Anwendung der mathematischen Optimierung bei der Modellbildung und Analyse des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlbetontragwerken

E. Raue
Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Marienstraße 13, 99421 Weimar

1 Einleitung

In den zurückliegenden Jahren wurden umfangreiche Untersuchungen zur Modellbildung und rechnerischen Erfassung des Tragverhaltens von Tragwerken und Tragwerkelementen aus Stahlbeton und Spannbeton unter Berücksichtigung von Rissbildungen und Plastizierungen durchgeführt[1]. Diesen Betrachtungen liegt als einheitliches methodisches Konzept der mathematischen Problembeschreibung und Problemlösung die mathematische Optimierung zugrunde. Dieses Konzept hat sich auch bei der Modellierung hybrider Strukturen, die Gegenstand eines Teilprojektes des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Sonderforschungsbereiches 524 „Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken" sind, als leistungsfähig erwiesen.[2-7]
Die internationale und nationale Normenentwicklung im Stahlbetonbau eröffnet der nichtlinearen Tragwerksanalyse neue Felder in der praktischen Tragwerksplanung. In diesem Zusammenhang ist es jedoch erforderlich, auf zwei wesentliche Sachverhalte hinzuweisen, die bei traditionellen Berechnungen nach der linearen Elastizitätstheorie von untergeordneter Bedeutung sind. Die nichtlineare Tragwerksanalyse verlangt für die Beurteilung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit im allgemeinen zusätzlich zu den herkömmlichen Kriterien

- eine Bewertung der Verformungen, d.h. der *bleibenden Verformungen* sowohl im Grenzzustand der Tragfähigkeit als auch im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit,
- eine Bewertung des Einflusses der *Lastfolgen* auf die Entwicklung der Spannungs- und Schnittgrößenumlagerungen.

Vielfach lassen sich rechnerische Tragreserven nicht oder nicht voll ausnutzen, z.B. wenn die für den Grenzzustand der Tragfähigkeit berechneten *plastischen Verformungen* Werte erreichen, die durch die Duktilität der eingesetzten Materialien nicht gedeckt sind. Entscheidungen über Spannungs- und Schnittgrößenumlagerungen für den Versagenszustand haben im allgemeinen auch Einfluss auf das Tragverhalten im Gebrauchszustand, so dass Beschränkungen der Verformungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit und im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit unumgänglich sind. Die mathematische Optimierung bietet die Möglichkeit, auf der Grundlage einer Problemformulierung als *verallgemeinerte LAGRANGE-Aufgabe* eine leistungsfähige Berechnungsstrategie zu entwickeln.
Bei der traditionellen Modellbildung des Tragverhaltens mit Hilfe der linearen Elastizitätstheorie ist die Superponierbarkeit verschiedener Lastfälle zu Lastkombinationen gegeben. Wenn physikalisch nichtlineare Effekte bei der Tragwerksanalyse zu berücksichtigen sind, muss im Regelfall der Einfluss der *Lastfolge* auf den Spannungs- und Deformationszustand untersucht und berücksichtigt werden, um progressive oder alternierende Schädigungen auszuschließen oder zu begrenzen. Wie die Erfahrungen zeigen, bieten die Einspielsätze nach MELAN und KOITER eine theoretische Grundlage, um mit Hilfe der Optimierung die *adaptive Grenzlast* und die zu diesem Belastungsniveau gehörenden *Restspannungen und Restverformungen* zu berechnen bzw.

abzuschätzen.

2 Berechnungsmodelle

2.1 Berechnungsmodell zur Ermittlung der plastischen Grenzlast ohne deformationsbasierte Grenzzustandsbedingungen

Sofern sich das Material elastisch-ideal-plastisch verhält und die Größe der Verformungen beim Erreichen des Grenzzustandes der Tragfähigkeit keinen Beschränkungen unterliegt, ist die *plastischen Grenzlast* p_P durch die lineare Optimierungsaufgabe

$$p \rightarrow \max \tag{2.1}$$

$$A_G s - p\, b_G = 0 \tag{2.2}$$

$$A_P s \qquad \leq b_P \tag{2.3}$$

bestimmt.

