

# Untersuchungen zum zeitabhängigen Tragverhalten von Verbundquerschnitten mit Hilfe der Laplace-Transformation\*

Prof. Dr.-Ing. habil. E. Raue, Dipl.-Ing. T. Heidolf

*Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,  
Marienstraße 13, 99421 Weimar*

## 1 Einführung

Im Stahlbeton- und Spannbetonbau kommen in zunehmendem Maße Verbundkonstruktionen aus Betonfertigteilen und Ortbetoneergänzungen zum Einsatz. Die Fertigteile werden je nach Spannweite, Belastung und speziellen Anforderungen mit schlaffer oder vorgespannter Bewehrung ausgeführt. Aufgrund der im Allgemeinen unterschiedlichen Betone der einzelnen Querschnittsanteile sowie bedingt durch den zeitlichen Versatz in der Herstellung der Fertigteile und der Ortbetoneergänzungen ergeben sich Unterschiede im Langzeitverhalten, die bei der Bemessung und Nachweisführung zu berücksichtigen sind. Das Kriechen und Schwinden der Betone als Folge des zeitabhängigen Materialverhaltens und die Spezifik des Verbundquerschnitts können für die Gebrauchstauglichkeit relevant sein, insbesondere wenn die Fertigteile vorgespannt sind.

Eine hinreichend wirklichkeitsnahe Beschreibung des Langzeitverhaltens von Beton gestattet die Theorie des elastisch-kriechenden Körpers. Dabei ist das Betonverhalten sowohl vom Beobachtungszeitpunkt als auch vom Zeitpunkt der Lasteintragung bzw. vom Zeitpunkt der Veränderung der Betonspannungen abhängig.

Im Allgemeinen lassen sich geschlossene Lösungen für bewehrte Betonverbundquerschnitte nach der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers nicht angeben. Die auf eine zeitliche Diskretisierung aufbauende sukzessive Berechnung der Schnittgrößenumlagerungen ist an zusätzliche Vereinfachungen des Berechnungsmodells gebunden [1 - 4] und Annahmen über den zeitlichen Verlauf der Schnittgrößenanteile sind erforderlich.

Eine Alternative hierzu ergibt sich, wenn für die einzelnen Kriechintervalle ein vereinfachter Ansatz für den Verlauf der Kriechfunktion  $\phi_e(t, \tau) = \phi_e(t) - \phi_e(\tau)$  entsprechend der Theorie des Alterns getroffen wird. Dabei werden die im Zeitintervall  $(t_{j-1}, t_j)$  umgelagerten Schnittgrößen als neue Belastung der einzelnen Querschnittsanteile im Zeitintervall  $(t_j, t_{j+1})$  mit der Kriechfunktion  $\phi(t_{j+1}, t_j)$  berücksichtigt. Bei hinreichend kleinen Zeitschritten können die Nachteile der getroffenen Vereinfachung vernachlässigt werden.

## 2 Annahmen und Voraussetzungen

Der Gesamtquerschnitt besteht aus  $n$  zum jeweiligen Zeitintervall wirksamen Querschnittsanteilen. Für die Anwendung des Berechnungsmodells werden folgende Annahmen zum Verformungs- und Materialverhalten getroffen:

### *Annahme 1:*

Zwischen den schubsteifen Querschnittsanteilen besteht starrer Verbund. Es wird vom Ebenbleiben der Querschnittsanteile und des Gesamtquerschnitts ausgegangen.

### *Annahme 2:*

Der Beton ist ungerissen (Zustand I) und beteiligt sich zu jedem Zeitpunkt an der Übertragung der inneren Kräfte.

*Annahme 3:*

Der Betonstahl sowie der Spannstahl sind kriechfest und verhalten sich linear elastisch. Zwischen der Dehnung  $\varepsilon_s(t)$  bzw.  $\varepsilon_p(t)$ , der Spannung  $\sigma_s(t)$  bzw.  $\sigma_p(t)$  und dem Elastizitätsmodul  $E_s$  bzw.  $E_p$  besteht nach dem HOOKEschen Gesetz der Zusammenhang:

$$\text{Betonstahl: } \varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s}; \quad d\varepsilon_s(t) = \frac{d\sigma_s(t)}{E_s} \quad (1)$$

$$\text{Spannstahl: } \varepsilon_p(t) = \frac{\sigma_p(t)}{E_p}; \quad d\varepsilon_p(t) = \frac{d\sigma_p(t)}{E_p}$$

*Annahme 4:*

Alt- bzw. Neubeton verhalten sich wie elastisch-alternde Körper. Die Kriechverformungen sind nur vom Betonalter, nicht vom Belastungsbeginn abhängig. Die Kriechzahl wird

$$\phi_c(t, \tau) = \varphi_c(t) - \varphi_c(\tau) \quad (2)$$

gesetzt.

