

Beitrag zur Anwendung der nichtlinearen Optimierung bei der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Tragwerksanalyse

E. Raue, S. Marx, R. Weitzmann¹⁾

1 Einleitung

Bei der Tragwerksplanung sowohl für Massivkonstruktionen als auch für Stahlkonstruktionen werden zukünftig nichtlineare Berechnungsverfahren in größerem Umfang Anwendung finden, als das in der Vergangenheit üblich bzw. möglich war. Wichtige Impulse gehen dabei von der europäischen Normung aus.

Bei der Anwendung von Berechnungsverfahren, die die Nichtlinearität des Materialverhaltens berücksichtigen und bei der Ermittlung der Tragsicherheit planmäßig ausnutzen, ist es notwendig, die Entwicklung plastischer Deformationen zu verfolgen und bei der Beurteilung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit als Kriterium mit heranzuziehen.

Die Abschätzung bleibender und plastischer Deformationen im Grenzzustand der Tragfähigkeit stellt eine Berechnungsaufgabe dar, die über das traditionelle Nachweisspektrum hinausgeht und im allgemeinen mit erheblichem Aufwand verbunden ist. In Sonderfällen kann der explizite Nachweis der Verformungen, insbesondere der plastischen Rotationen in den plastischen Gelenken entfallen, wenn durch konstruktive Maßnahmen eine ausreichende Duktilität sichergestellt wird. Derartige Vereinfachungen beschränken sich jedoch im wesentlichen auf Tragwerke, die ausschließlich auf Biegung beansprucht sind, bzw. bei denen der Einfluß aus Längskräften von untergeordneter Bedeutung und damit vernachlässigbar ist.

Bei Rahmentragwerken ist der Nachweis der Einhaltung kritischer Deformationen unverzichtbar. Im Regelfall ist dabei der Einfluß der Verformungen auf die Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigen.

Im vorliegenden Beitrag werden mathematische Modelle für folgende Berechnungsaufgaben vorgestellt:

- Ermittlung der Schnittgrößen und Formänderungen in ebenen Stabtragwerken nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität und
- Ermittlung von Grenzlasten, die durch Spannungs- und Verformungskriterien definiert sind.

Dabei zeigt sich, daß mathematische Modelle auf der Grundlage von Extremalprinzipien und unter Einbeziehung der mathematischen Optimierung effektiv und hinreichend universell formuliert werden können. Wie Beispielrechnungen zeigen, ist die Beurteilung der Tragfähigkeit unter Berücksichtigung von Deformationsbegrenzungen von entscheidender Bedeutung, um Fehleinschätzungen der Tragsicherheit zu vermeiden.

2 Berechnungsmodelle

¹⁾ o. Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue, Dipl.-Ing. Steffen Marx, Dipl.-Ing. Rüdiger Weitzmann
Bauhaus-Universität Weimar - Fakultät Bauingenieurwesen
Professur Massivbau I
99423 Weimar, Marienstraße 13

2.1 Ermittlung des Schnittgrößen- und Formänderungszustandes

Zur Bestimmung der Schnittgrößen und Verformungen von Tragwerken mit nichtlinearem Material- und Formänderungsverhalten wird aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ein Extremalproblem abgeleitet, das nach der Zerlegung des Tragwerkes in finite Elemente als Optimierungsaufgabe gelöst wird. Die einzelnen Elemente des Tragwerkes werden dabei mit linear-elastischem Materialverhalten und nichtlinearer Formänderungsbeziehung angenommen.

Die Formänderungsbeziehung des Stabes ergibt sich unter Berücksichtigung der nichtlinearen Verschiebungsgeometrie zu:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} w'^2 - zw'' \quad (1)$$

An den Stabenden treten plastische Verformungen auf, sobald die elastischen Grenzdehnungen und -krümmungen überschritten bzw. die korrespondierenden Grenzschnittgrößen erreicht werden.

Da bei Bauteilen aus Stahlbeton im allgemeinen eine starke Abhängigkeit der aufnehmbaren Biegemomente von den auftretenden Normalkräften vorhanden ist, muß deren Interaktion in den Plastizitätsbedingungen berücksichtigt werden.

