Biorthogonale Waveletsysteme in der Parameteridentifikation

Klaus Markwardt

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Anwendung von biorthogonalen Waveletsystemen bei der Auswertung dynamischer Experimente. Bei der Identifikation von MDOF-Systemen geht man beispielsweise von einer Reihe gemessener Beschleunigungen oder gemessener Geschwindigkeiten aus. Um aufwändige numerische Quadraturverfahren im Zeitbereich und die daraus resultierenden Fehlerquellen zu vermeiden, wurden in [6] auch Verbindungskoeffizienten für Integrationsoperatoren eingeführt. Deren Nutzung ermöglicht eine direkte Integration im gewählten Wavelet-Raum. Bei gemessenen Geschwindigkeiten werden auch Verbindungskoeffizienten für den Differentiationsoperator genutzt, um die zugehörigen Beschleunigungen effektiv in den gewählten Wavelet-Raum zu projizieren. Die Projektionsmatrizen zu obigen und anderen Operatoren werden dabei mit derartigen Verbindungskoeffizienten aufgebaut. Damit erfolgt eine bessere Einbettung der in den Systemgleichungen auftretenden Operatoren in Identifikationsverfahren auf Basis der schnellen Wavelet-Transformation (FWT). Insbesondere geht auf diesem Wege der Charakter als schnelles numerisches Verfahren nicht verloren. Nach einfacher Approximation (Preprocessing) des gemessenen Signals (Ableitung oder Beschleunigung) in einem Wavelet-Raum können Signal sowie zugehörige Integrale und Ableitungen dann in einem Zug projiziert und mit der schnellen Wavelet-Transformation zerlegt werden. In Verallgemeinerung zu [8] und [3], wo bzgl. der Verbindungskoeffizienten eine Beschränkung auf den Differentiationsoperator und orthogonale Waveletsysteme erfolgte, werden diese in [6] für eine breitere Klasse von Operatoren und für die allgemeineren biorthogonalen Waveletsysteme berechnet. Dabei wurde Wert auf eine einheitliche Systematik und algebraische Methodik gelegt. In [7] und [10] stand die Anwendung der kontinuierlichen WT noch im Mittelpunkt des Interesses. Die Arbeit [6] ist ausschließlich der Nutzung der diskreten WT gewidmet, die über orthogonale oder biorthogonale Waveletsysteme vermittelt wird.

Biorthogonale Wavelets

Jeder Vektor $c \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ mit endlich vielen nicht verschwindenden Einträgen soll hier kurz ein (endlicher) Filter genannt werden. Mit jeweils geeignet gewählten ganzzahligen s, u wird damit eine Darstellung der Gestalt

$$c^T = \big(\ \cdots\ ,\ \ 0,\ \ 0,\ \ c_s,\ \ \cdots\ ,\ \ c_u,\ \ 0,\ \ 0,\ \ \cdots\ \big) \tag{1}$$

möglich.

Definition 1. *Die Filter $\{a, \check{a}, b, \check{b}\}$ werden ein biorthogonales Filtersystem genannt, wenn mit den in [6] durch*

$$\tilde{\alpha}_l = \sum_k a_k \check{a}_{k+l}\,, \quad \tilde{\beta}_l = \sum_k b_k \check{b}_{k+l}\,, \quad \tilde{\gamma}_l^{(1)} = \sum_k \check{a}_k b_{k+l}\,, \quad \tilde{\gamma}_l^{(2)} = \sum_k a_k \check{b}_{k+l} \tag{2}$$

definierten Korrelationsvektoren 2.ter Art $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(a, \check{a})$, $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(b, \check{b})$ *usw. die Beziehungen*

$$\tilde{\alpha}_{2l} = 2\,\delta_{l0}\,, \qquad \tilde{\beta}_{2l} = 2\,\delta_{l0} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\gamma}_{2l}^{(1)} = \tilde{\gamma}_{2l}^{(2)} = 0 \qquad \forall l \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

