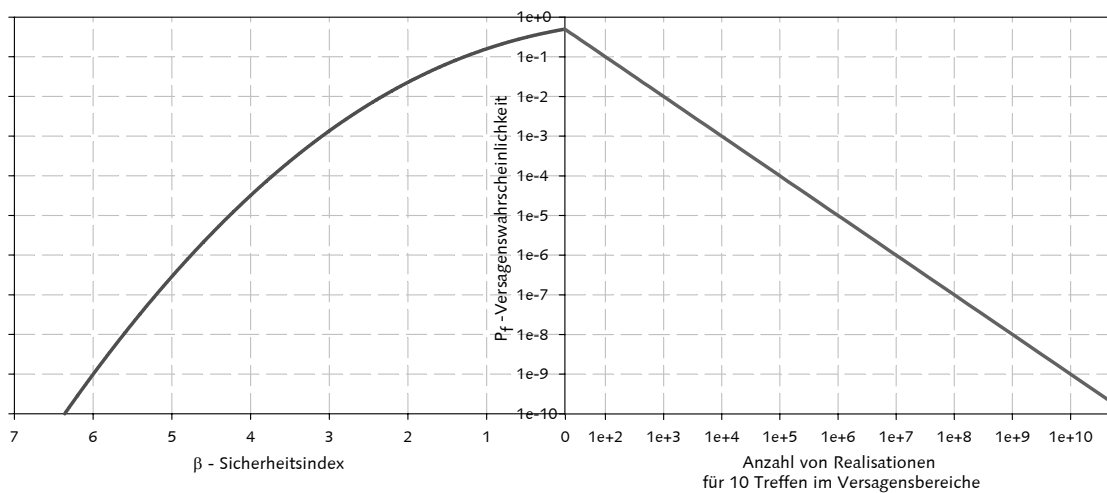


Bild 72: Abhängigkeit zwischen dem probabilistischen Sicherheitsmaß P_f und der erforderlichen Realisationsanzahl M

Eine erhebliche Stichprobenreduktion wird durch die Verwendung von modifizierten Verfahren ermöglicht, beispielsweise durch das Verfahren von Hannus [80].

Die Monte-Carlo-Simulation ist nicht nur für stochastisch unabhängige normalverteilte Variablen einsetzbar. Ihr Anwendungsbereich umfasst ebenfalls die nichtnormalverteilten Zufallsvariablen sowie die stochastisch abhängigen Variablen. Beide Sonderfälle können durch Variationen des Parameterraums durch die Monte-Carlo-Methode berücksichtigt werden. Detaillierte Ausführungen können [51] entnommen werden.

8.5. Vorschläge zur Festlegung des Sicherheitsniveaus

Die Vorschläge zeichnen sich durch eine Differenzierung der operativen Versagenswahrscheinlichkeit oder des Sicherheitsindex nach der Schwere der zu erwartenden Versagensfolgen aus. Dabei wird teilweise nach dem Prinzip der Risikobetrachtung vorgegangen, indem zwischen Folgen für menschliches Leben und Gesundheit und ökonomischen Folgen unterschieden wird, aber auch nach Art des Grenzzustandes. Alle Vorschläge beziehen sich auf einen Bezugsraum von $T = 1$ Jahr. Die Grundlage der hier durchgeführten Berechnungen bilden die Empfehlungen des DIN - Normenausschuss Bauwesen, [19].

Mögliche Folgen von Gefährdungen, die		Sicherheits- klasse
vorwiegend die Tragfähigkeit betreffen	vorwiegend die Gebrauchsfähigkeit betreffen *)	
keine Gefahr für Menschenleben und geringe wirtschaftliche Folgen	geringe wirtschaftliche Folgen, geringe Beeinträchtigung der Nutzung	1
Gefahr für Menschenleben und/oder beachtliche wirtschaftliche Folgen	beachtliche wirtschaftliche Folgen, beachtliche Beeinträchtigung der Nutzung	2
große Bedeutung der baulichen Anlage für die Öffentlichkeit	große wirtschaftliche Folgen, große Beeinträchtigung der Nutzung	3

*) Besteht bei Verlust der Gebrauchsfähigkeit Gefahr für Leib und Leben (z.B. Undichtigkeit von Behältern und Leitungen mit gefährlichen Stoffen), so wird dieser wie ein Verlust der Tragfähigkeit behandelt.

Tabelle 16 Definition der Sicherheitsklassen nach [19]

Art des Grenzzustandes	Sicherheitsklasse		
	1	2	3
Gebrauchsfähigkeit	2,5	3,0	3,5
Tragfähigkeit	4,2	4,7	5,2

Tabelle 17 Definition des Sicherheitsindex β nach [19]

Zwischen ausgewählten Sicherheitsindexen β und der Versagenswahrscheinlichkeit P_f bestehen die Zusammenhänge in Tabelle 18.

Versagenswahrscheinlichkeit P_f	0,5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}
Sicherheitsindex β	0	1,282	2,327	3,091	4,265	5,199

Tabelle 18: Zusammenhang zwischen Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheitsindex nach [19]

9. Nachweis von Gründungselementen an einem Industriestandort

9.1. Geologie des Standortes

Der Industriestandort liegt im Kyffhäuserkreis zwischen Harz, Thüringer Wald und Thüringischem Schiefergebirge, im nördlichen Teil des Thüringer Beckens. Dieses Gebiet wird überwiegend von triassischen Ablagerungen eingenommen. Der geologischen Karte zufolge sind für das anstehende Deckgebirge des Kartenblattes Artern Gesteine des Buntsandsteins zu erwarten. Darunter stehen mächtige saline Ablagerungen des Zechsteins an, die in den Beckenrandbereichen teilweise ab- beziehungsweise ausgelaugt sind. Das Grundgebirge besteht im Wesentlichen aus metamorphen Gesteinen des Variszikums, Bild 73.

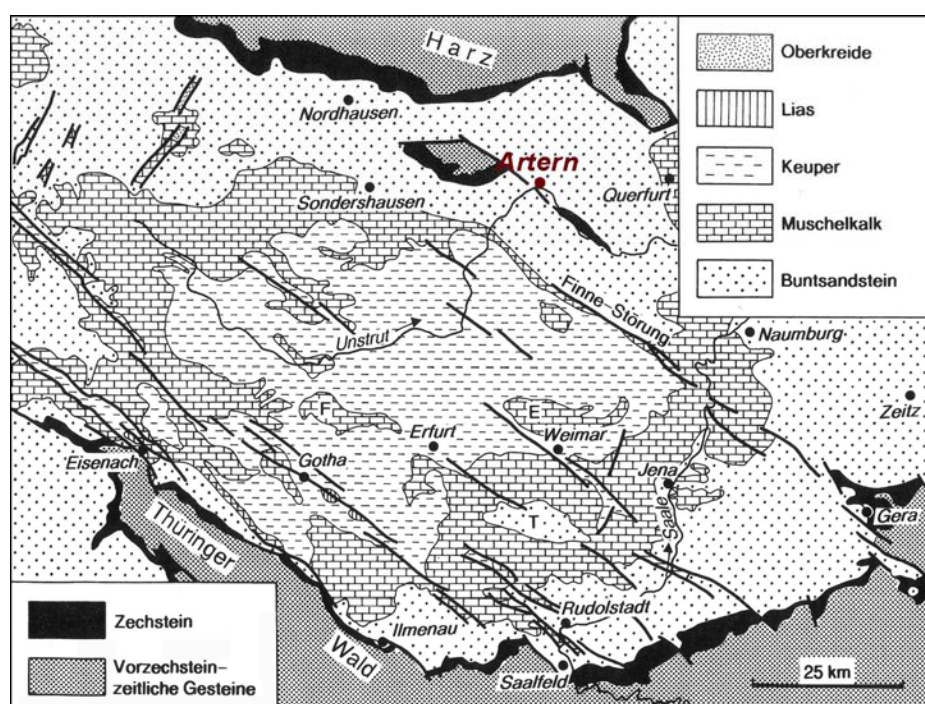


Bild 73: Geologische Übersichtskarte des Thüringer Beckens

Überlagert werden die Deckgebirgsformationen von jüngeren Sedimenten. Hierbei weisen tertiäre Sedimente eine geringe, quartäre Sedimente eine höhere Verbreitung auf. In Tälern und auf Talterrassen finden sich großflächige pleistozäne Schotter. Im Zentrum des Beckens lagert der Trias Löss [34].

Der Standort befindet sich in Randlage zur Stadt Artern. Ihre Gestalt erhielt die Senke im Tertiär während des jüngeren Oligozäns durch die Ab- beziehungsweise Auslaugung des mehrere hundert Meter mächtigen Staßfurt-Steinsalzes im tieferen Untergrund. Die bruchlosen Senkungen gingen kontinuierlich mit unterschiedlicher Intensität einher, wobei das Deckgebirge schrittweise auf tiefer liegende Horizonte abgesetzt wurde. Begüns-

tigt durch die sich herausbildende Morphologie konnte während des Quartärs eine mächtige pleistozäne Lockergesteinsauflage als Folge mehrer kaltzeitlicher Vereisungen entstehen. Diese blieb in der vor Erosion geschützten Senke bis heute lückenlos erhalten [82]. Anhand der oberflächennah austreichenden Sedimente sowie unter Annahme, dass die Schichten annähernd gleichsinnig mit der Hangneigung des Weinberges nach Osten einfallen, werden die Aufschlüsse der zeitlich versetzten Kern- und Detailerkundung interpretieren. Für die Kernerkundung, siehe Bild 75, wurden 4 Kernbohrungen (30m u. GOK), 12 Kleinbohrungen (12m u. GOK) und 12 leichte Rammsondierungen DPL nach DIN 4094 abgeteuft. Zusätzlich liegen aus der Detailerkundung, siehe Bild 76, die Ansprache der Bohrkerne BK-WI (40m u. GOK) und BK-WII (80m u. GOK), sowie die Ergebnisse aus 18 Drucksondierungen vor, die wegen des hohen Eindringwiderstandes der Sonde nur bis zu einer Tiefe von etwa 23 m unter Gelände niedergebracht werden konnten.

Die erkundeten Profile fügen sich gut in den auf der Basis neuerer Kartierungsdaten präzisierten Kenntnisstand über die Region ein [82].

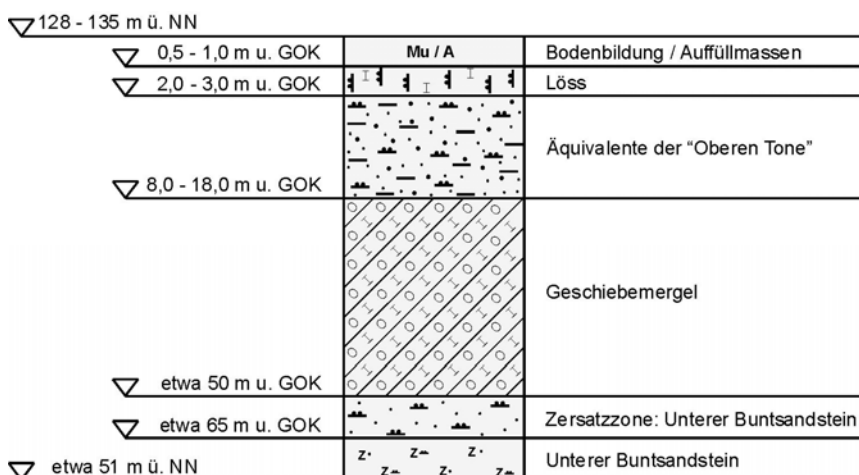


Bild 74: Vereinfachtes Baugrundprofil

Das Holozän ist in den obersten Bodenschichten nicht durch Sedimentablagerungen vertreten, sondern durch Bodenbildungen und teilweise auch durch anthropogene Auffüllmassen. Darunter folgen schluffreiche Schichten, bei denen es sich um verlagerte weichsel-kaltzeitliche Fließlöss, Hanglehne bzw. Abschwemmmassen handelt. Die Einstufung der daraufhin im Liegenden anstehenden Lockergesteinsfolge ist nach Datenlage noch mit Unsicherheiten behaftet. Nach den Ergebnissen der Ramm- und Drucksondierungen scheint die Untergrenze dieser Tone bereichsweise auf bis zu 18m unter Gelände anzufallen. In den beiden Bohrungen BK-WI und BK-WII liegt sie bei etwa 10m unter Gelände. Charakteristisch für die regionalgeologische Situation ist ein mächtiger elster-kaltzeitlicher Geschiebemergel-Komplex mit einer Mächtigkeit von 38,7 m (Bohrung BK-WII), dessen Grobgeschiebebestand besonders im tieferen Abschnitt konzentriert zu sein

scheint. Dieser ist in den Bohrprofilen sehr deutlich durch die Signatur der Sandkomponente abgegrenzt. Darunter folgt eine früh-elster-kaltzeitliche Bänder-ton-Abfolge mit einer erbohrten Mächtigkeit von 7,3m (Bohrung BK-WII). Diese liegt dem präglazialen Buntsandsteinersatz auf. Erst unterhalb von ca. 66 m unter Gelände vollzieht sich der Übergang zum Festgestein, zur Calvörde-Folge des unteren Buntsandsteins, siehe Bild 74.

9.2. Geotechnisches Profil / Skizze zum Bauvorhaben

Aus der Entstehung der Lockergesteinsauflage heraus lassen sich Bereiche mit annähernd gleichen Eigenschaften zusammenfassen. Diese können als Homogenbereiche angesehen werden. Ihre Festlegung erfolgt weitgehend subjektiv auf Grundlage der Kern- bzw. der Detailerkundung, wobei eine gleich hohe Zuverlässigkeit der genannten Datensätze vorausgesetzt wird.

Aus der Bodenansprache, den Ergebnissen der Ramm- und Drucksondierungen und aus den vorliegenden bodenmechanischen Laborversuchen werden in Tabelle 19 den einzelnen Schichten bodenmechanische Kenngrößen als charakteristische Werte im Sinne der DIN 4020 zugeordnet, d.h. sie werden in ihrer Streubreite oder zur ungünstigen Seite hin vorsichtig abgeschätzt angegeben. Die Steifemoduln gelten für eine Erstbelastung. Die Streubreite deckt die Unsicherheiten, aber auch den Spannungszustand (Tiefenlage) ab.

Nr	Schicht	Raumgewichte		Scherparameter			Modul
		γ [kN/m ³]	γ' [kN/m ³]	φ' [°]	c [kN/m ²]	c _u [kN/m ²]	E _s [MN/m ²]
1	Schluff, fs, weich	17,0	10,5	22,0	8,0	30	8
2	Ton, u - U, t, steif-halbfest	17,5	11,0	20,0	15,0	100	12-16
3	Schluff, sandig, halbfest	20,0	10,5	27,0	35,0	250	20-40
4	Ton, steif	17,5	11,0	22,0	40,0	150	20
5	Felsersatz	20,0	10,0	30,0	-	-	50
6	Sandstein, entfestigt	22,5	12,5	30,0	>50	>500	>100

Tabelle 19: Bodenmechanische Kenngrößen, erste Annahme

Aus den 6 angetroffenen Schichten wird das Homogenbereichsmodell in Bild 77 als Grundlage für den Sicherheitsnachweis erstellt. Die Unsicherheit der Kenngrößen wird in das geologische Modell integriert.

Weitläufige Bauwerke wie die hier zur Diskussion stehende Halle mit circa 15100 m² überbauter Grundfläche bedingen für wirtschaftliche Gründungslösungen flächende-

ckende Aussagen über die anstehenden Baugrundverhältnisse. Aus der Erkundung liegt jedoch nur punktuelles und hoch variables Wissen über das Planungsgebiet vor.

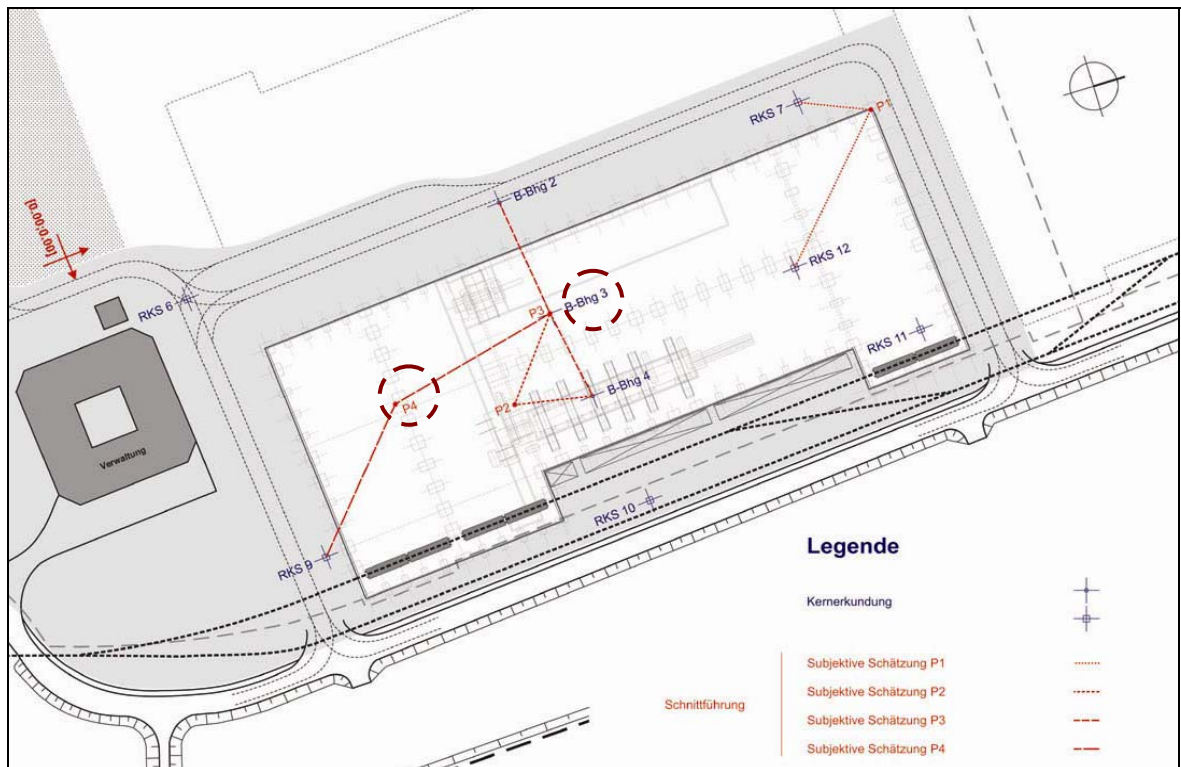


Bild 75: Datenbasis Kernerkundung mit Schnittführung für die subjektive Schätzung

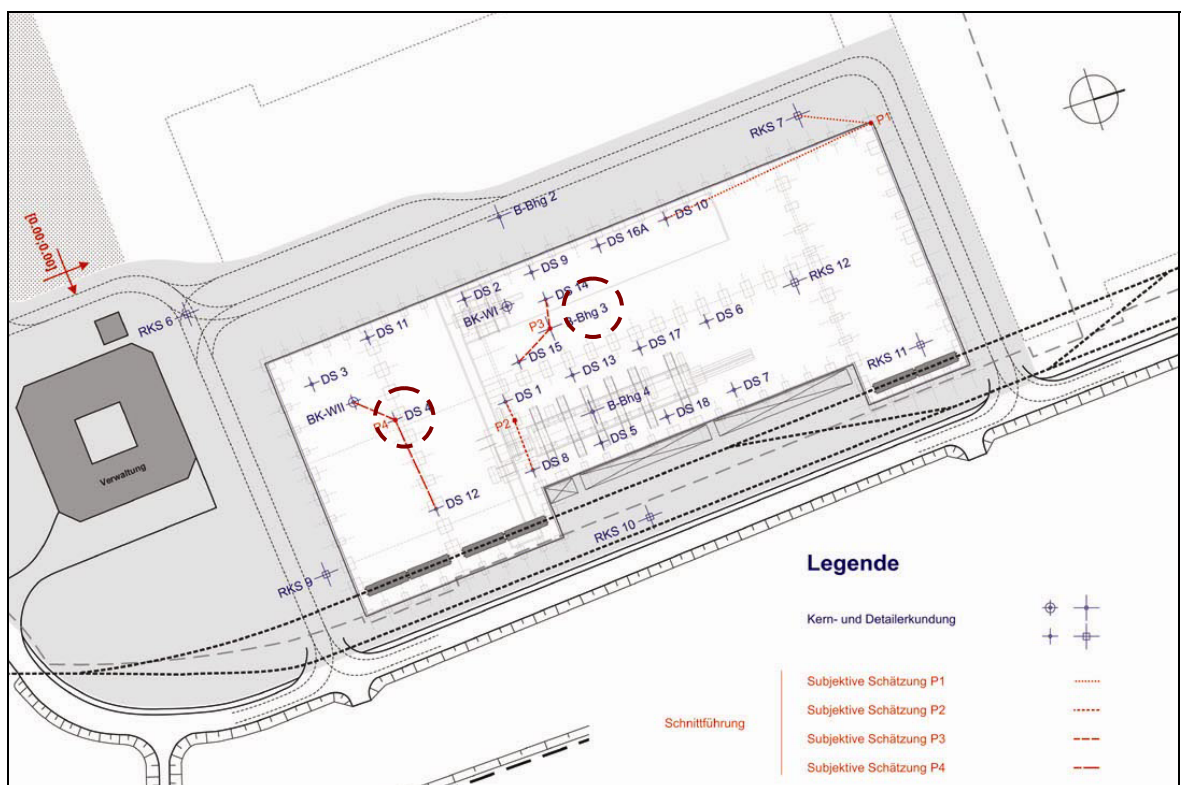
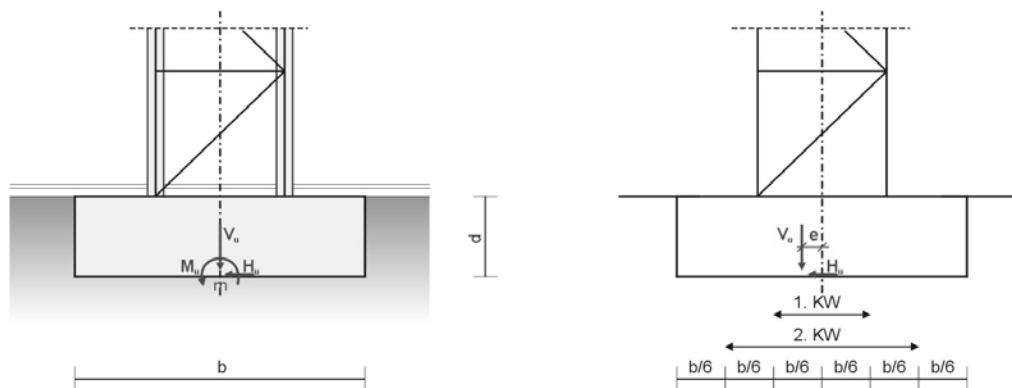


Bild 76: Datenbasis Kern- und Detailerkundung mit Schnittführung für die subjektive Schätzung

9.3. Grenzzustandsuntersuchung

Beispielhaft werden an einer Kranbahnstütze die Auswirkungen der geostatistischen Modellbildung mit unsicheren Parametern verdeutlicht. Als Grenzzustand wird die maximale Schiefstellung einer Kranbahnfachwerkstütze unter Gesamtlast am Ort der Drucksondierung DS4, vergleiche mit Bild 76, untersucht. Für die Erstellung der geologischen Profile wird die Drucksondierung DS4 nicht berücksichtigt. Sie dient als Gütemaßstab für die geologische Modellbildung.



$$e = M_u / V_u \leq b / 3 \quad e \quad \text{Ausmitte} \quad (9.1)$$

M_u Moment infolge Gesamtbelastung
 V_u Vertikallast infolge Gesamtbelastung

Aus Erfassungswerten ergeben sich infolge Gesamtlast die Schnittgrößen $M = 1263,6 \text{ kNm}$, $H = 32,2 \text{ kN}$ und $V = 1330,0 \text{ kN}$ an der Fundamentoberkante. Unter Annahme einer Fundamentdicke von $1,0\text{m}$ ergeben sich an der Fundamentsohle zzgl. Fundamenteigenlast EL $M = 1295,80 \text{ kNm}$ und $V = 1330,0 \text{ kN} + \text{EL}$. Des Weiteren wurde eine maximale Grenzschiefstellung von $\tan \alpha = 0,003$ und eine maximale Gleichsetzung von $s_m = 4\text{cm}$ vorgegeben. Die Grenzzustandsgleichung $g(x)$ für die Setzungsberechnung wird festgesetzt mit

$$s_m + s_x = \sigma_o \cdot b \cdot \left[\frac{f_1}{E_{m,1}} + \sum_{i=2}^n \frac{(f_i - f_{i-1})}{E_{m,i}} \right] + \frac{M_y}{b^3} \cdot \left[\frac{f_{x,1}}{E_{m,1}} + \sum_{i=2}^n \frac{(f_{x,i} - f_{x,i-1})}{E_{m,i}} \right] \cdot \frac{b}{2} \quad (9.2)$$

$$g(x) = \sigma_o \cdot b \cdot \left[\frac{f_1}{E_{m,1}} + \sum_{i=2}^n \frac{(f_i - f_{i-1})}{E_{m,i}} \right] + \frac{M_y}{b^3} \cdot \left[\frac{f_{x,1}}{E_{m,1}} + \sum_{i=2}^n \frac{(f_{x,i} - f_{x,i-1})}{E_{m,i}} \right] \cdot \frac{b}{2} - (s_m + s_x)$$

Zunächst wird die deterministische Lösung mit dem subjektiv geschätzten Baugrundmodell ermittelt, um den dominanten Anteil zwischen Gleichsetzung und Schiefstellung zu

bestimmen. Alle Auswertungen beruhen auf dem selbst entwickelten Programm „Setzungsberechnung“ für diese Arbeit.

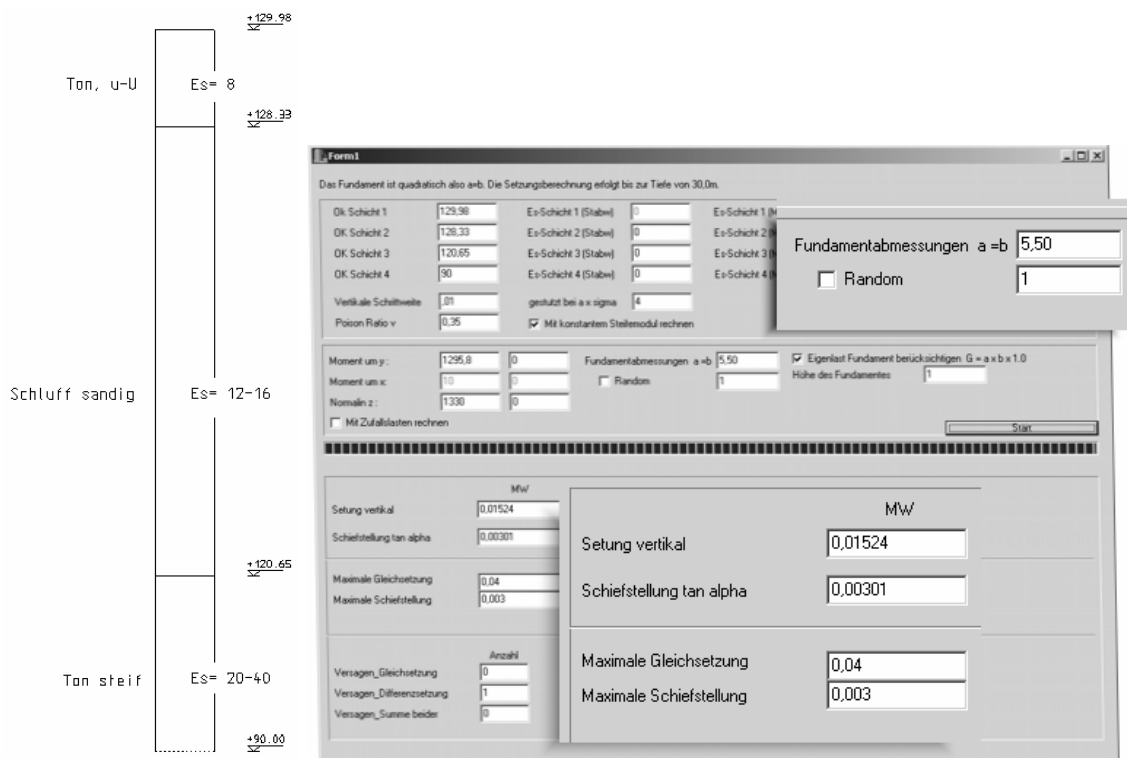


Bild 77: Baugrundprofil aus subjektiver Schätzung mit deterministisch bestimmten Setzungsanteilen

Für den rein deterministischen Fall erhält man die quadratischen Abmessungen von $a=b=5,50\text{m}$. Als maßgebender Grenzzustand erweist sich die Schiefstellung. Die Gleichsetzung ist für die gewählte und im Weiteren als konstant angenommene Fundamenthöhe von $h=1,00\text{m}$ sowie der konstanten äußeren Last von 1330kN nicht bemessungsrelevant. Erst ab einer äußeren Normalkraft von 3510kN wird die Gleichsetzung maßgebend. Der Gleichsetzungsanteil wird im Weiteren vernachlässigt. Die Grenzzustandsgleichung vereinfacht sich zu

$$g\left(\frac{1}{E_{m,i}}\right) = 0.0 = \frac{M_y}{b^3} \cdot \left[\frac{f_{x,1}}{E_{m,1}} + \sum_{i=2}^n \frac{(f_{x,i} - f_{x,i-1})}{E_{m,i}} \right] - 0,003 \tag{9.3}$$

für

$$g\left(\frac{1}{E_{m,i}}\right) < 0.0 \text{ ist die Gebrauchstauglichkeit nicht gegeben} \tag{9.4}$$

Entsprechend den Resultaten der geostatistischen Modellierung werden zum einen die Schichtdicken und zum anderen die Steifemodule variiert, um die Unsicherheit der Baugrundkenngrößen bis zum Gebrauchstauglichkeitsnachweis nachvollziehen zu können.

