

**Bemessungskonzept für Stahlbetontragwerke auf der Grundlage
deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen

der

BAUHAUS-UNIVERSITÄT WEIMAR

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Rüdiger Weitzmann

aus Erfurt

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. E. Raue

Koreferenten: Prof. Dr.-Ing. K. Meskouris

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Burkhardt

Tag der Disputation: 30. August 2000

Kurzreferat

Das Ziel der Arbeit besteht in der Entwicklung eines Bemessungskonzeptes auf der Basis nichtlinearer Schnittgrößen für statisch und dynamisch beanspruchte Stahlbetontragwerke. Das Konzept geht dabei von einheitlichen Kriterien zur Analyse der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit auf der Grundlage *deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen* aus. Der deformationsbasierte Grenzzustand ist dadurch charakterisiert, daß neben der statischen und kinematischen Zulässigkeit eines Tragwerkszustandes auch die Einhaltung von definierten Verzerrungs- bzw. Verformungsgrenzwerten gewährleistet ist. Aus Betrachtungen im Kontinuum werden diskrete Modelle zur Lösung von physikalisch und geometrisch nichtlinearen Grenzwiderstandsaufgaben mit und ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten abgeleitet. Die numerische Untersetzung basiert auf Methoden der nichtlinearen Optimierung. Auf der Grundlage dieser Berechnungsmodelle wird eine *Bemessungskonzeption* entwickelt. Der Schwerpunkt der Untersuchungen bezieht sich auf die praxisnahe Einbindung der entwickelten nichtlinearen Analyseverfahren in den Tragwerksplanungsprozeß unter Beachtung normativer Vorgaben. Die Leistungsfähigkeit des Konzeptes wird anhand von Beispielen nachgewiesen.

Abstract

The objective is the development of a design strategy for statically or dynamically excited reinforced concrete structures based on nonlinear distributions of internal forces. The concept starts from an uniform criterion to describe the bearing capacity and serviceability on the bases of deformation based limit states. This limit state is characterized on the one hand by fulfilling the classical demands of ensuring the static and kinematic admissibility and on the other hand by considering predefined limits of deformations. Beginning from modelling under continuous conditions discrete models are derived for solving physical and geometrical nonlinear limit resistance problems with or without the option to consider effects caused by load sequences. For solving these problems methods of nonlinear programming are used. On the basis of these calculation models a strategy for the design is developed. The investigations are due to a practical integration of the developed nonlinear analysis methods in the structural planning process under consideration of national or international standards. The application of this concept is shown with help of example calculations.

Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	9
1.1	Problemübersicht.....	9
1.2	Lösungsansatz und Einordnung der Arbeit	12
1.3	Zielstellung der Arbeit	15
2	GRUNDLAGEN UND STAND DER KENNTNIS ZUR GRENZZUSTANDSANALYSE ..	17
2.1	Begriffsbestimmung	17
2.2	Materialgesetze für die Grenzzustandsanalyse von Stahlbetontragwerken.....	19
2.3	Klassische Grenzzustandsdefinitionen.....	20
2.3.1	Elastischer Grenzzustand	21
2.3.2	Plastischer Grenzzustand	22
2.3.3	Adaptiver Grenzzustand	24
2.4	Bemerkungen zur Eindeutigkeit von Restzuständen bei Lastfolgeuntersuchungen, Definition der konservativen Grenzlast.....	29
3	BERECHNUNGSMODELLE ZUR ANALYSE DEFORMATIONSBASIERTER GRENZZUSTÄNDE	32
3.1	Kontinuumsmechanische Grundbeziehungen.....	32
3.1.1	Inhalt und Annahmen.....	32
3.1.2	Der elastoplastische Körper.....	33
3.1.2.1	Definitionsbereich und Strukturvariablen	33
3.1.2.2	Gleichgewicht und statische Randbedingungen	35
3.1.2.3	Verträglichkeit und geometrische Randbedingungen.....	35
3.1.2.4	Materialgesetz.....	36
3.1.3	Der deformationsbasierte Grenzzustand.....	39
3.1.3.1	Definition des deformationsbasierten Grenzzustandes.....	39
3.1.3.2	Grundlagen und Methodik zur Ableitung von Extremalprinzipien für erweiterte Grenzzustandsbetrachtungen	40
3.1.3.3	Analyse des deformationsbasierten Grenzzustandes ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten	43
3.1.3.4	Analyse des deformationsbasierten Grenzzustandes mit Sicherstellung der Tragwerksadaption.....	44
3.1.3.4.1	Das Konzept des superponierten Restzustandes	44
3.1.3.4.2	Das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort.....	50

3.2 Diskrete Modellbeschreibung am Beispiel ebener Stabtragwerke	53
3.2.1 Finite Elemente Modellierung geometrisch linearer Systeme	53
3.2.1.1 Elementierung und Bezugssystem	53
3.2.1.2 Kenngrößen des Bewegungszustands	54
3.2.1.3 Beziehung zwischen Stabrandschnittkraft und Knotenkraft	55
3.2.1.4 Beziehung zwischen Stabrandverformung und Knotenverformung.....	56
3.2.1.5 Beziehung zwischen Stabrandkenngrößen und Elementkenngrößen.....	57
3.2.1.6 Massen-, Dämpfungskräfte und äußere Lasten.....	57
3.2.1.7 Materialgesetz.....	58
3.2.1.7.1 Elastische Stabrandverformungen.....	58
3.2.1.7.2 Plastizitätsbedingungen ohne Verfestigung.....	59
3.2.1.7.3 Plastizitätsbedingungen mit Verfestigung	60
3.2.1.7.4 Plastische Stabrandverformungen.....	61
3.2.1.8 Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen	62
3.2.1.9 Verträglichkeitsbeziehungen und geometrische Randbedingungen.....	62
3.2.2 Erweiterungen zur näherungsweise Lösung geometrisch nichtlinearer Probleme.....	63
3.3 Numerische Modelle zur Grenzzustandsanalyse auf der Basis der nichtlinearen Optimierung	66
3.3.1 Bemerkungen zur Anwendung der mathematischen Optimierung.....	66
3.3.2 Notationsvereinbarung.....	67
3.3.3 Aufbau klassischer Berechnungsmodelle	68
3.3.4 Modelle zur deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse ohne Beachtung von Lastfolgeeffekten	69
3.3.5 Modelle zur deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse mit Sicherung der Tragwerksadaption.....	73
3.3.5.1 Modelle auf der Basis des Konzeptes des superponierten Restzustandes	73
3.3.5.2 Modelle auf der Basis des Konzeptes der gekoppelten plastischen Antwort.....	74
3.3.5.3 Bemerkungen zur näherungsweise Berechnung von Restdeformationszuständen bei Lastfolgeproblemen	76
3.3.5.4 Modelle mit Berücksichtigung geometrisch nichtlinearen Verhaltens.....	77
3.3.6 Bemerkungen zur Lösung mehrparametrischer Grenzzustandsprobleme.....	84

4	BEMESSUNGSKONZEPT AUF DER GRUNDLAGE DEFORMATIONSBASIERTER GRENZZUSTÄNDE	86
4.1	Einführung	86
4.2	Vorschlag für ein normengerechtes Bemessungskonzept auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustände	87
4.2.1	Übersicht	87
4.2.2	Modellebenen	88
4.2.3	Bemessungsführung.....	89
4.2.4	Bemessung statisch beanspruchter Tragwerke	90
4.2.4.1	Schritt 1 Modellbildung und Berechnung unter Annahme elastischen Verhaltens.....	90
4.2.4.2	Schritt 2 Vorbemessung und Systemanpassung	94
4.2.4.3	Schritt 3 Formulierung und Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe	99
4.2.4.4	Schritt 4 Konstruktive Durchbildung.....	109
4.2.5	Anwendung des Bemessungskonzeptes auf extrem dynamisch beanspruchte Tragwerke.....	109
4.3	Anwendungsbeispiele	114
4.3.1	Statisch beanspruchtes Tragwerk.....	114
4.3.2	Seismisch beanspruchtes Tragwerk	126
5	SCHLUßBEMERKUNGEN.....	134
5.1	Ergebnisse.....	134
5.2	Ausblick	137
6	LITERATURVERZEICHNIS	139

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Bauhaus-Universität Weimar. In dieser Zeit wirkte ich am Vorhaben der Deutschen Forschungsgesellschaft zum Thema „Grundlagen und Anwendung elastisch-plastischer Berechnungsmodelle bei der Auslegung seismisch beanspruchter Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens“ sowie an Projekten des Sonderforschungsbereichs 524 „Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken“ mit.

Für die Anregungen zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Diskussionen möchte ich mich beim Leiter des Lehrstuhls Massivbau I, meinem Betreuer

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue

sehr herzlich bedanken. Mein Dank gilt außerdem meinen Kollegen am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau.

Weimar, März 2000

1 Einleitung

1.1 Problemübersicht

Die Beurteilung und Beeinflussung von Tragwerkseigenschaften gehören zu den wesentlichen Aufgaben in der Planung von sicheren, zweckdienlichen, dauerhaften und wirtschaftlichen Bauwerken. Wichtiges Instrument dabei ist die Anwendung mechanischer Modelle, mit deren Hilfe Nachweis- und Bemessungsaufgaben gelöst werden können. Hierbei kommt der Bewertung von kritischen Tragwerkszuständen anhand von Grenzzuständen eine entscheidende Rolle zu, wobei Grenzzustände der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit aus Sicht des Tragwerksplaners von besonderem Interesse sind. Im Stahlbetonbau sind Verfahren zur Schnittgrößenermittlung auf der Basis der Elastizitätstheorie verbreitet. Künftig werden in verstärktem Umfang auch physikalisch nichtlineare Berechnungsverfahren Anwendung finden. Neben der Option einer wirklichkeitsnäheren Erfassung des Tragverhaltens (Aspekt der Modellierungsqualität) und der Erweiterung konstruktiver Gestaltungsmöglichkeiten (Aspekt der Bautechnologie) wird auch die Möglichkeit zur Erschließung von Tragreserven (Aspekt der Wirtschaftlichkeit) ein Anreiz sein, die traditionellen Verfahren zu ergänzen bzw. abzulösen.

Der Übergang zu einer nichtlinearen Bemessungsstrategie für statisch und dynamisch beanspruchte Tragwerke über die Betrachtung am Querschnitt hinaus erscheint vor dem Hintergrund jahrzehntelanger Forschung problemlos möglich. Betrachtet man die Anwendbarkeit dieser Methoden unter dem Aspekt einer *Bemessung nach Normen*, so muß auf einige Besonderheiten aufmerksam gemacht werden:

1. In den letzten Jahren sind vor allem Fortschritte bei der Entwicklung und Implementierung von nichtlinearen Übertragungsfunktionen erzielt worden, die ihre Leistungsfähigkeit bei der Begleitung von Experimenten oder bei Nachrechnungen existierender Tragwerke unter Beweis gestellt haben [1-17]. Analysiert man die zugrunde liegenden Programmstrukturen, so wird deutlich, daß diese Systeme vorrangig für die Lösung von Nachweisaufgaben ausgelegt sind, d.h. die Tragwerksantworten werden für Widerstands- und Einwirkungssituationen ermittelt, die als umfassend bekannt vorausgesetzt werden. Die Zulässigkeit von Lösungen muß über externe Prozeduren nachgewiesen werden. Beim Entwurf bzw. bei der Auslegung von Tragwerken steht jedoch in der Regel nicht die Feststellung, sondern vor allem die gezielte Anpassung des Tragverhaltens anhand von Bemessungszielen und Grenzzustandsbetrachtungen im Mittelpunkt des Interesses. Zur Lösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen ein iterativer Berechnungsablauf notwendig.

2. Bemessungsstrategien auf der Basis von Grenzzustandsmodellen zur Ermittlung der Tragfähigkeit verwenden überwiegend Fließgelenkmethoden (Plastizitätstheorie) zur Berechnung von Schnittgrößenverteilungen und sind demzufolge nur eingeschränkt geeignet, das im Stahlbetonbau vorliegende Spektrum zu lösender Nachweis- und Bemessungsaufgaben zu behandeln [18-26]. Nachteilig ist, daß auch hier die Widerstandsverteilung im Tragwerk vorab gegeben sein muß und demzufolge lediglich Nachweisaufgaben gelöst werden können [27-29].
3. Bei nichtlinearen Systemen ist die Superposition elementarer Lastfälle im allgemeinen nicht zulässig. Es müssen Lastkombinationen vorab gebildet und in ihrer Vielfalt einzeln untersucht werden. In Kombination mit den Problemen aus Bemerkung 1 kann schon bei relativ einfachen Systemen ein nicht unerheblicher Aufwand entstehen.
4. Die Anwendung von Sicherheitskonzepten mit Teilsicherheitsbeiwerten verschärft das zuvor benannte Problem, da je nach Untersuchungsgegenstand neue Kombinationen mit unterschiedlich gewichteten Komponenten zu bilden sind. Auf die Möglichkeit einer linearen Skalierung von nichttrivialen Basislösungen muß verzichtet werden.
5. Während elastische Systeme nach der Entlastung in ihren Ausgangszustand zurückkehren, verbleiben nach Beanspruchung im physikalisch nichtlinearen Bereich Restspannungen bzw. Restverformungen im System, die das Antwortverhalten unter nachfolgenden Lastzyklen beeinflussen. Bei bekannter Lastreihenfolge kann das Verhalten durch Pfadverfolgung abgebildet werden. Im Normalfall ist die Reihenfolge der Lasteintragung beliebig bzw. kaum vorhersehbar, lediglich die Belastungsintensität kann abgeschätzt werden. Eng verknüpft mit diesem Phänomen ist die Tatsache, daß auch erheblich unterhalb von kritischen Gleichgewichtszuständen der Verlust der Querschnittskapazität infolge Lastwechsel eintreten kann. Schon bei niedriger Zyklenzahl (low cycle fatigue) können bei Lastintensitäten unterhalb plastischer Grenzbeanspruchungszustände alternierende oder progressive Plastizierungen hervorgerufen werden und zum Versagen führen. Die dabei ausgelösten Schadensakkumulationen können vermieden werden, wenn die Beanspruchungen unterhalb einer zum adaptiven Grenzzustand (Einspielzustand oder shakedown state) zugehörigen Lastintensität liegen. Kritisch zu bemerken ist, daß in aktuellen Normen und Normenentwürfen des Stahlbetonbaus die Aspekte des Lastfolgeinflusses unzureichend Beachtung finden und keine Überprüfungen zur Relevanz derartiger Untersuchungen gefordert und keine Hinweise zur Behandlung dieses Problemkreises gegeben werden.

6. Die Inanspruchnahme des inelastischen Verhaltens von Tragwerken kann unzulässig, akzeptabel oder erwünscht sein. In jedem Fall sind Grenzen plastischer Deformationen zu beachten. Das plastische Verformungsvermögen von Stahlbetonquerschnitten ist von der Konstruktion, den Materialeigenschaften und der Art der Beanspruchung abhängig und kann im Vergleich zu anderen Baustoffen (z.B. Stahl) nur als mäßig duktil eingestuft werden. Demzufolge muß eine Kontrolle der Deformationen unverzichtbarer Bestandteil von Bemessungskonzepten sein. Grenzdeformationen erlangen somit eine verstärkte Bedeutung als Beurteilungskriterien und charakterisieren zusätzlich zum Grenzgleichgewicht Grenzzustände der Tragfähigkeit. Traditionell wird die Einhaltung von Deformationsgrenzen über nachgeschaltete (explizite) Prozeduren nachgewiesen. Wünschenswert im Zusammenhang mit nichtlinearen Untersuchungen ist eine modellinterne (implizite) Berücksichtigung von Deformationskriterien bei der Lösung von Grenzzustandsaufgaben.

7. Beobachtet man das Planungsgeschehen im Stahlbetonbau, so ist festzustellen, daß zunehmend Belange der Gebrauchstauglichkeit wie z.B. Riß- oder Verformungsbeschränkungen entwurfsbestimmend werden. Bei Anwendung von nichtlinearen Berechnungsverfahren muß notwendigerweise auch dieser Aspekt der Tragwerksanalyse stärker ins Blickfeld rücken. Neben den bekannten Nachweisen aus Normen müssen je nach Untersuchungsgegenstand auch bauwerksspezifische Anforderungen an das Verformungs- und Schwingungsverhalten von Tragwerken erfüllt werden (z.B. bei empfindlichen Ausrüstungsgegenständen oder Versorgungseinrichtungen). Eine gekoppelte und damit gleichberechtigte Führung von Tragfähigkeits- und Gebrauchstauglichkeitsnachweisen über ein einheitliches Verfahren ist demnach wünschenswert und erhöht die Effizienz der Bearbeitung.

8. Ein weiteres Anwendungsgebiet für nichtlineare Verfahren sind extrem dynamisch beanspruchte Stahlbetontragwerke, wobei insbesondere der Lastfall Erdbeben im Blickfeld dieser Arbeit stehen soll. Die Ähnlichkeit der Schädigungsmechanismen infolge extremer statischer und dynamischer Beanspruchung ist Anlaß, eine einheitliche Strategie zur Behandlung beider Problemkreise anzustreben. Hierbei sind Verfahren von Vorteil, bei denen das Maß inelastischer Verformung für alle Bereiche des Tragwerkes implizit bemessen bzw. kontrolliert werden kann.

9. Die Komplexität der zu lösenden Aufgaben erfordert überwiegend eine numerische Problembehandlung. Die vorhandenen Methoden und Algorithmen der Mechanik zur Lösung nichtlinearer Probleme ermöglichen es, Simulationen mit hohem Detaillierungsgrad unter Berücksichtigung vielfältiger innerer und äußerer Einflüsse durchzuführen. Jede

Verfeinerung der Modellansätze verlangt zusätzliche Informationen. Die vorhandene Datenbasis ist damit ausschlaggebend für die Wahl geeigneter Geometrie- und Materialmodelle. Die Hilfsmittel zur Grenzzustandsanalyse müssen demzufolge so flexibel gestaltet werden, daß unterschiedliche Modellvorstellungen in einem einheitlichen Aufgabenformat verarbeitet werden können.

Die Bemerkungen 1 bis 9 verdeutlichen, daß der Übergang von einer linearen zu einer nichtlinearen Betrachtung am Gesamtragwerk nicht nur mit einem Wechsel des mechanischen Modells, sondern insgesamt mit einer Erweiterung des Problemkreises und einem erheblichen Mehraufwand in der Vorbereitung und Durchführung von rechnerischen Analysen verknüpft ist.

1.2 Lösungsansatz und Einordnung der Arbeit

In Tafel 1.1 ist ein Überblick über Beziehungen zwischen mechanischen Größen angegeben. Es wird deutlich, daß alle beteiligten Strukturgrößen sowohl als Teil der Widerstandsseite (innere Größen) als auch als Teil der Einwirkungsseite (äußere Größen) einer strukturellen Aufgabe aufgefaßt werden können. An den Schnittstellen zwischen inneren und äußeren Größen können bei Ansatz von Grenzzustandskriterien Nachweise geführt werden. Zur Lösung von Bemessungs- und Nachweisaufgaben ist es notwendig, geeignete Analysebedingungen zu schaffen, die jeweils aus Festlegungen zum Nachweismodell, zum Nachweisformat und zum Sicherheitskonzept bestehen und für Standardaufgaben weitgehend durch Normen bereitgestellt werden.

Bei der Analyse der Tragfähigkeit von Stahlbetonkonstruktionen dominieren heutzutage Grenzzustandsbetrachtungen im Raum der Kraftgrößen. Dabei wird eine Besonderheit elastisch-plastischer Tragwerke erkennbar, daß je nach Erfassungsgrad nichtlinearer Effekte der Zwang zum Wechsel in einen anderen Variablenraum besteht (Grenzbedingung = Fließbedingung). Die Entwicklung in den Nachweisformaten für biege- und normalkraftbeanspruchte Bauteile folgte diesen Gegebenheiten und verlief ausgehend von den Nachweisen zulässiger Spannungen (linear elastisches Materialverhalten) über den Nachweis aufnehmbarer Schnittgrößen (elastisch-plastisches Verhalten der Fasern des Querschnitts, elastisches Verhalten des Tragwerkmodells) bis hin zu nichtlinearen Berechnungen am Gesamtragwerk mit der Führung des Nachweises aufnehmbarer Belastungen [30].

Die Nachweisformate im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit hingegen sind weitgehend an Betrachtungen im Raum der Deformationen gebunden. Jedoch werden auch hier

Formate bevorzugt, die sich auf Spannungen als Eingangsgrößen der Berechnung beziehen (z.B. Begrenzung der Rißbreite ohne direkte Berechnung nach E DIN 1045-1 Abschnitt 11.2.3 [31]).

Tafel 1.1 Beziehungen zwischen strukturmechanischen Größen und Ansatzpunkte für Nachweiskonzepte

Im Zuge einer erweiterten Anwendung nichtlinearer Verfahren zur Schnittgrößenermittlung sind Formulierungen der Grenzkriterien in Abhängigkeit von Deformationsgrößen zu bevorzugen. Dafür sprechen folgende Argumente:

- Die Arbeitslinien von üblichen Baustoffen und Baustoffkombinationen können eindeutig in Abhängigkeit der Weggrößen angegeben werden, wohingegen eine eindeutige Abbildung als Funktion der korrespondierenden Kraftgröße nicht immer gegeben ist. Dies gilt vor allem für Materialien, die Fließ- oder Entfestigungsbereiche aufweisen.

Diese Betrachtung kann prinzipiell von der Faserebene auf die anderen Modellebenen (Querschnitt und Tragwerk) übertragen werden (siehe Tafel 1.1).

- Deformationsbasierte Untersuchungen gestatten eine durchgehende Grenzzustandsdefinition in allen Bereichen der Arbeitslinie (z.B. elastischer, plastischer Bereich). Die Erfassung von lokalen oder globalen Versagensformen infolge beschränktem Verformungsvermögen ist damit uneingeschränkt möglich. Diese Option wird bei Anwendung kraftgrößenbasierter Modelle nur in Spezialfällen geboten.
- Die Orientierung auf rein deformationsbasierte Formulierungen führt zu einer Straffung und Vereinheitlichung der Form von Nachweis- und Bemessungsaufgaben. Die Transformation von kraftgrößenbasierten Kriterien in äquivalente Abbildungen im Raum der Deformationen ist in der Mehrzahl der Fälle problemlos möglich.
- Der überwiegende Teil numerisch untersetzter mechanischer Modelle (z.B. nach der Finiten Elemente Methode) beruht auf weggößenbasierten Formulierungen. Mit der direkten Nutzung des zur Verfügung stehenden Variablenraums können vorteilhafte Implementierungen von Rand- und Grenzbedingungen abgeleitet werden.
- Bei Verwendung deformationsbasierter Grenzzustandsbedingungen wird das traditionelle Versagenskriterium aufrechterhalten, wonach ein Tragwerk versagt, wenn mindestens an einer Stelle kritische Werte erreicht werden (z.B. analog zur elastischen Grenzlast).
- Deformationsbasierte Grenzzustände können im Gegensatz zu kraftgrößenbasierten Grenzzuständen unabhängig von der Modellierungsstufe in jeder Abstraktionsebene (Dehnungen, Verzerrungen, Verformungen) definiert werden.
- Mit Blick auf eine Anwendung der deformationsbasierten Grenzzustandsmodelle als Hilfsmittel zur Lösung von Bemessungsaufgaben ist eine einheitliche Behandlung von Grenzzuständen der Tragfähigkeit- und Gebrauchstauglichkeit möglich.

Die Modelle für deformationsbasierte Grenzzustandsbetrachtungen können auf der Basis eines Komplementaritätsproblems (Kuhn-Tucker-Theorie) hergeleitet werden, das die strukturemechanischen Beziehungen des Gleichgewichts, der Verträglichkeit, der Materialeigenschaften und der statischen und geometrischen Randbedingungen miteinander verknüpft. Durch Diskretisierung lassen sich diese Extremalaufgaben in nichtlineare Optimierungsaufgaben überführen, die als solche gelöst werden können. Die direkte Implementie-

rung dieser Berechnungsmodelle in einem Bemessungskonzept ist naheliegend, da Bemessungsprozesse allgemein den Charakter von Optimierungsproblemen besitzen.

1.3 Zielstellung der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer Bemessungsstrategie für statisch und dynamisch beanspruchte Stahlbetontragwerke auf der Basis deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen. Für die Untersuchungen werden zwei Schwerpunkte gesetzt:

- 1.) **Entwicklung von deformationsbasierten Grenzzustandsmodellen zur Analyse von physikalisch und geometrisch nichtlinearen Tragwerken.** Die Grundlagen werden allgemeingültig für das Kontinuum hergeleitet, wobei eine Option zur Erfassung von Lastfolgeeffekten mittels Ansatz der Theorie adaptiver Tragwerke gegeben wird. Die Überführung in diskrete Modelle wird exemplarisch anhand ebener Stabtragwerke mit linear elastisch-plastischem Verhalten erläutert. Die numerischen Untersuchungen werden unter Verwendung von Algorithmen der nichtlinearen Optimierung vorgenommen. Die Modelle auf der Basis der Einspieltheorie werden für die Lösung statischer und dynamischer Probleme vorbereitet.
- 2.) **Integration der unter 1.) entwickelten Grenzzustandsmodelle in eine Bemessungsstrategie für Stahlbetontragwerke auf der Grundlage nichtlinearer Schnittgrößen.** Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht die Auslegung von biege- und normalkraftbeanspruchten stabförmigen Bauteilen des Hochbaus auf der Grundlage der Normen EC2, E DIN 1045, EC8.

Eine Besonderheit der Bemessungskonzeption besteht darin, daß Lösungen für Probleme bereitgestellt werden können, bei denen die zeitliche Reihenfolge und Häufigkeit des Auftretens von Beanspruchungen unvorhersehbar oder beliebig sein kann. In diese Kategorie können neben wechselnden statischen näherungsweise auch dynamische Lasten eingeordnet werden, wobei seismische Beanspruchungen im Blickfeld dieser Arbeit stehen.

Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des Bemessungskonzeptes werden Beispielanwendungen vorgestellt, in denen auf normübliche Nachweisformate Bezug genommen wird. In der vorliegenden Arbeit wird von einer deterministischen Betrachtungsweise ausgegangen.

Der Schwerpunkt der Betrachtungen liegt auf der Berücksichtigung von Deformationskriterien innerhalb von Bemessungsprozessen (deformation based design). Dabei finden die

Grenzzustände der Tragfähigkeit- bzw. Gebrauchstauglichkeit durch Verwendung eines einheitlichen deformationsbasierten Grenzzustandsmodells gleichermaßen Beachtung. Ausgangspunkt und Vergleichsgrundlage für die Entwicklung des Bemessungskonzeptes sind die Prinzipien der klassischen Grenzzustandsanalyse, die im folgenden Kapitel zusammengefaßt dargestellt werden.

2 Grundlagen und Stand der Kenntnis zur Grenzzustandsanalyse

2.1 Begriffsbestimmung

Grenzzustände markieren kritische Zustände in Tragwerken oder Tragwerksteilen, deren Quantifizierung durch Angabe signifikanter Kriterien erfolgt. Im Ingenieurbau ergeben sich Grenzzustandsfunktionen meist aus Forderungen zur Trag- und Nutzungsfähigkeit sowie aus technologischen Rahmenbedingungen, wobei Aspekte der Sicherheit zu berücksichtigen sind. In Normen werden für Standardaufgaben Empfehlungen zur Wahl geeigneter Grenzkriterien und Analysebedingungen getroffen. In speziellen Fällen kann die Analyse auf experimentellem Wege erfolgen, bevorzugt werden jedoch rechnerische Methoden eingesetzt, mit denen auf der Basis von Berechnungsmodellen der Vergleich von einwirkungsseitigen (S) und widerstandsseitigen Größen (R)

$$S \leq R \quad (2-1)$$

in einem einheitlichen Definitionsraum durchgeführt wird. Die Entwicklung entsprechender Nachweisformate ist nicht Teil der Arbeit, vielmehr werden vorhandene Definitionen aufgegriffen und in einem numerischen Verfahren zur Grenzzustandsanalyse genutzt.

In der Tragwerksplanung werden Grenzzustandsbetrachtungen auf zwei Wegen durchgeführt:

- einfache Überprüfung der Zulässigkeit eines Tragwerkszustandes anhand von Grenzkriterien (*Nachweisaufgabe*)
- direkte Anwendung der Grenzzustandsdefinition zur Anpassung ausgewählter Tragwerksparameter; das Tragwerk befindet sich anschließend im Grenzzustand (*Bemessungsaufgabe*)

Die Aufgabenstellungen zur Grenzzustandsanalyse lassen sich als Grenzbeanspruchungs- bzw. Grenzwiderstandsaufgaben lösen, wobei *Grenzbeanspruchungen* (meist als Grenzlasten) eine maximal zulässige Beanspruchungsintensität bei konstantem Widerstand markieren, während *Grenzwiderstände* einen minimal erforderlichen Tragwiderstand bei gegebener Einwirkung beschreiben. Die Anpassung der Widerstandsseite überwiegt in der Ingenieur Tätigkeit und entspricht dem Charakter einer Bemessungsaufgabe, so daß diese Analyseform vorrangig im Blickpunkt dieser Arbeit stehen soll.

Zur mathematischen Beschreibung von Einwirkungen und Widerständen werden Funktionen herangezogen. Diese können als Produkt aus Formfunktion (Verteilungsfunktion, Index 0) und Intensitätsfaktor (p oder r) definiert werden:

$$R = r R_0 \quad \text{bzw.} \quad S = p S_0. \quad (2-2)$$

Ausgangspunkt jeder Berechnung ist die Festlegung von Formfunktion und Intensität für jeden Parameter des Modells.

Auf Grund dieser Definition lassen sich unterschiedliche Typen von Grenzzustandsaufgaben angeben. Bei *einparametrischen Grenzzustandsaufgaben* wird während der Berechnung nur ein ausgewählter Intensitätsfaktor gezielt verändert, z.B. für eine vorgegebene Lastverteilung

$$p \rightarrow \text{Max} \quad (2-3)$$

oder eine vorgegebene Widerstandsverteilung

$$r \rightarrow \text{Min} \quad (2-4)$$

bis ein Grenzkriterium maßgebend wird. Der Vorteil dieses Aufgabentyps liegt in der einfachen Formulierung und effektiven numerischen Behandlung. Der Lösungsraum ist im Falle einer konvexen Modellbeschreibung ebenfalls konvex, d.h. die globalen Extremstellen werden sicher gefunden. Nachteilig kann sein, daß sämtliche Formfunktionen unveränderlich sind und damit das Ergebnis wesentlich von der Qualität der Ausgangskonfiguration abhängt. Die Festlegung der widerstandsseitigen Formfunktionen (z.B. Querschnittswerte, Bewehrungsmengen) gestaltet sich oftmals kompliziert, da die Widerstandsverteilung meist selbst gesuchte Variable des Entwurfsprozesses ist. In der praktischen Anwendung kann dieses Problem dadurch gelöst werden, daß mit geeigneten Startwerten begonnen wird und bei Bedarf Anpassungen auf iterativem Wege vorgenommen werden. Günstige Startwerte können z.B. mit Hilfe von elastischen Vergleichslösungen abgeleitet werden.

Ein alternativer Weg kann durch die Verwendung von *mehrparametrischen Grenzzustandsaufgaben* beschritten werden. Hierbei werden die Formfunktionen direkt verändert, d.h. beim Lösen einer Grenzwiderstandsaufgabe wird für eine vorgegebene Einwirkung eine minimale Widerstandsfunktion gesucht, z.B.:

$$R = f(R_0, \dots) \rightarrow \text{Min} \quad (2-5)$$

Es muß beachtet werden, daß die Lösung einer mehrparametrischen Aufgabe rechenintensiver ist, und der Lösungsraum in der Regel nicht konvex ist. Möglichkeiten zur Lösung von Aufgaben diesen Typs werden im Abschnitt 3.3.6 diskutiert.

2.2 Materialgesetze für die Grenzzustandsanalyse von Stahlbetontragwerken

Für rechnerische Untersuchungen ist die Wahl des Materialgesetzes und die Festlegung der Materialparameter entscheidend für die Wirklichkeitsnähe der Abbildung. Dies gilt um so mehr, wenn Verformungsgrößen im Blickfeld der Betrachtungen stehen. In der Literatur werden neben den traditionellen linear elastischen Näherungen eine Vielzahl nichtlinearer Ansätze für die Abbildung des Verhaltens von Stahlbeton angegeben. Unterschiede ergeben sich aufgrund gewählter Modellebenen und Diskretisierungsstufen. Die in den Normen des Stahlbetons empfohlene geteilte Modellierung des Querschnitts- und Tragwerksverhaltens bedingt, daß auf die jeweilige Modellebene angepaßte Arbeitslinien zu verwenden sind. Bei Betrachtungen an Querschnittsmodellen werden die Kennlinien einzelner Komponenten (Beton, Stahl, Kontaktflächen) zugeordnet, wohingegen in Tragwerksmodellen das Verhalten des gesamten Querschnittes in Querschnittskennlinien (z.B. als Momenten-Krümmungsbeziehungen) zu beschreiben ist.

Im folgenden werden einige ausgewählte Materialgesetze benannt und hinsichtlich ihrer Eignung für Bemessungszwecke eingeschätzt. Da in der vorliegenden Arbeit Untersuchungen an Tragwerksmodellen im Vordergrund stehen, beschränkt sich die Betrachtung auf Modelle zur integralen Beschreibung des Querschnittsverhaltens, welche durch aktuelle Normenentwürfe (EC2 [32], E DIN 1045-1 [31]) für die nichtlineare Bemessung von Tragwerken empfohlen werden.

Das *starrplastische Materialmodell* bildet die Grundlage für Berechnungen nach der Plastizitätstheorie und wird vorwiegend für Tragfähigkeitsuntersuchungen extrem beanspruchter Tragwerke eingesetzt (siehe Abschnitt 2.3.2). Bei Verwendung dieses Materialgesetzes ist eine Erfassung des Verformungsverhaltens nicht möglich, so daß ausreichend duktiles Verhalten im Tragwerk vorausgesetzt werden muß. Eine Anwendung für Bemessungszwecke im Stahlbetonbau ist somit nur durch Kopplung mit Sekundärnachweisen sinnvoll.

Mit Hilfe des *linear elastisch-idealplastischen* Materialgesetzes können Bemessungsschnittgrößen an Tragwerksmodellen einfach ermittelt werden. Experimentelle Untersuchungen zeigen, daß in vorwiegend biegebeanspruchten Tragwerksteilen für niedrige und mittlere Bewehrungsgrade eine gute Übereinstimmung mit dieser idealisierten Kennlinie

vorliegt [33, 34]. Der Grund hierfür ist die dominante Beeinflussung des Gesamtquerschnittsverhaltens durch die elastisch-plastische Kennlinie des Stahls.

Eine Erweiterung des linear elastisch-idealplastischen Ansatzes stellen *multilineare Arbeitslinien* dar. Sie ermöglichen z.B. die Erfassung des Reiß- und Verfestigungsverhaltens im Querschnitt. Das Verhalten kann durch die Linearkombinationen elastisch-plastischer Teilkörper [35, 36] oder durch Berücksichtigung von Verfestigungsanteilen im Fließgesetz [37] simuliert werden. Die Bestimmung derartiger Querschnittskennlinien kann mit Hilfe von Experimenten oder rechnerischen Ansätzen (z.B. mit Fasermodellen) unter Beachtung von Interaktionen zwischen Schnittgrößen durchgeführt werden.

Bei Verwendung allgemein *nichtlinearer Materialgesetze* lassen sich komplexe wirklichkeitsnahe Studien durchführen. Aus dem Blickwinkel einer effizienten Tragwerksplanung muß abgeschätzt werden, inwieweit die Erfassung eines bestimmten Effektes im Modell nötig und maßgebend ist. Dies ist auch im Kontext mit dem verwendeten Sicherheitskonzept zu entscheiden.

Die mechanischen Modelle dieser Arbeit werden auf der Basis linear elastisch-plastischer Querschnittskennlinien mit wahlweiser Berücksichtigung von Verfestigungen aufgestellt. Die Arbeitslinien können durch Vorgabe von Grenzdeformationen ergänzt werden. Mit Hilfe polynomialer Ansätze können die Abhängigkeiten von Steifigkeit und Duktilität von den aufnehmbaren Schnittgrößen angegeben werden. Nähere Erläuterungen werden im Abschnitt 4.2.4.2 gegeben.

2.3 Klassische Grenzzustandsdefinitionen

In diesem Abschnitt werden drei ausgewählte traditionelle Grenzzustandsmodelle und deren theoretische Grundlagen benannt. Für das Konzept dieser Arbeit dienen diese Betrachtungen als Basis für Herleitungen und Vergleiche.