gelten. Das biorthogonale Filtersystem soll hier außerdem die linearen Bedingungen

$$\sum_k a_k = \sum_k \check{a}_k = 2\,, \qquad \sum_k b_k = \sum_k \check{b}_k = 0\,, \tag{4}$$

erfüllen. a und $\check{a}$ können dann als Tiefpassfilter (Skalierungsvektoren) mit den zugehörigen Hochpassfiltern (Waveletvektoren) b und $\check{b}$ interpretiert werden. Das ganzzahlige Indexintervall $[s,u] \subset \mathbb{Z}$ sei in minimaler Weise so gewählt, dass alle nicht verschwindenden Filterkoeffizienten des obigen Systems erfaßt werden.

Ausgehend von [4] wurde in [6], Anhang E gezeigt, dass die Gleichungen

$$\sum_k a_{2k} = \sum_k a_{2k+1} = 1\,, \qquad \sum_k \check{a}_{2k} = \sum_k \check{a}_{2k+1} = 1, \tag{5}$$

und damit insbesondere die Formeln

$$(-1)^n a_n = 0 \quad \text{und} \quad (-1)^n \check{a}_n = 0 \tag{6}$$

gelten. In [6] wurde ebenfalls die Äquivalenz von (3) zu den ansonsten verwendeten Biorthogonalitätsbedingungen nachgewiesen.
Dem obigen Filtersystem werden hier per Definition die Analysefunktionen

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \varphi(2t-k)\,, \qquad \psi(t) = \sum_k b_k \varphi(2t-k) \tag{7}$$

und die Synthesefunktionen

$$\check{\varphi}(t) = \sum_k \check{a}_k \check{\varphi}(2t-k)\,, \qquad \check{\psi}(t) = \sum_k \check{b}_k \check{\varphi}(2t-k) \tag{8}$$

zugeordnet. Unter Voraussetzung entsprechender Existenz- und Regularitätseigenschaften entstehen mit $\check{\varphi}, \varphi$ Skalierungsfunktionen mit zugehörigen Wavelets $\check{\psi}, \psi$. Dabei sollten die Filterkoeffizenten im Sinne der obigen Charakterisierung so gewählt werden, dass die Momente $M_n(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t)\, dt$ bis zu möglichst hoher Ordnung verschwinden und dass $\check{\varphi}$ gute Regularitätseigenschaften besitzt. Letzteres wird in der Regel mit $\check{\varphi} \in H^\nu(\mathbb{R})$ bei möglichst großem Sobolev-Exponenten erreicht. Mit zunehmender Filterlänge kann diese Aufgabenstellung besser erfüllt werden. Die damit verbundene bessere Frequenzlokalisierung führt jedoch zu einer verschlechterung der Zeitlokalisierung. Über die Auswahl der Filter erfolgt also die Tendenzorientierung in Richtung auf ein Zeit- oder Frequenzverfahren.
Lösungen von (7)-(8) im Distributionenbereich existieren unter den obigen Voraussetzungen stets. Sind gewisse Eigenwertbedingungen erfüllt, so kann abgesichert werden, dass die durch die Skalierungsgleichungen (7) und (8) definierten Funktionen zumindest zu $L^2(\mathbb{R})$ gehören und auf ihrer Grundlage eine effektive Multiskalenanalyse (MSA) ermöglicht wird.

Definition 2. *Mit den anlog zu (2) definierten Korrelationen 1. Art $\alpha = \alpha(a,a)$ und $\check{\alpha} = \check{\alpha}(\check{a},\check{a})$ soll unter Verwendung von $N = u - s$ die zu a gehörige Lawtonmatrix durch*

$$L(a) = ((L_{ij})) = \frac{1}{2}((\alpha_{2i-j})) \quad \textit{mit} \quad i,j = -N, \cdots, N \tag{9}$$

und analog die zu $\check{a}$ gehörige Lawtonmatrix $L(\check{a})$ definiert werden.

