Bewertung der Grenzlast von elastisch-plastischen Tragwerken mit Hilfe stochastischer Methoden

Raue, E.[1] ; Vaidogas, E.R.[2] ; Müller, K.-H.[1]

1. Einführung

Für die Analyse von Tragwerken sowohl des Stahlbaus als auch des Massivbaus eröffnet die nationale und internationale Normengebung in zunehmendem Maße die Anwendung physikalisch nichtlinearer Berechnungsmodelle. Es ist zu erwarten, daß neben dem traditionellen elastischen Berechnungsmodell das linearelastisch-idealplastische Materialmodell in die Tragwerksanalyse Eingang finden wird. Während bei den traditionellen Berechnungsverfahren auf der Grundlage der Elastizitätstheorie hinreichende Erfahrungen durch die Planungspraxis bestehen und umfangreiche Untersuchungen zur dabei erreichten Sicherheit vorliegen, stellen die nichtlinearen Berechnungsmethoden sowohl in mechanischer als auch in sicherheitstheoretischer Hinsicht ein neues Erfahrungsfeld dar.

Im vorliegenden Beitrag werden aus der Vielzahl der anstehenden Probleme folgende Teilprobleme behandelt:

- Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit elasto-plastischer Tragsysteme nach dem Kriterium der plastischen Grenzlast
- Ermittlung stochastischer Eigenschaften des plastischen Grenzlastparameters elasto-plastischer Tragsysteme.

Die Lösung des mechanischen Problems geschieht über eine lineare Optimierungsaufgabe, die nach dem statischen Theorem der plastischen Grenzlast formuliert ist. Als stochastische Methode wird die Simulation angewandt, die zum einen auf einer zufälligen Erzeugung der Realisierungen (stochastische Simulation) und zum anderen auf einer planmäßigen Erzeugung der Realisierungen (konstruktive Simulation) beruhen kann. Für jedes der Teilprobleme wird ein Beispiel vorgestellt.

2. Berechnungsgrundlagen

2.1 Mechanisches Modell

Die nachfolgenden mathematischen Formulierungen beziehen sich auf ebene Rahmentragwerke und schließen damit den in der Berechnungspraxis häufig auftretenden Fall des Durchlaufträgers mit ein.

Analog zur Methode der Finiten Elemente wird das Tragwerk in n Stabelemente zerlegt, die in m Knoten miteinander verbunden sind. Der Schnittgrößenzustand $\mathbf{S}_i$ des Elementes i wird durch die Längskraft N_i sowie die Stabendmomente M_{i1} und M_{i2} beschrieben. Die Schnittgrößen des Tragwerkes insgesamt lassen sich somit im Vektor

$$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1^T, \dots, \mathbf{S}_i^T, \dots, \mathbf{S}_n^T)^T = (N_1, M_{11}, M_{12}, \dots, N_i, M_{i1}, M_{i2}, \dots, N_n, M_{n1}, M_{n2})^T$$

zusammenfassen. Die äußeren Einwirkungen sind analog im Vektor

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1^T, \dots, \mathbf{F}_j^T, \dots, \mathbf{F}_m^T)^T = (F_{1H}, F_{1V}, F_{1M}, \dots, F_{iH}, F_{iV}, F_{iM}, \dots, F_{mH}, F_{mV}, F_{mM})^T$$

[1] Prof. Dr.-Ing. habil. E. Raue; Dr.-Ing. K.-H.Müller : Bauhaus-Universität Weimar
[2] Dr.-Ing. E.R. Vaidogas : Technische Universität Vilnius

der Knotenbeanspruchungen enthalten. Die Belastung im Grenzgleichgewichtszustand sei mit (p $\mathbf{F}$) bezeichnet, wobei p den plastischen Grenzlastparameter darstellt.
Nach dem statischen Theorem der plastischen Grenzlast tritt im Grenzgleichgewichtszustand von allen statisch zulässigen Schnittgrößenverteilungen diejenige ein, für die der Grenzlastparameter p ein Maximum wird.
Man erhält somit folgende lineare Optimierungsaufgabe [1,2,3]:

Zielfunktion: $p \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{A_G}\ \mathbf{S} - p\ \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(1)}$$
$$\mathbf{A_P}\ \mathbf{S} \le \mathbf{b_P}$$

