

# Sicherheitsbeurteilung von Tragwerken mit Fuzzy-Modellen

Bernd Möller, Michael Beer, Wolfgang Graf, Andreas Hoffmann

## 1 Fuzzifizierung

Typische unscharfe Eingangsinformationen für Bauwerke sind Belastungen (z.B. Erdbebenbelastungen), Materialeigenschaften (z.B. Dämpfungskoeffizienten) oder geometrische Größen. In Abb. 1 ist die Fuzzifizierung einer Materialgröße dargestellt. An einem historischen Gebäude in Dresden war die Druckfestigkeit von Sandsteinmauerwerk zu bestimmen. Da nur sehr wenige Druckversuche durchgeführt werden konnten, ist keine gesicherte statistische Verteilung angebar. Die Druckfestigkeit wird daher folgerichtig als Fuzzy-Größe modelliert. Unter Berücksichtigung von heuristischem Ingenieurwissen wurden zwei Vorschläge für Zugehörigkeitsfunktionen ausgearbeitet.

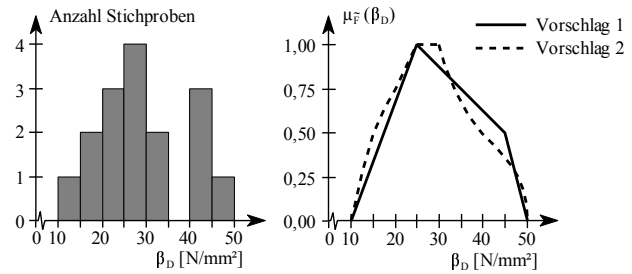


Abb. 1 Druckfestigkeit von Sandsteinproben und Fuzzifizierung

## 2 Fuzzy-Analyse

Als Fuzzy-Analyse wird die Abbildung unscharfer Eingangsinformationen (im weiteren als konvex vorausgesetzt) auf einen unscharfen Ergebnisraum bezeichnet. Grundlage ist das Erweiterungsprinzip in Verbindung mit dem kartesischen Produkt zwischen unscharfen Mengen, s. z.B. /1/, /2/.

Gegeben seien

- $n+1$  Grundmengen  $X_1, \dots, X_i, \dots, X_n, Y$ ,
- $n$  unscharfe Mengen  $\tilde{A}_i$  auf  $X_i$  mit den Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_i(x_i), i=1, \dots, n$
- eine Abbildung  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  mit  $y=f(x_1, \dots, x_n)$  und  $y \in Y$ .

Die Abbildung  $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$  führt zu einer unscharfen Menge  $\tilde{B}$  auf  $Y$  mit

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y=f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\},$$

wobei sich die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{B}}(y)$  ergibt

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x_1, \dots, x_n)} \min [\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)], & \text{falls } \exists y=f(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die unscharfen Eingangsgrößen müssen mittels des kartesischen Produktes verknüpfbar sein. Im Erweiterungsprinzip sind zwei Operatoren enthalten, der Abbildungsoperator  $f$  zur Erzeugung der Ergebnisgröße  $y$  und der Min-Max-Operator zur Erstellung der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{B}}(y)$ .

Statt des Erweiterungsprinzips ist bei Anwendungen im Bauingenieurwesen der Einsatz der  $\alpha$ -Diskretisierung vorteilhaft. Die Fragestellung zur Findung des Lösungspunktes in der  $y$ - $\mu_{\tilde{B}}(y)$ -Ebene wird damit invertiert. Bei gegebenem festen  $\alpha = \mu_{\tilde{B}}(y)$  ist der kleinste und größte Wert von  $y$  gesucht. Ergebnis der Analyse mit Hilfe der  $\alpha$ -Diskretisierung ist stets eine konvexe unscharfe Menge. Wird vorausgesetzt, daß die Abbildungsvorschrift  $f$  stetig ist, dann liefern Erweiterungsprinzip und  $\alpha$ -Diskretisierung identische Zugehörigkeitsfunktionen. Ist der Operator  $f$  nicht stetig, kann der Einsatz des Erweiterungsprinzips eine nicht konvexe (evtl. sogar nicht zusammenhängende) unscharfe Ergebnismenge erzeugen. Bei Anwendung der  $\alpha$ -Diskretisierung ergeben sich die Zugehörigkeitswerte für  $\min y_{\alpha} \leq y \leq \max y_{\alpha}$  zu  $\mu_{\tilde{B}}(y) \geq \alpha$ , es entsteht eine Hüllkurve. Durch eine aufwendige Analyse der Abbildungsfunktion in Verbindung mit der Auswertung aller lokaler Minima und Maxima von  $y$  innerhalb des Lösungsintervalls lassen sich diese Mängel beheben. Am Beispiel eines Einfeldträgers mit der Länge  $l$  unter einer Einzellast und einem Einzelmoment an der unscharfen Stelle  $\tilde{x}_p$  der Stabachse (s. Abb. 2) wird der beschriebene Effekt verdeutlicht. Betrachtet wird die Abbildung der