Ausgehend von

$$\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j}\,\varphi(2^j t - k)\,, \qquad \psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j}\,\psi(2^j t - k) \tag{10}$$

sowie den entsprechenden Dilatations- und Translationsvarianten von $\check{\varphi}$ und $\check{\psi}$ können dann unter Voraussetzung der obigen Definitionen die folgenden Behauptungen bewiesen werden.

Satz 3. *Ist* $\lambda_0 = \check{\lambda}_0 = 1$ *ein einfacher Eigenwert der beiden Lawtonmatrizen* $L(a)$ *und* $L(\check{a})$ *und sind für alle anderen Eigenwerte* $\{\lambda_\nu\}$ *und* $\{\check{\lambda}_\nu\}$ *die Ungleichungen* $|\lambda_\nu| < 1$ *und* $|\check{\lambda}_\nu| < 1$ *erfüllt, dann gelten die folgenden Aussagen:*
Die Gleichungen (7)-(8) besitzen quadratisch integrierbare Lösungen mit kompaktem Träger in $[s, u]$. *Durch die Forderungen*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(t)\, dt = 1\,. \tag{11}$$

werden diese eindeutig bestimmt. Sie erfüllen insbesondere die Biorthogonalitätseigenschaften

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{0,k}\ ,\ \check{\varphi}_{0,l} \rangle &= \delta_{k,l}\,, && (12)\\ \big\langle \varphi_{i,k}\ ,\ \check{\psi}_{j,l} \big\rangle = \langle \check{\varphi}_{i,k}\ ,\ \psi_{j,l} \rangle &= 0 \qquad \textit{für} \quad j \geq i && (13)\\ \textit{und} \qquad \big\langle \psi_{i,k}\ ,\ \check{\psi}_{j,l} \big\rangle &= \delta_{i,j} \cdot \delta_{k,l}\,, && (14) \end{aligned}$$

die eine MSA und damit eine schnelle WT ermöglichen. Bezüglich der Waveletzerlegung sind die Stabilitätsbedingungen

$$C_1 \|f\|^2 \leq \sum_{l,j} |\,\langle f\ ,\ \psi_{l,j} \rangle\,|^2 \leq C_2 \|f\|^2 \tag{15}$$

und analoge Stabilitätsbedingungen für $\check{\psi}$ *erfüllt.*

Beweis. Interpretation von Aussagen in [4], [5], [6] bzw. [9]. □

Ausgehend von der Festlegung von Analyse- und Synthesefunktionen erfolgt die Approximation auf dem Level J in der Gestalt

$$\check{P}_J(f)(t) = \sum_\nu S_{J\nu}\, \check{\varphi}_{J,\nu}(t) \qquad \text{mit} \qquad S_{J\nu} = \langle f\ ,\ \varphi_{J,\nu} \rangle \tag{16}$$

Ein anwendbarer Mallat-Algorithmus liefert jetzt mit $l = J, \cdots, L+1$

$$S_{l-1,\nu}\ = \langle f\ ,\ \varphi_{l-1,\nu} \rangle\ = \sum_r h_{r-2\nu}\, S_{l,r}\,, \qquad W_{l-1,\nu}\ = \langle f\ ,\ \psi_{l-1,\nu} \rangle = \sum_r g_{r-2\nu}\, S_{l,r} \tag{17}$$

die Waveletkoeffizienten $\{W_{l\nu}\}$ der FWT (Signalanalyse) . Über

$$\check{P}_J(f) = \sum_\nu S_{L\nu}\, \check{\varphi}_{L,\nu}\ + \sum_{l=L}^{J-1} \left\{ \sum_\nu W_{l\nu}\, \check{\psi}_{l,\nu} \right\} \tag{18}$$

kann davon ausgehend eine Rekonstruktion des Signals in Gestalt einer Multiskalendarstellung erfolgen, die einer Frequenzbandzerlegung des Signals entspricht.

