

Physikalisch nichtlineare Analyse von Aussteifungssystemen unter Einbeziehungen von Lastfolgeeffekten*

E. Raue, H.-G. Timmler, K. Adami

Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Marienstraße 13, 99421 Weimar

Die physikalisch nichtlineare Analyse von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung des Einspielverhaltens (adaptives Tragverhalten) mit Methoden der mathematischen Optimierung ist seit Jahren Gegenstand intensiver Forschungsarbeiten am Lehrstuhl Massivbau I der Bauhaus-Universität Weimar. Die dabei entwickelten Modelle und Algorithmen werden im folgenden Beitrag exemplarisch auf die Untersuchung von Aussteifungssystemen in Großtafelbauweise angewendet. Da bei diesen Gebäuden die aussteifende Konstruktion aus zusammengesetzten großformatigen Betonfertigteilen besteht, wird das Gesamttragverhalten maßgebend durch das Fugentragverhalten bestimmt. Die physikalische Nichtlinearität wird durch das Aufreißen der unbewehrten Horizontalfugen und den verschieblichen Verbund in den Vertikalfugen charakterisiert und entsprechend im Berechnungsmodell berücksichtigt.

Beispielrechnungen belegen, dass für die beschriebenen Aussteifungssysteme signifikante Spannungsumlagerungen infolge des nichtlinearen Fugentragverhaltens auftreten. Weiterhin können Lastfolgeeffekte rechnerisch nachgewiesen werden. Im Gegensatz zu seismisch beanspruchten Systemen, die in kürzester Zeit wiederholt extrem beansprucht werden, ist die Eintrittswahrscheinlichkeit bemessungsrelevanter Windlasten gering.

1 Problemübersicht

Bei der physikalisch nichtlinearen Analyse von Tragwerken ist die Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten unerlässlich. Lastwechsel können bereits bei Beanspruchungen unterhalb der plastischen Grenzlast zu alternierenden oder progressiven inelastischen Verformungen und damit zu Schadensakkumulationen führen. Bildet sich nach endlich vielen Lastwechseln ein stabiler Restschnittgrößenzustand so aus, dass weitere Beanspruchungen lediglich elastische Formänderungen zur Folge haben befindet sich das Tragwerk im Einspielzustand. Die zugehörige Grenzlast wird als adaptive Grenzlast oder Einspiellast bezeichnet. Frühere Arbeiten [1, 2] haben gezeigt, dass eine an der adaptiven Grenzlast orientierte Auslegung von Stahlbetontragwerken die Berücksichtigung von Tragreserven infolge von Spannungsumlagerungen zulässt und gleichzeitig progressive oder alternierende Schadensakkumulationen sicher ausgeschlossen werden. Insbesondere bei der Analyse von seismisch beanspruchten Tragwerken in Verbindung mit Methoden der Kapazitätsbemessung hat diese Vorgehensweise Vorzüge gegenüber einer Bemessung und Nachweisführung auf der Basis elastischer oder plastischer Grenzlasten [3].

Die bisherigen Arbeiten waren insbesondere auf die Analyse des adaptiven Tragverhaltens von Rahmentragwerken aus Stahlbeton orientiert [4]. Ansätze zum Einspielverhalten homogener Querschnitte werden in [5] vorgestellt. Die maßgebenden horizontalen Belastungen auf Aussteifungssysteme resultieren aus Wind- und gegebenenfalls aus Erdbebeneinwirkungen. Marx untersuchte das adaptive Tragverhalten von Aussteifungssystemen unter Anwendung eines Querschnittsmodells [6].

* Gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) innerhalb des SFB 524

Alle genannten Arbeiten basieren auf der Formulierung der mechanischen Modelle als Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen. Durch geeignete Diskretisierungen, z.B. mit Hilfe Finiter Elemente, können diese in Optimierungsaufgaben überführt und näherungsweise gelöst werden. In Abhängigkeit von der Aufgabenstellung und Modellbildung ergeben sich lineare, quadratische bzw. nichtlineare Optimierungsaufgaben. Da bei dieser Vorgehensweise verschiedenartige Restriktionen als Nebenbedingungen einfließen können und der gesuchte Grenz- bzw. Tragwerkszustand direkt ohne Berücksichtigung von Zwischenzuständen berechnet wird, bietet diese Methode Vorteile gegenüber Pfadverfolgungsalgorithmen.

Im vorliegenden Beitrag wird die Anwendung der Berechnungsmethode auf die Analyse des adaptiven Tragverhaltens der Aussteifungssysteme von Großtafelbauten vorgestellt. In Erweiterung des Querschnittsmodells in [6] wird die räumliche Tragwirkung in die Modellbildung einbezogen.

2 Berechnungsmodell

Das Berechnungsmodell erfasst die Aussteifungswände als stabförmige Bauteile und die lastverteilenden Decken als Diaphragmen, wobei die Wände mittels Finiter Elemente diskretisiert werden. Gegliederte Aussteifungselemente werden in Längs- und in Querrichtung so zerlegt, dass sich n_w finite Stabsegmente ergeben. Entsprechend der Diskretisierung werden die Elementränder über n_N Knoten in Längsrichtung und über n_C Verbindungsstellen in Querrichtung miteinander gekoppelt.

Ist die aussteifende Konstruktion aus großformatigen Betonfertigteilen zusammengesetzt, wird das Gesamttragverhalten maßgebend durch das Fugentragverhalten bestimmt. Im Berechnungsmodell werden deshalb zusätzlich zu den an den Stabenden angreifenden Normalkräften $N_{i,A} / N_{i,E}$, Querkräften $V_{i,A} / V_{i,E}$ und Biegemomenten $M_{i,A} / M_{i,E}$ an den Elementlängsrändern angreifende Schubbeanspruchungen $T_{i,l} / T_{i,r}$ zur Erfassung der Vertikalfugen berücksichtigt (Abb. 1).

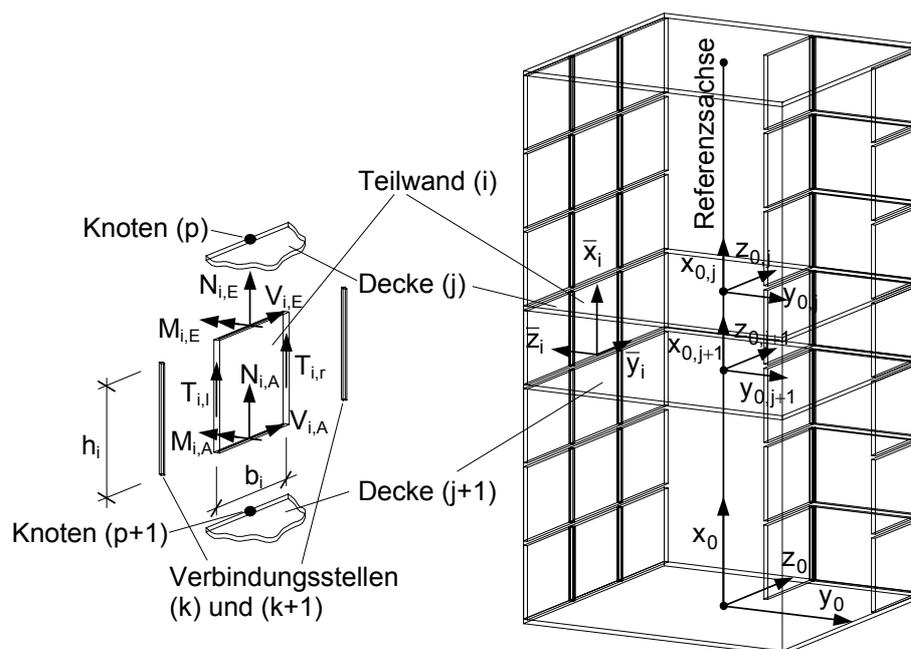


Abb. 1: Diskretes Tragwerksmodell und Detaildarstellung einer Tragwand (Segment)