Für die analytische Auswertung ist es vorteilhaft, wenn die Kenngrößen innerhalb der Grenzzustandsgleichung linear eingebunden sind. Für unsichere Steifemodule wird als Basisvariable nicht $E_{m,i}$, sondern $1/E_{m,i}$ verwendet. Die jeweiligen statistischen Parameter werden mit Hilfe des entwickelten Setzungsberechnungsprogrammes auf der Grundlage von mindestens 10000 Simulationen numerisch bestimmt. Die Gebrauchstauglichkeitsuntersuchung wird für die Sicherheitsklasse 2 für eine angestrebte Versagenswahrscheinlichkeit von $p_f = 10^{-3}$ erfolgen, siehe Tabelle 16 bis Tabelle 18.

9.3.1. Variation des Steifemoduls

Die Erkundung des Untersuchungsgebietes erfolgte vorrangig durch Drucksondierungen. Infolge der Auswertung der Sondiererergebnisse sind zwei Wege zur Bestimmung des schichtspezifischen Steifemoduls denkbar. Zum einen der unter Berücksichtigung kleiner Verformungen mit variablem Steifemodul in Abhängigkeit des Dehnungszustandes und zum anderen der auf der Grundlage von Korrelationen gemäß DIN 4094 sowie Untersuchungen an den Bohrkernen, aus denen die Angaben in Tabelle 19 abgeleitet wurden. Die nachfolgend gezeigten Auswertungen beziehen sich auf die Steifemodule auf der Grundlage von Korrelationen.

Steifemodul auf der Basis von Korrelationen

Der Steifemodul wird nicht dehnungsabhängig betrachtet.

Standardabw. $x \cdot \mu_i$	Schicht 1 $\mu_1 = 8,0$ MN/m ²	Schicht 2 $\mu_2 = 14$ MN/m ²	Schicht 3 $\mu_3 = 30$ MN/m ²	Fundamentbreite [m]	zugehörige Grenzschiefstellung $\tan \alpha$ rekursiv bestimmt für die Sicherheitsindizes		
					MC	Co	HL
0,05	0,4	0,7	1,5	5,70	0,00299	0,00299	0,00299
0,075	0,6	1,05	2,25	5,81	0,00305	0,00305	0,00305
0,10	0,8	1,4	3,0	5,92	0,00292	0,00292	0,00292
0,15	1,2	2,1	4,5	6,15	0,00291	0,00291	0,00291
0,20	1,6	2,8	6,0	6,43	0,00287	0,00287	0,00287
0,25	2,00	3,5	7,5	6,90	0,00284	0,00284	0,00284

- Fundamentbreite aus MC-Simulation für $p=10^{-3}$

- Co- Cornell / HL – Hasofer-Lind / ZV – Zuverlässigkeitsmethode 1. Ordnung

Tabelle 20: Fundamentbreiten in Abhängigkeit der Standardabweichung der Steifemodulen basierend auf der Monte-Carlo-Simulation und zugehörige Schiefstellungen für die Sicherheitsindizes

Die ermittelten Fundamentbreiten sind für eine Versagenswahrscheinlichkeit von $p_f=10^{-3}$ nachfolgend dargestellt. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Unsicherheit der Eingangskenngrößen die erforderliche Fundamentbreite zunimmt, um die Versagenswahrscheinlichkeit von 10^{-3} einhalten zu können.

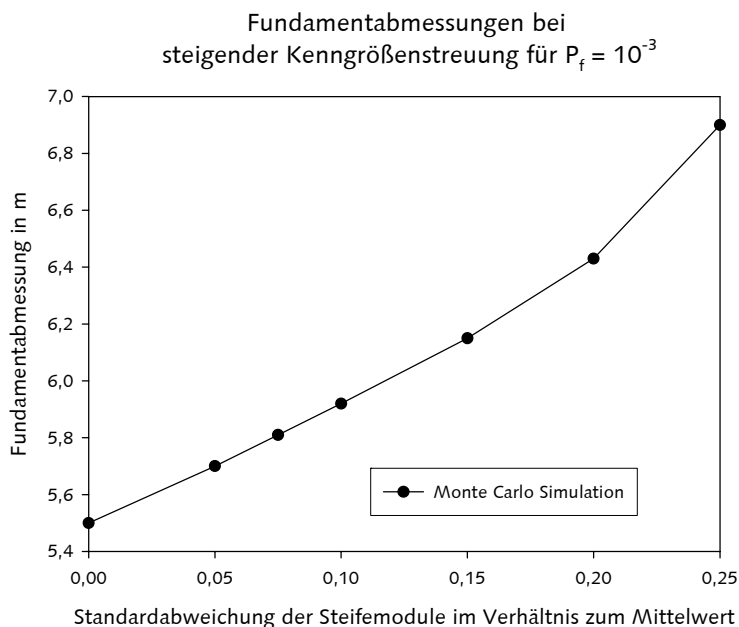


Bild 78: Grafische Darstellung der Resultate aus Tabelle 20

9.3.2. Unsicheres geologisches Modell

Für den Erkundungsstandort wurden ausschließlich zweidimensionale Interpolationen ausgewertet, da die 3D-Modelle zurzeit nicht geeignet visualisierbar sind. Die weiteren Analysen beziehen sich dazu auf den Datensatz ArternOK_Schicht. Die Baugrundprofile werden an Orten mit Originalmesswerten geschätzt. Hierzu gehört zum einen der Datenort von Drucksondierung 4 (DS 4), da sich dieser direkt neben der betrachteten Kranbahnstütze befindet, und zum anderen der Datenort von Bohrung 3 (Bhg 3). Die Originalmesswerte dieser Aufschlüsse werden vor den Berechnungen aus den entsprechenden Datensätzen entfernt. Mit der reduzierten Datenbasis werden geschätzte Profile für diese Prognoseorte erstellt und den Profilen aus Originalmesswerten gegenübergestellt.

Die Variographie wird unter Annahme isotroper beziehungsweise anisotroper Bedingungen durchgeführt. Um die Vergleichbarkeit sicherzustellen, liegen der Strukturanalyse bei allen Berechnungen die gleichen Variographierandbedingungen zugrunde. Die Schrittweite h des experimentellen Variogramms beträgt jeweils 20m, mit einer Radiusaufweitung von 11m. Bei Berechnungen, bei denen die Anisotropie berücksichtigt wird, kommt ein Richtungswinkel von $22,5^\circ$ mit einem Toleranzwinkel von 12° hinzu.

In der Phase der Strukturanalyse wird während der Anpassung des theoretischen Variogramms an das experimentelle Variogramm zwischen dem exponentiellen Modell und dem Gauß'schen Modell unterschieden.

Die geostatistischen Auswertungen werden auf der Grundlage des Ordinary und des Universal Krigings durchgeführt. Für das Universal Kriging wird wahlweise zwischen linearem und quadratischem Driftanteil unterschieden. Weiterhin werden jeweils drei und fünf Stützstellen als Schätznachbarschaft berücksichtigt.

Um einen möglichen Zugewinn an Aussagekraft zu zeigen, wird die Datenbasis erhöht. Die Krigingschätzungen werden daher in zwei Modellierungsetappen realisiert: zum einen für die Datenbasis der Kernerkundung mit 9 Aufschlusspunkten (DS 4) beziehungsweise 8 Aufschlusspunkten (Bhg 3), und zum anderen für die Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung mit jeweils 28 Aufschlusspunkten.

Darüber hinaus lassen sich alle Krigingergebnisse mit der Methode der Smoothing Splines örtlich verbessern. Auf diese Weise wurden Zusatzinformationen nachträglich in das bestehende Baugrundmodell integriert. Als Referenzprofil wird die Drucksondierung am Aufschlusspunkt DS 4 genutzt, vergleiche Bild 69. Es wird bei allen Berechnungen ein Spline-Faktor von 0,05 angewendet.

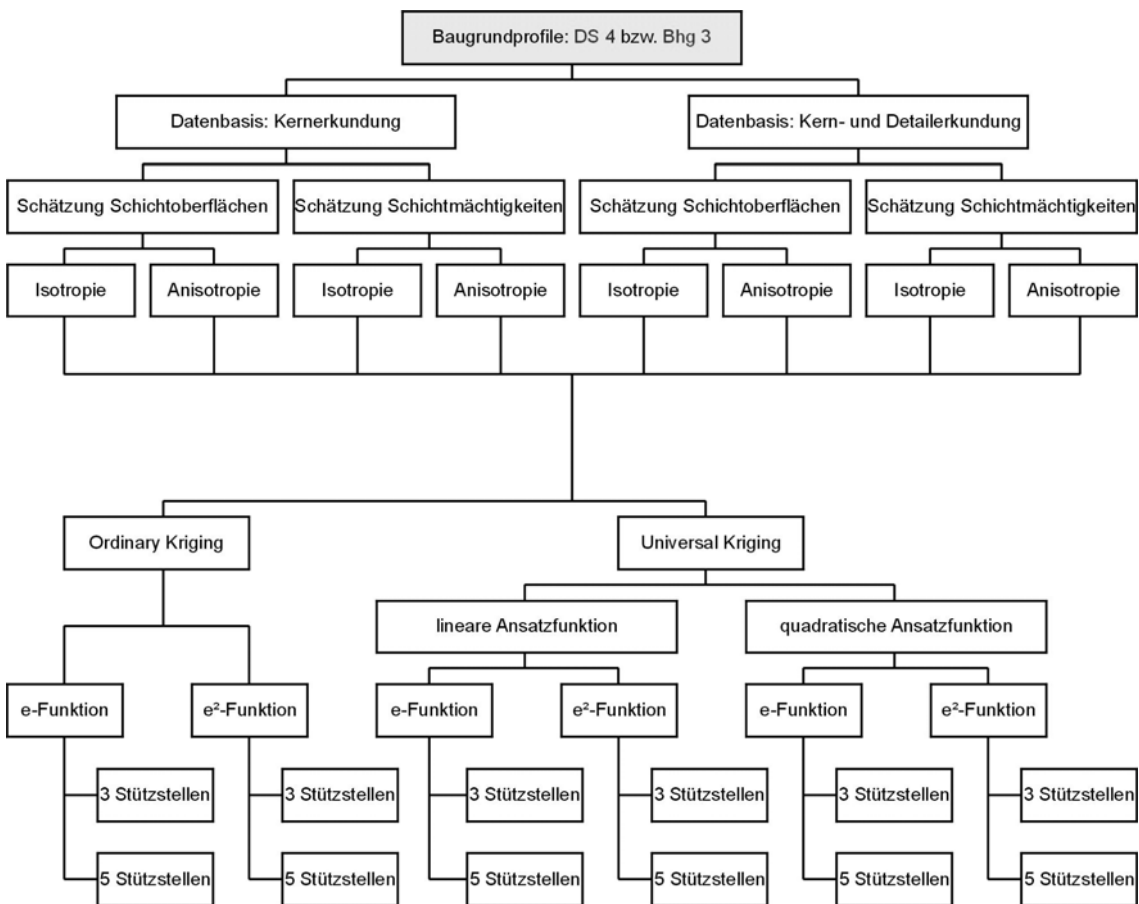
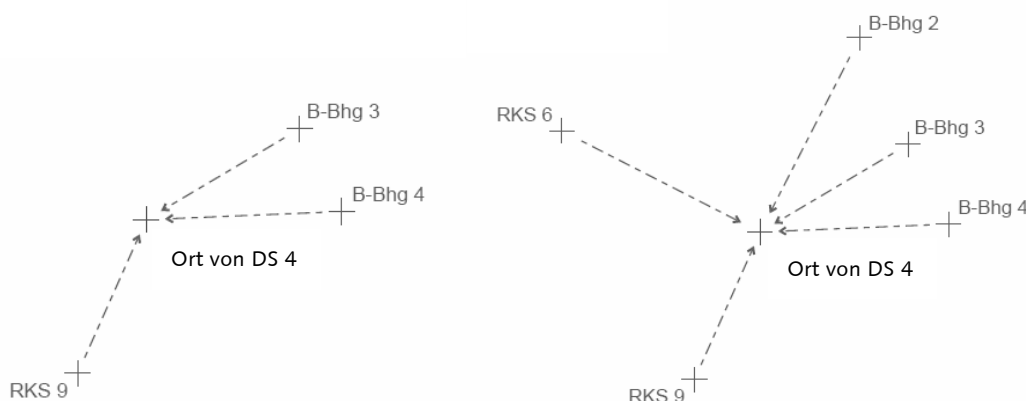


Bild 79: Organigramm der Auswertung

Aufgrund der zahlreichen Variationen innerhalb der Krigingschätzungen ergeben sich für den Prognoseort 96 Baugrundprofile, von denen 61 Profile mit den Resultaten der DS 4 sowie 65 Profile mit den Resultaten der Bhg 3 durch die Methode der Smoothing Splines nachträglich verbessert wurden.

Die regionale Lage der Prognoseorte und ihre Schätznachbarschaft unter Berücksichtigung der Daten der Kernerkundung sind nachfolgend dargestellt. In der jeweils letzten Tabellenspalte sind die Resultate der subjektiven Schätzung aufgezeigt, Bild 80.



Datenort	RKS 9	Bhg 3	Bhg 4		Mittelwert
Entfernung DS 4 [m]	52,78	56,05	61,54		-
Schicht 1	129,68	129,29	128,25		129,07
Schicht 2	127,18	127,79	126,35		127,11
Schicht 3	119,08	116,59	115,75		117,14

Datenort	RKS 9	Bhg 3	Bhg 4	Bhg 2	RKS 6	Mittelwert
Entfernung DS 4 [m]	52,78	56,05	61,54	71,21	72,81	-
Schicht 1	129,68	129,29	128,25	130,62	131,81	129,93
Schicht 2	127,18	127,79	126,35	129,12	130,21	128,13
Schicht 3	119,08	116,59	115,75	123,62	122,11	119,43

Bild 80: Regionale Situation am Prognoseort, übereinstimmend mit dem Ort von DS 4 für die Kernerkundung

Werden zusätzlich die Daten der Detailerkundung berücksichtigt, ändert sich die Relativlage des Prognoseortes, Bild 81. Verschiedene geostatistische Auswertungen für die untersuchten Prognoseorte sind dem Anhang zu entnehmen. In Abhängigkeit des Krigingverfahrens und der Relativlage des Prognoseortes wurden die Schätzungen dort interpretiert. Die weitere Beschreibung ist eine Zusammenfassung.

Die Prognoseergebnisse für das Universal Kriging mit quadratischer Driftfunktion konnten aufgrund der allgemein geringen Datenanzahl nicht berücksichtigt werden. Die Driftfunktion ist überbestimmt. Die überzähligen Monome werden regressionsbedingt während des Krigings abgespalten. Die Abspaltung unterliegt keiner Ordnung, so dass verschiedene Varianten von reduzierten Ansatzfunktionen entstehen. Dies bedingt starke

Schwankungen des Schätzers insbesondere dann, wenn quadratische Monome in die Schätzung eingehen.



Datenort	BK-WII	DS 11	DS 3			Mittelwert
Entfernung DS 4 [m]	14,14	27,04	28,28			-
Schicht 1	129,70	129,90	129,50			129,70
Schicht 2	127,70	128,00	127,50			127,73
Schicht 3	119,80	115,30	115,40			116,83

Datenort	BK-WII	DS 11	DS 3	DS 12	DS 1	Mittelwert
Entfernung DS 4 [m]	14,14	27,04	28,28	30,54	34,82	-
Schicht 1	129,70	129,90	129,50	130,60	129,70	129,88
Schicht 2	127,70	128,00	127,50	129,70	127,80	128,14
Schicht 3	119,80	115,30	115,40	122,50	113,50	117,30

Bild 81: Regionale Situation am Prognoseort, übereinstimmend mit dem Ort von DS 4 für die Kern- und Detailerkundung

Die Schwankungen im Prognosewert lassen sich nicht auf einzelne Einflussgrößen des geostatistischen Interpolationsprozesses zurückführen. Wesentlich ist, dass infolge des unregelmäßigen Probenrasters im Untersuchungsgebiet der Prognoseort sowohl innerhalb der Schätznachbarschaft (Interpolationsaufgabe) als auch außerhalb der Schätznachbarschaft (Extrapolationsaufgabe) vorzufinden war. Diese Relativlagen erzeugten beim Ordinary Kriging nur bedingt, beim Universal Kriging mit linearer Ansatzfunktion und drei Stützstellen der Schätznachbarschaft häufiger, extreme Prognosen. Mit zunehmender Anzahl von Stützstellen in der Schätznachbarschaft wird die Prognose geglättet. Beim Universal Kriging mit 5 Stützstellen ist das lineare Driftpolynom vollständig beschrieben, so dass die Schwankungen im Schätzergebnis reduziert werden konnten.

Liegt ein Interpolationsproblem vor, so erzeugen alle Krigingverfahren Prognosewerte, die innerhalb des Kenngrößenintervalls der Schätznachbarschaft einzuordnen sind. Im Fall eines Extrapolationsproblems können beim Universal Kriging Prognosen außerhalb dieses Intervalls eintreten. Die theoretischen Variogrammfunktionen haben nur einen Einfluss auf die Prognose insofern die Schätznachbarschaft innerhalb der ermittelten

Reichweite liegt. Liegt die Schätznachbarschaft außerhalb der Reichweite, ergibt sich der Prognosewert zum arithmetischen Mittel der Kenngrößen der Schätznachbarschaft.

Die Baugrundmodelle basierend auf dem Datensatz ArternOK_Schicht und ArternM_Schicht liefern identische Ergebnisse, wenn sich die Schätznachbarschaft außerhalb der Reichweite des Variogramms befindet.

Unter isotropen Randbedingungen kann allgemein zusammengefasst werden, dass mit beiden Baugrundmodellen an den zwei betrachteten Prognoseorten abweichende Schätzungen ermittelt wurden. Die Größe der Abweichung wird aber insgesamt als gering eingestuft.

Analoge Auswertungen wurden weiterhin unter Berücksichtigung der Reichweitenanisotropie durchgeführt. Die unterschiedlichen Reichweiten bedingen basierend auf der Halbraumtransformationen, siehe S. 184 ff., variierende Relativabstände der Schätznachbarschaft zum Prognoseort. Es kann nicht mehr zwischen einem Interpolationsproblem und einem Extrapolationsproblem unterschieden werden. Geringe Unterschiede zwischen den Schätzergebnissen können auf die veränderten Distanzen zwischen den Proben zurückgeführt werden. Durch sie können auch ungünstig wirkende Phänomene, wie Extrapolationen in Verbindung mit dem Universal Kriging und drei berücksichtigten Stützstellen, verstärkt werden. Durch die Transformationen liegen die Schätznachbarn oftmals dichter beieinander. Schon mit den üblichen Differenzen im Datenwert wird in diesem Fall die einbeschriebene Driftfunktion sehr steil. Durch die Verringerung des Relativabstandes zwischen Schätznachbarschaft und dem Prognoseort nimmt der Einfluss der Variogrammfunktion zu.

Im Vergleich zum realen Vergleichsprofil, P3 zu Bhg 3 und P4 zu DS 4, sind relative hohe Abweichungen zu verzeichnen. Diese werden hier für den Prognoseort P4 erläutert.

Liegt ein Interpolationsproblem vor, sollte der Wertebereich der Schätzung innerhalb des vorgegebenen Intervalls der Schätznachbarschaft liegen, Tabelle 21 und Tabelle 22.

	Schätznachbarschaft [m ü. NN]	reales Vergleichsprofil [m ü. NN]
Schicht 1	128,25 – 131,81	128,70
Schicht 2	126,35 – 130,21	127,30
Schicht 3	115,75 – 123,62	113,80

Tabelle 21: Schätznachbarschaft: P4 / Kernerkundung / 5 Stützstellen / isotrop

	Schätznachbarschaft [m ü. NN]	reales Vergleichsprofil [m ü. NN]
Schicht 1	129,50 – 130,60	128,70
Schicht 2	127,50 – 129,70	127,30
Schicht 3	113,50 – 122,50	113,80

Tabelle 22: Wertebereich der Schätznachbarschaft: P4 / Kern- und Detailerkundung / 5 Stützstellen / isotrop

Unter Berücksichtigung der Detailerkundung kann diese Aussage bestätigt werden. Läge ausschließlich die Kernerkundung als Datenbasis vor, so würde die Beckenstruktur unterhalb des Standortes nicht erkannt werden.

Jedes Krigingergebnis wird maßgeblich vom gewählten Schätzverfahren, sowie von seiner Schätznachbarschaft bestimmt. Die anisotropen Schätzergebnisse liefern die geringsten, als auch die höchsten Abweichungen zu realen Vergleichsprofilen. Die einzelnen Schichtgrenzen werden methodenbedingt unterschiedlich gut angenähert, so dass sich die Schichtmächtigkeiten bei der Anpassung in ihrem Wert verändern. Für den ausgewählten Grenzzustand für die Fundamentbemessung interessiert maßgeblich die Mächtigkeit der obersten Schicht.

Zur Integration von regionalen Zusatzinformationen wurde im Weiteren die Methode der Smoothing Splines genutzt. Durch den Einsatz dieses Verfahrens konnten die Abweichungen zwischen den geschätzten Profilen und den realen Vergleichsprofilen ausnahmslos erheblich reduziert werden, vergleiche Abschnitt 7.4.

Die zusätzliche Berücksichtigung unsicherer Kenngrößen in der Schätznachbarschaft führt in Relation zur Unsicherheit σ_{Ratio} zu Abweichungen in den Krigingprognosen. In der Anlage Bild 97 werden die Baugrundprofile der subjektiven Schätzungen für den Datenort P4 angegeben. Die Modellierungsetappen beschränken sich hier auf die einmalige Erhöhung der Datenbasis der Kernerkundung, auf die Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung.

Die Auswahl erfolgt für die Profile der Schätzung der Schichtoberflächen und für die Profile der Schätzung der Schichtmächtigkeiten separat. Auswahlkriterium ist die summarisch geringste Abweichung der Schätzungen über alle Modellierungsetappen. Die Abweichungen beziehen sich auf die realen Vergleichsprofile. Die am meisten geeigneten Baugrundprofile werden jeweils unter isotroper und anisotroper Berechnungsannahme bestimmt. Für die Datenorte P4 sind diese in der Anlage Bild 98 bis Bild 101 zusammengefasst.

Im direkten Vergleich zwischen den Profilen der subjektiven Schätzung und den ausgewählten Profilen kann festgestellt werden, dass mit zunehmender Datenbasis genauere Schätzungen für den Gesamthalbraum erzielt wurden. Maßgebend für die Qualität der

Schätzung ist die Prognose für die Schicht 3. Diese Schicht weist die größte Standardabweichung in der Ausgangsdatenbasis auf und damit auch die größten Schwankungen in den Schätzergebnissen. Das hat zur Folge, dass nicht gleichzeitig mit Schicht 3 auch die besten Ergebnisse für Schicht 1 und 2 geschätzt wurden.

Für die Auswertung des Grenzzustandes werden unter diesem Gesichtspunkt nochmals repräsentative Schätzprofile ausgewählt. Als Auswahlkriterium dient nun die geringste Abweichung zwischen der realen und der geschätzten Mächtigkeit von Schicht 1. Diese Profile werden ausschließlich für den Datenort P4 bestimmt, Anlage Bild 102 bis Bild 105. Für diese sind in Abhängigkeit des Baugrundmodells und der Modellierungsetappe die Ergebnisse getrennt für isotrope und anisotrope Annahmen nachfolgend angegeben.

isotrop	Subjektive Schätzungen		geostatistische Baugrundmodelle (Bild 102, Bild 103)			
			Schichtoberflächen		Schichtmächtigkeiten	
Modellierungsetappen	Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]	
reales Profil	5,45	0,0%	5,45	0,0%	5,45	-
Kernerkundung	5,57	2,2%	5,58	2,4%	5,58	2,4%
Kern- und Detailerkundung	5,50	0,9%	5,57	2,2%	5,57	2,2%
Smoothing Splines Methode	-	-	5,55	1,8%	5,55	1,8%

Tabelle 23: Fundamentbreiten in Abhängigkeit des isotropen Baugrundmodells und der Modellierungsetappe mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.

Die subjektiven Schätzungen zeigen steigende Abweichungen des Gesamtprofils vom realen Vergleichsprofil, Anlage Bild 97, aber im Grenzzustand annähernd identische Fundamentabmessungen. Die Schicht 1 wurde mit zunehmender Modellierungsetappe besser geschätzt, so dass mit der erhöhten Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung bei den subjektiven Schätzungen, mit nur 0,9% Abweichung, eine gute Annäherung an die Fundamentbreite des realen Vergleichsprofils erreicht werden konnte.

Alle ausgewählten geostatistischen Schätzprofile, die unter der Annahme isotroper Verhältnisse ermittelt wurden, haben bei gleichen Randbedingungen die beste Annäherung an die reale Mächtigkeit der Schicht 1. Für die ausgewählten, isotropen Baugrundmodelle kann mit steigender Modellierungsetappe eine Annäherung an die Fundamentbreite des realen Vergleichsprofils festgestellt werden, Tabelle 23.

Zwischen den ausgewählten geostatistischen Schätzprofilen, die unter Anisotropie ermittelt wurden, Tabelle 24, weist die Schätzung der Fundamentabmessungen mit der Datenbasis der Kern- und Detailerkundung eine sehr gute Annäherung (0,2%) an die Fundamentbreite des realen Vergleichsprofils auf.

anisotrop	Subjektive Schätzung		Geostatistische Baugrundmodelle (Bild 104, Bild 105)			
			Schichtoberflächen		Schichtmächtigkeiten	
Modellierungsetappen	Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]	
reales Profil	5,45	-	5,45	-	5,45	-
Kernerkundung	5,57	2,2%	5,58	2,4%	5,55	1,8%
Kern- und Detailerkundung	5,50	0,9%	5,46	0,2%	5,53	1,5%
Smoothing Splines Methode	-	-	5,53	1,5%	5,61	2,9%

Tabelle 24: Fundamentbreiten in Abhängigkeit des isotropen Baugrundmodells und der Modellierungsetappe mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.

Mit anwachsender Datengrundlage sind verbesserte Schätzungen möglich. Die rein mathematische Anpassung über die Methode der Smoothing Splines ist für die anisotrope Betrachtung fehlgeschlagen.

Wird die Auswahl der Baugrundmodelle nicht gezielt für die Auswertung des speziellen Grenzzustandes vorgenommen, sondern ausschließlich in Hinsicht auf die möglichst optimale Generierung des Gesamthalbraummodells, so sind die Intervalle der zugehörigen Fundamentabmessungen in Tabelle 25 und Tabelle 26 zusammengefasst. Die Ergebnisse beziehen sich auf alle hier erstellten Baugrundprofile für P4.

isotrop	Baugrundmodelle			
	Schichtoberflächen		Schichtmächtigkeiten	
Modellierungsetappen	Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]	
reales Profil	5,45	-	5,45	-
Kernerkundung	5,58 bis 5,66	2,4 bis 3,9%	5,58 bis 5,66	2,4 bis 3,9%
Kern- und Detailerkundung	5,57 bis 5,65	2,2 bis 3,7%	5,57 bis 5,65	2,2 bis 3,7%
Smoothing Splines Methode	5,55 bis 5,93	1,8 bis 8,8%	5,55 bis 5,93	1,8 bis 8,8%

Tabelle 25: Intervalle der Fundamentbreiten unter Annahme der Isotropie aus allen generierten Baugrundmodellen mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.

anisotrop	Baugrundmodelle			
	Schichtoberflächen		Schichtmächtigkeiten	
Modellierungsetappen	Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]	
reales Profil	5,45	-	5,45	-
Kernerkundung	5,58 bis 5,73	2,4 bis 5,2%	5,55 bis 5,73	1,8 bis 5,2%
Kern- und Detailerkundung	4,52 bis 5,61	-16,9 bis 3,04%	5,53 bis 5,61	1,5 bis 3,0%
Smoothing Splines Methode	4,72 bis 5,89	-13,3 bis 8,04%	5,61 bis 5,85	2,9 bis 7,4%

Tabelle 26: Intervalle der Fundamentbreiten unter Annahme der Anisotropie aus allen generierten Baugrundmodellen mit konstantem Steifemodul und konstanten Schichtgrenzen.

Die Unsicherheit der Schätzung am Prognoseort P4 beträgt bis zu 17%. Die isotropen Randbedingungen führen zu einer geringeren Varianz der Fundamentabmessungen in allen Modellierungsetappen. Unter Berücksichtigung der Anisotropie des Datenfeldes sind aber die besten Schätzungen möglich.