Laststellung  $\tilde{x}_p$  auf das Biegemoment  $\tilde{M}_{xk}$  an der Stelle  $x_k, y = M_{xk}(x_p) = f(x_p)$ . Die Funktionsgleichung zur Ermittlung von  $M_{xk}(x_p)$  ergibt sich aus Abb. 2 mit den dort eingezeichneten Parametern

$$M_{xk}(x_p) = \begin{cases} 1 + 5 \cdot x_p & [\text{kNm}] \mid x_p \leq x_k \\ 24 - 5 \cdot x_p & [\text{kNm}] \mid x_p > x_k. \end{cases}$$

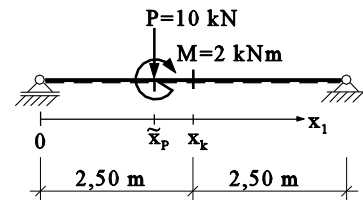


Abb. 2 Einfeldträger mit Belastung an der unscharfen Stelle  $\tilde{x}_p$

In Abb. 3 sind das Vorgehen nach dem Erweiterungsprinzip und nach der  $\alpha$ -Diskretisierung gegenübergestellt. Die  $\alpha$ -Diskretisierung kann eingesetzt werden, wenn Fehler infolge Nichtbeachtung lokaler Optima für die Auswertung unscharfer Ergebnisse nicht von Bedeutung sind (a priori Abschätzung), oder wenn stetige Abbildungsoperatoren vorliegen. Bei der  $\alpha$ -Diskretisierung werden die über das kartesische Produkt zu verknüpfenden Fuzzy-Eingangsgrößen in  $\alpha$ -Niveau-Mengen zerlegt, aus denen ein unscharfer Eingangsbereich gebildet wird. Dieser Eingangsbereich stellt im Raum der Eingangsparameter einen n-dimensionalen (n Anzahl der Fuzzy-Eingangsgrößen) Hyperquader dar. Der n-dimensionale unscharfe Eingangsbereich wird auf einen m-dimensionalen unscharfen Ergebnisbereich abgebildet, m ist dabei die Anzahl der Fuzzy-Ergebnisgrößen. Hängt der Abbildungsoperator zusätzlich von scharfen Parametern (z.B. Lastfaktor  $\nu$ , Zeitparameter  $t$ ) ab, entwickelt sich der unscharfe Ergebnisbereich mit Veränderung dieser Werte. Sonderfälle ergeben sich durch die Eigenschaften des Abbildungsoperators und der Abhängigkeit der unscharfen Ergebnisbereiche von den scharfen Parametern. Derartige Eigenschaften sind

- Stetigkeit,
- Eineindeutigkeit,
- Relation zwischen n und m,
- Monotonie,
- Linearität.

Diese können bei der Absuche des unscharfen Eingangsbereiches nach den Lösungspunkten und bei der Verfolgung der Entwicklung des unscharfen Ergebnisbereiches mit der Veränderung scharfer Parameter teilweise zur Vereinfachung genutzt werden. Bei Monotonie in alle Richtungen fallen z.B. die gesuchten Lösungspunkte mit den Ecken des unscharfen Eingangsbereiches zusammen. Die genannten Eigenschaften sind partiell auswertbar.