Die vollständigen Stabrandschnittgrößen werden durch unabhängige Stabrandschnittgrößen, die im Unbekanntenvektor \mathbf{s} zusammengefasst sind, beschrieben:

$$\mathbf{s} = \{ \mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_i \cdots \mathbf{s}_{n_w} \}^T \quad \text{mit } \mathbf{s}_i = \{ N_{i,A} \ M_{i,A} \ M_{i,E} \ T_{i,l} \ T_{i,r} \}^T. \quad (1)$$

Die Beziehung zwischen den unabhängigen Stabrandschnittgrößen und den Elementschnittgrößen werden in Abhängigkeit von der abzubildenden Randstörung über konstante oder lineare Ansatzfunktionen beschrieben, wobei die Steifigkeiten der Tragglieder als abschnittsweise konstant angenommen werden. Exemplarisch ist dieser funktionelle Zusammenhang für einen gleichmäßig verteilten Schubfluss $t_{i,l}$ und $t_{i,r}$ (Abb. 2) in den Gleichungen 2 bis 4 angegeben.

$$N_i(\bar{x}_i) = -N_{i,A} - \frac{\bar{x}_i}{h_i} (T_{i,l} + T_{i,r}) \quad (2)$$

$$M_i(\bar{x}_i) = \left(1 - \frac{\bar{x}_i}{h_i} \right) M_{i,A} - \frac{\bar{x}_i}{h_i} M_{i,E} \quad (3)$$

$$V_i(\bar{x}_i) = \frac{M_{i,A} + M_{i,E}}{h_i} - \frac{1}{h_i} (T_{i,l} \bar{y}_{i,l} + T_{i,r} \bar{y}_{i,r}) \quad (4)$$

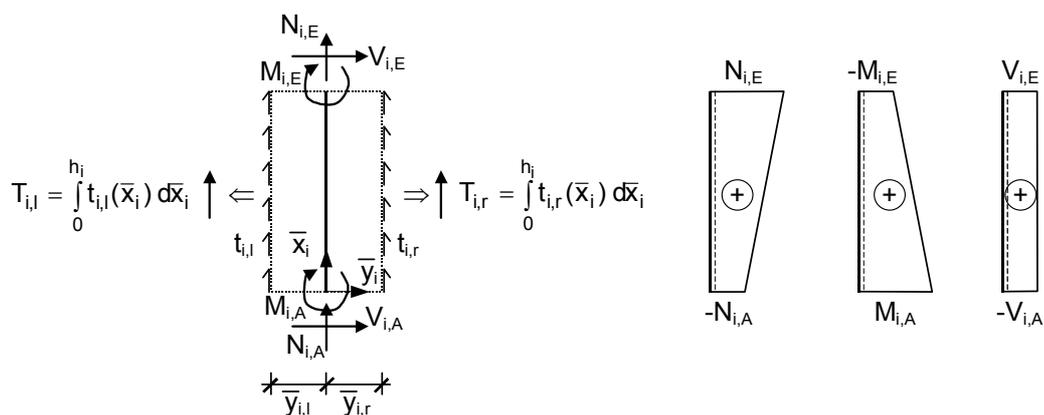


Abb. 2: Schnittgrößenverlauf für gleichmäßig verteilte Randschubflüsse $t_{i,l}$ und $t_{i,r}$

Die Stabrandschnittgrößen \mathbf{s} werden unter Verwendung der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} auf die Knoten der diskreten Tragstruktur transformiert und die äußeren Kraftgrößen im Vektor \mathbf{f} zusammengefasst, so dass für die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtsystems gilt:

$$\mathbf{A} \mathbf{s} - \mathbf{f} = 0 \quad (5)$$

Die statischen Randbedingungen können in der linearen Form

$$\mathbf{A}_s \mathbf{s} - \mathbf{g}_s = 0 \quad (6)$$

angegeben werden.