Verbindungskoeffizienten für D-homogene Operatoren

Die Gruppen der zu reellem r gehörigen Translationen $T(r)$ und zu positivem s gehörigen normierten Dilatationen $D(s)$ seien durch

$$T(r)\ :\ \ f(t)\ \rightarrow\ f(t-r)\,, \qquad D(s)\ :\ \ f(t)\ \rightarrow\ \sqrt{s} f(st)\,, \tag{19}$$

gegeben. Durch leichte Verschärfung der Definition in [6] erhält man

Definition 4. *Für einen kausalen und linearen Operator K soll genau dann $K \in \mathbb{H}_\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
Es sei V_1 ein Teilraum von $L_0^2(\mathbb{R})$ und V_2 ein Teilraum von $L_{loc}^2(\mathbb{R})$, wobei $T(r)\,V_i \subset V_i$ und $D(s)\,V_i \subset V_i$ für $i = 1,2$, beliebige $r \in \mathbb{R}$ und beliebige $s > 0$ erfüllt ist. Der lineare Operator $K : V_1 \to V_2$ möge für diese Parameterwerte den Vertauschbarkeitsrelationen

$$K\,T(r) = T(r)\,K \qquad \text{und} \qquad K\,D(s) = s^\lambda\,D(s)\,K \tag{20}$$

genügen. K ist also insbesondere als D-homogen vom Grade λ charakterisierbar.

Bemerkung 5. *Bei geeignet ausgewählten Unterräumen erfüllt $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ die Beziehung $\mathcal{D} \in \mathbb{H}_1$ und für $\mathcal{D}^n = \frac{d^n}{dt^n}$ folgt unmittelbar $\mathcal{D}^n \in \mathbb{H}_n$.*
Für den Integrationsoperator $\mathcal{I}(f)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$ gilt analog $\mathcal{I}^n \in \mathbb{H}_{-n}$. Weitere Beispiele und Bemerkungen sind in [6] zu finden.

Definition 6. *Ausgehend von den Varianten (10) werden die Verbindungskoeffizienten eines Operators $K \in \mathbb{H}_\lambda$ definiert durch*

$$\Gamma_{lj}^{mk}\left(\check{f}, g\right) = \left\langle K\,\check{f}_{l,j}\ ,\ g_{m,k}\right\rangle\,, \tag{21}$$

wobei für $\check{f}$ wahlweise $\check{\varphi}$ oder $\check{\psi}$ und für g wahlweise φ oder ψ eingesetzt werden können. Außerdem finden die Kurzformen

$$\Gamma_j^k\left(\check{f}, g\right) = \Gamma_{0j}^{0k}\left(\check{f}, g\right) \quad \text{und} \quad \Gamma_j^k = \Gamma_j^k\left(\check{\varphi}, \varphi\right) \tag{22}$$

Verwendung. Die Γ_0^k werden Grundkoeffizienten des Operators K genannt.

Sämtliche zu Skalierungsfunktionen und Wavelets gehörigen Verbindungskoeffizienten sowie die gemischten Verbindungskoeffizienten sind in endlich vielen Schritten exakt berechenbar. wenn die Grundkoeffizienten bekannt sind. Insbesondere gilt $\Gamma_j^k = \Gamma_0^{k-j}$.
Die Lawtonmatrix 2.ter Art $\tilde{L} = \tilde{L}(a, \check{a})$ wird hier definiert, indem in (9) die Korrelationen 1. Art durch die entsprechenden $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(a, \check{a})$ aus (2) ersetzt werden. Die Grundkoeffizienten von $K \in \mathbb{H}_\lambda$ genügen damit dem Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1-N}^{N-1} (\tilde{L}_{k\nu} - 2^{-\lambda}\delta_{k\nu})\Gamma_0^\nu = -\frac{1}{2}\sum_{\nu>N-1} \tilde{\alpha}_{2k-\nu}\Gamma_0^\nu\,, \tag{23}$$