Für die Berechnung von ebenen Stabtragwerken sind im Optimierungsproblem als Variablen die elastischen Stabrandverschiebungen u_{el} ($u_{1,el}, w_{1,el}, \phi_{1,el}, u_{2,el}, w_{2,el}, \phi_{2,el}$), die Knotenverschiebungen u (u, w, ϕ) sowie die Fließparameter λ an jedem Stabende enthalten:

Bei Annahme linearisierter Plastizitätsbedingungen lautet die Zielfunktion:

$$\Pi = \sum_{\text{Stab } i}^n \left(\frac{1}{2} u_{el}^T K u_{el} + \frac{1}{2} u_{el}^T K_N u_{el}^T K_\phi u_{el} + \frac{EA}{8L} u_{el}^T K_\phi u_{el} u_{el}^T K_\phi u_{el} + \sum s_0 \lambda \right) - f_0^T u \Rightarrow \text{Min} \quad (2)$$

K und K_ϕ sind die aus der FEM bekannten linearen und geometrischen Steifigkeitsmatrizen der Stäbe, der Vektor K_N enthält die zu $u_{1,el}$ und $u_{2,el}$ gehörigen Anteile der Steifigkeitsmatrix K . Der Abstand der Fließfläche vom Koordinatenursprung wird mit s_0 bezeichnet, f_0 ist der Vektor der äußeren Kräfte.

Auf dem Rand S_u werden die geometrischen Randbedingungen vorgegeben:

$$u - u_0 = 0 \quad \in S_u \quad (3)$$

Die elastischen Stabendverschiebungen u_{el} sind gleich der Differenz aus Knotenverschiebungen u und plastischen Verformungen:

$$u_{el} = T^T u - \sum A_p \lambda \quad (4)$$

Hierbei ist T^T die Matrix zur Transformation der Knotenverformungen vom globalen System in das Stabkoordinatensystem. A_p beschreibt den Normalenvektor auf der Fließfunktion, welcher die Richtung der plastischen Verformungen bestimmt.

Die Fließparameter sind der Nichtnegativitätsbedingung $\lambda \geq 0$ unterworfen.

Das Extremalprinzip wird als kinematische Formulierung aufgestellt, so daß als primale Lösung nur die o.g. Verformungsgrößen erhalten werden. Als dualer Variablensatz werden die zu den Restriktionen gehörigen Lagrangemultiplikatoren geliefert, die als Schnittgrößen und

Auflagerkräfte des Systems identifiziert werden können. Zur Bestimmung der Lagrangeparameter wird die zum Optimierungsproblem gehörige Lagrangefunktion gebildet:

$$L = \sum_{\text{Stab } i}^n \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K} \mathbf{u}_{\text{el}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_N \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} + \frac{EA}{8L} \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} + \sum s_0 \lambda \right) - \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \lambda_{s,r} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \lambda_s (\mathbf{T}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{el}} - \sum \mathbf{F}^T \lambda) - \lambda_R \lambda \quad (5)$$

Die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach den primalen Variablen ergeben die gesuchten Identitäten:

$$L'(\mathbf{u}_{\text{el}}) = \mathbf{K} \mathbf{u}_{\text{el}} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_N \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} + \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_N \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} + \frac{EA}{2L} \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} \mathbf{u}_{\text{el}}^T \mathbf{K}_\phi \mathbf{u}_{\text{el}} - \lambda_s = 0 \quad (6)$$

$$\lambda_s = s \rightarrow \text{Stabrandschnittkräfte}$$

$$L'(\lambda) = s_0 - \mathbf{A}_p^T \lambda_s - \lambda_R = 0 \quad ; \quad \lambda_R \geq 0 \quad (7)$$

$$s_0 - \mathbf{A}_p^T \lambda_s = s_0 - \mathbf{A}_p^T s \geq 0 \rightarrow \text{Plastizitätsbedingungen}$$

$$L'(\mathbf{u}) = -\mathbf{f}_0 + \lambda_{s,r} + \mathbf{T} \lambda_s = 0 \quad (8)$$

$$\lambda_{s,r} + \mathbf{T} \lambda_s = \mathbf{s}_r + \mathbf{T} s = \mathbf{f}_0 \rightarrow \text{Gleichgewichts- und stat. Randbed. am Knoten}$$