Hierbei ist $\mathbf{A_G}$ die Matrix der Gleichgewichtsbedingungen, $\mathbf{A_P}$ die Matrix der linearisierten Plastizitätsbedingungen [4]. Der Vektor $\mathbf{b_P}$ charakterisiert die aufnehmbaren Schnittgrößen in den maßgebenden Querschnitten, ist also von Querschnittsgeometrie und Materialkenngrößen abhängig.
Das Tragwerk versagt, wenn $p < 1$ ist. Unter einer vorgegebenen Belastung $\mathbf{F}$ ergibt sich somit die Grenzzustandsgleichung: $g(p) = p - 1 = 0$

2.2 Stochastisches Modell

Im allgemeinen sind die Tragwerksgeometrie, die Querschnittstragfähigkeiten und die Belastungen zufällig. Diese Zufälligkeiten können in verschiedenen Ebenen beschrieben werden, so können z.B. als zufällige Eingangsgrößen (Basisvariablen) für die Querschnittstragfähigkeiten die Materialfestigkeiten und Querschnittsabmessungen oder die Tragfähigkeiten selbst in das Modell eingehen. Die Auswirkungen dieser Zufälligkeiten kann man mit der Methode der Simulation untersuchen. Dabei sind hinreichend viele Realisierungen des belasteten Tragsystems zu erzeugen, so daß eine große Anzahl von deterministischen Aufgaben nach (1) zu lösen ist. Für die k-te Realisierung ergibt sich dann folgende Aufgabe:

Zielfunktion: $p \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{A_{G,k}}\ \mathbf{S_k} - p\ \mathbf{F_k} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(2)}$$
$$\mathbf{A_{P,k}}\ \mathbf{S_k} \le \mathbf{b_{P,k}}$$

Wenn man die Zufälligkeit der Tragwerksgeometrie vernachlässigt, ist die Matrix $\mathbf{A_G}$ deterministisch, d.h. von k unabhängig.
Die Simulation erzeugt eine Gesamtheit von N Realisierungen für den plastischen Grenzlastparameter mit zugehörigen Gewichten (Wahrscheinlichkeiten) f_k: $(p_k, f_k)_{k=1,\dots,N}$
Diese Gesamtheit ist statistisch auszuwerten. Eine Schätzung $P_{f,N}$ für die Versagenswahrscheinlichkeit P_f ist z.B.

$$\mathbf{P_{f,N}} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{I}(\mathbf{p_k}) \cdot \mathbf{f_k} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{I}(\mathbf{p_k}) = \begin{cases} 1 & \textit{für}\ \ p_k < 1 \\ 0 & \textit{für}\ \ p_k \ge 1 \end{cases} \qquad \mathbf{(3)}$$

2.2.1 Stochastische Simulation

Die stochastische Simulation beruht auf der zufälligen Erzeugung der Realisierungen unter Nutzung von Zufallsgeneratoren für die einzelnen Basisvariablen. Es sind folgende Schritte zu gehen:
- Erzeugung von Realisierungen durch zufällige Generierung
- Jede Realisierung k hat das gleiche zugehörige Gewicht $f_k = 1/N$ (N: Anzahl der Realisierungen)

- Berechnung des zu jeder Realisierung k gehörenden plastischen Grenzlastparameters p_k
- statistische Auswertung der Gesamtheit der plastischen Grenzlastparameter p_k (bei einheitlichen zugehörigen Gewichten)

2.2.2 Konstruktive Simulation

Die konstruktive Simulation [5] beruht auf der planmäßigen Erzeugung der Realisierungen unter Verwendung von diskreten Verteilungen der Basisvaraiblen. Es sind folgende Schritte zu gehen:
- Diskretisierung der Dichten der Basisvariablen, so daß diskrete Verteilungen entstehen
- Erzeugung von Realisierungen durch Bildung aller Kombinationen der diskreten Werte der Basisvariablen
- Bestimmung des zu jeder Realisierung k gehörigen Gewichtes f_k aus dem Produkt der zugehörigen Einzel-wahrscheinlichkeiten
- Berechnung des zu jeder Realisierung k gehörenden plastischen Grenzlastparameters p_k
- statistische Auswertung der Gesamtheit der plastischen Grenzlastparameter p_k und der zugehörigen Gewichte f_k