Begleitend zu den Erläuterungen der nächsten Abschnitte sollen die Ergebnisse von Grenzwiderstandsaufgaben für einen Beispielrahmen nach Abb. 2.1 vorgestellt und diskutiert werden. Als Belastung wirken ständige vertikale Auflasten über den Stützen und eine veränderliche horizontale bzw. vertikale Last. Insgesamt ergeben sich zwei zu untersuchende Lastfälle. Die angegebenen Plastizitätsbedingungen (Formfunktion der Widerstände) beschränken die Biegemomente und werden nachfolgend für unterschiedliche Grenzzustandsdefinitionen durch den Widerstandsfaktor r (Intensitätsfaktor) modifiziert.

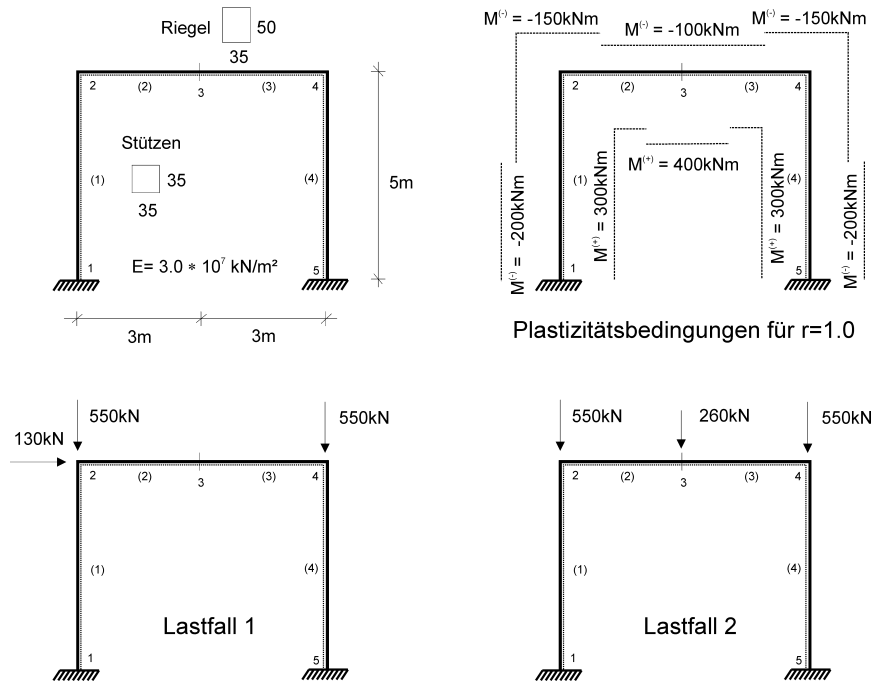


Abb. 2.1 Beispiel zur Grenzzustandsanalyse

2.3.1 Elastischer Grenzzustand

Der elastische Grenzzustand kann folgendermaßen definiert werden:

Werden keine plastischen Deformationen oder ein Bruch erzeugt, so liegt der Wert der Belastungsintensität unterhalb des elastischen Grenzbeanspruchungszustandes.

Es sind hierbei unterschiedliche Interpretationen möglich, z.B. in Abhängigkeit davon, ob die Untersuchungen im Raum der Spannungen oder im Raum Schnittgrößen durchgeführt werden. Bei Vernachlässigung geometrischer Nichtlinearität lässt sich der Grenzzustand durch Superposition beteiligter Lastfälle und einer linearen Skalierung ermitteln. Die Untersuchungen müssen für jede Lastkombination durchgeführt werden. Der insgesamt größte Grenzwiderstand wird für die Bemessung maßgebend.

Abb. 2.2 enthält die elastische Momenten- und Restmomentenverteilung für den Beispielrahmen. Die Ausgangswiderstandsverteilung kann um 5% abgesenkt werden, bis im Knoten 1 die Plastizitätsgrenze erreicht, aber nicht überschritten wird. Nach Entlastung verbleiben keine Restschnittgrößen oder -verformungen im Tragwerk.

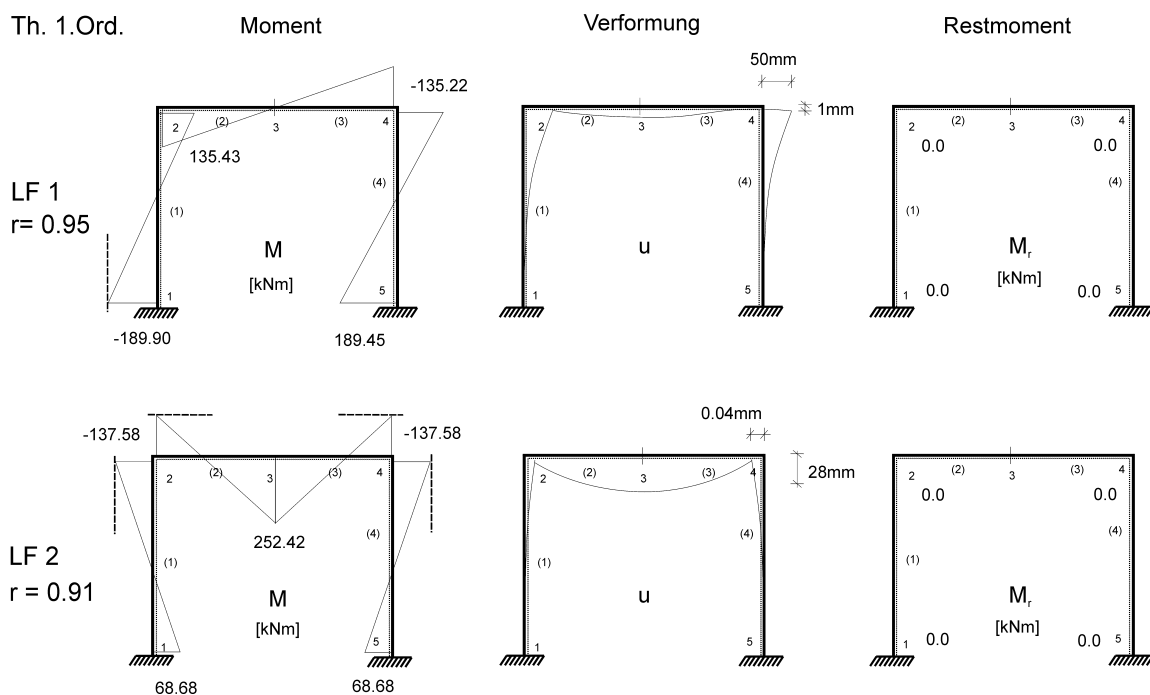


Abb. 2.2 Elastischer Grenzzustand: Biegemomente und Restzustand, $r_e = 0.95$

2.3.2 Plastischer Grenzzustand

In statisch unbestimmten Systemen können nach Erreichen der elastischen Grenzlastertragreserven vorhanden sein, die durch Schnittgrößenumlagerungen erschlossen werden können. Beim Übergang zu einer nichtlinearen Beschreibung muß von einer plastischen Verformbarkeit ausgegangen werden. Unter Einschränkungen wird der Verbundwerkstoff Stahlbeton diesen Anforderungen gerecht. In den aktuellen Normen und Normenentwürfen (z.B. EC 2 [32]) ist die Anwendung der Plastizitätstheorie für die Ermittlung der Schnittgrößen im Grenzzustand der Tragfähigkeit zugelassen. Grundlage für Berechnungen liefern die Grenzlastsätze, die von *Greenberg/Prager* [38] für Stabtragwerke und von *Drucker/Prager/Greenberg* [39] für Kontinua aufgestellt und bewiesen wurden. Die theoretische Basis der daraus abgeleiteten Fließgelenkverfahren bildet das kinematische Theorem der Grenzlastertrag:

Ein Tragwerk unterliegt der Zerstörung, wenn ein solcher kinematisch zulässiger Verschiebungsgeschwindigkeitszustand (Mechanismus) existiert, für den die Leistung der äußeren Belastung größer als die Dissipationsleistung im Innern des Tragwerkes ist [39].

Kinematisch zulässig ist ein Zustand, wenn die kinematische Verträglichkeit sichergestellt ist, die geometrischen Randbedingungen erfüllt und die zum Geschwindigkeitsfeld gehörenden Spannungen/Schnittgrößen die Fließbedingungen nicht verletzen. Mit Hilfe dieser

Formulierung kann eine obere Eingrenzungslösung für die Belastungsintensität ermittelt werden.

Das statische Theorem liefert eine untere Eingrenzungslösung:

Kann für eine Beanspruchung ein statisch zulässiger Spannungs- bzw. Schnittgrößenzustand gefunden werden, so wird sich kein kinematischer Mechanismus ausbilden [39].

Statisch zulässig ist ein Tragwerkszustand, wenn er die Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen erfüllt sowie die zugehörigen Spannungen/Schnittgrößen die Fließbedingungen nicht verletzen.

Die plastische Grenzlast läßt sich durch Anwendung des Einzigkeitssatzes bestimmen:

Wird für eine Beanspruchung ein kinematisch zulässiger Mechanismus und ein statisch zulässiger Schnittgrößenzustand gefunden, so ist dies die plastische Grenzbeanspruchung des Tragwerkes [39].

Zur Ermittlung der plastischen Grenzlast genügt die Annahme starr idealplastischen Materialverhaltens. Die zuvor besprochenen Theoreme wurden für die Behandlung von Grenzbeanspruchungsproblemen formuliert (traditionelle Form). Analog können auch Theoreme für Grenzwiderstandsuntersuchungen angegeben werden. Die zum statischen Problem zugehörige duale kinematische Formulierung kann z.B. nach [40] erhalten werden, wobei deren Herleitung meist ausgehend vom statischen Problem über die Bildung der Lagrange-Funktion erfolgt.

Für die Bestimmung des plastischen Grenzzustandes auf der Basis der klassischen Theoreme müssen neben den Plastizitätsbedingungen entweder die Gleichgewichts- oder die Formänderungsbeziehungen erfüllt sein. Diese Reduzierung des Satzes notwendiger Bedingungen trägt zur Vereinfachung rechnerischer Untersuchungen bei. Die im Grenzzustand vorliegenden Schnittgrößen- bzw. Deformationsverteilungen können allerdings nur bei Ansatz des vollständigen strukturmechanischen Bedingungssatzes ermittelt werden (siehe Abschnitt 3.1.3.2).

Bei der Berechnung des plastischen Grenzwiderstandes für den Beispielrahmen ergibt sich eine mögliche Reduzierung des Widerstandes um 29%. Die Biegemomenten- und Restmomentenverteilung bei Be- und Entlastung durch den Lastfall 1 kann Abb. 2.3 entnommen werden. Die unterschiedlichen Restmomentenzustände verdeutlichen, daß sich unter dieser Widerstandskonstellation bei jedem Wechsel des Lastfalles auch eine Änderung im plastischen Formänderungszustand des Tragwerks einstellt.

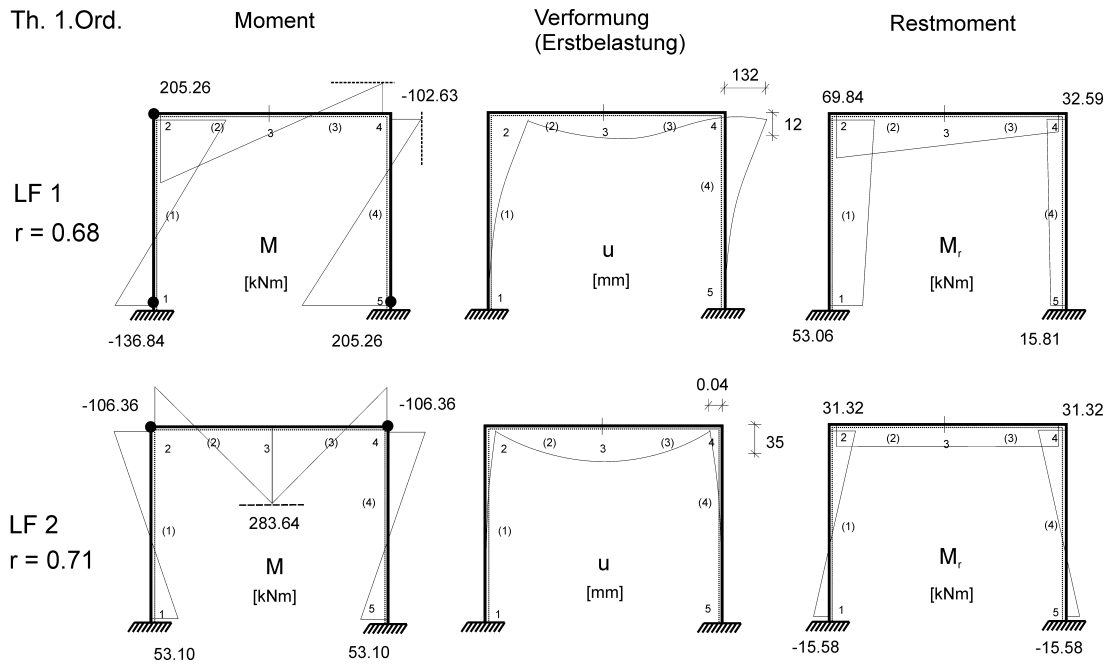


Abb. 2.3 Plastischer Grenzzustand: Biegemomente und Restmomentenzustände

2.3.3 Adaptiver Grenzzustand

Einspielen statisch beanspruchter Tragwerke

Die im vorangegangenen Abschnitt formulierten Theoreme sind unter der Voraussetzung proportional-er einsinniger Belastungssteigerung gültig. Im Normalfall wird aber eine Veränderung der Belastung über die Zeit zu verzeichnen sein. Unter diesem Aspekt ist eine uneingeschränkte Anwendung der Plastizitätstheorie für die Behandlung von Lastfolgeproblemen kritisch zu beleuchten. Folgende akkumulative Schädigungsmechanismen sind möglich:

- *Alternierende Plastizierung*: Im Laufe der Belastungsgeschichte werden ein oder mehrere Querschnitte plastischen Formänderungen in entgegengesetzten Richtungen unterworfen. Dies führt, verglichen mit Ermüdungsproblemen (high cycle fatigue), schon nach wenigen Zyklen zur Verminderung der Querschnittskapazität oder zum Bruch (low cycle fatigue).
- *Progressive Plastizierung*: Im Laufe der Belastungsgeschichte werden in einem oder mehreren Querschnitten kontinuierlich plastische Formänderungen in derselben Richtung auftreten, die sich aufsummieren und zum Versagen des Querschnittes führen.

Diese Formen der Schadensakkumulation können nicht auftreten, wenn die Belastungsintensität p so begrenzt wird, daß sich nach einer endlichen Zahl von Lastwiederholungen ein stabiler Restverformungs- bzw. Restspannungszustand ausbildet und alle weiteren Lastwechsel lediglich elastische Formänderungen erzeugen. Der zugehörige Grenzzustand wird als Einspiel-, shake down- oder Adaptionsgrenzzustand bezeichnet. Dieser Effekt wurde erstmals von *Grüning* [41] 1926 beschrieben. *Bleich* [42] formulierte 1932 den Einspielsatz, der von *Melan* [43] 1936 für Systeme aus idealplastischem Material unter mehrfach wiederholter Belastung verallgemeinert wurde:

(Melanscher oder Statischer Einspielsatz): Ein System spielt ein, wenn nach einer endlichen Anzahl von Lastwechseln ein stabiler statisch zulässiger Restspannungs- bzw. Restschnittgrößenzustand existiert [39].

Statisch zulässig ist ein Restzustand, wenn er die Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen erfüllt sowie die Gesamtspannungen bzw. -schnittgrößen die Fließbedingungen nicht verletzen. Der Restzustand ist stabil, wenn unter ständiger Wiederholung und Veränderung der Sequenz von Lastfällen eines gegebenen Lastprogramms die plastische Dissipationsarbeit nach endlicher Zeit konstant bleibt. Die Anwendung des statischen Satzes liefert einen unteren Eingrenzungswert für die Einspiellast.

Koiter [44] und *Neal* [45] hingegen formulierten und bewiesen hinreichende Kriterien für das Nicht-Einspielen:

(Koiterscher oder Kinematischer Einspielsatz): Ein Tragwerk spielt nicht ein, wenn ein solcher kinematisch zulässiger Restverschiebungsgeschwindigkeitszustand (Mechanismus) existiert, für den die Dissipationsleistung im Innern des Tragwerkes keinem Grenzwert zustrebt.

Kinematisch zulässig ist ein Restzustand, wenn er die Verträglichkeitsbedingungen und geometrischen Randbedingungen erfüllt sowie die zum Gesamtgeschwindigkeitsfeld gehörenden Spannungen/Schnittgrößen die Fließbedingungen nicht verletzen. Mit Hilfe dieser Formulierung kann eine obere Eingrenzungslösung für die Belastungsintensität ermittelt werden.

Mit dem Einzigkeitssatz kann der adaptive Grenzzustand beschrieben werden:

Existiert ein statisch zulässiger Restzustand und ein kinematisch zulässiger Mechanismus für diesen Restzustand, dann befindet sich das System für das zugrunde gelegte Beanspruchungs- und Widerstandsniveau im Einspielgrenzzustand.

Numerische Berechnungen der adaptiven Grenzlast oder des adaptiven Grenzwiderstandes werden auf iterativem Wege z.B. durch Pfadverfolgung [46] vorgenommen. Darüber hinaus werden in der Literatur weitere Strategien vorgeschlagen, die z.B. auf Methoden der mathematischen Optimierung basieren [47-51].

Im Falle des Beispielrahmens garantiert eine Begrenzung der Widerstandsabsenkung auf minimal 73% die Ausbildung eines stabilen Restzustandes (Abb. 2.4).

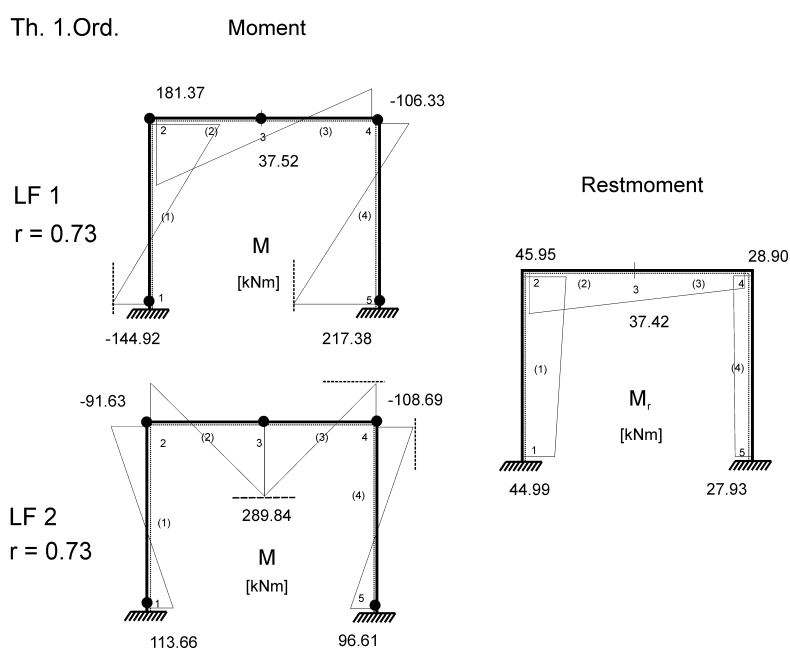


Abb. 2.4 Adaptiver Grenzzustand: Biegemomente und Restmomentenzustand

Das Ergebnis wurde mit Hilfe von Zeitverlaufsuntersuchungen für eine wechselnde Lastfolge aus LF1 und LF2 unter adaptivem Grenzwiderstandsniveau verifiziert. In Abb. 2.5 sind die Ergebnisse für die Biegemomentenentwicklung am Knoten 1 dargestellt. Es wurden zwei Untersuchungen durchgeführt, die sich durch eine wechselnde Startreihenfolge von LF1 und LF2 unterscheiden. In beiden Fällen sind die Restmomente identisch mit den Werten aus Abb. 2.4.

Im Vergleich dazu wird eine Zeitverlaufsuntersuchung für eine modifizierte Widerstandintensität $r = 0.72$ (geringfügige Überschreitung der adaptiven Grenze) durchgeführt. In Abb. 2.6 sind die Biegemomente am Knoten 1 dargestellt. Die je Lastfolgeuntersuchung erzielten Restmomentenzustände sind nicht mehr identisch und damit ein Indiz für wechselnde Plastizierungen im Tragwerk.

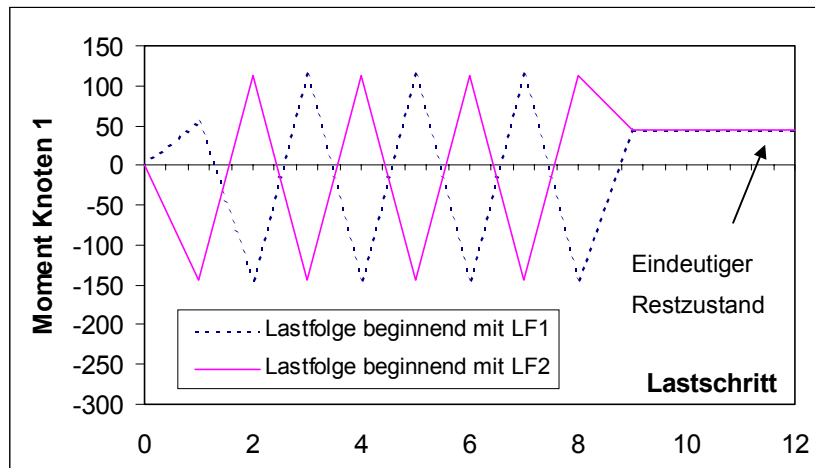


Abb. 2.5 Ergebnis Lastfolgeuntersuchung für Widerstandsintensität von $r = 0.73$

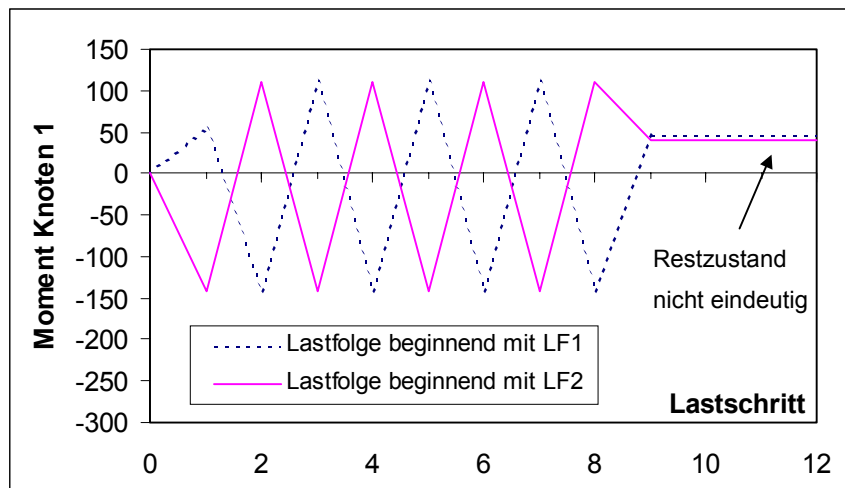


Abb. 2.6 Ergebnis Lastfolgeuntersuchung bei geringfügiger Unterschreitung des adaptiven Widerstandes $r = 0.72$

Einspielen dynamisch beanspruchter Tragwerke

Die oben genannten Einspielsätze wurden für statische Lastprogramme aufgestellt. Kann der Einfluß der Trägheits- oder Dämpfungskräfte auf die Strukturantwort nicht vernachlässigt werden, muß die Gleichgewichtsbedingung entsprechend ergänzt werden. In der Regel wird dieser Aufgabentyp mit Hilfe direkter Zeitintegrationsverfahren gelöst.

Alternativ existiert die Möglichkeit, das zuvor beschriebene Konzept des adaptiven Körpers weiterzuverfolgen. Die Grundlagen einer dynamischen Einspieltheorie für elastisch-idealplastische Körper in der statischen Formulierung gehen auf *Ceradini* [52] und *Hwa-Shan Ho* [53] zurück. Im Unterschied zu den *Melanschen* Prinzipien sind die von diesen Autoren vorgestellten dynamischen Einspielsätze nicht unter der Voraussetzung unbegrenzter Wiederholbarkeit der zugrunde gelegten Lastfolge formuliert.

Eine vom konkreten Lastprogramm unabhängige statische und kinematische Formulierung wurde von *Corradi* und *Maier* [54] 1974 aus den klassischen Theoremen abgeleitet. Erweiterungen unter Berücksichtigung von Verfestigungen im Material sind nach dem *Maierschen* Ansatz möglich [55]. Zur numerischen Berechnung werden spezielle Algorithmen für die Lösung von Komplementaritätsaufgaben bzw. Optimierungsverfahren verwendet.

Die Grundidee zur Untersuchung des dynamischen Einspielens besteht nach klassischer Auffassung in der Aufspaltung der Tragwerksreaktion in einen elastischen Anteil und einen Restanteil. Mit Vertretung der Hypothese, daß Trägheits- und Dämpfungskräfte nur den elastodynamischen Teil der Antwort beeinflussen, gelingt es, das dynamische Problem in ein quasi-statisches zu überführen. Dabei wird die elastische Antwort mit Hilfe von linearen Zeitintegrationsverfahren vorab bestimmt. Die zugehörigen umhüllenden Reaktionen werden anschließend für die Berechnung eines fiktiven Restzustandes im adaptiven Grenzzustand herangezogen. Da durch die Abspaltung des Restzustandes der Einfluß der Zeit auf die Bildung der plastischen Gelenke und die damit verbundene dissipative Wirkung von Plastizierungen auf nachfolgende Extremwerte der elastischen Teillösung nicht erfaßt werden kann, werden die auf diese Weise errechneten Restschnittgrößen bezüglich einer Zeitintegrationslösung (gleiche Modellannahmen) extremale Eigenschaften besitzen und somit Ergebnisse auf der sicheren Seite liegend liefern. Die oben genannten Einspielsätze gelten somit sinngemäß.

Schüler [56] nutzte diese Eigenschaft zur Entwicklung eines Bemessungskonzeptes für seismisch beanspruchte Stahlbetontragwerke nach EC8 [57] unter Verwendung eines linear elastisch-idealplastischen Materialgesetzes. Unter enger Bindung an die Prinzipien der Kapazitätsbemessung nach *Paulay et. al.* [58] wird eine obere Schranke für ein mögliches Schädigungsniveau im Zustand der Adaption definiert. Die Berechnungsmodelle wurden aus der statischen Formulierung des Einspielsatzes abgeleitet, wobei die numerische Umsetzungen auf Algorithmen zur Lösung von linearen und quadratischen Optimierungsaufgaben aufbaut. Das begrenzt duktile Verhalten von Stahlbetontragwerken findet

innerhalb dieses Grenzzustandsmodells keine Berücksichtigung und kann nur durch externe Zusatzbetrachtungen bewertet werden.

2.4 Bemerkungen zur Eindeutigkeit von Restzuständen bei Lastfolgeuntersuchungen, Definition der konservativen Grenzlast

Ein Vorteil der Grenzzustandsmodelle mit Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens besteht darin, daß im Berechnungsablauf keine Untersuchung von Zwischenzuständen notwendig ist. Diesem Vorgehen liegt die Annahme der Lastfolgeunabhängigkeit der Restfelder zugrunde.

Für die sinnvolle Nutzung dieser Prinzipien müssen Anwendungsgrenzen eingehalten werden. Eine Einordnung kann anhand der Restzustände vorgenommen werden, wobei folgende Kategorien den Grad der Lastfolgeunabhängigkeit beschreiben:

- *Stabilität*: Der Restzustand ist stabil, wenn nach einer endlichen Anzahl von Lastwechseln keine Änderungen zu verzeichnen sind (qualitatives Kriterium).
- *Eindeutigkeit*: Der Restzustand ist eindeutig, wenn seine Größe unabhängig von der konkreten Lastfolge ist (quantitatives Kriterium, schließt Stabilität ein).

Hierbei wird vorausgesetzt, daß alle im Lastprogramm enthaltenen Einwirkungen beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge auftreten können. Der Grad der Lastfolgeunabhängigkeit von Restschnittgrößen- und Restdeformationszuständen kann in Abhängigkeit von der Belastungsintensität nach Tafel 2.1 angegeben werden. Es wird deutlich, daß innerhalb dieser Betrachtungen eine weitere Grenzzustandskategorie benannt werden kann, die nachfolgend als konservative Grenzlast p_c bezeichnet werden soll.

Tafel 2.1 Zur Eindeutigkeit von Restzuständen in Abhängigkeit von der Beanspruchungsintensität

Beanspruchung	Restspannungen	Restdeformationen
$p \leq p_c$	eindeutig	eindeutig
$p_c \leq p \leq p_a$	eindeutig	stabil
$p_a \leq p \leq p_p$	lastfolgeabhängig	lastfolgeabhängig

Die konservative Grenzlast wird folgendermaßen definiert:

Wird unter Lastfolgeeinwirkung ein eindeutiger Restdeformationszustand erzeugt, befindet sich das Tragwerk unterhalb der konservativen Grenzlast.

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn lediglich ein Lastfall oder Impuls im Lastprogramm plastische Verformungen im Tragwerk hervorruft. Bezüglich der klassischen Grenzzustandsdefinitionen bestehen folgende Relationen:

$$p_e \leq p_c \leq p_a \leq p_p \qquad r_e \geq r_c \geq r_a \geq r_p. \qquad (2-6)$$

Bei Beanspruchungen oberhalb der konservativen Grenzlast p_c sind die Restdeformationen nicht mehr eindeutig, sondern bilden einen Bereich möglicher Restdeformationsantworten. Für den Beispielrahmen sind in Abb. 2.7 die unter adaptiver Widerstandsverteilung erreichten Restverformungen am Knoten 4 angegeben. Für beide Lastsequenzen sind die Restverformungen nach dem Einspielen stabil, aber nicht eindeutig.

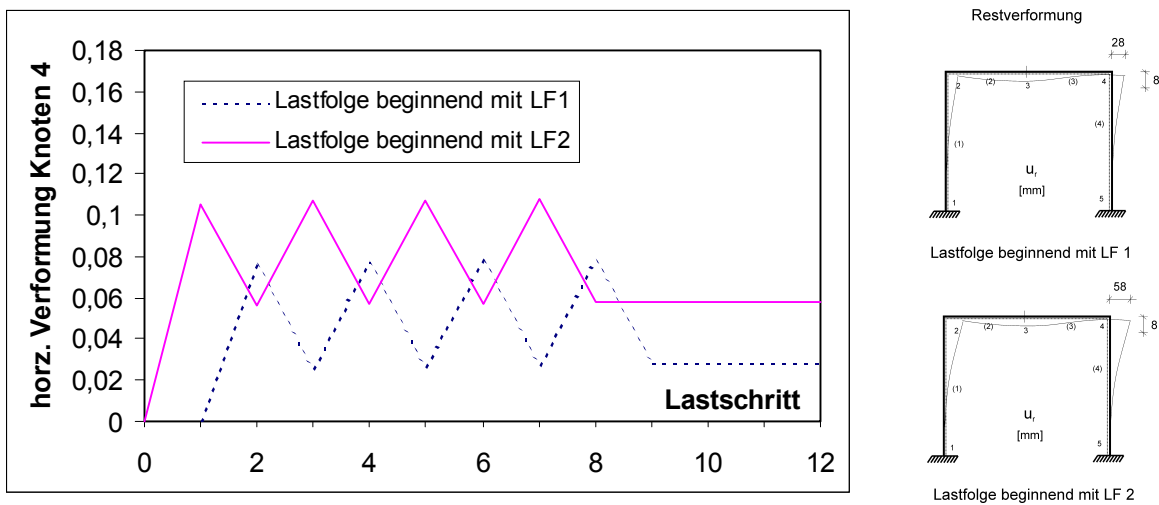


Abb. 2.7 Ergebnis Lastfolgeuntersuchung im adaptiven Grenzzustand $r = 0.73$

Die Ermittlung des Bereiches möglicher Restdeformationen ist mit Hilfe von Bounding-Techniken [59-61] oder allgemeiner Lastfolgeuntersuchungen z.B. mit direkten Zeitintegrationsverfahren [62-65] möglich. Diese Berechnungen sind sehr aufwendig.

Alternativ kann bei Beanspruchungen unterhalb der adaptiven Grenzlast unter Verwendung geeigneter Lösungsstrategien eine praktisch verwertbare Näherungslösung angegeben werden. In Abschnitt 3.3.5 werden entsprechende Verfahren auf der Basis der

mathematischen Optimierung näher besprochen. Im Falle des Beispielrahmens wurde unter Verwendung dieser Verfahren eine Näherungslösung für die Restverformungen des Beispielrahmens errechnet, die im Mittel lediglich 2% von der mit Hilfe von Zeitintegrationen ermittelten maßgebenden Lösung abweicht (zugehörig zur Lastsequenz mit LF2 beginnend).

Für Untersuchungen von Lastfolgeproblemen mit Überschreitung der adaptiven Grenzlast wird der Anwendungsbereich der Prinzipien dieser Arbeit verlassen. Die Restschnittgrößen- und Restverformungszustände sind nicht stabil und können allgemein nur bei Angabe der konkreten Lastfolge bestimmt werden. Zur Verdeutlichung ist die Entwicklung der plastischen Verzerrungen am Knoten 1 des Beispielrahmens für unterschiedliche Widerstandsintensitäten in Abb. 2.8 angegeben. Bereits für Intensitäten geringfügig unterhalb des adaptiven Grenzwiderstandes ($r = 0.72$) ist eine progressive Entwicklung der plastischen Verzerrungen infolge Lastwechsel zu verzeichnen.

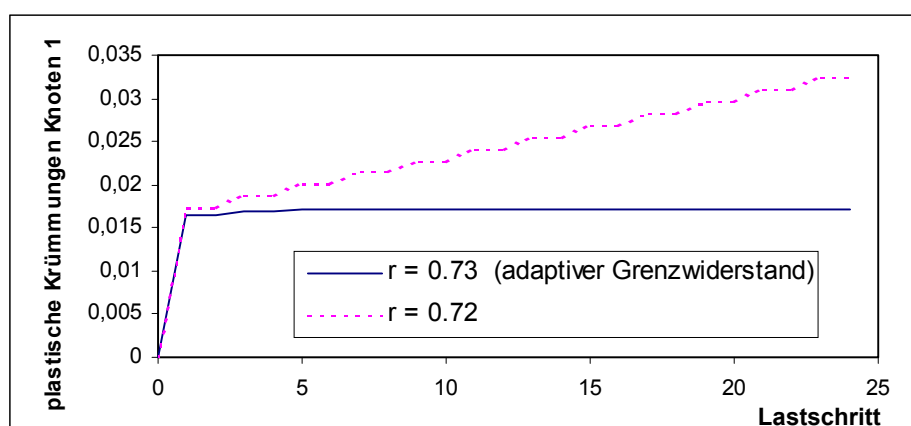


Abb. 2.8 Vergleich Entwicklung der plastischen Krümmungen bei unterschiedlicher Widerstandsintensität (Beispielrahmen, Knoten 1)

Die zuvor beschriebenen klassischen Theorien des Grenzgleichgewichtes bilden eine Basis zur Entwicklung von Berechnungsmodellen für die Analyse deformationsbasierter Grenzzustände. Die zugehörigen Grundsätze und deren Überführung in numerische Hilfsmittel werden im folgenden Kapitel erläutert.

3 Berechnungsmodelle zur Analyse deformationsbasierter Grenzzustände

3.1 Kontinuumsmechanische Grundbeziehungen

3.1.1 Inhalt und Annahmen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Beziehungen zur deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse elastoplastischer Körper hergeleitet. Nach der Definition von Strukturvariablen werden die aus der Kontinuumsmechanik bekannten mechanischen Feld- und Randbeziehungen in Operator Schreibweise angegeben. Insbesondere wird auf die Integration linear elastisch-plastischer Materialgesetze mit und ohne Verfestigungsansatz Bezug genommen. Nachfolgend wird eine Definition für den deformationsbasierten Grenzzustand abgeleitet. Im Abschnitt 3.1.3 werden zwei Grenzzustandsmodelle und zugehörige Lösungskonzepte vorgestellt.

Bei der Modellbildung wird von folgenden grundlegenden Annahmen ausgegangen:

- Der Körper verhält sich elastisch-plastisch, Dämpfungen werden über einen viskoelastischen Ansatz berücksichtigt.
- Der untersuchte Körper wird nicht über lokale oder globale Versagenszustände hinaus beansprucht.
- Monoton veränderliche Beanspruchungen ziehen monoton veränderliche Verformungen nach sich (keine lokalen Entlastungserscheinungen).
- Die äußeren Belastungen sind konservativ.
- Das Material ist skleronom. Die Gradienten des Fließ- bzw. Verfestigungsgesetzes sind konstant und nicht von der Lastgeschichte abhängig.
- Werden plastische Verformungen erzeugt, sind diese auf lagestabile Zonen (Fließgelenke, Fließlinien) ohne räumliche Ausdehnung beschränkt.
- Der Vektor der plastischen Verformungen steht senkrecht auf der Fließfläche im Sinne des assoziierten Fließgesetzes. Die Fließ- und Grenzdeformationshyperflächen sind konvex.