Unter dieser Voraussetzung kann die Betondehnung  $\varepsilon_c(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  infolge einer über den Kriechzeitraum  $(t-t_0)$  veränderlichen Betonspannung  $\sigma_c(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ) durch die Beziehung

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma_c(\tau)}{E_c(\tau)} \cdot \frac{\partial \varphi_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_{cs}(t, \tau_s) \quad (3)$$

beschrieben werden.

Der differenzielle Zuwachs der Betondeformationen ergibt sich unter Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls  $E_{c,a}$  zu:

$$d\varepsilon_c(t) = \frac{d\sigma_c(t)}{E_c} + \frac{\sigma_c(t)}{E_c} \cdot d\varphi_c(t) + d\varepsilon_{cs}(t) \quad (4)$$

### 3 Berechnungsmodell

Das Berechnungsmodell basiert auf:

- Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den Deformationen und den Spannungen in den einzelnen Querschnittanteilen mit Hilfe zeitabhängiger Materialgesetze.
- Betrachtung der Äquivalenz der zeitabhängigen Schnittgrößen und der Summe der Schnittgrößenanteile.
- Berücksichtigung der Verträglichkeit der zeitabhängigen Deformationen der einzelnen Querschnittanteile.

*Gleichgewichtsbedingungen:*

Die Ableitung der Schnittgrößenanteile  $(\cdot)'_r = d(\cdot)_r/d\varphi$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) in einem Zeitintervall  $(t_{j-1}, t_j)$  müssen zu jedem Zeitpunkt  $\tau$  ( $t_{j-1} \leq \tau \leq t_j$ ) drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Diese werden als Kräfte- bzw. Momentenbedingungen um den ideellen Schwerpunkt  $i$  formuliert.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n [N'_{x,r}(\tau)] &= N'_{x,i}(\tau) \\ \sum_{r=1}^n [N'_{x,r}(\tau) \cdot z_{i,r} + M'_{y,r}(\tau)] &= M'_{y,i}(\tau) \\ \sum_{r=1}^n [N'_{x,r}(\tau) \cdot y_{i,r} + M'_{z,r}(\tau)] &= M'_{z,i}(\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

Bei hinreichend kleinen Zeitintervallen können die Zuwächse der am ideellen Schwerpunkt  $i$  wirkenden Schnittgrößen  $S'_i$  konstant angenommen und näherungsweise der Sekantenanstieg  $S'_i \approx (S_{i,j} - S_{i,j-1}) / (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}))$  eingesetzt werden.

*Verträglichkeitsbedingungen:*

Mit den getroffenen Annahmen lassen sich die Dehnung  $d\varepsilon_{x,r}(\tau)$  sowie die Verdrehungen  $d\kappa_{y,r}(\tau)$  und  $d\kappa_{z,r}(\tau)$  des Querschnittsanteils  $r$  aus den Deformationen des ideellen Gesamtquerschnittes  $i$  berechnen. Dabei ist zu beachten, dass die zum Zeitpunkt  $t_u$  neu hinzugekommenen Schnittgrößenanteilen mit der entsprechenden Kriechfunktion  $d\varphi_{r,u}$  überlagert werden müssen.

