Ein Algorithmus zur Lösung von Tourenproblemen mit Zeitrestriktionen und inhomogenem Fahrzeugpark

Bernd Schmutzler
Bernd.Schmutzler@hrz.tu-chemnitz.de

1 Einführung

Bei Touren-Problemen treten in der Praxis häufig unterschiedlichste Bedingungen und Restriktionen auf. Dazu gehören zum einen inhomogene Fahrzeug-Parks, d.h. die Fahrzeuge besitzen unterschiedlichen Kapazitäten hinsichtlich Lade-Gewicht und -Volumen sowie unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Andererseits treten verschiedene Zeitrestriktionen auf. So können Kunden nur innerhalb gewisser Zeitfenster beliefert werden, während für die Aufträge früheste und späteste Liefertermine einzuhalten sind. Auch die Fahrzeuge stehen nur innerhalb gewisser Zeitfenster zur Verfügung. Über die Lösbarkeit solcher Probleme läßt sich im allgemeinen keine eindeutige Aussage treffen. Es können meist nur notwendige Bedingungen für die Existenz einer Lösung angegeben werden.

Zur Lösung solcher Touren-Probleme gibt es in der Literatur verschiedene Ansätze. Ein häufig benutztes Prinzip ist das Savingsverfahren [1], da es sich an unterschiedlichste Restriktionen anpassen läßt. Ein modifiziertes Savingsverfahren wird auch in dem hier vorgestellten Algorithmus benutzt.

Gegeben sei ein Depot, in dem sich Waren und Fahrzeuge befinden, wobei sich die Waren in Waren-Sorten unterteilen, von denen jeweils eine bestimmte Anzahl vorhanden ist. Diese Anzahl kann zeitabhängig sein, d.h. es sind zu gewissen Anfangszeiten (bis zur nächsten Anfangszeit) eine gewisse Anzahl an Waren dieser Klasse vorhanden. Die Fahrzeuge unterteilen sich ebenfalls in Fahrzeug-Typen, von denen jeweils eine bestimmte Anzahl in gewissen Zeitfenstern zur Verfügung steht. Die Zeitfenster können dabei aus mehreren Intervallen bestehen. Von den Kunden können dabei gewisse Fahrzeug-Typen von der Belieferung ausgeschlosen werden. Den Fahrzeugen kann eine Priorität zugeordnet werden, die beschreibt, ob das Fahrzeug bevorzugt zu benutzen ist. Dies ist zum Beispiel von Interesse, wenn der Fuhrpark aus eigenen und fremden Fahrzeugen besteht und fremde Fahrzeuge nur dann benutzt werden sollen, wenn die eigenen ausgelastet oder ungünstig sind.

Vom Depot sollen mit Hilfe der vorhandenen Fahrzeuge Kunden beliefert werden, die Waren verschiedener Klassen in bestimmten Zeitfenstern und gewissen Anzahlen bestellt haben.

Depot und Kunden sind durch ein Straßennetz verbunden, auf dem Maximalgeschwindigkeiten und unter Umständen Restriktionen für Fahrzeuggewicht und -größe einzuhalten sind. Wir setzen das Vorhandensein von Algorithmen voraus, die für ein vorgegebenes Fahrzeug unter Einhaltung aller Restriktionen den kürzesten bzw. schnellsten Weg zwischen zwei Orten des Straßennetzes bzw. unabhängig vom Fahrzeug den kürzesten bzw. schnellsten Weg zwischen zwei Orten mit samt den dabei zu erfüllenden Restriktionen ermitteln.

Die Aufstellung eines Tourenplanes besteht nun darin, alle Aufträge Fahrzeugen zuzuordnen, die Reihenfolge der Abarbeitung festzulegen und frühest- sowie spätest mögliche Ankunfts- und Abfahrtszeiten bei Depot und Kunden so zu bestimmen, daß sowohl die Restriktionen von Fahrzeugkapazität und Straßennetz sowie die Warenkapazität im Depot zur Abfahrtszeit als auch die Zeifenster von Tourenfahrzeug und Aufträgen eingehalten werden.

Um bei einer großen Anzahl von Kunden den rechentechnischen Aufwand des Algorithmus hinsichtlich Speicherkapazität und Rechenzeit zu begrenzen, werden Aufträge, die örtlich, d.h. bezüglich des kürzesten Weges zwischen den zugehörigen Kunden, und zeitlich, d.h. bezüglich einer möglichst geringen Wartezeit bis zum Beginn des Zeitfensters bei Nacheinanderausführung der Aufträge, nahe beieinander liegen, zu im folgenden als Cluster bezeichneten Mengen zusammengefaßt. Zu jeder Tour sollen dann nur Aufträge aus einem Cluster gehören. Dabei gehört jeder Auftrag zu mindestens einem Cluster, im allgemeinen aber zu mehreren, um die Flexibilität des Algorithmus zu erhöhen. Die Cluster bilden also eine Überdeckung aller Aufträge.

Die Aufstellung eines Tourenplans mit möglichst kurzen Weglängen und Wartezeiten erfolgt parallel, d.h. für jeden Cluster wird gleichzeitig eine Tour erstellt. Um eine möglichst günstige Zuordnung der Tourfahrzeuge zu den Clustern zu erreichen, wird für jeden Cluster und jedes Tourfahrzeug eine Bewertung der Zuordnung vorgenommen und das resultierende Zuordnungsproblem auf ein klassisches Transportproblem zurückgeführt.

Für die Erstellung der Touren wird ein Savingsalgorithmus zweiter Ordnung benutzt, d.h. neue Aufträge können an beliebiger Stelle der bisherigen Tour eingefügt werden. In das Saving gehen das übliche Weglängen-Saving, versehen mit einem vom Cluster abhängigen Savings-Parameter, und das zeitliche Saving in Form der Einsparung an Wartezeit ein.

Der Algorithmus kann über viele Parameter beeinflußt werden, zum einen, um unterschiedliche Tourenpläne erzeugen zu können, oder, um bei starken Restriktionen überhaupt eine Lösung zu finden.