Hierbei ist s der Vektor der Schnittgrößen in den Knotenpunkten des diskretisierten Tragwerkes. Durch den Vektor b_G werden die äußeren Kräfte erfaßt. Die Matrix A_G verknüpft die Schnittgrößen s mit den äußeren Belastungen, so daß die erste Nebenbedingung die *Gleichgewichtsbedingungen* unter Berücksichtigung der *statischen Randbedingungen* darstellt. Die zweite Nebenbedingung in Form einer Ungleichung beschreibt die *Plastizitätsbedingungen* mit Hilfe der Matrix A_P und des Vektors b_P in linearisierter Form.

2.2 Berechnungsmodell zur Ermittlung der Schnittgrößen und Formänderungen im elastisch-plastischen Zustand

Da in die statische Formulierung nach Gl. (2.1 bis 2.3) die Verträglichkeitsbedingungen für die Verformungen nicht eingehen, liefert diese Optimierungsaufgabe nur dann die richtigen Schnittgrößen s, wenn eine vollständige Schnittgrößenumlagerung eintreten kann, d.h. wenn der Schnittgrößenzustand s allein durch die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen eindeutig bestimmt ist. Für jede beliebige Belastungsintensität $0 \leq p \leq p_P$ kann der Schnittgrößenzustand mit Hilfe der quadratischen Optimierungsaufgabe

$$\frac{1}{2} s^T Q s \rightarrow \min \tag{2.4}$$

$$A_G s \;=\; p\, b_G \tag{2.5}$$

$$A_P s \;\leq b_P \tag{2.6}$$

ermittelt werden.

Die zu dieser Optimierungsaufgabe gehörenden LAGRANGE-Multiplikatoren stellen die Verschiebungen u und die plastischen Deformationen $\lambda \geq 0$ dar. Für den Fall $p = p_P$ erhält man aus (2.4 - 6) die Schnittgrößenverteilung im Grenzzustand der Tragfähigkeit *und* die Verschiebungen einschließlich der plastischen Deformationen in den plastischen Gelenken. Liegt die Belastungsintensität p unter der *elastischen Grenzlast* p_E, treten keine plastischen Verformungen auf und es gilt $\lambda = 0$.

In der Formulierung nach Gl.(2.1-3) stellen die Plastizitätsbedingungen die *Grenzzustandsgleichungen* dar, die den Grenzzustand der Tragfähigkeit des Systems charakterisieren.

2.3 Berechnungsmodelle zur Ermittlung der Grenzlast, der Schnittgrößen und Formänderungen

im elastisch-plastischen Zustand unter Berücksichtigung deformationsbasierter Grenzzustandsbedingungen

Bei Stahlbetonkonstruktionen werden im allgemeinen die Festigkeitsbedingungen als Plastizitätsbedingungen verwendet. Diese sind im Regelfall über normative Festlegungen zu Grenzdeformationen des Betons und der Bewehrung definiert. In diesem Fall bietet es sich an, die *deformationsbasierten* Grenzzustandbedingungen für die Querschnitte auch als Grenzzustandsbedingungen für das Tragsystem zu verwenden. Auch bei Untersuchungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit spielen sowohl Begrenzungen der Verschiebungen u, z.B. der Durchbiegungen biegebeanspruchter Elemente, als auch der rissbreitenbestimmenden Dehnungen der Bewehrung eine entscheidende Rolle. Diese Begrenzungen lassen sich direkt in das Berechnungsmodell integrieren [8,9].