Sind keine Vereinfachungen möglich, muß der gesamte unscharfe Eingangsbereich nach Lösungspunkten abgesucht werden. Für einen Einfeldträger unter Streckenlast, s. Abb. 4, wird die Abbildung der unscharfen Laststellung  $\tilde{x}_p$  auf das Biegemoment  $\tilde{M}_{x_k}$  an der Stelle  $x_k$  betrachtet. Bei Einschränkung  $1m \leq x_p \leq 3m$  lautet der stetige Abbildungsoperator  $f$

$$y(x_p) = M_{x_k}(x_p) = -3 \cdot x_p^2 + 12 \cdot x_p + 3 \text{ [kNm]}.$$

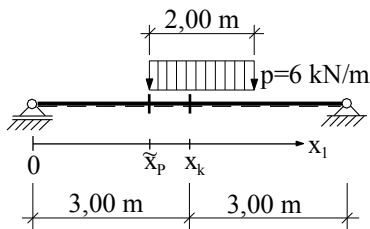


Abb. 4 Einfeldträger mit Belastung an der unscharfen Stelle  $\tilde{x}_p$

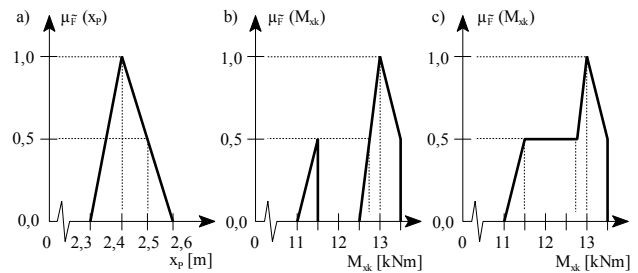


Abb. 3 a) unscharfe Laststellung  $\tilde{x}_p$ ,  
 b) unscharfes Biegemoment bei  $x_1 = x_k$  nach Erweiterungsprinzip,  
 c) unscharfes Biegemoment bei  $x_1 = x_k$  nach  $\alpha$ -Diskretisierung ohne Berücksichtigung lokaler Optima

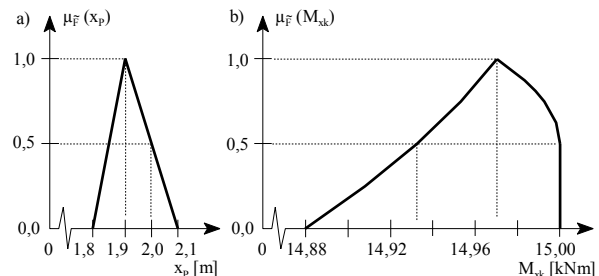


Abb. 5 a) unscharfe Laststellung  $\tilde{x}_p$ ,  
 b) unscharfes Biegemoment bei  $x_1 = x_k$  nach  $\alpha$ -Diskretisierung

Diese Funktion besitzt an der Stelle  $x_p = 2,00$  m ihr globales Maximum. Wird die Fuzzy-Eingangsgröße  $\tilde{x}_p$  so vorgegeben, daß der Wert  $x_p = 2,00$  m mindestens Element einer  $\alpha$ -Niveau-Menge ist, liegt der Lösungspunkt bei Maximumsuche im Inneren des unscharfen Eingangsbereiches. Die Fuzzy-Eingangsgröße  $\tilde{x}_p$  und die Fuzzy-Ergebnisgröße  $\tilde{M}_{x_k}$  sind in Abb. 5 eingetragen. Der vertikal verlaufende Abschnitt der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_F(M_{x_k})$  entsteht durch die beschriebene Lage des Lösungspunktes innerhalb mehrerer  $\alpha$ -Niveau-Mengen, für die sich gleiche Maximum-Lösungen ergeben.