2 Aufbereitung der Ausgangsdaten

Die für die Problemstellung erforderlichen Daten lassen sich in Depot-Daten $\mathcal{D}$, Kunden-Daten $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_i,\ i = 1,..,N_K\}$ sowie Typ- oder Sorten-Daten $\mathcal{S}$ unterteilen, die jeweils Waren-bezogene und Fahrzeug-bezogene Daten enthalten. Depot und Kunden sind zusätzlich durch ihre Lage in Form von Koordinaten gekennzeichnet. Damit lassen sich die Daten in der Form

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{D} & = & (\mathcal{DW}_j,\ j = 1,..,N_{DW},\ \ \mathcal{DF}_j,\ j = 1,..,N_{DF},\ \ (x_0, y_0)) \\
\mathcal{K}_i & = & (\mathcal{K}_i\mathcal{W}_j,\ j = 1,..,N_{K_iW},\ \mathcal{K}_i\mathcal{F}_j,\ j = 1,..,N_{K_iF},\ (x_i, y_i))\,,\ i = 1,..,N_K \\
\mathcal{S} & = & (\mathcal{SW}_j,\ j = 1,..,N_{SW},\ \ \mathcal{SF}_j,\ j = 1,..,N_{SF})
\end{array}$$

darstellen. Dabei beschreiben $\mathcal{DW}_j$ und $\mathcal{DF}_j$ die im Depot vorhandenen Waren-Mengen bzw. Fahrzeuge, $\mathcal{K}_i\mathcal{W}_j$ und $\mathcal{K}_i\mathcal{F}_j$ die vom Kunden $\mathcal{K}_i$ bestellten Waren bzw. ausgeschlossenen Fahrzeug-Typen sowie $\mathcal{SW}_j$ und $\mathcal{SF}_j$ die vorkommenden Fahrzeug-Typen und Warten-Sorten. Mit Hilfe der Bezeichnungen

$$\begin{array}{rcl}
S & - & \text{Waren-Sorte bzw. Fahrzeug-Klasse} \\
N & - & \text{Anzahl (an Waren, Fahrzeugen)} \\
Z & - & \text{Zeitfenster, bestehend aus einem oder mehreren Zeitfenstern} \\
 & & Z = ([b_i, e_i],\ i = 1, .., n_Z) \text{ mit } e_i < b_{i+1} \\
P & - & \text{Priorität der Benutzung eines Fahrzeugs} \\
G & - & \text{Waren-Gewicht} \\
V & - & \text{Waren-Größe als Volumen } V \text{ oder Länge, Breite, Höhe } (l, b, h) \\
G_f & - & \text{Fahrzeug-Gewicht} \\
V_f & - & \text{Fahrzeug-Größe als Länge, Breite, Höhe } (l, b, h) \\
l & - & \text{Ladezeit zum Entladen der Waren pro Einheit} \\
v & - & \text{fahrzeugspezifische maximale Durchschnittsgeschwindigkeit} \\
C & - & \text{fahrzeugspezifische durchschnittliche Kosten pro Wegeinheit} \\
 & & \text{(z.B. durchschnittlicher Kraftstoffverbrauch)}
\end{array}$$

lassen sich die einzelnen Datensätze folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathcal{DW}_j & = & (S, N) \quad \text{bzw.} \quad (S, N(t)) & \mathcal{DF}_j & = & (S, N, Z, P) \\
\mathcal{K}_i\mathcal{W}_j & = & (S, N, Z) & \mathcal{K}_i\mathcal{F}_j & = & (S) \\
\mathcal{SW}_j & = & (G, V, l) & \mathcal{SF}_j & = & (Gf, Vf, G, V, v, C)
\end{array}$$

Das bedeutet, $\mathcal{DW}_j$ enthält (Nummer der) Waren-Sorte und Anzahl bzw. Menge einer im Depot vorhandenen Ware, $\mathcal{DF}_j$ (Nummer des) Fahrzeug-Typ(s), Anzahl der Fahrzeuge dieser Art, die Zeitfenster, innerhalb derer das Fahrzeug zur Verfügung steht und Priorität der Benutzung des Fahrzeugs und für im Depot vorhandene Fahrzeuge. $\mathcal{K}_i\mathcal{W}_j$ enthält Sorte und Anzahl bzw. Menge einer vom Kunden $\mathcal{K}_i$ bestellten Ware sowie die Zeitfenster, innerhalb derer die Ware geliefert werden soll, $\mathcal{K}_i\mathcal{F}_j$ einen der Fahrzeug-Typen, mit denen der Kunde $\mathcal{K}_i$ nicht beliefert werden kann. $\mathcal{SW}_j$ enthält Gewicht, Volumen und Entlade-Zeit für eine Einheit einer Waren-Sorte, während $\mathcal{SF}_j$ für einen Fahrzeug-Typ Gewicht und Volumen (bzw. Länge, Breite, Höhe) des Fahrzeugs, Gewicht und Volumen (bzw. Länge, Breite, Höhe) der Zuladung sowie durchschnittliche Geschwindigkeit und die Kosten pro Wegeinheit angibt.

Die zeitabhängige Warenmenge $N(t)$ wird in Form von Wertepaaren (t_j, N_j), $j = 1, .., N_{DW,i}$ angegeben, die besagen, daß in der Zeit von t_j bis t_{j+1} eine Warenmenge N_j vorhanden ist. Für $t \in [t_1, t_{N_{DW,i}})$ sei dann

$$N(t) \ = \ N_j \quad \text{falls} \quad t \in [t_j, t_{j+1})$$

Die Waren-Bestellungen der Kunden $\mathcal{K}_i\mathcal{W}_j$, $i = 1, .., N_K$, $j = 1, .., N_{K_iW}$ können als Menge $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i,\ i = 1, .., N_A\}$ geschrieben werden, während sich die im Lager vorhandenen Fahrzeuge in eine Menge von Tour-Fahrzeugen $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i,\ i = 1, .., N_F\}$ aufteilen lassen. Dabei werden jedem Fahrzeug, daß innerhalb von n Zeitfenstern zur Verfügung steht, n Tour-Fahrzeuge zugeordnet, von denen jedes in einem der n Zeitfenster zur Verfügung steht. Die Datensätze besitzen die Form:

$$\mathcal{A}_i \ = \ (K, S, N, Z) \qquad \mathcal{F}_i \ = \ (F, S, Z, P)$$

Das bedeutet, $\mathcal{A}_i$ enthält die Nummer des Kunden, Sorte und Anzahl bzw. Menge der vom Kunden bestellten Ware sowie die Zeitfenster, innerhalb derer die Ware geliefert werden soll, $\mathcal{F}_i$ enthält die Nummer des Fahrzeugs aus $\mathcal{DF}_j$, den Fahrzeug-Typ, das Zeitfenster, innerhalb derer das Fahrzeug zur Verfügung steht und die Priorität der Benutzung des Fahrzeugs.

Im folgenden soll für einen Datensatz $\mathcal{S}$ der Form $(.., U, ..)$ das Element U mit $U(\mathcal{S})$ bezeichnet werden. Außerdem sei $n(Z)$ die Anzahl der Zeitfenster von Z. Damit gilt

$$N_A = \sum_{i=1}^{N_K} N_{K_i W} \ , \quad N_F = \sum_{i=1}^{N_{DF}} N\left(\mathcal{DF}_j\right) \ n\left(Z\left(\mathcal{DF}_j\right)\right)$$

Die für einen Auftrag $\mathcal{A}_i$ benötigten Fahrzeugkapazitäten an Volumen bzw. Gewicht sowie der zum Entladen benötigte Zeitaufwand werden über

$$\begin{aligned} V(\mathcal{A}_i) &= N(\mathcal{A}_i)\, V(\mathcal{SW}_k) \\ G(\mathcal{A}_i) &= N(\mathcal{A}_i)\, G(\mathcal{SW}_k) \\ l(\mathcal{A}_i) &= N(\mathcal{A}_i)\, l(\mathcal{SW}_k) \ \text{ mit } \ k = S(\mathcal{A}_i) \end{aligned}$$

definiert. Entsprechend sei für Tour-Fahrzeuge $\mathcal{F}_i$ das transportierbare Volumen bzw. Gewicht

$$\begin{aligned} M(\mathcal{F}_i) &= V(\mathcal{SF}_k) \\ M(\mathcal{F}_i) &= G(\mathcal{SF}_k) \ \text{ mit } \ k = S(\mathcal{F}_i) \end{aligned}$$