3. Beispiele

3.1 Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit

In Abb. 1 ist das Beispiel eines einfeldrigen Rahmens mit zwei Lasten dargestellt. Es wurde angenommen, daß die Biegemomente dominieren und der Einfluß der Längskräfte auf die Plastizitätsbedingungen vernachlässigt werden kann. Der Vektor $\mathbf{b_P}$ beinhaltet dann lediglich die aufnehmbaren Momente M_{0i} . Diese aufnehmbaren Momente werden normalverteilt mit einem Variationskoeffizienten $\nu = 0.1$ angenommen. Die Belastungen werden als Gumbel-Verteilungen mit $\nu = 0.15$ vorausgesetzt.
Die Mittelwerte der aufnehmbaren Momente sollen jeweils an den Stielen bzw. dem Riegel gleichgroß sein:

$$\mu_1 = \overline{M}_{01} = \overline{M}_{02} = \overline{M}_{03}$$
$$\mu_2 = \overline{M}_{04} = \overline{M}_{05} = \overline{M}_{06}$$
$$\mu_3 = \overline{M}_{07} = \overline{M}_{08}$$

Es wurde der Einfluß auf die Versagenswahrscheinlichkeit untersucht, den eine jeweils einzelne Reduzierung der Mittelwerte der aufnehmbaren Momente der Stiele bzw. des Riegels von ihren Ausgangswerten $\mu_1 = 5$ kNm, $\mu_2 = 2.5$ kNm und $\mu_3 = 5$ kNm hat. Für jede Parameterkonstellation wurden drei verschiedene stochastische Simulationen durchgeführt, die 100000 Realisierungen erzeugten und auswerteten. Die Ergebnisse der drei Lösungen derselben Aufgabe ergaben geringe Abweichungen. Folgende Feststellungen können getroffen werden:
- Eine Absenkung des Wertes μ_3 um 50% ist ohne wesentliche Verschlechterung der Versagens-wahrscheinlichkeit möglich.
- Eine Reduzierung von μ_1 oder μ_2 um 50 % hat eine Verdoppelung der Versagenswahrscheinlichkeit zur Folge.

3.2 Bestimmung stochastischer Eigenschaften des plastischen Grenzlastparameters

In Abb.2 wird das Beispiel eines einfeldrigen Rahmens mit vier Lasten gezeigt, die ein festes Lastbild **F** darstellen. Die Interaktion der Biegemomente und Längskräfte wird in den Plastizitätsbedingungen erfaßt. Nur die Zufälligkeiten der Materialfestigkeiten werden berücksichtigt, sie sind durch Lognormalverteilungen beschrieben. Mittels Konstruktiver Simulation werden die stochastischen Eigenschaften des plastischen Grenzlastparameters p ermittelt. Es wird die Empfindlichkeit der p-Verteilung bezüglich der Streuung der Festigkeiten untersucht. Zur Darstellung werden die empirischen Dichten des plastischen Grenzlastparameters p durch Dichten der Normalverteilung approximiert. Im Vergleich dazu wurde der zu den Normwerten (5%-Quantilen) der Festigkeiten gehörige Wert p_c bestimmt. Folgende Feststellungen konnten getroffen werden:

- Die Zufälligkeit der Betonfestigkeit R_b hat einen sehr geringen Einfluß auf die Zufälligkeit von p.
- Der Einfluß des Verteilungstyps (normal oder lognormal) der Festigkeiten auf die Verteilung von p ist sehr gering; die realistischere lognormale Verteilung ist gegenüber der normalen konservativ.
- Mit steigender Variation der Stahlfestigkeit sinkt der Mittelwert von p geringfügig, steigt die Variation von p etwa linear an und nimmt die Unterschreitungswahrscheinlichkeit $P_u = P(p<p_c)$ des nach Norm ermittelten Wertes p_c stark zu. Bei einer Variation von $\nu = 0.15$ ergibt sich $P_u = 0.004$ und $P_f = P(p<1) = 10^{-8}$, was etwa einem Sicherheitsindex von 5,6 entspricht.