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{x,r}(\tau) &= \frac{dN_{x,r}(\tau)}{E_r \cdot A_r} + \frac{N_{x,r}(\tau)}{E_r \cdot A_r} \cdot d\varphi_{r,u}(\tau) + d\varepsilon_{cs,x,r}(\tau) = d\varepsilon_{x,i}(\tau) + d\kappa_{y,i}(\tau) \cdot z_{i,r} + d\kappa_{z,i}(\tau) \cdot y_{i,r} \\ d\kappa_{y,r}(\tau) &= \frac{dM_{y,r}(\tau)}{E_r \cdot I_{y,r}} + \frac{M_{y,r}(\tau)}{E_r \cdot I_{y,r}} \cdot d\varphi_{r,u}(\tau) + d\kappa_{cs,y,r}(\tau) = d\kappa_{y,i}(\tau) \\ d\kappa_{z,r}(\tau) &= \frac{dM_{z,r}(\tau)}{E_r \cdot I_{z,r}} + \frac{M_{z,r}(\tau)}{E_r \cdot I_{z,r}} \cdot d\varphi_{r,u}(\tau) + d\kappa_{cs,z,r}(\tau) = d\kappa_{z,i}(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

Auf Grund der unterschiedlichen zeitabhängigen Materialeigenschaften der einzelnen Querschnittsanteile müssen die jeweiligen Kriech- und Schwindverläufe normiert werden. Durch Einführung eines zeitabhängigen Multiplikators

$$\alpha_{\varphi,r,u}(\tau) = \frac{d\varphi_{r,u}(\tau)}{d\varphi_u(\tau)} \quad (7)$$

können die differentiellen Kriechzuwächse  $d\varphi_{r,u}(\tau)$  des Querschnittsanteile  $r$  einer zum Zeitpunkt  $t_u$  beginnenden Kriechfunktion in einen normierten Kriechzuwachs  $d\varphi_u(\tau)$  überführt werden. Analog wird mit den Deformationen infolge Schwindens verfahren.

$$\beta_{\varepsilon,x,r,u}(\tau) = \frac{d\varepsilon_{cs,x,r,u}(\tau)}{d\varphi_u(\tau)} \quad \beta_{\kappa,y,r,u}(\tau) = \frac{d\kappa_{cs,y,r,u}(\tau)}{d\varphi_u(\tau)} \quad \beta_{\kappa,z,r,u}(\tau) = \frac{d\kappa_{cs,z,r,u}(\tau)}{d\varphi_u(\tau)} \quad (8)$$

Unter Beachtung der vorgenommenen Normierungen, dem Zusammenhang  $(\cdot)' = d(\cdot)/d\varphi$  sowie den Abkürzungen  $D_r$  bzw.  $B_{\cdot,r}$  für die Dehn- bzw. Biegesteifigkeiten des Querschnittsanteiles  $r$  können die Gleichungen (6) wie folgt umgestellt werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{x,r}(\tau) &= \frac{N'_{x,r}(\tau)}{D_r} + \frac{N_{x,r}(\tau)}{D_r} \cdot \alpha_{\varphi,r,u}(\tau) + \beta_{\varepsilon,x,r,u}(\tau) = \varepsilon'_{x,i}(\tau) + \kappa'_{y,i}(\tau) \cdot z_{i,r} + \kappa'_{z,i}(\tau) \cdot y_{i,r} \\ \kappa'_{y,r}(\tau) &= \frac{M'_{y,r}(\tau)}{B_{y,r}} + \frac{M_{y,r}(\tau)}{B_{y,r}} \cdot \alpha_{\varphi,r,u}(\tau) + \beta_{\kappa,y,r,u}(\tau) = \kappa'_{y,i}(\tau) \\ \kappa'_{z,r}(\tau) &= \frac{M'_{z,r}(\tau)}{B_{z,r}} + \frac{M_{z,r}(\tau)}{B_{z,r}} \cdot \alpha_{\varphi,r,u}(\tau) + \beta_{\kappa,z,r,u}(\tau) = \kappa'_{z,i}(\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (5) und die Verträglichkeitsbedingungen (9) stellen zusammen ein lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar, dass zur Bestimmung der Schnittgrößenanteile  $N_{x,r,j}$ ,  $M_{y,r,j}$  und  $M_{z,r,j}$  sowie der Querschnittsdeformationen  $\varepsilon_{x,i,j}$ ,  $\kappa_{y,i,j}$  und  $\kappa_{z,i,j}$  für einen beliebigen Zeitpunkt  $t = t_j$  benutzt wird.