Bezeichnet man die Intensität der Belastung bei Erreichen des Grenzzustandes der Tragfähigkeit weiterhin mit p_P, unabhängig davon, ob der Grenzzustand durch Plastizierung eines Querschnitts oder durch Erreichen von Grenzdeformationen erreicht wird, kann die zu den Gl.n (2.1-3) äquivalente und erweiterte Aufgabe wie folgt formuliert werden:

$$p \rightarrow \max \tag{2.7 }$$

$$A_G s - p b_G = 0 \tag{2.8 }$$

$$A_G^T u - Q s - A_P^T \lambda = 0 \tag{2.9 }$$

$$A_P s \leq b_P \tag{2.10}$$

$$A_u u \leq b_u \tag{2.11}$$

$$\lambda^T (A_P s - b_P) = 0 \tag{2.12}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{2.13}$$

Die Gl. (2.9) beinhaltet die *Verträglichkeitsbedingungen* unter Berücksichtigung der *kinematischen Randbedingungen*, in denen die Verschiebungen u über die Matrix A_G^T mit den elastischen Deformationen Q s und den plastischen Deformationen λ gekoppelt sind.

Die Gl. (2.12.) stellt die *Komplementaritätsbedingungen* dar, Gl. (2.13) die *Nichtnegativitätsbedingungen* für die plastischen Deformationen. Die deformationsbasierten Grenzzustandsbedingungen sind in Gl.(2.11) zusammengefasst. Die Grenzwerte der Verschiebungen bzw. Deformationen bilden den Vektor b_u.

Um die Anzahl der Variablem zu reduzieren, können unter Nutzung der Gl.(2.9) die Schnittgrößen s eliminiert werden:

$$s = Q^{-1} A_G^T u - Q^{-1} A_P^T \lambda. \tag{2.14}$$

Das vorstehende Berechnungsmodell kann auch verwendet werden, um die Schnittgrößen und Verformungen unter Berücksichtigung von Restriktionen für die Schnittgrößen und Verformungen zu berechnen, wenn die Belastungsintensität p unter dem Grenzwert p_P liegt.

2.4 Berechnungsmodelle zur Ermittlung der Restschnittgrößen und Restverformungen

Treten in einem Tragwerk infolge Belastung plastische Deformationen auf, d.h. kommt es zu Schnittgrößenumlagerungen, so bleiben nach völliger *Entlastung* in diesem Tragwerk *Restschnittgrößen* s_r und *Restdeformationen* u_r übrig. Die Restdeformationen beinhalten einen elastischen und einen plastischen Anteil. Der plastische Anteil entspricht den plastischen Verformungen, die sich im Belastungsprozess eingestellt haben. Der elastische Anteil und die Schnittgrößen sind über das Elastizitätsgesetz miteinander gekoppelt.

Für die Ermittlung der Restschnittgrößen bieten sich verschiedene Wege an:

- Berechnung mit Hilfe der Schnittgrößen s_e im linear-elastischen Zustand

- Berechnung mit Hilfe der plastischen Verformungen ε_0 aus dem Belastungsprozess.

Die *Schnittgrößen* s_e *im elastischen Zustand* lassen sich mit Hilfe der quadratischen Optimierungsaufgabe nach Gl.n (2.4 und 5) berechnen:

$$\frac{1}{2} s_e^T Q s_e \rightarrow \min \tag{2.15}$$

$$A_G s_e = p b_G . \tag{2.16}$$

Die zugehörigen LAGRANGE-Multiplikatoren geben die Verschiebungen im linear-elastischen Zustand an.

Die *Restschnittgrößen* s_r bilden einen Eigenspannungszustand und lassen sich aus der Optimierungsaufgabe

$$\frac{1}{2} s_r^T Q s_r \rightarrow \min \tag{2.17}$$

$$A_G s_r = 0 \tag{2.18}$$

$$A_P s_r \leq b_P - A_P s_e \tag{2.19}$$

ermitteln. Die zugehörigen LAGRANGE-Multiplikatoren beschreiben die Restverschiebungen und die plastischen Deformationen.