3 Bezeichnungen und Problem-Formulierung

Wesentlich für die Aufstellung von Touren sind die örtlichen und zeitlichen Entfernungen, d.h. die Weglänge bzw. benötigte Zeit zwischen den Kunden bzw. Aufträgen. Für zwei Kunden $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_j$ und eine Fahrzeug-Klasse S soll mit

$$d(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j, S) \ \text{ bzw. } \ d(\mathcal{D}, \mathcal{K}_j, S)$$

die Länge des kürzesten Weges im vorgegeben Straßennetz von Kunde $\mathcal{K}_i$ zu Kunde $\mathcal{K}_j$ bzw. vom Depot zu Kunde $\mathcal{K}_j$ bezeichnet werden auf dem alle Restriktionen hinsichtlich Größe V_f und Gewicht G_f der Fahrzeugklasse S erfüllt sind. Wir setzen voraus, daß jeder Straßen-Abschnitt einer bestimmten Straßen-Klasse zugeordnet wird, auf der eine Maximal- oder Richtgeschwindigkeit vorgegeben ist. Mit

$$t(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j, S) \ \text{ bzw. } \ t(\mathcal{D}, \mathcal{K}_j, S)$$

wird dann die Zeit bezeichnet, die ein Fahrzeug der Klasse S für diesen Weg benötigt, wobei davon ausgegangen wird, daß sich das Fahrzeug auf jedem Straßen-Abschnitt mit dem Maximum aus der entsprechenden Maximal- oder Richtgeschwindigkeit und der maximalen Durchschnittsgeschwindigkeit v der entspechenden Fahrzeug-Klasse bewegt. Da wir bei der Tourenplanung Aufträge statt Kunden betrachten, setzen wir zur Vereinfachung $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, S) := d(K(\mathcal{A}_i), K(\mathcal{A}_j), S)$ und $t(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, S) := t(K(\mathcal{A}_i), K(\mathcal{A}_j), S)$ bzw. $d(D, \mathcal{A}_j, S) := d(D, K(\mathcal{A}_j), S)$ und $t(D, \mathcal{A}_j, S) := t(D, K(\mathcal{A}_j), S)$. Für den Fall, daß das Fahrzeug noch nicht festgelegt ist, das bestimmte Aufträge erfüllen soll, wird eine Referenz-Fahrzeug-Klasse S_r festgelegt, auf die sich die Abstände beziehen und der Parameter S weggelassen, d.h.

$$d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, S_r), \ \ t(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = t(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, S_r) \ ,$$

$$d(D, \mathcal{A}_j) = d(D, \mathcal{A}_j, S_r), \ \ t(D, \mathcal{A}_j) = t(D, \mathcal{A}_j, S_r) \ .$$

Touren sollen im folgenden in der Form

$$\mathcal{T} = (F, W, ZT)$$

angegeben werden, wobei

F – die Nummer des Tour-Fahrzeugs ist, das die Tour absolviert,
W = $(k_1, k_2, ..., k_n)$ den Weg der Tour in Form der nacheinander abzuarbeitenden Aufträge $\mathcal{A}_{k_1}$, $\mathcal{A}_{k_2}$,...,$\mathcal{A}_{k_n}$ beschreibt,
ZT – $((b_i, e_i, w_i),\ i = 0, ..., n)$ die Zeit-Tabelle darstellt, bestehend aus

- b_i, e_i – Ankunft und Abfahrt am/vom Auftrag $\mathcal{A}_{k_i}$ (bzw. bei dem entsprechenden Kunden $K(\mathcal{A}_{k_i})$),
- b_0, e_0 – Ankunft und Abfahrt am/vom Depot,
- w_i, w_0 – Wartezeit zwischen Ankunft und Beginn des nächsten Zeitfensters beim Auftrag $\mathcal{A}_{k_i}$ bzw. die Restzeit des Tour-Fahrzeugs F zwischen Ankunft b_0 am Depot und Ende des Zeitfensters von F.

Im folgenden soll als Weg einer Tour $\mathcal{T}$ mit $W(\mathcal{T}) = (k_1, k_2, ..., k_n)$ die Kette $\mathcal{D}\mathcal{A}_{k_1}\mathcal{A}_{k_2}, ..., \mathcal{A}_{k_n}\mathcal{D}$ bezeichnet werden.Wir bezeichnen außerdem mit

$\mathcal{A}(\mathcal{T})$ – die Menge der Aufträge, die von $\mathcal{T}$ erfüllt werden,
$w(\mathcal{T})$ – die Gesamtwartezeit der Tour $\mathcal{T}$,
$t(\mathcal{T})$ – die Gesamtfahrzeit der Tour $\mathcal{T}$,
$d(\mathcal{T})$ – die Weglänge der Tour $\mathcal{T}$,
$\overline{v}(\mathcal{T})$ – die Durchschnittsgeschwindigkeit der Tour $\mathcal{T}$ während der Fahrt,

Mit den obigen Bezeichnungen und $b_{n+1} := b_0$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{D}$, $\mathcal{A}_{k_{n+1}} := \mathcal{D}$, $S_F := S(\mathcal{F}_F)$ gilt also

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{T}) &= \{\mathcal{A}_{k_1}, \mathcal{A}_{k_2}, .., \mathcal{A}_{k_n}\}\ , \\
w(\mathcal{T}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i\ , & t(\mathcal{T}) &= \sum_{i=0}^{n} (b_{i+1} - e_i)\ , \\
d(\mathcal{T}) &= \sum_{i=0}^{n} d(\mathcal{A}_{k_i}, \mathcal{A}_{k_{i+1}}, S_F)\ , & \overline{v}(\mathcal{T}) &= \frac{d(\mathcal{T})}{t_f(\mathcal{T})}\ .
\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Bedingungen an einen zulässigen Touren-Plan $\mathcal{TP} = (\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_{N_T})$ mit $\mathcal{T}_i = (F_i, W_i, ZT_i)$ folgendermaßen definieren:

- Jedes Tour-Fahrzeug absolviert höchstens eine Tour und jeder Auftrag kommt in genau einer Tour vor, d.h.

$$F_{i_1} \neq F_{i_2}\ , \qquad \mathcal{A}(\mathcal{T}_{i_1}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{T}_{i_2}) = \emptyset \quad \text{für} \quad i_1 \neq i_2$$
$$\bigcup_{i=1}^{N_T} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i) = \mathcal{A}$$