Das physikalische nichtlineare Tragverhalten wird durch das Aufreißen der unbewehrten Horizontalfugen und den verschieblichen Verbund in den Vertikalfugen bestimmt und durch integrale Materialbeziehungen im Berechnungsmodell berücksichtigt. An den Stabenden werden Interaktionsbedingungen zwischen den Normalkräften und den Biegemom-

menten formuliert, während für die Kopplungskraftgrößen an den Elementrändern elastisch-plastische Materialgesetze Berücksichtigung finden.

Die linearen oder linearisierten Interaktionsbedingungen werden im Raum der Schnittgrößen formuliert:

$$\mathbf{A}_p \mathbf{s} - \mathbf{s}_u \leq 0, \quad (7)$$

wobei die Koeffizientenmatrix \mathbf{A}_p die Linearglieder beschreibt und in \mathbf{s}_u die konstanten Anteile zusammengefasst werden (Tafel 1).

Linearisierte Interaktionskurven zur Abbildung von Fließ- und Bruchbedingungen in den unbewehrten Horizontalfugen sind exemplarisch in Abb. 3 dargestellt, wobei ein bilineares Materialgesetz zugrunde liegt.

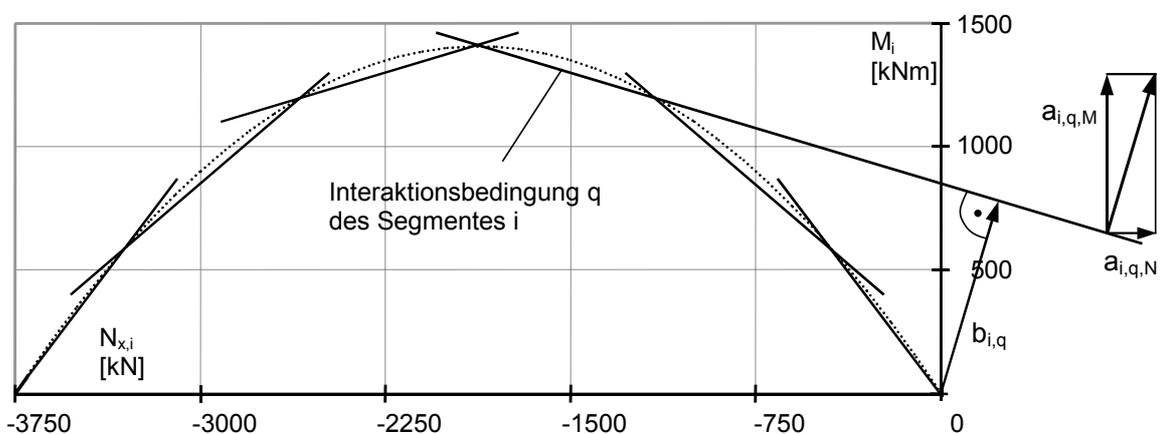


Abb. 3: Linearisierte Fließ- bzw. Bruchbedingung eines unbewehrten Segmentes

Erfüllt ein Schnittgrößenzustand die Gleichgewichtsbedingungen (5), die statischen Randbedingungen (6) und die Plastizitätsbedingungen (7), so ist dieser statisch zulässig.

Entsprechend dem Prinzip vom Minimum der konjugierten Formänderungsenergie tritt von allen zulässigen Schnittgrößenzuständen derjenige ein, für den die konjugierte Formänderungsenergie ein Minimum wird:

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{Q} \mathbf{s} \Rightarrow \text{Min.} \quad (8)$$

Die Gleichungen (5) bis (8) stellen eine quadratische Optimierungsaufgabe zur Berechnung des gesuchten Schnittgrößenzustandes dar. Analog können lineare Optimierungsaufgaben zur Berechnung der plastischen Grenzlast p_p bzw. des plastischen Widerstandsparameters r_p angegeben werden.