Andererseits können die im Belastungsprozess aufgetretenen plastischen Verformungen λ als *Vorverformungen* betrachtet und im Vektor ε_0 zusammengefasst werden. Diese Vorverformungen sind als Linearglied in der Zielfunktion zu berücksichtigen:

$$\frac{1}{2} s_r^T Q s_r + \varepsilon_0^T s \rightarrow \min \tag{2.20}$$

$$A_G s_r = 0. \tag{2.21}$$

Die zu dieser Aufgabe gehörigen LAGRANGE-Multiplikatoren geben die den plastischen Verformungen zugeordneten Restverschiebungen an.

2.5 Berechnungsmodell zur Ermittlung der Schnittgrößen und Verformungen infolge von Vorverformungen

Das Berechnungsmodell nach Gl.(2.20-21) kann so erweitert werden, dass es zur Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen infolge beliebiger Vorverformungen ε_0 verwendet werden kann. Die Vorverformungen können unterschiedliche Ursachen haben. Für praktische Berechnungen von besonderem Interesse sind Untersuchungen zu den Schnittgrößen und Verformungen, die sich auf *Temperatureinwirkungen* zurückführen lassen. Die Wirkung einer *Vorspannung* lässt sich in das Berechnungsmodell integrieren, indem die Vordehnung des Spannstahls als Vorverformung aufgefasst wird.

$$\frac{1}{2} s^T Q s + \varepsilon_0^T s \rightarrow \min \tag{2.22}$$

$$A_G s = p b_G \tag{2.23}$$

$$A_P s \leq b_P \tag{2.24}$$

Um deformationsbasierte Grenzzustandsgleichungen zu berücksichtigen, ist das Problem in einer Form analog Gl.n (2.7 – 13) als Komplementaritätsaufgabe zuformulieren[9,10]:

$$A_G s - p b_G = 0 \tag{2.25}$$

$$A_G^T u - Q s - A_P^T \lambda - \varepsilon_0 = 0 \tag{2.26}$$

$$A_P s \leq b_P \tag{2.27}$$

$$A_u u \qquad \le b_u \tag{2.28}$$

$$\lambda^T (A_P s - b_P) \qquad = 0 \tag{2.29}$$

$$\lambda \qquad \ge 0, \tag{2.30}$$

d.h. die Verträglichkeitsbedingung ist um den Anteil der Vorverformung ε_0 zu erweitern.

2.6 Berechnungsmodelle zur Bestimmung der Schnittgrößenumlagerungen infolge Kriechens und Schwindens des Betons

Die Schnittgrößenumlagerungen in Stahlbetontragwerken infolge *Kriechens und Schwindens des Betons* sind von der Zeit abhängig, d.h. sie stellen einen Prozess dar. Die Berechnungsmodelle nach 2.5 lassen sich verwenden, um auf der Grundlage einer zeitlichen Diskretisierung eine sukzessive Ermittlung der Schnittgrößenumlagerungen und der zugehörigen Veränderungen der Deformationen durchzuführen. Dies gilt sowohl für die Untersuchung der Spannungsumlagerungen am Verbundquerschnitt als auch für die Untersuchung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens des Betons am Tragelement bzw. am Tragwerk [11,12].

2.7 Berechnungsmodelle zur Bestimmung der adaptiven Grenzlast

Während eine sehr große Anzahl an Untersuchungen zum nichtlinearen Tragverhalten bei monoton steigender Belastung vorliegt, ist der Umfang an Arbeiten, die sich mit *Lastfolgen* auseinandersetzen, vergleichsweise gering. Je nach den Besonderheiten der Belastung und des Tragwerkes können bei Lastfolgen plastische Verformungen auftreten, die entweder nach einer begrenzten Anzahl von Lastzyklen zum Stillstand kommen oder die je nach Lastrichtung alternieren bzw. die mit den Lastzyklen progressiv zunehmen. Für die Beurteilung eines Tragwerkes aus elastisch-plastischem Material ist die *adaptive Grenzlast* p_A ein wichtiger Parameter, der angibt, bei welchem Belastungsniveau sich ein stabiler Restschnittgrößenzustand einstellt [13-15].