wobei die Γ_0^ν auf den rechten Seiten mit Hilfe der diskreten Momente $m_n(a) = \sum\limits_k k^n a_k$ rekursiv berechenbar sind. Für die Integrationsoperatoren $\mathcal{I}^n$ ergeben sich einfache geschlosssene Formeln, für die Differentiationsoperatoren $\mathcal{D}^n$ verschwinden die rechten Seiten. Hier kann dann jedoch eine zusätzliche inhomogene Gleichung aufgestellt werden (vgl. [6]). Damit weden alle Verbindungskoeffizienten für die gängigen in der Literatur und in Programmpaketen genutzten Waveletsysteme exakt berechenbar. Dies ermöglicht eine sehr flexible Herangehensweise bei der Nutzung dieser Systeme zur Lösung von Identifikationsaufgaben.
Wird ein Operator $K \in \mathbb{H}_\lambda$ beispielsweise auf das in der Form (16) vorliegende Signal angewandt, so kann die anschließende Projektion $\check{P}_J$ auf das gleiche Level J durch

$$K\,\check{P}_J\,f \xrightarrow{\check{P}_J} \sum_n S_{Jn}^K\,\check{\varphi}_{J,n} \qquad \text{mit} \qquad S_{Jn}^K = 2^{\lambda\cdot J}\sum_\nu \Gamma_0^{n-\nu} S_{J\nu} \tag{24}$$

realisiert werden.

Grundzüge eines speziellen Identifikationsmodells

Ausgehend von einem MDOF-System mit n Freiheitsgraden

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{X}}\,(t)\;+\mathbf{S}\,\dot{\mathbf{X}}\,(t)\;+\mathbf{K}\,\mathbf{X}\,(t)\;=\;\mathbf{F}\,(t) \tag{25}$$

bei (teilweise) unbekannten örtlichen Dämpfungen und Steifigkeiten, kann eine FWT komponentenweise angewandt werden.
Die Erregungen des i-ten Freiheitsgrades $\left\{\mathbf{F}_i^{(v)}(t)\right\}_{i=1,\cdots,n}$ zum Versuch v werden nach eventuellem Preprocessing (vgl. [9] und [6]) entsprechend (16) im Zeilenvektor $\mathbf{S}_{i,J}^{(v,\mathbf{F})} = \left\{\mathbf{S}_{i,J,\nu}^{(v,\mathbf{F})}\right\}_{\nu=1,\cdots,E(J)}$ auf einem Level J erfaßt. Die Anwendung der FWT liefert für jedes feste i gemäß (17) die Multiskalenzerlegung $\left\{\mathbf{W}_{i,l,\nu}^{(v,\mathbf{F})}\right\}_{\nu=1,\cdots,E(l)}$ mit $J-1 \geq l \geq L$ und den abschließenden Skalierungskoeffizienten $\left\{\mathbf{S}_{i,L,\nu}^{(v,\mathbf{F})}\right\}_{\nu=1,\cdots,E(L)}$. In analoger Weise können die gemessenen Beschleunigungen $\left\{\ddot{\mathbf{X}}_i^{(v)}(t)\right\}$ über $\mathbf{S}_{i,J}^{(0,v,\ddot{\mathbf{X}})} = \left\{\mathbf{S}_{i,J,\nu}^{(v,\ddot{\mathbf{X}})}\right\}_{\nu=1,\cdots,E(J)}$ erfaßt und in $\mathbf{W}_{i,J-1}^{(0,v,\ddot{\mathbf{X}})}$, $\mathbf{W}_{i,J-2}^{(0,v,\ddot{\mathbf{X}})}$, $\cdots$, $\mathbf{W}_{i,L}^{(0,v,\ddot{\mathbf{X}})}$, $\mathbf{S}_{i,L}^{(0,v,\ddot{\mathbf{X}})}$ zerlegt werden. Ausgehend von den zu den Beschleunigungen gehörigen Projektionen $\left\{\mathbf{S}_{i,J,\nu}^{(v,\ddot{\mathbf{X}})}\right\}$ erfolgt mit Hilfe von Verbindungskoeffizienten zu $K = \mathcal{I}$ bzw. $K = \mathcal{I}^2$ über (24) die Projektion der zugeordneten Geschwindigkeiten und Wege auf $\left\{\mathbf{S}_{i,J,\nu}^{(-1,v,\ddot{\mathbf{X}})}\right\}$ und $\left\{\mathbf{S}_{i,J,\nu}^{(-2,v,\ddot{\mathbf{X}})}\right\}$. Die Symbolik wurde wegen der Parameterwerte $\lambda = -1$ und $\lambda = -2$ in (20) so gewählt. Eine Zerlegung wie oben führt unter Berücksichtigung von $\mu = 0, -1, -2$ zu $\mathbf{W}_{i,J-1}^{(\mu,v,\ddot{\mathbf{X}})}$, $\cdots$, $\mathbf{W}_{i,l}^{(\mu,v,\ddot{\mathbf{X}})}$, $\cdots$, $\mathbf{W}_{i,L}^{(\mu,v,\ddot{\mathbf{X}})}$ und $\mathbf{S}_{i,L}^{(\mu,v,\ddot{\mathbf{X}})}$. Vertikale Zusammenfassung bezüglich der Freiheitsgrade i und horizontale Zusammenfassung bezüglich der Versuchsgesamtheit $\mathbf{V} = \{v\}$ liefern bei jeweils fesgehaltenem Frequenzband l die Matrizengleichungen

