# Zum Momentengleichgewicht bei Tragwerksberechnungen nach Theorie zweiter Ordnung

Friedel Hartmann, Roland Maucher
Fachgebiet Baustatik, Universität Gesamthochschule Kassel
34109 Kassel

## 1 Einleitung

Bei Tragwerken, die nach Theorie I. Ordnung berechnet werden, wird das Ergebnis durch Gleichgewicht am unverformten Tragwerk kontrolliert. Bei Tragwerken, die nach Theorie II. Ordnung berechnet werden, besagt eine Faustformel:

$$\text{Theorie zweiter Ordnung} = \text{Gleichgewicht am verformten System} \tag{1}$$

Wir zeigen in diesem Aufsatz, daß diese Faustformel nicht richtig ist. Berechnet man ein Tragwerk nach Theorie II. Ordnung, dann verschwindet die Momentensumme um einen Punkt aus systematischen Gründen nicht.
Betrachten wir als Beispiel den Rahmen in Bild 1. Für die Lagerkräfte $f_i$ und die Verformungen $u_i$ der freien Knoten ergaben sich bei der Berechnung nach Theorie II. Ordnung die Werte aus Tabelle 1, siehe [1].

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | -485.10 | $u_4$ | 0.009627 |
| $f_2$ | -26.29 | $u_5$ | 0.0008105 |
| $f_3$ | 94.94 | $u_6$ | -0.001091 |
| $f_{10}$ | -53.71 | $u_7$ | 0.009477 |
| $f_{11}$ | -134.90 | $u_8$ | 0.0001725 |
| $f_{12}$ | 134.53 | $u_9$ | -0.002011 |

Tabelle 1: Die Knotenwerte des Rahmens aus [1]

In [1] wird das Ergebnis durch ein Momentengleichgewicht am verformten System kontrolliert:

$$-94.94 \, + \, 485.10 * 10 \, - \, 500 * (10 - 0.009627) \, + \, 26.29 * 2.0 \tag{2}$$

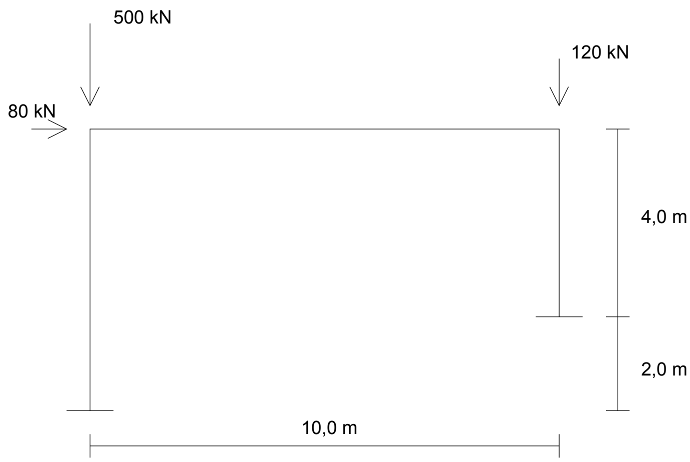


Abbildung 1: Rahmen mit Knotenkräften

$$+80 * (4 - 0.0008105) \; + \; 120 * 0.009477 \; - \; 134.53$$
$$= -0.0041 \quad \approx \quad 0.$$

Die Abweichung in Glg. 2 vom *scheinbaren* Sollwert 0 könnte man als Rundungsfehler ansehen, tatsächlich liegt ein systematischer Fehler vor, der hier auf Grund der gängigen Materialdaten sehr klein ist.
Die Ursache für diesen Fehler sind die falschen Hebelarme mit denen der Aufsteller die Momentensumme berechnet hat. Wir werden zeigen, daß die Theorie zweiter Ordnung eine Mischung aus Gleichgewicht am *verformten* und Gleichgewicht am *unverformten* System ist.

## 2 Die Gleichgewichtsbedingungen

Zum Beweis dieser Behauptung, studieren wir die Differentialgleichungen der balkenbiegung , nach Theorie I. bzw. II. Ordnung.

$$EIw^{IV}(x) = p(x) \qquad (EIw^{IV} - Lw'')(x) = p(x). \tag{3}$$

Zu jeder dieser beiden Differentialgleichungen gehört eine erste Greensche Identität, [2].