Literatur:

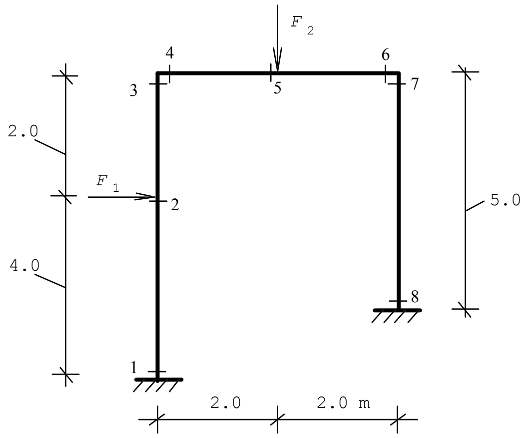
[1] Cyras,A.: Analysis and Optimization of Elastoplastic Systems. Chichester, Ellis Horwood Ltd. Publishers, 1982,121 p.

[2] Raue, E.: Berechnung von Balkentragwerken unter Berücksichtigung von Plastizierungen. Wiss. Zeitschrift HAB Weimar, 35 (1989), Heft 5/6

[3] Raue,E.: Berechnungsmodelle für Tragwerke mit nichtlinearem Tragverhalten auf der Grundlage der mathematischen Optimierung. IKM 1994, HAB Weimar

[4] Raue, E.; Timmler, H.-G.; Saad, M.: Berechnungdmodelle für dynamisch beanspruchte Tragwerke mit Methoden der mathematischen Optimierung. IKM 1994, HAB Weimar

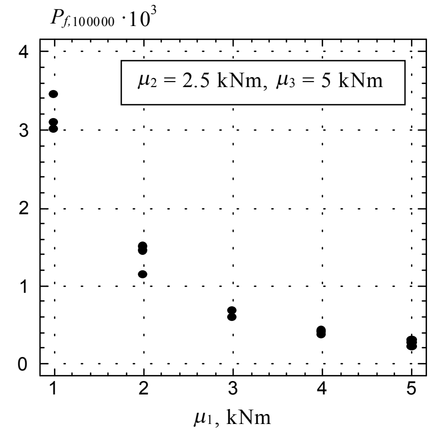
[5] Müller, K.-H.: Konstruktive Simulation. Dokumentation zum Programmsystem ZUFUN.

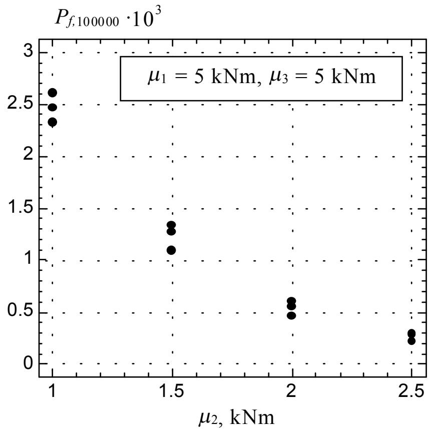


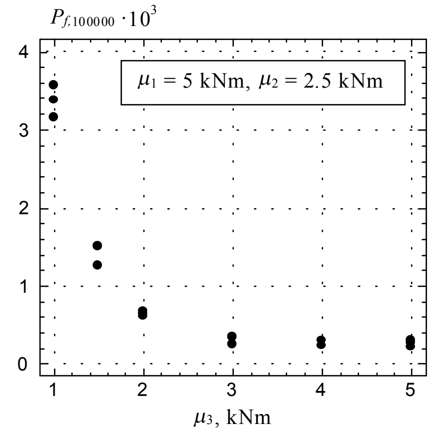
Geometrie und Belastung

Bezeich-nung	Mittel-wert	Variations-koeff.	Verteilungs-typ
$\widetilde{M}_{01}$	variabel	0.1	Normal
$\widetilde{M}_{02}$	"	"	"
$\widetilde{M}_{03}$	"	"	"
$\widetilde{M}_{04}$	"	"	"
$\widetilde{M}_{05}$	"	"	"
$\widetilde{M}_{06}$	"	"	"
$\widetilde{M}_{07}$	"	"	"
$\widetilde{M}_{08}$	"	"	"
$\widetilde{F}_1$	1.6 kN	0.15	Gumbel
$\widetilde{F}_2$	2.4 kN	0.15	Gumbel