- In jeder Tour müssen alle auftetenden Zeitrestriktionen eingehalten werden. Sind für eine Tour $\mathcal{T}_i$ mit $W_i = (k_1, ..., k_n)$ das Zeitfenster des Tour-Fahrzeugs $Z(\mathcal{F}_{F_i}) = [b^F, e^F]$ und die Zeitfenster der Aufträge $\mathcal{A}_{k_j}$, in denen diese bearbeitet werden, mit $[b_j^A, e_j^A]$ bezeichnet, so gilt

$$b^F \leq e_0\ ,\ \ b_0 \leq e^F \ \text{ und }\ b_j^A \leq b_i + w_i\ ,\ \ e_j \leq e_j^A \ \text{ für }\ j = 1, .., n$$

sowie

$$\begin{aligned}
b_{j+1} - e_j &\geq t\Big(\mathcal{A}_{k_j}, \mathcal{A}_{k_{j+1}}, S_j\Big) \\
e_j - (b_j + w_j) &\geq t\Big(\mathcal{A}_{k_j}\Big)
\end{aligned}$$

für $j = 0, ..., n+1$, wenn $b_{n+1} := b_0$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{D}$, $\mathcal{A}_{k_{n+1}} := \mathcal{D}$, $S_j := S(\mathcal{F}_{F_j})$ gesetzt wird.

- Für alle eingesetzten Tour-Fahrzeuge müssen die Restriktionen hinsichtlich Beladung und Ausschluß von Fahrzeug-Typen durch Kunden eingehalten werden, d.h.

$$\sum_{k:\, \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_j)} V(\mathcal{A}_k) \leq V(\mathcal{F}_{F_j}), \qquad \sum_{k:\, \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_j)} G(\mathcal{A}_k) \leq G(\mathcal{F}_{F_j})$$

$$S(\mathcal{F}_{F_j}) \neq S(\mathcal{K}_l \mathcal{F}_r) \text{ für alle } l = K(\mathcal{A}_k) \text{ mit } \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_j) \text{ und } r = 1, ..., N_{K_l,F}$$

  für $j = 0, ..., n+1$.

- Zu Beginn jeder Tour müssen im Lager die für die Aufträge der Tour benötigten Waren vorhanden sein. Zu jedem Zeitpunkt t muß also gelten:

$$\sum_{i:\, e_0(\mathcal{T}_i) \leq t} \quad \sum_{j:\, \mathcal{A}_j \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_i), S(\mathcal{A}_j) = r} N(\mathcal{A}_j) \;\leq\; N(t)(\mathcal{DW}_r)$$

  für $r = 1, ..., N_{DW}$.

4 Zuordnung der Aufträge zu Clustern

Zunächst werden aus den Aufträgen Cluster gebildet, die jeweils örtlich und zeitlich nahe beieinander liegende Aufträge beinhalten sollen und durch eine maximale Auftragsmenge beschränkt sein können. Die Auftragsmenge M kann dabei als Volumen oder als Gewicht verstanden werden, d.h.

$$M(\mathcal{A}_i) = V(\mathcal{A}_i) \text{ bzw. } M(\mathcal{A}_i) = G(\mathcal{A}_i)$$

Entsprechend wird für Tour-Fahrzeuge die transportierbare Auftragsmenge bzw. Transportkapazität über

$$M(\mathcal{F}_i) = V(\mathcal{F}_i) \text{ bzw. } M(\mathcal{F}_i) = G(\mathcal{F}_i)$$

definiert.

Die Festlegung der Cluster wird also von folgenden Parametern bestimmt:

- dem maximalen örtlichen Abstand R_c,
- der maximalen Wartezeit zwischen zwei Aufträgen T_c,
- der maximalen Auftragsanzahl N_c,
- der maximalen Auftragsmenge M_c.

Die Wartezeit zwischen zwei Aufträgen $\mathcal{A}_i$ und $\mathcal{A}_j$ ist dabei

$w(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, S)$	–	die minimale Zeit, die ein Fahrzeug der Klasse S nach Ankunft bei dem zu $\mathcal{A}_j$ gehörigen Kunden bis zum Beginn des nächsten Zeitfensters in $Z(\mathcal{A}_j)$ warten muß, wenn es innerhalb eines Zeitfensters von $Z(\mathcal{A}_i)$ vom zu $\mathcal{A}_i$ gehörigen Kunden abgefahren ist (für $S = S_r$ soll S wieder weggelassen werden).

Der erste Cluster $\mathcal{C}_1$ wird nun folgendermaßen gebildet:

Wir suchen einen Auftrag $\mathcal{A}_k$ mit maximalem $d(D, \mathcal{A}_k)$, d.h. einen Auftrag des Kunden mit dem größten örtlichen Abstand vom Depot, und bilden

$$\mathcal{C}'_1 \ := \ \{\mathcal{A}_j \in \mathcal{A} : \ d(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k) < R_c\} \ .$$

Bezeichnet man mit $\mathcal{K}'_1$ die Menge aller Kunden von Aufträgen in $\mathcal{C}'_1$, also $\mathcal{K}'_1 := \{K(\mathcal{A}_j) : \mathcal{A}_j \in \mathcal{C}'_1\}$, so wird folgendes Verfahren angewendet:

Wir ordnen alle Aufträge $\mathcal{A}_i \in \mathcal{C}'_1$ nach der Größe von $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$, beginnend mit dem kleinsten, und nehmen $\mathcal{A}_i$ zu $\mathcal{C}_1$ hinzu, wenn für alle Aufträge $\mathcal{A}_j$, die bereits zu $\mathcal{C}_1$ gehören,

$$d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) < R_c \ , \ \ \min\left(w(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j), w(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i)\right) < T_c$$

gilt, die Anzahl aller bisher zu $\mathcal{C}_1$ gehörenden Aufträge und $\mathcal{A}_i$ den Wert N_c nicht übersteigt und die Auftragsmenge aller bisher zu $\mathcal{C}_1$ gehörenden Aufträge und von $\mathcal{A}_i$ den Wert M_c nicht übersteigt, d.h.

$$1 + \sum_{j:\, \mathcal{A}_j \in \mathcal{C}_1} 1 \ \leq \ N_c \ , \ \ M(\mathcal{A}_i) + \sum_{j:\, \mathcal{A}_j \in \mathcal{C}_1} M(\mathcal{A}_j) \ \leq \ M_c \ .$$

Zur Bildung des n-ten Clusters $\mathcal{C}_n$ wird zuerst der Auftrag $\mathcal{A}_l$ mit maximalem Abstand $d(D, \mathcal{A}_l)$ unter allen

$$\mathcal{A}_l \in \mathcal{A} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{C}_k$$

gesucht. Alle weiteren Aufträge in $\mathcal{C}_n$ werden dann wie bei $\mathcal{C}_1$ aus

$$\mathcal{C}'_n \ := \ \{\mathcal{A}_j \in \mathcal{A} : \ d(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_l) < R_c\}$$

ausgewählt.

Die Bildung der Cluster wird beendet, sobald jeder Auftrag mindestens einem Cluster zugeordnet ist. Die Anzahl der so enstandenen Cluster sei mit N_C bezeichnet.