Wird die Belastungsintensität p nicht größer als p_A können die Schnittgrößen bzw. Formänderungen in einen elastischen Anteil s_e^* bzw. u_e^* und einen Restanteil s_r bzw. u_r zerlegt werden. Vorausgesetzt, dass die Belastungsverhältnisse untereinander als konstant angesehen werden können, lassen sich für jeden Querschnitt des Tragwerkes das Feld der Beanspruchungen unter Einheitslastfällen bzw. Einheitslastkombinationen bestimmen. Die maßgebenden Schnittgrößenkombinationen werden im Vektor s_e^* zusammengefasst.

Die adaptive Grenzlast ergibt sich aus der linearen Optimierungsaufgabe

$$p \quad \to \max \tag{2.31}$$

$$A_G s_r \qquad = 0 \tag{2.32}$$

$$A_P s_r + p A_P s_e^* \quad \le b_P . \tag{2.33}$$

Die Restschnittgrößen s_r werden mit Hilfe der quadratischen Optimierungsaufgabe bestimmt.

$$\frac{1}{2} s_r^T Q s_r \to \min \tag{2.34}$$

$$A_G s_r \qquad = 0 \tag{2.35}$$

$$A_P s_r + p A_P s_e^* \quad \le b_P \tag{2.36}$$

bestimmt.

Mit dem Berechnungsmodell nach Gl.n (2.30-32) und Gl.n (2.33-35) lassen sich auch vielfältige *dynamische* Probleme für Tragwerke mit elastisch-plastischen Materialeigenschaften und begrenzten plastischen Deformationen lösen, wobei der Schnittgrößen- bzw. Formänderungszustand in einen durch die dynamische Einwirkungen bedingten elastischen Anteil und in einen Restanteil zerlegt wird [16-22].

3 Anwendungen bei der Analyse hybrider Strukturen

Im Zuge der Revitalisierung von Bauwerken sind Eingriffe in die Tragstruktur im allgemeinen unumgänglich. Bei der Anpassung an veränderte Nutzungsbedingungen sind deshalb sowohl Reduzierungen als auch Ergänzungen der Tragstruktur erforderlich. Im Ergebnis entstehen hybride Tragstrukturen, deren einzelne Elemente sich bezüglich ihres Alters, bereits vorhandener Vorbeanspruchungen, gegebenenfalls auch hinsichtlich von Vorverformungen unterscheiden. Die im Abschnitt 2 beschriebenen Berechnungsmodelle bieten die Möglichkeit, nach einem *einheitlichen* Berechnungskonzept separate Betrachtungen zu unterschiedlichen strukturellen Stadien oder Zwischenstadien des Tragwerkes zu führen.
Die Analyse der *Ursprungsstruktur* gibt Aufschlüsse über mögliche Veränderungen der Steifigkeitsverhältnisse und über mögliche plastische Verformungen. Die Untersuchung ist für j ($j=1,2,..r^{(0)}$) unterschiedliche kritische Lastkombinationen zu führen:

$$\frac{1}{2}s^{(j)T}Q^{(0)}s^{(j)} \rightarrow \min \tag{3.1}$$

$$A_G^{(0)}s^{(j)} = p^{(j)}\, b_G^{(j)} \tag{3.2}$$

$$A_P^{(0)}s^{(j)} \leq b_P^{(0)} \tag{3.3}$$

Der hochgestellte Index $(...)^{(0)}$ bezeichnet die Ursprungsstruktur. Schädigungsbedingte Veränderungen der Steifigkeiten lassen sich durch Modifikation der Flexibilitätsmatrix Q berücksichtigen.
Eingriffe in die Struktur des Tragwerkes im Zuge der Revitalisierung werden im Berechnungsmodell durch entsprechende Anpassungen der Matrizen A_G, A_P und Q, sowie des Vektors b_P erfasst. Diese Anpassung ist für jede im Zuge der Revitalisierung entstehende wirksame Struktur oder Zwischenstruktur, sofern diese in Bezug auf die Schnittgrößen und Formänderungen relevant ist, vorzunehmen.
Einwirkungen oder Einwirkungskombinationen in einem möglichen Zwischenzustand der Struktur, gekennzeichnet durch die Indizierung $(...)^{(p)}$, gehen in die Belastungsglieder $p^{(j)}b_G^{(j)}$ mit $j = r^{(p-1)}+1, r^{(p-1)}+2,...,r^{(p)}$ ein, wobei $r^{(p)}$ die Anzahl der für die Struktur (p) zu berücksichtigenden Belastungskombinationen ist. Bleibende Verformungen in der Ursprungsstruktur sowie in den veränderten Strukturen gehen in die Vektoren $\varepsilon_0^{(p)}$ ein.
Für den p-ten Zustand der Struktur ergibt sich folgende Optimierungsaufgabe:

$$\frac{1}{2}s^{(j)T}Q^{(p)}s^{(j)} + \varepsilon_0^{(p)T}s^{(j)} \rightarrow \min \tag{3.1}$$

$$A_G^{(p)}s^{(j)} = p^{(j)}\, b_G^{(j)} \tag{3.2}$$

$$A_P^{(p)}s^{(j)} \leq b_P^{(p)} \tag{3.3}$$

mit $j = r^{(p-1)}+1, r^{(p-1)}+2,...,r^{(p)}$.

4 Schlußfolgerungen

Auf der Grundlage von Energieprinzipen lassen sich vielfältige Aufgaben der nichtlinearen

Tragwerksanalyse formulieren und mit Hilfe der Methoden der mathematischen Optimierung lösen.
Spannungs- bzw. deformationsbasierte Grenzzustandsbedingungen in Form von Ungleichungen lassen sich direkt in das Berechnungsmodell integrieren.
Die Berechnung beruht auf einem einheitlichen Konzept, Veränderungen der Struktur lassen sich durch entsprechende Anpassung der Problemmatrizen leicht erfassen.
Die Untersuchung des Zustandes der Tragwerksadaption ermöglicht eine Bewertung des plastischen Formänderungsvermögens infolge von Lastfolgeeffekten.
Problemstellungen, bei denen zeitabhängige Belastungen oder zeitabhängige Materialeigenschaften zu berücksichtigen sind, lassen sich nach entsprechender zeitlicher Diskretisierung sukzessiv berechnen. Dies betrifft auch Untersuchungen, bei denen unterschiedliche wirksame Strukturen zu berücksichtigen sind.

5 Literatur

[1] Raue, E.: Berechnungsmodelle für Tragwerke mit nichtlinearem Tragverhalten auf der Grundlage der mathematischen Optimierung XIII. Internationaler Kongress über Anwendung der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar, 1994, Berichte

[2] Raue, E.; Marx, S.; Adami, K.: Physikalisch nichtlineare Berechnung von Aussteifungssystemen mit Hilfe der mathematischen Optimierung. 37. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, DAfStb, S. 59 – 66, Bauhaus-Universität Weimar, 1999

[3] Raue, E.; Timmler, H.-G.; Adami, K.: Numerische Untersuchungen von Aussteifungssystemen bei unterschiedlicher Modellbildung. Thesis – Wissenschaftliche Zeitschrift der Bauhaus-Universität Weimar, H..3, Weimar, 2000

[4] Raue, E.; Timmler, H.-G.; Adami, K.: Physically non-linear analysis of structural systems of large panel buildings by methods of mathematical programming. 7th International Conference on Modern Building Materials, Structures and Techniques, CD, Vilnius, Lithuania, 16. – 18. May 2001

[5] Adami, K.; Timmler, H.-G.; Weitzmann, R.: Berechnungsmodelle zur Erfassung des Querschnittsverhaltens unbewehrter Aussteifungswände. Schriften der Bauhaus-Universität Weimar, Massivbau Beiträge aus Theorie und Praxis, Festschrift, Weimar, 2002