Die Absuche des unscharfen Eingangsbereiches stellt eine Optimierungsaufgabe dar. Der Abbildungsoperator  $f$  ist als Zielfunktion zu betrachten. Das (streng betrachtet) auftretende Vektoroptimierungsproblem (mehrere Ergebnisgrößen = mehrere Zielfunktionen) zerfällt sofort wieder, wenn die einzelnen Zielfunktionen nacheinander betrachtet und die übrigen mit 0 gewichtet werden. Eine Kompromißlösung im eigentlichen Sinne ist hier nicht von Bedeutung. Für die Lösung des Optimierungsproblems stehen verschiedene Algorithmen zur Auswahl. Erlauben die Eigenschaften des Abbildungsoperators die a priori Abschätzung, daß die gesuchten Lösungspunkte nur in den Ecken des unscharfen Eingangsbereiches liegen, ist die Anwendung einer Permutationsabsuche möglich, s. z.B. /3/. Dabei wird der Vektor der Eingangsgrößen nacheinander mit allen möglichen Intervallrand-Kombinationen besetzt und ausgewertet. Liegt der Lösungspunkt auf der Oberfläche, ist eine Randabsuche sinnvoll. Die Absuche des gesamten Eingangsbereiches läßt sich z.B. mittels systematischer Vernetzung, Monte-Carlo-Methode, Gradientenmethode oder Evolutionsstrategie durchführen. Die Anwendung der Gradientenmethode erfordert Kennt-



Zahlen (lineare Zugehörigkeitsfunktion) sind, die Fuzzy-Ergebnisgröße (Abb. 7) jedoch eine deutlich nichtlineare Zugehörigkeitsfunktion besitzt. Die Berechnung wurde für elf  $\alpha$ -cuts durchgeführt. Zur Absuche des unscharfen Eingangsbereiches wurde die Evolutionsstrategie angewendet. Aufgrund der Monotonie von  $f$  führt auch eine Permutationsabsuche zum richtigen Ergebnis.

### Beispiel 2

Wir ermitteln nun die Traglast nach der Elastizitätstheorie II. Ordnung. Eine Anfangsschiefstellung des Systems ist durch die Eintragung einer geringen Horizontalbelastung  $P_H=1,00$  kN vorgegeben. Die Belastung  $P_V$  wird stufenweise um je 20 kN erhöht, es erfolgt für jede Laststufe eine iterative Ermittlung der Sekantensteifigkeit sowie des Schnittkraft- und Verschiebungszustandes. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{v}$  der Systemknoten wird durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems ermittelt. Das zu lösende Fuzzy-Gleichungssystem lautet

$$\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{S}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

Der Fuzzy-Ergebnisbereich wird dreidimensional gewählt. Betrachtet werden die Horizontalverschiebung  $\tilde{v}_1(2)$  der rechten Rahmenecke, die maximale Spannung  $\tilde{\sigma}_{St}$  am rechten Stützenkopf und die maximale Sohlspannung  $\tilde{\sigma}_{Sohl}$  unter dem rechten Stützenfundament. Zur Berechnung der maximalen Sohlspannung wird näherungsweise eine konstante Spannungsverteilung unter einer Ersatzfläche angenommen. Die Ersatzrechteckfläche ergibt sich aus der Bedingung, daß die resultierende Kraft in der Sohlfuge mittig auf dieser Fläche steht. Der Abbildungsoperator  $f$  ergibt sich zu

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_1(2) \\ \sigma_{St} \\ \sigma_{Sohl} \end{bmatrix} = f(k_{\varphi 1}, k_{\varphi 2}, k_{\varphi 3}, k_{\varphi 4}).$$

Monotonie kann nur in Richtung der Ergebnisgröße  $v_1(2)$  vorausgesetzt werden, die Abbildung ist nichtlinear. In Abb. 8 ist die Last-Sohlspannungs-Abhängigkeit für  $\alpha=0$  und  $\alpha=1$  dargestellt, Abb. 9 zeigt die Last-Verschiebungs-Abhängigkeiten für die gleichen  $\alpha$ -cuts. Die Zugehörigkeitsfunktion der Verschiebung  $v_1(2)$  ist für die Laststufe  $P_V=1880$  kN in Abb. 10 eingetragen. Die nichtlinearen Zusammenhänge zwischen dem scharfen Lastparameter  $P_V$  bzw. den unscharfen Eingangsgrößen  $\tilde{k}_{\varphi}$  und den Ergebnisgrößen sind in den Abbildungen erkennbar. Mit linear abnehmenden Steifigkeiten  $k_{\varphi}$  wächst die Horizontalverschiebung  $v_1(2)$  zunehmend an. Bei linearer Steigerung des scharfen Lastparameters  $P_V$  ist ein überlineares Ansteigen der Sohlspannung  $\sigma_{Sohl}$  und der Verschiebung  $v_1(2)$  zu beobachten. Die Berechnung erfolgte mittels Evolutionsstrategie, es wurde mit elf  $\alpha$ -cuts gearbeitet. Die Anwendung einer Rand- oder Permutationsabsuche ist nur eingeschränkt möglich. Es ist vorab eine sorgfältige Diskussion des Abbildungsoperators notwendig, um fehlerhafte Ergebnisse zu vermeiden. Der zu erwartende Rechenaufwand ist geringer als beim Einsatz allgemeinerer Suchalgorithmen.