2.2 Ermittlung von Grenzlasten

Mit Hilfe des im Abschnitt 2.1 vorgestellten Berechnungsmodells werden Schnittgrößen und Verformungen für vorgegebene Belastungsverteilungen und -intensitäten ermittelt. Ein Verfahren zur direkten Bestimmung von Grenzzuständen kann ebenfalls unter Anwendung der mathematischen Optimierung formuliert werden.

Aus dem Reißner-Funktional lassen sich durch partielle Differentiation Bedingungsgleichungen gewinnen, die nach einer entsprechenden Diskretisierung als Nebenbedingungen in einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe verwendet werden. In diesen Nebenbedingungen sind bereits alle notwendigen Angaben zur Beschreibung des Tragwerks und der äußeren Einflüsse enthalten, so daß über die Zielfunktion ein Extremwert für einen vorzugebenden Systemparameter gesucht werden kann. Unter Verwendung eines linear elastisch - ideal plastischen Materialgesetzes und linearisierter Plastizitätsbedingungen gelingt eine Reduzierung der Unbekanntenzahl des ursprünglichen Lagrangeproblems, indem die Spannungen bzw. Schnittgrößen in Abhängigkeit von den Knotenverformungen \mathbf{u} und den Fließparametern λ ausgedrückt werden.

In der nichtlinearen Tragwerksanalyse sind vor allem Grenzzustandsbeschreibungen in Abhängigkeit von der Lastintensität von Interesse.

Für den Fall ebener Stabtragwerke ist zur Bestimmung der Grenzlastintensität p für eine vorgegebene Lastfunktion \mathbf{f}_0 folgende Optimierungsaufgabe zu lösen:

$$\text{Zielfunktion} \quad p \rightarrow \text{Max} \quad (9a)$$

$$\text{Gleichgewichtsbed.} \quad A^T Q^{-1} A u - A^T Q^{-1} A_P \lambda - f_0 \cdot p = 0 \quad (9b)$$

$$\text{Plastizitätsbedingung} \quad - A_P^T Q^{-1} A u + A_P^T Q^{-1} A_P \lambda - s_0 \geq 0 \quad (9c)$$

$$\text{Komplementaritätsbed.} \quad \lambda [- A_P^T Q^{-1} A u + A_P^T Q^{-1} A_P \lambda - s_0] = 0 \quad (9d)$$

$$\text{Nichtnegativitätsbed.} \quad \lambda \geq 0 \quad (9e)$$

$$\text{statische Randbed.} \quad T^T Q^{-1} A u - T^T Q^{-1} A_P \lambda - g_0 \geq 0 \quad (9f)$$

$$\text{kinematische Randbed.} \quad A_K(u, \lambda) \geq 0 \quad (9g)$$

Im einzelnen bedeuten:	p	Lastfaktor für Lastfunktion f_0
	u	Vektor der Knotenverformungen
	λ	Vektor der Fließparameter
	A	verschiedene Transformationen
	A_P	Ableitung der Plastizitätshyperfläche
	s_0	konstantes Glied der Plastizitätsbedingung
	Q	Flexibilitätsmatrix
	T	Transformation lokale in globale Systemgrößen
	g_0	vorgegebene Randschnittgrößen
	$A_K(u, \lambda)$	lin. bzw. nichtlineare kin. Randbedingungsftkt.

Im Unterschied zu den Grenzlastmodellen in der statischen Formulierung [1] besteht bei Verwendung kinematischer Systemvariablen die Möglichkeit, den Lastfaktor auch abhängig von Verformungsbeschränkungen zu ermitteln. Diese können sich aus Forderungen der Gebrauchstauglichkeit bzw. Tragfähigkeit ergeben.