Die für gleichmäßig verteilten Randschubfluss formulierte Flexibilitätsmatrix \mathbf{Q} der Zielfunktion (8) sowie der Vektor \mathbf{s}_u und die Koeffizientenmatrix \mathbf{A}_p der Plastizitätsbedingungen (7) sind in Tafel 1 zusammengestellt.

3 Berechnungsmodelle zur Erfassung des adaptiven Tragverhaltens

Grundlage der Analyse des adaptiven Tragverhaltens ist die Zerlegung des Gesamtspannungs- bzw. Gesamtschnittgrößenzustandes im Zustand des Einspielens in einen elastischen Anteil und einen irreversiblen Restspannungs- bzw. Restschnittgrößenanteil:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ges}} = \boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_r \quad \mathbf{s}_{\text{ges}} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_r \quad (9)$$

Entsprechend gilt für die Deformationen:

$$\mathbf{u}_{\text{ges}} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r \quad (10)$$

In Analogie zu Abschnitt 2 können ausgehend von Energieaussagen bezüglich der Restschnittgrößen Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen zur Analyse des adaptiven Tragverhaltens formuliert werden. In der Tafel 2 sind die daraus abgeleiteten Optimierungsaufgaben zur Bestimmung der Restschnittgrößen \mathbf{s}_R , zur Berechnung der adaptiven Grenzlast p_a und zur Bestimmung des adaptiven Grenzwiderstandsparameter r_a zusammengestellt.

	Berechnung des Restschnittgrößenzustandes	Berechnung der adaptiven Grenzlast	Berechnung des adaptiven Grenzwiderstandes
ZF	$\frac{1}{2} \mathbf{s}_R^T \mathbf{Q} \mathbf{s}_R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{s}_R \Rightarrow \text{Min}$	$p \Rightarrow \text{Max}$	$r \Rightarrow \text{Min}$
GGB	$\mathbf{A} \mathbf{s}_R = 0$	$\mathbf{A} \mathbf{s}_R = 0$	$\mathbf{A} \mathbf{s}_R = 0$
PB	$\mathbf{A}_P \mathbf{s}_R - (\mathbf{s}_u - p \mathbf{s}_{u,e,v} - \mathbf{s}_{u,e,g}) \leq 0$	$\mathbf{A}_P \mathbf{s}_R - (\mathbf{s}_u - p \mathbf{s}_{u,e,v} - \mathbf{s}_{u,e,g}) \leq 0$	$\mathbf{A}_P \mathbf{s}_R - (r \mathbf{s}_u - \mathbf{s}_{u,e,v} - \mathbf{s}_{u,e,g}) \leq 0$

Tafel 2: Optimierungsaufgaben zur Berechnung des adaptiven Tragverhaltens

Wie Tafel 2 verdeutlicht, ist die eigentliche nichtlineare Analyse unabhängig von der Lastgeschichte, da in die Berechnung nur die Extremwerte aller berücksichtigten Lastfolgen einer vorgeschalteten linear elastischen Berechnung eingehen. Mit diesen Extremwerten, die in den Vektoren $\mathbf{s}_{u,e,v}$ und $\mathbf{s}_{u,e,g}$ zusammengefasst sind, werden die Plastizitätsbedingungen (8) so modifiziert, dass der Raum der zulässigen elastischen Antworten zur Sicherstellung der Tragwerksadaption definiert wird.

Eventuelle Vorverformungen aus der Lastgeschichte können in der Zielfunktion über den Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ berücksichtigt werden.