3.1.2 Der elastoplastische Körper

3.1.2.1 Definitionsbereich und Strukturvariablen

Es sei ein Körper mit dem Volumen V und der Oberfläche S gegeben, der einem dynamischen Prozeß unterliegt (siehe Abb. 3.1). Die materiellen Punkte werden bezüglich eines raumfesten kartesischen Koordinatensystems angegeben und sind durch Ortsvektoren festgelegt. Im Ausgangszustand (Index 0) wird folgende Lage eingenommen:

$$\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, x_{03}]^T \in V. \quad (3-1)$$

Die Konfiguration zu einem späteren Zeitpunkt t berechnet sich zu:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3]^T \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in V, \quad (3-2)$$

wobei \mathbf{u} der Vektor der Relativverformungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_1, u_2, u_3]^T \in V \quad (3-3)$$

bezogen auf den Ausgangszustand ist.

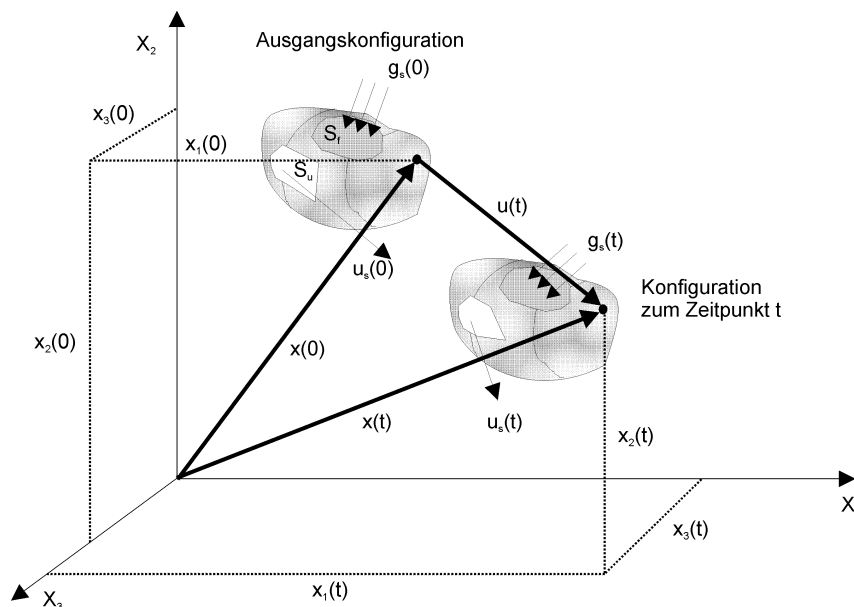


Abb. 3.1 Zur Definition der Strukturvariablen

Die Ableitungen dieser Größe nach der Zeit

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = [\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3]^T \in V \quad (3-4)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(x,t) = [\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \ddot{u}_3]^T \in V \quad (3-5)$$

kennzeichnen die Bewegungsabläufe der materiellen Punkte im dynamischen Prozeß, wobei folgende Anfangsbedingungen gelten:

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(x,0) = \dot{\mathbf{u}}_0. \quad (3-6)$$

Die zeitunabhängigen Massen- und Dämpfungsdichten werden in den Vektoren

$$\mathbf{m}(x) = [m_1, m_2, m_3]^T \quad \mathbf{c}(x) = [c_1, c_2, c_3]^T \in V \quad (3-7)$$

zusammengefaßt.

Der innere Zustand kann durch die unabhängigen Dehnungsgrößen

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,t) = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}]^T \in V \quad (3-8)$$

als auch durch die unabhängigen Spannungsgrößen

$$\boldsymbol{\sigma}(x,t) = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]^T \in V \quad (3-9)$$

charakterisiert werden. Als Belastungen wirken die Volumenkräfte

$$\mathbf{f}(x,t) = [f_1, f_2, f_3]^T \in V. \quad (3-10)$$

Die Vordehnungen werden im Vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(x) = [\varepsilon_{011}, \varepsilon_{022}, \varepsilon_{033}, \varepsilon_{012}, \varepsilon_{023}, \varepsilon_{013}]^T \in V \quad (3-11)$$

zusammengefaßt.

Im Bereich S_f der Oberfläche S werden unabhängige Oberflächenspannungen

$$\mathbf{g}_s(x,t) = [g_{s1}, g_{s2}, g_{s3}]^T \in S_f \quad (3-12)$$

sowie im Bereich S_u die Oberflächenverschiebungen

$$\mathbf{u}_s(x,t) = [u_{s1}, u_{s2}, u_{s3}]^T \in S_u. \quad (3-13)$$

eingepreßt.

3.1.2.2 Gleichgewicht und statische Randbedingungen

Die dynamischen Feldgleichungen verknüpfen die äußeren Kräfte mit den Spannungen im Innern des Volumens V . Allgemein gilt:

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) - \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) - \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) - \mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-14)$$

unter den Anfangsbedingungen (3-6). Hierbei ist \mathbf{A} der Differentialoperator der Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}. \quad (3-15)$$

Im Bereich S_f der Oberfläche des betrachteten Körpers werden Oberflächenspannungen \mathbf{g}_s nach (3-12) eingepreßt. Die Verknüpfungen zu den Feldspannungen werden über die statischen Randbedingungen hergestellt

$$\mathbf{A}_{S_f}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) - \mathbf{g}_s(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \quad \in S_f. \quad (3-16)$$

Die Matrix der Richtungskosinus A_s ermöglicht die Transformation des Vektors der inneren Spannungen in die Normalenrichtung n der Oberfläche S_f

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \cos(n, x_1) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n, x_3) \\ \cos(n, x_2) & \cos(n, x_1) & 0 \\ 0 & \cos(n, x_3) & \cos(n, x_2) \\ \cos(n, x_3) & 0 & \cos(n, x_1) \end{bmatrix}. \quad (3-17)$$

3.1.2.3 Verträglichkeit und geometrische Randbedingungen

Die kinematischen Feldgleichungen verknüpfen im Bereich V die Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ mit den Verschiebungen \mathbf{u}

$$\mathbf{A}_k \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \quad \in V. \quad (3-18)$$

Der kinematische Feldoperator \mathbf{A}_k ist im Falle konsistenter Tragwerkstheorie adjungiert zu dem Differentialoperator der Bewegungsgleichung (3-15). Im vorliegenden Fall ist

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}. \quad (3-19)$$

Im Bereich S_u der Oberfläche S werden kinematische Randbedingungen formuliert

$$\mathbf{A}_u \mathbf{u}(x,t) - \mathbf{u}_s(x,t) = \mathbf{0} \quad \in S_u. \quad (3-20)$$

Die Matrix \mathbf{A}_u ist die Koeffizientenmatrix der kinematischen Randbedingungen.

3.1.2.4 Materialgesetz

Die konstitutiven Beziehungen stellen den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen im Bereich V her

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \in V. \quad (3-21)$$

Unter der Voraussetzung kleiner Verformungen können die Dehnungen in elastisch-plastischen Körpern zu einem Zeitpunkt t_1 als Summe unterschiedlicher Anteile aufgefaßt werden

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_e(t_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_p(t_1). \quad (3-22)$$

Die elastischen und plastischen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}_e(t_1)$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_p(t_1)$ werden infolge Last, Temperatur oder anderer Zwangseinwirkungen in der Zeitspanne t_0 - t_1 aufgebaut. Der Dehnungsanteil $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ enthält die Vordehnungen zum Betrachtungsbeginn $t=t_0$ als Summe elastischer und plastischer Anteile

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{0e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{0p}. \quad (3-23)$$

Sind Vordehnungen die Folge einer vorangegangenen Beanspruchung, werden sie auch als Restdehnungen bezeichnet

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_r. \quad (3-24)$$

Für alle elastischen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ gilt das Hook'sche Gesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3-25)$$

Unter der Voraussetzung homogenen und isotropen Werkstoffverhaltens nimmt die Elastizitätsmatrix \mathbf{D} für einen materiellen Punkt folgende Form an:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν [39].

Plastische Formänderungen können entstehen, wenn die Fließfunktion

$$\Phi = f(F(\sigma), H(\epsilon_p)) \quad (3-27)$$

die Fließbedingung

$$\Phi = 0 \quad (3-28)$$

erfüllt, wobei $F(\sigma)=0$ die Ausgangsfließfläche im rein elastischen Zustand ist und $H(\epsilon_p)$ das Verfestigungsverhalten nach dem Entstehen plastischer Verformungen beschreibt (Abb. 3.2, [37]). Mit Hilfe der Ungleichung

$$\Phi \leq 0$$

wird der Bereich elastischer Antworten begrenzt.

Das *Druckersche* Stabilitätspostulat fordert, daß die ursprüngliche Fließfläche und alle Verfestigungsflächen konvex sind [66]. Idealplastisches Materialverhalten ergibt sich für $H(\epsilon_p)=0$.

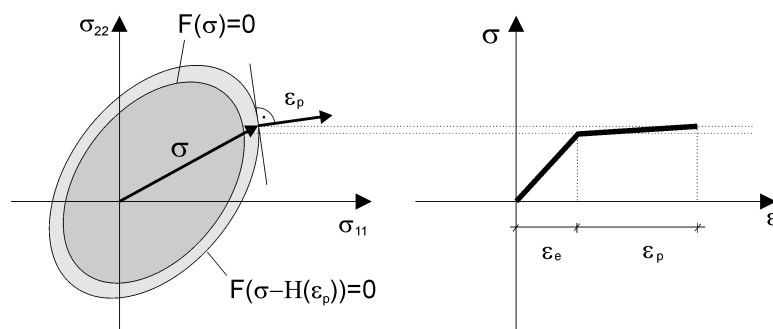


Abb. 3.2 Grafische Darstellung der Normalenregel der assoziierten Plastizitätstheorie für einen zweiachsigen Spannungszustand mit isotroper linearer Verfestigung

Mit Erfüllung der Bedingung (3-27) stellt das Fließgesetz den Zusammenhang zwischen plastischen Dehnungen und Spannungen her. Es wird assoziiertes Fließen vorausgesetzt

$$d\dot{\mathbf{a}}_p = d\dot{\mathbf{e}}^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} \right), \quad (3-29)$$

d.h. der Vektor der plastischen Dehnungszinkremente steht senkrecht auf der Fließ- bzw. Verfestigungsfläche und hat die Richtung der äußeren Normalen. Zur eindeutigen Koppelung der Ausbreitungsrichtung elastischer und plastischer Dehnungsanteile muß für den plastischen Multiplikator λ (Fließparameter) Nichtnegativität gefordert werden

$$\lambda \geq 0. \quad (3-30)$$

Die Vektoren der Fließfunktion und der Fließparameter sind orthogonal. Das Komplementaritätsgesetz

$$\lambda^T \Phi = 0 \quad (3-31)$$

stellt diesen Zusammenhang her.

Multilineare Arbeitslinien können durch Superposition des Verhaltens elastisch-plastischer Teilkörper nach [35] abgeleitet werden. Ein Beispiel enthält Abb. 3.3. Mit Hilfe dieses Ansatzes ist es unter anderem möglich, das Reißverhalten von Stahlbetonkonstruktionen oder die Mitwirkung des Betons auf Zug zu simulieren.

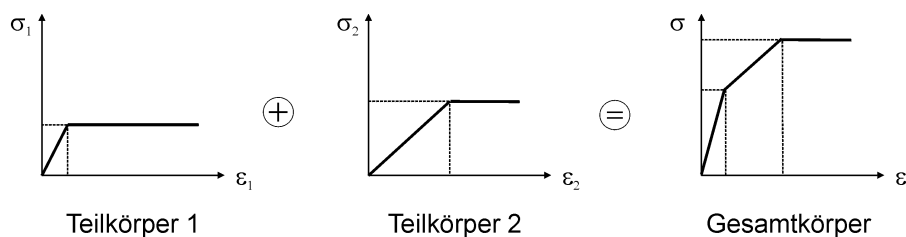


Abb. 3.3 Beispiel zur Bildung multilinearer Arbeitslinien durch Superposition elastisch-plastischer Teilkörper

Zur Abbildung begrenzt duktilen Verhaltens wird eine Versagensbedingung herangezogen, die z.B. in Form eines Grenzdeformationskriteriums

$$\boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_u \quad (3-32)$$

angegeben werden kann. Möglich sind Formulierungen der Deformationsbedingungen als konvexe Grenzhyperfläche. Im Gegensatz zur Abbildung des Fließverhaltens werden Deformationsgrenzen nicht in Form einer Komplementaritätsbedingung aufgestellt, d.h. das lokale Erreichen einer Grenzfläche ist gleichzeitig globale Grenzbedingung.

3.1.3 Der deformationsbasierte Grenzzustand

3.1.3.1 Definition des deformationsbasierten Grenzzustandes

Die klassische Plastizitäts- und Einspieltheorie basiert auf der Annahme unbegrenzt plastischer Verformbarkeit in den Fließzonen. Dieses Postulat widerspricht der Wirklichkeit, so daß die Verwendung von Verfahren auf der Basis dieser Theorien in der Regel an eine nachträgliche Kontrolle der Deformationswerte gebunden ist. Bei Verletzung von Grenzdeformationsbedingungen kann nur mit Hilfe erweiterter Modelle reagiert werden. Eine direkte Einbindung von Deformationskriterien in das Grenzzustandsmodell stellt eine solche Erweiterung der klassischen Grenzzustandsdefinitionen dar, der zugehörige Grenzzustand wird deformationsbasierter Grenzzustand (deformation based limit state) genannt.

Im deformationsbasierten Grenzzustand müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Gleichgewichtsbedingungen
- Verträglichkeitsbedingungen
- Materialgesetz
- Statische und kinematische Randbedingungen
- Dehnungs- bzw. Verformungsbedingungen

und optional

- Sicherung des Einspielens (Adaption).

Die Einhaltung der Adaptionbedingung empfiehlt sich bei

- Forderungen nach Unabhängigkeit der plastischen Tragwerksreaktion von der Lastgeschichte (Vermeidung von low cycle Versagen, allgemeine Begrenzung des Schädigungsniveaus) und
- bei unbekannter Lastfolge.

Deformationsbasierte Grenzzustandsmodelle können für Untersuchungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit sowie im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit gleichermaßen eingesetzt werden. Die auf diesem Wege erreichte Vereinheitlichung in der Grenzzustandsbetrachtung ist auch mit Hinblick auf numerische Umsetzungen von Vorteil.

Zusammenfassend gilt:

Ein System befindet sich unterhalb der deformationsbasierten Grenzlast, wenn infolge Beanspruchungen statisch und kinematisch zulässige Zustände eingenommen werden sowie die Deformationsgrenzwerte nicht überschritten werden.

3.1.3.2 Grundlagen und Methodik zur Ableitung von Extremalprinzipien für erweiterte Grenzzustandsbetrachtungen

Erweitertes Kuhn-Tucker-Problem

Die Grundlage von Extremalprinzipien zur Lösung von Grenzzustandsanalyseaufgaben bildet ein Kuhn-Tucker-Problem (erweitertes Lagrange-Problem) für elastisch-plastische Materialien nach Abb. 3.4. Für gegebene Einwirkungen und Widerstände stellt dieses Gleichungs- und Ungleichungssystem hinreichende Bedingungen zur Bestimmung der Tragwerksantwort bereit.

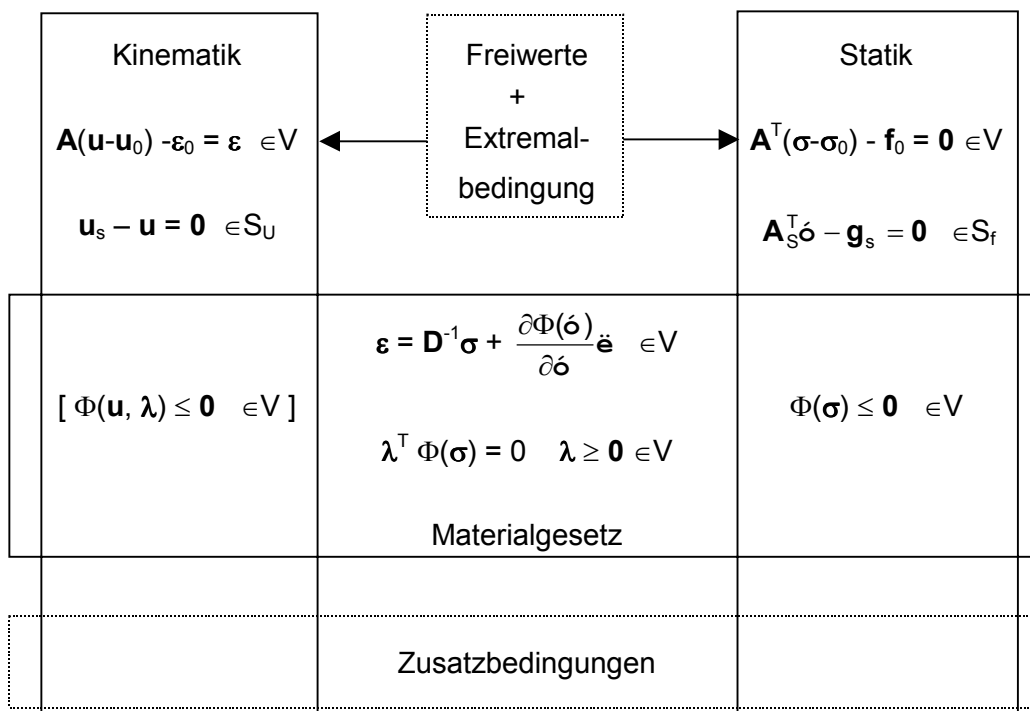


Abb. 3.4 Schematischer Aufbau und Erweiterung des zeitinvarianten Kuhn-Tucker-Problems für linear elastisch-plastische Materialien

Dieses System kann erweitert werden, indem ausgewählte konstante Systemgrößen als zusätzliche Freiwerte benannt werden und das Ausgangsproblem durch geeignete Extremal- und Zusatzbedingungen in Abhängigkeit von diesen Freiwerten ergänzt wird. Auf diese Weise können je nach Untersuchungsgegenstand verschiedenartige Extremalaufgaben abgeleitet werden.

Beispiele zur Bildung einparametrischer Grenzzustandsaufgaben

Einparametrische Grenzlastaufgaben können über die Ergänzung eines skalaren Lastmultiplikators p in der Gleichgewichtsbedingung (3-14)

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{f} = 0 \quad \in V \tag{3-33}$$

und durch Ergänzung der Extremalbedingung

$$\int_V \dot{\mathbf{u}}^T p \mathbf{f} \, dV \rightarrow \text{Max} \quad (\text{Leistung der äußeren Kräfte}) \tag{3-34}$$

bzw. in verkürzter Form (Normierung der Geschwindigkeiten)

$$p \rightarrow \text{Max} \tag{3-35}$$

gebildet werden.

Analog dazu kann eine Grenzwiderstandsaufgabe formuliert werden. Ein skalarer Multiplikator r wird mit dem konstanten Glied der Fließbedingungen \mathbf{s}_u verknüpft, z.B. für lineare Fließbedingungen ohne Verfestigung

$$\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} - r \mathbf{s}_u \leq \mathbf{0} \quad \in V \tag{3-36}$$

unter Verwendung der Extremalbedingung

$$\int_V \dot{\mathbf{e}}^T r \mathbf{s}_u \, dV \rightarrow \text{Min} \quad (\text{Geschwindigkeit der Energiedissipation}) \tag{3-37}$$

bzw. nach Normierung

$$r \rightarrow \text{Min.} \tag{3-38}$$

Einordnung der klassischen Grenzzustandsmodelle

Die klassischen Formen der Grenzzustandsaufgaben können durch Vereinfachungen des Kuhn-Tucker-Problems hergeleitet werden. Hierbei wird eine Eigenschaft des elastisch-plastischen Körpers ausgenutzt, die darin besteht, daß der Wert der plastischen Grenzlast unabhängig von der Steifigkeitsverteilung im Tragwerk ist. Diese Eigenschaft bildet auch die Basis der Traglast- bzw. Einspielsätze (siehe Abschnitt 2.3). Die Verknüpfung der Kinematik und Statik über das Materialgesetz kann beliebig gestaltet werden (z.B. durch Modifikation der Flexibilitätsmatrix \mathbf{D}^{-1}), so daß durch geschickte Normierung der jeweils duale Bedingungs- und Variablenraum ausgeblendet werden kann. Der Aufbau von Extremalaufgaben zur Ermittlung der plastischen Grenzlast und des plastischen Grenzwiderstandes reduziert sich in der statischen Formulierung auf:

Grenzlastaufgabe		Grenzwiderstandsaufgabe	
$p \rightarrow \text{Max}$		$r \rightarrow \text{Min}$	
$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{f} = \mathbf{0}$	$\in V$	$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$	$\in V$
$\mathbf{A}_s^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{g}_s = \mathbf{0}$	$\in S_f$	$\mathbf{A}_s^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{g}_s = \mathbf{0}$	$\in S_f$
$\mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_u \leq \mathbf{0}$	$\in V$	$\mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r} \mathbf{s}_u \leq \mathbf{0}$	$\in V. \quad (3-39)$

Die vereinfachten Prinzipien gestatten lediglich Berechnungen des plastischen bzw. adaptiven Grenzzustandes, so daß mit dieser Form der Aufgabe keine Untersuchungen für erweiterte Grenzzustände möglich sind. Darüber hinaus kann nur der Multiplikator p oder r zuverlässig bestimmt werden, während die anderen Variablen des Problems aufgrund der jeweils fehlenden Strukturbeziehungen im Modell nur in Ausnahmefällen exakt ermittelt werden können.

Überblick zu den Modellen dieser Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei deformationsbasierte Grenzzustandsmodelle untersucht:

Modell 1: Grenzzustandsmodell ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten

Modell 2: Grenzzustandsmodell mit Sicherstellung der Tragwerksadaption.

Modell 1 stellt eine Weiterentwicklung des klassischen plastischen Grenzzustandsmodells dar, wohingegen im Modell 2 die Theorie des adaptiven Körpers zugrunde gelegt wird. Beide Modelle werden so aufbereitet, daß Ergänzungen in Form deformationsbasierter Grenzzustandsbeschreibungen möglich sind. In den nachfolgenden Abschnitten werden diese Modelle und zugehörige Berechnungskonzepte näher vorgestellt.

3.1.3.3 Analyse des deformationsbasierten Grenzzustandes ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten

Im Gegensatz zu klassischen Grenzzustandsuntersuchungen muß für die Ermittlung allgemeiner deformationsbasierter Grenzzustände auf den gesamten Kuhn-Tucker-Bedingungsvorrat nach Abb. 3.4 zurückgegriffen werden. Das Prinzip zur Bestimmung des einparametrischen Grenzwiderstandes (lineare Fließbedingung) lautet somit:

$$\text{Extremalbedingung} \quad r \rightarrow \text{Min} \quad (3-40)$$

$$\text{Gleichgewichtsbedingung} \quad \mathbf{A}^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) - \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-41)$$

$$\text{statische Randbedingung} \quad \mathbf{A}_s^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{g}_s = \mathbf{0} \quad \in S_f \quad (3-42)$$

$$\text{Verträglichkeitsbedingung} \quad \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon} \quad \in V \quad (3-43)$$

$$\text{kinem. Randbedingung} \quad \mathbf{u}_s - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \in S_u \quad (3-44)$$

$$\text{Materialgesetz} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \boldsymbol{\lambda} \quad \in V \quad (3-45)$$

$$\mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} - r \mathbf{s}_u \leq \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} - r \mathbf{s}_u) = 0; \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \quad \in V. \quad (3-46)$$

Dieses Grundgerüst kann durch Deformationsbedingungen ergänzt werden, z.B. mit

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{u}_u \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_u \quad \text{oder} \quad \mathbf{F} \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{p,u}. \quad (3-47)$$

Zur Erläuterung der Wirkung von Deformationsbedingungen wird das Beispiel aus Abschnitt 2.3 erneut aufgegriffen. Die Durchbiegung des Rahmenriegels am Knoten 3 wird auf einen Wert von maximal 30mm begrenzt. Die Ergebnisse sind in Abb. 3.5 angegeben.

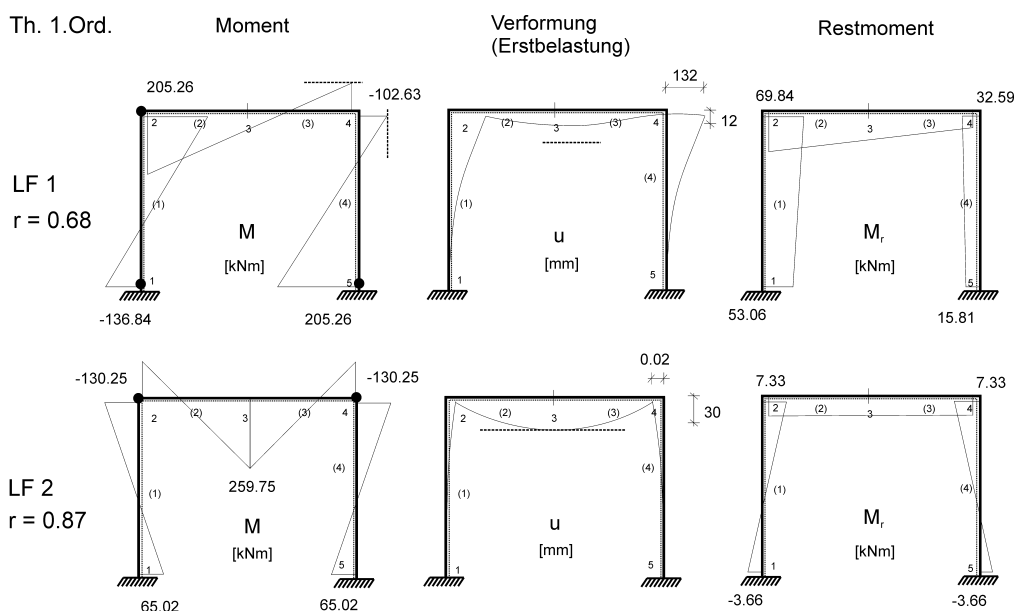


Abb. 3.5 Ergebnis Grenzzustandsanalyse (Durchbiegungsbegrenzung 30mm an Knoten 3)

Bei der Untersuchung zum Lastfall 1 wird die Verformungsbegrenzung nicht angesprochen, in diesem Fall greift zuvor das Kriterium des plastischen Grenzzustandes (Ergebnis analog Abb. 2.3). Für den Lastfall 2 wird hingegen die Begrenzung maßgebend. Der zugehörige Grenzwiderstandsfaktor darf zur Erfüllung dieser Bedingung den Wert von 0.87 nicht unterschreiten.

3.1.3.4 Analyse des deformationsbasierten Grenzzustandes mit Sicherstellung der Tragwerksadaption

Die Prinzipien ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten gestatten Analysen von Tragwerken für jeweils eine gegebene Lastverteilung. Die Wirkungen nichtlinearer Beanspruchung auf nachfolgende Lastsequenzen kann innerhalb dieses Modells nicht abgeschätzt werden. Je nach Aufgabenstellung muß deshalb bereits in der Entwurfsphase überprüft werden, ob extreme Einzeleinwirkungen oder Einwirkungsfolgen im Lebenszyklus des Bauwerkes zu erwarten sind. Werden Lastfolgeeffekte unterschätzt, kann dies zu sicherheitsrelevanten Einbußen in der Tragqualität führen.

Eine effektive Methode zur Beherrschung von Lastfolgeproblemen ist die gezielte Beschränkung der Einwirkung auf das Niveau der adaptiven Grenzlast. In Abschnitt 2.3.3 wurde auf diese Möglichkeit bereits hingewiesen. Die Modelle zur Analyse des deformationsbasierten Grenzzustandes lassen sich ebenfalls auf diesen Problembereich übertragen. Auf Besonderheiten beim Aufbau und der Lösung von Extremalaufgaben mit Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten weisen die nachfolgenden Abschnitte hin.

Mit Blick auf die programmtechnische Umsetzung in Abschnitt 3.3 werden im folgenden

- das Konzept des superponierten Restzustandes und
- das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort

zur Analyse des deformationsbasierten Grenzzustandes unter Beachtung der Tragwerksadaption vorgestellt. Beide Konzepte beruhen auf der Einspieltheorie.

3.1.3.4.1 Das Konzept des superponierten Restzustandes

Aufteilung der Tragwerksantwort

Ein linear elastisch-plastischer Körper wird durch eine unendliche Folge willkürlich wiederkehrender Lastfelder \mathbf{f} eines gegebenen Lastprogramms unterhalb der adaptiven

Grenzlast beansprucht. Es wird angenommen, daß die Änderungen der Beanspruchung diskreten Zeitpunkten t zuzuordnen sind. Die Betrachtung beginnt zum Zeitpunkt $t = t_0$.

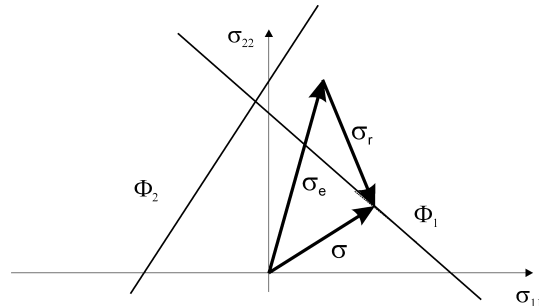


Abb. 3.6 Zur vektoriellen Zerlegung der Tragwerksantwort

Das Konzept des superponierten Restzustandes beruht auf der Annahme, daß für diesen Körper die Gesamtantwort zu einem Zeitpunkt $t = t_1$ als Linearkombination aus einem linear elastischen Anteil (Index e) und einem Restanteil (Index r) aufgefaßt werden kann

$$\sigma(x, t_1) = \sigma_e(x, \mathbf{f}(t_1)) + \sigma_r(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) \quad (3-48)$$

$$\varepsilon(x, t_1) = \varepsilon_e(x, \mathbf{f}(t_1)) + \varepsilon_r(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) \quad (3-49)$$

$$\mathbf{u}(x, t_1) = \mathbf{u}_e(x, \mathbf{f}(t_1)) + \mathbf{u}_r(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) . \quad (3-50)$$

In Abbildung 3.6 wird diese vektorielle Verknüpfung exemplarisch dargestellt. Die Restanteile verbleiben nach völliger Entlastung zum Zeitpunkt $t=t_2$ im Tragwerk und bilden eine neue Ausgangssituation für den nächsten Lastschritt. Die Restfelder selbst setzen sich aus elastischen (Index re) und plastischen Anteilen (Index p) zusammen, die über den Zeitraum t_0 bis t_1 kumulativ aufgebaut werden

$$\sigma(x, t_2) = \sigma_r(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) = \sigma_{re}(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) \quad (3-51)$$

$$\varepsilon(x, t_2) = \varepsilon_r(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) = \varepsilon_{re}(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) + \varepsilon_p(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) \quad (3-52)$$

$$\mathbf{u}(x, t_2) = \mathbf{u}_r(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) = \mathbf{u}_{re}(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)) + \mathbf{u}_p(x, \mathbf{f}(t_0-t_1)). \quad (3-53)$$

Werden bis zu einem nachfolgenden Zeitpunkt $t=t_3$ weitere plastische Verformungen infolge wechselnder Belastung erzeugt, werden Veränderungen am Restspannungszustand im zunehmenden Maße nur noch infolge der maßgebenden Lastfelder des Lastpro-

gramms hervorgerufen. Die Maßgabe eines Lastfalls wird bezüglich der zugrunde liegenden Fließfunktion Φ eingeschätzt. Im Zeitpunkt t_3 liegt bei linearen Fließfunktionen folgende Gesamtreaktion vor:

$$\sigma(x, t_3) = \sigma_e(x, f(t_3)) + \sigma_r(x, \max_{\tau=t_0}^{t_3} \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(\tau))) + \mathbf{s}_u\}) \quad (3-54)$$

$$\varepsilon(x, t_3) = \varepsilon_e(x, f(t_3)) + \varepsilon_r(x, \max_{\tau=t_0}^{t_3} \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(\tau))) + \mathbf{s}_u\}) \quad (3-55)$$

$$\mathbf{u}(x, t_3) = \mathbf{u}_e(x, f(t_3)) + \mathbf{u}_r(x, \max_{\tau=t_0}^{t_3} \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(\tau))) + \mathbf{s}_u\}). \quad (3-56)$$

Nach einer endlichen Anzahl von Belastungszyklen spielt das System zum Zeitpunkt $t=t_A$ ein. Für $t_4 > t_A$ gilt:

$$\sigma(x, t_4) = \sigma_e(x, f(t_4)) + \sigma_r(x, \max_{\tau=t_0}^{t_A} \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(\tau))) + \mathbf{s}_u\}) \quad (3-57)$$

$$\varepsilon(x, t_4) = \varepsilon_e(x, f(t_4)) + \varepsilon_r(x, \max_{\tau=t_0}^{t_A} \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(\tau))) + \mathbf{s}_u\}) \quad (3-58)$$

$$\mathbf{u}(x, t_4) = \mathbf{u}_e(x, f(t_4)) + \mathbf{u}_r(x, \max_{\tau=t_0}^{t_A} \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(\tau))) + \mathbf{s}_u\}). \quad (3-59)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Restfelder keinen Einfluß auf die elastischen Teilantworten ausüben, sind die Restfelder nur noch von den umhüllenden Antworten abhängig, die vorab mit einer elastischen Lastfalluntersuchung der k Lastfelder ermittelt werden können

$$\sigma(x, t_4) = \sigma_e(x, f(t_4)) + \sigma_r(x, \max_{i=1}^k \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(i))) + \mathbf{s}_u\}) \quad (3-60)$$

$$\varepsilon(x, t_4) = \varepsilon_e(x, f(t_4)) + \varepsilon_r(x, \max_{i=1}^k \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(i))) + \mathbf{s}_u\}) \quad (3-61)$$

$$\mathbf{u}(x, t_4) = \mathbf{u}_e(x, f(t_4)) + \mathbf{u}_r(x, \max_{i=1}^k \{\Phi(\dot{\sigma}_e(x, f(i))) + \mathbf{s}_u\}). \quad (3-62)$$

Die Berechnung des Grenzzustandes kann somit insgesamt in drei Teilschritten erfolgen:

Schritt 1: Bestimmung der elastischen Umhüllungsantwort

Schritt 2: Bestimmung des Restanteils

Schritt 3: Superposition der elastischen Anteile und Restanteile der Tragwerksantwort

Alle zeitabhängigen Aspekte werden im Schritt 1 berücksichtigt.

Zur Bestimmung der elastischen Umhüllungsantwort

Wie zuvor erläutert, kann unter der Voraussetzung des Einspielens der Restzustand in Abhängigkeit von den Extremwerten der elastischen Reaktion ermittelt werden. Diese Eigenschaft trägt zur Erhöhung der Effizienz der Berechnung bei, da nicht alle elastischen Reaktionen, sondern nur deren Umhüllende (Grenzfunktionen) bei der Berechnung des zugehörigen Restzustandes zu berücksichtigen sind. Unter geometrisch linearen Verhältnissen kann die Umhüllende durch Anwendung der Superpositionsregel bestimmt werden.

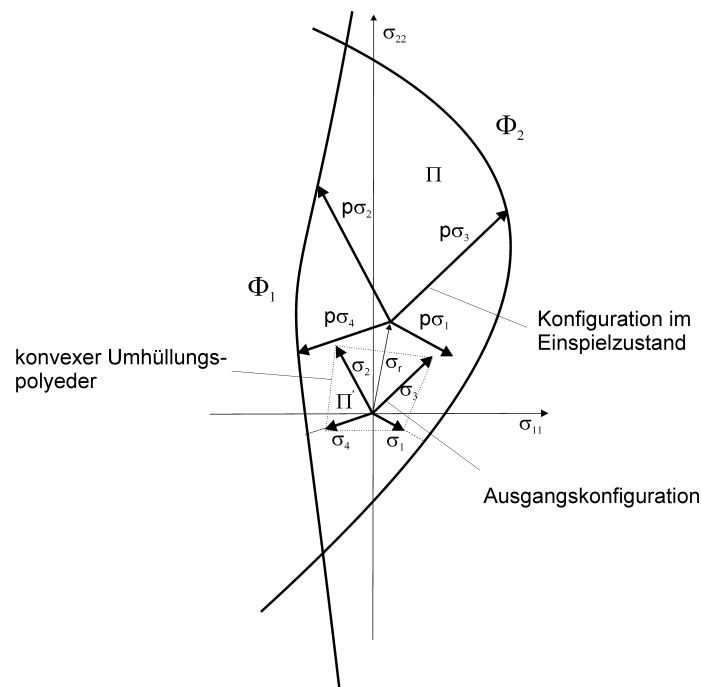


Abb. 3.7 Zur Bestimmung der Umhüllungsantwort bei nichtlinearen Fließbedingungen

Im allgemeinen Fall kann bei Verwendung nichtlinearer Fließfunktionen vorab die Beschreibung der Umhüllenden auf die Angabe der Eckvektoren eines konvexen Umhüllungs-polyeders Π' beschränkt werden (siehe Abb. 3.7). Nach Ermittlung des Restspannungsvektors kann entschieden werden, inwieweit Antworten aus nicht im Lastprogramm erfaßten Lastsituationen innerhalb des Bereichs zulässiger Antworten Π liegen und damit bezüglich des adaptiven Grenzkriteriums als sicher angesehen werden können.