Mittelwerte, Variationskoeffizienten und Verteilungstypen der Zufallsvariablen



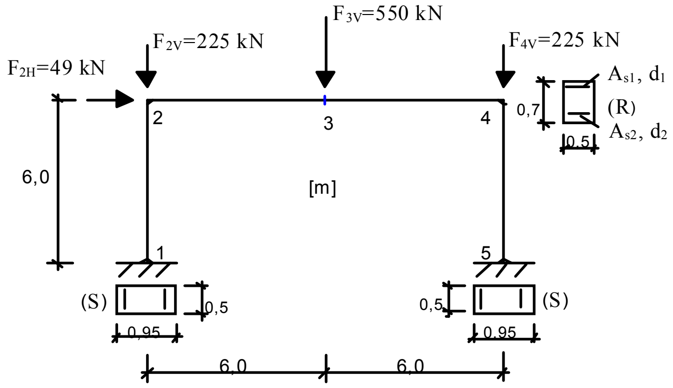




Jeweils einzelne Reduzierung der Mittelwerte der Querschnittstragfähigkeiten

Abb. 1: Versagenswahrscheinlichkeiten eines elasto-plastischen Tragsystems bei Reduzierung der Mittelwerte der Querschnittstragfähigkeit (stochastische Simulation)

System: Rahmen



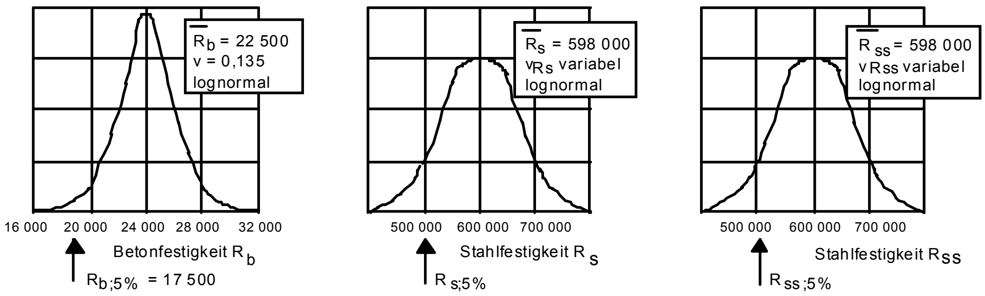
Bewehrung [cm²]:

$A_{S1}^{(S)}$	24,6
$A_{S2}^{(S)}$	24,6
$A_{S1}^{(R)}$	58,0
$A_{S2}^{(R)}$	61,6

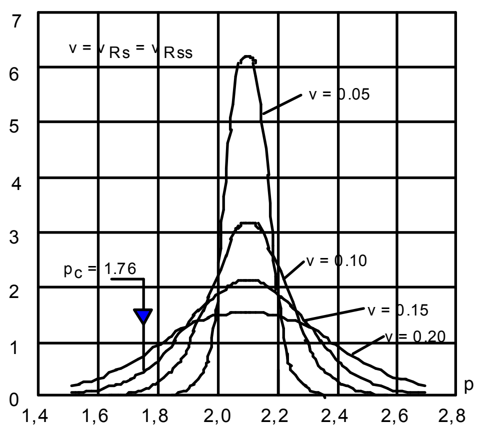
Betondeckung [cm]:

d_1	6,6
d_2	6,6
d_1	7,7
d_2	9,0

Stochastische Basisvariablen: Materialfestigkeiten [KN/m²]



Stochastische Zielgröße: elasto- plastischer Grenzlastparameter



	Variationskoeffizienten der Stahlfestigkeiten			
Stoch. Kennwerte	v=0,05	v=0,10	v=0,15	v=0,20
$\overline{p}$	2,1045	2,096	2,086	2,065
sig(p)	0,0646	0,1274	0,1913	0,2505
v_p	0,0307	0,0608	0,0917	0,1213
p10 %	2,019	1,929	1,837	1,741
p5 %	2,000	1,890	1,778	1,664
p2,5%	1,983	1,860	1,735	1,610
p1%	1,967	1,829	1,689	1,554
P(p <1,76)	**10^{-7}**	**0,004**	**0,044**	**0,115**
P_f =P(p<1)	0	10^{-17}	10^{-8}	10^{-5}

Abb. 2: Bestimmung des stochastischen elasto-plastischen Grenzlastparameters bei zufälligen Materialfestigkeiten (konstruktive Simulation)