Wird nun zusätzlich die Varianz des Krigingschätzers infolge unsicherer Kenngrößen und unsicherer theoretischer Variogrammparameter berücksichtigt, ergibt sich für $\sigma_{\text{Ratio}}=5$ eine Standardabweichung des Krigingschätzers für P4 von $\sigma = 0,85\text{m}$. Für eine Versagenswahrscheinlichkeit von $P_f=10^{-3}$ sind die daraus resultierenden Fundamentbreiten in Tabelle 27 zusammengefasst. Vergleiche auch die Resultate für die unsicheren Steifemodule in Tabelle 20.

anisotrop	geostatistische Baugrundmodelle für Schichtoberflächen (Bild 104)			
	Unsichere Schichtgrenzen mit $\sigma = 0,85$ infolge $\sigma_{\text{Ratio}}=5$, konstanter Steifemodul		Unsichere Schichtgrenzen mit $\sigma = 0,85$ infolge $\sigma_{\text{Ratio}}=5$ und unsicherer Steifemodul mit $\sigma \sim 10\%$	
Modellierungsetappen	Fundamentbreite [m]		Fundamentbreite [m]	
reales Profil	5,45(6,04)*	-	5,45(6,20)	-
Kernerkundung	6,10	11,9%	6,24	14,5%
Kern- und Detailerkundung	6,06	11,1%	6,22	14,1%
Smoothing Splines Methode	6,09	11,9%	6,23	14,3%

* Werte wurden unter Berücksichtigung unsicherer Schichtgrenzen für das reale Profil ermittelt

Tabelle 27: Fundamentbreiten in Abhängigkeit der Anisotropie und der Modellierungsetappe mit konstantem Steifemodul und unsicheren Schichtgrenzen, $\sigma_{\text{Ratio}}=5,0$.

Die Unsicherheiten der Kenngrößen, die in die Grenzzustandsformulierung einbezogen sind, bestimmen die Fundamentabmessungen. Der Grad der geostatistischen Modellierung erweist sich als untergeordnet, aber nicht vernachlässigbar.

Wird zudem berücksichtigt, dass mit zunehmender Kenngrößenunsicherheit die Anisotropie im Datenfeld vernachlässigt werden kann, genügt das unsichere isotrope geologische Modell mit einem möglichst hohen Datenumfang den Anforderungen.

10. Die Anwendung GeoStat und Setzungsberechnung

Die Softwareanwendung GeoStat wurde im Rahmen dieser Arbeit entwickelt, um die Fortpflanzung der Unsicherheiten aus den Baugrundkenngrößen und den Lagekoordinaten bis zur geologischen Modellbildung auf der Grundlage geostatistischer Methoden und deren Visualisierung überhaupt zu ermöglichen. Kommerzielle Software ist nicht verfügbar. Für sichere Kenngrößen und Lagekoordinaten wurden die Resultate von GeoStat mit denen von kommerziellen Programmen verifiziert.

GeoStat wurde im Borland C++Builder Version 5.0 seit 2001 eigenständig programmiert. Als erweitertes Package zum C++Builder wurde von SDL-Development-Lohninger die SDL Component Suite Release 8.2 genutzt, siehe „www.lohninger.com“.

GeoStat ist gemäß Bild 82 strukturiert. Im Folgenden wird der Inhalt der Module kurz beschrieben.

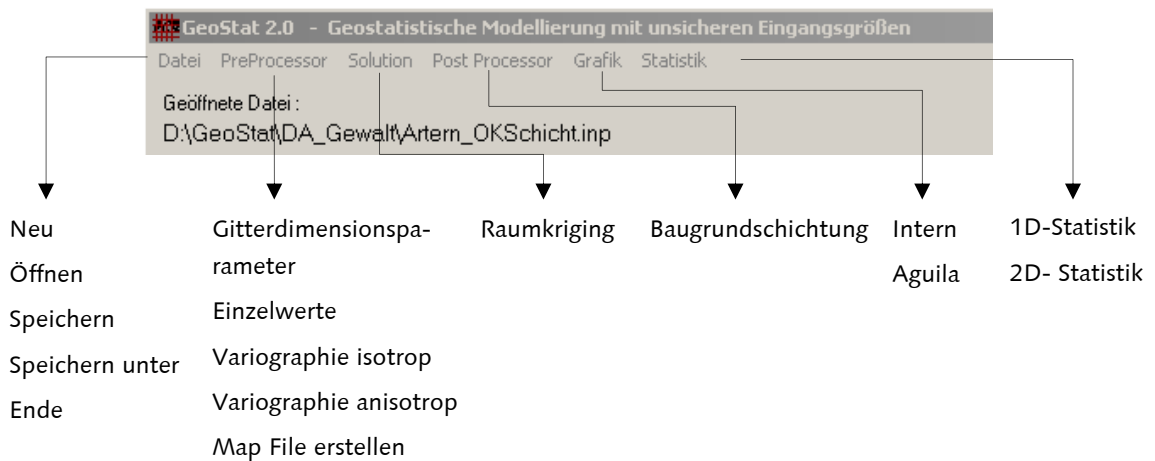


Bild 82: Grundstruktur von GeoStat

In Modul Gitterdimensionsparameter, siehe Bild 83, wird die Grundgeometrie des geologischen Modells definiert sowie Annahmen zur Variographie getroffen.

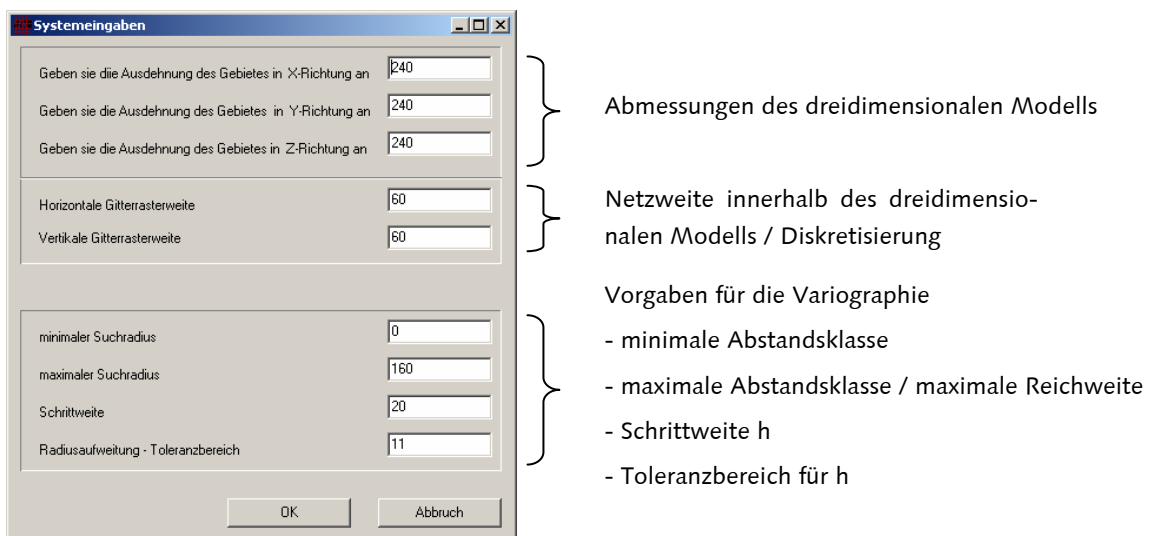


Bild 83: Systemvorgabenmodul – Gitterdimensionsparameter

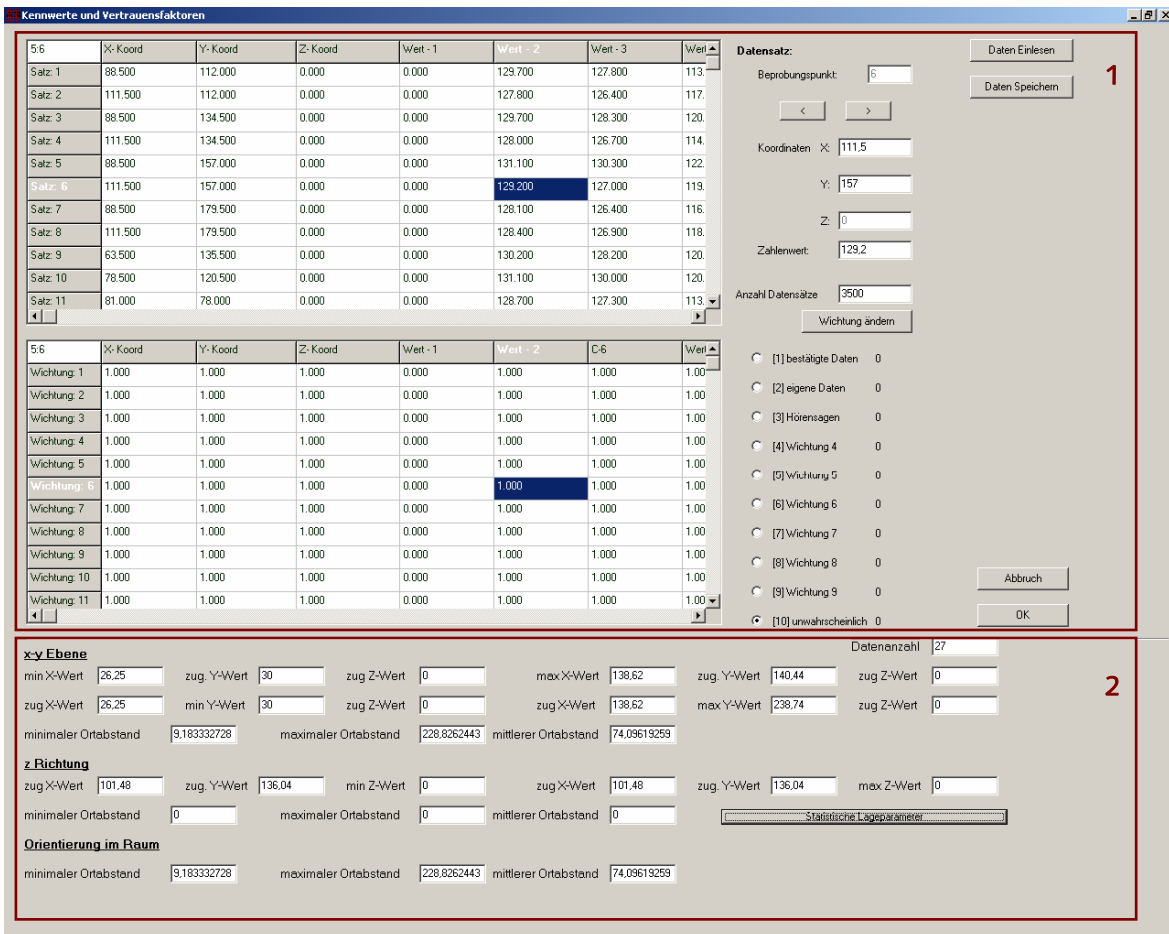


Bild 84: Struktur im Modul – Eingabewerte

Im Bereich 1 von Bild 84 werden die Kenngrößen mit ihren Lagekoordinaten in der oberen Tabelle und die zugehörigen Vertrauensfaktoren in der unteren Tabelle angezeigt. Diese Ebene können direkt bearbeitet werden. Mit „Daten einlesen“ und „Daten speichern“ können Daten aus ASCII-Dateien geladen oder in solche gespeichert werden. Mit den Auswertungen im Bereich 2 ist ein erster Überblick über die Struktur der Daten möglich.

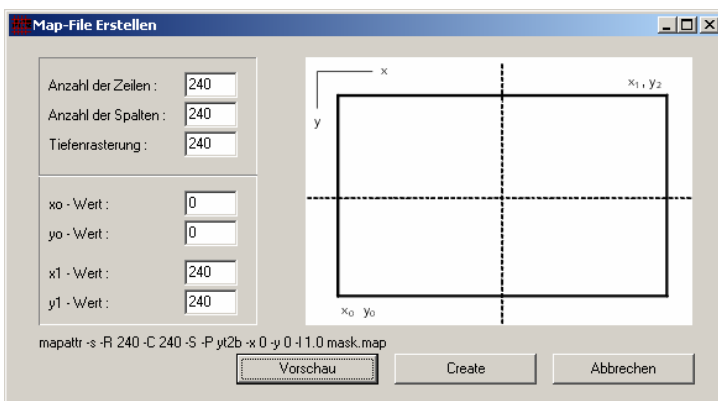


Bild 85: Modul – Map File erstellen

Mit der Definition der maximalen Lagekoordinaten in x-Richtung und y-Richtung ermöglicht dieses Modul die Generierung einer Map-Datei aus den Kenngrößen des Datensatzes, die dann in der Open Source Anwendung GStat, siehe „www.gstat.org“ visualisiert und weiterbearbeitet werden kann. Zusätzlich ist die Übergabe zur kommerziellen graphischen Anwendung GiD, siehe „gid.cimne.upc.es“, sowie zum Modul Aguila, siehe Bild 91, möglich.

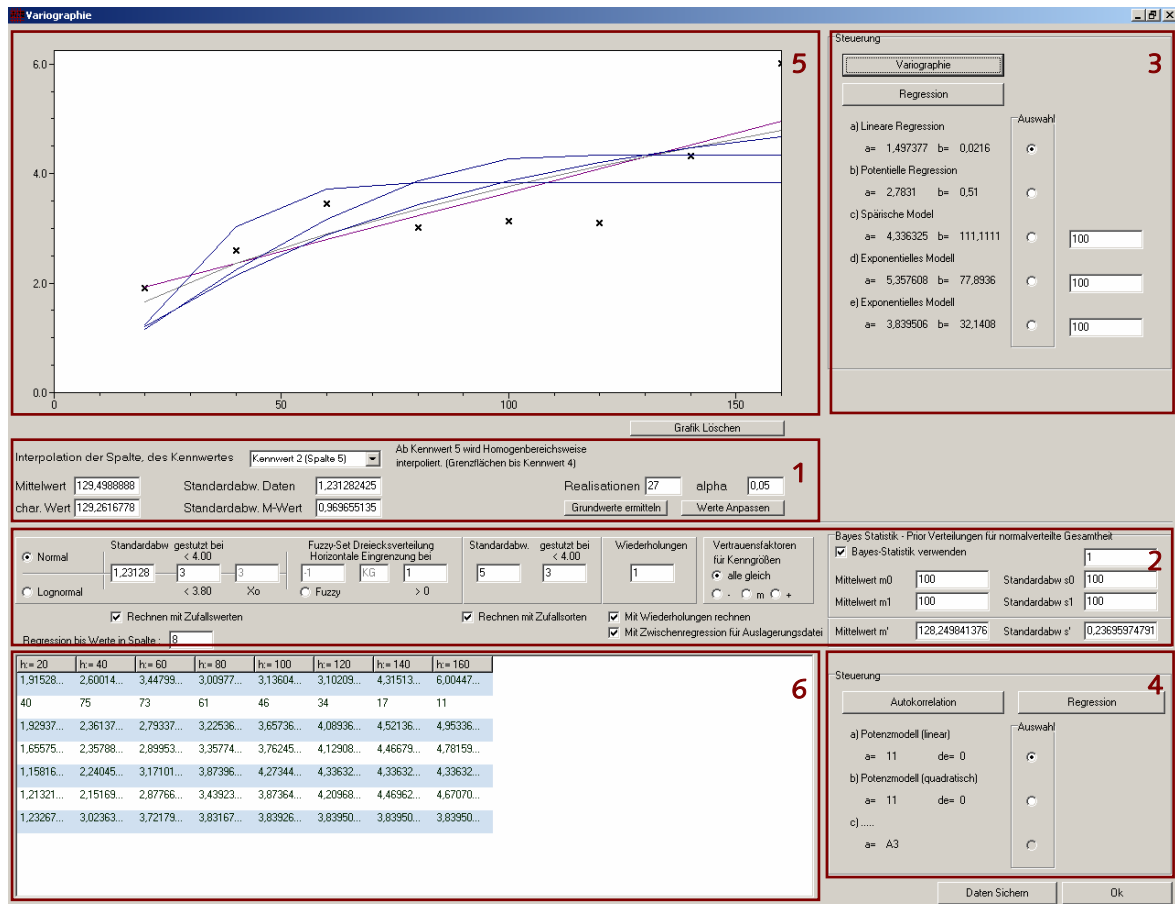


Bild 86: Modul – Variographie isotrop

Im Bereich 1 von Bild 86 wird bei zweidimensionalen Datensätzen der Teildatensatz und bei dreidimensionalen Datensätzen der Gesamtdatensatz ausgewählt. Entsprechend der Auswahl werden zur Übersicht die zugehörigen statistischen Parameter bestimmt. Für unsichere Kenngrößen beziehungsweise unsichere Lagekoordinaten kann im Bereich 2 die Methode zur Quantifizierung der Unsicherheit vorgegeben werden. Es stehen die Normalverteilung und die Lognormalverteilung in gestützter und ungestützter Form, eine Fuzzy-Set Verteilung, die Definition von Vertrauensfaktoren sowie die Bayes'sche Statistik zur Verfügung. Es kann festgelegt werden, ob mit unsicheren Kenngrößen, unsicheren Lagekoordinaten oder mit beiden gleichzeitig gerechnet werden soll. Da die Auswertungen zurzeit auf der Monte Carlo Simulation beruhen, ist auch die Anzahl der Wiederholung vorzugeben. In den Bereichen 3 und 4 können daraufhin das experimen-

telle und die theoretische Variogrammfunktionen beziehungsweise die Autokorrelationsfunktionen errechnet werden. In den Bereichen 5 und 6 werden die Resultate grafisch beziehungsweise in Tabellenform angezeigt. Zusätzlich werden verschiedene Textdateien erzeugt, mit denen Teilschritte auswertbar sind.

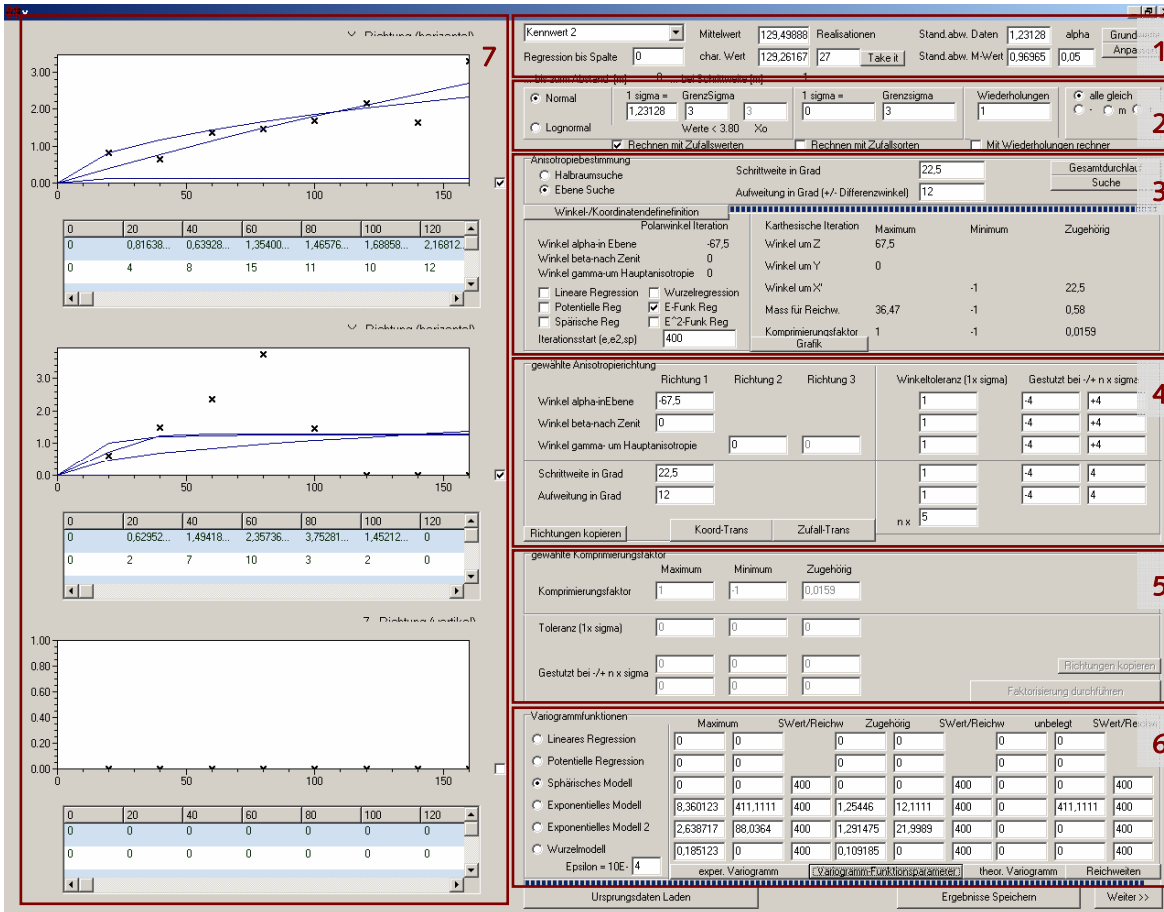


Bild 87: Modul – Variographie anisotrop

Äquivalent zum isotropen Modul wird im Bereich 1 bei zweidimensionalen Datensätzen der Teildatensatz und bei dreidimensionalen Datensätzen der Gesamtdatensatz ausgewählt. Entsprechend der Auswahl werden zur Übersicht die zugehörigen statistischen Parameter bestimmt. Für unsichere Kenngrößen beziehungsweise unsichere Lagekoordinaten kann im Bereich 2 die Methode zur Quantifizierung der Unsicherheit vorgegeben werden. Es stehen die Normalverteilung und die Lognormalverteilung in gestutzter und ungestutzter Form sowie die Definition von Vertrauensfaktoren zur Verfügung. Es kann festgelegt werden, ob mit unsicheren Kenngrößen, unsicheren Lagekoordinaten oder mit beiden gleichzeitig gerechnet werden soll. Da die Auswertungen zurzeit auf der Monte Carlo Simulation beruhen, ist auch die Anzahl der Wiederholungen vorzugeben.

Für anisotrope Betrachtungen ist zunächst die Ausrichtung der Anisotropieellipse für zweidimensionale Baugrunddatensätze beziehungsweise des Anisotropieellipsoides für dreidimensionale Baugrunddatensätze in Abhängigkeit der vorgegebenen theoretischen

Variogrammfunktion zu bestimmen. Im Bereich 3 werden diese Randbedingungen definiert. Hierzu gehören die Winkelschrittweite zum „Absuchen“ des kartesischen Raumes, die zugehörige Winkeltoleranz und die Art der theoretischen Variogrammfunktion mit dem zugehörigen Startwert für die Reichweite. Die Resultate werden in Bereich 4 übernommen, um eventuelle manuelle Korrekturen vorzunehmen. Zusätzlich kann die Unsicherheit der Hauptanisotropierichtung durch die Definition der Parameter einer gestutzten oder ungestutzten Normalverteilung vorgegeben werden. In Bereich 6 werden die Anisotropieverhältnisse oder Komprimierungsfaktoren angezeigt. Die durch die Simulation ermittelte Unsicherheit wird durch die Parameter einer gestutzten oder ungestutzten Normalverteilung abgebildet. In den Hauptanisotropierichtungen wird im Bereich 6 das zugehörige experimentelle und theoretische Variogramm errechnet und die Resultate grafisch beziehungsweise in Tabellenform in Bereich 7 angezeigt. Zusätzlich werden verschiedene Textdateien erzeugt, mit denen Teilschritte auswertbar sind.

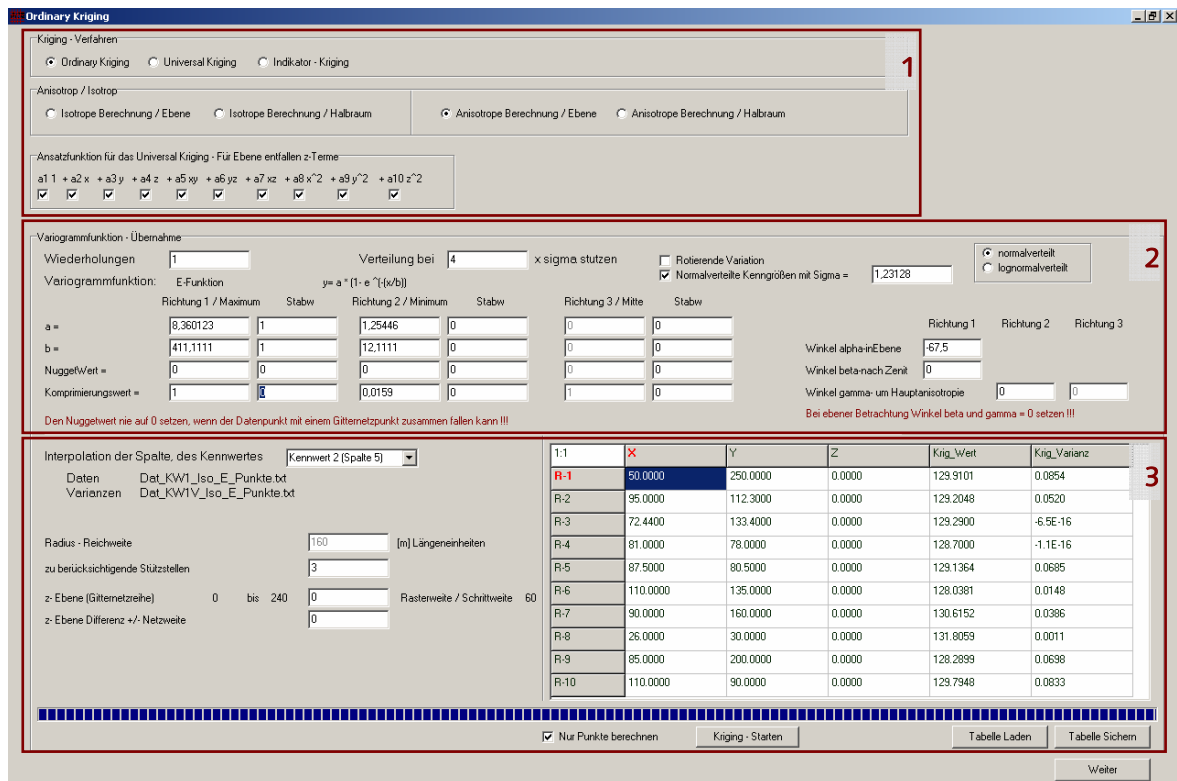


Bild 88: Modul – Raumkriging

Im Bereich 1 wird die Krigingvariante festgelegt. In Abhängigkeit der Baugrunddaten und der angestrebten Auswertung kann zwischen isotropen oder anisotropen kombiniert mit zweidimensionalen oder dreidimensionalen Kriging ausgewählt werden. Wird das Universal Kriging gewählt, sind des Weiteren die gewünschten Monome des Driftpolynoms aus der Vorgabe auszuwählen. In Bereich 2 werden zunächst die Resultate der Variographieauswertung und deren Unsicherheit, beschrieben durch eine Normalverteilung, übernommen. Weiterhin werden die Unsicherheitsparameter für die Kenngröße

erneut eingestellt. Es können nun die Unsicherheiten einzeln oder kombiniert berücksichtigt werden. Wird mit Unsicherheiten gerechnet, ist die Anzahl der Wiederholungen für die Monte Carlo Simulation festzulegen. Alle Eingaben können auch manuell vorgenommen werden. Im Bereich 3 wird die Datengrundlage für das Kriging gewählt. Es wird der Umfang der Schätznachbarschaft definiert. Nach diesen Festlegungen ist die Entscheidung möglich, ob das Kriging für den gesamten kartesischen Raum oder nur für ausgewählte Punkte in diesem durchgeführt werden soll. Die Ergebnisse werden in zahlreichen Textdateien gespeichert. Durch das Betätigen von „Weiter“ werden die statistischen Parameter für die Krigingergebnisse aller Wiederholungen errechnet und in einer Textdatei für die geologische Modellbildung abgelegt.