Einen Sonderfall bilden lineare bzw. linearisierte Fließbedingungen. Hier genügt die Angabe eines maßgebenden Spannungsvektors $\mathbf{s}_{e,nj}$ zur Beschreibung der gesamten Umhüllungsantwort. Dieser kann vorab auch ohne Kenntnis des Restspannungszustandes eindeutig bestimmt werden. Die Zugehörigkeit einer Antwort zum Vektor der umhüllenden

elastischen Spannungsreaktion \mathbf{s}_e kann bezüglich der linearen Fließfunktionen Φ eingeschätzt werden. Bei der Untersuchung der k Lastkombinationen (oder Lastschritte) gilt für die Spannungen an der Stelle n im Stab j

$$\mathbf{s}_{e,nj} = \max_{i=1}^k \{ \Phi_{nij}(\hat{\sigma}(i)) + \mathbf{s}_{u,nj} \}, \quad (3-63)$$

wobei $\hat{\sigma}$ die elastische Spannungsantwort des Systems infolge des i -ten Lastfalles oder Lastschrittes ist. Durch das Einsetzen der Spannungsantwort in die Fließfunktion wird der Vektor der Spannungsantwort $\hat{\sigma}_i$ normiert und in die Vektorrichtung von \mathbf{s}_u (konstantes Glied der Fließfunktion) transformiert, so daß der Extremwertsuche ein einheitliches Abstandskriterium bei der Untersuchung aller Vektoren $\hat{\sigma}_i$ bezüglich der Fließfunktion zugrunde liegt (siehe Abb. 3.8).

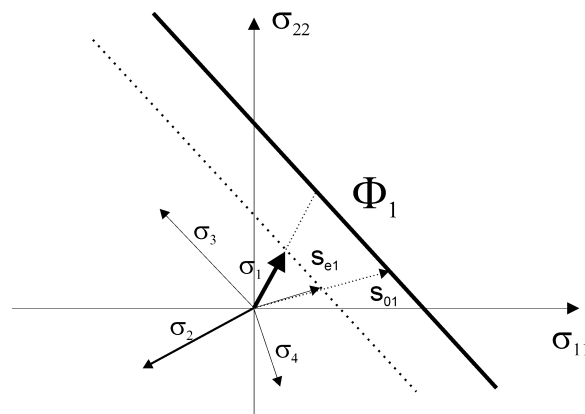


Abb. 3.8 Zur Bestimmung des Vektors der umhüllenden Spannungsantwort bzgl. der linearen Plastizitätsbedingung Φ_1

Für die Analyse deformationsbasierter Grenzzustände nach dem Konzept des superponierten Restzustandes müssen die zu den Deformationsbedingungen zugehörigen elastischen Verformungs- und Deformationsumhüllenden \mathbf{u}_e und $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ bestimmt werden. Die Ermittlung erfolgt analog zur elastischen Spannungsumhüllenden.

Prinzipiell bestehen keine methodischen Unterschiede bei der Ermittlung der Umhüllungsvektoren für statisch oder dynamisch beanspruchte Körper. Im statischen Fall werden die Extremwerte aus den Antworten aller Lastkombinationen herausgefiltert, wohingegen im dynamischen Fall die Werte des gesamten Untersuchungszeitraums zugrunde gelegt werden.

Zur Bestimmung des Restanteils

Der Restzustand muß folgenden Bedingungen genügen:

$$\text{Gleichgewichtsbedingung} \quad \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-64)$$

$$\text{Verträglichkeitsbedingung} \quad \mathbf{A} \mathbf{u}_r - \boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-65)$$

$$\text{Materialgesetz} \quad \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_r + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-66)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-67)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \Phi(\boldsymbol{\sigma}_e(t) + \boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \in V \quad (3-68)$$

$$\text{statische Randbedingung} \quad \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma}_r - \mathbf{g}_s = \mathbf{0} \quad \in S_f \quad (3-69)$$

$$\text{kinematische Randbedingung} \quad \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad \in S_u \quad (3-70)$$

Die Belastungsintensität liegt im Bereich der Adaption des Tragwerkes, falls sich ein Restzustand angeben läßt, von dem aus die Laständerungen nur elastische Zusatzformänderungen erzeugen und die Fließbedingungen

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_e(t) + \boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}) \leq 0 \quad \in V \quad (3-71)$$

nicht verletzen. Unter diesen Bedingungen ergeben sich endliche Verformungsgrößen, die mit Hilfe von Deformationskriterien bewertet werden können

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_r - \boldsymbol{\varepsilon}_u \leq \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-72)$$

$$\mathbf{u}_e(t) + \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_u \leq \mathbf{0} \quad \in V. \quad (3-73)$$

Der Grenzzustand kann durch Lösung einer Extremalaufgabe direkt ermittelt werden. Im Falle einer einparametrischen Grenzwiderstandsaufgabe werden die konstanten Anteile der Fließfunktion \mathbf{s}_u in den Bedingungen (3-68) und (3-71) mit einem variablen Faktor r multipliziert

$$\boldsymbol{\lambda}^T \Phi(\boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_r, r \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \in V \quad (3-74)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_r, r \mathbf{s}_u, \boldsymbol{\lambda}) \leq 0 \quad \in V, \quad (3-75)$$

der über die Extremalbedingung

$r \rightarrow \text{Min}$

(3-76)

einem Extremwert zugeführt wird.

Die separate Untersuchung des Restzustandes entspricht der traditionellen Strategie zur Lösung adaptiver Grenzzustandsaufgaben [50, 56]. Die vorgeschaltete Untersuchung der elastischen Teilantwort ermöglicht eine erhebliche Straffung des numerischen Aufwandes bei Lastfolgeuntersuchungen. Für eine linear elastisch-plastische Struktur können nach der Theorie des adaptiven Körpers mit den Annahmen des Abschnitts 3.1.1 und den folgenden Bedingungen

- geometrisch lineare Theorie
- wiederholte Einwirkung aller am Lastprogramm beteiligten Lastfälle
- übereinstimmende Material- und Systemeigenschaften sowohl bei der Berechnung der elastischen Teilantworten als auch der Restanteile
- kein Einfluß des Restanteils auf die elastischen Umhüllungsantworten

exakte Ergebnisse für die Spannungsantworten gewonnen werden. Darüber hinaus wird das Konzept auch bei Abweichungen von diesen Randbedingungen zur Ermittlung brauchbarer Näherungslösungen herangezogen, wie z.B. zur Lösung von Problemstellungen aus dem Erdbebeningenieurwesen.

3.1.3.4.2 Das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort

Betrachtet wird der elastisch-plastische Körper nach Abschnitt 3.1.2. Im Gegensatz zum Konzept des superponierten Restzustandes werden die elastischen und plastischen Teilantworten des Systems bei Lastfolgeeinwirkung gemeinsam in einem Berechnungsschritt bestimmt. Grundlage des Konzeptes ist die Annahme, daß im Einspielzustand allen möglichen Antworten des Systems nur *ein* plastischer Deformationszustand

$$\dot{\mathbf{a}}_p = \dot{\mathbf{e}}^{(1)T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) + \dots + \dot{\mathbf{e}}^{(k)T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) \quad (3-77)$$

zugrunde liegt. Dieser Zustand bildet sich infolge wechselnder Einwirkung von k Lastkombinationen bis zum Erreichen des Adaptionszustandes aus.

Der Gesamtzustand muß folgenden Bedingungen genügen, wobei der hochgestellte Index die Zugehörigkeit zur Lastkombination j ($j=1\dots k$) bezeichnet:

Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} - \mathbf{f}^{(j)} = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-78)$

Verträglichkeitsbedingung $\mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} - \dot{\mathbf{a}}^{(j)} = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-79)$

Materialgesetz $\mathbf{D}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} + \dot{\mathbf{a}}_p - \dot{\mathbf{a}}^{(j)} = \mathbf{0} ; \quad \ddot{\mathbf{e}}^{(j)} \geq \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-80)$

$$\dot{\mathbf{e}}^{(j)T} \Phi(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}, \mathbf{s}_u) = \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-81)$$

statische Randbedingung $\mathbf{A}_S^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)} - \mathbf{g}_S = \mathbf{0} \quad \in S_f \quad (3-82)$

kinematische Randbedingung $\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}_S = \mathbf{0} \quad \in S_u . \quad (3-83)$

Das System spielt ein, falls keine Verletzungen der Fließbedingungen

$$\Phi(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}, \mathbf{s}_u) \leq \mathbf{0} \quad \in V \quad (3-84)$$

vorliegen. Deformationskriterien können folgendermaßen implementiert werden:

$$\dot{\mathbf{a}}^{(j)} \leq \dot{\mathbf{a}}_u \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}^{(j)} \leq \mathbf{u}_u \quad \in V. \quad (3-85)$$

Im Falle einer einparametrischen Grenzwiderstandsaufgabe werden die konstanten Anteile der Fließfunktion \mathbf{s}_u in den Bedingungen (3-81) und (3-84) mit einem variablen Faktor r multipliziert, der analog zur Vorgehensweise im Abschnitt 3.1.3.4.1 einem Minimum zugeführt wird.

Unter den Voraussetzungen des Abschnitts 3.1.3.4.1 liefern das Konzept des superponierten Restzustandes und das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort übereinstimmende Ergebnisse.

Die Anwendungsgebiete des Konzepts der gekoppelten plastischen Antwort erschließen sich aus der Möglichkeit zur Untersuchung aller Anteile der Tragwerksantwort in einer gemeinsamen Variablenumgebung. So ist es unter anderem möglich, den Einfluß von plastischen Formänderungen auf andere Material- oder Systemeigenschaften direkt zu erfassen. Diese Eigenschaft ist vor allem bei der Lösung von Grenzwiderstandsaufgaben von Nutzen, da eine Widerstandsänderung in der Regel auch Veränderungen anderer Tragwerkparameter wie z.B. der Steifigkeit und der Duktilität nach sich zieht.

Für dynamische Untersuchungen müssen die Beziehungen (3-77) bis (3-85) durch zeitabhängige Terme ersetzt werden. Mit Blick auf eine numerischen Lösung werden die

notwendigen Implementierungen von Zeitintegrationsverfahren zu einem äußerst komplexen rechentechnischen Apparat führen. Demgegenüber sind Verfahren, die das Grenzzustandsmodell nach dem Konzept des superponierten Restzustandes mit externen Iterationen kombinieren, in der numerischen Behandlung von dynamischen Einspielproblemen effektiver. Im folgenden wird deshalb das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort ausschließlich in Verbindung mit statischen Untersuchungen angewandt.

3.2 Diskrete Modellbeschreibung am Beispiel ebener Stabtragwerke

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Beziehungen für die Entwicklung eines mathematischen Apparats zur numerischen Lösung von Bemessungsaufgaben für Stahlbetontragwerke angegeben bzw. hergeleitet. Am Beispiel ebener Stabtragwerke wird der Übergang von der im Abschnitt 3.1 vorgestellten kontinuumsmechanischen Formulierung in eine diskrete Strukturbeschreibung mit Hilfe finiter Ansätze demonstriert. Die erhaltenen Komponenten werden nachfolgend (Abschnitt 3.3) in einen Berechnungsapparat auf der Basis der nichtlinearen Optimierung integriert. Es werden folgende Annahmen in Ergänzung zu Abschnitt 3.1.1 getroffen:

- Im Verhältnis zu den Hauptabmessungen treten nur kleine Verformungen auf.
- Die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte gilt sowohl bei Beanspruchungen im elastischen als auch im plastischen Bereich der Arbeitslinie.
- Die plastischen Verformungen treten nur an den Elementrändern in konzentrierten plastischen Gelenken auf. Die umliegenden Tragwerksbereiche verbleiben im elastischen Bereich.
- Das Versagen tritt nur infolge ausgewählter Schnittkraftinteraktionen (z.B. Momenten- und Normalkraftbeanspruchung) ein. Versagen infolge Stabilitätsverlust wird nicht untersucht.
- Die Fließfunktionen liegen in linearer oder linearisierter Form vor.
- Stabelemente haben entlang der Stabachse konstante Querschnitts- und Werkstoffeigenschaften.

Alle geometrischen Eigenschaften, Beanspruchungen sowie alle den Schnittgrößen- und Formänderungszustand beschreibenden Kenngrößen werden einheitlich auf die Schwerachse der Elemente bezogen.

3.2.1 Finite Elemente Modellierung geometrisch linearer Systeme

3.2.1.1 Elementierung und Bezugssystem

Die Modellierung folgt der in der Finiten Elemente Methode üblichen Verfahrensweise der Teilung der Struktur in m finite Elemente, die über n Knoten miteinander verknüpft wer-

den. Das Verhalten im Elementinneren wird mit Hilfe von Näherungsansätzen als Funktion der entsprechenden Kenngrößen am Elementrand angegeben. Die Formulierung der Transformationen vom Elementbereich zum Elementrand bzw. vom Elementrand zum Knoten bildet die Grundlage der diskreten Modellierung. Die Definition der Elementkenngrößen wird in Abb. 3.9 gegeben.

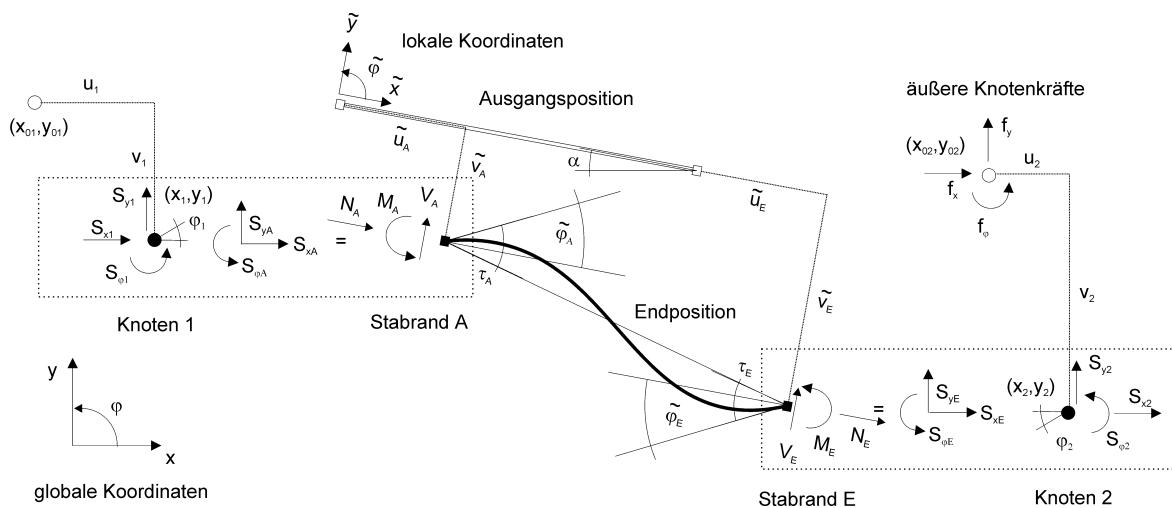


Abb. 3.9 Definition der Knoten- und Stabkenngrößen für ebenes Stabelement

3.2.1.2 Kenngrößen des Bewegungszustands

Die Bewegungseigenschaften der Tragstruktur werden im diskreten Modell durch die Bewegung der n Knotenpunkte beschrieben. Die Knoten werden im globalen Koordinatensystem durch Angabe ihrer Koordinaten und ihres Verdrehungszustandes in der Koordina- tenebene sowie über die zeitliche Änderung dieser Größen charakterisiert. Zu jedem Zeit- punkt t kann der Bewegungszustand durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t) \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (3-86)$$

beschrieben werden, wobei die Änderungen bezüglich des Ausgangszustandes (Index 0) in den Vektoren \mathbf{u} und $\dot{\mathbf{u}}$ enthalten sind

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_n(t)]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_i(t) = [u_{xi}(t), u_{yi}(t), \varphi_i(t)]^T. \quad (3-87)$$

Zum Betrachtungsbeginn t_0 gilt:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = 0. \quad (3-88)$$

Die Beschleunigungswerte

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = [\ddot{u}_1(t), \dots, \ddot{u}_i(t), \dots, \ddot{u}_n(t)]^T \quad \text{mit} \quad \ddot{\mathbf{u}}_i(t) = [\ddot{u}_{xi}(t), \ddot{u}_{yi}(t), \ddot{\varphi}_i(t)]^T \quad (3-89)$$

können zu jedem Zeitpunkt mit Hilfe der Bewegungsgleichung bestimmt werden.

3.2.1.3 Beziehung zwischen Stabrandschnittkraft und Knotenkraft

Für alle Stabelemente j ($j=1 \dots m$) mit der Länge l_j (Abb. 3.9) wird der Vektor der vollständigen Randschnittgrößen

$$\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_j, \dots, \tilde{s}_m]^T \quad \tilde{\mathbf{s}}_j = [N_{jA}, V_{jA}, M_{jA}, N_{jE}, V_{jE}, M_{jE}]^T \quad (3-90)$$

angegeben.

Durch die Multiplikation mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_v

$$\mathbf{T}_v^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1v}^T & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{T}_{jv}^T & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{T}_{mv}^T & \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{jv}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_j & 1 & 0 & -1/l_j & 0 \\ 0 & 1/l_j & 0 & 0 & -1/l_j & 1 \end{bmatrix} \quad (3-91)$$

wird eine Reduzierung des Unbekanntenvektors $\tilde{\mathbf{s}}$ um die abhängigen Schnittgrößen ermöglicht. Es verbleibt der Vektor der unabhängigen Randschnittgrößen

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{T}_v \mathbf{s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_j, \dots, \mathbf{s}_m]^T \quad \mathbf{s}_j = [N_{jA}, M_{jA}, M_{jE}]^T. \quad (3-92)$$

Zur Übertragung der Elementkenngößen auf die benachbarten Knoten wird eine Transformation der Stabrandschnittgrößen in die globalen Koordinatenrichtungen durchgeführt

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{T}_l \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{T}_l \mathbf{T}_v \mathbf{s} \quad (3-93)$$

mit

$$\mathbf{T}_l^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1l}^T & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{T}_{jl}^T & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{T}_{ml}^T & & \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{jl}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-94)$$

Über die globale Zuordnungsmatrix \mathbf{T}_Z werden die transformierten Stabrandschnittkräfte den Knotenkräften \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_i, \dots, \mathbf{S}_n] \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_i = [S_{xi}, S_{yi}, S_{zi}] \quad (3-95)$$

zugeordnet. Gleichzeitig wird die Zuordnung der Elemente zu den Knoten i ($i=1\dots n$) vollzogen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_Z \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{T}_Z \mathbf{T}_l \tilde{\mathbf{s}}, \quad (3-96)$$

wobei (beispielhaft)

$$\mathbf{T}_Z = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1A} & 0 & 0 & \mathbf{e}_{jE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_{jA} & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \mathbf{e}_{lE} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{mA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{mE} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-97)$$

ist. Zusammengefaßt besteht folgende Abhängigkeit der Knotenkräfte am System \mathbf{S} von den unabhängigen Elementrandschnittgrößen \mathbf{s}

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_Z \mathbf{T}_l \mathbf{T}_v \mathbf{s} = \mathbf{A}^T \mathbf{s}. \quad (3-98)$$

3.2.1.4 Beziehung zwischen Stabrandverformung und Knotenverformung

Für die Verformungsgrößen gelten prinzipiell die Zusammenhänge nach Abschnitt 3.2.1.3. Der Vektor der vollständigen Randverformungen

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_j, \dots, \tilde{u}_m]^T \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_j = \begin{matrix} \tilde{u}_{xjA}, \tilde{u}_{yjA}, \tilde{u}_{zjA}, \\ \tilde{u}_{xjE}, \tilde{u}_{yjE}, \tilde{u}_{zjE} \end{matrix} \quad (3-99)$$

kann über die Reduktionstransformation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_v^T \tilde{\mathbf{u}} \quad (3-100)$$

durch den Vektor der unabhängigen Stabrandverformungen ersetzt werden

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_j, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m]^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_j = [\exists u_j, \tau_{jA}, \tau_{jE}]^T. \quad (3-101)$$

Die Verbindung zu den Knotenverformungen

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_i = [u_{xi}, u_{yi}, \dots]^T \quad (3-102)$$

wird über die Matrizenmultiplikation aus Koordinatentransformation, Reduktions- und Zuordnungsmatrix erreicht

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_v^T \mathbf{T}_1^T \mathbf{T}_z^T \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (3-103)$$

3.2.1.5 Beziehung zwischen Stabrandkenngrößen und Elementkenngrößen

Die Beziehung zwischen Stabrandkenngrößen und Elementkenngrößen wird über Ansatzfunktionen beschrieben. Für ebene Stabelemente ohne Elementlast sowie mit konstanter Steifigkeit werden folgende Ansatzfunktionen zugrunde gelegt [67]:

$$N_j(\tilde{x}) = N_{jA} \quad M_j(\tilde{x}) = \left(\frac{\tilde{x}}{l_j} - 1\right) M_{jA} + \frac{\tilde{x}}{l_j} M_{jE} \quad (3-104)$$

$$u_{j,e}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{l_j} \exists u_{j,e} \quad v_{j,e}(\tilde{x}) = \left(-\frac{\tilde{x}}{l_j} + 2\frac{\tilde{x}^2}{l_j^2} - \frac{\tilde{x}^3}{l_j^3}\right) l_j \tau_{jA,e} + \left(\frac{\tilde{x}^2}{l_j^2} - \frac{\tilde{x}^3}{l_j^3}\right) l_j \tau_{jE,e}. \quad (3-105)$$

Die Funktionsverläufe gelten für elastische Stabantworten. Die Vorzeichenkonvention entspricht den üblichen Festlegungen für Weggrößenverfahren.

3.2.1.6 Massen-, Dämpfungskräfte und äußere Lasten

Massen- und Dämpfungskräfte können folgendermaßen ermittelt werden:

$$\mathbf{f}_M = \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad \mathbf{f}_C = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}(t). \quad (3-106)$$

Die Elementmassen \mathbf{m} werden durch Transformationen auf die Elementränder umgerechnet und durch Multiplikation mit der Zuordnungsmatrix in globale Einzelmassen bzw. Einzelmassenträgheiten umgerechnet. Die Koeffizientenmatrix der Dämpfung \mathbf{c} kann ent-

weder direkt angegeben oder mit Hilfe von Näherungen (z.B. *Rayleigh*-Ansatz) berechnet werden [68].

Äußere statische oder dynamische Belastungen werden in Elementrandlasten transformiert. Die notwendigen Transformationsmatrizen können durch Einsetzen der Ansatzfunktionen für die Verschiebung (3-105) in die Terme der äußeren Energie und anschließender Integration gewonnen werden [69]. Die Zuordnung zu den Knoten wird über die Zuordnungsmatrix und die Durchführung der Winkeltransformation hergestellt. Der Vektor der Knotenlasten $\mathbf{f}(t)$ hat folgende Struktur:

$$\mathbf{f}(t) = [\mathbf{f}_1(t), \dots, \mathbf{f}_i(t), \dots, \mathbf{f}_n(t)]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}_i(t) = [f_{ix}, f_{iy}, f_i]^T. \quad (3-107)$$

3.2.1.7 Materialgesetz

3.2.1.7.1 Elastische Stabrandverformungen

Der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und Verformungen am Elementrand wird mit Hilfe der konjugierten Formänderungsenergie hergeleitet [69], die für einen Stab mit der Länge l (Momenten- und Normalkraftanteil, Theorie I. Ordnung)

$$\%p = \frac{1}{2EA} \int_0^l N(\tilde{x})^2 d\tilde{x} + \frac{1}{2EI} \int_0^l M(\tilde{x})^2 d\tilde{x} \quad (3-108)$$

beträgt. Unter Einbeziehung der Ansatzfunktionen (3-104) erhält man mit $\tilde{x} = \xi l$

$$\%p = \frac{l}{2EA} \int_0^1 N_A^2 d\xi + \frac{l}{2EI} \int_0^1 (M_E \xi + M_A \xi - M_A)^2 d\xi. \quad (3-109)$$

Nach Integration verbleibt ein von den Randschnittgrößen abhängiger Ausdruck:

$$\%p = \frac{l}{2EA} N_A^2 + \frac{l}{2EI} \left[\frac{1}{3} M_A^2 - \frac{1}{3} M_A M_E + \frac{1}{3} M_E^2 \right]. \quad (3-110)$$

In Matrixschreibweise kann verkürzend geschrieben werden:

$$\%p = \frac{1}{2} \mathbf{s}_j^T \mathbf{Q}_j^{-1} \mathbf{s}_j, \quad (3-111)$$

wobei \mathbf{Q}_j^{-1} die von der Kraftgrößenmethode bekannte Flexibilitätsmatrix ist. Für das Gesamttragwerk gilt:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Q}_j^{-1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{Q}_m^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3EI} & -\frac{l_j}{6EI} \\ 0 & -\frac{l_j}{6EI} & \frac{l_j}{3EI} \end{bmatrix}. \quad (3-112)$$

Nach Ableitung von (3-111) werden die elastischen Stabrandkenngrößen erhalten, es gilt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{s} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3-113)$$

mit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Q}_j & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{Q}_m \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_j} & \frac{2EI}{l_j} \\ 0 & \frac{2EI}{l_j} & \frac{4EI}{l_j} \end{bmatrix}. \quad (3-114)$$

Alternativ kann \mathbf{Q} aus der Formänderungsenergie hergeleitet werden [57,58,70].

3.2.1.7.2 Plastizitätsbedingungen ohne Verfestigung

Für das diskrete Stabmodell können an den Elementrändern Plastizitätsbedingungen Φ im Raum der Schnittgrößen angegeben werden

$$\Phi = F(\mathbf{s}), \quad (3-115)$$

wobei Interaktionen zwischen Schnittgrößen berücksichtigt werden können. Im Falle linearer oder linearisierter Plastizitätsbedingungen (siehe Abb. 3.10)

geht (3-115) über in:

$$\mathbf{A}_p^T \mathbf{s} - \mathbf{s}_u \leq 0, \quad (3-116)$$

wobei in der Matrix \mathbf{A}_p die Koeffizienten a der Linearglieder

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1p} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{A}_{jp} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{A}_{mp} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{jp}^T = \begin{bmatrix} a_{1AN} & a_{1AM} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{hAN} & a_{hAN} & 0 \\ a_{1EN} & 0 & a_{1EM} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{kEN} & 0 & a_{kEM} \end{bmatrix} \quad (3-117)$$

und im Vektor \mathbf{s}_u

$$\mathbf{s}_u = [\mathbf{s}_{1u}, \dots, \mathbf{s}_{ju}, \dots, \mathbf{s}_{mu}]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}_{ju} = [b_{1A}, \dots, b_{hA}, b_{1E}, \dots, b_{kE}]^T \quad (3-118)$$

die konstanten Anteile b der Geradenungleichungen angegeben werden. Die Indizes h und k beziehen sich auf die Anzahl der Fließfunktionen für den Stabanfang (Index A) und das Stabende (Index E). Bei reiner Momentenbeschränkung gilt $a_N = 0$ und $a_M < 0$.

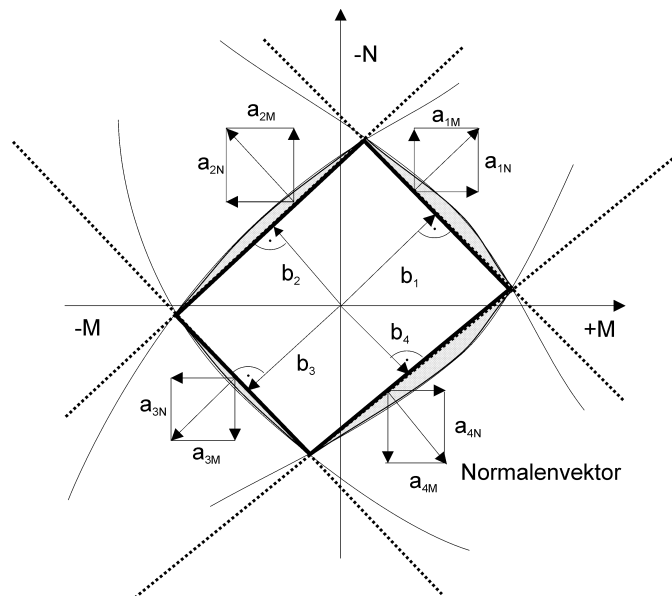


Abb. 3.10 Beispiel für die Linearisierung von Plastizitätsbedingungen

3.2.1.7.3 Plastizitätsbedingungen mit Verfestigung

Beispielhaft wird an dieser Stelle die Implementierung einer isotropen Verfestigungsfunktion erläutert. Zur Berücksichtigung der Verfestigungseffekte werden die Plastizitätsbedingungen (3-115) erweitert:

$$\Phi = F(\mathbf{s} - H(\epsilon_p)). \quad (3-119)$$

Die Verfestigungsfunktion $H(\epsilon_p)$ beschreibt die proportionale Vergrößerung der Fließfunktion abhängig vom plastischen Verformungszustand (siehe Abb. 3.11). Für lineare Plastizitätsbedingungen mit linearem Verfestigungsgesetz gilt:

$$\Phi = \mathbf{A}_p^T (\mathbf{s} - \mathbf{H}\epsilon_p) - \mathbf{s}_u = \mathbf{A}_p^T (\mathbf{s} - \mathbf{H}\mathbf{A}_p\lambda) - \mathbf{s}_u \quad (3-120)$$

mit der Matrix der Verfestigungskoeffizienten

$$\mathbf{H} = \text{diag} [\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_j, \dots, \mathbf{H}_m]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}_j = \text{diag} [h_{jN}, h_{jMA}, h_{jME}]^T. \quad (3-121)$$

Die Erweiterung dieses Prinzips auf eine allgemein polynomiale Verfestigung mit dem Polynomgrad $i = 1 \dots n$ führt auf:

$$\Phi = \mathbf{A}_p^T (\mathbf{s} - \sum_{i=1}^n h_i (\mathbf{A}_p \ddot{\epsilon})^i) - \mathbf{s}_u. \quad (3-122)$$

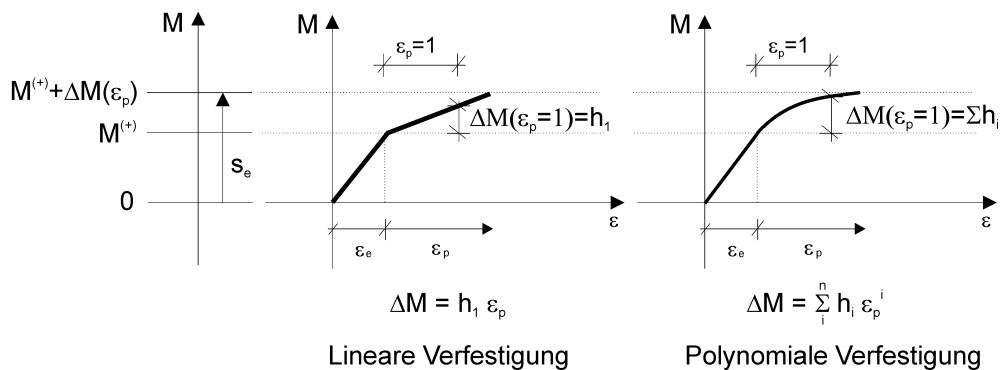


Abb. 3.11 Zur Erläuterung der Verfestigungsfunktionen für reine Momentenbegrenzung

3.2.1.7.4 Plastische Stabrandverformungen

Der Vektor der unabhängigen plastischen Stabrandverformungen kann über die Anwendung des assoziierten Fließgesetzes bestimmt werden.

Für lineare Plastizitätsbedingungen gilt:

$$\epsilon_p = \mathbf{A}_p \lambda \quad (3-123)$$

mit

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\boldsymbol{\varepsilon}_{1p}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{jp}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{mp}]^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{jp} = [\exists u_{jp}, \tau_{jAp}, \tau_{jEp}]^T. \quad (3-124)$$

Der Vektor der plastischen Multiplikatoren ist

$$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_j, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m]^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\lambda}_j = [\lambda_{1A}, \dots, \lambda_{hA}, \lambda_{1E}, \dots, \lambda_{kE}]^T \quad (3-125)$$

3.2.1.8 Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen

Die Bewegungsgleichung der diskreten Struktur lautet:

$$\mathbf{S}(t) - \mathbf{f}_M(t) - \mathbf{f}_C(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{s}(t) - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}. \quad (3-126)$$

Bei Grenzzustandsanalysen nach dem Konzept des superponierten Restzustandes nach Abschnitt 3.1.3.4.1 wird die Gesamtantwort in einen elastischen und einen Restanteil aufgespalten. Zeitabhängige Prozesse werden in der elastischen Teilantwort

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s}_e(t) - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_e(t) - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_e(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad (3-127)$$

berücksichtigt. Diese wird einem stabilen Restschnittgrößenzustand \mathbf{s}_r überlagert, der eine Gleichgewichtsgruppe bildet

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s}_r = \mathbf{0}. \quad (3-128)$$

Die statischen Randbedingungen müssen für alle elastischen, Rest- und Gesamtschnittgrößenzustände erfüllt sein. Es wird angenommen, daß die Verknüpfungen zwischen den unabhängigen Schnittgrößen durch lineare Funktionen beschrieben werden

$$\mathbf{A}_S \mathbf{s} = \mathbf{g}_s \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}_S \mathbf{s}_e = \mathbf{g}_s \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_S \mathbf{s}_r = \mathbf{g}_s. \quad (3-129)$$

Die statischen Randbedingungen werden in die Matrix \mathbf{A} integriert.

3.2.1.9 Verträglichkeitsbeziehungen und geometrische Randbedingungen

Die Kompatibilität von Stabverformungen und Knotenverformungen wird durch das Verträglichkeitsgesetz gesichert, das im Raum der unabhängigen Stabrandverformungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ formuliert wird

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{s} - \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \quad (3-130)$$

Wird eine Trennung der Tragwerksantwort nach Abschnitt 3.1.3.4.1 vollzogen, gilt für die elastischen Anteile und Restanteile:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_e - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}_e = \mathbf{0} \quad (3-131)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_r - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}_r - \mathbf{A}_p \lambda = \mathbf{0}. \quad (3-132)$$

Die geometrischen Randbedingungen werden vereinfachend durch lineare Funktionen abgebildet

$$\mathbf{A}_u \mathbf{u} = \mathbf{u}_s \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_u \mathbf{u}_e = \mathbf{u}_s \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_u \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_s. \quad (3-133)$$

Analog zu den statischen Randbedingungen kann meist eine äquivalente Ersetzung durch Modifikationen in der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} vorgenommen werden.

3.2.2 Erweiterungen zur näherungsweise Lösung geometrisch nichtlinearer Probleme

Die im Abschnitt 3.2.1 angegebenen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen wurden gemäß geometrisch linearer Theorie am unverformten System aufgestellt (Theorie I. Ordnung). Kann die Annahme der Unabhängigkeit der Schnittgrößen vom Verformungsfeld nicht mehr aufrechterhalten werden, muß der Beitrag aus geometrischer Nichtlinearität in der Gleichgewichtsbedingung berücksichtigt werden:

$$\mathbf{M}^{*+} (\mathbf{N} \mathbf{v}^*)^* - \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \mathbf{v}^* = \mathbf{N} \mathbf{v}^* + \mathbf{N}^* \mathbf{v}^*. \quad (3-134)$$

Es wird angenommen, daß im Inneren des Elementes keine Kräfte angreifen ($\mathbf{N}^* = \mathbf{0}$) und lediglich kleine Verformungen (\mathbf{N} – Normalkraft) entstehen. Somit verbleibt:

$$\mathbf{M}^{*+} \mathbf{N} \mathbf{v}^* - \mathbf{f}_v = \mathbf{0}. \quad (3-135)$$

Die Stabrandkraft \mathbf{N} wird über die angrenzenden Knoten mit der Ausmitte $\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_A$ eingetragen. Mit Annahme eines linearen Verlaufs des Zusatzmomentes nach Theorie II. Ordnung kann dessen Wirkung über ein Kräftepaar

$$\mathbf{V}_{A,II} = -\mathbf{N} \left(\frac{\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_A}{l} \right) \quad \mathbf{V}_{E,II} = \mathbf{N} \left(\frac{\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_A}{l} \right) \quad (3-136)$$

an den Stabrändern äquivalent abgebildet werden. Die zugehörige Koeffizientenmatrix lautet:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{T}_j & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{T}_m & \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{l} & 0 & 0 & -\frac{N}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{l} & 0 & 0 & \frac{N}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-137)$$

Die Transformation in die globale Koordinatenrichtung sowie die Zuordnung zu den Knoten wird beim Aufbau der geometrischen Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_Z^T \mathbf{T}_1^T \mathbf{T} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_Z \quad (3-138)$$

vorgenommen. Die Gleichgewichtsbedingungen am diskretisierten Gesamtsystem haben damit folgende Struktur:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s} + \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}. \quad (3-139)$$

Die ausschließliche Erfassung geometrischer Nichtlinearität durch Zusatzterme in den Gleichgewichtsbedingungen entspricht einer vereinfachten Theorie II. Ordnung (P- \exists -Effekt). Für baupraktische Belange ermöglicht diese Näherungsstufe in der Regel eine ausreichend gute Abbildung des Tragverhaltens.