Für die Darstellung des Gleichungssystems in Matrixschreibweise werden folgende Vektoren und Matrizen für  $n$  Querschnittsanteile zum Zeitpunkt  $t = t_j$  eingeführt:

Vektoren  $s_j$  und  $s'_j$  der Schnittgrößenanteile bzw. ihrer Ableitungen

$$s_j = [N_{x,1,j} \quad M_{y,1,j} \quad M_{z,1,j} \quad \dots \quad N_{x,n,j} \quad M_{y,n,j} \quad M_{z,n,j}]^T, \quad s'_j = [N'_{x,1,j} \quad M'_{y,1,j} \quad M'_{z,1,j} \quad \dots \quad N'_{x,n,j} \quad M'_{y,n,j} \quad M'_{z,n,j}]^T,$$

Koeffizientenmatrizen  $Q_{s,j}$  und  $A_{\alpha,j,u}$  sowie Koeffizientenvektor  $\beta_{j,u}$

$$Q_{s,j} = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{y,1} & & & \\ \vdots & & B_{z,1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_n & \vdots \\ & & & & & B_{y,n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & \dots & \mathbf{0} & & B_{z,n} \end{bmatrix}, \quad A_{\alpha,j,u} = \begin{bmatrix} \alpha_{\varphi,1,j,u} & \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_{\varphi,1,j,u} & & & \\ \vdots & & \alpha_{\varphi,1,j,u} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_{\varphi,n,j,u} & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & & \alpha_{\varphi,n,j,u} & \mathbf{0} \\ & & & \dots & \mathbf{0} & & \alpha_{\varphi,n,j,u} \end{bmatrix},$$

$$\beta_{j,u} = [\beta_{\varepsilon,x,1,j,u} \quad \beta_{\kappa,y,1,j,u} \quad \beta_{\kappa,z,1,j,u} \quad \dots \quad \beta_{\varepsilon,x,n,j,u} \quad \beta_{\kappa,y,n,j,u} \quad \beta_{\kappa,z,n,j,u}]^T,$$

Gleichgewichtsmatrix  $A_G$

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ z_{i,1} & 1 & 0 & \dots & z_{i,n} & 1 & 0 \\ y_{i1} & 0 & 1 & \dots & y_{i,n} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Vektor  $b_j$  der Sekantenanstiege der äußeren Schnittgrößen

$$b_j = \left[ \Delta N_{x,i} / \Delta \varphi_{j-1} \quad \Delta M_{y,i} / \Delta \varphi_{j-1} \quad \Delta M_{z,i} / \Delta \varphi_{j-1} \right]^T,$$

Vektor  $q'_j$  der Ableitungen der Gesamtquerschnittsdeformationen

$$q'_j = \left[ \varepsilon'_{x,i,j} \quad \kappa'_{y,i,j} \quad \kappa'_{z,i,j} \right]^T$$

Somit können die Differenzialgleichungen (5) und (9) wie folgt dargestellt werden.

$$\begin{aligned} A_G s'_j &= b_j \\ Q_{s,j}^{-1} s'_j + Q_{s,j}^{-1} A_{\varphi,j,u} s_j - A_G^T q'_j &= -\beta_{j,u} \end{aligned} \quad (10)$$

Durch Umformungen der Differenzialgleichungen (10) können die Ableitungen der Funktionen  $s(t_j)=s_j$  und  $q(t_j)=q_j$  voneinander getrennt werden. Unter Berücksichtigung der Zusammenfassung einiger Matrizen erhält man:

$$\begin{aligned} q'_j - R_{j,u} s_j &= P_j \beta_{j,u} + Q_{i,j}^{-1} b_j \\ s'_j + G_{j,u} s_j &= F_j \beta_{j,u} + K_j b_j \end{aligned} \quad (11)$$