**Satz 1 (Erste Green'sche Identität, Theorie erster Ordnung)** *Es sei $w \in C^4$ und $\hat{w} \in C^2$. Dann ist:*

$$\underbrace{\int_0^l EIw^{IV}\hat{w}dx + [Q\hat{w} - M\hat{w}']_0^l}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_0^l \frac{M\hat{M}}{EI}dx}_{\delta A_i} = 0. \tag{4}$$

**Satz 2 (Erste Green'sche Identität, Theorie zweiter Ordnung)** *Es sei $w \in C^4$ und $\hat{w} \in C^2$. Dann ist:*

$$\underbrace{\int_0^l (EIw^{IV} - Lw'')\hat{w}dx + [T\hat{w} - M\hat{w}']_0^l}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_0^l \left(\frac{M\hat{M}}{EI} + Lw'\hat{w}'\right) dx}_{\delta A_i} = 0. \tag{5}$$

Die Identitäten 4 und 5 den *Energiesatz der Mechanik*, siehe [3]. Die Energiesätze besagen jeweils, daß die äußere Arbeit $\delta A_a$ der Streckenlast

$$EIw^{IV} = p, \text{ bzw. } EIw^{IV} - Lw'' = p \tag{6}$$

und der Balkenendkräfte,

$$\begin{aligned} \text{Biegemoment} &: \quad M = -EIw'' \\ \text{Querkraft} &: \quad Q = -EIw''' \\ \text{Transversalkraft} &: \quad T = -EIw''' + Lw' \end{aligned}$$

auf den Wegen einer Testverrückung $\hat{w}$ gleich der Wechselwirkungsenergie $\delta A_i$ zwischen den Zuständen $w$ und $\hat{w}$ ist.
Für das Verständnis unserer Argumentation ist es wichtig, zu verstehen, daß die Gleichgewichtsbedingungen, $\sum V = 0, \sum M = 0$ bereits in den Energiesätzen enthalten sind, [2]. Wenn Gleichgewicht 'im Kleinen', am Balkenelement $dx$, herrscht, wenn also die Biegelinie des Balkens der entsprechenden Differentialgleichung in Glg. 6 genügt, dann folgt automatisch das Gleichgewicht 'im Großen', dann ist die Streckenlast $p$ ist mit den Balkenendkräften $Q(0)$ und $Q(l)$, bzw. $T(0)$ und $T(l)$ im Gleichgewicht, $\sum V = 0$, und die geeignet aufgestellte Momentensumme um einen beliebigen Punkt verschwindet, $\sum M = 0$.

## 2.1 Starrkörperbewegungen

Man kann aus dem Energiesatz eine Orthogonalitätsbedingung ableiten: Wählt man als Testverrückung einen Zustand $\hat{w}$, der keine innere Wechselwirkungsenergie mit einer Biegelinie $w$ hat, dann besagt der Energiesatz der Mechanik: Die Weggrößen des Zustandes $\hat{w}$ sind 'orthogonal' zu den Balkenendkräften und der Streckenlast der Biegelinie $w$. Es ergeben sich also Gleichungen mit der Bauart einer Gleichgewichtsbedingung. Testverrückungen dieser Art heißen Starrkörperbewegungen, sie sind durch das Verschwinden der jeweiligen inneren Energie $\mathbf{E}_I(w)$ bzw. $\mathbf{E}_{II}(w)$ charakterisiert:

$$\mathbf{E}_I(w) = \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI}\right) dx = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{E}_{II}(w) = \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + L(w')^2\right) dx = 0. \tag{8}$$

In den folgenden Unterabschnitten 2.2 und 2.3 werden wir die Green'sche Identität 4 mit den Starrkörperbewegungen nach Theorie erster Ordnung, $\hat{w} \equiv 1$ und $\hat{w}(x) = x$ testen und die gewohnten Gleichgewichtsbedingungen erhalten. Weiterhin formulieren wir auch die zweite Identität 5 mit diesen Testverrückungen.

## 2.2 Das Kräftegleichgewicht

Setzt man in die Green'schen Identitäten 4 und 5 für $w$ die Biegelinie des Balkens und wählt als Testverrückung $\hat{w}$ eine Translation, eine Absenkung des Balkens um eine Längeneinheit, $\hat{w} \equiv 1$, so erhält man das vertraute Querkraftgleichgewicht für Theorie erster Ordnung:

$$\int_0^l p(x)dx + Q(l) - Q(0) = 0. \tag{9}$$

Für die Theorie zweiter Ordnung ergibt sich, wegen $\hat{w}' \equiv 0$, dieselbe Formel mit $T$ anstelle von $Q$. Es ergibt sich also für beide Theorien das vertraute Kräftegleichgewicht, denn $\hat{w} \equiv 1$ ist eine Starrkörperbewegung nach Theorie erster und nach Theorie zweiter Ordnung.

## 2.3 Das Momentengleichgewicht

Zur Herleitung der Momentenbedingung setzen wir in den ersten Green'schen Identitäten für $w$ die Biegelinie des Balkens ein, und wählen als Testverrückung $\hat{w}$ eine Drehung um das linke Lager: $\hat{w}(x) = x$.
Diese Drehung liefert die Summe der Momente um das linke Lager, denn das Einsetzen in Glg. 4 ergibt unter Beachtung von $EIw^{IV}(x) = p(x)$ das bekannte Momentengleichgewicht:

$$\int_0^l p(x)x\,dx + Q(l)l - M(l) + M(0) = 0. \tag{10}$$

Entsprechendes Einsetzen unter Beachtung von $(EIw^{IV} - Lw'')(x) = p(x)$ in Glg. 5 liefert für die Theorie zweiter Ordnung:

$$\int_0^l p(x)x\,dx + T(l)l + \Delta w\,L - M(l) + M(0) = 0. \tag{11}$$

Hier bezeichnet $\Delta w$ die Differenz der Vertikalverschiebungen der Balkenenden. Der zusätzliche Term

$$\Delta w L = \int_0^l Lw'\hat{w}'\,dx = \int_0^l Lw'dx = (w(l) - w(0))L \tag{12}$$

repräsentiert das Biegemoment, das durch die Längskraft $L$ verursacht wird. Die Längskraft bekommt durch die Verformung einen Hebelarm, daher spricht man bei Berechnungen nach Theorie zweiter Ordnung vom Gleichgewicht am verformten System. Andererseits steht in Glg. 11 bei $T(l)$ der Hebelarm $l$, das heißt die Transversalkraft $T$ geht mit dem ursprünglichen Hebelarm des unverformten Systems ein.

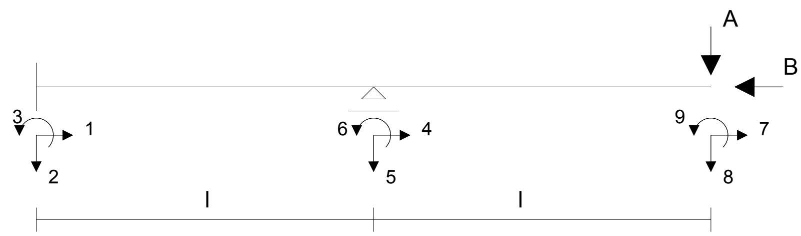


Abbildung 2: ein einfaches Beispiel

Die Faustformel 1 ist also nicht korrekt, denn zur Aufstellung eines Momentengleichgewichts nach Theorie zweiter Ordnung sind für die Querkräfte die Hebelarme des unverformten Systems und für Normalkräfte Hebelarme des verformten Systems zu benutzen. Bereits bei einem einfachen Rahmen wie in Abbildung 1 ist es nicht möglich, die 'korrekten' Anteile der Knotenverformungen herauszufiltern, so daß ein Kontrolle des Momentengleichgewichts bei Berechnungen nach Theorie zweiter Ordnung streng genommen nicht möglich ist. In der Praxis fällt das gewöhnlich nicht auf, da die Zusatzverformungen nach Theorie zweiter Ordnung so klein sind, daß der Fehler bei der Momentenkontrolle als Rundungsfehler angesehen wird.

# 3 Beispiel: das Momentengleichgewicht an einem Zweifeldträger

Wir geben als einfaches Beispiel den Träger in Abbildung 2, an dem der Unterschied zwischen Momentengleichgewicht am verformten System, im Sinne von Glg. 2, und dem Momentengleichgewicht im erweiteren Sinn nach Glg. 11 studiert werden kann. Dabei machen wir uns zunutze, daß es mit dem Programmsystem *Mathematica*, [4], möglich ist, alle Knotenwerte symbolisch zu berechnen und Rundungsfehler somit nicht auftreten.
Eine korrekte Formulierung des Momentengleichgewichts sollte exakt Null liefern.
Betrachten wir die Momentensumme um die Einspannstelle. Im Momentengleichgewicht nach Theorie zweiter Ordnung sind gemäß Glg. 11 die vertikal gerichteten Kräfte $f_5$ und $A$ mit ihrem ursprünglichen Hebelarmen am unverformten System, den Längen $l$ bzw. $2l$ einzusetzen, aber die horizontal gerichtete Kraft $B$ mit ihrem Hebelarm $u_8$ am verformten System:

$$f_3 - l f_5 - 2lA - u_8 B = 0. \tag{13}$$

Die symbolische Rechnung mit *Mathematica* liefert hier exakt (algebraisch) null. Setzt man auch für die Kräfte $f_5$ und $A$ ihre Hebelarme am verformten System ein, was *nicht richtig* ist, dann ist das Ergebnis ein langer algebraischer Ausdruck, der nicht weiter reduzibel ist und nicht verschwindet. Das Einsetzen von Zahlen, entsprechend den Daten eines Trägers mit einem IPB-300 Profil aus St37 mit Spannweiten von je $l = 5\,m$ und Einzelkräften $A = B = 100\,kN$, liefert einen Fehler von 0.008685 kNm. In diesem Beispiel zeigt sich, wie in [1], siehe Glg. 2, daß der begangene Fehler für gängige Materialien sehr klein ist. Daher werden leicht Rechenungenauigkeiten als seine Ursache vermutet. Nichtsdestoweniger ist er systematisch bedingt, wie wir dargelegt haben.

## Literatur


[1] H. Ahlert, *Finite Elemente in der Stabstatik*, Werner–Verlag 1992

[2] F. Hartmann, *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*, Springer Verlag 1987

[3] W. Krätzig und U. Wittek, *Tragwerke 1*, Springer Verlag 1993

[4] S. Wolfram, *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison–Wesley 1991