Durch Anpassung der veränderten Beziehungen zwischen Dehnung und Verformung in der Verträglichkeitsbedingung wird ein erweiterter Ansatz erhalten. Die erforderlichen Koeffizientenmatrizen lassen sich mit Hilfe der elastischen Formänderungsenergie

$$\%_j = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{N} (v^*)^2 dx \quad (3-140)$$

herleiten. Die Anwendung der Ansatzfunktion (3-104) führt mit $\tilde{x} = \&\exists l$ auf:

$$\%_j = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{N} [(-\&+ 2\&^2 - \&^3) \tau_A + (\&^2 - \&^3) \tau_E]^2 d\& \quad (3-141)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 N [(-1 + 4\xi - 3\xi^2)\tau_A + (2\xi - 3\xi^2)\tau_E]^2 d\xi \quad (3-142)$$

Nach Ausmultiplizieren und Integrieren der Terme verbleibt:

$$\%_j = \frac{1}{2} N \left[\frac{2}{15} \tau_A^2 - \frac{1}{15} \tau_A \tau_E + \frac{2}{15} \tau_E^2 \right] \quad (3-143)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\%_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}_j^T \mathbf{Q}_{,j} \dot{\mathbf{a}}_j \quad (3-144)$$

mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_{,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2N}{15} | & -\frac{N}{30} | \\ 0 & -\frac{N}{30} | & \frac{2N}{15} | \end{bmatrix}. \quad (3-145)$$

Durch Einsetzen von (3-113) in (3-144)

$$\%_j = \frac{1}{2} \mathbf{s}_j^T \mathbf{Q}_{,j}^{-1} \mathbf{Q}_{,j} \mathbf{Q}_{,j}^{-1} \mathbf{s}_j \quad (3-146)$$

und Ableitung nach den Schnittgrößen

$$\frac{\partial \%_{,j}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{,j}^{-1} \mathbf{Q}_{,j} \mathbf{Q}_{,j}^{-1} \mathbf{s}_j = \mathbf{Q}_{,j}^{-1} \mathbf{Q}_{,j} \dot{\mathbf{a}}_j = \mathbf{Q}_{,j}^{-1} \mathbf{Q}_{,j} \mathbf{A}_j \mathbf{u}_j \quad (3-147)$$

ergibt sich folgende Form der Verträglichkeitsbeziehung am Gesamtsystem:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \quad (3-148)$$

3.3 Numerische Modelle zur Grenzzustandsanalyse auf der Basis der nichtlinearen Optimierung

3.3.1 Bemerkungen zur Anwendung der mathematischen Optimierung

Eine Kategorie von Verfahren zur Lösung von Grenzzustandsproblemen basiert auf Methoden der mathematischen Optimierung. Mit diesen Methoden können Optimierungsprobleme der Form

$$\min \{ F(x) \mid g_j(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \quad . \quad x \in \mathbb{R}^n \} \quad (3-149)$$

gelöst werden. Hierbei ist $F(x)$ die Zielfunktion und sind $g_j(x)$ die Nebenbedingungen des Problems [71]. Die vorhandenen Algorithmen der linearen und nichtlinearen Optimierung können universell eingesetzt werden, wobei folgende Eigenschaften vorteilhaft bei der Lösung von Grenzzustandsaufgaben genutzt werden können:

- Angabe eines Optimierungskriteriums in der Zielfunktion
- Formulierung sowohl von nichtlinearen Gleichungen als auch Ungleichungen in den Nebenbedingungen
- keine Notwendigkeit für externe Iterationen.

Besondere Vorteile bietet die Option, Ungleichungsbedingungen zu verarbeiten, da auf diese Weise sehr einfach Bereiche zulässiger Eigenschaften abgegrenzt werden können. Viele Problemstellungen der Strukturmechanik können in Optimierungsaufgaben überführt werden, indem die zugrunde liegenden Extremalprinzipien diskretisiert werden (z.B. mit Hilfe der Finiten Elemente Methode oder Differenzenverfahren). Die Methoden können somit als Alternative zu Verfahren auf der Basis linearisierter Gleichungssysteme mit iterativer oder inkrementeller Anpassung der Nebenbedingungen (z.B. Newton-Raphson Methode) angesehen werden, insbesondere dann, wenn Zwischenzustände nicht von Interesse sind. Mit den zur Verfügung stehenden Algorithmen der nichtlinearen Optimierung können konvexe, nichtkonvexe, diskrete und kontinuierliche Optimierungsprobleme numerisch gelöst werden. Die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Bemessungsprobleme des Stahlbetonbaus werden mit Verfahren der konvexen kontinuierlichen Optimierung gelöst. Diese zeichnen sich im Vergleich zu anderen Verfahren durch ihre numerische Effizienz und Stabilität aus. Nachfolgend wird deshalb auf diese Gruppe von Optimierungsproblemen und –lösungsverfahren Bezug genommen. Voraussetzung ist die Bereitstellung aller Systemeigenschaften als differenzierbare Beziehungen.

3.3.2 Notationsvereinbarung

In den nachfolgenden Abschnitten werden ausgewählte Modelle zur Berechnung von Grenzzuständen auf der Basis der linearen oder nichtlinearer Optimierung vorgestellt. Der Aufbau der Optimierungsaufgaben wird in Form von Schemata angegeben, in denen die Optimierungsvariablen und die Koeffizienten der Zielfunktion (ZF) bzw. Nebenbedingungen (NB) in Matrixschreibweise angegeben werden. Ausgehend von der allgemeinen Form für Zielfunktion und Nebenbedingungen

$$\mathbf{a}_i \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{k}_{ji} \mathbf{x}_j + \mathbf{c}_i \right) \rightarrow \text{Resultat} \quad (3-150)$$

wird die Aufgabe folgendermaßen schematisch dargestellt:

		x_1	x_2	...	x_n	1		Resultat
ZF	$\mathbf{a}_z \left($	k_{z1}	k_{z2}	...	k_{zn}	c_z	$\left. \right) \rightarrow$	Min
NB 1	$\mathbf{a}_1 \left($	k_{11}	k_{12}	...	k_{1n}	c_1	$\left. \right) =$	0
NB 2	$\mathbf{a}_2 \left($	k_{21}	k_{22}	...	k_{2n}	c_2	$\left. \right) \leq$	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
NB m	$\mathbf{a}_m \left($	k_{m1}	k_{m2}	...	k_{mn}	c_m	$\left. \right) \leq$	0

n Anzahl der Vektoren der Optimierungsvariablen

m Anzahl Gruppen von Nebenbedingungen

$x_1 \dots x_n$ Vektoren der Optimierungsvariablen (z.B. s, u, λ)

$k_{z1} \dots k_{zn}, k_{nm}$ Koeffizienten der Zielfunktion bzw. Nebenbedingungen

$\mathbf{a}_z, \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m$ Multiplikatoren der Zielfunktion bzw. Nebenbedingungen

$c_z, c_1 \dots c_m$ Konstante Glieder der Zielfunktion bzw. Nebenbedingungen.

Folgende Abkürzungen werden in den Schemata verwendet:

ZF	Zielfunktion	KB	Komplementaritätsbedingung
MG	Materialgesetz	DB	Dehnungs-/Verzerrungsbedingung
VTB	Verträglichkeitsbedingung	VB	Verformungsbedingung
PLB	Plastizitätsbedingung	NNB	Nichtnegativitätsbedingung
GGB	Gleichgewichtsbedingung	STB	Steifigkeitsbedingung

Als Optimierungsvariablen und Koeffizienten finden die Matrizen und Vektoren aus Abschnitt 3.2 Verwendung.

3.3.3 Aufbau klassischer Berechnungsmodelle

Im Zusammenhang mit der Anwendung der Fließgelenkverfahren haben sich Berechnungsstrategien bewährt, die von einer direkten Umsetzung der Traglast- und Einspielsätze (Abschnitt 2.3) in numerische Berechnungshilfsmittel auf der Basis der mathematischen Optimierung ausgehen. Unter den Voraussetzungen

- geometrisch linearen Tragverhaltens,
- idealplastischen Materialverhaltens und
- linearer Plastizitätsbedingungen

führt dies auf Probleme, die mit Hilfe von Algorithmen der linearen Optimierung gelöst werden können [40, 73].

Eine einfache Struktur des Optimierungsschemas ergibt sich bei Umsetzung der statischen Theoreme, die von einem Minimum der Widerstandsverteilung im Zustand des Grenzgleichgewichtes für einen statisch zulässigen Schnittgrößenzustand ausgehen. Die statische Zulässigkeit wird durch die Erfüllung von Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen sichergestellt. Als direkte Ableitung dieses Prinzips kann das Schema nach Tafel 3.1 zur Lösung der plastischen Grenzwiderstandsaufgabe angegeben werden.

Tafel 3.1 Schema zur Lösung der plastischen Grenzwiderstandsaufgabe

	s	r	1		
ZF		1		\rightarrow	Min
GGB	A^T		$-f_0$	$=$	0
PLB	A_p^T	$-s_u$		\leq	0

Für die Lösung von Grenzwiderstandsaufgaben mit Sicherung des Einspielens werden in der Literatur Strategien basierend auf dem Konzept des superponierten Restzustandes nach Abschnitt 3.1.3.4.1 angegeben. Mit der Annahme

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_r \tag{3-151}$$

kann bei Kenntnis des elastischen Umhüllungsvektors \mathbf{s}_e die Berechnung des Restzustandes \mathbf{s}_r separat durchgeführt werden. Das Minimum einer Widerstandsverteilung für statische oder dynamische Lastprogramme kann nach Tafel 3.2 ermittelt werden.

Tafel 3.2 Schema zur Lösung der adaptiven Grenzwiderstandsaufgabe

	s_r	r_A	1		
ZF		1		→	Min
GGB	A^T			=	0
PLB	A_p^T	$-s_0$	s_e	≤	0

Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, muß bei der Auswertung der Berechnungsergebnisse beachtet werden, daß mit dieser Form der Optimierungsaufgabe der Vektor der Schnittgrößen nicht eindeutig bestimmt werden kann. Der tatsächliche Schnittkraft- und Verformungszustand muß über eine nachgeschaltete Berechnungsaufgabe ermittelt werden, z.B. unter Anwendung des Prinzips vom Minimum der konjugierten Formänderungsenergie [50]. Die dualen kinematischen Formulierungen der Probleme können formal durch die Aufstellung der Lagrange-Aufgabe und anschließender Ableitung nach den Kraftgrößen ermittelt werden [40]. Die Ergebnisse beider Formulierungen sind identisch.

Die Vorteile der vorgestellten Optimierungsschemata ergeben sich aus der komplett linearen Struktur von Zielfunktion und Nebenbedingungen sowie aus der geringen Anzahl systembeschreibender Variablen und Bedingungen. Mit der Anwendung von linearen Optimierungsalgorithmen ist eine schnelle numerische Verarbeitung möglich. Die Fixierung auf den plastischen bzw. adaptiven Grenzzustand schränkt allerdings die Anwendbarkeit als Bemessungshilfsmittel ein. Die Erfüllung von nicht im Modell erfaßbaren Rahmenbedingungen (z.B. Begrenzung von Rotationen) muß explizit unter Verwendung zusätzlicher Berechnungsmodelle nachgewiesen werden. Notwendige Korrekturen und Anpassungen müssen außerhalb des Modellrahmens realisiert werden.

3.3.4 Modelle zur deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse ohne Beachtung von Lastfolgeeffekten

Die Nachteile der klassischen Form der Optimierungsschemata lassen sich bei Verwendung des kompletten Bedingungssatzes nach Abschnitt 3.1.3.2 überwinden. Als vorteilhaft hat sich die Form der Aufgabe erwiesen, bei der das strukturmechanische Modell komplett in den Nebenbedingungen integriert wird. In der frei zur Verfügung stehenden Zielfunktion können verschiedenartige Extremwertforderungen erhoben werden. Bei einer Anwendung als Bemessungshilfsmittel können auf diese Weise ausgewählte Strukturparameter optimiert werden. Diese Optimierungsaufgaben sind in der Regel nichtlinear.

Als Sonderfälle sind die klassischen Grenzzustandsaufgaben im Modell enthalten. In Tafel 3.3 ist beispielhaft ein Optimierungsschema zur Berechnung des plastischen Grenzwiderstandes angegeben. In Ergänzung können in den Plastizitäts- und Komplementaritätsbedingungen lineare Verfestigungseffekte (Matrix H) sowie Vordehnungszustände (Vektor ε_0) berücksichtigt werden.

Tafel 3.3 Allgemeines Schema zur Berechnung des plastischen Grenzwiderstandes $r = r_p$ (mit Verfestigung)

		s	ε	ε_e	ε_p	u	λ	r	1		
ZF								1		→	Min
GGB		A^T							$-f_0$	=	0
VTB			1			$-A$				=	0
MG		$-Q^{-1}$		1						=	0
					1		$-A_p$			=	0
			1	-1	-1				$-\varepsilon_0$	=	0
PLB		A_p^T			$A_p^T H$			$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda^T ($	A_p^T			$A_p^T H$			$-s_u$) =	0
NNB							-1			≤	0

Die Berücksichtigung des gesamten Bedingungs-vorrates hat im Vergleich zum klassischen Problem nach Tafel 3.1 eine aufwendigere numerische Behandlung zur Folge. Es besteht jedoch der Vorteil, daß alle Strukturparameter mit ihren tatsächlichen Werten vorliegen und somit der Zugriff auf diese Variablen über die Formulierung zusätzlicher Nebenbedingungen sinnvoll möglich ist. Dies ist eine Voraussetzung für den Übergang zu einer deformationsbasierten Grenzzustandsbetrachtung z.B. durch Hinzufügen der in Tafel 3.4 angegebenen einfachen Verformungs- oder Verzerrungsbeschränkungen.

Tafel 3.4 Fortsetzung von Tafel 3.3: Verformungs- und Deformationsbedingungen – Übergang zur deformationsbasierten Grenzwiderstandsaufgabe für eine Lastsituation (Beispiel)

VB						1			$-u_u$	≤	0
DB			A_{DB}						$-\varepsilon_u$	≤	0

Bei Ansatz linearer Beziehungen zwischen Schnittgrößen und elastischen Formänderungen und Verwendung linearer oder linearisierter Plastizitätsbedingungen kann das Optimierungsschema vereinfacht werden. In die Materialbedingungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \text{const.} \quad (3-152)$$

können das Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s} \quad (3-153)$$

und das Fließgesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} \quad (3-154)$$

eingesetzt werden, so daß gilt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s} + \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda}. \quad (3-155)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die Verträglichkeitsbeziehung

$$\mathbf{A} \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (3-156)$$

folgt:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{0}. \quad (3-157)$$

Nach dem Umstellen

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{Q} \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (3-158)$$

wird deutlich, daß die Schnittgrößen \mathbf{s} bei Kenntnis der Verformungen \mathbf{u} und der plastischen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ vollständig bestimmt sind und somit in allen Bedingungsgleichungen und -ungleichungen eliminiert werden können. Durch Einsetzen von (3-158) in die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s} - \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad (3-159)$$

entsteht:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}. \quad (3-160)$$

Weiterhin ergeben sich für die Plastizitätsbedingungen

$$\mathbf{A}_p^T \mathbf{s} - \mathbf{A}_p^T \mathbf{H} \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}_u \leq \mathbf{0} \quad (3-161)$$

und die Komplementaritätsbedingung

$$\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}_p^T \mathbf{s} - \mathbf{A}_p^T \mathbf{H} \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}_u) \leq 0 \quad (3-162)$$

folgende Beziehungen in Abhängigkeit von den Weggrößen:

$$\mathbf{A}_p^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A}_p^T (\mathbf{Q} + \mathbf{H}) \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{A}_p^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{s}_u \leq \mathbf{0} \quad (3-163)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}_p^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A}_p^T (\mathbf{Q} + \mathbf{H}) \mathbf{A}_p \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{A}_p^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{s}_u) = 0. \quad (3-164)$$

Tafel 3.5 enthält das entsprechend verkürzte Optimierungsschema zur Bestimmung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes.

Tafel 3.5 Verkürztes Schema zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes (mit Verfestigung) für eine Lastsituation f_0

		u	λ	r	1		
ZF				1		→	Min
GGB		$A^T Q A$	$-A^T Q A_p$		$-A^T Q \boldsymbol{\varepsilon}_0 - f_0$	=	0
PLB		$A_p^T Q A$	$-A_p^T (Q+H) A_p$	$-s_u$	$-A_p^T Q \boldsymbol{\varepsilon}_0$	≤	0
KB	$\boldsymbol{\lambda}^T ($	$A_p^T Q A$	$-A_p^T (Q+H) A_p$	$-s_u$	$-A_p^T Q \boldsymbol{\varepsilon}_0$	$) =$	0
NNB			-1			≤	0
VB		1			$-u_u$	≤	0
DB		A_{DBu}	$A_{DB\lambda}$		$-\boldsymbol{\varepsilon}_u$	≤	0

Die Koeffizientenmatrizen und -vektoren der Nebenbedingungen lassen sich vorab mit Hilfe von FEM-Modulen erstellen. Die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}$ ist identisch mit der Steifigkeitsmatrix der linearen FEM.

3.3.5 Modelle zur deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse mit Sicherung der Tragwerksadaption

3.3.5.1 Modelle auf der Basis des Konzeptes des superponierten Restzustandes

Die im Abschnitt 3.1.3.4.1 vorgestellten Strukturbedingungen werden zur Herleitung einer Optimierungsaufgabe zur Lösung eines Grenzwiderstandsproblems mit Sicherung des Einspielens nach dem Konzept des superponierten Restzustandes genutzt. Nach der Ersetzung der kontinuumsmechanischen Ausdrücke durch die diskreten Entsprechungen (Abschnitt 3.2) sowie Elimination von abhängigen Strukturvariablen kann für die Grenzwiderstandsberechnung das Schema nach Tafel 3.6 angegeben werden. In dieser Aufgabe wird die Kenntnis der elastischen Umhüllungsvektoren \mathbf{s}_e , $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ und \mathbf{u}_e vorausgesetzt. Im Ergebnis werden der deformationsbasierte Widerstandsfaktor r , die zugehörigen Restverformungen \mathbf{u}_r und der Vektor der plastischen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ ausgewiesen. Über die Beziehung (3-158) kann der zugehörige Restschnittgrößenzustand berechnet werden. Werden keine Verzerrungs- oder Verformungsbedingungen angegeben oder maßgebend, so entsprechen die Ergebnisse einer klassischen adaptiven Grenzwiderstandsanalyse nach Tafel 3.2.

Tafel 3.6 Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach dem Konzept des superponierten Restzustandes (mit Verfestigung)

		\mathbf{u}_r	$\boldsymbol{\lambda}$	r	1		
ZF				1		→	Min
GGB		$A^T Q A$	$-A^T Q A_p$			=	0
PLB		$A_p^T Q A$	$-A_p^T (Q+H) A_p$	$-s_u$	s_e	≤	0
KB	$\boldsymbol{\lambda}^T ($	$A_p^T Q A$	$-A_p^T (Q+H) A_p$	$-s_u$	s_e) =	0
NNB			-1			≤	0
VB		1			$-u_u + u_e$	≤	0
DB		A_{DBu}	$A_{DB\lambda}$		$-\varepsilon_u + \varepsilon_e$	≤	0

3.3.5.2 Modelle auf der Basis des Konzeptes der gekoppelten plastischen Antwort

Eine alternative Vorgehensweise zur Berechnung deformationsbasierter Grenzzustände wurde mit dem Konzept der plastischen Antwort in Abschnitt 3.1.3.4.2 vorgeschlagen. Eine entsprechende Analyse kann mit Hilfe des Optimierungsschemas nach Tafel 3.7 durchgeführt werden.

Tafel 3.7 Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (linear elastisch-idealplastisches Material, $a_{ij} = 1.0$)

		$u^{(1)}$...	$u^{(n)}$	$\lambda^{(1)}$...	$\lambda^{(n)}$	r	1		
ZF								1		→	Min
GGB		A^TQA			$-A^TQA_p$				$-f_0^{(1)}$	=	0
			\ddots			\ddots			\vdots	\vdots	\vdots
				A^TQA			$-A^TQA_p$		$-f_0^{(n)}$	=	0
PLB		A_p^TQA			$-a_{11}A_p^TQA_p$...	$-a_{1n}A_p^TQA_p$	$-s_u$		≤	0
			\ddots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
				A_p^TQA	$-a_{n1}A_p^TQA_p$...	$-a_{nn}A_p^TQA_p$	$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda^{T(1)} ($	A_p^TQA			$-a_{11}A_p^TQA_p$...	$-a_{1n}A_p^TQA_p$	$-s_u$) =	0
	\vdots		\ddots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
	$\lambda^{T(n)} ($			A_p^TQA	$-a_{n1}A_p^TQA_p$...	$-a_{nn}A_p^TQA_p$	$-s_u$) =	0
NNB					-1					≤	0
						\ddots				\vdots	\vdots
							-1			≤	0
VB		1							$-u_u$	≤	0
			\ddots						\vdots	\vdots	\vdots
				1					$-u_u$	≤	0
DB		A_{DBu}			$A_{DB\lambda}$...	$A_{DB\lambda}$		$-\varepsilon_u$	≤	0
			\ddots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
				A_{DBu}	$A_{DB\lambda}$...	$A_{DB\lambda}$		$-\varepsilon_u$	≤	0

Tafel 3.8 Modifikationen des Schemas Tafel 3.7 zur Ermittlung anderer Grenzzustände

Grenzwiderstandsaufgabe	Modifikation von Schema Tafel 3.7
Adaptiver Grenzwiderstand	Entfernen von VB und DB
Elastischer Grenzwiderstand	Entfernen von VB und DB; Ersetzen von NNB durch $\lambda = 0$
Plastischer Grenzwiderstand	Entfernen von VB und DB $a_{ij} = 1.0$ für $i = j$ $a_{ij} = 0.0$ für $i \neq j$
Deformationsbasierter Grenzwiderstand ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten	$a_{ij} = 1.0$ für $i = j$ $a_{ij} = 0.0$ für $i \neq j$

Zugeordnet zu den statischen Lastfallkombinationen 1...n werden die auf den Grenzwiderstandsfaktor normierten Gesamtverformungszustände $\mathbf{u}^{(1)} \dots \mathbf{u}^{(n)}$ errechnet. Der Restzustand nach Einspielen des Tragwerkes kann durch Hinzufügen eines Lastfalls mit dem Belastungsvektor $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$ parallel errechnet werden. Bei der Berechnung des deformationsbasierten Grenzzustandes nehmen die skalaren Größen a_{ij} den Wert 1.0 an. Mit den Modifikationen nach Tafel 3.8 lassen sich die Zustände nach den klassischen Definitionen ermitteln bzw. Untersuchungen für deformationsbasierte Grenzzustände ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten durchführen.

Zur Erfassung zusätzlicher Abhängigkeiten zwischen Problemvariablen

In Berechnungshilfsmitteln auf der Basis dieses Konzeptes besteht die Möglichkeit zur Erfassung von indirekten Struktureigenschaftsänderungen infolge Widerstandsanpassung. Für eine näherungsweise Erfassung der Abhängigkeit zwischen Eigenschaften wird die Formulierung als Polynom empfohlen. Für praktische Untersuchungen genügen in der Regel Näherungen in Form von konstanten oder linearen Beziehungen, die eine numerisch effektive Lösung ermöglichen (nähere Angaben in Abschnitt 4.2.4.2). In Tafel 3.9 ist beispielhaft eine lineare Beziehung (Linearglied in Vektor \mathbf{A}_{EI} , konstantes Glied in Vektor \mathbf{EI}_0) der Steifigkeit (\mathbf{EI}) zu den Bemessungsschnittgrößen eingearbeitet.

Alternativ können externe Iterationen zur Anpassung von Struktureigenschaften organisiert werden. Für derartige Implementierungen eignen sich auch Grenzzustandsmodelle nach dem Konzept des superponierten Restzustandes.

Tafel 3.9 Grenzwiderstandsaufgabe mit Anpassung der Steifigkeiten an die Schnittgrößensituation.

		$u^{(1)}$...	$u^{(n)}$	$\lambda^{(1)}$...	$\lambda^{(n)}$	EI	r	1		
ZF									1		→	Min
GGB		$A^T Q(EI)A$			$-A^T Q(EI)A_p$					$-f_0^{(1)}$	=	0
			\ddots			\ddots				\vdots	\vdots	\vdots
				$A^T Q(EI)A$			$-A^T Q(EI)A_p$			$-f_0^{(n)}$	=	0
PLB		$A_p^T Q(EI)A$			$-A_p^T Q(EI)A_p$...	$-A_p^T Q(EI)A_p$		$-s_u$		≤	0
			\ddots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
				$A_p^T Q(EI)A$	$-A_p^T Q(EI)A_p$...	$-A_p^T Q(EI)A_p$		$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda^{T(1)}\{$	$A_p^T Q(EI)A$			$-A_p^T Q(EI)A_p$...	$-A_p^T Q(EI)A_p$		$-s_u$)=	0
	\vdots		\ddots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	$\lambda^{T(n)}\{$			$A_p^T Q(EI)A$	$-A_p^T Q(EI)A_p$...	$-A_p^T Q(EI)A_p$		$-s_u$)=	0
STB	$A_{EI} ($	maßg. $\{ Q(EI)A$			$- Q(EI)A_p \}$			$) 1$		$-EI_0$	=	0
NNB + VB + DB analog Tafel 3.7												

3.3.5.3 Bemerkungen zur näherungsweise Berechnung von Restdeformationszuständen bei Lastfolgeproblemen

Wie bereits in Abschnitt 2.4 erläutert, sind Restdeformationszustände oberhalb der konservativen Grenzlast lastpfadabhängig. Bei Beanspruchungen unterhalb der adaptiven Grenzlast können bei Anwendung der beiden zuvor genannten Methoden (Abschnitt 3.3.5.1 und 3.3.5.2) für die Restdeformationszustände akzeptable Näherungslösungen bestimmt werden. Es werden plastische Verzerrungszustände errechnet, die einer fiktiven Lastreihenfolge zuzuordnen sind, bei der die dominanten Lastfälle des Lastprogramms zuerst auftreten. Dadurch ist garantiert, daß auch bei ungünstigen Last-Widerstandskonstellationen die zugehörigen großen Verzerrungswerte Bestandteil der Näherungslösung sind. Begünstigt wird dieser Effekt durch die Bestimmtheit der Plastizierungsrichtung im Einspielzustand.

Für die Qualität dieser Näherungslösung spricht weiterhin die Tatsache, daß der Bereich möglicher Restverzerrungen bei Beanspruchungen unterhalb der adaptiven Grenzlast auf

ein geringes Maß beschränkt ist und somit auch Abweichungen der Näherungslösung vom Extremalwert klein bleiben. Dies kann mit folgenden Überlegungen nachvollzogen werden:

- Bei Wirkung weniger *dominanter Lastfälle* können hohe plastische Verzerrungswerte im Tragwerk erreicht werden, deren Größe überwiegend durch diese Lastfälle selbst bestimmt wird (zugeordnet ist ein hoher adaptiver Grenzlastwert). Die durch untergeordnete Lastfälle erzeugten Aufweitungen des Restverzerrungsbereichs bleiben gering.
- Bei Wirkung *vieler gleichwertiger Lastfälle* ist das Niveau der zulässigen plastischen Verzerrungen insgesamt niedrig (verbunden mit einem kleinen adaptiven Grenzlastfaktor). Somit bleiben auch mögliche Abweichungen vom Extremwert der Restverzerrungen klein.

Dieses Näherungsverfahren kann analog für die Bewertung von Restverformungszuständen herangezogen werden, da aufgrund der Einsinnigkeit der Plastizierungen bei Beanspruchungen unterhalb der adaptiven Grenzlast ein charakteristisches Verformungsverhalten des Gesamttragwerkes vorgegeben ist.

3.3.5.4 Modelle mit Berücksichtigung geometrisch nichtlinearen Verhaltens

Modelle ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten

Die zuvor betrachteten Analysemodelle elastisch-plastischer Tragwerke unter statischen und dynamischen Einwirkungen basieren auf der Theorie I. Ordnung. Erweiterungen zur näherungsweise Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Einflüsse werden durch Verwendung der Beziehungen aus Abschnitt 3.2.2 vorgenommen. Unter Verwendung der vereinfachten Theorie II. Ordnung wird lediglich die Gleichgewichtsbedingung durch die Koeffizientenmatrix A ergänzt

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_p \lambda - \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}. \quad (3-165)$$

Das zugehörige Berechnungsschema zur Ermittlung des deformationsbasierten Grenzzustandes ist in Tafel 3.10 angegeben.

Tafel 3.10 Schema zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach vereinfachter Theorie II. Ordnung für eine Lastsituation f_0

		u	λ	r	1		
ZF				1		→	Min
GGB		$A^TQA + A$	$-A^TQ A_p$		$-f_0$	=	0
PLB		A_p^TQA	$-A_p^T(Q+H)A_p$	$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda^T ($	A_p^TQA	$-A_p^T(Q+H)A_p$	$-s_u$) =	0
NNB + VB + NB analog Tafel 3.6							

Bei Zugrundelegung der Theorie II. Ordnung analog Abschnitt 3.3.2 sind sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Verträglichkeitsbedingungen durch Matrizenterme zu erweitern.

Zur Ableitung eines verkürzten Optimierungsschemas wird die Verträglichkeitsbedingung

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{A}_p\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{u} \quad (3-166)$$

$$= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{A}_p\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{u} \quad (3-167)$$

in die Gleichgewichts-, Plastizitäts- und Komplementaritätsbedingung eingesetzt und somit der Schnittgrößenvektor \mathbf{s} eliminiert. Das zugehörige Optimierungsschema zeigt Tafel 3.11.

Tafel 3.11 Schema zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach Theorie II. Ordnung (ohne Vorverformung, mit Verfestigung) für eine Lastsituation f_0

		u	λ	r	1		
ZF				1		→	Min
GGB		$A^T(Q+Q_0)A + A$	$-A^TQ A_p$		$-f_0$	=	0
PLB		$A_p^T(Q+Q_0)A$	$-A_p^T(Q+H)A_p$	$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda^T ($	$A_p^T(Q+Q_0)A$	$-A_p^T(Q+H)A_p$	$-s_u$) =	0
NNB + VB + NB analog Tafel 3.6							

Modelle mit Sicherung des Einspielens

Bei Berechnungen von Einspielzuständen unter Berücksichtigung des geometrisch nicht-linearen Tragverhaltens muß beachtet werden, daß Vordehnungszustände Einfluß auf die Schnittgrößen- und Formänderungsfelder erlangen. Die Restzustände im Tragwerk sind nicht eindeutig und können nur bei Kenntnis der genauen Belastungsgeschichte exakt bestimmt werden.

In der Literatur werden Näherungslösungen oder Lösungen für Spezialfälle angegeben. *Corradi* und *De Donato* haben für bekannte Lastpfade die klassischen Einspielsätze für die Lösung geometrisch nichtlinearer Probleme erweitert [74]. Als Einspielkriterium wird analog zum *Melanschen* Ansatz das Verschwinden der plastischen Formänderungsarbeit nach endlicher Zeit und damit das Vorhandensein eines stabilen Restzustandes nach Entlastung angesehen. *Schüler* [56] schlägt zur Behandlung dynamischer Einspielprobleme nach Theorie II. Ordnung ein numerisches Verfahren vor, bei dem eine iterative Anpassung des Restzustandes (im Grenzzustand der Adaption) und des Vektors der elastischen Umhüllungsantwort vorgenommen wird. Die Berechnung beginnt dabei mit der Ermittlung der elastischen Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung in einem eigenspannungslosen Zustand. Nach der Berechnung des Restverformungszustandes mit dem Verfahren nach Tafel 3.2 wird dieser als Vorverformungszustand für eine erneute elastische Zeitverlaufsuntersuchung aufgebracht. Nach mehrmaliger Iteration konvergiert das Problem. Dieses Verfahren ist numerisch sehr aufwendig und rückt den Charakter des zugrunde liegenden Zeitverlaufs stark in den Vordergrund (indirekte Lastfolgeabhängigkeit).

Alternativ können für sequentiell nicht determinierte Lastprogramme brauchbare Näherungs- und Eingrenzungslösungen angegeben werden, die auf Elementen der klassischen Einspieltheorie aufbauen.

Näherungslösungen (appr r_d)

Eine Basis für Näherungslösungen bildet die Annahme, daß die Superposition aus elastischer Teilantwort und Restzustand im Zustand der Adaption näherungsweise durchführbar ist. Die zugehörigen Lösungsverfahren orientieren sich am Konzept des superponierten Restzustandes.

Es können zwei Näherungsstufen angegeben werden:

1. Bestimmung des elastischen Umhüllungsvektors nach Theorie II. Ordnung und Ermittlung des Restzustandes nach Theorie I. Ordnung
2. Bestimmung des elastischen Umhüllungsvektors nach Theorie II. Ordnung und Ermittlung des Restzustandes nach Theorie II. Ordnung, wobei die maximalen elastischen Druckkräfte aus allen Lastfallkombinationen je Stabelement in den geometrischen Steifigkeitsmatrizen berücksichtigt werden.

Das zugehörige Optimierungsschema zur Lösung einer Grenzwiderstandsaufgabe nach Methode 2 ist in Tafel 3.12 angegeben.

Tafel 3.12 Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach dem Konzept des superponierten Restzustandes (Theorie II. Ordnung, mit Verfestigung)

		u_r	λ	r	1		
ZF				1		→	Min
GGB		$A^T(Q+Q)A + A$	$-A^TQ A_p$			=	0
PLB		$A_p^T(Q+Q)A$	$-A_p^T(Q+H)A_p$	$-s_u$	$s_{e,II}$	≤	0
KB	$\lambda^T ($	$A_p^T(Q+Q)A$	$-A_p^T(Q+H)A_p$	$-s_u$	$s_{e,II}$) =	0
NNB			-1			≤	0
VB		1			$-u_u + u_{e,II}$	≤	0
DB		A_{DBu}	$A_{DB\lambda}$		$-\varepsilon_u + \varepsilon_{e,II}$	≤	0

Eingrenzungslösungen

Die Lösungsvielfalt für Probleme nach Theorie II. Ordnung kann über die Berechnung von oberen und unteren Eingrenzungslösungen erfaßt werden.

Obere Eingrenzungslösung (inv r_d)

Eine obere Eingrenzungslösung wird erhalten, wenn die Widerstandsintensität lediglich bis zum Erreichen des konservativen Grenzwiderstandes abgesenkt wird. Unter diesen Bedingungen erzeugt nur eine maßgebende Lastkombination plastische Verformungen und ist somit allein für den Charakter des Restzustandes bestimmend. Das Optimierungs-

schema zur Lösung der zugehörigen Grenzwiderstandsaufgabe ist in Tafel 3.13 angegeben. Der Aufbau des Berechnungsmodells folgt den Schemata zur Lösung von Grenzzustandsproblemen nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort, wobei lediglich die Antwort aus der maßgebenden Lastkombination über die Komplementaritätsbedingungen (KB) mit den plastischen Verformungen verknüpft wird. Der Aufbau setzt die Kenntnis dieser maßgebenden Lastkombination voraus. Diese ist aber in der Regel mit der für den elastischen Grenzzustand maßgebenden Lastkombination identisch.