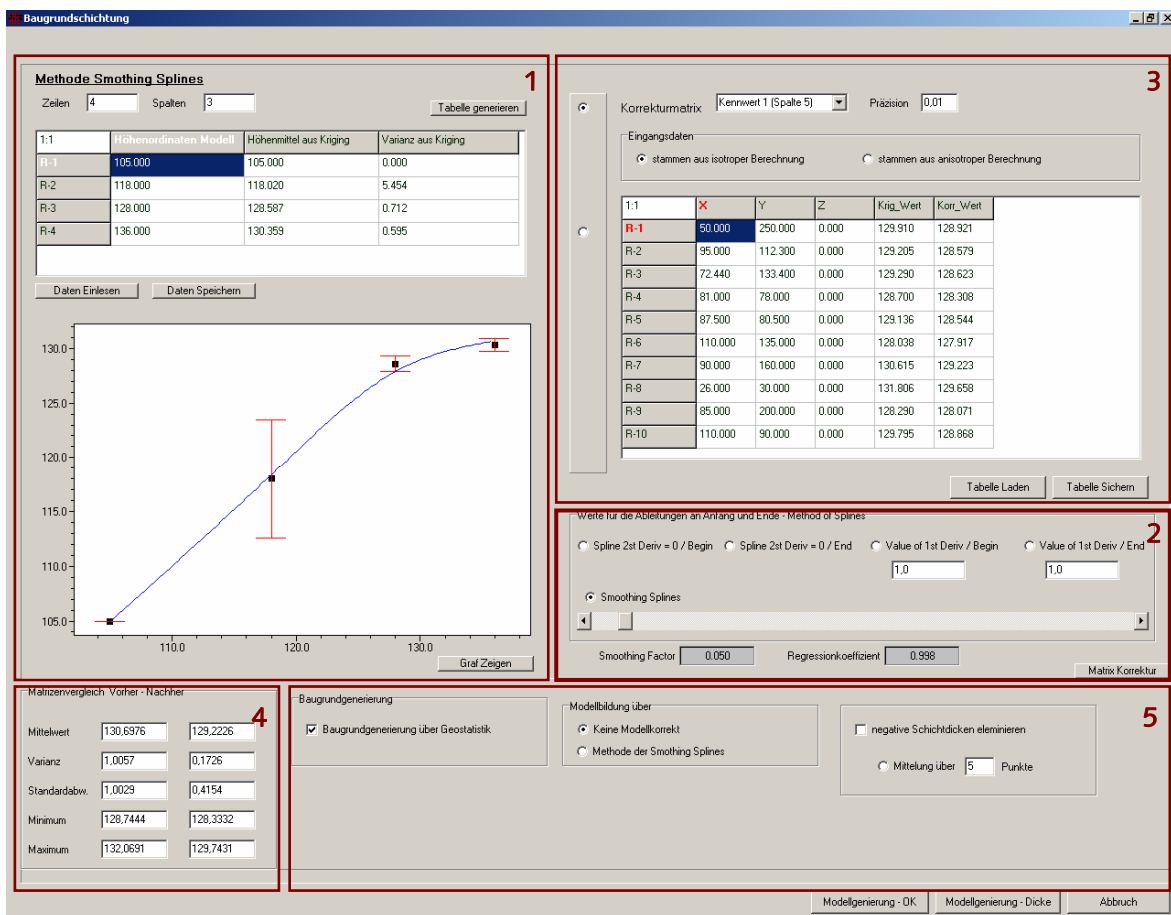


Bild 89: Modul – Baugrundsichtung

Im Bereich 1 können Referenzinformationen eingefügt werden. Parallel können diese auch Textdateien entstammen oder in solche gespeichert werden. Im Grafikenfenster werden Erwartungswerte der Homogenbereiche des geologischen Modells den Referenzdaten gegenübergestellt. Der Splinesfunktionsverlauf wird durch die Randbedingungen im Bereich 2 charakterisiert. Im Bereich 3 wird der Ausschnitt des geologischen Modells, der mit der Methode der Smoothing Splines angepasst werden soll, bestimmt. Im Bereich 4 werden die statistischen Parameter der Ausgangskenngrößen denen der verbes-

serten Kenngrößen gegenübergestellt. Mit den Festlegungen im Bereich 5 werden die Randbedingungen definiert, mit denen aus zweidimensionalen Baugrunddaten ein dreidimensionales Halbraummodell zusammengesetzt wird.

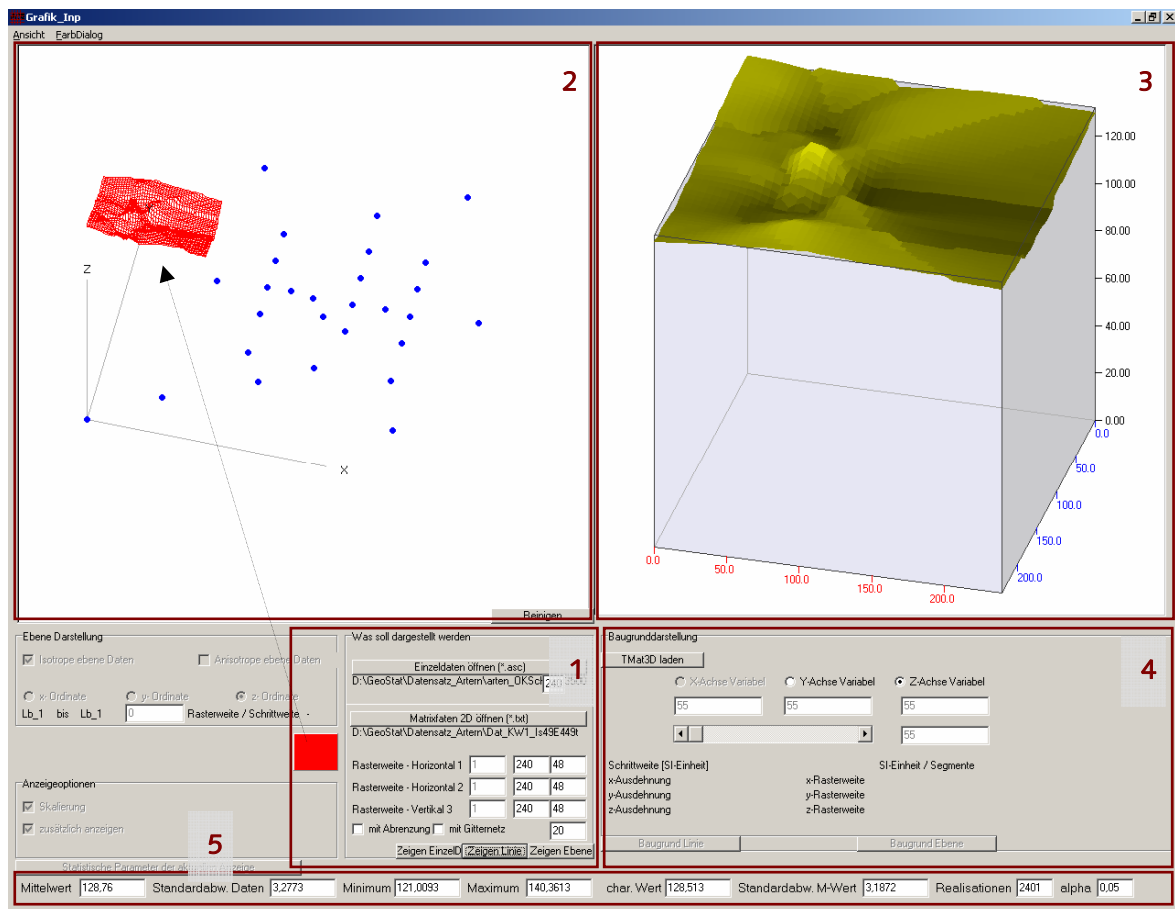


Bild 90: Modul – Grafik Intern

Im Bereich 1 können die ursprünglichen Baugrundeinzeldaten sowie die Ergebnisse des Krigings eingelesen werden. Die Einzeldaten sowie die Krigingresultate als Gitternetz werden im Bereich 2 dargestellt. Diese werden als Fläche im Bereich 3 abgebildet. Die beiden Grafikfenster sind mit diversen Zoom- und Speicherfunktionen versehen. Im Bereich 4 können die geologischen Baugrundmodelle eingelesen werden. Durch die Definition beliebiger Schnitte parallel zu den kartesischen Achsen können diese im Bereich 3 dargestellt werden. Zur Information werden im Bereich 5 die statistischen Parameter der geladenen Daten mit dem charakteristischen Kennwert errechnet. Die grafische Darstellung der dreidimensionalen Baugrundmodelle ist nicht ausreichend. Unsicherheiten der Ergebnisse werden nicht dargestellt.

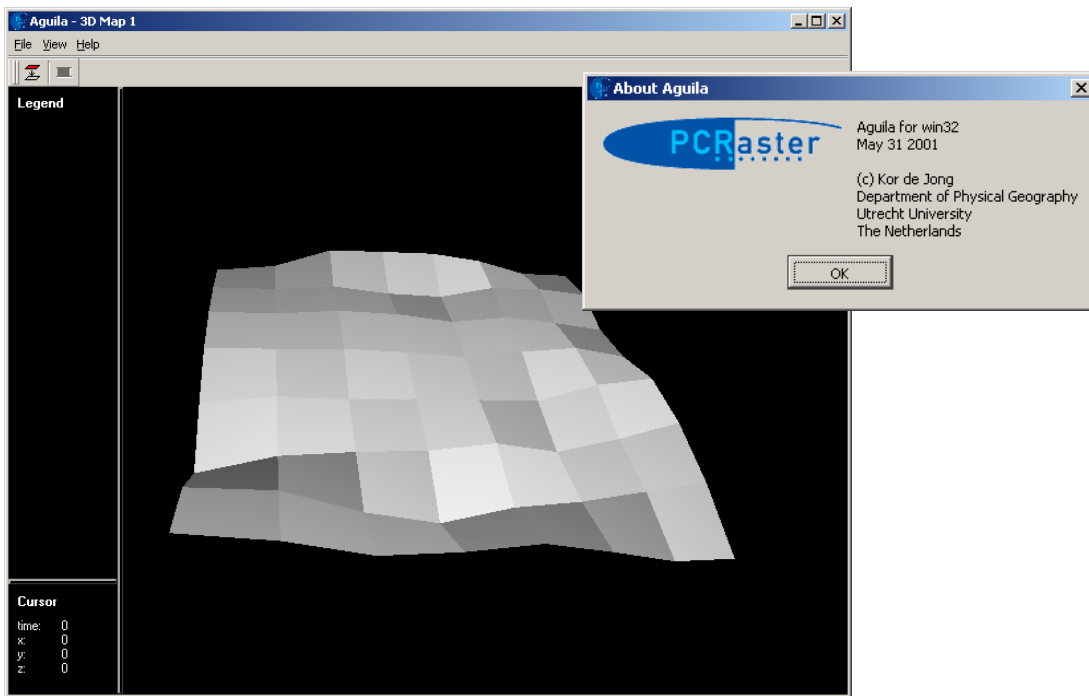


Bild 91: Modul – Grafik AguilA

Mit der Open Source Anwendung AguilA von PCRaster, die in GeoStat eingebunden ist, sind animierte Darstellungen möglich. Die Grundlage bildet das zuvor beschriebene Map-File.

Für die Auswertungen in den einzelnen Modulen werden stets statistische Kennwerte und statistische Testergebnisse zu einzelnen Datenmengen benötigt. Infolge der Simulation sind gegebenenfalls automatische Anpassungen notwendig. Um dies zu ermöglichen ist GeoStat mit einem eigenen Statistiktool ausgestattet, welches einfache Datensätze und korrelierte Datensätze auswerten kann. Diese sind für den einfachen Datensatz in Abschnitt 3.7 beschrieben. Für zweidimensionale Datensätze sind die Eingabemasken am Beispiel ArternOK_Schicht für KW2 und KW3 in Bild 92 und Bild 93 abgebildet. Auf eine Beschreibung wird verzichtet.

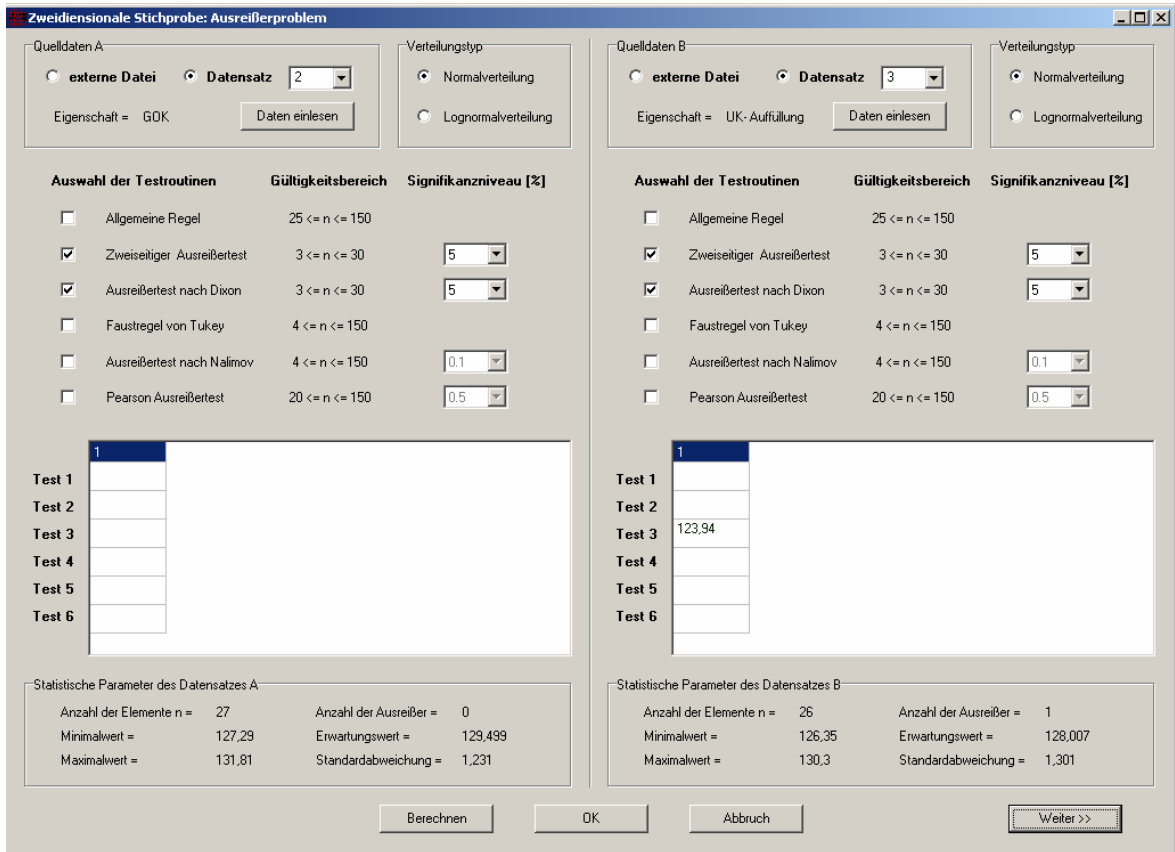


Bild 92: Auswertung zweidimensionaler Stichproben – Fenster 1

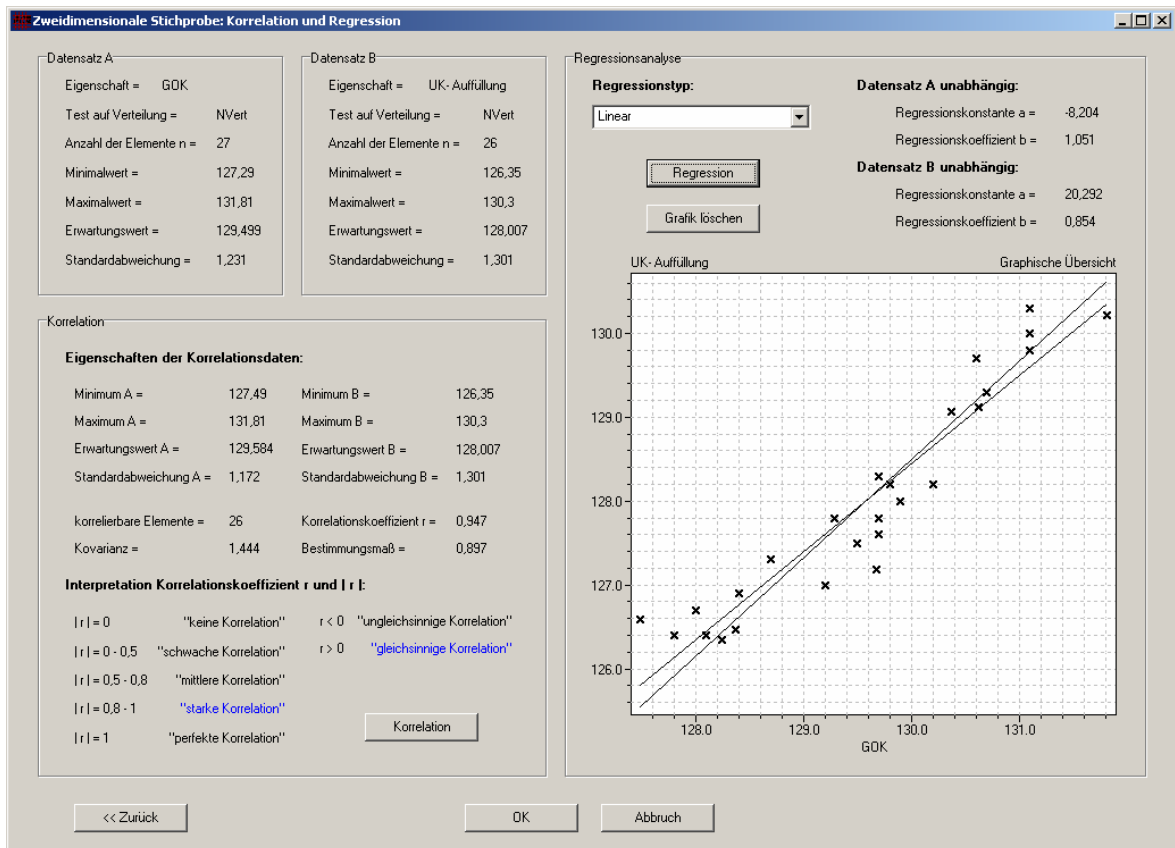


Bild 93: Auswertung zweidimensionaler Stichproben – Fenster 2

Für den Sicherheitsnachweis in Kapitel 9 wurde die Eigenentwicklung der Software „Setzungsberechnung“ auf der Grundlage des Borland C++Builder 5.0 erforderlich, da keine kommerzielle Anwendung zur Verfügung steht, welche die unsicheren geologischen Modelle mit unsicheren Kenngrößen innerhalb der Homogenbereiche berücksichtigt, siehe Bild 94.

Das Fundament ist quadratisch also a=b. Die Setzungsberechnung erfolgt bis zur Tiefe von 30,0m.

OK Schicht	DK 1	DK 2	DK 3	DK 4	Es-1 (MW)	Es-2 (MW)	Es-3 (MW)	Es-4 (MW)	Es-Schicht 1 (Min)	Es-Schicht 2 (Min)	Es-Schicht 3 (Min)	Es-Schicht 4 (Min)
OK Schicht 1	129,98	0,8			0	0			5000	5000	5000	5000
OK Schicht 2	128,33	1,2			8000	800			5000	5000	5000	5000
OK Schicht 3	120,65	1,5			14000	1400			5000	5000	5000	5000
OK Schicht 4	90	,0001			30000	3000			5000	5000	5000	5000

Vertikale Schrittweite: ,05
 Poison Ratio v: 0,35
 gestutzt bei a x sigma: 4
 Mit konstantem Steifemodul rechnen
 Stichprobenanzahl: 28

Moment um y: 1295,8 0
 Moment um x: 10 0
 Normalin z: 1330 0

Fundamentabmessungen a=b: 5,5
 Eigenlast Fundament berücksichtigen G = a x b x 1,0
 Random
 Höhe des Fundamentes: 1

Mit Zufallslasten rechnen

	MW	Min	Max	Stabw
Setung vertikal	0,01544	0,01153	0,02073	0,0018
Schiefstellung tan alpha	0,00302	0,00211	0,00449	0,0018

Maximale Gleichsetzung: 0,04 (Einheit beachten - meist in m)
 Maximale Schiefstellung: 0,003 (Einheit beachten - tan alpha)

	Anzahl	Pf-Statistisch	MW	Stabw
Versagen_Gleichsetzung	0	0	0,02456	0,0018
Versagen_Differenzsetzung	52	0,39854	-2E-5	0,00045
Versagen_Summe beider	0	0	0,02454	0,00224

Bild 94: Anwendung Setzungsberechnung

Im Bereich 1 werden das geologische Modell, die Steifigkeiten in den Homogenbereichen sowie die zugehörigen Unsicherheiten spezifiziert. Die Unsicherheiten werden durch ungestutzte und gestutzte Normalverteilungen beschrieben. Des Weiteren sind für dehnungsabhängige Steifigkeiten weitere Baugrundparameter vorzugeben. Im Bereich 2 werden die Beanspruchungen und die Abmessungen des Fundamentes definiert. Die Beanspruchungen können auch als unsichere Kenngröße berücksichtigt werden. Weiterhin ist die Anzahl der Simulationen festzulegen. Im Bereich 3 werden die errechneten Setzungen und Schiefstellungen mit Erwartungswert und Standardabweichung sowie deren Maximum und Minimum ausgegeben. Die Resultate werden den Grenzdefinitionen im Bereich 4 gegenübergestellt. Im Bereich 5 wird die Versagenswahrscheinlichkeit getrennt und kombiniert für die Gleichsetzung und die Schiefstellung ermittelt.

11. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Unsicherheiten von Baugrundkenngrößen für die Erstellung von geologischen Halbraummodellen auf der Grundlage geostatistischer Methoden entgegen dem bislang üblichen Herangehen mit einbezogen. Infolge der unsicheren Kenngrößen ist das abgeleitete Halbraummodell aus unsicheren geologischen Homogenbereichen zusammengesetzt. In einem probabilistischen Sicherheitsnachweis werden die unsicheren Parameter der Grenzzustandsgleichung und das unsichere geologische Modell gemeinsam betrachtet.

Die geostatistischen Methoden sind unterteilt in die experimentelle und theoretische Variographie sowie das Kriging. Die Berücksichtigung von unsicheren Eingangskenngrößen für die geologische Modellbildung führt zu Variogrammfunktionen mit unsicheren Parametern. Bis zum experimentellen Variogramm sind die Variogrammparameter und deren Unsicherheit analytisch nachvollziehbar beziehungsweise abschätzbar. In den weiteren Teilschritten der geostatistischen Modellbildung ist der Einfluss unsicherer Kenngrößen auf Teilergebnisse nur numerisch nachzuvollziehen.

Für die umfangreichen Simulationen stand keine Software zur Verfügung. Als Teilleistung dieser Arbeit wurde hierfür die eigenständige Anwendung „GeoStat“ erstellt. Sie ermöglicht die Berechnung und Auswertung der Fortpflanzung von Unsicherheiten auf numerischem Weg in beliebigen Teilschritten bis hin zur geologischen Modellbildung.

Mit dem Übergang vom experimentellen zum theoretischen Variogramm sind wesentliche Zusammenhänge zwischen der Unsicherheit der Kenngrößen und der Unsicherheiten der Parameter für das sphärische, das exponentielle und das Gauß'sche Modell mit den Ergebnissen aus GeoStat ableitbar. Der Schwellenwert dieser Funktionen ist proportional zur relativen Kenngrößenunsicherheit. Eine Abschätzung der oberen Schranke des Schwellenwertes und dessen Unsicherheit wird angegeben. Die Reichweite ist ein charakteristischer Kennwert des Untersuchungsgebietes. Bei den beispielhaften Auswertungen zeigte sich, dass die Reichweiten ab einer relativen Kenngrößenunsicherheit von $\sigma_{\text{Ratio}} = 4,0$ für alle Teildatensätze eines Untersuchungsgebietes identisch sind, was möglicherweise auf einheitliche Genese schließen lässt.

Die Parameterunsicherheiten der Variogrammfunktionen wirken sich in Relation zur Kenngrößenunsicherheit nur gering auf den Prognosewert am unbeprobten Ort infolge des Kriging aus. Die Varianz des Prognosewertes ist geringer als die Kenngrößenvarianzen, aber nicht vernachlässigbar klein.

Es ist grundsätzlich zu unterscheiden, ob die Kenngrößenvarianzen ausschließlich durch unsichere Parameter der theoretischen Variogrammfunktion repräsentiert oder deren Eigenvarianzen zusätzlich im Kriging berücksichtigt werden. Mit der alleinigen Berücksichtigung der unsicheren theoretischen Variogrammparameter wird die Standardabweichung der Krigingprognose unterschätzt. Sie haben maßgeblichen Einfluss auf die Kri-

gingvarianz als Modellvarianz und deren Standardabweichung. Mit der Einbeziehung der Kenngrößenunsicherheiten kann die Standardabweichung der Prognose realistischer simuliert werden. Sie hat keinen direkten Einfluss auf die Krigingvarianz. Der abgeleitete Unsicherheitsplot, ein Resultat dieser Arbeit, kombiniert die Modellunsicherheit des Krigings und die Varianz des Prognosewertes im unbeprobten Untersuchungsgebiet auf der Grundlage des Varianzenfortpflanzungsgesetzes.

Für geotechnische Sicherheitsnachweise ist neben der Informationsdichte auch die Optimierung des geologischen Modells wesentlich. Dieses ist vom auszuwertenden Grenz- zustand auf der Grundlage eines Sicherheitsnachweises abhängig, so dass vor der geostatistischen Baugrundmodellierung die Sensitivität der in den Grenzzustand eingehenden Kenngrößen zu untersuchen ist. Es hat sich gezeigt, dass die Erhöhung der Datenge- samtheit für die geologische Modellbildung nur dann sinnvoll ist, wenn parallel die Un- sicherheit der relevanten Kenngrößen im Sicherheitsnachweis innerhalb der unsicheren Homogenbereiche reduziert wird.

Für den Referenzstandort führen äquivalent zur Berücksichtigung der unsicheren Steife- moduln die unsicheren Halbraummodelle zur erheblichen Zunahme der erforderlichen Fundamentabmessungen. Die Unsicherheit der Steifemoduln war maßgebender als die Unsicherheiten des Halbraummodells, obwohl die Datenbasis für die geostatistische Modellierung gering war.

Bisher werden in probabilistischen Sicherheitsnachweisen zwar unsichere Kenngrößen, jedoch deterministische geologische Modelle betrachtet. Die unsicheren Kenngrößen innerhalb der Homogenbereiche eines geologischen Modells haben im aufgezeigten Si- cherheitsnachweis zwar den maßgebenden Einfluss, doch sind die Unsicherheiten im geologischen Modell nicht zu vernachlässigen. Wege und Grenzen der Berücksichtigung dieses kombinierten Einflusses werden mit dieser Arbeit untersucht und aufgezeigt. Das Anwendungsbeispiel zeigt, dass die optimale geologische Modellbildung spezifisch für den Sicherheitsnachweis vorzunehmen ist. Werden die Unsicherheiten der Kenngrößen innerhalb der Homogenbereiche und unsicheren geologischen Modelle berücksichtigt, wird ein schärferes Abbild der Realität erreicht.

12. Literaturverzeichnis

- [1] Alén, C. (1998): On Probability in Geotechnics. Vol. 1, Chalmers University of Technology, Göteborg
- [2] Baczkowski, A. J. (1990): A Test of Spatial Isotropy. in: Momirovic, K.; Mildner, V. (1990): Proceedings in Computational Statistics, Physica-Verlag Heidelberg.
- [3] Baecher, G.B.; Christian, T. (1972): Site Exploration: A probabilistic approach. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology. <http://www.glue.umd.edu/~gbaecher/PhD%20Thesis%201972/Chapter0.pdf>
- [4] Baecher, G.B. (2003): Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. John Wiley & Sons. Ltd, England
- [5] Bandemer, H. (1997): Ratschläge zum mathematischen Umgang mit der Unge-
wißheit. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart-Leipzig
- [6] Baudin, Ch. (2001): Ermittlung charakteristischer Werte. in: Smoltczyk (Hrsg.):
Grundbautaschenbuch, 6. Auflage, Teil1: Geotechnische Grundlagen. Ernst &
Sohn
- [7] Bosch, K. (1993): Statistik-Taschenbuch. 2. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, Mün-
chen Wien
- [8] Bronstein et al. (2001): Taschenbuch der Mathematik. 5. Auflage, Verlag Harri
Deutsch, Frankfurt (Main)
- [9] Burger, H. (1997): 3D-Modelling of Multi-Layer Deposits under uncertainty. in:
Proceedings of IAMG'97. Barcelona, 433-437
- [10] Clayton, C. R. I. (2001): Managing geotechnical risk: time for change? in: Geo-
technical Engineering 149. Issue 1, 3-11
- [11] Clemens, T. (1995): Ausgewählte Schätz- und Testprobleme bei räumlich korre-
lierten Daten, Dissertation, Bielefeld
- [12] Cornell, C. A. (1969): A probability-based structural code. ACI Journal, 66, 974-
985
- [13] Cox, N.D. (1977): Comparison of two uncertainty methods. Nuclear Science and
Engineering, no. 64, 258-265
- [14] Cressie, N. (1985): Fitting Variogram Models by Weighted Least Squares.
Mathematical Geology, Vol 17, 563-586
- [15] Cressie, N. (1999): Statistics for spatial data. Wiley Series in probability and
mathematical statistics
- [16] DIN 1054 (01/03): Baugrund – Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau
- [17] DIN 4020 (09/03): Geotechnische Untersuchungen für bautechnische Zwecke.