$$\mathbf{M}\,\mathbf{W}_l^{(0,\mathbf{V},\ddot{\mathbf{X}})} + \mathbf{C}\,\mathbf{W}_l^{(-1,\mathbf{V},\ddot{\mathbf{X}})} + \mathbf{K}\,\mathbf{W}_l^{(-2,\mathbf{V},\ddot{\mathbf{X}})} = \mathbf{W}_l^{(\mathbf{V},\mathbf{F})} \qquad l = L,\,\cdots\,,\,J-1 \tag{26}$$

sowie die zum untersten Frequenzband dieser Zerlegung gehörige Abschlußgleichung

$$\mathbf{M}\,\mathbf{S}_L^{(0,\mathbf{V},\ddot{\mathbf{X}})} + \mathbf{C}\,\mathbf{S}_L^{(-1,\mathbf{V},\ddot{\mathbf{X}})} + \mathbf{K}\,\mathbf{S}_L^{(-2,\mathbf{V},\ddot{\mathbf{X}})} = \mathbf{S}_L^{(\mathbf{V},\mathbf{F})}\,. \tag{27}$$

Prinzipiell gibt es jetzt zwei Möglichkeiten zur Lösung der Identifikationsaufgabe:
1. Zusammenfassung der Matrizengleichungen (26)-(27) zu einem Gleichungssystem, dass mit der Methode der kleinsten Quadrate oder einem anderen Optimierungsverfahren gelöst werden kann.
2. Beginnend mit $l = L$ wird bei ständig wachsendem Umfang des Parameteransatzes für jeden Frequenzindex l zu (27)-(26) eine Optimierungsaufgabe gestellt. Dieses Multilevelverfahren ist sicher etwas aufwändiger zu entwickeln und zu programmieren. Auf Grund seiner besser angepaßten Strukturierung und der Möglichkeit zur sukzessiven Lösung einer Folge niedrig dimensionierterer Optimierungsaufgaben sollte man es jedoch vorziehen.