Tafel 3.13 Berechnung des konservativen deformationsbasierten Grenzwiderstandes II. Ordnung nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (maßgebender Lastfall i)

		$u^{(1)}$...	$u^{(i)}$...	$u^{(n)}$	$\lambda^{(1)}$	r	1		
ZF								1		\rightarrow	Min
GGB		$A^T(Q+Q_i)A+A$					$-A^TQ_iA_p$		$-f_0^{(1)}$	$=$	0
			\ddots				\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
				$A^T(Q+Q_i)A+A$			$-A^TQ_iA_p$		$-f_0^{(i)}$	$=$	0
					\ddots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
PLB		$A_p^T(Q+Q_i)A$					$-A_p^TQA_p$	$-s_u$		\leq	0
			\ddots				\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
				$A_p^T(Q+Q_i)A$			$-A_p^TQA_p$	$-s_u$		\leq	0
					\ddots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
					$A_p^T(Q+Q_i)A$	$-A_p^TQA_p$	$-s_u$		\leq	0	
KB	$\lambda^{T(i)}$ ($A_p^T(Q+Q_i)A$			$-A_p^TQA_p$	$-s_u$) =	0
NNB + VB + DB prinzipiell analog Tafel 3.7											

Untere Eingrenzungslösung (sup r_d)

Bei Untersuchungen des Grenzwiderstandes nach Theorie II. Ordnung mit Zeitverlaufsmethoden kann beobachtet werden, daß in Abhängigkeit unterschiedlicher Lastsequenzen nach Erreichen des Einspielzustandes unterschiedliche Grenzwiderstandsfaktoren ermittelt werden. Dabei können auch Werte ausgewiesen werden, die weitaus geringer sind als jene, die nach Theorie I. Ordnung ermittelt werden. Der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Ausbildung und Entstehungsgeschichte von Eigenspannungszustän-

den, so daß nachfolgende Antworten sowohl günstig als auch ungünstig beeinflusst werden können.

Der Restzustand, zugehörig zu einem minimalen Widerstandsfaktor (untere Eingrenzungslösung), kann ebenfalls mit Hilfe der mathematischen Optimierung ermittelt werden (siehe Tafel 3.14). Angaben zur Lastreihenfolge können dem Ergebnis jedoch nicht entnommen werden. Für praktische Untersuchungen wird die Kenntnis des unteren Wertes des Grenzwiderstandes nach Theorie II. Ordnung selten von Interesse sein, da für die Bemessung von Tragwerken vorrangig ungünstige Schnittgrößen- und Verformungssituationen zugrunde zu legen sind. Somit kann bei Unterschreiten des Grenzwiderstandes nach Theorie I. Ordnung dieser selbst als untere Eingrenzungslösung angegeben werden.

Tafel 3.14 Berechnung des unteren deformationsbasierten Grenzwiderstandes II. Ordnung nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (ohne Verfestigung)

		$u^{(1)}$...	$u^{(n)}$	$\lambda^{(1)}$...	$\lambda^{(n)}$	r	1		
ZF								1		→	Min
GGB		$A^T(Q+Q)A+A$			$-A^TQA_p$				$-f_0^{(1)}$	=	0
			\ddots			\ddots			\vdots	\vdots	\vdots
				$A^T(Q+Q)A+A$			$-A^TQA_p$		$-f_0^{(n)}$	=	0
PLB		$A_p^T(Q+Q)A$			$-A_p^TQA_p$...	$-A_p^TQA_p$	$-s_u$		≤	0
			\ddots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
				$A_p^T(Q+Q)A$	$-A_p^TQA_p$...	$-A_p^TQA_p$	$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda^{T(1)}$ ($A_p^T(Q+Q)A$			$-A_p^TQA_p$...	$-A_p^TQA_p$	$-s_u$) =	0
	\vdots		\ddots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
	$\lambda^{T(1)}$ ($A_p^T(Q+Q)A$	$-A_p^TQA_p$...	$-A_p^TQA_p$	$-s_u$) =	0
NNB + VB + DB analog Tafel 3.7											

Zusammenfassend können für die Bestimmung des Grenzwiderstandes folgende Grenzen möglicher Lösungen $r_{d,II}$ angegeben werden (Theorie I. Ordnung = Index I, Theorie II. Ordnung = Index II):

$$r_{e,II} \geq r_{c,II} = \text{inv } r_{d,II} \geq r_{d,II}, \text{ appr } r_d \geq \max \begin{matrix} 5 \text{ sup } r_{d,II} & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & r_{d,I} & 0 \end{matrix}. \quad (3-168)$$

Die oben angegebenen Näherungsverfahren liefern Lösungen innerhalb dieses Definitionsbereiches.

Die vorgestellten Varianten zur Lösung von Einspielproblemen unter Beachtung geometrischer Nichtlinearität werden auf das Beispiel nach Abschnitt 2.3 angewendet und Lösungen nach Theorie I. Ordnung gegenübergestellt. Eine Aufstellung zu den errechneten Widerstandsfaktoren enthält Tafel 3.15. Es wird deutlich, daß in diesem Fall nach Theorie II. Ordnung höhere Werte berechnet werden, als bei geometrisch linearer Berechnung und daß sich die Maßgabe der Lastfälle je nach untersuchtem Grenzzustand verändern kann.

Tafel 3.15 Vergleich unterschiedlicher Grenzwiderstandsberechnungen für Beispiel nach Abschnitt 2.3 (nichtmaßgebende Resultate in Klammern)

	Theorie I. Ordnung		Theorie II. Ordnung	
	LF 1	LF 2	LF 1	LF 2
Elastischer Grenzwiderstand r_e	0.95	(0.92)	1.04	(0.92)
Konservativer Grenzwiderst. r_c	0.92		0.92	
Adaptiver Grenzwiderstand r_a	0.73		(sup $r_a = 0.66$)	
			appr $r_a = 0.90$	
			inv $r_a = 0.92$	
Plastischer Grenzwiderstand r_p	(0.68)	0.71	0.88	(0.71)
Deformationsbasierter Grenzwiderstand r_d (Durchbiegungsbegrenzung am Knoten 3 auf 12 mm)	(0.68)	0.73	0.88	(0.73)

3.3.6 Bemerkungen zur Lösung mehrparametrischer Grenzzustandsprobleme

Die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Optimierungsprobleme sind dadurch charakterisiert, daß jeweils nur ein Freiwert gezielt einem Extremwert zugeführt wird. Mit Hilfe von Optimierungsmethoden lassen sich auch mehrparametrische Probleme lösen. Als vorteilhaft erweisen sich mehrparametrische Berechnungen bei der Lösung von Bemessungsaufgaben, wenn z.B. eine maximale Dissipationsleistung in allen plastischen Zonen erzielt werden soll. Die zugehörige Aufgabenform ist dadurch charakterisiert, daß im Gegensatz zu den bisher vorgestellten einparametrischen Problemen die Widerstandsverteilung s_u selbst Unbekannte des Problems ist und durch Ansatz der Zielfunktion

$$\delta \lambda \rightarrow \text{Max} \quad (3-169)$$

die Dissipationsleistung im Tragwerk maximiert wird. Das zugehörige Optimierungsschema enthält Tafel 3.16. Diese Anpassung der Widerstandsverteilung kann unter Verwendung einparametrischer Lösungsansätze nur auf iterativem Wege erreicht werden.

Tafel 3.16 Mehrparametrische Optimierungsaufgabe zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes

		u	λ	s_u	1		
ZF			1			→	Max
GGB		A^TQA	$-A^TQA_p$		$-A^TQ\varepsilon_0 - f_0$	=	0
PLB		A_p^TQA	$-A_p^T(Q+H)A_p$	- 1	$-A_p^TQ\varepsilon_0$	≤	0
KB	$\lambda^T ($	A_p^TQA	$-A_p^T(Q+H)A_p$	- 1	$-A_p^TQ\varepsilon_0$) =	0
NNB			-1			≤	0
VB		1			$-u_u$	≤	0
DB		A_{DBu}	$A_{DB\lambda}$		$-\varepsilon_u$	≤	0

Der plastische Grenzzustand des Beispiels nach Abschnitt 2.3 wird mit Hilfe der mehrparametrischen Grenzzustandsaufgabe nach Tafel 3.16 berechnet. Das Ergebnis der Untersuchung für Lastfall 1 kann Abb. 3.12 entnommen werden. Für diesen sehr einfachen Fall ergibt sich eine maximale Ausschöpfung des plastischen Verformungsvermögens bei Angleichung der Momentenwerte an allen Stabrändern.

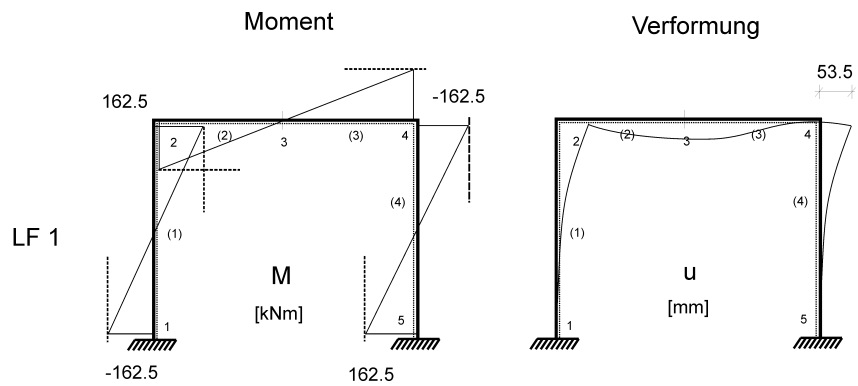


Abb. 3.12 Ergebnis einer mehrparametrischen Grenzwiderstandsanalyse für das Beispiel nach Abschnitt 2.3

Den Vorzügen der mehrparametrischen Formulierung muß der Nachteil eines erhöhten rechnerischen Aufwandes zur Lösung der Aufgabe gegenübergestellt werden. Für die Lösung dieses Typs von Optimierungsaufgaben stehen spezielle Algorithmen bzw. Verfahren zur Verfügung. Häufig verwendete Verfahren sind:

- Monte-Carlo-Methoden
- Genetische Algorithmen
- Gradientensuchverfahren mit vorgeschalteter Startvektorsuche [71, 72].

Die zuletzt genannte Methode wurde im Rahmen dieser Arbeit aufgrund ihrer Effektivität eingesetzt. Sie eignet sich zur Untersuchung von nichtkonvexen Optimierungsräumen, wenn es gelingt, eine begrenzte Anzahl potentiell geeigneter Startvektoren in der Umgebung des globalen Optimums bereitzustellen und für diese die Berechnung durchzuführen. In einem nachgeschalteten Prozeß wird die gesuchte optimale Lösung unter Beachtung zusätzlicher Rahmenbedingungen herausgefiltert. Im Zusammenhang mit der Lösung mechanischer Problemstellungen können geeignete Startvektoren unter Verwendung von Ergebnissen einer verwandten einparametrischen Grenzzustandsaufgabe gebildet werden.

4 Bemessungskonzept auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustände

4.1 Einführung

In der heutigen Ingenieurpraxis werden für die Auslegung von Stahlbetontragwerken die gegebenen Möglichkeiten zur Anwendung physikalisch nichtlinearer Theorien bei der Ermittlung von Bemessungsschnittgrößen nur in seltenen Fällen ausgeschöpft. Mit einer zunehmenden Akzeptanz dieser Methoden ist zu rechnen, wenn neben den Vorzügen auch die Grenzen der Anwendung nichtlinearer Verfahren deutlicher herausgearbeitet werden und mit praktikablen ingenieurmäßigen Methoden erfaßt und beherrscht werden können. Die Anwendung nichtlinearer Methoden ist wegen des erhöhten rechnerischen Aufwandes an die Verfügbarkeit von entsprechend aufbereiteten numerischen Hilfsmitteln gebunden.

Bereits in Abschnitt 1.1 wurde eingeschätzt, daß eine numerisch effektive Begleitung von Bemessungsprozessen durch vorhandene Methoden und Implementierungen nur unzureichend gegeben ist. Die alleinige Bereitstellung von nichtlinearen Übertragungsfunktionen ist dabei im allgemeinen unzureichend. Die Leistungsfähigkeit von Bemessungsmethoden wird darüber hinaus durch die Effektivität und Flexibilität der implementierten Grenzzustandsmodelle sowie durch die Berücksichtigung normativer Forderungen bestimmt, wie z.B. der Integration von Sicherheitselementen, einer effektiven Einwirkungskombination sowie der Erfassung unterschiedlicher Grenzzustände. Weiterhin ist die Verfügbarkeit von Verfahren zur Behandlung von Lastfolgeeffekten wünschenswert. Es wird deutlich, daß im Zuge der Anwendung nichtlinearer Verfahren auch verstärkt das Umfeld der Berechnungen Beachtung finden muß [75, 76].

In dieser Arbeit wird eine numerisch untersetzte Berechnungsplattform und Konzeption für die Bemessung von Stahlbetontragwerken auf der Basis nichtlinearer Schnittgrößen entwickelt. Den zentralen Kern der Methode bilden die Modelle zur Ermittlung deformationsbasierter Grenzzustände nach Abschnitt 3. Im Rahmen des Konzeptes wird eine einheitliche und normengerechte Behandlung von statischen und dynamischen Problemstellungen unter Beachtung von Grenzzuständen der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit ermöglicht. Die Leistungsfähigkeit des Konzeptes erwächst dabei aus der Integration einer flexiblen nichtlinearen FE-Modellstruktur, der automatisierten Berechnung auf der Basis von skalierbaren Grenzzustandsmodellen, der Verfügbarkeit von Schnittstellen zur Erweiterung des Modellrahmens sowie aus der numerischen Untersetzung durch eine effektive Lösungsmethode auf der Grundlage von Optimierungsalgorithmen.

4.2 Vorschlag für ein normengerechtes Bemessungskonzept auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustände

4.2.1 Übersicht

Nachfolgend wird ein Konzept für die Auslegung nichtlinear beanspruchter Stahlbetontragwerke unter statischer und dynamischer Beanspruchung vorgestellt, mit dem eine zielgerichtete Ermittlung von nichtlinearen Bemessungsschnittgrößen unter Einbeziehung von Grenzzustandsbetrachtungen möglich wird. Diesem Konzept liegen folgende Grundprinzipien zugrunde:

- Das Tragwerk wird für ein vorgegebenes Niveau elastischer oder inelastischer Beanspruchungen bemessen. Die Grenzzustände werden durch den Verlust des Gleichgewichtes oder durch Erreichen von Verzerrungs- bzw. Verformungsgrenzwerten charakterisiert.
- Bei der numerischen Untersetzung des Bemessungsprozesses wird auf Methoden der mathematischen Optimierung zurückgegriffen.

Der Bemessungsablauf wird in vier Abschnitte gegliedert:

Schritt 1	Modellbildung und Berechnung unter Annahme elastischen Verhaltens
Schritt 2	Vorbemessung und Systemanpassung
Schritt 3	Formulierung und Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe
Schritt 4	Konstruktive Durchbildung.

Nähere Erläuterungen zur Bemessung statisch beanspruchter Tragwerke enthält Abschnitt 4.2.4. Ergänzend wird in Tafel 4.1 eine schematische Übersicht zum Bemessungsablauf gegeben. Erweiterungen zur Bemessung seismisch beanspruchter Tragwerke werden in Abschnitt 4.2.5 angegeben. Die Betrachtungen beziehen sich auf rahmenartige Hochbauten.

Die Schnittstellen des Konzeptes werden so gestaltet, daß sich die Nachweiskonzepte nach E DIN 1045-1 [31], EC2 [32] und EC8 [57] in die Berechnungsmodelle integrieren und für die Bemessung von mehrfach wiederholt statisch bzw. dynamisch beanspruchten Tragwerken nutzen lassen. Durch die Verwendung allgemeiner FE-Modelle im Berechnungsapparat ist es möglich, den Modellvorgaben der Normen zu entsprechen, aber auch weiterführende Ansätze zu verfolgen.

Das Anwendungsspektrum der Methode kann innerhalb dieser Arbeit nur exemplarisch umrissen werden. Zu diesem Zweck werden zwei Implementierungen von Nachweisformaten nach E-DIN 1045-1 vorgestellt:

- Nachweis der Rotationsfähigkeit (im Grenzzustand der Tragfähigkeit),
- Nachweis der Verformung (im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit).

In den Erläuterungen (Abschnitt 4.2.4.3) werden jene Schritte beleuchtet, in denen Besonderheiten des Verfahrens zum Tragen kommen bzw. Abweichungen gegenüber der normüblichen Verfahrensweise vorliegen. Anhand von zwei Anwendungsbeispielen

- statisch beanspruchtes Tragwerk (Berechnung nach E DIN 1045)
- seismisch beanspruchtes Tragwerk (Berechnung nach EC 8, E DIN 1045)

soll die Leistungsfähigkeit des Bemessungskonzeptes demonstriert werden (siehe Abschnitt 4.3).

4.2.2 Modellebenen

Bei der Analyse von Stahlbetontragwerken werden bevorzugt Modellierungsstrategien eingesetzt, bei denen separate Modelle zur Abbildung globaler und lokaler Effekte vorgesehen werden. Während die Untersuchungen lokaler Effekte an Modellen mit relativ hohem Detaillierungsgrad durchgeführt werden (z.B. Querschnittsmodelle unter Verwendung von Lamellen- oder Faserdiskretisierungen), wird zur Erfassung des Gesamtverhaltens eines Tragwerkes in der Regel mit integralen Kenngrößen (z.B. auf der Grundlage von Stabwerksmodellen) gearbeitet. Zur Kopplung der Modellebenen werden Transformationsfunktionen bereitgestellt. Für stabförmige Tragwerksteile wird die Schnittstelle vom Querschnitts- zum Tragwerksmodell in Mittelebenen (meist Schwerpunktsachsen von Querschnitten) definiert, an denen die lokalen Eigenschaften durch integrale Größen, wie z.B. Steifigkeit oder Schnittgrößen zusammengefaßt werden (Abb. 4.1).

Die Trennung in unterschiedliche Betrachtungsebenen bietet den Vorteil, daß für oft auftretende Tragwerkselemente die lokalen Eigenschaften vorab rechnerisch oder experimentell bestimmt und die daraus abgeleiteten integralen Ansätze auf ganze Klassen von Tragwerkstypen übertragen werden können. Notwendige Anpassungen an das konkrete Tragwerk beschränken sich daraufhin auf die Modellierung im Tragwerksmodell und können mit relativ geringem Aufwand bewältigt werden. Diese Verfahrensweise ermöglicht eine einfache und schnelle Modellierung, dient der Übersichtlichkeit und erleichtert die Prüfung.

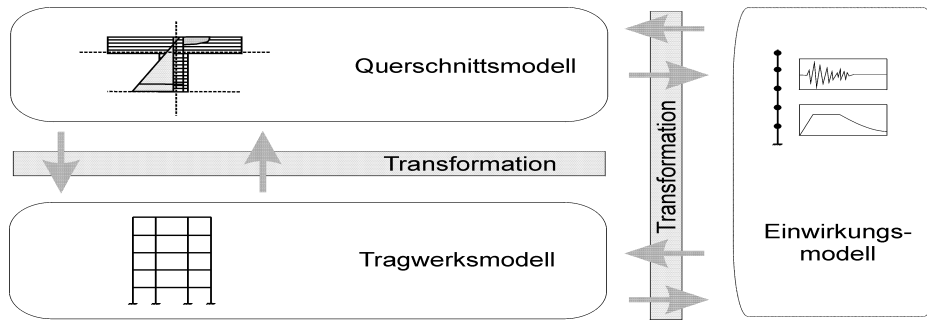


Abb. 4.1 Darstellung unterschiedlicher Modellierungsebenen

Das in den Normen verfolgte Konzept separater Modelle für

- Querschnitte und
- Tragwerke

wird für die Formulierung des Konzeptes dieser Arbeit aufgegriffen, wobei die Grenzzustandsbetrachtungen am Tragwerksmodell durchgeführt werden. Für die Gestaltung der Schnittstelle zwischen Querschnitts- und Tragwerksmodell wird die Verwendung polynomialer Näherungsfunktionen empfohlen. Bei der Modellierung von Einwirkungen wird auf übliche Verfahren der Mechanik zurückgegriffen.

4.2.3 Bemessungsführung

Die Verwendung von einwirkenden und widerstehenden Größen in Nachweis- oder Bemessungsformaten wird in Abb. 4.2 schematisch verdeutlicht.

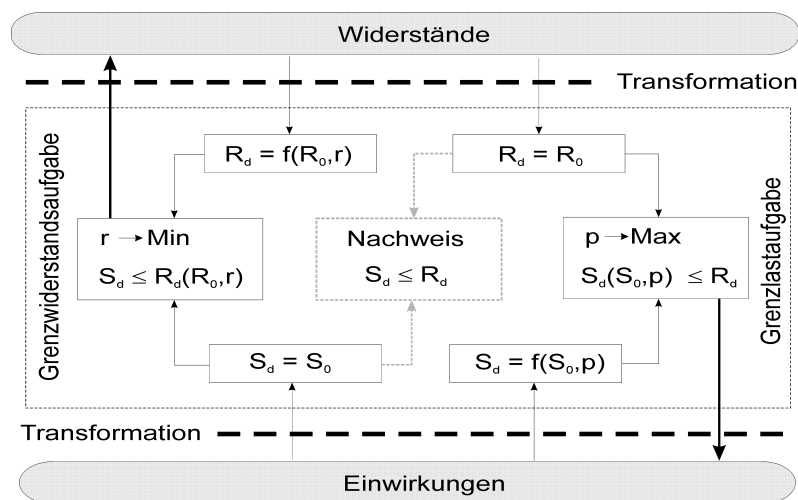


Abb. 4.2 Prinzip der Nachweisführung und Grenzzustandsbestimmung

Im einfachsten Fall werden die bekannten Größen R_0 und S_0 vergleichend gegenübergestellt (Nachweiskonzept), wohingegen durch Formulierung von Grenzzustandsaufgaben ausgewählte Kenngrößen der Untersuchung gezielt beeinflusst werden (Bemessungskonzept). Bei der Lösung von Bemessungsaufgaben des Ingenieuralltags werden in der Regel Anpassungen der Widerstandsseite vorgenommen (Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe). Nachfolgend wird die Betrachtung auf diese Form der Grenzzustandsanalyse beschränkt.

4.2.4 Bemessung statisch beanspruchter Tragwerke

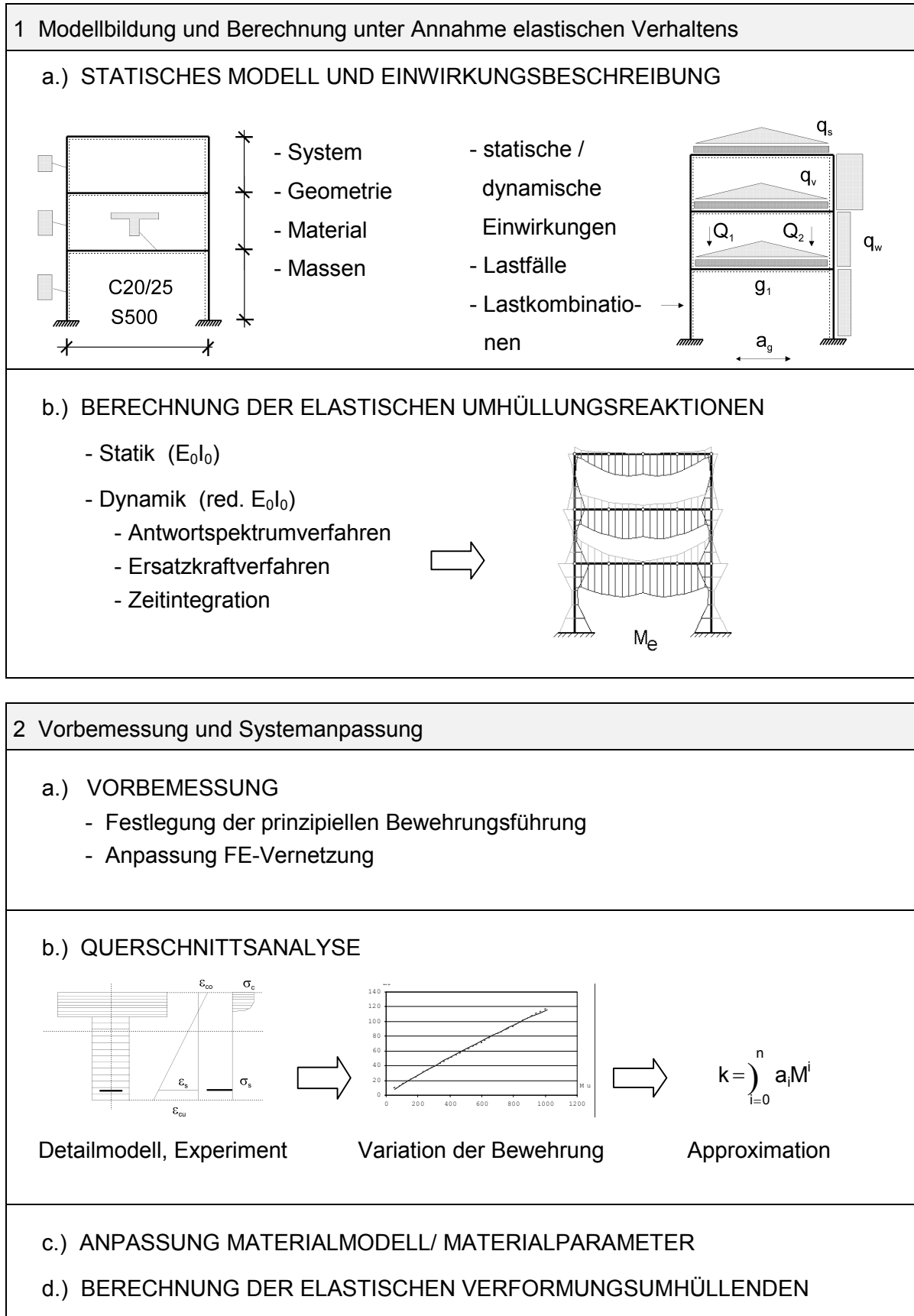
4.2.4.1 Schritt 1 Modellbildung und Berechnung unter Annahme elastischen Verhaltens

a.) Entwurf und Modellbildung

Nach der Erstellung eines Tragwerksentwurfes sind für die Vorbereitung der rechnerischen Analysen Transformationen der Entwurfsparameter in geeignete Modelle und Modellkenngrößen vorzunehmen. In diesem Zusammenhang sind notwendige Approximationen so zu gestalten, daß der Zweck der jeweiligen Untersuchung erfüllt wird und ein akzeptables Verhältnis von wirklichkeitsnaher Beschreibung (Tendenz zum Maximalmodell) und effizienter Handhabbarkeit (Tendenz zum Minimalmodell) vorliegt.

In Grenzzustandsberechnungen kann nur eine begrenzte Anzahl von Kenngrößen gezielt verändert werden, währenddessen der Großteil der Strukturparameter konstant vorzugeben ist. Die Wahl dieser konstanten Parameter hat maßgeblichen Einfluß auf den Erfolg des zugrunde liegenden Entwurfes und auf den Umfang nachfolgender Korrekturprozeduren. Im Zusammenhang mit nichtlinearen Berechnungen können allerdings Auswirkungen von Parameterveränderungen sehr viel ungenauer vorausschauend eingeschätzt werden, als dies bei linearen Betrachtungen der Fall ist, so daß der Einsatz numerischer Werkzeuge vorteilhaft ist. Die Festlegung von geeigneten Kenngrößen zur Bemessungssteuerung (z.B. in Form des Zielfunktionswertes einer Optimierungsaufgabe) orientiert sich am zu lösenden Problem und am verwendeten Nachweisverfahren. Für Untersuchungen an Stahlbetontragwerken empfiehlt sich der Parameter „Bewehrungsmenge“ zur Beeinflussung des Tragwerkswiderstandes. Der Vorzug dieses Parameters besteht darin, daß er einen relativ großen Widerstandsbereich abdeckt, ohne Veränderungen der äußeren Geometrie des Bauteils vornehmen zu müssen. Gleichmaßen besteht die Möglichkeit zur Anpassung anderer Querschnittsparameter wie z.B. der Querschnittshöhe.

Tafel 4.1 Schematische Übersicht zum Bemessungskonzept

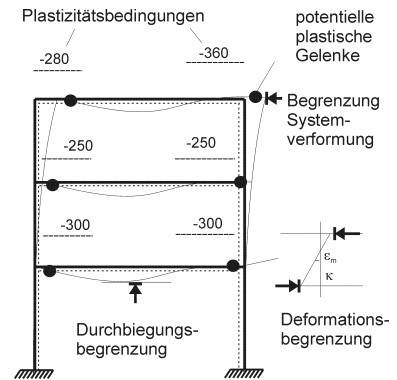


Tafel 4.1 Schematische Übersicht zum Bemessungskonzept (Fortsetzung)

3 Formulierung und Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe

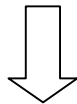
a.) FORMULIERUNG DER AUFGABE

- Festlegung Variablensatz
- Festlegung Ein-/Mehrparametrische Bemessungsaufgabe
- Festlegung Deformationsbegrenzungen
- Parallele Berücksichtigung unterschiedlicher Bemessungskriterien, Einarbeitung Sicherheitskonzept
- Integration polynomialer Verknüpfungen
- Festlegung potentieller plastischer Gelenkbereiche
- Festlegung Ausgangswiderstandsverteilung
- ...

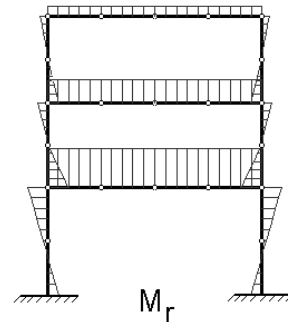


b.) BERECHNUNG UND ERGEBNISAUSWERTUNG

- Lösung Optimierungsproblem zur Bestimmung des deformationsbasierten Grenzzustandes
- Feststellung Rest- bzw. Gesamtantwort



BEMESSUNGSSCHNITTGRÖSSEN



4 Konstruktive Durchbildung

Statisch beanspruchte Tragwerke

- Bemessung nach EC2 bzw. DIN 1045
- Konventionelle Durchbildung für inelastische und elastische Bereiche

Seismisch beanspruchte Tragwerke

- Bemessung nach EC2 und EC8 (Kapazitätsbemessung)
- Sorgfältige konstruktive Durchbildung der inelastischen Zonen
- Konventionelle Durchbildung der elastischen Bereiche, Berücksichtigung von Überfestigkeiten

Mit Hilfe von Nachweis- und Bemessungsstrategien werden Bewertungen bzw. Anpassungen von Entwurfsparametern anhand von signifikanten Grenzbedingungen vorgenommen. Dabei muß beachtet werden, daß nur vergleichbare Größen gegenübergestellt werden können, d.h. einwirkende und widerstehende Größen müssen Element des gleichen Definitionsraumes sein. Um dies zu gewährleisten, müssen ggf. Transformationen vorgenommen werden [30]. Die Auswahl geeigneter Vergleichsgrößen und die Bereitstellung zugehöriger Transformationsfunktionen in der Modellbildung sind von der Art des Nachweisproblems und den Güteanforderungen an die Ergebnisse abhängig.

Bei der Modellbildung müssen neben der Abbildung der Widerstandsseite auch Aussagen zur Modellierung der Einwirkungsseite getroffen werden. Für statisch beanspruchte Stahlbetontragwerke wird die Lastermittlung nach DIN 1055 bzw. nach EC1 durchgeführt.

Zusammenfassend sind Festlegungen zu folgenden Schwerpunkten zu treffen:

- Statisches Modell
- Belastungsannahmen und Nutzungsbedingungen
- Materialkenngrößen
- Festlegung des Nachweis- oder Bemessungsformats, Sicherheitskonzept.

b.) Berechnung der elastischen Umhüllungsreaktionen

Die Berechnung der elastischen Umhüllungsreaktionen für Schnittgrößen und Verformungen liefert wichtige Sondierungsinformationen zum Antwortverhalten der Struktur. Mit diesen Informationen können erste Überprüfungen und Korrekturen am ursprünglichen Entwurf vorgenommen werden. Die ermittelten linearen Schnittgrößen könnten direkt als Basis für eine traditionelle Bemessungs- und Nachweisführung genutzt werden. Im Normalfall darf die Schnittgrößenermittlung unter Verwendung der Querschnittswerte des ungerissenen Zustands durchgeführt werden. Die elastische Schnittgrößenverteilung repräsentiert eine zweckmäßige Anfangsverteilung der Widerstände für die nachfolgenden nichtlinearen Berechnungen.

Die Ermittlung der Funktionen extremer Tragwerksantworten (Umhüllende oder Grenzfunktion) ist bei nichtlinearen Berechnungen sehr aufwendig, da auf die Anwendung von Superpositionsregeln bei Lastkombinationsproblemen verzichtet werden muß. Im Normalfall müssen entweder alle Lastkombinationen untersucht werden ($2^n - 1$ Anwendungen der Übertragungsfunktion, $n = \text{Anzahl der Lastfälle}$) oder in einem vorgeschalteten Prozeß die potentiell maßgebenden Kombinationsfälle herausgefiltert werden. Vor dem Hinter-

grund unterschiedlicher Sicherheitsbetrachtungen für Grenzzustände der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit kann für komplexe Einwirkungssituationen ein nicht unerheblicher numerischer Aufwand bei der Ermittlung der Bemessungsschnittgrößen entstehen.

In diesem Zusammenhang kann ein Sonderfall benannt werden, der für die Lösung von Bemessungsaufgaben eine deutliche Entlastung speziell für Lastfalluntersuchungen ermöglicht. Für linear elastisch-plastische Körper kann in Berechnungen nach dem Konzept des superponierten Restzustandes nach Abschnitt 3.1.3.4.1 auch bei Beanspruchungen im physikalisch nichtlinearen Bereich eine lineare Kombination der Lastfälle durchgeführt werden, da nach den Vorgaben dieses Konzeptes die Wirkungen der Lasten lediglich Bestandteil der elastischen Teilantwort des Systems sind. Bei deren Berechnung kann analog zur linearen Tragwerksanalyse die Kombination der Lasten durch eine Kombination der Tragwerksantworten ersetzt und somit eine erhebliche Reduzierung des Berechnungsaufwandes erreicht werden. (Anzahl Lastfälle = Anzahl Anwendungen der linearen Übertragungsfunktion). Nach den Normvorgaben im Stahlbetonbau kann diese Methode auch auf die Untersuchung ausgeprägt druckkraftbeanspruchter Tragwerke übertragen werden, wenn der geometrisch nichtlineare Einfluß vernachlässigbar klein ist (gedrungene Abmessungen) oder Ersatzverfahren anwendbar sind, bei denen der Einfluß der Verformungsfelder auf die Schnittgrößenverteilungen indirekt durch Modifikation der zugehörigen Widerstandsgrenzwerte berücksichtigt wird.

4.2.4.2 Schritt 2 Vorbemessung und Systemanpassung

Wie zuvor erläutert, unterstützt das Bemessungskonzept die Verwendung separater Modelle für Tragwerks- und Querschnittsuntersuchungen. Zwischen beiden Betrachtungsebenen muß eine Schnittstelle vorgesehen werden, mit deren Hilfe Eigenschaften des Querschnittes in das Tragwerksmodell transformiert werden können. Die Querschnittseigenschaften sind vorab in einer Querschnittsanalyse zu ermitteln, wobei auf Ergebnisse einer Vorbemessung Bezug genommen wird.

a.) Vorbemessung

Die in Schritt 1 ermittelten elastischen Umhüllungsreaktionen werden herangezogen, um eine prinzipielle Bewehrungsführung in den einzelnen Bauelementen festzulegen. Dieser Schritt wird notwendig, da die Schnittgrößenverteilung im allgemeinen nicht identisch mit der Bewehrungsverteilung im Tragwerk ist. Weiterhin sind Abschätzungen zu den Bereichen gleicher Bewehrungswahl, sowie der Lagigkeit des Bewehrungstahls im Querschnitt (z.B. Position der Bewehrung, Verhältnis von oberer zu unterer Bewehrung) vorzuneh-

men. Diese Informationen werden benötigt, um für alle Bereiche eine gezielte Querschnittsanalyse durchführen zu können und um eine Zuordnung zu abhängigen Größen wie z.B. der Steifigkeit oder der Duktilität während der nichtlinearen Analyse zu ermöglichen. Die vorausschauende Sicht auf die Lagigkeit in den Querschnitten dient der Einschränkung möglicher Varianten einer Querschnittsgestaltung. Diese konstruktiv geprägten Entscheidungen können auch Veränderungen der Elementierung im mechanischen Modell nach sich ziehen.

b.) Querschnittsanalyse

Bei Bemessungen von Tragwerken werden gezielt Eigenschaften verändert. Dabei ist es nur selten möglich, mit bestimmten Eingriffen nur jeweils einen Parameter zu beeinflussen. Vielmehr muß mit einer Reihe von Sekundäreffekten gerechnet werden. Wird z.B. im Stahlbetonbau eine Modifikation der Bewehrungsmenge vorgenommen, so werden neben den aufnehmbaren Schnittgrößen weitere Größen wie z.B. die Steifigkeit und das Duktilitätsangebot verändert. Sollen diese Effekte im Modell berücksichtigt werden, müssen die funktionellen Abhängigkeiten zwischen diesen Größen bekannt sein und in das Modell implementiert werden. In der Regel genügen hierbei Approximationen. Speziell vor dem Hintergrund deformationsbasierter Betrachtungen kann im allgemeinen auf eine wirklichkeitsnahe Erfassung von steifigkeits- und duktilitätsbezogenen Größen nicht verzichtet werden.