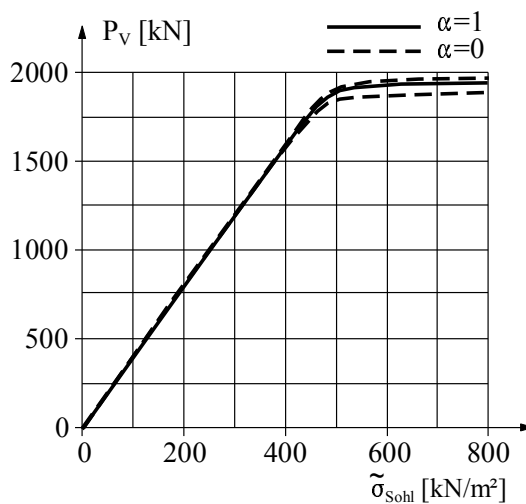


Abb. 8 Last-Sohlspannungs-Abhängigkeit

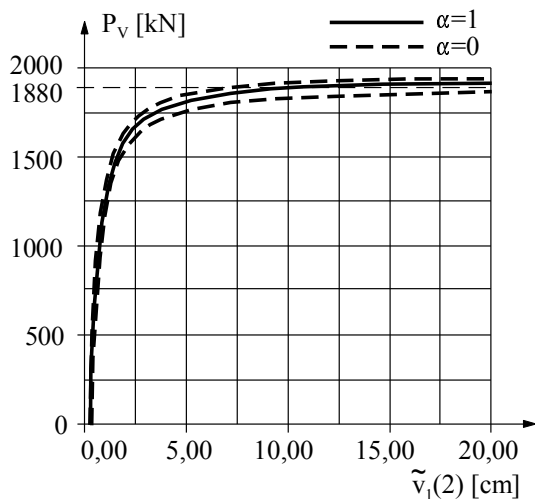


Abb. 9 Last-Verschiebungs-Abhängigkeit

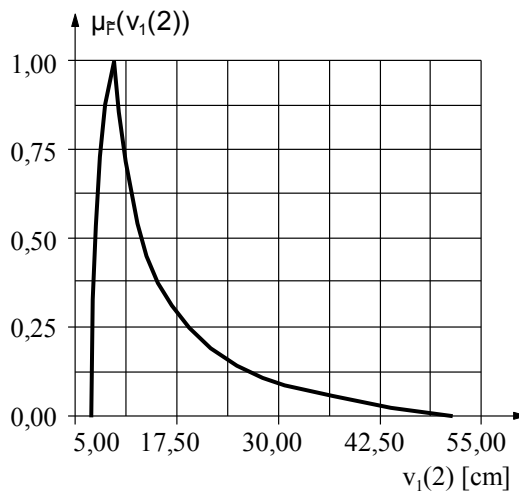


Abb. 10 Zugehörigkeitsfunktion für die Verschiebung  $v_1(2)$  bei der Laststufe  $P_V=1880$  kN

### 3 Defuzzifizierung, Sicherheitsbeurteilung

Die unscharfen Ergebnisse können defuzzifiziert oder direkt zur weiteren Auswertung (z.B. Sicherheitsbeurteilung, s. z.B. /5/) benutzt werden. Die Defuzzifizierung stellt eine eingeschränkte subjektive Einschätzung dar; eine unscharfe Information wird mittels geeigneter Vorgehensweisen auf eine scharfe Größe abgebildet. Die Wahl des Defuzzifizierungsverfahrens ist abhängig von der gesuchten Aussage. Es stehen zahlreiche Möglichkeiten für eine Defuzzifizierung zur Verfügung. Beispielsweise kann das Niveau-Ebenen-Verfahren nach Rommelfanger /6/ angewendet werden.