mit

$$\begin{aligned} R_{j,u} &= Q_{i,j}^{-1} A_G A_{\varphi,j,u} & P_j &= Q_{i,j}^{-1} A_G Q_{s,j} \\ G_{j,u} &= A_{\varphi,j,u} - Q_{s,j} A_G^T Q_{i,j}^{-1} A_G A_{\varphi,j,u} & F_j &= Q_{s,j} A_G^T Q_{i,j}^{-1} A_G Q_{s,j} - Q_{s,j} & K_j &= Q_{s,j} A_G^T Q_{i,j}^{-1} \\ Q_{i,j} &= A_G Q_{s,j} A_G^T = \begin{bmatrix} D_{x,i} & S_{y,i} & S_{z,i} \\ S_{y,i} & B_{y,i} & B_{yz,i} \\ S_{z,i} & B_{yz,i} & B_{z,i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zur Entkopplung der Variablen des Vektors  $s_j$  des linearen Differenzialgleichungssystems (11) sind einige Transformation notwendig. Zunächst werden die Matrix der Eigenwerte  $L_{j,u}$  und die Matrix der Eigenvektoren  $T_{j,u}$  der Matrix  $G_{j,u}$  bestimmt und eine Hauptachsentransformation  $G_{j,u} = T_{j,u} L_{j,u} T_{j,u}^{-1}$  durchgeführt.

$$L_{j,u} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,j,u} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{3n,j,u} \end{bmatrix}, \quad T_{j,u} = [v_{1,j,u} \quad \dots \quad v_{3n,j,u}]$$

Nach weiteren Umformungen und der Transformation der Schnittgrößen  $s_j^* = T_{j,u}^{-1} s_j$  bzw. ihren Ableitungen  $s'_j{}^* = T_{j,u}^{-1} s'_j$  lässt sich die Gleichung (11) wie folgt darstellen.

$$s_j^* + L_{j,u} s_j^* = T_{j,u}^{-1} F_j \beta_{j,u} + T_{j,u}^{-1} K_j b_j \quad (12)$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lässt sich diese entkoppelte Differenzialgleichungssystem vom Originalraum in den Bildraum überführen und nach den Laplace-Transformierten  $F(s_j^*)$  der Schnittgrößen umstellen.

$$F(s_j^*) = (pE + L_{j,u})^{-1} s_{j-1}^* + (p^2 E + pL_{j,u})^{-1} T_{j,u}^{-1} F_j \beta_{j,u} + (p^2 E + pL_{j,u})^{-1} T_{j,u}^{-1} K_j b_j \quad (13)$$

Für das Zeitintervall  $(t_{j-1}, t_j)$  führt die Rücktransformation in den Originalraum sowie die Transformation des Schnittgrößenvektors  $s_j = T_{j,u} s_j^*$  zur Lösung des Differenzialgleichungssystems:

$$s_j = T_{j-1} s_{j-1}^* = T_{j-1} Y_{j,j-1} T_{j-1}^{-1} s_{j-1} + T_{j-1} (L_{j,j-1}^{-1} - L_{j,j-1}^{-1} Y_{j,j-1}) T_{j-1}^{-1} F_j \beta_{j,u} + T_{j-1} (L_{j,j-1}^{-1} - L_{j,j-1}^{-1} Y_{j,j-1}) T_{j-1}^{-1} K_j b_j \quad (14)$$

mit:  $Y_{j,j-1} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{1,j} \Delta \varphi_{j,j-1}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{-\lambda_{3n,j} \Delta \varphi_{j,j-1}} \end{bmatrix}$

$u=j-1$  Belastungs- und Schwindbeginn bei  $t_u=t_{j-1}$

$\Delta \varphi_{j,j-1}$  Sekantenanstieg der Kriechfunktion für eine zum Zeitpunkt  $t_{j-1}$  beginnende Belastung

Für die Berechnung des nächsten Zeitschrittes müssen die Schnittgrößenänderungen  $s_j - s_{j-1}$  als neue Belastung angesetzt und mit der Kriechfunktion  $\varphi(t_{j+1}, t_j)$  überlagert werden. Sprunghafte Veränderungen der äußeren Belastung werden mit Hilfe eines zusätzlichen Terms  $K_j d_j$  in Gleichung (15) berücksichtigt. Dabei ist der Vektor  $d_j$  für einen Zuwachs der am ideellen Schwerpunkt angreifende äußere Belastung  $\Delta s_j$  zum Zeitpunkt  $t_j$  wie folgt definiert:

$$d_j = [\Delta N_{x,i,j} \quad \Delta M_{y,i,j} \quad \Delta M_{z,i,j}]^T$$

Für die Berechnung der Schnittgrößen  $s_k$  zum Zeitpunkt  $t_k$  unter Berücksichtigung der Umlagerungen im gesamten Beobachtungszeitraum  $(t_0 - t_k)$  ergibt sich eine Summation der Schnittgrößenänderungen  $\Delta s_j = s_j - s_{j-1}$  der einzelnen Zeitpunkte  $t_j$  ( $j=0..k$ ). Dabei ist zu beachten, dass die zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_u$  beginnenden Anteile des Schnittgrößenvektors  $s_j$  mit den entsprechenden Kriechfunktionen überlagert werden müssen. Gleichung (14) kann somit wie folgt dargestellt werden:

$$s_k = \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{j=u+1}^k \left[ (T_{j,u} Y_{j,u} T_{j,u}^{-1} - E) (s_j - s_{j-1}) \right] \quad \text{Umlagerungen infolge Kriechen mit } s_0 = [0 \quad \dots \quad 0]^T$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=u+1}^k \left[ T_{j,u} (L_{j,u}^{-1} - L_{j,u}^{-1} Y_{j,u}) T_{j,u}^{-1} F_{j,u} \beta_{j,u} \right] \quad \text{Umlagerungen infolge Schwinden für } n \text{ schwindwillige Querschnittsanteile mit Schwindbeginn } t_{u,n}$$

$$+ \sum_{j=1}^k \left[ T_{j-1} (L_{j-1}^{-1} - L_{j-1}^{-1} Y_{j-1}) T_{j-1}^{-1} K_j b_j \right] \quad \text{Schnittgrößenanteile infolge Kriechen einer gleichmäßigen Belastungsänderung}$$

$$+ \sum_{j=1}^k [K_j d_j] \quad \text{Schnittgrößenanteile infolge einer sprunghaften Belastungsänderung}$$
(15)

Mit diesem Verfahren ist es möglich, die Schnittgrößen  $s_k$  zum Zeitpunkt  $t_k$  direkt nach der Ermittlung der Eigenvektoren bzw. Eigenwerte der Matrix  $G_{j,u}$  der einzelnen Zeitpunkte  $t_j$  zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass sich die Matrix- bzw. Vektorgröße zu jedem Zeitpunkt infolge neu hinzukommender oder wegfallender Querschnittsanteile ändern kann.

#### 4 Beispiel

Die Berechnung eines Deckensystems mit einer Spannweite von 15,30m soll die Anwendung des vorgestellten Berechnungsverfahrens veranschaulichen. Es werden vorgefertigte Spannbretter mit nachträglicher Ortbetongergänzung verwendet. Die Spannbretter werden unter sofortigem Verbund mit Spannritzern und Betonstahl bewehrt. Die Vorspannung der Spannritzern im Spannbett beträgt  $\sigma_{p00} = 103,2 \text{ kN/cm}^2$ . Nach dem Umspannen (2. Tag) werden die Fertigteile so gelagert, dass das Eigengewicht nicht wirksam wird. Am 28. Tag werden die Spannbretter eingebaut und der Ortbeton ergänzt. Die Verbundkonstruktion aus Alt- und Neubeton wird bis zum 58. Tag durch Joche unterstützt, so dass das Eigengewicht des gesamten Querschnitts erst ab diesem Tag wirksam wird. Auf eine Betrachtung des zeitlichen Einflusses weiterer Nutzlasten wird verzichtet. In Tabelle 1 sind die Querschnittswerte sowie Materialkenngrößen und in Abbildung 1 der zeitliche Verlauf der Einwirkungen dargestellt.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabelle 2 bzw. in Abbildung 2 dargestellt. Infolge des Schwindens des Altbetonquerschnittes bauen sich bis zum Zeitpunkt  $t_1$  Zugspannungen auf. Durch das Umspannen zum Zeitpunkt  $t_2 = t_1$  entstehen sprunghaft Durchspannungen. Bis