-
- [18] Deutsches Institut für Normung e.V., Normausschuß Bauwesen (1980): Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen von baulichen Anlagen. Entwurf
- [19] DIN – Normenausschuss Bauwesen: Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen von baulichen Anlagen, Deutsches Institut für Normung 1980
- [20] Ditlevsen, O.; Tarp-Johansen, N. J.; Denver, H. (2000): Bayesian soil assessments combining prior with posterior censored samples. *Computers and Geotechnics* 26, 187-198
- [21] Einax J. W.; Soldt, U. (1998): Statistische Aus- und Bewertung immissionsbedingter Bodenbelastungen Fallstudie des Altstandortes Dorndorf-Steudnitz (Thüringen). *UWSF* (1) 1998, 23-29
- [22] Einax, J. W.; Zwanziger, H. W.; Geiß, S. (1999): *Chemometrics in Environmental Analysis*. Wiley-VCH
- [23] Eurocode 7 (1997): Entwurf, Berechnung und Bemessung in der Geotechnik. Beuth-Verlag
- [24] Fellin, W.; Oberguggenberger, M. (2003): Das Problem der Unsicherheit der Versagenswahrscheinlichkeit und mögliche Alternativen. in: Ziegler, M.: Beiträge zu Workshop – Stochastische Prozesse in der Geotechnik. Wissenschaftsverlag Mainz in Aachen
- [25] Ferguson, C. (1992): The statistical Basis for spatial sampling of contaminated land. *Ground Engineering*, 6, 34-38
- [26] Fetz, Th. (2001): Set of joint probability measures generated by marginal focal sets. in: De Cooman, G.; Fine, T.; Seidenfeld, T. editors: ISIPTA'01, Proceedings of the second International Symposium on Inprecise Probabilities and their Applications. ShakerPublishing BV. Maastricht
- [27] Friedrich, A. (1997): *Logik und Fuzzy-Logik: eine leichtverständliche Einführung mit Beispielen aus Technik und Wirtschaft*, Expert-Verlag, Renningen-Malmsheim
- [28] Gaouar, M.; Fogli, M. & Bacconnet, C. (2000): Reliability or earth dams: An approach based on random field models. *Applications of Statistics and Probability*, Balkema, Rotterdam
- [29] Gellert, W. et. al (1986): *Kleine Enzyklopädie – Mathematik*. VEB Bibliografisches Institut, Leipzig
- [30] Goovaerts, P. (1997): *Geostatistics for natural resources Evaluation*. Oxford University Press, Oxford
- [31] Gudehus, G. (1968): Gedanken zur statistischen Bodenmechanik. in: *Bauingenieur* 43, Heft 9

-
- [32] Hanisch, J.; Struck, W. (1985): Charakteristischer Wert einer Boden- oder Materialeigenschaft aus Stichprobenergebnissen und zusätzlicher Information. in: Bau-technik 10/1985
- [33] Hasofer, A. M.; Lind, N. C. (1974): Exact and invariant second-moment code format. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 100(1), 111-121
- [34] Henningsen, D.; Katzung, G. (2002): Einführung in die Geologie Deutschlands, 6. überarbeitete Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Berlin
- [35] Hohenbichler, M.; Rackwitz, R. (1983): First order concepts in system reliability. *structural safety*, 1, 177-188
- [36] Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. de Gruyter Lehrbuch, Berlin
- [37] Iman, R. L. and Helton, J. C. (1988): An investigation of uncertainty and sensitivity analysis techniques for computer models. *Risk Analysis*, vol. 8, no. 1, 71-90
- [38] International Organization for Standardization (1995): Guide to the expression of uncertainty in measurement. 1 ed., Geneve
- [39] Isaaks, E. H.; Srivastava, R. M. (1989): Applied Geostatistics. Oxford University Press, New York
- [40] Isaaks, E. H.; Srivastava, R. M. (1989): An Introduction to Applied Geostatistics. Oxford University Press, New York
- [41] Journel, A. G. (1983): Nonparametric Estimation of Spatial Distributions. - in: *Mathematical Geology*, Vol. 15, No. 3, 445-468.
- [42] Journel, A. G. (1989): Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons – Short Course in Geology Volume 8. American Geophysical Union, Washington, D.C.
- [43] Journel, A. G.; Deutsch C. V. (1992): GSLIB-GeoStatistical software library and user's guide. Oxford Univ. Press, New York
- [44] Journel, A. G.; Huijbregts, Ch. J. (1978): Mining GeoStatistics. Academic Press. London
- [45] Katzenbach, R. (2000): Forschung, Lehre und neue Entwicklungen in der Geotechnik – Bestandsaufnahme und Zukunftsperspektiven. *Bauingenieur*, Band 75, 547-558.
- [46] Klingmüller, O.; Bourgund, U. (1992): Sicherheit und Risiko im konstruktiven Ingenieurbau. Verlag Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden
- [47] Kreuter, H. (1996): Ingenieurgeologische Aspekte GeoStatistischer Methoden. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 138
- [48] Krige, D.G. (1951): A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. in: *Jour. Chem. Metall. Min. Soc. S. Africa*, 52(6), 119-139

- [49] Kruse, B. (2003): Status quo bei der Festlegung charakteristischer Werte von Bodenkenngrößen. in: Ziegler, M. [Hrsg.]: Beiträge zu Workshop – Stochastische Prozesse in der Geotechnik. Schriftenreihe Geotechnik im Bauwesen, RWTH-Aachen
- [50] Kühlmeyer, M. (2001). Statistische Auswertungsmethoden für Ingenieure: mit Praxisbeispielen. Berlin, Heidelberg. Springer Verlag.
- [51] Kummer, J. (1986): Beitrag zum Sicherheitsproblem im Grundbau am Beispiel der Standsicherheit in der tiefen Gleitfuge bei einfach verankerten, frei aufgelagerten Stützwänden. Dissertation (A) an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar
- [52] Marinoni, O. Tiedemann, J. (1999): Geostatistische Verfahren als Hilfsmittel zur Baugrundmodellierung. 12. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, Halle, 186-191
- [53] Marinoni, O. (2000): Geostatistisch gestützte Erstellung baugeologischer Modelle am Beispiel des Zentralen Bereiches von Berlin. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- [54] Matheron, G. (1963): Principles of Geostatistics. in: Economic Geology, Bd. 58, 1246-1266
- [55] Matheron, G. (1970): The theory of regionalized variables and its applications. in: Fascicule 5, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau
- [56] Myers, D. E.; Journel, A. (1990): Variograms with Zonal Anisotropies and Noninvertible Kriging Systems. Mathematical Geology, Vol. 22, No 7, 779-785
- [57] Myers, D. (1992): Kriging, Cokriging, Radial Basis Functions and the role of positive definiteness. Computers Mathematical Applications, Vol 24, No 12, 139-148
- [58] Morgen, M. G.; Henrion, M. (1998): Uncertainty – A guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis. Cambridge University Press
- [59] Müller, P.H.; Neumann, P.; Storm, R. (1979): Tafeln der mathematischen Statistik, VEB Fachbuchverlag, Leipzig
- [60] Neidhart, T. (1994): Lösung dreidimensionaler linearer Probleme der Baudynamik mit der Randelementmethode. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe. Heft 131
- [61] Nottrodt, H.-P. (1988): Zur Statistik der effektiven Scherparameter. Schriften der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar
- [62] Papula, L. (2001): Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 3. Viewegs Fachbücher der Technik, Braunschweig/Wiesbaden

-
- [63] Plate, E. J. (1993): Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin
- [64] Rackwitz, R. (2000): Reviewing probabilistic soils modelling, in: Computers and Geotechnics 26, 199-223
- [65] Rackwitz, R., Peintiger, B. (1981): Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Baugrundmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen. in: Bauingenieur 56, Springer-Verlag, 215-221
- [66] Rethati, L. (1988): Probabilistic solutions in geotechnics. in: Developments in geotechnical engineering 46, Elsevier, Amsterdam
- [67] Roselt, K.; Scheibert, C.; Einax, J. W. (2003): Die Lösung von Nutzungskonflikten aufgrund flächenhafter Bodenkontaminationen mit Hilfe geografischer Informationssysteme und Mitteln der Geostatistik. UWSF-Z Umweltchem Ökotex 2003, 1-6
- [68] Schafmeister, M.-Th. (1999): Geostatistik für die hydrogeologische Praxis. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg
- [69] Schmidt, H.-G.; Wuttke, F.; Schönhardt, M. (2001): Beurteilungsmöglichkeiten von seismisch beanspruchten Standorten. D-A-CH Tagung, Innsbruck
- [70] Schmidt, H.-G.; Wuttke, F.; Schönhardt, M. (2001): Seismische Erkundung von bebauten Standorten. in: Geotechnik-Seminar Weimar
- [71] Schönhardt, M.; Witt, K.J. (2001): Baugrundmodellierung unter Nutzung stochastischer Methoden. Geotechnikseminar Weimar 2001. In Schanz, Witt (Hrsg.): Schriftenreihe Geotechnik, Heft 5, S. 45-56
- [72] Schönhardt, M.; Witt, K.J.; Wuttke, F. (2002): Methodenvergleich einer Setzungsprognose mit unsicheren Baugrunddaten. in: Beiträge zum Workshop stochastische Prozesse in der Geotechnik, RWTH-Aachen
- [73] Schönhardt, M., Witt, K.J. (2003): Adaptive Ground Modelling in geotechnical engineering. GeoTechnical Measurements and Modelling, Sep 23-26, Karlsruhe
- [74] Schönhardt, M., Witt, K.J. (2004): Einfluss unsicherer Kenngrößen auf die geostatistische Modellbildung. unveröffentlicht
- [75] Schneider, H. R. (1990) : Die Wahl der Baugrundkennwerte. in: Anwendung der neuen Tragwerksnormen des SIA im Grundbau – Referate der Studie Schweizerische Gesellschaft für Boden- und Felsmechanik, Mitteilungen der Schweizerischen Gesellschaft für Boden und Felsmechanik, Zürich
- [76] Schüeller, G. I. et. al. (1986): Stochastic methods in materials and structural engineering. Structural Safety, Special Issue, 3
- [77] Schulz, K. (2002): (Un-)sicherheiten bei der Ökosystemmodellierung. Institut für Geoökologie - TU Braunschweig, Braunschweig
-

-
- [78] Schuppener, B. (1999): Die Festlegung charakteristischer Bodenkennwerte – Empfehlungen des Eurocodes 7 Teil 1 und die Ergebnisse einer Umfrage. Geotechnik, Sonderheft 1999
- [79] Sobol, I. M. (1974): Die Monte-Carlo-Methode. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- [80] Späthe, G. (1992): Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. 2. neubearb. Auflage, Springer Verlag, New York
- [81] Stein, M. L. (1999): Interpolation of Spatial Data – Some Theory for Kriging, Springer Verlag
- [82] Steinmüller, A. (1998): Beiträge zum Quartär Thüringens, Geowissenschaftliche Mitteilungen von Thüringen, Beiheft 7, S. 1 – 61, [SDC] Satz + Druck Centrum Saalfeld GmbH, Weimar
- [83] Storm, R. (1995): Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 10. Auflage
- [84] Streit (2002): Vorlesung Geostatistik. Universität Münster, Version 2.1, www.castafiore.uni-muenster.de/vorlesungen/Geostatistik/frames/fsteuer.htm
- [85] Suro-Perez, V.; Journé, J.-M. (1993): Indicator Principal Component Kriging. - In: Mathematical Geology, Vol. 23, No. 5, 759-788.
- [86] Switzer, P. (1993): The spatial variability of prediction errors. in: Soares, A.: Geo-Statistics Troja '92, Vol. 1
- [87] Tiedemann, J.; Marinoni, O. (1999): Zur Anwendung GeoStatistischer Modellierung in der Ingenieurgeologie. 12. Nationale Tagung für Ingenieurgeologie, Halle, 121-128.
- [88] Tiedemann, J.; Grunow, R. (2000): Geostatistische Schätzmodelle des Baugrunds als objektivierte Planungsgrundlage. Geotechnik 23, Nr 4, 289-294
- [89] Tilke, C. (1995): Ausgewählte Schätz- und Testprobleme bei räumlich korrelierten Daten. Dissertation, Universität – Bielefeld
- [90] Vanmarcke, E.H. (1977): Reliability of Earth Slopes. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 11, 1247-1265
- [91] Vecchia, A. V. (1988): Estimation and Model Identification for Continuous Spatial Processes, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, v. 50, 297-312
- [92] Vysochanskii, D. F., Petunin, Y. I. (1980): Justification of the 3σ rule for unimodal distributions. Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 21, 25-36
- [93] Whitfield, R. G.; Newsom, D.E. (1984): A survey of methods of uncertainty analysis. Argonne National Laboratory, Argonne
- [94] WIKIPEDIA (2004): Die freie Enzyklopädie. <http://de.wikipedia.org/wiki/Hauptseite>
-

- [95] Witt, K.J. (1998): Grundsätzliches zum Teilsicherheitskonzept in der Geotechnik. Seminar Geotechnische Nachweise nach dem neuen Sicherheitskonzept, Bauhaus-Universität Weimar
- [96] Witt, K. J. et al. (2002): Methodik bei der Risikobeurteilung einer Großrutschung. Veröffentl. 12. Donau-Europäische Konferenz Geotechnisches Ingenieurwesen, Passau, 2002, S. 127-130
- [97] Zadeh, L.A. (1965): Fuzzy Sets. in: Information and Control 8, 338-853
- [98] Ziegler, M. (2003): Safety analysis in geotechnical engineering by means of risk simulations. In: Natau, O., Fecker, E., Pimentel, E. (eds.): Geotechnical measurements and modelling. Lisse (u.a.): Balkema, 307-312.
- [99] Ziegler, M. (2003): Risikosimulationsrechnungen in der geotechnischen und baubetrieblichen Praxis. In: Ziegler, M.(Hrsg.): Stochastische Prozesse in der Geotechnik : Beiträge zum Workshop. Aachen, Mainz, 117-134. (Schriftenreihe Geotechnik im Bauwesen
- [100] Ziegler, M. (2004): Geotechnische Nachweise nach DIN 1054 : Einführung mit Beispielen. Berlin, Ernst & Sohn
- [101] Zilch, K.; Staller, M.; Brandes, Ch. (1999): Anwendung statistischer Verfahren für die Auswertung von Versuchsdaten. Bauingenieur Bd. 74 Nr. 1
- [102] Zimmerman, D. L. (1992): Another Look at Anisotropy in Geostatistics. Mathematical Geology, Vol. 25, No. 4, 1993, 453-470
- [103] Zupan, M.; Einax, J. W. et al. (2000): Chemometric Characterization of Soil and Plant Pollution: Part 1 Multivariate Data Analysis and Geostatistical Determination of Relationship and Spatial Structure of Inorganic Contaminants in Soil. ESPR (2), 89-96

13. Anlagen

13.1. Koordinatentransformation unter Reichweitenanisotropie

Unter Reichweitenanisotropie liegen in unterschiedlichen Raumrichtungen unterschiedliche Reichweiten vor. Der Schwellenwert ist annähernd gleich. Die unterschiedlichen Reichweiten repräsentieren die Halbachsen eines Ellipsoides. Das lokale Koordinatensystem des Ellipsoides, in welchem die Halbachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, ist gegenüber dem globalen Koordinatensystem um die Winkel α , β und γ verdreht. Begründet auf der erforderlichen Stationarität für die Anwendung geostatistischer Methoden ist ein Verschiebungsvektor nicht zu berücksichtigen.

Nach [29] gilt in Verbindung mit Bild 95:

$$\text{Drehung um z-Achse: } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

$$\text{Drehung um } x_1\text{-Achse: } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

$$\text{Drehung um } y_2\text{-Achse: } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

Oder in einem Schritt:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \beta \cdot \cos \alpha) & (-\cos \beta \cdot \sin \alpha) & (\sin \beta) \\ (\cos \gamma \cdot \sin \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha) & (\cos \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) & (-\sin \gamma \cdot \cos \beta) \\ (\sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha) & (\sin \gamma \cdot \cos \alpha + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) & (\cos \gamma \cdot \cos \beta) \end{bmatrix}$$

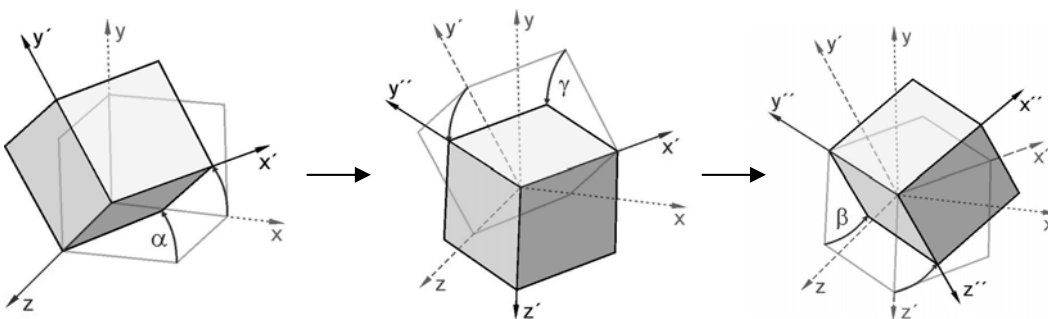


Bild 95: Richtungsdefinitionen der Koordinatentransformation

Anschließend wird das Ellipsoid in eine Kugel transformiert, um mit einer einheitlichen Variogrammfunktion während des Krigings nutzen zu können. Dazu werden auf Basis der Anisotropieverhältnisse so genannte Komprimierungsfaktoren bestimmt und das Koordinatensystem gestaucht.

$$\delta_1 = \frac{\text{Reichweite in } x \text{- Richtung}}{\text{Reichweite in } x \text{- Richtung}} \quad \delta_2 = \frac{\text{Reichweite in } y \text{- Richtung}}{\text{Reichweite in } x \text{- Richtung}}$$

$$\delta_3 = \frac{\text{Reichweite in } z \text{- Richtung}}{\text{Reichweite in } x \text{- Richtung}}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\delta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\delta_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\delta_3^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

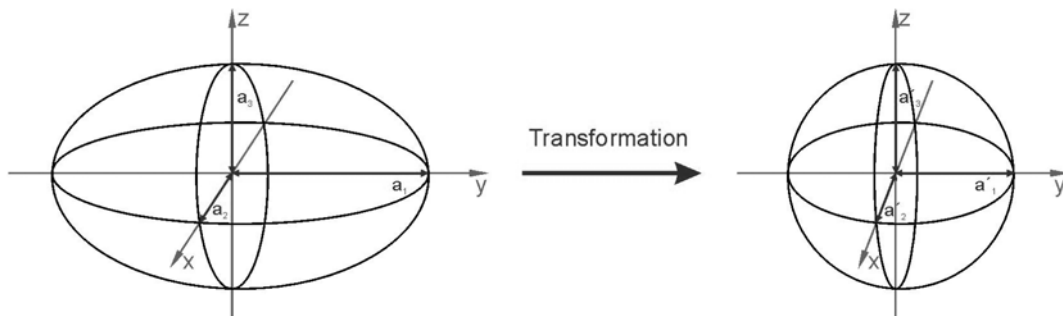
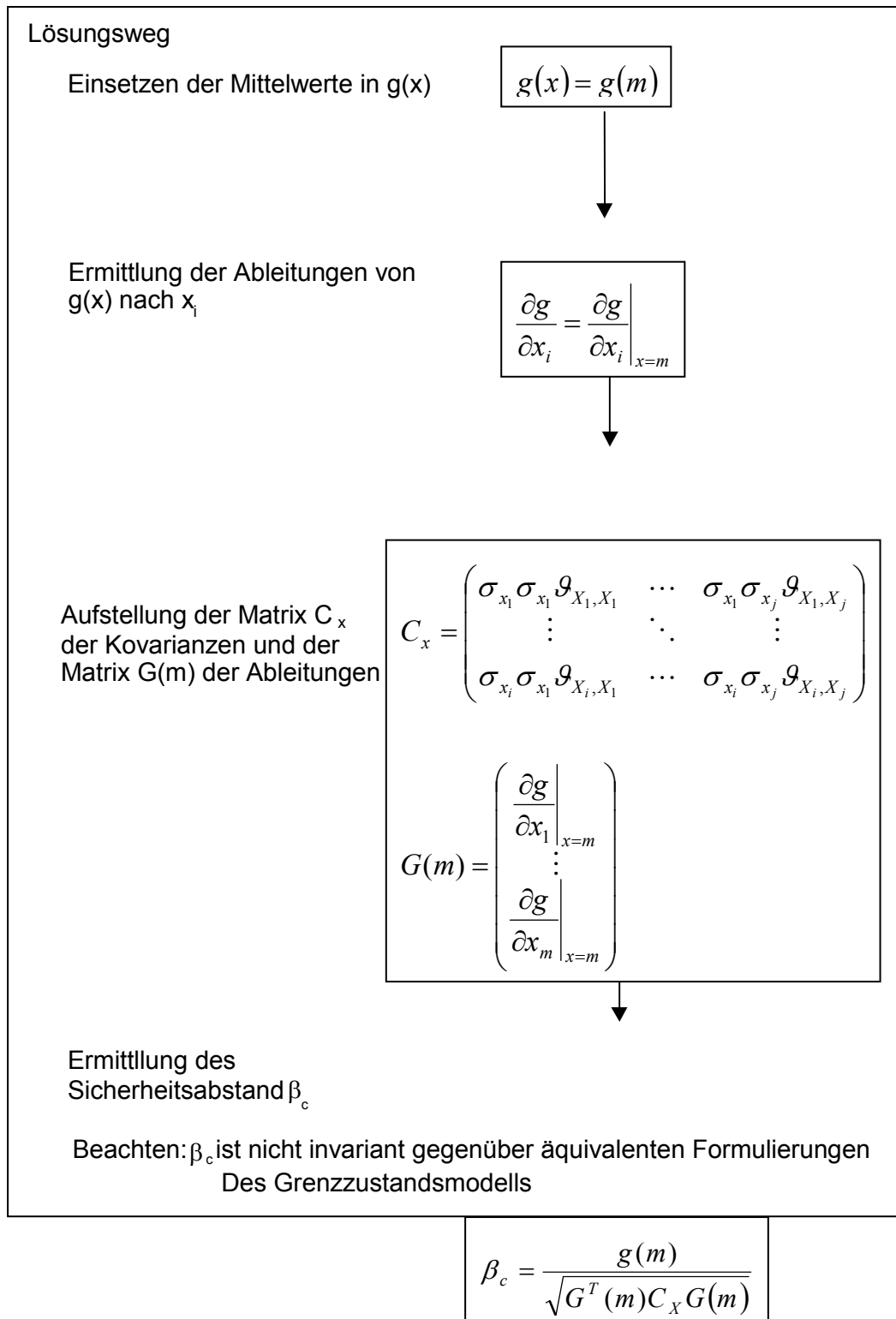


Bild 96: Transformation des Anisotropieellipsoides in eine Kugel

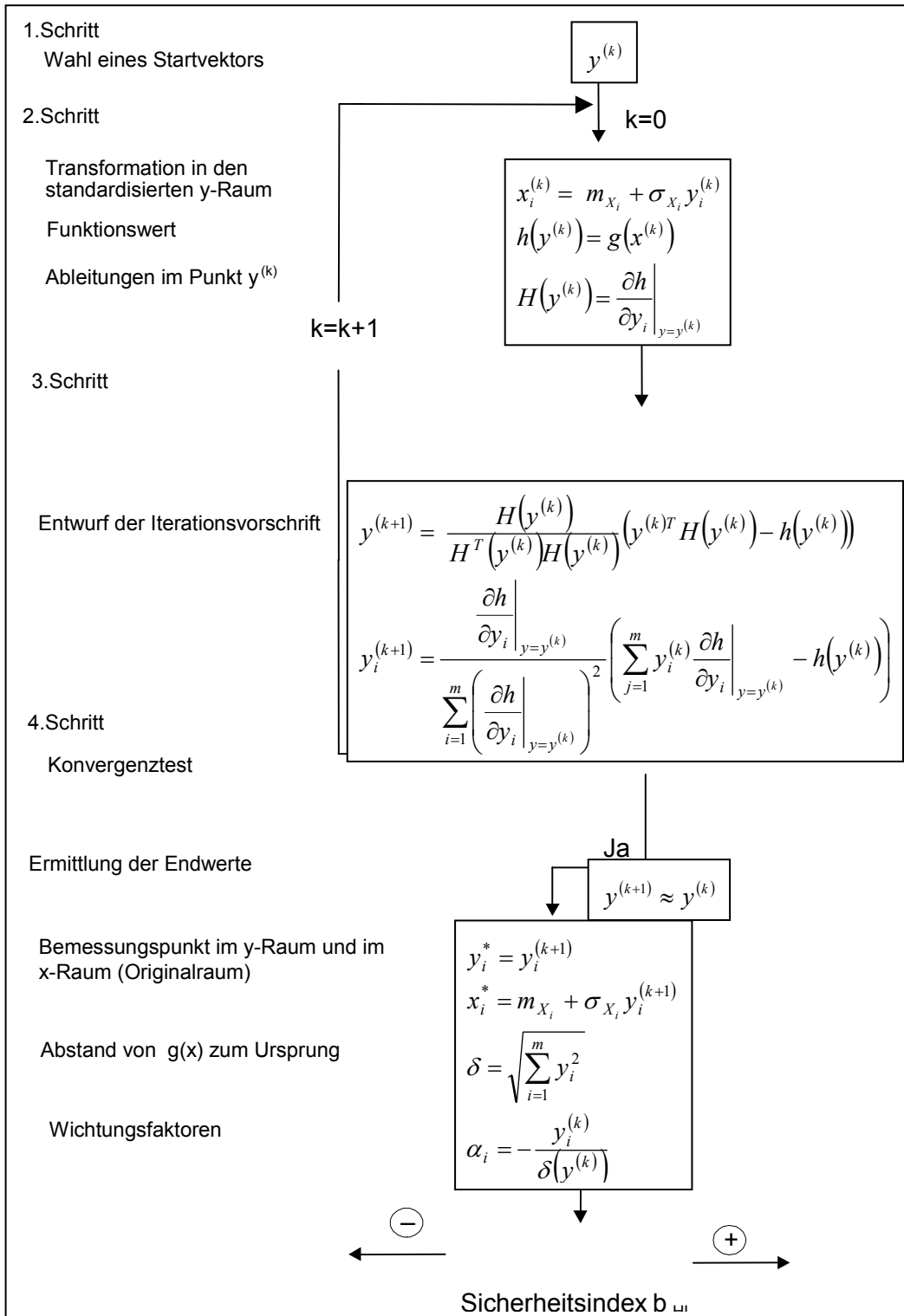
Dadurch wird der geometrisch anisotrope Halbraum in einen isotropen Halbraum überführt. Die Interpolation kann jetzt unter der Annahme eines isotropen Baugrunds erfolgen. Nach erfolgter Krigingschätzung ist die Rücktransformation vorzunehmen.

13.2. Algorithmen ausgewählter Näherungsverfahren zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit

13.2.1. Sicherheitsindex nach Cornell



13.2.2. Sicherheitsindex nach Hasofer/Lind

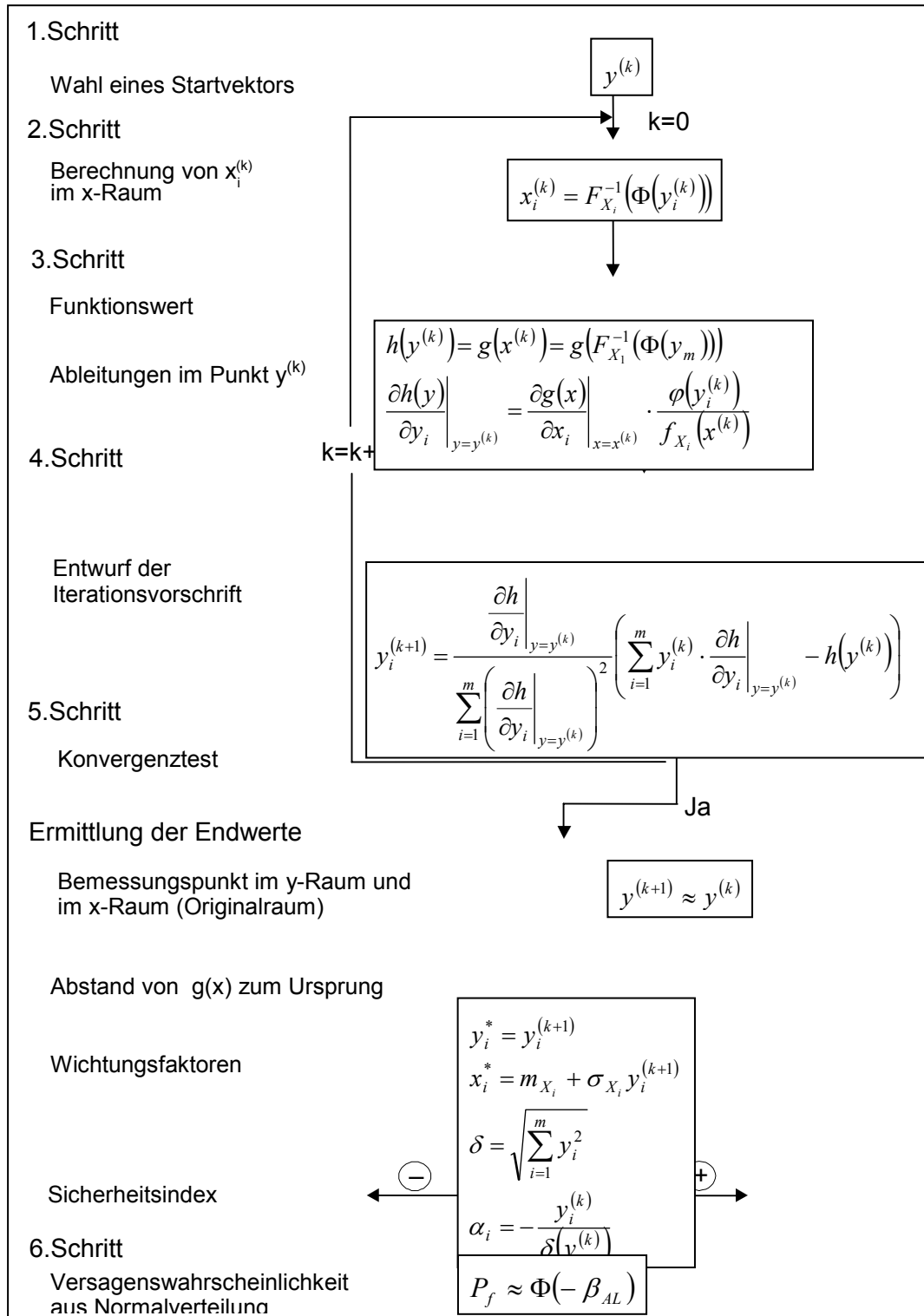


$$\beta_{HL} = -\delta$$

$$h(0) = g(m_x) \stackrel{?}{>} 0$$

$$\beta_{HL} = +\delta$$

13.2.3. Zuverlässigkeitstheorie 1.Ordnung – Allgemein



$$\beta_{AL} = -\delta$$

$$h(0) = g(m_x) \lessgtr 0$$

$$\beta_{AL} = +\delta$$

13.3. Resultate des Krigings am Referenzstandort

13.3.1. P4 (DS 4) / Kernerkundung / 3 Stützstellen / isotrop

Die Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P4 besteht aus 3 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der kleinen Datenbasis der Kernerkundung erstellt. Die Schätznachbarschaft liegt innerhalb der ermittelten Reichweite. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt als Extrapolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	129,30	130,15	0,85
Schicht 2 [m ü. NN]	127,25	128,31	1,06
Schicht 3 [m ü. NN]	117,57	118,53	0,96
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,77	130,14	0,37
Schicht 2 [m ü. NN]	127,83	128,31	0,48
Schicht 3 [m ü. NN]	117,49	118,53	1,04
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,47	130,14	0,67
Schicht 2 [m ü. NN]	127,42	128,31	0,89
Schicht 3 [m ü. NN]	117,57	118,53	0,96
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,24	130,14	0,90
Schicht 2 [m ü. NN]	127,30	128,31	1,01
Schicht 3 [m ü. NN]	117,49	118,53	1,04

Tabelle 28: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_K_3_iso)

Die Abweichung in den Resultaten der Schätzverfahren ist relativ groß. Innerhalb des Universal Kriging mit linearer Ansatzfunktion treten bei drei berücksichtigten Stützstellen keine Abweichungen auf. Den Schätzungen liegen unterschiedlichen theoretischen Variogrammfunktionen und die unterschiedlichen Baugrundmodelle zugrunde. Die Prognosen sind daher unabhängig vom Variogramm und werden ausschließlich durch den Driftanteil bestimmt. Bei Extrapolationen können daher die Prognosen des Universal Krigings stark variieren. Das Ordinary Kriging erzeugt dagegen, obwohl extrapoliert wird, noch immer distanzgewichtete Mittelwerte.