4 Berechnungsbeispiel

Das in den Abschnitten 2 und 3 vorgestellte Berechnungsmodell wird zur Analyse der Aussteifungssysteme eines in Großtafelbauweise errichteten Wohnhauses genutzt. Als Beanspruchung wurden Eigenlasten, Windlasten sowie Ersatzlasten infolge außerplanmäßiger Schiefstellung berücksichtigt. Für das im Rahmen der Revitalisierung teilweise zurückgebaute Gebäude, soll sowohl die Ausgangsstruktur als auch das rückgebaute Tragsystem untersucht werden (Abb. 4). Das Gesamttragverhalten der Konstruktion wird maßgebend durch das Tragverhalten der Horizontal- und Vertikalfugen bestimmt, die sich beim Zusammenfügen großformatiger unbewehrter Betonfertigteile ergeben.

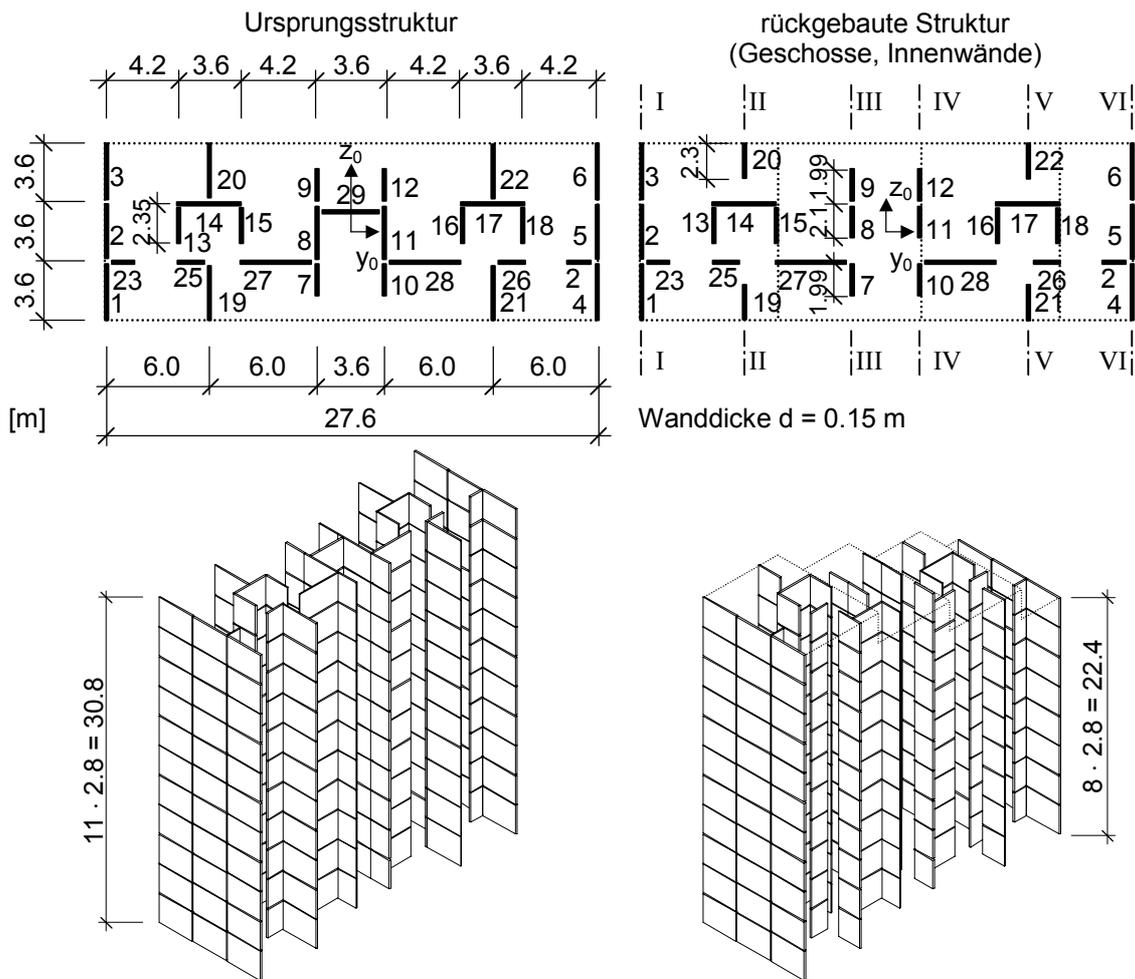


Abb. 4 Gewählte Hauptgeometrie des ursprünglichen und rückgebauten Tragsystems

Die Rechnungen wurden für drei unterschiedliche Steifigkeiten der Vertikalfugen durchgeführt, wobei eine Vertikalfugenflexibilität $\beta=10^{-15}$ m/kN eine starre Fuge abbildet, während die Steifigkeiten $\beta=10^{-6}$ m/kN und $\beta=10^{-5}$ m/kN nachgiebige Fugen beschreiben.

Wie Tafel 3 verdeutlicht, werden durch die Berücksichtigung des nichtlinearen Fugentragverhaltens sowohl bei der Ursprungsstruktur als auch beim rückgebauten System deutliche Tragreserven gegenüber einer rein elastischen Analyse erschlossen. Während für die Berechnung der elastischen und plastischen Grenzparameter eine entkoppelte Analyse in Gebäudelängs- und in Gebäudequerrichtung realisiert wurde, werden bei der Berechnung der adaptiven Grenzlast alle vier Einwirkungsrichtungen gleichzeitig einbezogen. Die Ergebnisse belegen, dass das Gebäude in Querrichtung deutlich größere Tragreserven als in Längsrichtung aufweist, und dass der Rückbau die Tragfähigkeit in beiden Richtungen signifikant reduziert. Das Einspielverhalten wird im Wesentlichen durch die Längsrichtung bestimmt.