Das in Gl. 9 angegebene Modell nach Theorie I. Ordnung kann analog Abschnitt 2.1 auch für Untersuchungen geometrisch nichtlinearen Verhaltens erweitert werden, indem die Zusatzmomente infolge Normalkraft und Ausmitte in die Gleichgewichtsbedingungen aufgenommen werden. Die Bedingung Gl. 9b wird erweitert zu:

$$A^T Q^{-1} A u + A_\phi(u, \lambda) u - A^T Q^{-1} A_P \lambda - f_0 \cdot p = 0 \quad (10)$$

Alle anderen Bedingungen in Gl. 9 bleiben unverändert.

Als Ergebnisse einer Berechnung liegen neben dem Grenzlastfaktor die Knotenverformungen und Fließparameter für den p -fachen Ausgangsbelastungszustand f_0 vor. Diese können genutzt werden, um Schnittgrößen sowie elastische und plastische Verformungsanteile zu bestimmen.

3 Berechnungsbeispiel

Für den im Bild 1 dargestellten Stockwerkrahmen sollen die Schnittgrößen und Verformungen bei verschiedenen Belastungsintensitäten bestimmt werden.

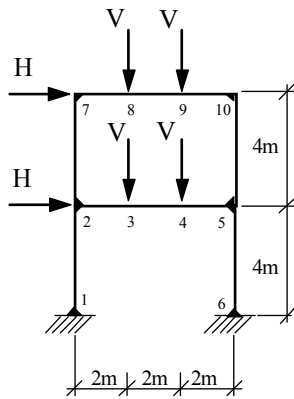
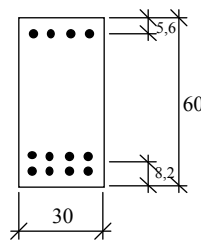
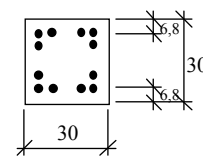


Bild 1 Statisches System und Belastung

Riegel:
 $A_{S1}=24,64 \text{ cm}^2$
 $A_{S2}=49,28 \text{ cm}^2$



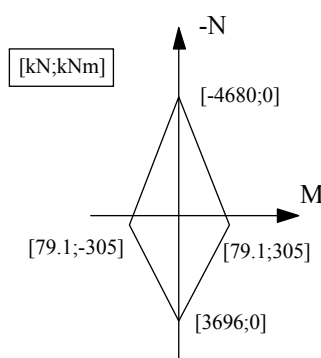
Stützen:
 $A_{S1}=A_{S2}=36,96 \text{ cm}^2$



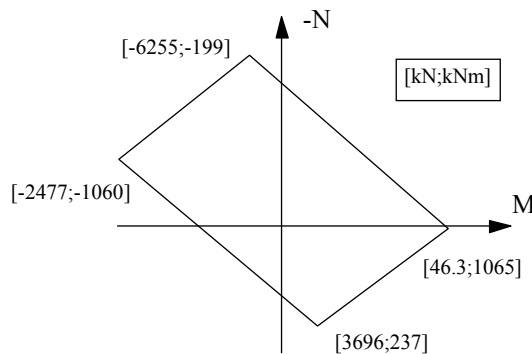
B 25, Bst 500

Bild 2 Querschnitte von Riegeln und Stützen

Die Interaktionsbeziehungen zwischen den Schnittgrößen M und N werden durch vier lineare Gleichungen approximiert .