[6] Raue, E.; Weitzmann, R.; Timmler, H.-G.; Adami, K.: Shakedown analysis of revitalized multi-storey buildings. EURODYN'02, München, 2002

[7] Adami, K.: Beitrag zur physikalischen nichtlinearen Analyse von Aussteifungssystemen mit Methoden der mathematischen Optimierung, Dissertation, eingereicht Dezember 2002

[8] Raue, E.; Weitzmann, R.: Bemessungsmodell für Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung von Deformationsbedingungen. 37. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, DAfStb, S.45 – 49, Bauhaus-Universität Weimar, 1999

[9] Weitzmann, R.: Bemessungskonzept für Stahlbetontragwerke auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen. Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, August 2000

[10] Marx, S.: Anwendung der mathematischen Optimierung bei der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analyse von Stahlbetontragwerken. Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, März 2000

[11] Raue, E.; Diener, J.: Time-dependent stress and deformation analysis of statically defined prestressed concrete members using mathematical programming methods 4. International Conference Modern Building Materials, Structures and Techniques, Vilnius, 1995, Band II

[12] Diener, J.: Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter Bauteile aus Stahlbeton und Spannbeton unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens und der Rissbildung .Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, 1997

[13] Hampe, E.; Raue, E.; Timmler, H.-G.; Saad, M.; Schüler, H.: . Non-linear bearing behaviour of adaptive r/c structures. Dynamics of civil engineering structures, SFB 151, RUB Bochum, Balkema, 1995

[14] Schüler, H.: Zur Analyse und Bemessung adaptiver Tragwerke aus Stahlbeton unter dynamischen Einwirkungen. Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, 1996

[15] Müller, K.-H.; Broßmann, M.: Berücksichtigung des zeitlich zufälligen Lastverhaltens bei der adaptiven Grenzlastanalyse. Schriften der Bauhaus-Universität Weimar, Massivbau Beiträge aus Theorie und Praxis, Weimar, 2002

[16] Raue, E.; Schüler, H.; Timmler, H.-G.: Strategies for the design and the analysis of dynamically exited r/c structures. Proc. of the 3th European Conference on Structural Dynamics, Florence, Balkema, 1996

[17] Raue, E.; Weitzmann, R.: On dynamics analysis of elasto-plastic structures with methods of nonlinear mathematical programming.5th International Conference „Modern building materials, structures and techniques", Faculty of Civil Engineering Vilnius Technical University, May 1997

[18] Raue, E.; Weitzmann, R.: Advanced capacity design with methods of mathematical programming. 19th European Regional Engineering Seminar, Cairo, Egypt, December 1997

[19] Raue, E.; Timmler, H.-G.: Nonlinear analysis and adaptivity of statically and dynamically loaded reinforced concrete structures by mathematical programming methods. Proc. of the Euro-C 1998, Conference on Computational Modeling of Concrete Structures, Bad Gastein, 1998

[20] Raue, E.; Weitzmann, R.; Marx, S.: Earthquake resistant design of reinforced concrete frames. Eurodyn `99, Balkema, Prag, 7. – 10. Juni 1999

[21] Raue, E.; Timmler, H.-G.; Schüler, H.; Marx, St.: Anwendung der Methode der erweiterten Kapazitätsbemessung aus seismisch beanspruchte Stahlbetontragwerke. Tagungsband der D-A-CH Tagung 1999, Berlin, 1999 [24] Raue, E.; Weitzmann, R.: Bemessung seismisch beanspruchter Tragwerke unter Verwendung von Optimierungsstrategien. D-A-CH-Tagung 2001, 19. – 21. September 2001

[22] Raue, E.; Weitzmann, R.: Alternative Analysis and Design of R/C Structures Subjected to Seismic Loading Using Optimization Strategies. 12th European Conference on Earthquake Engineering, London, 2002