Wie die in Tafel 3 ausgewiesenen Ergebnisse weiter zeigen, nimmt die adaptive Grenzlast unter der Annahme flexiblerer Vertikalfugen ab. Für das Ursprungssystem wird nur für Vertikalfugen mit einer Fugenflexibilität β , die kleiner als ca. 10^{-6} m/kN ist, der Nachweis des Einspielens erbracht. Für die revitalisierte Tragstruktur liegt die adaptive Grenzlast unabhängig von der Fugensteifigkeit unter 1, so dass für die angesetzten Lasten rechnerisch kein Einspielen nachgewiesen werden kann. Es ist jedoch zu überdenken, inwieweit

die in jede Beanspruchungsrichtung angesetzten Normlasten (50 Jahreswind) zu einer Überschätzung der Einwirkungen im Sinne der Adaption führen.

		Ursprungsstruktur ⇒ ↑		rückgebaute Tragstruktur ⇒ ↑	
$\beta = 10^{-15}$	p_{el}	0.72	1.16	0.54	0.78
	p_{pl}	1.18	1.96	1.02	1.60
	p_{ad}	1.14		0.96	
$\beta = 10^{-6}$	p_{ad}	1.12		0.93	
$\beta = 10^{-5}$	p_{ad}	0.98		0.72	

Tafel 3: Adaptive Grenzlasten für verschiedene Vertikalfugenflexibilitäten β [m/kN]

In Abb. 5 sind normierte Last-Verschiebungskurven für die Längsrichtung des rückgebauten Tragsystems unter der Annahme starrer Vertikalfugen dargestellt. Die Kurve (1) resultiert aus Berechnungen, bei denen die veränderliche Windbelastung einsinnig und monoton gesteigert wurde. Im Gegensatz dazu ist in Kurve (2) das Einspielverhalten unter richtungswechselnder Beanspruchung berücksichtigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass unter Zugrundelegung stabiler Restverformungen alle weiteren Belastungen bis zum Erreichen der adaptiven Grenzlast elastisch erfolgen. Der Anstieg der Kurve (2) unterhalb der adaptiven Grenzlast entspricht dem elastischen Anstieg der Kurve (1). Oberhalb der adaptiven Grenzlast treten zusätzliche inelastische Reaktionen auf. Bei weiterer einsinniger Lasterhöhung nähern sich beide Kurven einander an. Die plastischen Grenzlasten sind identisch.