Für die Sicherheitsbeurteilung ist es notwendig, Versagensbedingungen zu formulieren, die scharfe oder unscharfe Mengen bilden können. Versagensfunktionen  $\pi(x)$  sind Möglichkeitsfunktionen. Sie sind ihrer Definition nach Zugehörigkeitsfunktionen ( $\pi(x)=\mu(x)$ ), die die Möglichkeit des Versagens bewerten. Im folgenden Beispiel wird als Versagenkriterium u.a. das Erreichen der Fließgrenze  $f_y$  in einem Stahlbauteil verwendet. Zum Erstellen der Versagensfunktion  $\pi(\sigma)$  wird die Fuzzy-Größe  $\tilde{f}_y$  benutzt (s. Abb. 11 oben,  $f_y$  ist die Fließspannung von Stahl). Die Versagensfunktion wird nach

$$\pi(\sigma) = \bigvee_{f_y \leq \sigma} \mu_{\tilde{F}}(f_y) = \sup_{f_y \leq \sigma} \mu_{\tilde{F}}(f_y)$$

ermittelt (s. Abb. 11 unten). Die Versagensmöglichkeit  $\Pi(\tilde{F})$  infolge eines Fuzzy-Ereignisses  $\tilde{F}$  ergibt sich aus der Auswertung der Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{\tilde{F}}(x)$  in Verbindung mit der unscharfen Versagensbedingung  $\pi(x)$

$$\Pi(\tilde{F}) = \sup_{x \in X} \min(\mu_{\tilde{F}}(x), \pi(x)).$$

Bei baustatischen Tragwerksuntersuchungen sind i.d.R. mehrere Versagenkriterien zu überprüfen, es existieren mehrere Werte für die Versagensmöglichkeit  $\Pi(\tilde{F})$  zum gleichen Untersuchungszeitpunkt. Die Versagensmöglichkeit  $V$  eines Tragwerkes ist dann

$$V = \sup_{\tilde{F}} \Pi(\tilde{F}).$$

Es soll nun die Versagensmöglichkeit für den Rahmen nach Abb. 6 bestimmt werden. Das Versagen sei von den Fuzzy-Größen  $\tilde{v}_1(2)$ ,  $\tilde{\sigma}_{St}$  und  $\tilde{\sigma}_{Sohl}$  abhängig. In Abb. 11 und Abb. 12 sind die drei zugehörigen Versagensfunktionen dargestellt.

Für  $P_V=1880$  kN ergeben sich die Versagensmöglichkeiten

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{F}(\sigma_{St})) &= \sup \min(\mu_{\tilde{F}}(\sigma_{St}), \pi(\sigma_{St})) = 0,096 \\ \Pi(\tilde{F}(\sigma_{Sohl})) &= \sup \min(\mu_{\tilde{F}}(\sigma_{Sohl}), \pi(\sigma_{Sohl})) = 0,491 \\ \Pi(\tilde{F}(v_1(2))) &= \sup \min(\mu_{\tilde{F}}(v_1(2)), \pi(v_1(2))) = \mathbf{0,569}. \end{aligned}$$

In Abb. 13 sind die entsprechenden Funktionen eingetragen, die ermittelten Werte sind gekennzeichnet.

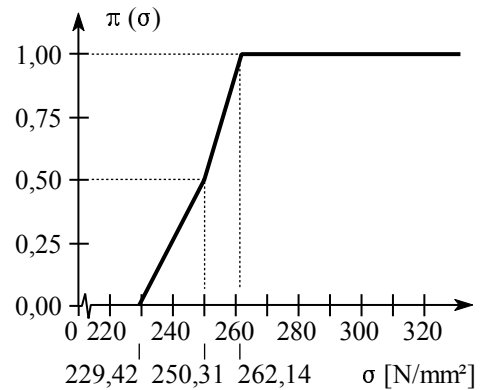
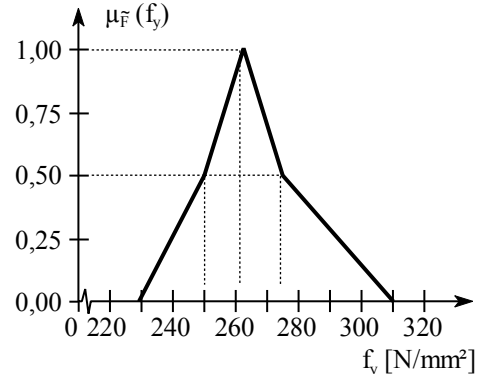