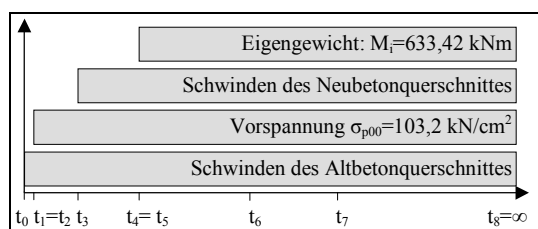


Abb. 1: zeitabhängiger Belastungsverlauf

Querschnittsanteil	Werkstoff	Fläche [cm <sup>2</sup> ]	E-Modul [kN/cm <sup>2</sup> ]
Altbeton $A_{ca}$	C40/50	270 x 16 = 4320	3 500
Betonstahl $A_{sa}$	BSt 500 S	2 x 14 $\phi 10 = 21,98$	20 000
Spannstahl $A_{pa}$	St 1570/1770	2 x 38 $\phi 1/2'' = 70,94$	19 500
Neubeton $A_{cn}$	C35/45	270 x 16 = 4320	3 350
Betonstahl $A_{sn}$	BSt 500 S	15 $\phi 28 = 30,15$	20 000

Tabelle 1: Querschnittswerte und Materialkenngrößen

zum Zeitpunkt  $t_4$  ist sowohl beim Altbeton als auch beim Spannstahl ein Spannungsabbau zu beobachten, welcher durch den Spannungsanstieg des Betonstahls  $A_{sa}$  kompensiert wird. Zum Zeitpunkt  $t_3$  wird der Neubeton aufgebracht, der erwartungsgemäß zu diesem Zeitpunkt spannungslos ist. Infolge der Kriechverformungen im Intervall  $(t_3, t_4)$  bauen sich im Neubeton Zug- bzw. Druckspannungen auf. Auf Grund der Aktivierung des Eigengewichtes kommt es zum Zeitpunkt  $t_5$  zu einem Spannungssprung bei allen beteiligten Querschnittanteilen. Im weiteren Verlauf ist zu erkennen, dass sich die Spannungsspitzen den Betonen sowie die Spannungsunterschiede in der Kontaktfläche Alt - Neubeton im Laufe der Zeit erwartungsgemäß abbauen. Zum Zeitpunkt  $t_8 = \infty$  hat sich nahezu ein linearer Spannungsverlauf über den gesamten Querschnitt eingestellt. Der gesamte Querschnitt ist überdrückt und befindet sich im Zustand I.

Die mit Hilfe des vorgestellten Berechnungsmodells ermittelten zeitlichen Verläufe der Spannungen stimmen mit den Berechnungen nach der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers nahezu überein (Abb. 2 Spannstahl). Zu erkennen ist, dass die nach der Theorie des Alterns ermittelten Spannungen der oberen Spannstahllage geringer bzw. die der unteren Spannstahllage größer sind als die nach der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers berechneten Spannungen. Dies deutet auf eine größere Verdrehung des Gesamtquerschnitts hin. Die geringen Abweichungen sind auf unterschiedlichen Annahmen der Spannungsverläufe in den einzelnen Zeitintervallen zurückzuführen.