5 Zuordnung der Tour-Fahrzeuge zu den Clustern

Für alle Aufträge und Tour-Fahrzeuge wird zunächst untersucht, ob das Tour-Fahrzeug diesen Auftrag in einer einfachen Tour, d.h. einer Tour mit nur einem Auftrag erfüllen kann und, wenn ja, wieviel Zeit es dafür benötigt. Sei also

$\mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$ – die Menge aller Aufträge $\mathcal{A}_k \in \mathcal{C}_i$, die von Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_j$ unter Einhaltung aller Restriktionen und Zeitfenster in einer einfachen Tour $D\mathcal{A}_kD$ erfüllt werden können und für die die Fahrzeug-Klasse $\mathcal{F}_j$ nicht von dem zu $\mathcal{A}_k$ gehörenden Kunden von der Belieferung ausgeschlossen wurde, d.h. $S(\mathcal{F}_j) \neq S(\mathcal{K}_l\mathcal{F}_r)$ für $l = K(\mathcal{A}_k)$ und $r = 1, ..., N_{K_lF}$.

und für $\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$ sei

$t(\mathcal{A}_k, \mathcal{F}_j)$ – die minimale Zeit, die das Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_j$ für eine einfache Tour $D\mathcal{A}_kD$ benötigt.

Zunächst soll eine Vorauswahl $\mathcal{F}(\mathcal{C}_i)$ von möglichen Tour-Fahrzeugen $\mathcal{F}_j$ für einen Cluster

$\mathcal{C}_i$ anhand einer vorgegebenen Mindestauslastung α, $(0 < \alpha < 1)$ erfolgen, die sich auf das Verhältnis der Summe aller Auftragsmengen von Aufträgen in $\mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$ zur Transportkapazität von $\mathcal{F}_j$ bezieht:

$$\mathcal{F}_j \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_i) \;\text{ wenn }\; M_{ij} \;:=\; \sum_{k:\,\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)} M(\mathcal{A}_k) \;\geq\; \alpha\, M(\mathcal{F}_j)\,.$$

Im folgenden soll auf der Basis einer Bewertung b_{ij} der Zuordnung eines Tour-Fahrzeugs $\mathcal{F}_j$ zu einem Cluster $\mathcal{C}_i$, die angeben soll, wie gut $\mathcal{F}_j$ zur Erfüllung von Aufträgen in $\mathcal{C}_i$ geeignet ist, jedem Cluster genau ein Tour-Fahrzeug zugeordnet werden. dabei wird vorausgesetzt, daß noch mindestens so viele Tour-Fahrzeuge wie die Anzahl der Cluster vorhanden sind. In die Bewertung soll einerseits die Auslastung M_{ij} von $\mathcal{F}_j$ und andererseits das Verhältnis der Länge des Zeitfensters von $\mathcal{F}_j$ zur durchschnittlichen Dauer $\overline{t}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$ der Aufträge $\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$ eingehen. Sei also

$$\overline{t}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j) \;:=\; \frac{\displaystyle\sum_{k:\,\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)} t(\mathcal{A}_k, \mathcal{F}_j)}{|\mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)|}$$

mit $|\mathcal{M}|$ als Anzahl der Elemente einer Menge $\mathcal{M}$ und

$t(\mathcal{F}_j)$ – die Länge des Zeitfensters $Z(\mathcal{F}_j)$.

Dann soll zunächst eine Bewertung b'_{ij} von $\mathcal{F}_j$ zu $\mathcal{C}_i$ über

$$b'_{ij} \;:=\; \min\left(M_{ij}, M(\mathcal{F}_j)\right)\, \frac{t(\mathcal{F}_j)}{\overline{t}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)}\; p\,(\mathcal{F}_j)$$

definiert werden. Die Summe aller Bewertungen der Zuordnungen von Tour-Fahrzeugen zu einem Cluster $\mathcal{C}_i$ soll jedoch dem Produkt aus Gesamtauftragsmenge von Aufträgen in $\mathcal{C}_i$

$$M(\mathcal{C}_i) \;:=\; \sum_{k:\,\mathcal{A}_k \in \mathcal{C}_i} M(\mathcal{A}_k)$$

und dem durchschnittlichen Abstand der zu $\mathcal{A}_k \in \mathcal{C}_i$ gehörenden Kunden vom Depot

$$\overline{d}(D, \mathcal{C}_i) \;:=\; \frac{\displaystyle\sum_{k:\,\mathcal{A}_k \in \mathcal{C}_i} d(D, \mathcal{A}_k)}{|\mathcal{C}_i|}$$

sein. Entsprechend werden die eigentlichen Bewertungen b_{ij} von $\mathcal{F}_j$ zu $\mathcal{C}_i$ über

$$b_{ij} \;:=\; \frac{b'_{ij}}{\displaystyle\sum_{l:\,\mathcal{F}_l \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_i)} b'_{il}}\; M(\mathcal{C}_i)\, \overline{d}(D, \mathcal{C}_i)$$

definiert. Jedem Cluster $\mathcal{C}_i$ soll nun genau ein Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_j$ zugeordnet, so daß die Summe der zugehörigen Bewertungen b_{ij} maximal wird. Dieses Zuordnungsproblem läßt sich auf ein einfaches Transportproblem zurückführen, indem man einen Cluster $\mathcal{C}_0$ einführt, dem alle restlichen Tour-Fahrzeuge zugeordnet werden. Definiert man die Kosten c_{ij} der Zuordnung von $\mathcal{F}_j$ zu $\mathcal{C}_i$ über

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} -b_{ij} & \text{wenn } \mathcal{F}_j \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_i) \\ 0 & \text{wenn } \mathcal{F}_j \notin \mathcal{F}(\mathcal{C}_i) \end{cases} \quad \text{für } i = 1, .., N_C \\ c_{0j} &= \min_{i=1,..,N_C} c_{ij} \end{aligned}$$

für $j = 1, .., N_F$, so läßt sich das zu lösende Transportproblem in der Form

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i=0}^{N_C} \sum_{j=1}^{N_F} c_{ij}\, x_{ij} \quad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0 \quad \text{für} \quad i = 0, .., N_C,\ j = 1, .., N_F \\ \sum_{j=1}^{N_F} x_{ij} &= \begin{cases} N_F - N_C & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{für } i = 1, .., N_C \end{cases} \\ \sum_{i=0}^{N_C} x_{ij} &= 1 \quad \text{für} \quad j = 1, .., N_F\,. \end{aligned}$$

Für $x_{ij} = 1$ wird dann dem Cluster $\mathcal{C}_i$ das Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_j$ zugeordnet.