Abb. 11 Bildung unscharfer Versagensfunktionen, Fließspannung  $f_y$  von Stahl

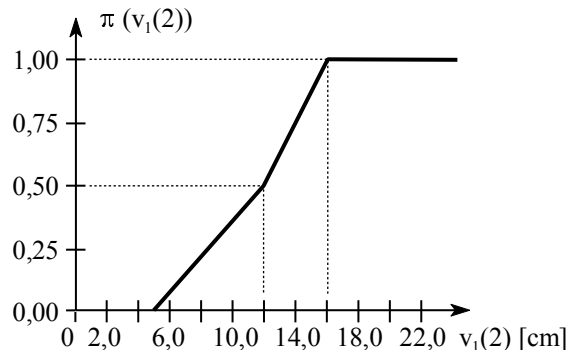
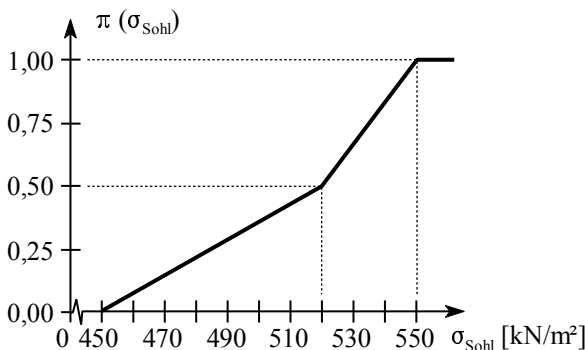


Abb. 12 Versagensfunktionen für die maximale Sohlspannung  $\sigma_{Sohl}$  und die Horizontalverschiebung  $v_1(2)$

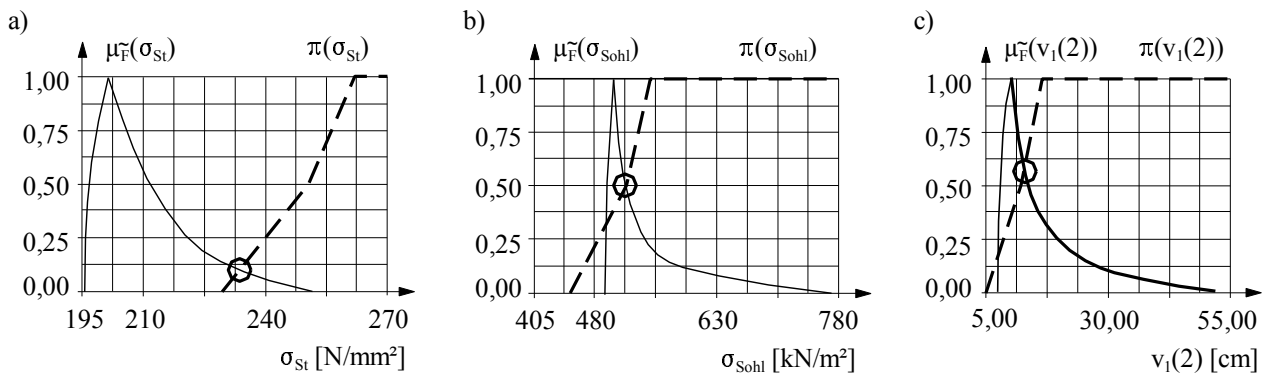


Abb. 13 Versagensmöglichkeiten bei  $P_V = 1880$  kN für das Versagenskriterium  
 a) maximale Spannung  $\tilde{\sigma}_{St}$  am rechten Stützenkopf,  
 b) maximale Sohlspannung  $\tilde{\sigma}_{Sohl}$  in der Sohlfuge rechts,  
 c) Horizontalverschiebung  $\tilde{v}_1(2)$  der rechten Rahmenecke