Zusammenfasung

Es werden die Lösungen von Identifikationsaufgaben für MDOF-Systeme anhand simulierter Beispiele vorgestellt. Hingewiesen sei an dieser Stelle auch darauf, dass ein wesentlicher

Teil der in [11] verwendeten Lösungsalgorithmen auf die in [6] und hier entwickelte Methodik aufbauen. In [11] wurden diese Algorithmen zur direkten Parameterschätzung auf reale baudynamische Versuche angewandt. Hervorzuheben ist, dass diese Algorithmen dort über ein Koeffizienten-Thresholding mit einem effektiven Denoisingverfahren verbunden werden konnten. Damit wurde eine wesentliche Forderung eines praxisrelevanten Verfahrens erfüllt. In [11] wurde jedoch ausschließlich mit Daubechies-Filtern, also mit speziellen orthogonalen Waveletfiltern, gearbeitet. Mit den hier entwickelten Möglichkeiten zur Einbeziehung biorthogonaler Waveletsysteme sind wahrscheinlich flexibere, effektivere und stabilere Identifikaionsverfahren möglich. Betont seien diesbezüglich die in der Signal- und Bildverarbeitung herausgestellten Symmetrie- und Kompressionseigenschaften derartiger Filtersysteme sowie die teilweise verbesserten Approximations- und Regularitätseigenschaften (vgl.[9], [4], [5] und [2]). Außerdem ergeben sich Möglichkeiten zur Konstruktion Operator-abhängiger Wavelets, die u.U. auf eine bessere Strukturierung von Identifikationsproblemen führen. Die bisherigen Ansätze mit derartigen Wavelets (vgl. [1]) haben auch in anderen Gebieten der angewandten Mathematik kaum zu praktisch verwertbaren Resultaten geführt.
In einer Reihe von Ingenieurarbeiten spielt die Anwendung der stetigen WT bei der Enwicklung von Algorithmen noch eine zu akzentuierte Bedeutung. Auch bei der künftigen Anwendung der WT innerhalb der Baudynamik, wie etwa bei Folgearbeiten von [11], sollte jedoch der Trend zur FWT dominieren.

Literatur

[1] A. K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder. *Wavelets: Theorie und Anwendungen.* Teubner, Stuttgart, 2nd edition, 1998.

[2] W. Bäni. *Wavelets: Eine Einführung für Ingenieure.* Oldenbourg Verlag, München, 2002.

[3] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supportet wavelets. *SIAM J. Numer. Anal.*, 6(6):1716–1740, December 1992.

[4] A. Cohen. Biorthogonal wavelets. In C. C., editor, *Wavelets in Analysis and Applications II: Wavelets :A Tutorial in Theory and Application*, pages 123–152, New York, 1992. Academic Press.

[5] A. Cohen and I. Daubechies and J.C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(5):485–560, 1992.

[6] K. Markwardt. Systemanalyse und Parameteridentifikation mit Hilfe der schnellen Wavelet-Transformation (im Druck). In *ISM-Bericht 4/2003, ISSN:1610-7381*, pages 1–72, Institut für Strukturmechanik, Bauhausuniversität Weimar, 99421 Weimar, 2003. Ch. Bucher, C. Köhnke, M. Vormwald.

[7] K. Markwardt and V. Zabel. Betrachtungen zur Anwendung der Wavelet-Transformation in der Systemidentifikation. In *6. Institutskolloquium, Bericht 1/00*, pages 107–126, Institut für Strukturmechanik, Bauhausuniversität Weimar, 99421 Weimar, Juli 2000. Ch. Bucher, G. Burkhardt, M. Vormwald.

[8] Resnikoff. *Wavelet Analysis.* Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1998.

[9] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA 0218181 USA, 1997.

[10] V. Zabel. The application of the wavelet transformation in parametric system identification. In *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference (IMAC-XX)*, volume I, pages 831–837, Los Angeles, California, February 4-7 2002. Society of Experimental Mechanics.

[11] V. Zabel. *Applications of Waveletanalysis in System Identification, Diss. verteidigt im April 2003.* Institut für Strukturmechanik, Bauhausuniversität Weimar, 99421 Weimar, Marienstr. 15, 2003.