6 Aufstellen der Touren

Das Aufstellen der Touren erfolgt mit einem parallelen Savings-Algorithmus 2. Ordnung, d.h. es wird gleichzeitig zu allen Clustern $\mathcal{C}_i$, in denen sich Aufträge befinden, die noch nicht einer Tour zugeordnet sind, eine (aktuelle) Tour $\mathcal{T}_i$ mit Aufträgen aus $\mathcal{C}_i$ gebildet, die vom (aktuell) zugeordneten Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_j$ $(j = j(i))$ absolviert wird. Aktuell bedeutet in dem Zusammenhang, daß zu der "aktuellen" Tour mit dem "aktuellen" Tour-Fahrzeug so lange Aufträge hinzugefügt werden, bis eine gewisse Auslastung des Fahrzeugs erreicht ist. Danach gilt die Tour als abgeschlossen und es wird dem Cluster ein neues (dann aktuelles) Tour-Fahrzeug zugeordnet und eine neue (dann aktuelles) Tour begonnen. Der Algorithmus kann als Savings-Algorithmus 2. Ordnung in dem Sinne bezeichnet werden, daß zu einer aktuellen Tour jeweils an beliebiger Stelle der Reihenfolge der bisher zugehörigen Aufträge ein neuer Auftrag hinzugefügt werden kann, wobei die Auswahl dieses Auftrags nach möglichst großer Einsparung an Weglänge gegenüber einer einfachen Tour mit diesem Auftrag und nach möglichst geringem Zuwachs an Wartezeit vor Beginn der Zeitfenster der Kunden erfolgt. Sobald ein Auftrag einer Tour zugeordnet wurde, wird er aus allen Clustern, zu denen er gehörte, gelöscht bzw. als erfüllt markiert. In der Zeittabelle ZT der Touren werden jeweils die frühest möglichen Zeiten entsprechend den Zeitfenstern von Tour-Fahrzeug und Aufträgen sowie unter Berücksichtigung der Fahrzeit zwischen Depot und Kunden für die entsprechende Fahrzeugklasse eingetragen.

Zu Beginn des Algorithmus wird dann für jeden Cluster $\mathcal{C}_i$ in der Reihenfolge $i = 1, .., N_C$ eine Tour $\mathcal{T}_i^{(0)}$ für das Tour-Fahrzeug $F(\mathcal{T}_i^{(0)}) = \mathcal{F}_j$ mit dem Weg $W(\mathcal{T}_i^{(0)}) = (k)$ aufgestellt, wobei $\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$ der bzw. ein Auftrag mit minimaler Zeit $t(\mathcal{A}_k, \mathcal{F}_j)$ ist.

Danach wird in jedem Schritt zu genau einer der Touren ein Auftrag hinzugefügt. Wir bezeichnen die nach dem n-ten Schritt dem Cluster $\mathcal{C}_i$ zugeordnete Tour mit $\mathcal{T}_i^{(n)}$, wobei einige dieser Touren auch "leer" sein können, wenn im zugehörigen Cluster keine Aufträge mehr vorhanden sind. Im $(n+1)$-ten Schritt wird nun für jede (nicht leere) Tour $\mathcal{T}_i^{(n)}$ und alle Paare aufeinanderfolgender Punkte des Weges von $\mathcal{T}_i^{(n)}$ der Form $(D, \mathcal{A}_l)$, $(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l)$ bzw. $(\mathcal{A}_k, D)$ sowie alle (noch nicht zugeordneten) Aufträge $\mathcal{A}_h \in \mathcal{C}_i$ untersucht, ob sich $\mathcal{A}_h$ zwischen D und $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_k$ und $\mathcal{A}_l$ bzw. $\mathcal{A}_k$ und D einfügen läßt. Es wird überprüft, ob

- der Auftrag $\mathcal{A}_h$ vom Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_j$ ausgeführt werden kann, d.h.

$$\mathcal{A}_h \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_j)$$

- die für $\mathcal{A}_h$ benötigte Ware der Sorte $S(\mathcal{A}_h)$ in der erforderlichen Menge $N(\mathcal{A}_h)$ ab dem Startzeitpunkt der Tour $\mathcal{T}_i^{(n)}$ im Depot verfügbar ist, d.h.

$$N(t)(\mathcal{DW}_m) \;\geq\; N(\mathcal{A}_h) \;\text{ für }\; m \;\text{ so, daß }\; S(\mathcal{DW}_m) \;=\; S(\mathcal{A}_h) \;\text{ und }\; t \geq e_0(\mathcal{T}_i^{(n)})$$

- die Transportkapazität von $\mathcal{F}_j$ ausreicht, um zu den Waren aller bisher zu $\mathcal{T}_i^{(n)}$ gehörenden Aufträge noch die von $\mathcal{A}_h$ aufzunehmen, d.h.

$$\sum_{r:\,\mathcal{A}_r\in\mathcal{A}(\mathcal{T}_i^{(n)})} V(\mathcal{A}_r)+V(\mathcal{A}_h) \;\leq\; V(\mathcal{F}_j)\;, \qquad \sum_{r:\,\mathcal{A}_r\in\mathcal{A}(\mathcal{T}_i^{(n)})} G(\mathcal{A}_r)+G(\mathcal{A}_h) \;\leq\; G(\mathcal{F}_j)$$

- nach Aufstellen der neuen Tour mit eingefügtem Auftrag $\mathcal{A}_h$ die Einhaltung der Zeitfenster aller Aufträge möglich ist und die Ankunft im Depot innerhalb des Zeitfensters von $\mathcal{F}_j$ liegt. Dazu wird die zu $\mathcal{T}_i^{(n)}$ gehörige Zeittabelle ab $\mathcal{A}_h$ neu berechnet. Dabei ergibt sich bei $W(\mathcal{T}_i^{(n)}) = (k_1,...,k_n)$ und $Z(\mathcal{F}_j) = [b^F, e^F]$ als Start-Zeitpunkt der Tour $e_0 = b^F$ und für $r = 1,...,n$

$$b_r = e_{r-1} + t(\mathcal{A}_{k_{r-1}}, \mathcal{A}_{k_r}, S(\mathcal{F}_j))\;.$$

  Dieser Zeitpunkt muß in oder vor einem Zeitfenster $[b_r^A, e_r^A]$ von $Z(\mathcal{A}_{k_r})$ der Länge $e_r^A - b_r^A \geq t(\mathcal{A}_{k_r})$ liegen, für das außerdem $e_r^A - b_r \geq t(\mathcal{A}_{k_r})$ gilt. Dann ist die Wartezeit $w_r = 0$, falls $b_r \in [b_r^A, e_r^A]$ bzw. $w_r = b_r^A - b_r$ falls $b_r < b_r^A$. Der Abfahrts-Zeitpunkt berechnet sich als

$$e_r = b_r + w_r + l(\mathcal{A}_{k_r})\;.$$

  Schließlich ergibt sich $b_0 = e_n + t(\mathcal{A}_{k_n}, D, S(\mathcal{F}_j))$ und es muß $w_0 := e^F - b_0 \geq 0$ gelten.