13.3.2. P4 (DS 4) / Kernerkundung / 5 Stützstellen / isotrop

Die Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P4 besteht aus 5 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der kleinen Datenbasis der Kernerkundung erstellt. Die Schätznachbarschaft liegt größtenteils innerhalb der ermittelten Reichweite. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt als Interpolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	129,91	129,90	0,01
Schicht 2 [m ü. NN]	127,97	127,95	0,02
Schicht 3 [m ü. NN]	119,22	119,13	0,09
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,96	129,92	0,04
Schicht 2 [m ü. NN]	128,24	128,21	0,03
Schicht 3 [m ü. NN]	119,61	119,28	0,33
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,79	129,86	0,07
Schicht 2 [m ü. NN]	127,86	127,91	0,05
Schicht 3 [m ü. NN]	119,22	119,13	0,09
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,85	129,70	0,15
Schicht 2 [m ü. NN]	128,13	127,99	0,14
Schicht 3 [m ü. NN]	119,61	119,28	0,33

Tabelle 29: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_K_5_iso)

Für diese Konstellation der Schätznachbarschaft erweisen sich die Abweichungen zwischen den Schätzverfahren als relativ klein. Zur Einschätzung der Ergebnisse soll der arithmetische Mittelwert herangezogen werden. Dieser beträgt für Schicht 1: 129,93 m ü. NN, für Schicht 2: 128,13 m ü. NN und für Schicht 3: 119,43 m ü. NN. Beide Schätzverfahren erzeugen demnach distanzgewichtete Mittelwerte. Diese sind vom Variogramm abhängig.

Die bestehenden Abweichungen zwischen den beiden Modellfunktionen der theoretischen Variogramme und auch zwischen den Baugrundmodellen können für diese Konstellation der Schätznachbarschaft als gering eingestuft werden.

13.3.3. P4 (DS 4) / Kern- und Detailerkundung / 3 Stützstellen / isotrop

Diese Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P4 besteht aus 3 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der verbesserten Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung erstellt. Dabei wurden nicht in allen Schichten ausreichend große Reichweiten ermittelt, so dass die Schätznachbarschaft schichtspezifisch innerhalb bzw. außerhalb dieser liegt. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt per Extrapolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	129,75	129,90	0,15
Schicht 2 [m ü. NN]	127,77	127,90	0,13
Schicht 3 [m ü. NN]	116,83	124,20	7,37
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,88	129,90	0,02
Schicht 2 [m ü. NN]	127,85	127,90	0,05
Schicht 3 [m ü. NN]	116,83	124,20	7,37
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,71	129,90	0,19
Schicht 2 [m ü. NN]	127,73	127,90	0,17
Schicht 3 [m ü. NN]	116,83	124,20	7,37
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,72	129,90	0,18
Schicht 2 [m ü. NN]	127,73	127,90	0,17
Schicht 3 [m ü. NN]	116,83	124,20	7,37

Tabelle 30: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_D_3_iso)

Das Universal Kriging mit linearer Ansatzfunktion erzeugt mit drei berücksichtigten Stützstellen vom Variogramm unabhängige Schätzergebnisse. In Verbindung mit der Extrapolation werden, bei steiler Neigung der Driftfläche, im Wert sehr hohe Ergebnisse geschätzt. Als Beispiel hierfür dient Schicht 3. Mit dem Ordinary Kriging werden für Schicht 3 ebenfalls gleiche Schätzergebnisse ermittelt. Die Ursache hierfür liegt jedoch in der geringen Reichweite der Variogramme. Das Ergebnis ist von seiner Lage völlig unabhängig und entspricht mit 116,83 m ü. NN exakt dem arithmetischen Mittelwert der Schätznachbarschaft. Die Abweichung zwischen den Schätzverfahren ist besonders in Schicht 3 relativ groß.

13.3.4. P4 (DS 4) / Kern- und Detailerkundung / 5 Stützstellen / isotrop

Diese Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P4 besteht aus 5 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der verbesserten Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung erstellt. Dabei wurden nicht in allen Schichten ausreichend große Reichweiten ermittelt, so dass die Schätznachbarschaft schichtspezifisch innerhalb bzw. außerhalb dieser liegt. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt per Interpolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	129,92	129,93	0,01
Schicht 2 [m ü. NN]	128,18	128,19	0,01
Schicht 3 [m ü. NN]	117,30	118,03	0,73
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,90	129,88	0,02
Schicht 2 [m ü. NN]	128,17	128,04	0,13
Schicht 3 [m ü. NN]	117,30	118,03	0,73
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,88	130,01	0,13
Schicht 2 [m ü. NN]	128,14	128,29	0,15
Schicht 3 [m ü. NN]	117,30	118,03	0,73
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,89	130,10	0,21
Schicht 2 [m ü. NN]	128,14	128,29	0,15
Schicht 3 [m ü. NN]	117,30	118,03	0,73

Tabelle 31: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P4_D_5_iso)

Die Schätzergebnisse zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging mit linearer Ansatzfunktion weichen bei dieser Interpolation im Prinzip nicht stark voneinander ab. Die größte Abweichung ergibt sich auch hier in Schicht 3. In dieser Schicht liegt die Schätznachbarschaft komplett außerhalb der Reichweite. Damit ist das Ergebnis beim Ordinary Kriging nicht mehr von seiner Lage abhängig. Es wird der arithmetische Mittelwert geschätzt. Beim Universal Kriging ist das Schätzergebnis ein Teil der Driftfunktion und damit noch immer von seiner Lage abhängig. Die Driftfunktion ist mit fünf Stützstellen überbestimmt, so dass sie mit einem Residualabstand zur Schätznachbarschaft verläuft.

13.3.5. P3 (Bhg 3) / Kernerkundung / 3 Stützstellen / isotrop

Diese Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P3 besteht aus 3 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der kleinen Datenbasis der Kernerkundung erstellt. Die Schätznachbarschaft liegt größtenteils innerhalb der ermittelten Reichweite. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt per Interpolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	129,25	129,14	0,11
Schicht 2 [m ü. NN]	127,50	127,88	0,38
Schicht 3 [m ü. NN]	119,20	116,58	2,62
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,35	129,14	0,21
Schicht 2 [m ü. NN]	128,06	127,88	0,18
Schicht 3 [m ü. NN]	118,76	116,58	2,18
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	128,63	129,14	0,51
Schicht 2 [m ü. NN]	126,88	127,88	1,00
Schicht 3 [m ü. NN]	119,20	116,58	2,62
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	128,06	129,14	1,08
Schicht 2 [m ü. NN]	126,77	127,88	1,11
Schicht 3 [m ü. NN]	118,76	116,58	2,18

Tabelle 32: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_K_3_iso)

Zwischen den beiden Schätzverfahren bestehen, trotz Interpolation, relativ große Abweichungen. Alle Ergebnisse des Universal Kriging sind für drei berücksichtigte Stützstellen unabhängig vom Variogramm und damit identisch in ihrem Wert. Die einbezogene Schätznachbarschaft liegt überwiegend innerhalb der Reichweite des Variogramms. Auf diese Weise werden die Ergebnisse des Ordinary Kriging distanzgewichtet.

Liegen die Schätznachbarn innerhalb der Reichweite des Variogramms, und es wird interpoliert, so erzeugen beide Schätzverfahren distanzgewichtete Mittelwerte. Diese Ergebnisse müssen sich jedoch nicht dem arithmetischen Mittelwert annähern.

13.3.6. P3 (Bhg 3) / Kernerkundung / 5 Stützstellen / isotrop

Diese Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P3 besteht aus 5 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der kleinen Datenbasis der Kernerkundung erstellt. Die Schätznachbarschaft liegt größtenteils innerhalb der ermittelten Reichweite. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt per Interpolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	129,25	129,27	0,02
Schicht 2 [m ü. NN]	127,53	127,53	0,00
Schicht 3 [m ü. NN]	119,09	119,28	0,19
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	129,35	129,17	0,18
Schicht 2 [m ü. NN]	128,05	127,75	0,30
Schicht 3 [m ü. NN]	118,71	118,28	0,43
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	128,92	128,58	0,34
Schicht 2 [m ü. NN]	127,20	126,85	0,35
Schicht 3 [m ü. NN]	119,09	119,28	0,19
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	128,43	127,60	0,83
Schicht 2 [m ü. NN]	127,13	126,19	0,94
Schicht 3 [m ü. NN]	118,71	118,28	0,43

Tabelle 33: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_K_5_iso)

Mit der Erhöhung der Anzahl der Schätznachbarn von drei auf fünf wurden die Abweichungen zwischen den Schätzverfahren erneut kleiner. Zudem hängen alle hier ermittelten Schätzergebnisse vom zugehörigen theoretischen Variogramm ab. Daraus ergeben sich die geringfügig unterschiedlichen Wichtungen der einzelnen Schätznachbarn.

Legt man die Streubreite der Schätznachbarschaft zugrunde, so können die bestehenden Abweichungen zwischen den Modellfunktionen der theoretischen Variogramme, sowie zwischen den Baugrundmodellen für diese Konstellation der Schätznachbarschaft als gering eingestuft werden.

13.3.7. P3 (Bhg 3) / Kern- und Detailerkundung / 3 Stützstellen / isotrop

Diese Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P3 besteht aus 3 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der verbesserten Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung erstellt. Dabei wurden nicht in allen Schichten ausreichend große Reichweiten ermittelt, so dass die Schätznachbarschaft schichtspezifisch innerhalb bzw. außerhalb dieser liegt. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt per Extrapolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	130,51	130,90	0,39
Schicht 2 [m ü. NN]	128,81	129,32	0,51
Schicht 3 [m ü. NN]	120,43	120,32	0,11
OF_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	130,85	130,90	0,05
Schicht 2 [m ü. NN]	129,16	129,32	0,16
Schicht 3 [m ü. NN]	120,43	120,32	0,11
M_iso_e			
Schicht 1 [m ü. NN]	130,35	130,90	0,55
Schicht 2 [m ü. NN]	128,67	129,32	0,65
Schicht 3 [m ü. NN]	120,43	120,32	0,11
M_iso_e²			
Schicht 1 [m ü. NN]	130,33	130,90	0,57
Schicht 2 [m ü. NN]	128,67	129,32	0,65
Schicht 3 [m ü. NN]	120,43	120,32	0,11

Tabelle 34: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_D_3_iso)

Die beiden Schätzverfahren weichen relativ stark untereinander ab. Der Extrapolationssort ist nah der Schätznachbarschaft gelegen. Die Prognosewerte weisen nur eine kleine Streubreite auf, so dass mit beiden Verfahren keine extremen Werte geschätzt wurden. Das Universal Kriging mit linearer Ansatzfunktion und drei berücksichtigten Stützstellen erzeugt auch hier, vom Variogramm unabhängige Schätzwerte. In der Schicht 3 liegt die Schätznachbarschaft komplett außerhalb der Reichweite des Variogramms, so dass mit dem Ordinary Kriging der arithmetische Mittelwert der Schätznachbarschaft ermittelt wurde.

13.3.8. P3 (Bhg 3) / Kern- und Detailerkundung / 5 Stützstellen / isotrop

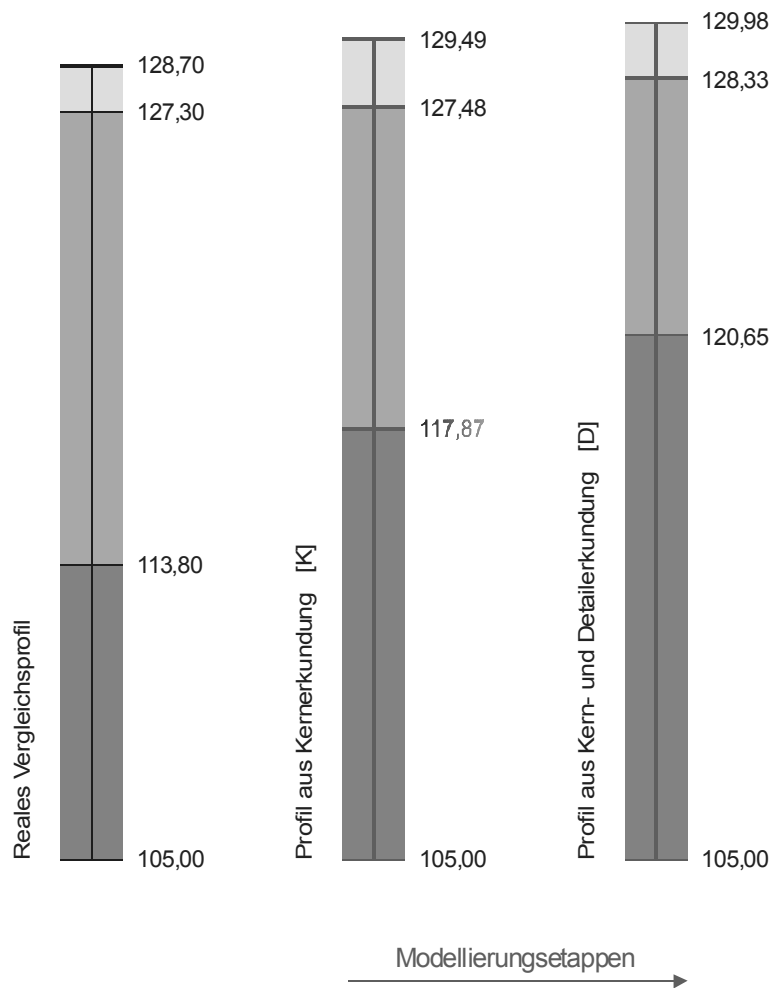
Diese Schätznachbarschaft für den Datenpunkt P3 besteht aus 5 Stützstellen. Das Variogramm wurde isotrop, anhand der verbesserten Datenbasis aus Kern- und Detailerkundung erstellt. Dabei wurden nicht in allen Schichten Reichweiten ermittelt, so dass die Schätznachbarschaft schichtspezifisch innerhalb bzw. außerhalb dieser liegt. Die Schätzung des Datenpunktes erfolgt per Interpolation.

OF_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	Differenz
Schicht 1 [m ü. NN]	130,24	130,16	0,08
Schicht 2 [m ü. NN]	128,56	128,43	0,13
Schicht 3 [m ü. NN]	119,78	119,59	0,19
OF_iso_e²	Ordinary Kriging	Universal Kriging	
Schicht 1 [m ü. NN]	130,32	130,32	0,00
Schicht 2 [m ü. NN]	128,40	128,39	0,01
Schicht 3 [m ü. NN]	119,78	119,59	0,19
M_iso_e	Ordinary Kriging	Universal Kriging	
Schicht 1 [m ü. NN]	130,16	130,06	0,10
Schicht 2 [m ü. NN]	128,50	128,35	0,15
Schicht 3 [m ü. NN]	119,78	119,59	0,19
M_iso_e²	Ordinary Kriging	Universal Kriging	
Schicht 1 [m ü. NN]	130,38	130,26	0,12
Schicht 2 [m ü. NN]	128,50	128,35	0,15
Schicht 3 [m ü. NN]	119,78	119,59	0,19

Tabelle 35: Abweichung zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging (P3_D_5_iso)

Die Schätzergebnisse zwischen Ordinary Kriging und Universal Kriging mit linearer Ansatzfunktion weichen bei dieser Interpolation nur geringfügig voneinander ab. Die größte Abweichung ergibt sich in Schicht 3. In dieser Schicht liegt die Schätznachbarschaft außerhalb der Reichweite des Variogramms. Damit ist das Ergebnis beim Ordinary Kriging nicht mehr von seiner Lage abhängig und es wird der arithmetische Mittelwert geschätzt. Beim Universal Kriging ist das Schätzergebnis ein Teil der Driftfunktion und damit von seiner Lage abhängig. Die Driftfunktion ist mit 5 Stützstellen überbestimmt, so dass sie mit einem Residualabstand zur Schätznachbarschaft verläuft.

13.4. Resultate der Baugrundmodellierung / Standort Artern



Schätzprofile

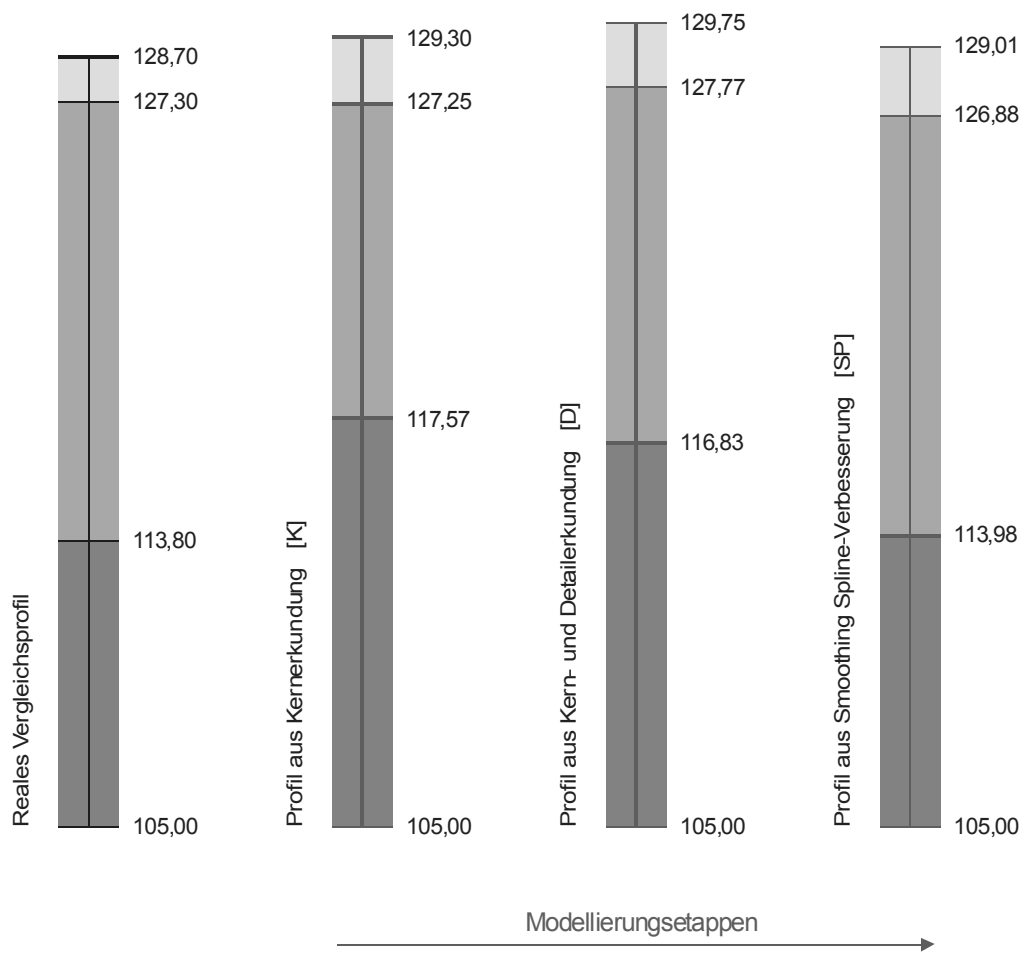
	Reales Profil	K	Δ	D	Δ
Schicht 1	128,70	129,49	0,79	129,98	1,28
Schicht 2	127,30	127,48	0,18	128,33	1,03
Schicht 3	113,80	117,87	4,07	120,65	6,85
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	5,04	Σ	9,17

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ
Abmessung	5,45	5,57	0,12	5,50	0,05
			2,2%		0,9%

Bild 97: Ausgewählte Baugrundprofile für den Datenort P4, bestimmt durch die subjektive Schätzung mit anwachsender Datengrundlage. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil

P4 / Schätzung der Schichtoberflächen / e-Funktion / 3 Stützstellen / Ordinary Kriging / isotrop



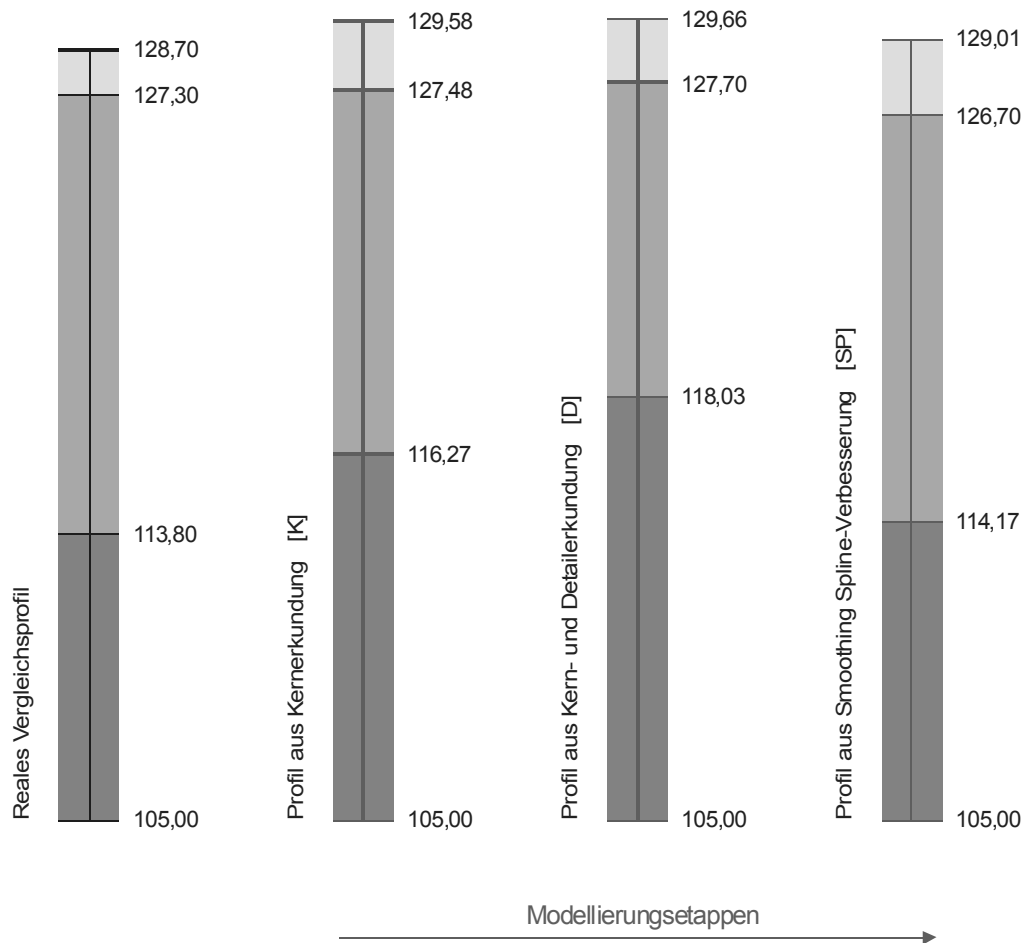
Schätzprofile

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	129,30	0,60	129,75	1,05	129,01	0,31
Schicht 2	127,30	127,25	0,05	127,77	0,47	126,88	0,42
Schicht 3	113,80	117,57	3,77	116,83	3,03	113,98	0,18
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	4,42	Σ	4,56	Σ	0,91

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,68	0,21	4,67	0,20	4,70	0,23
			4,7%		4,5%		5,1%

Bild 98: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Datengrundlage. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil

P4 / Schätzung der Schichtoberflächen / e²-Funktion / 5 Stützstellen / Ordinary Kriging / anisotrop

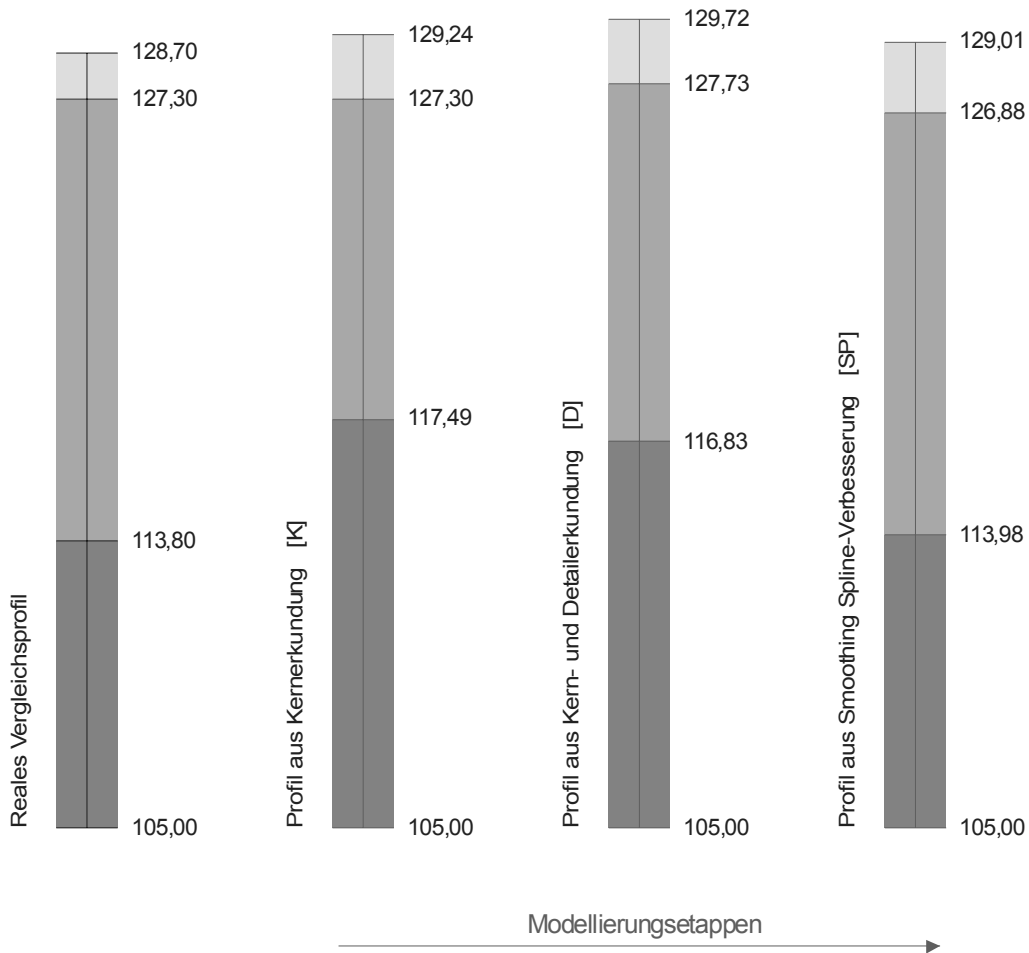
Schätzprofile

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	129,58	0,88	129,66	0,96	129,01	0,31
Schicht 2	127,30	127,48	0,18	127,70	0,40	126,70	0,60
Schicht 3	113,80	116,27	2,47	118,03	4,23	114,17	0,37
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	3,53	Σ	5,59	Σ	1,28