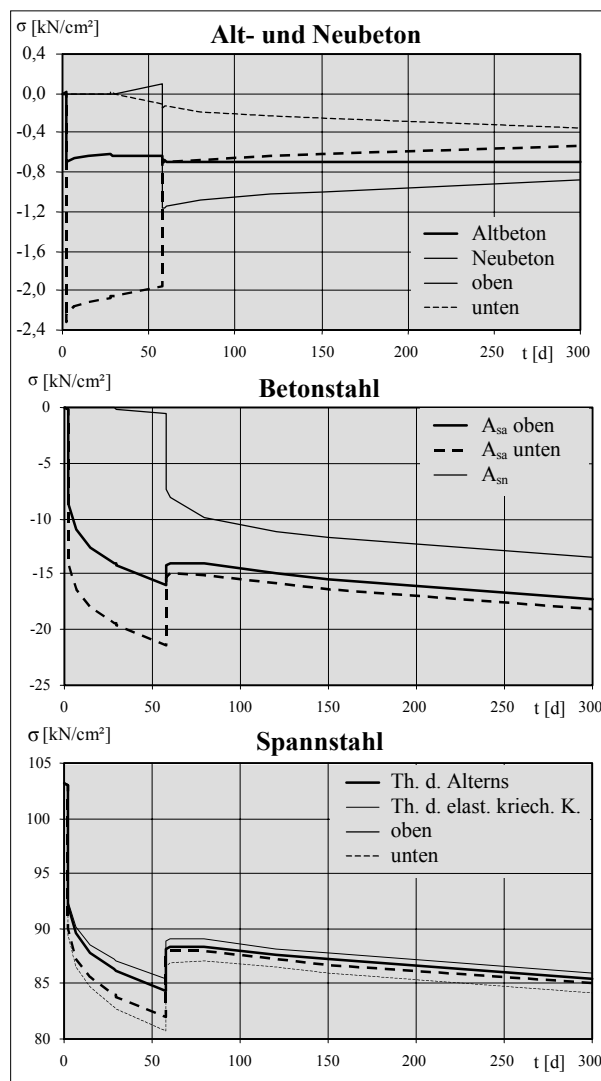


Abb. 2: zeitlicher Verlauf der Beton- bzw. Stahlspannungen

Zeitpunkt [Tagen]	$t_1=2$		$t_2=2$		$t_3=28$		$t_4=58$		$t_5=58$		$t_6=120$		$t_7=600$		$t_8=\infty$	
	vor dem Umspannen		nach dem Umspannen		Neubeton aufbringen		mit Unterstützung		ohne Unterstützung							
Spannungen [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u$
Altbeton $A_{ca}$	0,00	0,01	-0,73	-2,32	-0,62	-2,07	-0,63	-1,95	-0,67	-0,68	-0,70	-0,64	-0,67	-0,46	-0,62	-0,18
Betonstahl $A_{sa}$	-0,18	-0,18	-6,11	-11,50	-14,03	-19,41	-15,96	-21,34	-14,76	-15,72	-14,90	-15,86	-19,15	-20,10	-26,37	-27,33
Spannstahl $A_{pa}$	103,03	103,03	94,87	92,55	86,31	83,98	84,30	81,98	87,42	87,01	87,68	87,27	83,51	83,10	76,40	75,99
Neubeton $A_{cn}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	-0,11	-1,17	-0,14	-1,02	-0,24	-0,83	-0,40	-0,61	-0,55
Betonstahl $A_{sn}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,45	-0,45	-6,27	-6,27	-11,19	-11,19	-15,08	-15,08	-21,53	-21,53

Tabelle 2: Spannungsumlagerungen infolge Kriechen und Schwinden der beiden Betone

## 5 Zusammenfassung

Wie die durchgeführten Untersuchungen zeigen, lässt sich bei ausreichend kleinen Zeitintervallen eine hinreichend genaue Lösung finden. Für die einzelnen Zeitintervalle ergeben sich lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dieses Gleichungssystem kann mit Hilfe der Laplace-Transformation und unter Berücksichtigung der Matrix der Eigenvektoren in geschlossener Form lösen werden.

Die Anwendbarkeit der vorgestellten Berechnungsmethode zur Analyse des zeitabhängigen Tragverhaltens von Verbundquerschnitten wurde an einem ausgewählten Beispiel demonstriert. Dabei wurden die in der DIN 1045-1 angegebenen Berechnungsmethoden zur Berücksichtigung der Kriech- und Schwindverformungen berücksichtigt [5]. Vereinfachte Algorithmen lassen sich für spezielle Sonderfälle herleiten und in baupraktische Formen bringen.

## 6 Literatur

- [1] Raue E., Kaller W.: Schnittgrößenumlagerungen in Verbundquerschnitten infolge Kriechens und Schwindens - Berechnung nach der Theorie des elastisch kriechenden Körpers; Bauplanung-Bautechnik, 40. Jg Heft 1, 1986
- [2] Raue E.: Ermittlung der Spannungen in Verbundquerschnitten im Zustand I und Zustand II unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons; wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, 33. Jg Heft 5/6 Reihe B, 1987
- [3] Ackermann G., Raue E.; Ebel L., Setzpfandt G.: Spannungsumlagerungen in Verbundquerschnitten aus Fertigteilen und Ort beton statisch bestimmter Träger infolge Kriechens und Schwindens unter Berücksichtigung der Rissbildung; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag GmbH, Heft 431, Berlin-Köln, 1992
- [4] Diener J.: Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter Bauteile aus Stahlbeton und Spannbeton unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens und der Rissbildung; Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus - Universität Weimar, 1998
- [5] DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton; Deutsches Institut für Normung e.V., 2001-07

\* Dieses Projekt wird gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG innerhalb des SFB 524 „Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken“.