Stützen



Riegel

Bild 3 Plastizitätsbedingungen

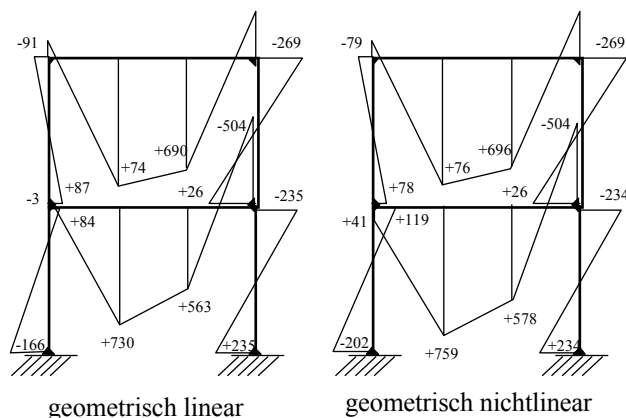


Bild 4 Biegemomentenverteilung

Bild 4 zeigt die Schnittgrößenverteilung bei $H = 90 \text{ kN}$ und $V = 450 \text{ kN}$. Im Bild 5 ist die horizontale Verschiebung des Knotens 7 bei geometrisch linearer bzw. nichtlinearer Berechnung sowie die Reihenfolge der sich ausbildenden Fließgelenke aufgetragen. Die dargestellten Kurven sind das Ergebnis einzelner Berechnungen für verschiedene Belastungsintensitäten bis zur Herausbildung eines kinematischen Mechanismus (Punkt 6). Die Bildung des ersten Fließgelenkes kennzeichnet die elastische Grenzlast (Punkt 1).

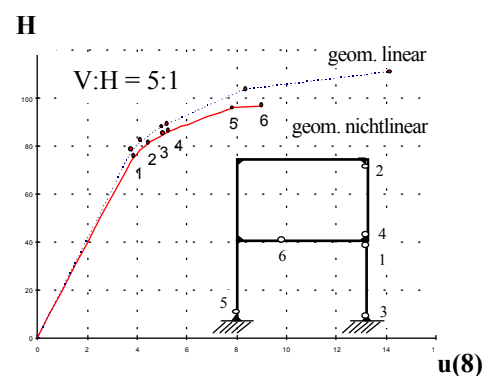


Bild 5 Last- Verformungsdiagramm

Reihenfolge der Plastizierung

Zur Bestimmung von Grenzbelastungsintensitäten kann anstelle dieser iterativen Vorgehensweise auch die unter 2.2 beschriebene direkte Lösung verwendet werden.

In Tabelle 1 sind die Lastfaktoren für verschiedene Grenzlastdefinitionen gegenübergestellt. Lastintensitäten kleiner oder gleich der elastischen Grenzlast p_E erzeugen keine plastischen Deformationen. Die plastische Grenzlast p_P kennzeichnet den Übergang des Tragwerkes in einen kinematischen Mechanismus. Bei Berücksichtigung von Verformungskriterien läßt sich eine Grenzbelastungsintensität p_u nach Abschnitt 2.2 ermitteln, die kleiner oder gleich der plastischen Grenzlast ist. Das Grenzkriterium für dieses Grenzlastmodell wird entweder durch die Bildung einer kinematischen Kette oder durch das Erreichen einer Verformungsbedingung an einer Stelle im Gesamtsystem bestimmt. Für die Ermittlung des Grenzlastfaktors für den Beispielrahmen ist eine Deformationsbegrenzung für alle Querschnitte von 3.5 ‰ am gedrückten Rand zugrundegelegt.

normierte Lastfaktoren	Theorie I. Ordnung	Theorie II. Ordnung
elastische Grenzlast p_E	1.00	0.97
plastische Grenzlast p_P	1.46	1.28
deformationsbeeinflusste Grenzlast p_u	1.06	1.02

Tabelle 1 Grenzlastintensitäten bei Verwendung verschiedener Grenzlastdefinitionen

Das Beispiel zeigt, daß eine erhebliche Überschätzung der Tragfähigkeit möglich ist, wenn Verformungskriterien nicht in die Betrachtung einbezogen werden. Die Berechnung nach der Plastizitätstheorie setzt ausreichend duktilen Materialverhalten voraus, das z.B. bei Tragwerken in Stahlbetonbauweise nicht immer garantiert werden kann.

4 Literatur

- [1] Raue, E.: Lineare und nichtlineare Tragwerksanalyse mit Methoden der mathematischen Optimierung, XII. IKM, Berichte Band 1, Weimar 1990
- [2] Washizu, K.: Variational methods in elasticity and plasticity, 3rd. edition, Oxford: Pergamon Press, 1982
- [3] Cyras A. A.: Analysis and Optimization of elastoplastic Systems, Ellis Horwood Limited, 1983
- [4] Raue, E.: Berechnungsmodelle für Tragwerke mit nichtlinearem Materialverhalten auf Grundlage der mathematischen Optimierung. Berichte zum IKM Weimar 1994