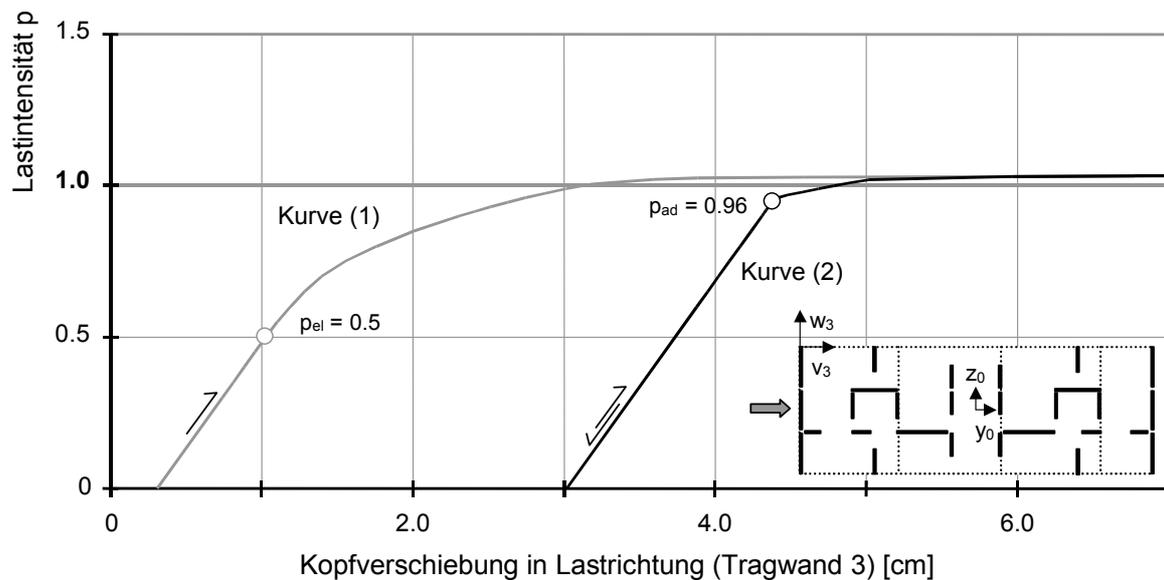


Abb. 5 Last-Verschiebungskurven in Gebäudelängsrichtung am rückgebauten System mit und ohne Berücksichtigung des Einspielverhaltens

Literatur

- [1] Raue, E.: Zur Bestimmung der adaptiven Grenzlast statisch unbestimmter Tragwerke; In: Industrie- und Spezialbau, Festschrift Prof. Hampe, HAB Weimar, 1993
- [2] Hampe, E., Raue, E., Timmler, H.G., Saad, M., Schüler, H.: Nonlinear bearing behaviour of adaptive reinforced concrete structures; In: Dynamics of civil engineering structures, A.A. Balkema, Rotterdam, 1996
- [3] Raue, E.; Timmler, H.-G.; Marx, S.; Weitzmann, R.; u.a.: Grundlagen der Anwendung elastisch-plastischer Berechnungsmodelle bei der Auslegung seismisch beanspruchter Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens; Forschungsberichte zum 1. u. 2. Förderungszeitraum, Weimar 1997, 2001
- [4] Weitzmann, R.: Bemessungskonzept für Stahlbetontragwerke auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen; Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, 2000
- [5] Hahn, St.; Timmler, H.-G.: Numerische Untersuchungen zum Einspielverhalten homogener Querschnitte; In: Schriften der Bauhaus-Universität Weimar Heft 113 „Massivbau Beiträge aus Theorie und Praxis“, Festschrift anlässlich des 60. Geburtstages von Prof. Dr.-Ing. habil. E. Raue, 2002
- [6] Marx, S.: Anwendung der mathematischen Optimierung bei der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analyse von Stahlbetontragwerken; Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, 2000