Ist dies der Fall, so kann das zugehörige Saving berechnet werden:

Wir bezeichnen zunächst für zwei Aufträge $\mathcal{A}_k$ und $\mathcal{A}_l$ mit d_{kl} die Einsparung der Weglänge, die man erreicht, wenn zwei Touren mit den Wegen $D\mathcal{A}_kD$ und $D\mathcal{A}_l..D$ (oder $D\mathcal{A}_kD$ und $D..\mathcal{A}_lD$) zu einer Tour $D\mathcal{A}_k\mathcal{A}_l..D$ (oder $D..\mathcal{A}_l\mathcal{A}_kD$) zusammengefaßt werden. Identifiziert man zur Vereinfachung D mit $\mathcal{A}_0$ und setzt $S_j := S(\mathcal{F}_j)$, so gilt

$$d_{kl} \;=\; d(D,\mathcal{A}_k,S_j) + d(D,\mathcal{A}_l,S_j) - d(\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_l,S_j)\;,\;\; d_{k0} = d_{0k} = 0\;.$$

Für zwei Touren mit den Wegen $D..\mathcal{A}_k\mathcal{A}_l..D$ und $D\mathcal{A}_hD$ soll d_{khl} die Einsparung der Weglängen sein, die man erreicht, wenn man diese zwei Touren zu einer Tour mit dem Weg $D..\mathcal{A}_k\mathcal{A}_h\mathcal{A}_l..D$ zusammenfaßt. Offensichtlich gilt

$$d_{khl} \;=\; d_{kh} + d_{hl} - d_{kl}\;,\;\; d_{0hl} \;=\; d_{hl}\;,\;\; d_{kh0} \;=\; d_{kh}\;.$$

Für einen Parameter $\gamma > 0$ sei

$$\begin{aligned} d_{kl}(\gamma) &:= d(D,\mathcal{A}_k,S_j) + d(D,\mathcal{A}_l,S_j) - \gamma\, d(\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_l,S_j)\;,\;\; d_{k0}(\gamma) = d_{0k}(\gamma) = 0 \\ d_{khl}(\gamma) &:= d_{kh}(\gamma) + d_{hl}(\gamma) - d_{kl}(\gamma) \\ &= 2\,d(D,\mathcal{A}_h,S_j)\; - \gamma\,[d(\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_h,S_j) + d(\mathcal{A}_h,\mathcal{A}_l,S_j) - d(\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_l,S_j)]\;. \end{aligned}$$

Wir nennen die d_{kl} auch (”örtliches”) Savings 1. Ordnung, die d_{khl} als (”örtliches”) Savings 2. Ordnung und γ den Savings-Parameter. Für unser Tourenproblem können wir aufgrund der Clusterung für jeden Cluster $\mathcal{C}_i$ einen eigenen Savings-Parameter γ_i wählen, der für die Lage der den Aufträgen in $\mathcal{C}_i$ zugehörigen Kunden im Verhältnis zur Lage des Depots günstig ist. Zum Beispiel kann man $\gamma_i = 2\overline{d}(D, \mathcal{C}_i)/R_C$ setzen.

Neben dem "örtlichen" Saving soll auch ein "zeitliches" Saving, bestehend aus der Einsparung an Wartezeit, in die Beurteilung der Einfügung eines Auftrags in eine bestehende Tour eingehen. Mit einem Wichtungsfaktor $\beta > 0$ für den zeitlichen Anteil soll das gesamte Saving $s_{khl}^{(i)}$ bei Enfügen von $\mathcal{A}_h$ in die Tour $\mathcal{T}_i^{(n)}$ zwischen $\mathcal{A}_k$ und $\mathcal{A}_l$ über

$$s_{khl}^{(i)} \;:=\; \Big[\, d_{khl}(\gamma_i) \;+\; \beta \left(w(\mathcal{T}_i^{(n)}) \;-\; w(\mathcal{T}_i^{'(n+1)}) \right) \, \overline{v}(\mathcal{T}_i^{(n)}) \,\Big] \; C_j$$

mit $C_j = C(\mathcal{SF}_m)$ für $m = S(\mathcal{TF}_j)$ definiert werden, wobei $\mathcal{T}_i^{'(n+1)}$ die Tour $\mathcal{T}_i^{(n)}$ mit eingefügtem Auftrag $\mathcal{A}_h$ ist.

Nach Ermittlung des größten Savings $s_{khl}^{(i)}$ wird der entsprechende Auftrag $\mathcal{A}_h$ zwischen $\mathcal{A}_k$ und $\mathcal{A}_l$ in die entsprechende Tour $\mathcal{T}_i^{(n)}$ eingefügt und aus allen Clustern, zu denen er gehörte, gelöscht (bzw. als erfüllt markiert). Die zu $\mathcal{T}_i^{(n)}$ gehörige Zeittabelle wird ab $\mathcal{A}_h$ wie bei der Überprüfung der Einfügbarkeit neu berechnet und die so entstandene Tour mit $\mathcal{T}_i^{(n+1)}$ bezeichnet. Die Warenmenge der Sorte $S(\mathcal{A}_h)$ im Depot wird um $Z(\mathcal{A}_h)$ ab dem Zeitpunkt $e_0(\mathcal{T}_i^{(n+1)})$ um $N(\mathcal{A}_h)$ reduziert, d.h. wenn für $m = S(\mathcal{A}_h)$ die verfügbare Warenmenge $N(t)(\mathcal{DW}_m)$ in Form der Wertepaaren (t_j, N_j), $j = 1, .., N_{DW,i}$ gegeben ist und der Startzeitpunkt der Tour $t_{s,i}$ im Intervall $[t_{j_o}, t_{j_o+1})$ liegt, so werden die Werte N_j für $j = j_o, .., N_{DW,i}$ um $N(\mathcal{A}_h)$ reduziert.

Unterschreitet nun die Auftragsmenge $M(\mathcal{C}_i)$ einen vorgegebenen Wert M_C' und gehört jeder Auftrag in $\mathcal{C}_i$ auch zu einem anderen Cluster, so können alle Aufträge aus $\mathcal{C}_i$ gelöscht und die Bearbeitung dieses Clusters abgeschlossen werden. Der Cluster wird sozusagen aufgelöst.

Wenn dies der Fall ist oder wenn das Verhältnis der Auftragsmenge der entstandenen Tour $\mathcal{T}_i^{(n+1)}$ zur Transportkapazität des zugehörigen Tour-Fahrzeugs $\mathcal{F}_j$ einen vorgegebenen Wert $\alpha' \in (0,1)$ überschreitet oder wenn die Differenz zwischen der Länge des Zeitfensters des Toufahrzeugs und der Gesamtdauer der Tour kleiner als eine vorgegebene minimale Dauer T_0 ist, d.h.

$$\sum_{k:\, \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_i^{(n+1)})} M(\mathcal{A}_k) \;>\; \alpha' \, M(\mathcal{F}_j) \quad \text{oder} \quad t(\mathcal{F}_j) \;-\; t(\mathcal{T}_i^{(n+1)}) \;<\; T_0\,,$$

so wird die Tour abgeschlossen. Die Dauer T_0 kann dabei als Minimum aller Zeiten $t(\mathcal{A}_k, \mathcal{F}_j)$ gesetzt werden, die für die Bearbeitung der noch nicht erfüllten Aufträge $\mathcal{A}_k$ (in allen Clustern) benötigt werden.