Die Auswertung aller Laststufen liefert die Versagensmöglichkeitskurve für das Tragwerk (Abb. 14). Es ist ein progressiver Anstieg der Versagensmöglichkeit mit wachsender Last  $P_V$  zu erkennen. Dieser zunehmende Anstieg wird durch den nichtlinearen Verlauf der rechten Teile der Zugehörigkeitsfunktionen der Fuzzy-Ergebnisgrößen  $\mu_{\tilde{F}}(\sigma_{St})$ ,  $\mu_{\tilde{F}}(\sigma_{Sohl})$  und  $\mu_{\tilde{F}}(v_1(2))$  verursacht (s. Abb. 13). Der Knick in den Versagensfunktionen bei  $\pi(x)=0,5$  spiegelt sich in der Versagensmöglichkeitskurve wider. Ein Wechsel der aktiven Versagensbedingung ruft ebenfalls einen Knick hervor. In Abb. 14 sind die Knicke (Markierungen) aufgrund der geringfügigen Anstiegsänderung der Kurve nur sehr schwach zu erkennen.

Werden die Fuzzy-Eingangsgrößen für die Tragwerksanalyse bei  $\alpha=1$  als deterministische Werte betrachtet und als scharfe Versagensbedingungen die Größen

$$\begin{aligned} f_y &= 240 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{Sohl} &= 500 \text{ kN/m}^2 \\ v_1(2) &= 10,0 \text{ cm} \end{aligned}$$

verwendet, ergibt sich als deterministische Versagenslast

$$P_V = 1880 \text{ kN.}$$

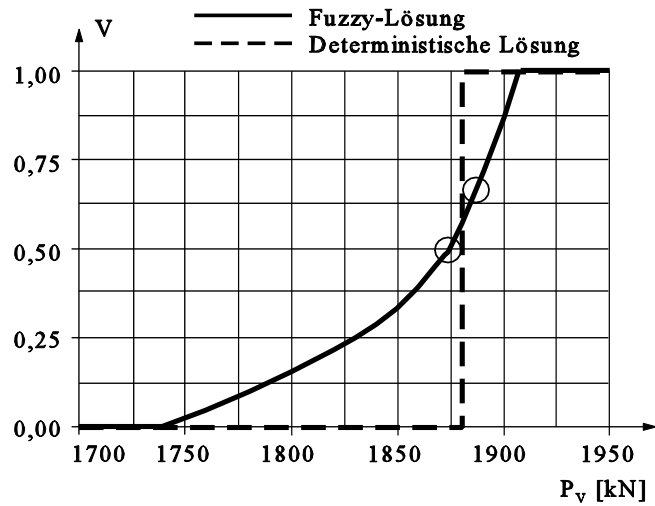


Abb. 14 Versagensmöglichkeitskurve

## 4 Schlußbemerkung

Die Fuzzy-Modellierung stellt eine Ergänzung zu den bisher angewendeten deterministischen und stochastischen Modellen dar. Die Berücksichtigung unscharfer Eingangsgrößen, die aufgrund unzureichender Informationen nicht in Form von stochastischen Verteilungen angegeben werden können, ist möglich. Expertenwissen fließt durch die subjektive Bewertung der Eingangsgrößen bei der Fuzzifizierung in die Berechnungen ein. Durch Anwendung der Möglichkeitstheorie auf die berechneten Fuzzy-Ergebnisgrößen kann eine neue Sicherheitsbeurteilung von Tragwerken erfolgen. Das Verhalten von Tragkonstruktionen kann so fallweise realistischer beurteilt werden.

## Literatur

- /1/ Zadeh, L.A.; Fuzzy Sets. Information and Control 8, 338-353 (1965)
- /2/ Bothe, H.H.; Fuzzy Logic. Berlin, Heidelberg: Springer (1993)
- /3/ Wood, K.L., Otto, K.N., Antonsson, E.K.; Engineering design calculations with fuzzy parameters. Fuzzy Sets and Systems 52, 1-20 (1992)
- /4/ Bontempi, G.; Modeling with uncertainty in continuous dynamical systems: the probability and possibility approach. IEEE IRIDIA, Université libre de Bruxelles (1995)
- /5/ Möller, B.; Fuzzy-Modellierung in der Baustatik. Bauingenieur 72, H.2 (1997)
- /6/ Rommelfanger, H.; Fuzzy Decision Support-Systeme. Berlin, Heidelberg: Springer (1988)