Konzept der polynomialen Näherungsfunktionen

Eine Möglichkeit zur Erfassung von Abhängigkeiten zwischen Strukturgrößen besteht in der Erweiterung des mechanischen Modells (z.B. Einsatz anderer finiter Elemente) und Erhöhung des Detaillierungsgrades bei der Implementierung von Stoffgesetzen. Die Folge ist jedoch ein hoher numerischer Aufwand. Alternativ dazu empfiehlt sich unter Beibehaltung einer einfachen Strukturbeschreibung die Schaffung einer Schnittstelle im Modell, über die zusätzliche funktionelle Zusammenhänge eingearbeitet werden können. Für die Übertragung von ausgewählten Querschnittsphänomenen (z.B. der Abhängigkeit der Steifigkeit vom aufnehmbaren Moment) in das Tragwerksmodell bieten sich *polynomiale Näherungsfunktionen*

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (4-1)$$

an, deren Koeffizienten a_i in einem vorgeschalteten separaten Analyseschritt zu ermitteln sind. Diese Verfahrensweise empfiehlt sich insbesondere bei Verwendung von Lösungs-

strategien auf der Basis der nichtlinearen Optimierung, da die meisten der zur Verfügung stehenden Algorithmen eine Verarbeitung von Polynomfunktionen ermöglichen.

Für die Analyse von Stahlbetonquerschnitten und anschließender Herleitung der polynomialen Näherungsfunktionen stehen numerische Querschnittsanalysemethoden zur Verfügung. Übliche Verfahren basieren meist auf *Cauchyschen* Umlaufintegralen [77] oder Faser- bzw. Lamellendiskretisierungen [78,79]. Für die Untersuchungen zu dieser Arbeit wurde vorrangig das Querschnittsmodell von *Marx* [80] eingesetzt, da es die Mitwirkung des Betons auf Zug (tension stiffening) berücksichtigt.

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Ermittlung von polynomialen Näherungsfunktionen für querschnittsbezogene Kenngrößen kann Abb. 4.3 entnommen werden. Durch Variation eines freien Parameters im Querschnittsmodell (z.B. Bewehrungsmenge) können in Parameterstudien unter Verwendung der oben beschriebenen Querschnittsanalysemodelle Beziehungen zu anderen, funktionell abhängigen Parametern (z.B. Fließmoment, Steifigkeit) hergestellt werden. Die auf diese Weise erhaltenen punktuellen Resultate (entsprechende Dichte vorausgesetzt) können mit Verfahren der Polynomapproximation in funktionelle Näherungsbeziehungen überführt werden.

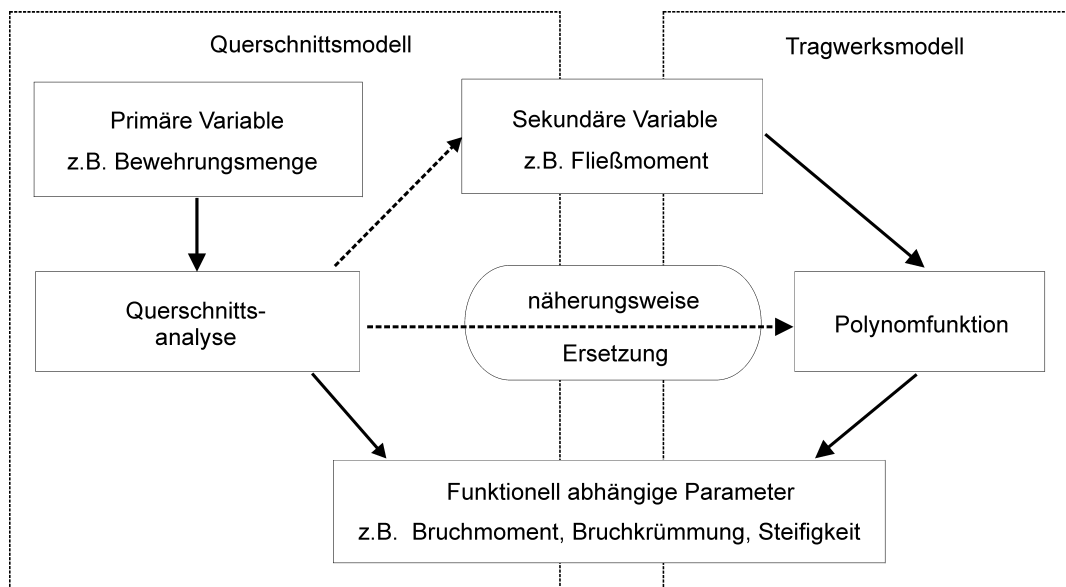
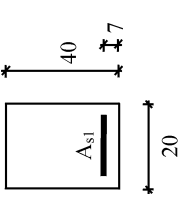
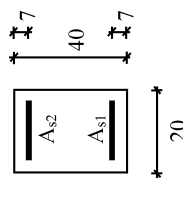
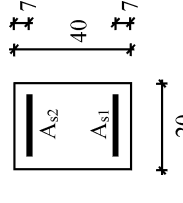
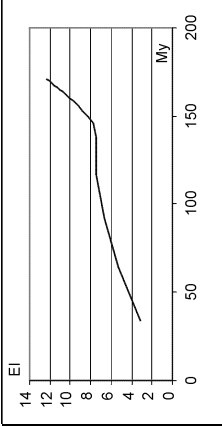
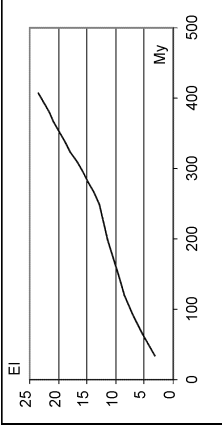
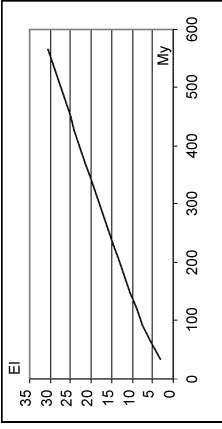
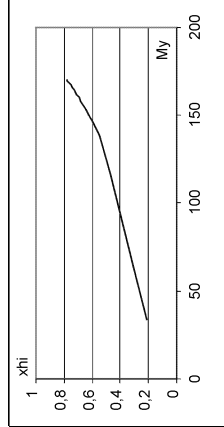
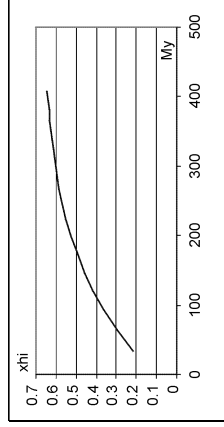
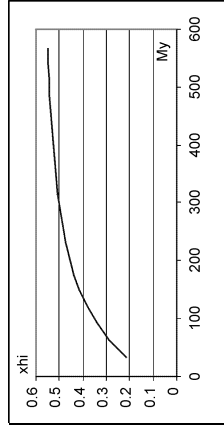
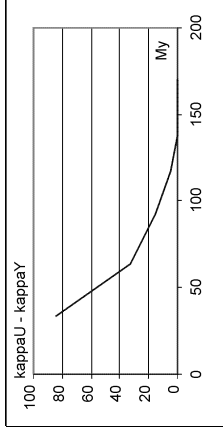
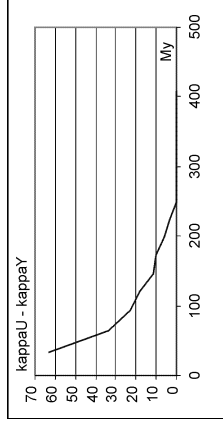
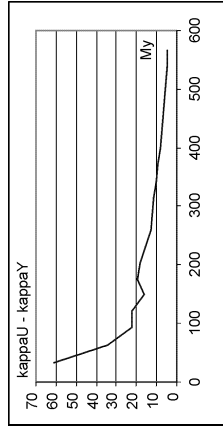


Abb. 4.3 Vorgang der Bildung von Polynomfunktionen zur näherungsweisen Abbildung von Beziehungen zwischen Querschnittskenngrößen in Tragwerksmodellen

Tafel 4.2 Beispiel zur Abhängigkeit von Querschnittskenngrößen vom Fließmoment (nach [80])

Normalkraft = 0	Einfache Bewehrung	Doppelte Bewehrung	Symmetrische Bewehrung
<p>Parabel- Rechteck- verteilung Beton C25/30 und bilinea- re Stahlkennlinie S500</p>	 <p>$A_{s1} = 1...40 \text{ cm}^2$</p>	 <p>$A_{s1} = 2 A_{s2} = 1...40$</p>	 <p>$A_{s1} = A_{s2} = 1...40 \text{ cm}^2$</p>
<p>Beziehung Fließmoment zu Biegesteifigkeit</p>			
<p>Beziehung Fließ- moment zu bez. Druckzonenhöhe</p>			
<p>Beziehung Fließ- moment zu plasti- scher Quer- schnittskrümmung</p>			

Für die Verarbeitung sind jedoch nur Funktionen in Abhängigkeit solcher Querschnittsparameter geeignet, die selbst Variablen des Tragwerksmodells sind. Im allgemeinen muß deshalb eine entsprechende sekundäre (stellvertretende) Variable aus dem Variablensatz des Tragwerkmodells ausgewählt werden, deren funktionelle Bindung an die primäre Variable bekannt ist und die den Einfluß der primären Variablen äquivalent in der Tragwerkebene repräsentiert. Für biegebeanspruchte Tragwerke erfüllt im allgemeinen die Größe „Fließmoment“ diese Anforderungen.

Über die Wahl des Polynomgrades besteht die Möglichkeit, den Grad der Näherung zu beeinflussen. Führt man Parameterstudien für Standardquerschnitte wie z.B. Rechteck- oder Plattenbalkenquerschnitt durch, so stellt man fest, daß für viele Kenngrößen relativ einfache funktionelle Beziehungen zum Fließmoment bestehen. Zur Illustration sind die Ergebnisse einer Querschnittsanalyse für einen Rechteckquerschnitt mit unterschiedlichen Zug-Druckbewehrungsverhältnissen in Tafel 4.2 zusammengestellt. Unter den Bedingungen einer Bemessung nach Norm genügen oftmals kleine Polynomgrade (0-4), um eine ausreichend genaue Abbildung der gewünschten Effekte im Modell zu erzielen. Die Näherungen müssen zudem lediglich im unmittelbaren Untersuchungsbereich eine brauchbare Übereinstimmung mit der Ausgangsfunktion aufweisen.

In der Regel kann bei der Ermittlung von Näherungsansätzen die Schnittkraftinteraktion von Moment und Normalkraft auf indirektem Wege beachtet werden. In vielen Fällen (z.B. bei regelmäßigen Stützen-Riegelsysteme) kann man davon ausgehen, daß der Einfluß von begrenzten Momentenumlagerungen auf die Normalkraftverteilung im Tragwerk gering ist, so daß die Höhe der Normalkraftbeanspruchung im Bauteil für die Querschnittsuntersuchung bereits anhand der in Schritt 1 ermittelten linearen Resultate vorab abgeschätzt und der Querschnittsanalyse zugrunde gelegt werden kann. In Riegeln spielen Normalkräfte zudem eine untergeordnete Rolle, so daß die Interaktion der Schnittgrößen im allgemeinen vernachlässigt werden kann.

Der Vorzug polynomialer Abbildungen besteht allgemein darin, daß unterschiedliche Approximationsgrade oder Modellvorstellungen mit einer universellen Methode im numerischen Apparat berücksichtigt werden können. Neben den Ergebnissen rechnerischer Analysen können auf gleiche Weise auch Daten aus Experimenten verarbeitet werden.

c.) Anpassung des Materialmodells bzw. der Materialparameter

In Vorbereitung der Grenzzustandsberechnung werden die zuvor ermittelten querschnittsbezogenen Parameter in die Vektoren des Berechnungsmodells übertragen. Dies betrifft bei normtypischen Nachweisen für rahmenartige Konstruktionen primär die Werte der Biegesteifigkeit und der Verzerrungs- und Verformungsgrenzwerte. Diese Werte können unter Zuhilfenahme der zuvor ermittelten Polynomfunktionen direkt angegeben werden.

d.) Berechnung der elastischen Verformungsumhüllenden

Werden Grenzzustandsmodelle nach dem Konzept des superponierten Restzustandes verwendet, müssen die elastischen Umhüllungsfunktionen der Weggrößen erneut unter Verwendung der effektiven Steifigkeiten des Systems berechnet werden. Die Werte der in Schritt 1 errechneten Schnittgrößenumhüllenden werden weiterhin zur Charakterisierung der aktuellen Bewehrungssituation benötigt.

4.2.4.3 Schritt 3 Formulierung und Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe

a.) Formulierung der Aufgabe

In diesem Bearbeitungsschritt wird eine geeignete Formulierung für die zu lösende Grenzzustandsaufgabe erarbeitet, wobei im Rahmen dieses Konzeptes vorrangig auf die Verwendung von Optimierungsstrategien orientiert wird. Als Grundlage für die Ableitung von Optimierungsaufgaben dienen die in Schritt 1 zusammengestellten Informationen über die Modellierung des Tragwerks als nichtlineares FE-System sowie die zuvor ermittelten Zusatzbedingungen in Form von Polynomansätzen. Diese Informationen fließen nach Abschnitt 3.2.3.2 in die Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe ein. Für die zielgerichtete Ermittlung des Grenzzustandes muß eine geeignete Extremalbedingung aufgestellt und entsprechende Freiwerte in den Variablen- und Bedingungssatz eingearbeitet werden. Bereits in Abschnitt 3.3 wurde auf spezielle Aspekte bei der Formulierung von Grenzzustandsaufgaben als Optimierungsprobleme eingegangen.

Folgende Teilschritte sind beim Aufbau der Grenzwiderstandsaufgabe zu bearbeiten:

- Festlegung des Nebenbedingungssatzes und der Zielfunktion
- Einarbeitung der Strukturinformationen aus Schritt 1 und 2
- Formulierung als ein- oder mehrparametrische Optimierungsaufgabe

- Auswahl und Implementierung von Nachweisformaten (Tragfähigkeit, Gebrauchstauglichkeit)
- Entscheidung zur Notwendigkeit der Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens und Auswahl eines geeigneten Berechnungskonzeptes
- Festlegungen zur Formulierung des physikalisch nichtlinearen Verhaltens:
 - Einarbeitung der polynomialen Verknüpfungen, gewonnen aus vorgeschalteten Untersuchungen (Schritt 2)
 - Festlegung der potentiell plastischen Zonen
 - Festlegung der Ausgangswiderstandsverteilung (z.B. mit Orientierung an elastischer Schnittgrößenverteilung)
- Implementierung des geometrisch nichtlinearen Verhaltens
- Formulierung von Deformations- und Verformungsbedingungen.

Zu den Schwerpunkten des Bearbeitungsablaufes werden nachfolgend nähere Erläuterungen gegeben.

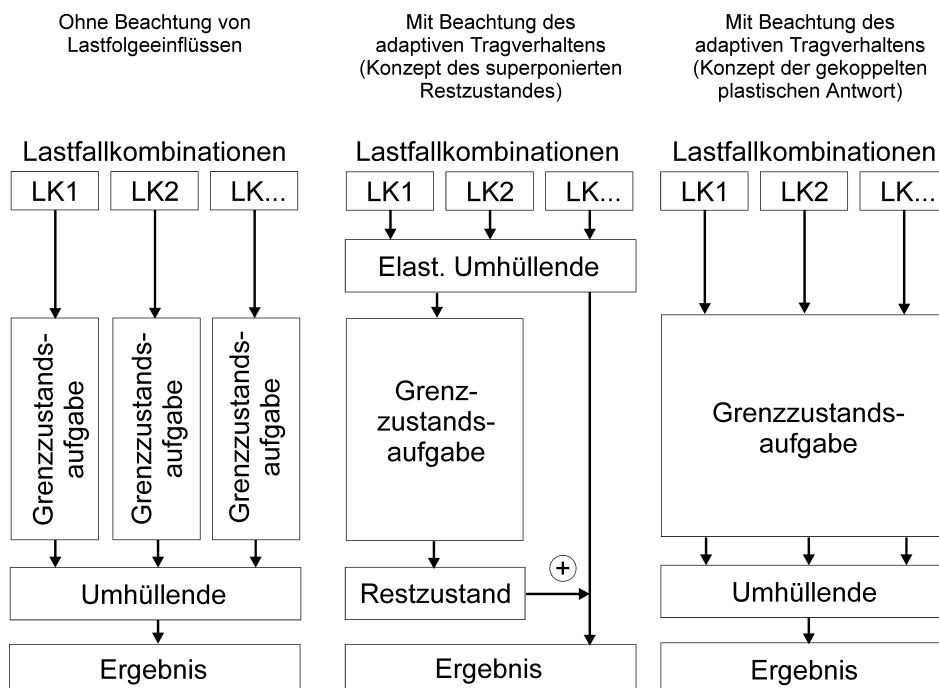


Abb. 4.4 Verlauf des Berechnungsprozesses für statische Beanspruchungen nach unterschiedlichen Konzepten

Zur Wahl der Berechnungsstrategie

Die Einbindung der Grenzzustandsanalyse in den Berechnungsablauf ist für die vorgestellten Berechnungskonzepte nach Abschnitt 3.1.3.3 und 3.1.3.4 schematisch in Abb. 4.4 dargestellt. Die Anwendung der Konzepte mit Beachtung des adaptiven Tragverhaltens bleibt auf Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit begrenzt, da nach Vorgabe aktueller Normenwerke bei Untersuchungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit lediglich Beanspruchungen im elastischen Bereich der Arbeitslinie auftreten dürfen. Auf spezielle Aspekte zur Anwendung der Grenzzustandsmodelle nach Abb. 4.4 innerhalb der Bemessungskonzeption wird nachfolgend näher eingegangen.

Zur Anwendung von Grenzzustandsmodellen ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffekten

Die gegebenen Lastfallkombinationen werden nacheinander mit den Berechnungsmodellen auf der Basis der mathematischen Optimierung nach Abschnitt 3.3.4 untersucht und die Ergebnisse als umhüllende Reaktion zusammengestellt. Alle normtypischen Nachweise können in den Lösungsapparat integriert werden. Für Bemessungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit ist dieses Konzept unter der Voraussetzung anwendbar, daß infolge extremer Belastung keine Zyklen plastischer Verformungen in kritischen Bereichen des Tragwerkes durchfahren werden. Wie bereits erwähnt, wird in aktuellen Normen und Normenentwürfen nicht ausreichend auf die Überprüfung dieser Voraussetzung gedrungen. Es ist nicht nur die Eintrittswahrscheinlichkeit des Grenzzustandes in die Sicherheitsüberlegungen einzubeziehen, sondern es ist auch die Wahrscheinlichkeit zu bewerten, daß innerhalb der Lastgeschichte weitere extreme Beanspruchungen in das Tragwerk eingetragen werden und somit resultierend das projizierte Sicherheitsniveau unterschritten werden kann. Unter vorwiegend ruhender Belastung ist die Vernachlässigung von Lastfolgeeffekten in vielen Fällen zulässig.

Zur Anwendung von Grenzzustandsmodellen mit Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens

Besteht die Möglichkeit zyklisch plastischen Versagens oder die Notwendigkeit zur Einhaltung eines begrenzten Schädigungsniveaus im Grenzzustand der Tragfähigkeit, muß der Aspekt der Lastfolge in die Untersuchungen einbezogen werden. Bei Verwendung von

adaptiven Tragwerksmodellen wird das Beanspruchungs- bzw. Widerstandsniveau soweit begrenzt, daß keine Lastfolgeabhängigkeiten bestehen und trotzdem nicht von vorn herein auf die Nutzung von plastischen Reserven des Tragwerkes verzichtet werden muß.

In Abschnitt 3.3.5 wurden bereits geeignete Berechnungsmodelle auf der Basis der mathematischen Optimierung zur Lösung von deformationsbasierten Grenzzustandsaufgaben nach den Konzepten des superponierten Restzustandes bzw. der gekoppelten plastischen Antwort vorgestellt. In Abb. 4.4 ist die Einbindung beider Analyseverfahren in den Berechnungsablauf schematisch dargestellt. Die angegebenen Schemata können jeweils in externe iterative Prozesse einbezogen werden, um weitere nicht direkt im Berechnungsmodell enthaltene funktionelle Zusammenhänge zwischen Strukturvariablen erfassen zu können. Diese Möglichkeit kann unter anderem dazu genutzt werden, um bei Anwendung des Konzeptes des superponierten Restzustandes nicht erfaßte Verknüpfungen zwischen Strukturvariablen des elastischen Modells und des Modells zur Bestimmung der Restanteile der Tragwerksantwort vorzusehen.

Parallele Untersuchungen zu unterschiedlichen Nachweisformaten

In Anlehnung an den formalen Aufbau der Optimierungsschemata zur Lösung von deformationsbasierten Grenzzustandsaufgaben nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort können die Aufgabentypen nach Tafel 3.7 derart erweitert werden, daß parallele Untersuchungen zu verschiedenartigen Nachweiskriterien ermöglicht werden. Hierbei sind Kopplungen von Nachweisen im Grenzzustand der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit von besonderem Interesse, da durch die Einbeziehung von mehreren Kriterien in einer Grenzzustandsaufgabe der sonst übliche iterative Nachweis- und Korrekturprozeß vermieden werden kann und somit die jeweils maßgebende Bedingung direkt das Bemessungsergebnis bestimmt. Mit dieser Option ergibt sich auch eine neue Qualität in der Durchführung von Gebrauchstauglichkeitsuntersuchungen, da sie weitgehend den Charakter eines „sekundären“ Nachweises verlieren und gleichberechtigt neben den Kriterien der Tragfähigkeit im Bemessungsprozeß berücksichtigt werden. Damit wird dieses Konzept auch der wachsenden Bedeutung von Gebrauchstauglichkeitsuntersuchungen im heutigen Planungsgeschehen gerecht. Im Abschnitt 4.3.1 wird dazu an einem statisch beanspruchten Tragwerk beispielhaft die Kopplung unterschiedlicher Nachweisformate in einer Optimierungsaufgabe demonstriert.

Zur Implementierung von Normnachweisen

Nachweisformate aus der Fachliteratur bzw. Normwerken lassen sich in Form von nichtlinearen Ungleichungen in das Berechnungsmodell übertragen. Exemplarisch wird im folgenden die Einbindung anhand des Nachweises der plastischen Querschnittsrotation im Grenzzustand der Tragfähigkeit sowie des Nachweises der Durchbiegungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit demonstriert.

Nachweis der plastischen Rotation

Für den Nachweis der plastischen Rotation wird ein Nachweisformat aus E DIN 1045-1 Abschnitt 8.4.2 (6) [31] verwendet. Bei dieser Formulierung wird die Mitwirkung des Betons auf Zug näherungsweise berücksichtigt. Die plastische Grenzrotation λ_{pl} wird in Abhängigkeit zur Schublänge

$$\lambda_q = M_{sd} / V_{sd} \quad (4-2)$$

und der bezogenen Druckzonenhöhe ξ bestimmt zu:

$$\lambda_{pl} = \min \begin{cases} \frac{5}{7} \left(1 + \frac{\xi}{0.12} \right) \sqrt{\frac{\lambda_q}{d \geq 3}} & \text{Stahlversagen maßgebend} \\ \frac{7}{3} \left(15 - \frac{\xi}{0.45} \right) \sqrt{\frac{\lambda_q}{d \geq 3}} & \text{Betonversagen maßgebend} \end{cases} \quad (4-3)$$

Die Schublänge ist ein Maß für die Ausdehnung der Fließzone in die benachbarten Bereiche des Fließgelenkzentrums. Dieser Term ist identisch mit der Länge zwischen Maximummoment und Momentennullpunkt bei Einzellastbeanspruchung. Bei der Umlagerung von Biegemomenten wird im Normalfall der Wert der Querkraft V_{sd} im Fließgelenkbereich nur unwesentlich verändert, so daß in (4-2) näherungsweise die elastische Lösung von V_{sd} eingesetzt werden kann (siehe Schritt 1). Da sowohl die Schublänge als auch die bezogene Druckzonenhöhe Funktionen des aufnehmbaren Momentes sind, ist auch λ_{pl} lediglich von dieser Größe abhängig.

Die direkte Einbindung in den Berechnungsapparat ist in der angegebenen Form möglich. Die Übertragung in polynomiale Näherungsfunktionen verbessert jedoch im Regelfall die numerische Verarbeitbarkeit und ist somit empfehlenswert. Wenn ausgeschlossen ist, daß bei Umlagerung der Schnittgrößen die bezogene Druckzonenhöhe von $\xi = 0.121$ überschritten wird, genügt die Implementierung einer der beiden Bedingungen von (4-3).

Weitergehende Vereinfachungen für (4-3) sind für einfach bewehrte Rechteckquerschnitte ohne Längskraftbeanspruchung im Zustand II möglich, wenn die bezogene Druckzonenhöhe ξ als lineare Funktion des aufnehmbaren Momentes M_{sd} angegeben wird:

$$\xi = 1.78 \frac{M_{sd}}{f_{cd} b d^2} \quad (4-4)$$

Die Unterschiede zu einer Berechnung nach (4-3) sind relativ gering, wie z.B. anhand der Ergebniswerte einer Parameterstudie für den Beispielquerschnitt nach Abb. 4.5 zu erkennen ist.

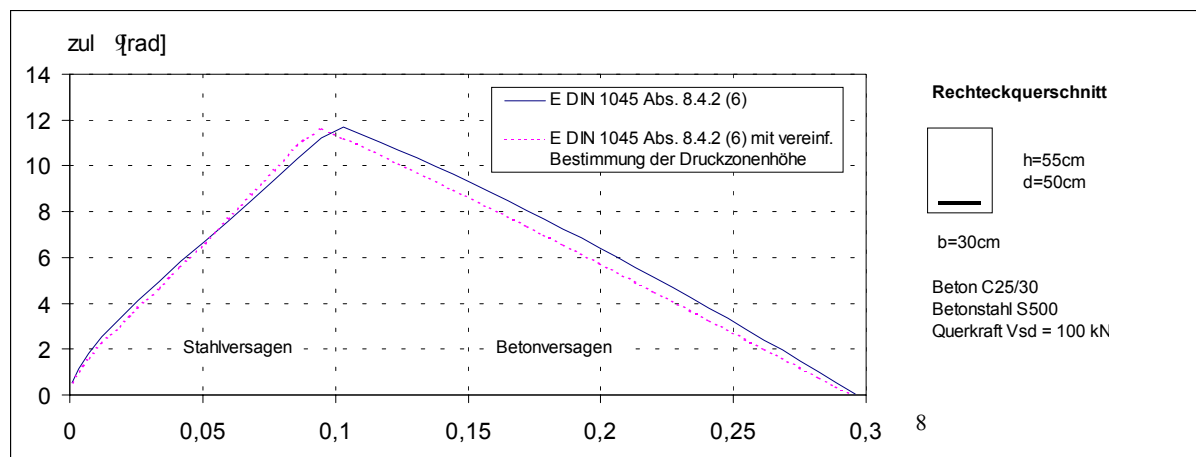


Abb. 4.5 Beispiel für die Abhängigkeit der zulässigen plastischen Rotation vom Bewehrungsgrad nach [31] mit und ohne vereinfachter Bestimmung der Druckzonenhöhe

Für eine Verarbeitung der Kenngröße „plastische Rotation“ im Tragwerksmodell muß eine Transformationsvorschrift für die Umrechnung von Elementrandverdrehungen in Querschnittsrotationen bereitgestellt werden. Beide Deformationsgrößen lassen sich durch die Festlegung einer rechnerischen Fließgelenklänge l_p miteinander verknüpfen:

$$\theta_p = \frac{p}{l_p} \quad (4-5)$$

Die Näherung basiert auf der Modellvorstellung, daß die plastischen Verformungen des Gelenkes als Starrkörperrotationen der angeschlossenen Trägerhälften idealisiert werden. Die rechnerische Länge des plastischen Gelenkes l_p wird durch Integration der plastischen Krümmung entlang der Stabachse x im Bereich der plastizierten Länge l_p^* ermittelt:

$$I_p = \frac{1}{\rho} \int_{I_p} \rho(x) dx. \quad (4-6)$$

Für eine numerische Handhabung wird diese Beziehung meist durch Näherungen ersetzt. Neben Festwerten für I_p , abhängig von der Bauteilgeometrie und –art (z.B. nach EC8 [57]), finden sich in der Literatur zahlreiche teils empirisch gewonnene Ansätze. *Dilger* [33] führte sehr umfangreiche experimentelle Untersuchungen durch und stellte u.a. die Abhängigkeit der Fließgelenklänge zur Schublänge λ_q nach (4-2) fest. Der Einfluß von Querkraft, Querschnittshöhe und Bügelanordnung wird durch Verlängerung von λ_q um das Versatzmaß a_1 berücksichtigt, so daß sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$I_p = k_{pl}(\lambda_q + a_1). \quad (4-7)$$

Der Beiwert k_{pl} wird nach [33] in Abhängigkeit von der Stahlgüte und der Breite der Lasteinleitungsstelle ermittelt .

Die Festlegung von I_p für Untersuchungen von Lastfolgeproblemen mit variabler Lastsequenz ist näherungsweise durch Verwendung der Ergebnisse einer elastischen Lastkombinationsbildung möglich (Schritt 1). Mit Hilfe der errechneten Momenten- und Querkraftverteilungen werden die plastischen Längen sukzessiv für alle maßgebenden Lastkombinationen bestimmt. Der sich ergebende minimale Wert wird der nichtlinearen Berechnung zugrunde gelegt. Diese Verfahrensweise liefert im allgemeinen konservative Ergebnisse, da sich die Momentengradienten im Falle einer Umlagerung nicht maßgeblich ändern.

Nachweis der Durchbiegungen

In E DIN 1045-1 werden Richtwerte für die Begrenzung der Durchbiegungen von Balken in Abhängigkeit von der Stützweite l_{eff} und spezifischen Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit angegeben, z.B. mit

$$zul\ u = l_{eff} / 250. \quad (4-8)$$

Die Durchbiegungen können näherungsweise mit dem Ansatz

$$u = u'' - \frac{M_{cr}}{M} (u'' - u') \quad (4-9)$$

nach *Grasser* [81] ermittelt werden, wobei u^I und u^{II} die Werte der Durchbiegungen für den reinen Zustand I bzw. Zustand II sind. Die Werte der Steifigkeiten und des Reißbildungsmomentes M_{cr} werden vorab mit Hilfe von Querschnittsanalyseprogrammen bestimmt. Die Werte der Durchbiegungen u_I für den Zustand I können Schritt 1 dieser Bemessungskonzeption entnommen werden. Für die Grenzzustandsanalyse werden die Steifigkeitswerte des Zustandes II angesetzt.

Zur Simulation der Steifigkeitsänderung bei Modifikation von Plastizitätsbedingungen

Untersuchungen zeigen, daß der elastische Ast der Querschnittskennlinie im Zustand II sehr gut linear angenähert werden kann und somit die Steifigkeit als wesentliche Strukturgröße zur Beschreibung des Querschnittsverhaltens bis zum Fließen der Bewehrung verbleibt. Zur näherungsweisen Beschreibung einer Steifigkeitsfunktion in Abhängigkeit vom Fließmoment werden die Koeffizienten einer Polynomfunktion mit Hilfe der in Schritt 2 beschriebenen Parameterstudien bestimmt. Die Biegesteifigkeit EI kann näherungsweise als linear abhängig vom Fließmoment M in die Berechnungsmodelle (analog Tafel 3.9) eingeführt werden. Höhere Ansätze sind selten notwendig. Es wird die Verwendung folgender linearer Näherungsbeziehung vorgeschlagen:

$$EI(r) = EI_0 + A_{EI}M \quad (4-10)$$

mit

$$EI_0 = EI_1 - \frac{EI_2 - EI_1}{M_2 - M_1} M_1 \quad A_{EI} = \frac{EI_2 - EI_1}{M_2 - M_1} \quad (4-11)$$

Die Steifigkeitswerte EI_1 , EI_2 ergeben sich an den Stützstellen der zugrunde liegenden Steifigkeitsfunktion für zwei Fließmomentenwerte M_1 und M_2 .

Zur Einbindung von Sicherheitskonzepten

Zur Vermeidung genereller probabilistischer Untersuchungen in der Tragwerksplanung wird in Normenwerken die Anwendung deterministischer Verfahren auf der Basis von Bemessungsparametern (mit Sicherheitsfaktoren veränderte charakteristische Größen) empfohlen. In der Literatur werden unterschiedliche Konzepte für den Ansatzpunkt von Sicherheitsbeiwerten des Widerstandes für nichtlineare Berechnungen diskutiert, die sich

im wesentlichen anhand der zugrunde liegenden Abstraktionsebene (siehe Tafel 1.1), z.B. für Stabtragwerke

- Faserebene (z.B. EC2 [32], E DIN 1045-1 [31])
- Querschnittsebene (z.B. E DIN 1045-1 Abschnitt 8.5.1 (7), *Graubner et. al* [82])
- Tragwerksebene (z.B. *Eibl et.al.* [83, 84], *Nguyen Viet Tue et. al.* [85])

einteilen lassen. Die Unterschiede zwischen den Konzepten ergeben sich aus der Gestaltung der Transformationsschnittstellen zwischen den Betrachtungsebenen (konsistente, nichtkonsistente Konzepte). Gemeinsam ist allen Konzepten, daß der stochastische Charakter mancher Einflüsse wie z.B. aus der Art der Modellbildung nur indirekt beachtet werden kann, indem eine Kopplung des Sicherheitskonzeptes an konkrete Rahmenbedingungen vorgesehen wird.

Alle genannten Konzepte lassen sich in die Bemessungsstrategie dieser Arbeit integrieren. Für Untersuchungen an Tragwerksmodellen ist es jedoch günstig, wenn die materialbeschreibenden Systemmatrizen unabhängig vom untersuchten Grenzzustand (Tragfähigkeit, Gebrauchstauglichkeit) aufgestellt werden können, d.h. auf den gleichen Annahmen zum Materialverhalten beruhen, z.B. auf der Basis von Mittelwerten. Diese Anforderungen erfüllen konsistente Konzepte mit variablen Teilsicherheitsfaktoren, die sich z.Z. in der Diskussion befinden [82]. Für die Beispielrechnungen in dieser Arbeit wurde der Ansatz nach E DIN 1045-1 Abschnitt 8.5.1 [31] mit rechnerischen Querschnittskennwerten (Teilsicherheitsfaktor γ_R) verwendet.

Zur Festlegung der Ausgangswerte der Widerstandsverteilung

Neben der Beschreibung kritischer Zustände ermöglicht die Verwendung deformationsbasierter Grenzkriterien auch einen methodischen Wechsel in der Grenzzustandsanalyse, der vorteilhaft für die Formulierung von Bemessungsaufgaben genutzt werden kann. Bei Verwendung von klassischen Modellen zur Grenzzustandsanalyse besteht der Nachteil, daß sinnvolle Berechnungen an die Gewährleistung einer hinreichenden Umschließung des Bereichs der elastischen Antworten durch Plastizitätsbedingungen gebunden sind. In der Regel ist es dagegen wünschenswert, wenn lediglich im Bereich potentieller Fließgelenke Plastizitätsbedingungen ausgewiesen werden müssen (z.B. nur in den Riegeln einer Stahlbetonkonstruktion). Die klassischen Modelle versagen, wenn sich infolge dieser unvollständig gegebenen Widerstandsverteilung kein kinematischer Mechanismus ausbilden kann. Dagegen wird durch Verwendung von Deformationskriterien auch für derartige Auf-

gabenstellungen eine sinnvolle Analyse möglich, da das Erreichen der Grenzdeformation an einer Stelle gleichzeitig den Grenzzustand des gesamten Tragwerkes charakterisiert. Mit diesem Ansatz wird eine Analyse möglich, die lediglich von Grenzdeformationen als maßgebenden Kriterien des Grenzzustandes ausgeht.

b.) Berechnung und Ergebnisauswertung

In diesem Schritt wird die eigentliche nichtlineare Berechnung durchgeführt und die zuvor formulierte nichtlineare Bemessungsaufgabe mit numerischen Mitteln gelöst. Bei Anwendung von Optimierungsalgorithmen, die die gestellte Aufgabe in der Form eines Kuhn-Tucker-Problems lösen, erhält man im Ergebnis die Werte der

- Zielfunktion
- Optimierungsvariablen
- Lagrange-Multiplikatoren.

Diese Werte können als Strukturvariablen identifiziert werden, wobei über die Lagrange-Multiplikatoren der zur jeweiligen Nebenbedingung zugehörige duale Variablenraum erschlossen wird. Für die Bemessung von rahmenartigen Tragwerken sind vor allem die Schnittgrößenverteilungen von Interesse. Bei Verwendung von reduzierten Optimierungsschemata nach Tafel 3.5 sind nur Verformungsgrößen direkt Bestandteil des Vektors der Optimierungsvariablen. Die Schnittgrößen müssen in diesem Fall nachträglich nach Abschnitt 3.3.4 errechnet werden.