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,69	0,22	4,66	0,19	4,75	0,28
			4,9%		4,3%		6,3%

Bild 99: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil

P4 / Schätzung der Schichtmächtigkeiten / e²-Funktion / 3 Stützstellen / Ordinary Kriging / isotrop

Schätzprofile

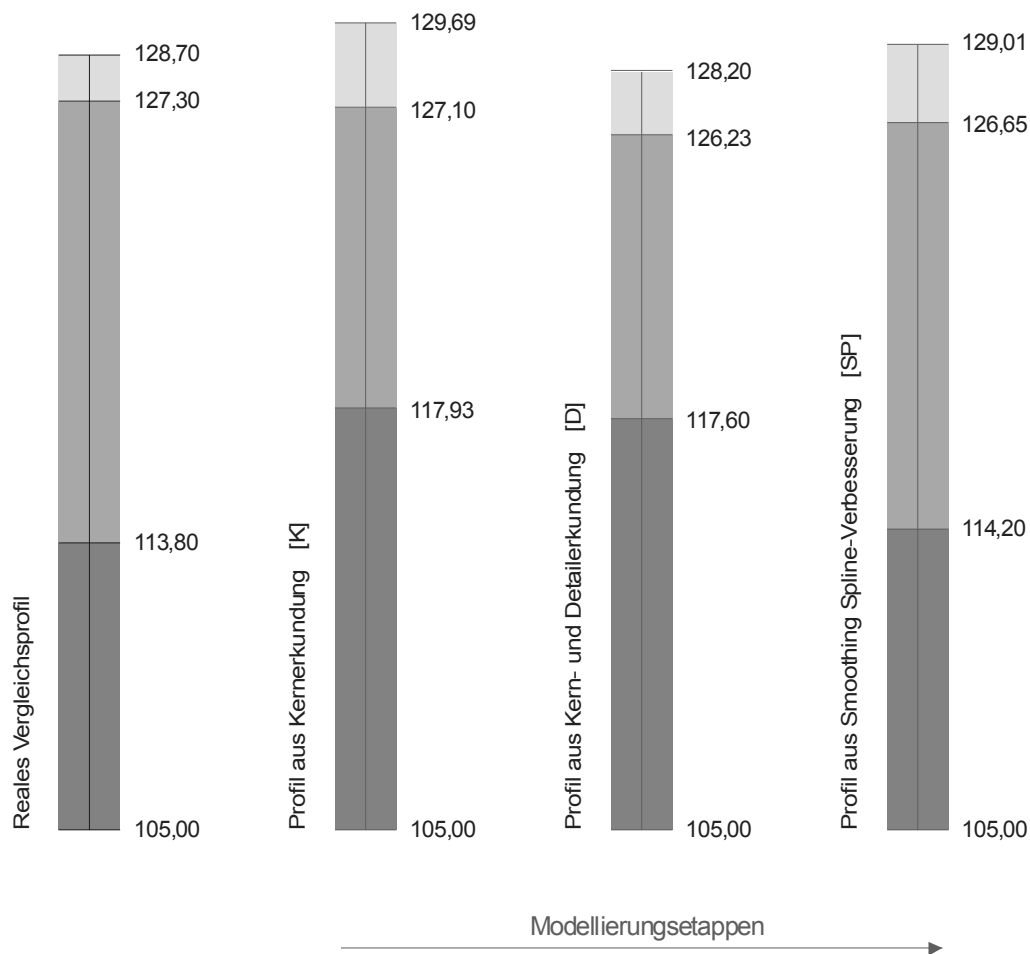
	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	129,24	0,54	129,72	1,02	129,01	0,31
Schicht 2	127,30	127,30	0,00	127,73	0,43	126,88	0,42
Schicht 3	113,80	117,49	3,69	116,83	3,03	113,98	0,18
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	4,24	Σ	4,48	Σ	0,91

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,65	0,18	4,67	0,20	4,70	0,23
			4,0%		4,5%		5,1%

Bild 100: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil

P4 / Schätzung der Schichtmächtigkeiten / e²-Funktion / 3 Stützstellen / Ordinary Kriging / anisotrop



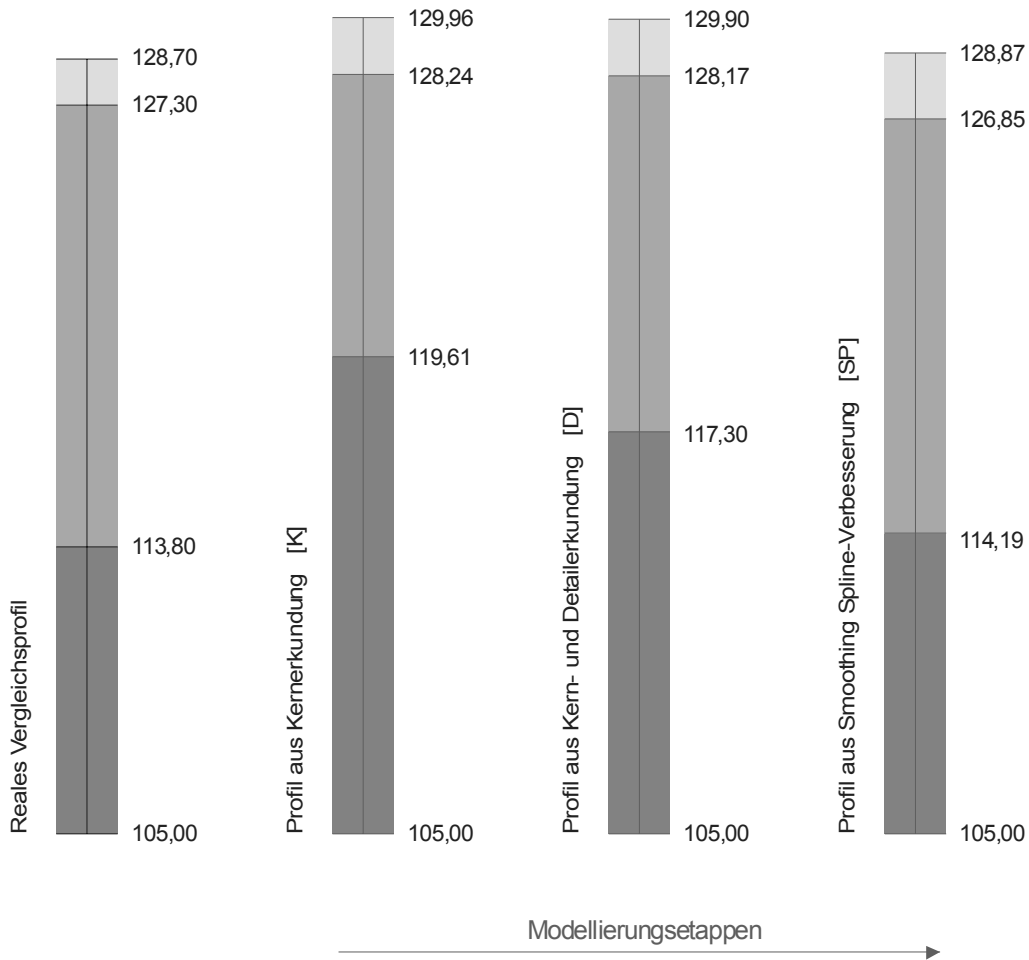
Schätzprofile

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ	
Schicht 1	128,70	129,69	0,99	128,20	0,50	129,01	0,31	
Schicht 2	127,30	127,10	0,20	126,23	1,07	126,65	0,65	
Schicht 3	113,80	117,93	4,13	117,60	3,80	114,20	0,40	
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00	
		Σ	5,33		Σ	5,37	Σ	1,36

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,79	0,32	4,66	0,19	4,75	0,28
			7,2%			4,3%	6,3%

Bild 101: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet das gesamte reale Vergleichsprofil

P4 / Schätzung der Schichtoberflächen / e²-Funktion / 5 Stützstellen / Ordinary Kriging / isotrop

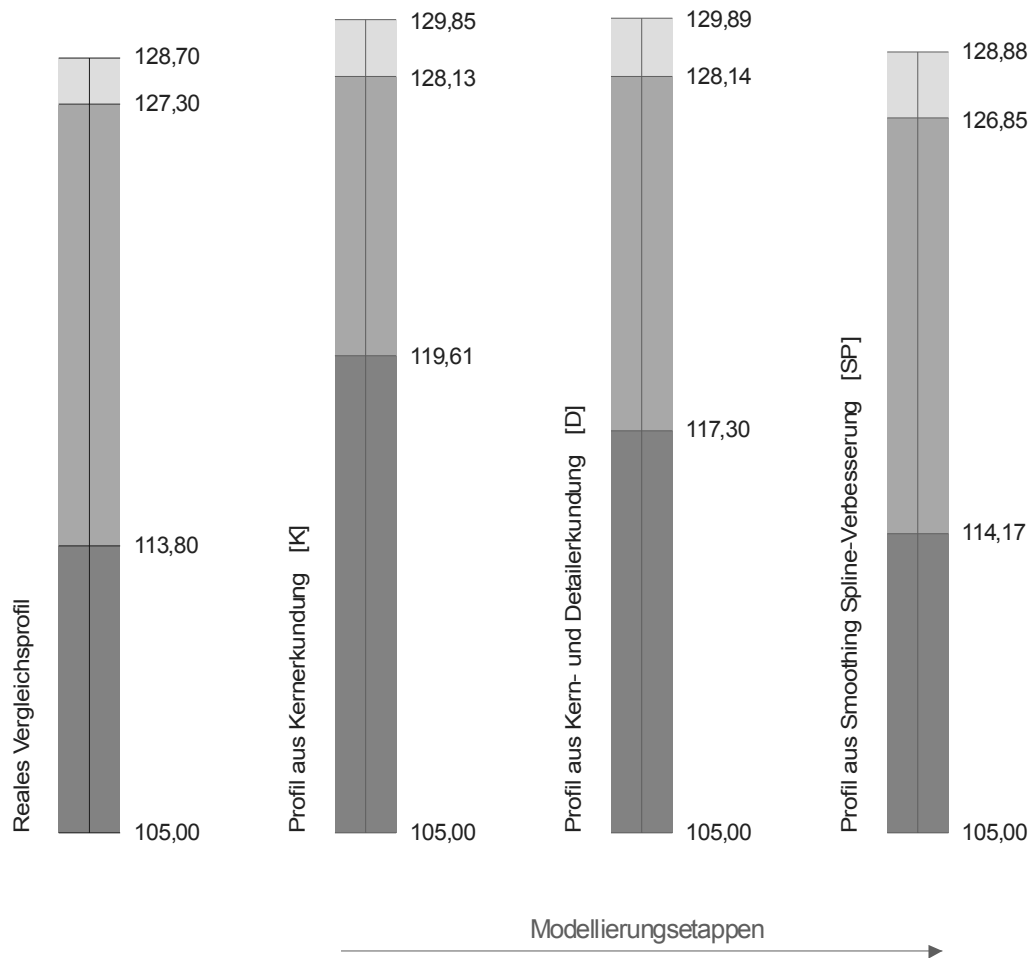
Schätzprofile

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	129,96	1,26	129,90	1,20	128,87	0,17
Schicht 2	127,30	128,24	0,94	128,17	0,87	126,85	0,45
Schicht 3	113,80	119,61	5,81	117,30	3,50	114,19	0,39
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	8,01	Σ	5,56	Σ	1,00

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,59	0,12	4,60	0,13	4,68	0,21
			2,7%		2,9%		4,7%

Bild 102: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.

P4 / Schätzung der Schichtmächtigkeiten / e²-Funktion / 5 Stützstellen / Ordinary Kriging / isotrop

Schätzprofile

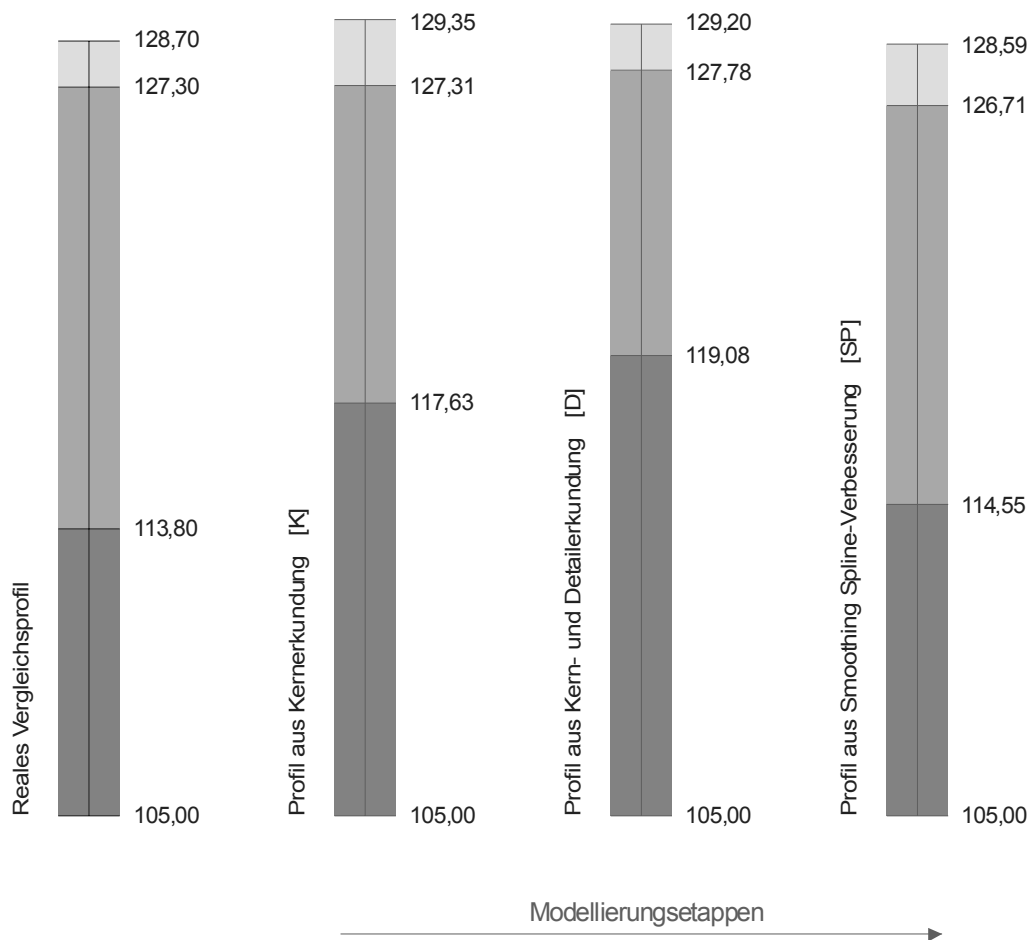
	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	129,85	1,15	129,89	1,19	128,88	0,18
Schicht 2	127,30	128,13	0,83	128,14	0,84	126,85	0,45
Schicht 3	113,80	119,61	5,81	117,30	3,50	114,17	0,37
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	7,79	Σ	5,53	Σ	1,01

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,59	0,12	4,60	0,13	4,68	0,21
			2,7%		2,9%		4,7%

Bild 103: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.

P4 / Schätzung der Schichtoberflächen / e-Funktion / 3 Stützstellen / Ordinary Kriging / anisotrop



Schätzprofile

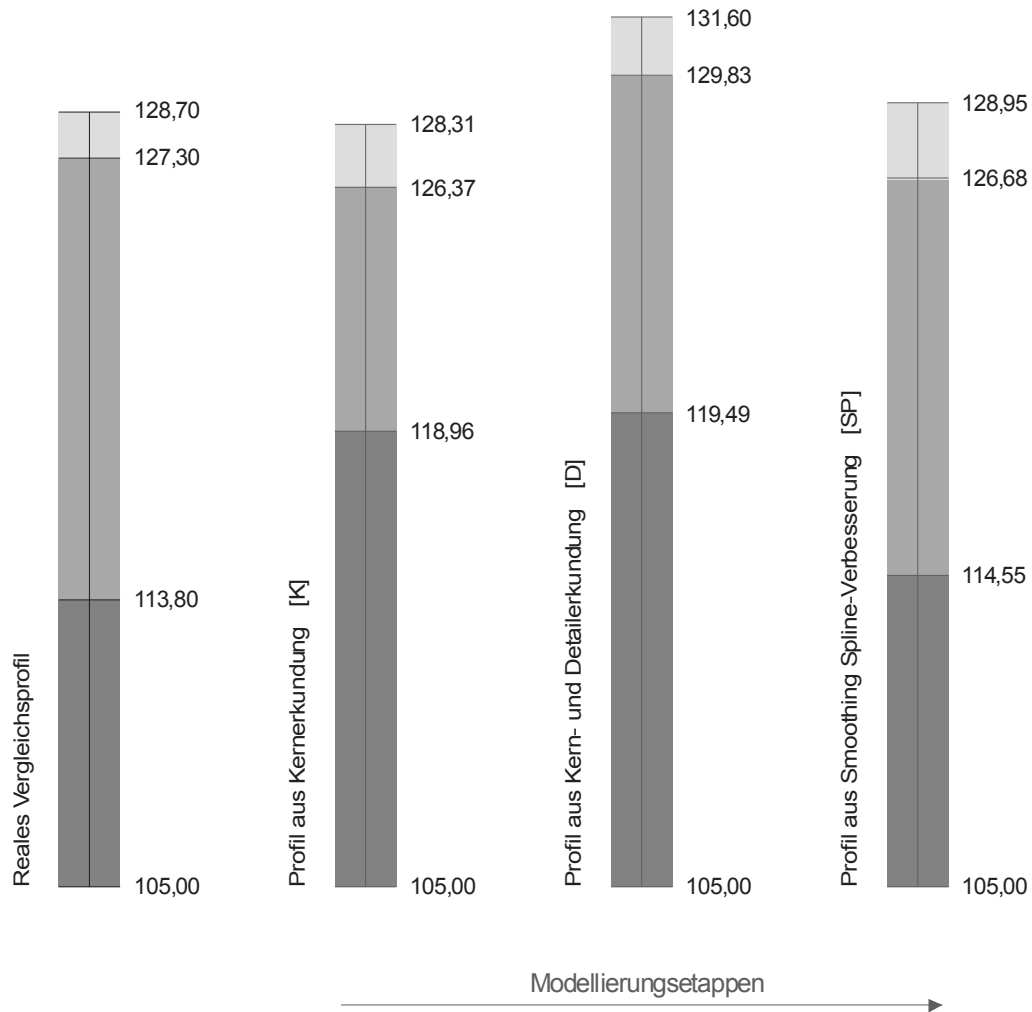
	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	129,35	0,65	129,20	0,50	128,59	0,11
Schicht 2	127,30	127,31	0,01	127,78	0,48	126,71	0,59
Schicht 3	113,80	117,63	3,83	119,08	5,28	114,55	0,75
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	4,50	Σ	6,25	Σ	1,44

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,67	0,20	4,49	0,02	4,64	0,17
			4,5%		0,4%		3,8%

Bild 104: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.

P4 / Schätzung der Schichtmächtigkeiten / e-Funktion / 5 Stützstellen / Ordinary Kriging / anisotrop



Schätzprofile

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Schicht 1	128,70	128,31	0,39	131,60	2,90	128,95	0,25
Schicht 2	127,30	126,37	0,93	129,83	2,53	126,68	0,62
Schicht 3	113,80	118,96	5,16	119,49	5,69	114,55	0,75
Basis	105,00	105,00	0,00	105,00	0,00	105,00	0,00
		Σ	6,47	Σ	11,13	Σ	1,63

Fundamentabmessungen

	Reales Profil	K	Δ	D	Δ	SP	Δ
Abmessung	4,47	4,65	0,18	4,61	0,14	4,73	0,26
			4,0%		3,1%		5,8%

Bild 105: Ausgewählte Baugrundprofile für Datenort P4. Den Qualitätsmaßstab bildet die Schicht 1 des realen Vergleichsprofils.

13.5. Datensätze

13.5.1. Fehlertest_Zufall

Dieser Datensatz wurde mathematisch generiert. Auf der Basis einer ebenen regelmäßigen Gitterstruktur wurden für jeden Rasterpunkt Zufallsgrößen basierend auf einer Normalverteilung generiert. Der Datenumfang beträgt 169.

	X- Koord	Y- Koord	Wert – 3 (KW 2)	Wert – 4 (KW 3)	Wert – 5 (KW 4)	Wert – 6 (KW 5)
Satz: 1	0	0	129.4999	129.113	131.3539	131.9235
Satz: 2	0	20	129.4905	127.9112	131.2042	129.2477
Satz: 3	0	40	129.4936	127.3079	129.4281	133.8872
Satz: 4	0	60	129.4988	126.6799	134.5966	134.8047
Satz: 5	0	80	129.5092	130.4802	128.7337	134.4584
Satz: 6	0	100	129.5051	127.9213	126.9706	130.8969
Satz: 7	0	120	129.4998	128.5351	125.7744	126.3834
Satz: 8	0	140	129.5014	129.2418	131.8338	136.7094
Satz: 9	0	160	129.4958	130.0459	129.9184	128.8106
Satz: 10	0	180	129.487	130.9636	126.3797	127.0438
Satz: 11	0	200	129.5112	129.6473	126.8308	126.8113
Satz: 12	0	220	129.5092	130.9245	128.673	124.7666
Satz: 13	0	240	129.5076	126.136	130.2566	128.4623
Satz: 14	20	0	129.4999	130.334	125.3537	128.0928
Satz: 15	20	20	129.4868	129.0958	129.9671	131.2611
Satz: 16	20	40	129.4913	129.5955	127.6403	132.8713
Satz: 17	20	60	129.4938	130.8812	130.7475	121.7632
Satz: 18	20	80	129.4893	129.6974	134.4392	129.5261
Satz: 19	20	100	129.5043	130.0221	128.6137	129.6954
Satz: 20	20	120	129.473	129.1274	134.509	132.2004
Satz: 21	20	140	129.4988	129.0121	133.8845	131.9378
Satz: 22	20	160	129.5053	127.597	129.8487	134.2353
Satz: 23	20	180	129.5039	130.4611	129.1755	133.913
Satz: 24	20	200	129.5062	130.4936	131.2173	124.694
Satz: 25	20	220	129.4998	129.1621	131.6987	128.8587
Satz: 26	20	240	129.4907	129.7094	130.7662	131.226
Satz: 27	40	0	129.5132	128.4697	129.6717	129.8016
Satz: 28	40	20	129.4978	130.8728	130.0846	131.1179
Satz: 29	40	40	129.5126	129.3427	132.9254	131.0532
Satz: 30	40	60	129.5029	130.2694	132.1938	128.0874
Satz: 31	40	80	129.5068	129.1674	135.8114	132.5716
Satz: 32	40	100	129.5026	130.6728	127.6909	130.0116
Satz: 33	40	120	129.5174	129.5902	132.3604	133.161
Satz: 34	40	140	129.495	127.8653	132.7297	133.9096
Satz: 35	40	160	129.5063	130.3261	129.1863	129.3232
Satz: 36	40	180	129.4987	128.257	126.8357	130.8755
Satz: 37	40	200	129.4842	128.7743	127.8562	127.7435
Satz: 38	40	220	129.5043	129.1676	124.8496	128.6658
Satz: 39	40	240	129.4893	129.4952	130.0202	135.8595
Satz: 40	60	0	129.4934	128.2831	129.8136	128.608
Satz: 41	60	20	129.4999	127.8838	133.9591	128.103
Satz: 42	60	40	129.493	128.7182	127.2209	125.6559

Satz: 43	60	60	129.4877	127.852	128.692	132.8024
Satz: 44	60	80	129.5117	129.3625	131.1998	133.7187
Satz: 45	60	100	129.505	130.2055	129.1026	129.9862
Satz: 46	60	120	129.4882	128.6565	132.336	127.9124
Satz: 47	60	140	129.5078	130.345	131.0359	127.6926
Satz: 48	60	160	129.5028	128.0229	133.4333	128.7298
Satz: 49	60	180	129.4872	129.6011	129.3102	125.823
Satz: 50	60	200	129.5172	129.2474	131.2498	138.897
Satz: 51	60	220	129.4933	129.8273	130.2618	130.2882
Satz: 52	60	240	129.5032	127.8509	128.9207	138.2715
Satz: 53	80	0	129.5091	128.1767	130.8386	131.5934
Satz: 54	80	20	129.4815	130.6432	128.2394	124.4089
Satz: 55	80	40	129.4925	129.7567	129.9826	135.8254
Satz: 56	80	60	129.5067	129.5696	133.5918	131.366
Satz: 57	80	80	129.5029	130.4971	132.7262	127.3135
Satz: 58	80	100	129.5052	126.1438	131.0696	127.7342
Satz: 59	80	120	129.4812	132.6013	128.8981	130.1706
Satz: 60	80	140	129.4948	131.7224	131.4589	128.1369
Satz: 61	80	160	129.5082	128.7215	130.4586	127.6808
Satz: 62	80	180	129.497	130.0765	129.4682	131.8495
Satz: 63	80	200	129.4897	131.1828	126.2681	129.4779
Satz: 64	80	220	129.4917	131.8726	127.0223	126.4373
Satz: 65	80	240	129.4926	128.7255	127.9158	127.5638
Satz: 66	100	0	129.4745	129.6912	124.7192	134.0979
Satz: 67	100	20	129.4949	130.7048	127.8095	134.6769
Satz: 68	100	40	129.5028	129.5424	129.9446	131.5606
Satz: 69	100	60	129.4927	127.309	126.7344	132.0723
Satz: 70	100	80	129.4895	130.1682	124.9282	134.4922
Satz: 71	100	100	129.511	130.4985	128.3066	127.5478
Satz: 72	100	120	129.4964	130.4283	133.8685	130.2885
Satz: 73	100	140	129.5262	128.2542	131.8229	126.0531
Satz: 74	100	160	129.489	128.1246	133.64	126.6023
Satz: 75	100	180	129.4853	130.9936	130.3978	132.2147
Satz: 76	100	200	129.5012	129.0164	126.1145	132.5072
Satz: 77	100	220	129.4903	130.1029	124.3418	132.0779
Satz: 78	100	240	129.5066	127.6166	129.7984	131.0182
Satz: 79	120	0	129.4916	131.241	129.0501	128.2827
Satz: 80	120	20	129.4954	128.8378	125.4127	129.5726
Satz: 81	120	40	129.4978	129.0497	127.3764	133.0703
Satz: 82	120	60	129.4911	130.5208	131.1043	127.6702
Satz: 83	120	80	129.5	130.0213	131.5416	125.9097
Satz: 84	120	100	129.4948	129.0921	132.7376	129.2254
Satz: 85	120	120	129.493	127.4132	126.4895	127.9698
Satz: 86	120	140	129.5043	131.2056	127.9433	130.5238
Satz: 87	120	160	129.4873	131.1811	132.6717	123.5025
Satz: 88	120	180	129.4881	130.2037	130.7704	125.8857
Satz: 89	120	200	129.5011	128.656	127.2551	127.5453
Satz: 90	120	220	129.4829	128.2498	129.5267	124.9415
Satz: 91	120	240	129.5008	130.1695	129.5714	125.5709
Satz: 92	140	0	129.4929	129.2632	129.0934	133.775
Satz: 93	140	20	129.5012	129.7021	132.4998	123.2273
Satz: 94	140	40	129.5018	127.6896	128.0892	130.2367
Satz: 95	140	60	129.4921	129.9825	129.1202	122.8552

Satz: 96	140	80	129.4939	129.6126	130.6626	131.8672
Satz: 97	140	100	129.5047	128.8898	125.8366	124.3076
Satz: 98	140	120	129.5007	130.179	130.7392	122.8045
Satz: 99	140	140	129.5229	129.5851	128.7442	132.8298
Satz: 100	140	160	129.4818	129.2298	133.9965	129.1741
Satz: 101	140	180	129.4912	130.7051	133.3397	125.7532
Satz: 102	140	200	129.4987	130.8324	128.9068	129.5481
Satz: 103	140	220	129.4956	128.1382	126.187	125.0011
Satz: 104	140	240	129.5062	129.8591	129.7077	131.1854
Satz: 105	160	0	129.499	130.7798	129.7331	128.8676
Satz: 106	160	20	129.4929	129.34	125.5959	128.5657
Satz: 107	160	40	129.4998	129.0959	124.5627	131.8109
Satz: 108	160	60	129.4936	128.8519	129.4508	128.9479
Satz: 109	160	80	129.4984	128.3914	131.9141	127.4732
Satz: 110	160	100	129.4964	129.2923	130.8194	133.7179
Satz: 111	160	120	129.5079	130.8874	134.5835	137.4178
Satz: 112	160	140	129.4995	129.4025	130.342	125.2429
Satz: 113	160	160	129.5067	127.1867	134.7714	131.1404
Satz: 114	160	180	129.4919	129.3571	129.8625	131.1274
Satz: 115	160	200	129.5077	129.8197	133.4282	121.7293
Satz: 116	160	220	129.4806	128.0385	133.3411	128.4306
Satz: 117	160	240	129.5	130.6363	135.7932	127.8091
Satz: 118	180	0	129.5017	130.7847	128.7944	131.6428
Satz: 119	180	20	129.4957	130.0715	133.0529	139.2593
Satz: 120	180	40	129.5111	127.2222	134.6877	134.0946
Satz: 121	180	60	129.4887	130.2286	129.0002	131.2581
Satz: 122	180	80	129.5068	129.9815	129.3079	131.7199
Satz: 123	180	100	129.4991	130.5228	127.9707	125.2376
Satz: 124	180	120	129.4941	130.6492	135.0657	126.3774
Satz: 125	180	140	129.512	129.4863	130.004	124.6154
Satz: 126	180	160	129.52	129.4145	127.6554	134.4411
Satz: 127	180	180	129.4878	129.7278	130.2476	130.1533
Satz: 128	180	200	129.5105	130.2587	125.0797	130.2249
Satz: 129	180	220	129.4957	129.4444	132.5285	125.0242
Satz: 130	180	240	129.5046	129.5826	131.8719	129.1267
Satz: 131	200	0	129.4953	128.1158	131.0675	124.352
Satz: 132	200	20	129.505	130.6753	126.9121	126.9803
Satz: 133	200	40	129.516	130.1906	131.7189	127.1789
Satz: 134	200	60	129.4938	129.2834	129.8793	129.692
Satz: 135	200	80	129.5004	129.5877	128.7167	135.6251
Satz: 136	200	100	129.5076	128.9169	131.4983	128.8105
Satz: 137	200	120	129.4841	128.8576	129.8003	129.8569
Satz: 138	200	140	129.5007	128.7303	130.2935	132.3521
Satz: 139	200	160	129.5116	128.8753	128.5515	126.6631
Satz: 140	200	180	129.5049	130.8094	131.4896	127.4896
Satz: 141	200	200	129.4916	128.8933	130.3977	132.6546
Satz: 142	200	220	129.4857	128.2605	129.5712	120.1628
Satz: 143	200	240	129.4849	129.6124	128.023	134.2666
Satz: 144	220	0	129.5021	132.8307	129.1527	126.672
Satz: 145	220	20	129.4909	128.9007	129.58	134.066
Satz: 146	220	40	129.4947	129.014	132.3604	135.3569
Satz: 147	220	60	129.4975	129.2607	126.574	122.4204
Satz: 148	220	80	129.5001	128.4308	129.6969	134.4672

Satz: 149	220	100	129.495	131.1728	127.0463	125.2188
Satz: 150	220	120	129.4914	131.41	129.5712	125.2654
Satz: 151	220	140	129.5011	128.8609	130.1984	127.2911
Satz: 152	220	160	129.4869	129.5418	130.8297	129.0093
Satz: 153	220	180	129.5021	127.5474	131.4827	125.1374
Satz: 154	220	200	129.4929	130.465	130.9005	133.725
Satz: 155	220	220	129.512	129.0667	132.9808	130.8683
Satz: 156	220	240	129.5101	131.9565	128.6516	131.6892
Satz: 157	240	0	129.467	130.103	129.1344	126.4046
Satz: 158	240	20	129.5036	131.6165	128.4216	130.7428
Satz: 159	240	40	129.5152	129.8476	133.3889	127.9112
Satz: 160	240	60	129.4955	128.6547	132.8577	128.3824
Satz: 161	240	80	129.5037	130.4755	129.9787	130.6107
Satz: 162	240	100	129.492	127.4228	128.7726	121.5923
Satz: 163	240	120	129.5089	126.8383	132.3259	134.994
Satz: 164	240	140	129.4898	128.1908	129.7382	132.5719
Satz: 165	240	160	129.4816	128.9888	128.228	132.3594
Satz: 166	240	180	129.4949	129.1127	132.518	127.6942
Satz: 167	240	200	129.5014	130.4576	128.9803	126.8705
Satz: 168	240	220	129.501	130.8585	131.4355	129.4657
Satz: 169	240	240	129.5108	128.5601	130.6291	126.7512

Mittelwert	129.4984	129.4599	130.0007	129.5813
Stabw	0.0095	1.2081	2.5006	3.6544
Schiefe	-0.0693	-0.1368	-0.0086	0.0594
Excess	0.0000	3.0284	2.6028	2.7680

Bedingt durch die Schiefe ungleich null und den Excess ungleich drei, sind die Kenngrößen im Datenfeld nicht symmetrisch normalverteilt.