Sofern der Cluster $\mathcal{C}_i$ nicht aufgelöst ist, wird ihm nun ein neues Tour-Fahrzeug $\mathcal{F}_{j'}$ und eine einfache Tour mit dem Weg $D\mathcal{A}_k D$ zugeordnet, wobei $\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_{j'})$ der bzw. ein Auftrag mit minimaler Zeit $t(\mathcal{A}_k, \mathcal{F}_{j'})$ ist. Dazu wird der oben beschriebene Zuordnungsalgorithmus wiederholt, das heißt, für jeden Cluster wird ein neues Tour-Fahrzeug ausgewählt, aber danach nur dem Cluster $\mathcal{C}_i$ ein neues Tour-Fahrzeug zugeordnet. Ist die Anzahl der noch verfügbaren Tour-Fahrzeuge kleiner als die Anzahl der Cluster, in denen noch Aufträge sind, so wird eine gleiche Anzahl an Clustern ausgewählt und nur diesen wird jeweils ein Tour-Fahrzeug zugeordnet. Für diese Auswahl der Cluster werden die ausgesucht, für die die Auslastung der (bisher) zugeordneten Tour-Fahrzeuge am größten ist.

Diese Schritte der Ermittlung des größten Savings, der Zuordnung eines Auftrages zu einer Tour, der eventuellen Auflösung des Clusters, des eventuellen Abschlusses der Tour und der eventuellen Zuordnung eines neues Tour-Fahrzeugs zum bearbeiteten Cluster wird so oft wiederholt, bis alle Aufträge einer Tour zugeordnet sind oder keine Zuordnung mehr möglich ist.

Nach Aufstellung aller Touren können diese noch hinsichtlich auftretender Wartezeiten optimiert werden. Für eine Tour $\mathcal{T}$ mit dem Weg $W(\mathcal{T}) = (k_1, k_2, ..., k_n)$ soll mit e_i^A das Ende des Zeitfensters von $Z(\mathcal{A}_{k_i})$ bezeichnet werden, in dem der Auftrag erfüllt wird. Dann läßt sich die Ausführung um maximal $v_i^A := e_i^A - e_i$ zeitlich nach hinten verschieben. Ist nun $\mathcal{A}_{k_m}$ der erste Auftrag, bei dem eine Wartezeit $w_m > 0$ auftritt, so ergibt sich die maximale Verschiebbarkeit der ersten $m-1$ Aufträge als $v_m^T := \min_{j=1,..,m-1} v_j^A$. Für $v_m^T \leq w_m$ werden alle Zeiten der Zeittabelle $ZT(\mathcal{T})$ bis zur Ankunftszeit b_m um w_m nach hinten verschoben (bzw. vergrößert) und die Tourenoptimierung von $\mathcal{T}$ beendet, da keine weitere Verschiebung innerhalb der benutzten Zeitfenster möglich ist. Bei $v_m^T > w_m$ erfolgt die gleiche Verschiebung um w_m Danach wird ab $\mathcal{A}_{k_m}$ der nächste Auftrag mit positiver Wartezeit gesucht und ebenso verfahren. Die Tourenoptimierung von $\mathcal{T}$ endet, wenn entweder keine positive Wartezeit mehr auftritt oder keine weitere Verschiebung möglich ist.

7 Einflußgrößen und Modifikationen

Der vorgestellte Algorithmus wird in den einzelnen Phasen durch verschiedene Parameter beeinflußt. Die Clusterung wird durch die Parameter R_c, T_c und M_c (maximaler örtlicher Abstand und maximale Wartezeit zwischen zwei Aufträgen sowie maximale Auftragsmenge aller Aufträge innerhalb des Clusters) bestimmt. Diese Restriktionen können durch die Wahl sehr großer Werte deaktiviert werden. In diesem Fall wird aus dem parallelen ein sequentieller Savings-Algorithmus. Die Zuordnung der Tourfahrzeuge $\mathcal{F}_j$ zu den Clustern $\mathcal{C}_i$ erfolgt nach einer Vorauswahl über die Mindestauslastung α auf Grundlage der Bewertungen b'_{ij} bzw. der Normierungen zu b_{ij}, die auch auf andere Weise als angegeben definiert werden können. Das Aufstellen der Touren wird schließlich zum einen durch die Definition der Savings bestimmt, die von den Savingsparametern γ_i und dem Wichtungsfaktor β für den zeitlichen Anteil abhängen. Zusätzlich können die Savings insgesamt auch mit einem weiteren Cluster-abhängigen Faktor δ_i multipliziert werden, um die Vergleichbarkeit der Savings unterschiedlicher Cluster zu verbessern. Zum anderen werden die Touren auch von den Abbruchkriterien der Auslastung α' und der Restzeit T_0 bestimmt. Insgesamt läßt sich der Algorithmus also über eine Vielzahl an Parametern variieren, um möglichst unterschiedliche Tourenpläne zu erzeugen und hinsichtlich verschiedener Zielgrößen günstige Tourenpläne zu finden.

Es sind auch eine Reihe von Modifikationen denkbar. So können die heuristischen Verfahren der Clusterung und der Berechnung der Bewertungen für die Zuordnung der Tour-Fahrzeuge zu den Clustern auch auf andere Weise erfolgen. Beim Aufstellen der Touren kann die Auswahl des ersten Auftrags einer Tour nach anderen Kriterien erfolgen. Und auch in die Berechnung der Savings-Werte selbst können weitere Größen einfließen.

Literatur

[1] Clarke, G., Wright, J.W.: Scheduling vehicles from a central delivery depot to a number of delivery points. ORQ 12 (1964), S. 568-581.

[2] Diruf, G.: Kundenzeitschranken in der computergestützten Tourenplanung. ZOR 24 (1980), S. B207-B220.

[3] Diruf, G.: Ein heuristisches Verfahren zur Berücksichtigung heterogener Fahrzeugeinsatzcharakteristiken in der computergestützten Tourenplanung. In: H. Steckan et al. (Hrsg.): Operations Research Proceedings 1983, Berlin et al. 1984, S. 241-248.

[4] Domschke, W.: Logistik (Bd. 1): Transport. 3. Aufl., Oldenbourg, München-Wien 1989.

[5] Domschke, W.: Logistik (Bd. 2): Rundreisen und Touren. 3. Aufl., Oldenbourg, München-Wien 1990.

[6] Fleischmann, B.: The vehicle routing problem with multiple use of the vehicles. Working Paper, Universität Hamburg (Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Institut für Unternehmensforschung), Juni 1990.

[7] Golden, B., Assad, A., Levy, L., Gheysens, F.: The fleet size and mix vehicle routing problem. COR 11 (1984), S. 49-66.

[8] Gietz, M.: Computergesttzte Tourenplanung mit zeitkritischen Restriktionen. Physica-Verlag Heidelberg 1994.

[9] van Landeghem, H.R.G.: A bi-criteria heuristic for the vehicle routing problem with time windows. EJOR 36 (1988), S. 217-226.

[10] Solomon, M.M.: Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. OR 35 (1987), S. 254-265.