13.5.2. Zufallsdaten

Dieser Datensatz wurde mathematisch generiert. Auf der Basis einer ebenen regelmäßigen Gitterstruktur wurden für jeden Rasterpunkt Zufallsgrößen basierend auf einer Normalverteilung generiert. Jeder Teildatensatz hat den gleichen Erwartungswert. Die Kenngrößen am Ort unterscheiden sich lediglich durch das Verhältnis der Standardabweichungen. Der Datenumfang beträgt 169.

	X- Koord	Y- Koord	Wert – 3 (KW 2)	Wert – 4 (KW 3)	Wert – 5 (KW 4)	Wert – 6 (KW 5)
Satz: 1	0	0	129,5796	129,9029	130,307	131,9235
Satz: 2	0	20	129,4904	129,457	129,4151	129,2477
Satz: 3	0	40	129,6451	130,2302	130,9616	133,8872
Satz: 4	0	60	129,6757	130,3831	131,2674	134,8047
Satz: 5	0	80	129,6641	130,3254	131,152	134,4584
Satz: 6	0	100	129,5454	129,7318	129,9648	130,8969
Satz: 7	0	120	129,395	128,9796	128,4603	126,3834
Satz: 8	0	140	129,7392	130,7006	131,9023	136,7094
Satz: 9	0	160	129,4759	129,3841	129,2694	128,8106
Satz: 10	0	180	129,417	129,0896	128,6805	127,0438
Satz: 11	0	200	129,4092	129,0509	128,603	126,8113
Satz: 12	0	220	129,3411	128,7101	127,9214	124,7666
Satz: 13	0	240	129,4642	129,3261	129,1533	128,4623
Satz: 14	20	0	129,4519	129,2645	129,0301	128,0928
Satz: 15	20	20	129,5575	129,7925	130,0862	131,2611
Satz: 16	20	40	129,6112	130,0609	130,623	132,8713
Satz: 17	20	60	129,2409	128,2095	126,9203	121,7632
Satz: 18	20	80	129,4997	129,5034	129,5079	129,5261
Satz: 19	20	100	129,5054	129,5316	129,5643	129,6954
Satz: 20	20	120	129,5889	129,9491	130,3993	132,2004
Satz: 21	20	140	129,5801	129,9053	130,3118	131,9378
Satz: 22	20	160	129,6567	130,2882	131,0776	134,2353
Satz: 23	20	180	129,6459	130,2345	130,9702	133,913
Satz: 24	20	200	129,3386	128,698	127,8972	124,694
Satz: 25	20	220	129,4775	129,3921	129,2854	128,8587
Satz: 26	20	240	129,5564	129,7867	130,0745	131,226
Satz: 27	40	0	129,5089	129,5493	129,5997	129,8016
Satz: 28	40	20	129,5528	129,7687	130,0385	131,1179
Satz: 29	40	40	129,5506	129,7579	130,0169	131,0532
Satz: 30	40	60	129,4518	129,2636	129,0283	128,0874
Satz: 31	40	80	129,6012	130,0109	130,5231	132,5716
Satz: 32	40	100	129,5159	129,5843	129,6697	130,0116
Satz: 33	40	120	129,6209	130,1092	130,7195	133,161
Satz: 34	40	140	129,6458	130,2339	130,9691	133,9096
Satz: 35	40	160	129,4929	129,4695	129,4403	129,3232
Satz: 36	40	180	129,5447	129,7283	129,9577	130,8755
Satz: 37	40	200	129,4403	129,2063	128,9137	127,7435
Satz: 38	40	220	129,471	129,36	129,2211	128,6658
Satz: 39	40	240	129,7108	130,5589	131,619	135,8595
Satz: 40	60	0	129,4691	129,3503	129,2019	128,608
Satz: 41	60	20	129,4523	129,2662	129,0335	128,103

Satz: 42	60	40	129,3707	128,8583	128,2178	125,6559
Satz: 43	60	60	129,6089	130,0494	130,6	132,8024
Satz: 44	60	80	129,6395	130,2021	130,9054	133,7187
Satz: 45	60	100	129,515	129,58	129,6613	129,9862
Satz: 46	60	120	129,4459	129,2344	128,97	127,9124
Satz: 47	60	140	129,4386	129,1978	128,8967	127,6926
Satz: 48	60	160	129,4732	129,3706	129,2425	128,7298
Satz: 49	60	180	129,3763	128,8862	128,2735	125,823
Satz: 50	60	200	129,8121	131,0652	132,6315	138,897
Satz: 51	60	220	129,5251	129,6304	129,7619	130,2882
Satz: 52	60	240	129,7912	130,9609	132,423	138,2715
Satz: 53	80	0	129,5686	129,8479	130,197	131,5934
Satz: 54	80	20	129,3291	128,6505	127,8022	124,4089
Satz: 55	80	40	129,7097	130,5532	131,6077	135,8254
Satz: 56	80	60	129,561	129,81	130,1212	131,366
Satz: 57	80	80	129,426	129,1346	128,7704	127,3135
Satz: 58	80	100	129,44	129,2047	128,9106	127,7342
Satz: 59	80	120	129,5212	129,6108	129,7227	130,1706
Satz: 60	80	140	129,4534	129,2718	129,0448	128,1369
Satz: 61	80	160	129,4382	129,1958	128,8928	127,6808
Satz: 62	80	180	129,5772	129,8906	130,2824	131,8495
Satz: 63	80	200	129,4981	129,4953	129,4918	129,4779
Satz: 64	80	220	129,3967	128,9886	128,4783	126,4373
Satz: 65	80	240	129,4343	129,1763	128,8538	127,5638
Satz: 66	100	0	129,6521	130,2653	131,0318	134,0979
Satz: 67	100	20	129,6714	130,3618	131,2248	134,6769
Satz: 68	100	40	129,5675	129,8424	130,1861	131,5606
Satz: 69	100	60	129,5846	129,9277	130,3566	132,0723
Satz: 70	100	80	129,6652	130,331	131,1633	134,4922
Satz: 71	100	100	129,4338	129,1736	128,8485	127,5478
Satz: 72	100	120	129,5251	129,6304	129,762	130,2885
Satz: 73	100	140	129,3839	128,9245	128,3502	126,0531
Satz: 74	100	160	129,4023	129,0161	128,5333	126,6023
Satz: 75	100	180	129,5893	129,9514	130,4041	132,2147
Satz: 76	100	200	129,5991	130,0002	130,5016	132,5072
Satz: 77	100	220	129,5848	129,9287	130,3585	132,0779
Satz: 78	100	240	129,5494	129,752	130,0053	131,0182
Satz: 79	120	0	129,4583	129,2961	129,0934	128,2827
Satz: 80	120	20	129,5013	129,5111	129,5234	129,5726
Satz: 81	120	40	129,6179	130,0941	130,6893	133,0703
Satz: 82	120	60	129,4378	129,194	128,8893	127,6702
Satz: 83	120	80	129,3792	128,9006	128,3024	125,9097
Satz: 84	120	100	129,4897	129,4532	129,4077	129,2254
Satz: 85	120	120	129,4478	129,244	128,9891	127,9698
Satz: 86	120	140	129,533	129,6696	129,8405	130,5238
Satz: 87	120	160	129,2989	128,4994	127,5	123,5025
Satz: 88	120	180	129,3784	128,8966	128,2944	125,8857
Satz: 89	120	200	129,4337	129,1732	128,8476	127,5453
Satz: 90	120	220	129,3469	128,7392	127,9797	124,9415
Satz: 91	120	240	129,3679	128,8442	128,1895	125,5709
Satz: 92	140	0	129,6413	130,2115	130,9242	133,775
Satz: 93	140	20	129,2897	128,4536	127,4083	123,2273
Satz: 94	140	40	129,5234	129,6218	129,7448	130,2367

Satz: 95	140	60	129,2773	128,3915	127,2843	122,8552
Satz: 96	140	80	129,5777	129,8935	130,2883	131,8672
Satz: 97	140	100	129,3258	128,6336	127,7684	124,3076
Satz: 98	140	120	129,2757	128,3831	127,2674	122,8045
Satz: 99	140	140	129,6098	130,054	130,6091	132,8298
Satz: 100	140	160	129,488	129,4447	129,3906	129,1741
Satz: 101	140	180	129,3739	128,8745	128,2503	125,7532
Satz: 102	140	200	129,5004	129,507	129,5152	129,5481
Satz: 103	140	220	129,3489	128,7492	127,9996	125,0011
Satz: 104	140	240	129,555	129,7799	130,061	131,1854
Satz: 105	160	0	129,4778	129,3936	129,2884	128,8676
Satz: 106	160	20	129,4677	129,3433	129,1878	128,5657
Satz: 107	160	40	129,5759	129,8842	130,2695	131,8109
Satz: 108	160	60	129,4804	129,407	129,3152	128,9479
Satz: 109	160	80	129,4313	129,1612	128,8236	127,4732
Satz: 110	160	100	129,6394	130,202	130,9052	133,7179
Satz: 111	160	120	129,7628	130,8186	132,1385	137,4178
Satz: 112	160	140	129,3569	128,7895	128,0802	125,2429
Satz: 113	160	160	129,5535	129,7724	130,046	131,1404
Satz: 114	160	180	129,5531	129,7702	130,0417	131,1274
Satz: 115	160	200	129,2398	128,2039	126,909	121,7293
Satz: 116	160	220	129,4632	129,3208	129,1427	128,4306
Satz: 117	160	240	129,4425	129,2172	128,9356	127,8091
Satz: 118	180	0	129,5703	129,8561	130,2135	131,6428
Satz: 119	180	20	129,8242	131,1256	132,7523	139,2593
Satz: 120	180	40	129,652	130,2648	131,0307	134,0946
Satz: 121	180	60	129,5574	129,792	130,0852	131,2581
Satz: 122	180	80	129,5728	129,869	130,2392	131,7199
Satz: 123	180	100	129,3568	128,7886	128,0784	125,2376
Satz: 124	180	120	129,3948	128,9786	128,4583	126,3774
Satz: 125	180	140	129,336	128,6849	127,871	124,6154
Satz: 126	180	160	129,6635	130,3225	131,1462	134,4411
Satz: 127	180	180	129,5206	129,6079	129,717	130,1533
Satz: 128	180	200	129,523	129,6198	129,7408	130,2249
Satz: 129	180	220	129,3496	128,753	128,0073	125,0242
Satz: 130	180	240	129,4864	129,4368	129,3748	129,1267
Satz: 131	200	0	129,3272	128,641	127,7832	124,352
Satz: 132	200	20	129,4149	129,079	128,6593	126,9803
Satz: 133	200	40	129,4215	129,1122	128,7255	127,1789
Satz: 134	200	60	129,5052	129,531	129,5632	129,692
Satz: 135	200	80	129,703	130,5198	131,5409	135,6251
Satz: 136	200	100	129,4759	129,3841	129,2694	128,8105
Satz: 137	200	120	129,5107	129,5585	129,6182	129,8569
Satz: 138	200	140	129,5939	129,9743	130,4499	132,3521
Satz: 139	200	160	129,4043	129,0262	128,5536	126,6631
Satz: 140	200	180	129,4318	129,1639	128,8291	127,4896
Satz: 141	200	200	129,604	130,0248	130,5507	132,6546
Satz: 142	200	220	129,1876	127,9428	126,3868	120,1628
Satz: 143	200	240	129,6577	130,2934	131,0881	134,2666
Satz: 144	220	0	129,4046	129,0277	128,5565	126,672
Satz: 145	220	20	129,651	130,26	131,0212	134,066
Satz: 146	220	40	129,6941	130,4752	131,4515	135,3569
Satz: 147	220	60	129,2629	128,3191	127,1393	122,4204

Satz: 148	220	80	129,6644	130,3269	131,1549	134,4672
Satz: 149	220	100	129,3561	128,7855	128,0721	125,2188
Satz: 150	220	120	129,3577	128,7932	128,0877	125,2654
Satz: 151	220	140	129,4252	129,1309	128,7629	127,2911
Satz: 152	220	160	129,4825	129,4172	129,3356	129,0093
Satz: 153	220	180	129,3534	128,7719	128,045	125,1374
Satz: 154	220	200	129,6397	130,2032	130,9075	133,725
Satz: 155	220	220	129,5445	129,727	129,9553	130,8683
Satz: 156	220	240	129,5718	129,8639	130,2289	131,6892
Satz: 157	240	0	129,3957	128,9831	128,4674	126,4046
Satz: 158	240	20	129,5403	129,7061	129,9135	130,7428
Satz: 159	240	40	129,4459	129,2342	128,9696	127,9112
Satz: 160	240	60	129,4616	129,3127	129,1267	128,3824
Satz: 161	240	80	129,5359	129,6841	129,8694	130,6107
Satz: 162	240	100	129,2353	128,181	126,8633	121,5923
Satz: 163	240	120	129,682	130,4147	131,3305	134,994
Satz: 164	240	140	129,6012	130,011	130,5232	132,5719
Satz: 165	240	160	129,5942	129,9756	130,4523	132,3594
Satz: 166	240	180	129,4386	129,198	128,8973	127,6942
Satz: 167	240	200	129,4112	129,0608	128,6227	126,8705
Satz: 168	240	220	129,4977	129,4933	129,4878	129,4657
Satz: 169	240	240	129,4072	129,0409	128,5829	126,7512

Mittelwert	129.502	129.513	129.526	129.581
Stabw	0,122	0,609	1,218	3.654
Schiefe	0,060	0,060	0,060	0.06
Excess	2,801	2,801	2,801	2.801

Bedingt durch die Schiefe ungleich null und den Excess ungleich drei, sind die Kenngrößen im Datenfeld nicht symmetrisch normalverteilt.

13.5.3. Datensatz3

Dieser dreidimensionale Datensatz spiegelt eine theoretische Kenngröße wieder, die dem Bildungsgesetz:

$$w = 0,1 \cdot (x - 120) + 0,1 \cdot (y - 120) + 0,02 \cdot (z - 120) \\ + \sin\left(\pi \frac{x}{240} \cdot \frac{y}{240} \cdot \frac{z}{480}\right) + \cos\left(\pi \frac{x}{240} \cdot \frac{y}{240} \cdot \frac{z}{480}\right) + 30$$

unterliegt. Es wird lediglich ein Auszug nachfolgend dargestellt.

X- Koord	Y- Koord	Z- Koord	Kenngröße
131.0	149.0	129.0	33.5425
204.0	29.0	213.0	32.3046
179.0	41.0	28.0	27.3620
175.0	201.0	41.0	42.9724
3.0	117.0	134.0	19.3313
26.0	140.0	82.0	23.1130
199.0	164.0	189.0	45.0781
37.0	189.0	217.0	31.4008
32.0	80.0	40.0	16.7080
97.0	35.0	95.0	19.9892
133.0	216.0	222.0	44.3493
38.0	21.0	190.0	14.4548
168.0	160.0	177.0	39.7117
60.0	218.0	146.0	34.6211
168.0	223.0	192.0	47.3062
148.0	229.0	75.0	42.1289
~~~~~			
4.0	185.0	161.0	26.8443
143.0	239.0	153.0	45.3667
48.0	73.0	156.0	20.2133
36.0	177.0	144.0	29.1525
41.0	23.0	120.0	13.5185
71.0	65.0	6.0	18.3506
157.0	58.0	18.0	26.6259
85.0	210.0	205.0	35.8078
16.0	238.0	163.0	33.6686
94.0	122.0	1.0	26.2328
32.0	1.0	190.0	11.7068
53.0	77.0	14.0	17.9420

Datenanzahl : 3375

Mittelwert	30.3301
Stabw	9.6037
Schiefe	0.0157
Excess	2.5339

## 13.5.4. Testfeld_1

Dieser Datensatz dient zur Veranschaulichung von Grundaussagen.

X- Koord	Y- Koord	Z- Koord	KenngroÙe
60	60	0	10
180	60	0	10
180	180	0	10
60	180	0	10

Datenanzahl : 4

Mittelwert  
 Stabw  
 Schiefe  
 Excess

10
0
-
-

## 13.5.5. Testfeld_2

Dieser Datensatz dient zur Veranschaulichung von Grundaussagen.

X- Koord	Y- Koord	Z- Koord	KenngroÙe
55	55	0	10
65	65	0	10
175	175	0	10
185	185	0	10

Datenanzahl : 4

Mittelwert  
 Stabw  
 Schiefe  
 Excess

10
0
-
-

## 13.5.6. ArternOK_Schicht

Dieser zweidimensionale Datensatz spiegelt das Schichtenverzeichnis des Referenzstandortes wieder. In diesem sind ausschließlich die Oberkanten der verschiedenen Schichtungen im m ü NN angeführt. Der Datensatz beinhaltet 29 Daten.

X- Koord	Y- Koord	Schicht 1 (KW 2)	Schicht 2 (KW 3)	Schicht 3 (KW 4)	Schicht 4 (KW 5)
88.50	112.00	129.70	127.80	113.50	105.00
111.50	112.00	127.80	126.40	117.50	105.00
88.50	134.50	129.70	128.30	120.00	105.00
111.50	134.50	128.00	126.70	114.30	105.00
88.50	157.00	131.10	130.30	122.80	105.00
111.50	157.00	129.20	127.00	119.60	105.00
88.50	179.50	128.10	126.40	116.30	105.00
111.50	179.50	128.40	126.90	118.00	105.00
63.50	135.50	130.20	128.20	120.10	105.00
78.50	120.50	131.10	130.00	120.80	105.00
81.00	78.00	128.70	127.30	113.80	105.00
61.00	58.00	129.50	127.50	115.40	105.00
54.00	179.50	129.70	127.60	113.60	105.00
54.00	157.00	131.10	129.80	121.20	105.00
54.00	134.50	129.80	128.20	117.60	105.00
54.00	112.00	130.70	129.30	112.60	105.00
54.00	79.50	129.90	128.00	115.30	105.00
111.50	79.50	130.60	129.70	122.50	105.00
26.25	30.00	131.81	130.21	122.11	105.00
39.40	229.76	130.37	129.07	120.37	105.00
87.40	209.52	128.37	126.47	117.77	105.00
120.00	238.74	127.49	126.59	117.39	105.00
138.62	140.44	127.29	123.94	118.24	105.00
117.76	40.12	129.68	127.18	119.08	105.00
34.16	131.64	130.62	129.12	123.62	105.00
72.44	133.40	129.29	127.79	116.59	105.00
101.48	136.04	128.25	126.35	115.75	105.00
61.00	123.51	129.70	127.80	120.40	105.00
71.00	68.00	129.70	127.70	119.80	105.00

Mittelwert	129.51	127.85	118.14	105.00
Stabw	1,1876	1,4422	3,053	0.00
Schiefe	-0.1179	-0.1878	-0.0692	-
Excess	1.7941	2.6683	1.6686	-

Bedingt durch die Schiefe ungleich null und den Excess ungleich drei, sind die Kenngrößen im Datenfeld nicht symmetrisch normalverteilt.

## 13.5.7. ArternM_Schicht

Dieser zweidimensionale Datensatz spiegelt das Schichtenverzeichnis des Referenzstandortes für die Kern- und Detailerkundung wieder. Es sind die Schichtmächtigkeiten in m angegeben. Der Datensatz beinhaltet 29 Daten.

X- Koord	Y- Koord	Schicht 1 (KW 2)	Schicht 2 (KW 3)	Schicht 3 (KW 4)	Schicht 4 (KW 5)
88.50	112.00	1,6	8,1	17,11	105.0
111.50	112.00	1,3	8,7	15,37	105.0
88.50	134.50	1,9	8,7	12,77	105.0
111.50	134.50	0,9	9,2	12,39	105.0
88.50	157.00	3,35	5,7	13,24	105.0
111.50	157.00	2,5	8,1	14,08	105.0
88.50	179.50	1,5	5,5	18,62	105.0
111.50	179.50	1,5	11,2	11,59	105.0
63.50	135.50	1,9	10,6	10,75	105.0
78.50	120.50	1,9	14,3	8,5	105.0
81.00	78.00	1,4	8,9	12,5	105.0
61.00	58.00	1,4	8,3	15	105.0
54.00	179.50	1,3	12,4	9,3	105.0
54.00	157.00	0,8	7,5	17,8	105.0
54.00	134.50	2,2	7,4	14,6	105.0
54.00	112.00	1,7	10,1	11,3	105.0
54.00	79.50	1,5	8,9	13	105.0
111.50	79.50	2	8,1	15,1	105.0
26.25	30.00	1,1	9,2	15,8	105.0
39.40	229.76	1,4	13,5	8,8	105.0
87.40	209.52	2	12,1	10,4	105.0
120.00	238.74	2,1	14	8,6	105.0
138.62	140.44	1,3	8,6	16,2	105.0
117.76	40.12	1,6	10,6	12,6	105.0
34.16	131.64	1,4	16,7	7,6	105.0
72.44	133.40	1,9	12,7	10,3	105.0
101.48	136.04	0,9	7,2	17,5	105.0
61.00	123.51	1,9	7,4	15,4	105.0
71.00	68.00	2	7,9	14,8	105.0

Mittelwert	1,66	9,71	13,14	105.00
Stabw	0,522	2,688	3,053	0.00
Schiefe	0,819	0,655	-0,069	-
Excess	4,141	2,483	1,669	-

Bedingt durch die Schiefe ungleich null und den Excess ungleich drei, sind die Kenngrößen im Datenfeld nicht symmetrisch normalverteilt.

## 13.5.8. ArternOK_Schicht_Kern

Dieser zweidimensionale Datensatz spiegelt das Schichtenverzeichnis des Referenzstandortes für die Kernerkundung wieder. In diesem sind ausschließlich die Oberkanten der verschiedenen Schichtungen im m ü NN angeführt. Der Datensatz beinhaltet 9 Daten.

X- Koord	Y- Koord	Schicht 1 (KW 2)	Schicht 2 (KW 3)	Schicht 3 (KW 4)	Schicht 4 (KW 5)
88.50	112.00	131,81	130,21	122,11	105.0
111.50	112.00	130,37	129,07	120,37	105.0
88.50	134.50	128,37	126,47	117,77	105.0
111.50	134.50	127,49	126,59	117,39	105.0
88.50	157.00	127,29	123,94	118,24	105.0
111.50	157.00	129,68	127,18	119,08	105.0
88.50	179.50	130,62	129,12	123,62	105.0
111.50	179.50	129,29	127,79	116,59	105.0
63.50	135.50	128,25	126,35	115,75	105.0

Mittelwert	129,24	127,41	118,99	105.00
Stabw	1,524	1,885	2,597	0.00
Schiefe	0,057	-0,059	0,135	-
Excess	0,417	0,540	0,473	-

## 13.5.9. ArternM_Schicht_Kern

Dieser zweidimensionale Datensatz spiegelt das Schichtenverzeichnis des Referenzstandortes für die Kernerkundung wieder. Es sind die Schichtmächtigkeiten in m angegeben. Der Datensatz beinhaltet 9 Daten.

X- Koord	Y- Koord	Schicht 1 (KW 2)	Schicht 2 (KW 3)	Schicht 3 (KW 4)	Schicht 4 (KW 5)
88.50	112.00	2,1	10,2	32,11	105.0
111.50	112.00	1,7	10,4	30,37	105.0
88.50	134.50	2,3	11	27,77	105.0
111.50	134.50	1,3	10,5	27,39	105.0
88.50	157.00	3,9	9,6	28,24	105.0
111.50	157.00	3	11,1	29,08	105.0
88.50	179.50	3	8,5	33,62	105.0
111.50	179.50	2,5	13,7	26,59	105.0
63.50	135.50	2,9	13,5	25,75	105.0

Mittelwert	2,52	10,94	28,99	105.00
Stabw	0,782	1,695	2,597	0.00
Schiefe	0,027	0,124	0,134	-
Excess	0,522	0,513	0,473	-

## 13.5.10. Artern3D

Dieser dreidimensionale Datensatz beinhaltet die Resultate der Drucksondierungen abgelesen in 25 cm Intervallen.

X- Koord	Y- Koord	Z- Koord	KenngroÙe
88,50	112,00	129,70	0,90
88,50	112,00	129,45	1,80
88,50	112,00	129,20	1,00
88,50	112,00	128,95	0,90
88,50	112,00	128,70	1,25
88,50	112,00	128,45	2,00
88,50	112,00	128,20	3,00
88,50	112,00	127,95	3,80
88,50	112,00	127,80	4,30
88,50	112,00	127,70	3,80
88,50	112,00	127,45	5,00
88,50	112,00	127,20	2,30
88,50	112,00	126,95	2,00
88,50	112,00	126,70	1,50
88,50	112,00	126,45	2,00
88,50	112,00	126,20	0,50
~~~~~			
111,50	79,50	115,50	6,40
111,50	79,50	115,25	7,20
111,50	79,50	115,00	7,50
111,50	79,50	114,75	4,00
111,50	79,50	114,50	6,60
111,50	79,50	114,25	6,60
111,50	79,50	114,00	6,60
111,50	79,50	113,75	6,50
111,50	79,50	113,50	7,30
111,50	79,50	113,25	7,50
111,50	79,50	113,00	7,00
111,50	79,50	112,75	6,30

Datenanzahl : 1827

Mittelwert
 Stabw
 Schiefe
 Excess

3,26
2,43
0,29
2,83