Bei Vernachlässigung des Lastfolgeinflusses werden unter Verwendung von Optimierungsschemata nach Tafel 3.5 bereits die Gesamtschnittgrößen im deformationsbasierten Grenzzustand ermittelt. Dies gilt ebenfalls bei Anwendung des Konzeptes der gekoppelten plastischen Antwort bei Berechnungen von adaptiven Tragwerken. Lediglich bei Anwendung des Konzeptes des superponierten Restzustandes werden im Ergebnis die Restschnitt- und Restverformungsgrößen erhalten. In diesem Fall kann die Berechnung der Gesamtantwort (Umhüllende) durch Linearkombination der elastischen Antwort nach Schritt 1 bzw. 2 mit den ermittelten Restwerten der Schnittgrößen, Verzerrungen und Verformungen vorgenommen werden.

4.2.4.4 Schritt 4 Konstruktive Durchbildung

Die zuvor ermittelten Bemessungskenngrößen werden zur konstruktiven Durchbildung der Stahlbetonkonstruktionen herangezogen. Dieser Prozeß wird weitgehend durch die Normen geregelt. Für statisch beanspruchte Tragwerke werden in den aktuellen Normenwerken für die Auslegung der inelastischen Tragwerksbereiche keine gesonderten konstruktiven Maßnahmen vorgesehen. Die Auslegung des gesamten Tragwerkes kann mit herkömmlichen Methoden durchgeführt werden. Sind in kritischen Situationen ganze Folgen extremer Einwirkungen zu erwarten, werden unter Umständen erweiterte konstruktive Maßnahmen notwendig. Wichtige Anhaltspunkte zur Behandlung dieses Problemkreises können die Normenwerke des Erdbebeningenieurwesens (EC8 [57]) geben.

Für die konstruktive Durchbildung wird aus der Betrachtung am Tragwerk in die Modellebene der Querschnitte gewechselt, wobei die Bemessungsschnittgrößen in geometrische bzw. stoffliche Größen des Verbundquerschnittes transformiert werden. Bei Anwendung eines konsistenten Sicherheitskonzeptes können direkt die in Schritt 2 (Querschnittsanalyse) ermittelten funktionellen Zusammenhänge zwischen Bewehrungsfläche und Bemessungsschnittgrößen herangezogen werden.

4.2.5 Anwendung des Bemessungskonzeptes auf extrem dynamisch beanspruchte Tragwerke

Die Inanspruchnahme inelastischer Verformungen bei der Bemessung dynamisch beanspruchter Tragwerke bezweckt neben der Erschließung von Tragreserven vornehmlich eine Reduzierung des Energieniveaus durch Dissipation. Die gezielte Nutzung dieses Potentials bietet eine wirtschaftlich interessante Alternative zu aktiv oder passiv wirkenden Dämpfungs- und Isolationstechnologien. Für die Bemessung elastisch-plastischer Tragwerke empfiehlt sich die Anwendung der Methode der Kapazitätsbemessung nach *Paulay/Bachmann* [58]. Ursprung und Haupteinsatzgebiet dieser Methode ist die Bemessung von seismisch erregten Tragwerken. Sie ist die Basis der aktuellen Normentwicklung (z.B. EC8 [57]) im Erdbebeningenieurwesen. Die Methode läßt sich sinngemäß auf Untersuchungen von Tragwerken übertragen, die durch andere dynamische Beanspruchungen angeregt werden, wie z.B. durch Kräfte aus exzentrisch laufenden Maschinenteilen.

Bei der Führung von Nachweisen nach der Methode der Kapazitätsbemessung werden folgende Prinzipien zugrunde gelegt:

- Ausnutzung des plastischen Potentials des Tragwerkes zur Dissipation von Energie

- Sicherung eines geeigneten Tragwerksverhaltens durch gezielte Ausweisung potentiell inelastischer Bereiche
- Konstruktive Ausstattung der potentiell inelastischen Bereiche zur Entwicklung hoher Dissipationsleistung unter Aufrechterhaltung der Querschnittskapazität
- Sicherung der elastisch verbleibenden Bereiche des Tragwerkes.

Die über Dissipation erzielbare Absenkung des Schnittgrößenniveaus ist abhängig von den Duktilitätseigenschaften der Querschnitte bzw. des Gesamttragwerkes. Die Vorgabe geeigneter konstruktiver Maßnahmen zur Erzielung und Sicherung dieser Eigenschaften ist untrennbarer Bestandteil der in dieser Arbeit vorgestellten Methode.

Bei Anwendung der Kapazitätsbemessung werden begrenzte alternierende oder progressive Plastizierungen zur Erzielung einer hohen Dissipationsleistung in den Fließgelenken zugelassen. Mit dieser hysteretischen Beanspruchung werden zwei Wirkungen erzielt:

- Die Tragfähigkeit wird mit einem niedrigen Tragwiderstand unter Sicherung einer hohen Verformungsfähigkeit erzielt.
- Es sind Akkumulationen von Schädigungen im Tragwerk zu verzeichnen, d.h. es muß mit einem entsprechend hohem Schadensausmaß (starke Rißbildung, große Verformungen usw.) gerechnet werden.

Der zuletzt aufgeführte Sachverhalt verdeutlicht, daß bei der Planung von Tragwerken nach der Methode der Kapazitätsbemessung Entscheidungen zur Akzeptanz und zur Zulässigkeit plastischer Verformungen nicht nur von Aspekten der Tragfähigkeit, sondern auch von den Konsequenzen plastischer Beanspruchungen bestimmt werden. Für bedeutende Bauwerke wie z.B. Krankenhäuser, Versorgungseinrichtungen oder Hochtechnologiezentren müssen demzufolge zusätzliche Forderungen bei der Planung in Betracht gezogen werden. Dies sind:

- Sicherung der Tragfähigkeit unter erhöhter Zyklenzahl (z.B. Nachbebeneinwirkung)
- Garantie einer definierten Mindestgebrauchstauglichkeit während und nach der Lasteinwirkung (Beschränkung von Verformungen und Deformationen für gefährdete Tragwerksbereiche z.B. im Bereich von Versorgungsleitungen)
- Beschränkung des zu erwartenden Aufwandes für die Revitalisierung geschädigter Tragwerksbereiche.

EC8 wird durch die Einführung von Bedeutungskategorien und zugeordneten pauschalen Bedeutungsbeiwerten diesen Anforderungen ansatzweise gerecht. Sie erlauben jedoch

nur sehr unscharfe Prognosen auf das zu erwartende Verhalten des Tragwerkes. Zur Einschätzung der Eigenschaften des Tragwerkes müssen die Schädigungsmechanismen am Tragwerk wirklichkeitsnah simuliert und entsprechende Nachweise geführt werden. Die klassische Kapazitätsbemessung sieht jedoch detaillierte Nachweisführungen nicht vor. In der Literatur werden deshalb weiterführende Konzepte vorgestellt, die eine Prüfung der Wirksamkeit konstruktiver Maßnahmen anhand von Berechnungsmodellen ermöglichen. Diese Methoden basieren im Regelfall auf nichtlinearen Zeitintegrationsverfahren, die mit Modulen zur expliziten Duktilitätsbilanz gekoppelt werden [86-88].

Alternativ zu Zeitverlaufsuntersuchungen wurde in Anlehnung an die Prinzipien der Kapazitätsbemessung von *Schüler* eine Bemessungsstrategie auf der Basis der adaptiven Grenzlastanalyse empfohlen [56]. Dieser Formulierung liegt eine Kombination aus adaptivem Grenzzustandsmodell und nachgeschalteter Duktilitätsbilanz zugrunde. Das Ziel der Anwendung dieses Bemessungskonzeptes ist die Begrenzung des Schädigungsniveaus im Tragwerk. Durch die explizite Führung der Duktilitätsbilanz kann jedoch im Rahmen dieses Modells auf kritische Deformationszustände oberhalb des adaptiven Grenzwiderstandsniveaus im Sinne einer gezielten Widerstandsanpassung nicht reagiert werden. Mit der Ersetzung des rein adaptiven Grenzzustandsmodells im *Schülerschen* Konzept durch Modelle auf der Basis deformationsbasierter Kriterien nach Abschnitt 3 wird diese Funktionalität ergänzt. Damit ergibt sich ein erweitertes Anwendungsfeld für Verfahren mit Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens.

Analog zum *Schülerschen* Verfahren bieten sich zur Lösung dynamischer Grenzzustandsaufgaben Berechnungsmodelle nach dem Konzept des superponierten Restzustandes an. In Abschnitt 3.3.5.1 wurden bereits geeignete Lösungsstrategien auf der Basis der nichtlinearen Optimierung für die Untersuchung mit deformationsbasierten Grenzzustandsmodellen vorgestellt. Die Anwendung dieses Grenzzustandsmodells ist für Untersuchungen statisch und dynamisch beanspruchter Tragwerke gleichermaßen geeignet und führt zu einem nahezu identischen Bemessungsablauf. Im folgenden werden deshalb lediglich die Ergänzungen und Abweichungen zum Bemessungskonzept für statisch beanspruchte Strukturen aus Abschnitt 4.2.4 beschrieben. Die Darstellung beschränkt sich auf Bemessungsvorgänge für seismische Anregungen.

Zu Schritt 1 Modellbildung und Berechnung unter Annahme elastischen Verhaltens

Falls keine standortspezifischen Daten zur Verfügung stehen, können seismische Einwirkungen durch Auswertung von Normspektren nach EC8 [57] abgeschätzt werden. Zu be-

achten ist, daß bei der Ermittlung der Beanspruchung keine duktilitätsbezogenen Reduktionsfaktoren angesetzt werden dürfen. Die Berechnung der elastischen Umhüllungsreaktionen kann mit Hilfe von Antwortspektren- oder Ersatzkraftverfahren durchgeführt werden. Alternativ kann die Antwort des Systems mit Hilfe von Zeitverlaufsuntersuchungen ermittelt werden [89-91], für die bei Bedarf künstliche Zeitverläufe aus elastischen Normspektren erzeugt werden können [57].

Zu Schritt 2 Vorbemessung und Systemanpassung

Duktilitätsbilanzen werden im Erdbebeningenieurwesen anhand unterschiedlicher Modelle aufgestellt. Einfache Untersuchungen werden an Tragwerksmodellen über die Bewertung von Verformungen (Systemduktilität, Geschoßduktilität) oder an Bauelementen (z.B. Rotationsduktilität) durchgeführt [92]. Im Rahmen des Bemessungskonzeptes dieser Arbeit besteht die Möglichkeit zur Berücksichtigung von Kennwerten des Querschnittes in Form polynomialer Näherungsfunktionen. Diese Option wird bevorzugt für die Durchführung von Duktilitätsbilanzen genutzt, da durch Bewertung von Querschnittsdeformationen lokale Defizite besser erfaßt werden können, als dies durch Bewertung von Verschiebungen möglich ist.

Da die Schädigungsmechanismen statisch und dynamisch beanspruchter Tragwerke bei Sicherung des Einspielens nahezu identisch sind, kann näherungsweise auf gleiche Ansätze zur Ermittlung der Querschnittssteifigkeiten und –duktilitätsmaße zurückgegriffen werden. Die in Abschnitt 4.2.4.2 empfohlenen Methoden zur Ermittlung von Querschnittskenngrößen finden somit analog Anwendung. Bei der Festlegung von Grenzwerten können unterschiedliche Schädigungsgrade berücksichtigt werden z.B. zugeordnet zu den Duktilitätsklassen des EC8. Methodisch kann hierbei auf die umfangreichen Arbeiten zur Schadensindikation bei dynamisch beanspruchten Tragwerken zurückgegriffen werden (z.B. [93-95]).

Zu Schritt 3 Formulierung und Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe

Als Lösungsstrategie empfiehlt sich die Anwendung des Konzeptes des superponierten Restzustandes. Die zugehörige Grenzwiderstandsaufgabe wird mit Methoden der nichtlinearen Optimierung gelöst. Mit Anwendung dieses Konzeptes ist zu beachten, daß bei großen Abweichungen in den Steifigkeitsannahmen bei der Berechnung der elastischen

Teilantwort und der Restanteile eine Anpassung durch Wiederholung von Schritt 2c.), Schritt 2d.) und Schritt 3 vorzusehen ist. Die Bemessungsschnittgrößen werden durch Superposition von Rest- und elastischem Umhüllungszustand aus Schritt 1 erhalten.

Zu Schritt 4 Konstruktive Durchbildung

Die Überführung der Bemessungsschnittgrößen in eine konstruktive Lösung wird unter Beachtung der Regeln der Kapazitätsbemessung [57] durchgeführt. Dabei werden unterschiedliche Anforderungen an die Durchbildung der potentiell plastischen sowie der elastisch verbleibenden Tragwerksbereiche gestellt. Die endgültige Zuordnung zu Duktilitätsklassen kann anhand der Ergebnisse der Grenzzustandsanalyse vorgenommen werden. Hierbei ist der Umlagerungsgrad und die Duktilitätsnachfrage im Querschnitt zugrunde zu legen. Für weiterführende Angaben zur konstruktiven Durchbildung seismisch beanspruchter Tragwerke wird auf die Normenwerke und die zahlreiche Fachliteratur verwiesen, z.B. [57, 58, 95].

4.3 Anwendungsbeispiele

4.3.1 Statisch beanspruchtes Tragwerk

Die Anwendung des Bemessungskonzeptes nach Abschnitt 4.2.4 wird für ein statisch beanspruchtes Tragwerk demonstriert. Die Bemessung basiert auf dem Normenentwurf E DIN 1045-1 (11/1998) [31].

Für das Stützen-Riegel-System eines mehrgeschossigen Gebäudes aus Stahlbeton ist eine Absenkung und Angleichung des Stützmomentniveaus der Riegel vorzunehmen mit dem Ziel, eine technologisch günstigere Bewehrungsverteilung im Tragwerk zu erreichen. Folgende Aufgabenstellung ist gegeben:

- Durchführung einer begrenzten Schnittgrößenumlagerung nach E DIN 1045-1 Abschnitt 8.4.2 an den Stützbereichen der Tragwerksriegel bis zum Erreichen der Grenzrotation in den plastischen Gelenken (Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit, nachfolgend mit Index GZT).
- Parallele Führung des Nachweises zur Begrenzung der Durchbiegung im Dachgeschoß nach E DIN 1045-1 Abschnitt 11.2.1(9) (Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, nachfolgend mit Index GZG).

Um eine Gegenüberstellung unterschiedlicher Bemessungsansätze zu ermöglichen, wird die Aufgabe in folgenden Varianten bearbeitet:

- | | |
|--------------|---|
| Variante 1: | Traditionelle Ermittlung der elastischen Schnittgrößen mit den Querschnittswerten des ungerissenen Zustands |
| Variante 2: | Schnittgrößenumlagerung mit Sicherung der Tragwerksadaption mit Führung des Durchbiegungsnachweises |
| Variante 3a: | Schnittgrößenumlagerung ohne Erfassung von Lastfolgeeffekten ohne Einbeziehung des Durchbiegungsnachweises |
| Variante 3b: | Schnittgrößenumlagerung ohne Erfassung von Lastfolgeeffekten mit Führung des Durchbiegungsnachweises |

In den Berechnungsmodellen wird das Sicherheitskonzept mit rechnerischen Querschnittskennwerten nach E DIN 1045-1 Abschnitt 8.5.1 verwendet. Die Bemessung wird nach der im Abschnitt 4.2.4 erläuterten Schrittfolge durchgeführt.

Schritt 1: Modellbildung und Berechnung unter Annahme elastischen Verhaltens

Für die Untersuchung wird ein ebener Innenrahmen aus dem Gesamttragwerk herausgelöst, dessen statisches System in Abb. 4.6 gegeben ist. Es wird vereinbart, daß Modifikationen des aufnehmbaren Momentes während der Berechnung nur durch Veränderungen der Bewehrungsmenge erreicht werden können. Alle anderen geometrischen und stofflichen Eigenschaften werden für alle Varianten in gleicher Größe angesetzt.

Das Gebäude besteht aus einem regelmäßigen Stützen-Riegel-System in Ortbetonbauweise, das über einachsrig gespannte durchlaufende Deckenplatten mit aussteifenden Kernen verbunden ist. Es wird somit von einem unverschieblichen System ausgegangen. Die einzelnen Rahmenebenen sind jeweils im Raster von 5.32m voneinander entfernt.

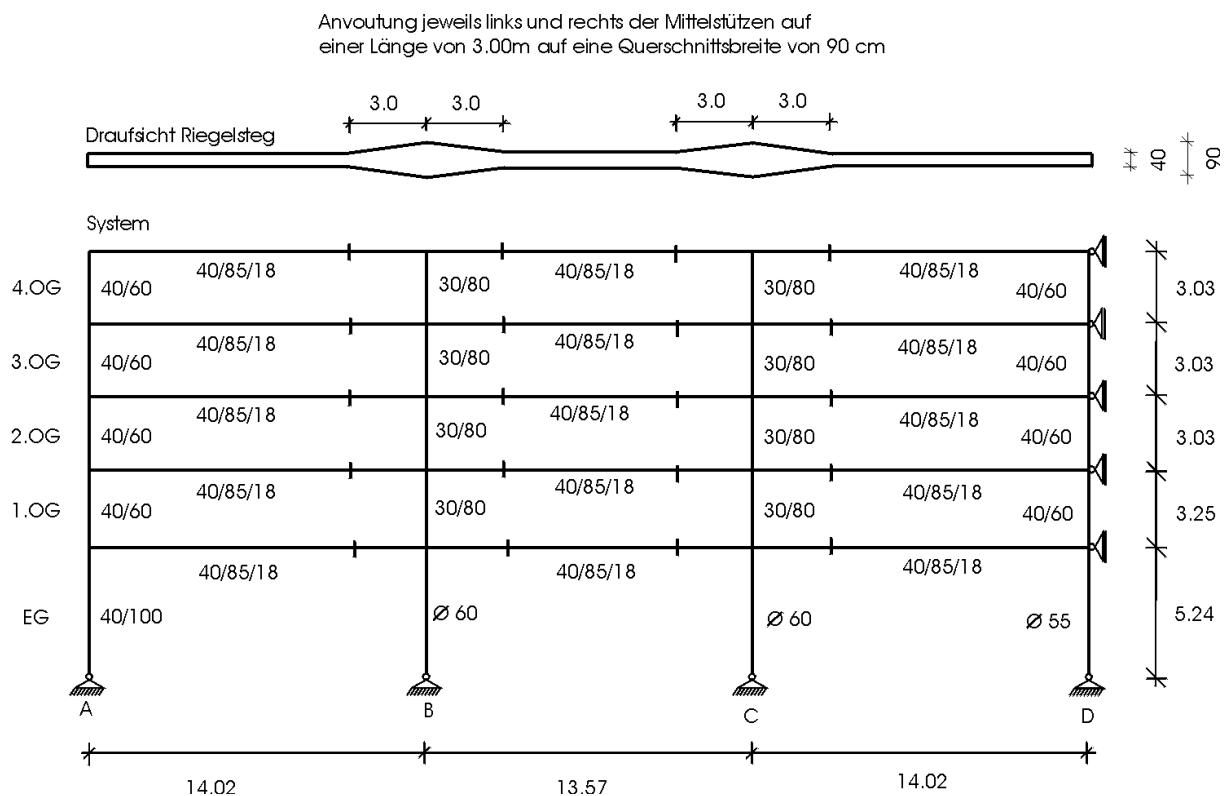


Abb. 4.6 System und Geometrie

Ein Überblick über die verwendeten Querschnitte gibt Abb. 4.7. Die Riegel werden als Plattenbalken, die Stützen als Rechteck- bzw. Kreisquerschnitte ausgebildet. Alle Innenstützen werden als Pendelstützen idealisiert.

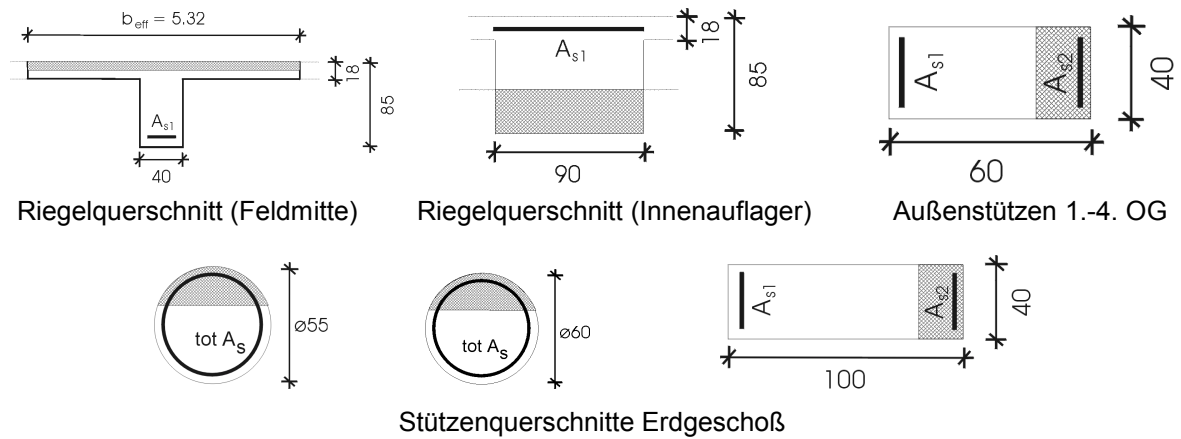


Abb. 4.7 Querschnitte

Die charakteristischen Werte der ständigen und veränderlichen Lastanteile enthalten die Abb. 4.8 und 4.9. Die Lasten aus der Gebäudeverkleidung, die Attiken und Auskragungen werden über äquivalente Einzellasten und Momente erfaßt. Insgesamt werden für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit 16 Lastfälle untersucht, die nach der Kombinationsregel

$$1.35 G_{ki} + 1.5 Q_{ki} \tag{4-12}$$

zu überlagern sind. Entsprechend gilt für den Nachweis der Verformungen unter Berücksichtigung quasi-ständiger Lastanteile

$$G_{ki} + 0.5 Q_{ki} . \tag{4-13}$$

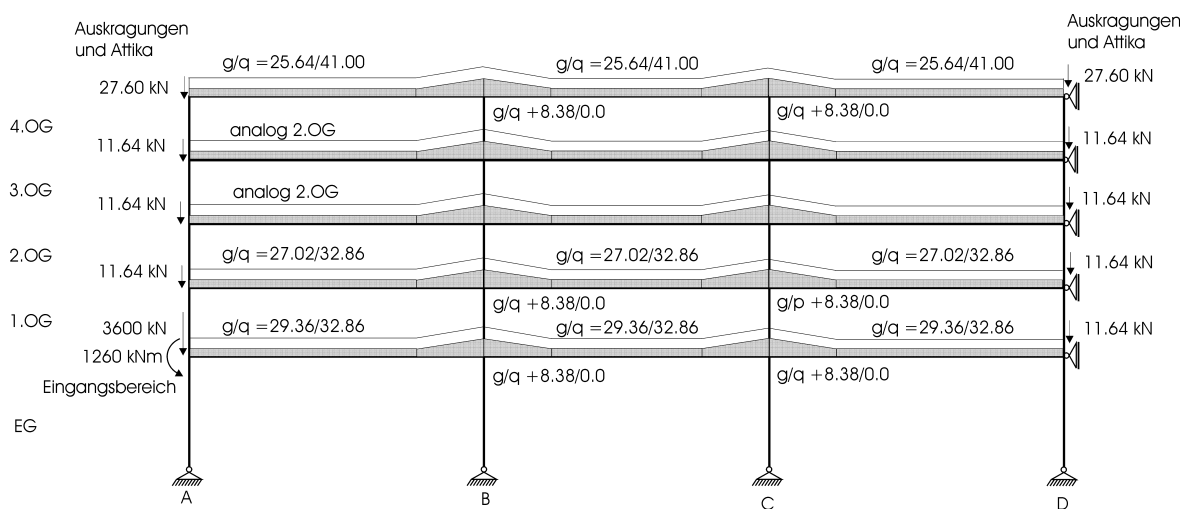


Abb. 4.8 Charakteristische Werte der Riegelbelastung und Einzellasten (g= ständige Lastanteile [kN/m], q= veränderliche Lastanteile [kN/m])

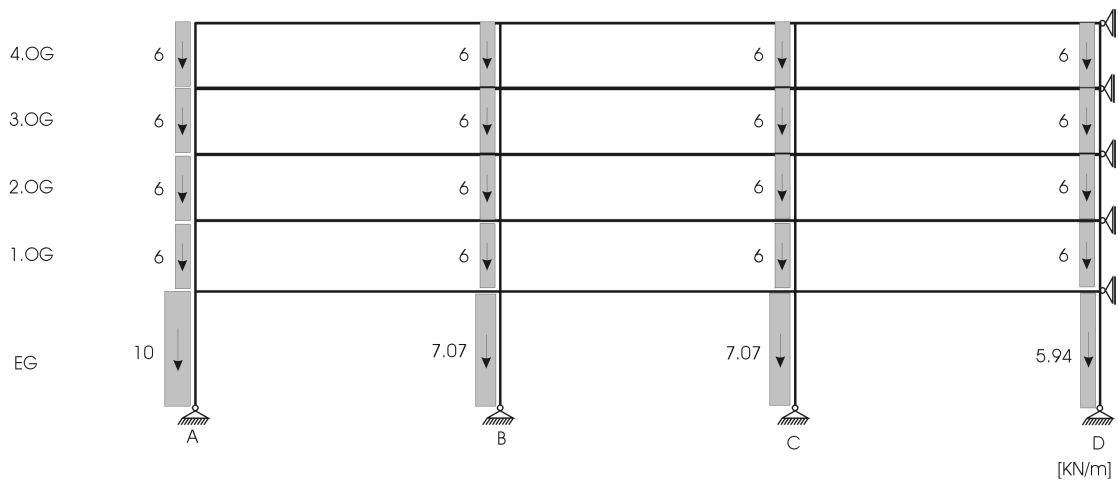


Abb. 4.9 Charakteristische Werte der Stützeigenlasten

Variante 1: Linear elastische Berechnung im ungerissenen Zustand

Unter Ansatz der Steifigkeiten des Zustandes I wird eine lineare Berechnung vorgenommen. In Abb. 4.10 und 4.11 sind die umhüllenden Reaktionen für Normalkraft und Biegemoment angegeben. Diese Werte können als Grundlage für eine traditionelle Bemessung auf der Grundlage elastischer Schnittgrößen dienen.

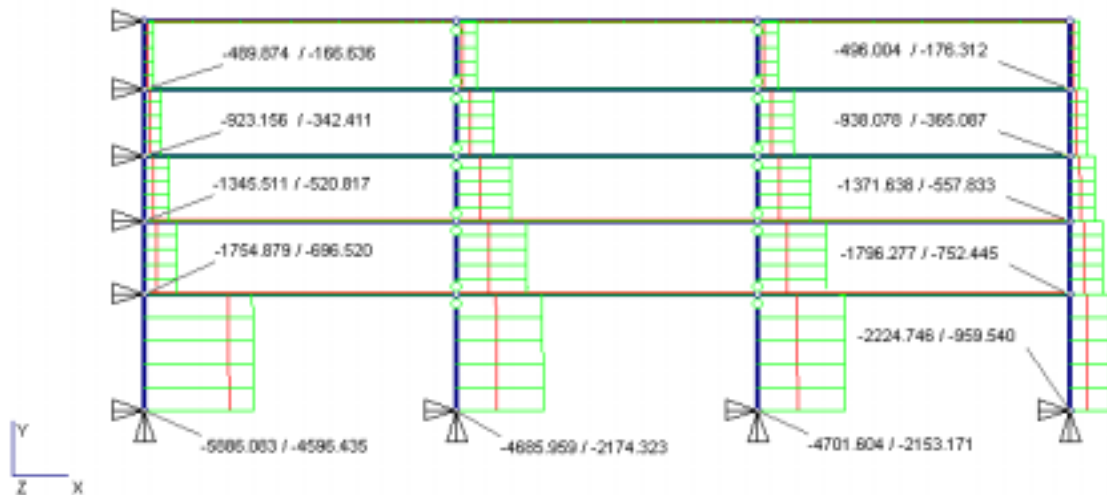


Abb 4.10 Umhüllende der linearen Normalkraftverteilung (Bemessungswerte) [kN]

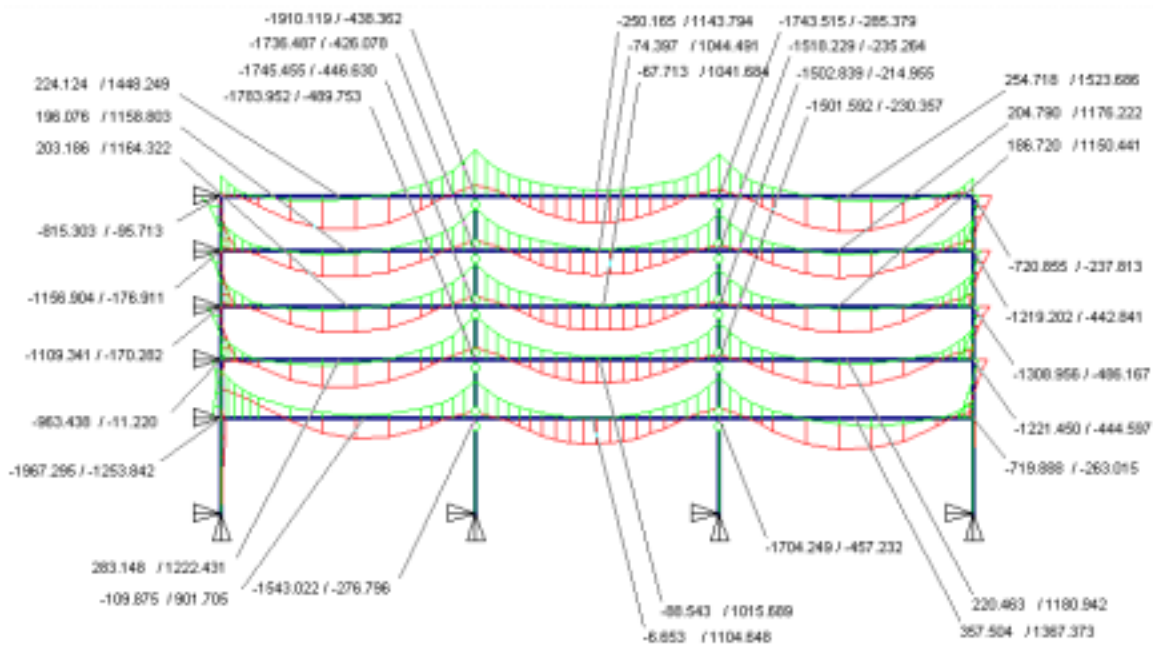


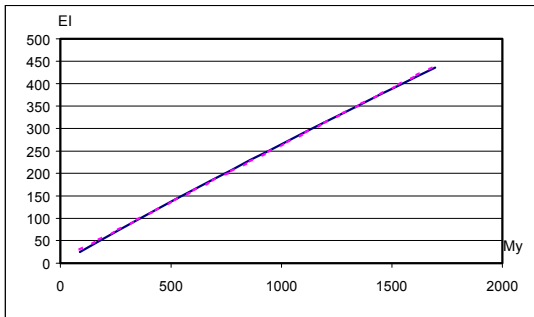
Abb. 4.11 Umhüllung der linearen Biegemomentenverteilung Variante 1 (Bemessungswerte, Riegelmomente beschriftet) [kNm]

Schritt 2: Vorbemessung und Systemanpassung

Mit den Werten der elastischen Berechnung wird eine Vorkonfiguration nach Abschnitt 4.2.4.2 durchgeführt. Entsprechend dem Momentendiagramm (Abb. 4.11) wird eine Festlegung von Abschnitten gleicher Bewehrungswahl vorgenommen und das Berechnungsmodell durch Veränderung der vorhandenen Elementierung angepaßt. In den Riegefeldern werden dabei je ein Feld- und zwei Stützbereiche eingerichtet. Die Stützen werden einheitlich mit doppelter Bewehrung ausgeführt.

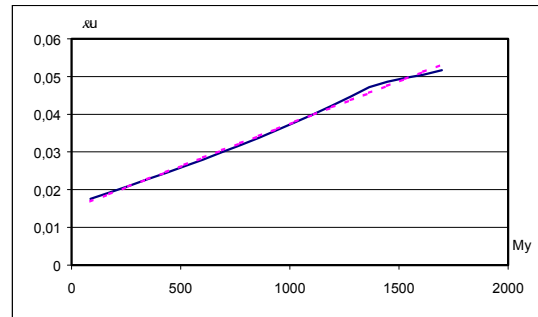
Mit Hilfe einer Querschnittsanalyse werden funktionelle Zusammenhänge zwischen dem Fließmoment und wesentlichen Parametern wie z.B. der Biegesteifigkeit, der Höhe der Druckzone im Versagenszustand, der maximalen plastische Krümmung sowie dem Bruchmoment gewonnen. In die Berechnung wird die Normalkraftverteilung nach Abb. 4.10 einbezogen. Für ausgewählte Parameter werden polynomiale Näherungsfunktionen gebildet. Beispielhaft sind die Ergebnisse einer Querschnittsparameterstudie für den Riegelquerschnitt in Tafel 4.3 zusammengestellt. Anhand der Diagramme kann festgestellt werden, daß mit einer linearen Beschreibung des Zusammenhangs von Steifigkeit und Fließmoment sowie der Vorgabe eines konstanten plastischen Grenzkrümmungswertes eine ausreichende Abbildungsgenauigkeit gegeben ist. Auch für die anderen Querschnitte werden lineare bzw. konstante Approximationen ermittelt.

Tafel 4.3 Ergebnis Querschnittsanalyse für Riegelquerschnitt (Feldmitte)



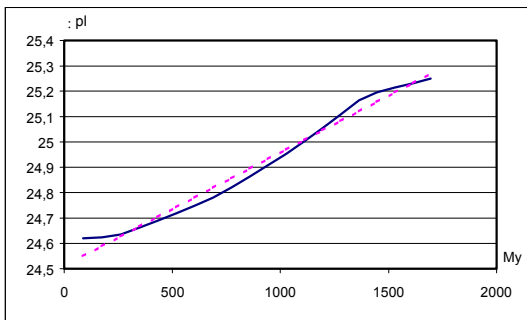
Beziehung Fließmoment zu Steifigkeit

Polynomgrad	Polynomkoeffizienten
1	7,913465579
2	0,25470672



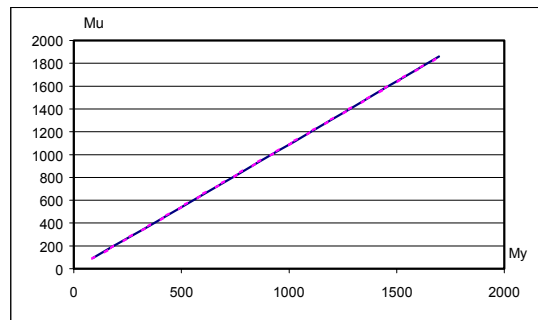
Beziehung Fließmoment zu bezog. Druckzonenhöhe

Polynomgrad	Polynomkoeffizienten
1	0,014955391
2	2,2495E-05



Beziehung Fließmoment zu plastischer Krümmung

Polynomgrad	Polynomkoeffizienten
1	24,51057135
2	0,000447472



Beziehung Fließmoment zu Bruchmoment

Polynomgrad	Polynomkoeffizienten
1	-8,425694773
2	1,099619795

Schritt 3: Formulierung und Lösung der Bemessungsaufgabe

Betrachtet man Abb. 4.11, so wird deutlich, daß bei Zugrundelegung dieser elastischen Momentenverteilung unterschiedliche Bewehrungsverteilungen in den Etagen zu erwarten sind. Durch eine begrenzte Umlagerung der Stützmomente an den Innenstützen läßt sich eine Angleichung und Reduktion der Bemessungsmomente erzielen. Zu diesem Zweck werden im Bereich der Riegelinnenaufleger Plastizitätsbedingungen im Berechnungsmodell formuliert. Die Startwerte für die Verteilung der Plastizitätsbedingungen werden an jeder Stützstelle gleich gewählt. Diese Werte werden mit Hilfe des Grenzwiderstandsfaktors r_d modifiziert.

In Bereichen potentieller Fließgelenke sind die plastischen Rotationen durch Festlegung von Ungleichungsbedingungen nach Abschnitt 4.2.4.3 zu kontrollieren. Die zugehörigen Rotationsgrenzwerte werden für dieses Beispiel auf der sicheren Seite liegend als konstante Parameter angegeben.

Aufgrund der großen Stützweite und niedrigen Querschnittshöhen der Riegel sind entsprechend hohe Durchbiegungen zu erwarten. Üblicherweise wird die Zulässigkeit dieser Werte im Anschluß an die Bemessung in einem separaten Rechenschritt nachgewiesen. Durch Modifikation des in Abschnitt 3.3.5.2 vorgestellten Optimierungsschemas ist es möglich, diesen Nachweis parallel zum Nachweis der Tragfähigkeit durchzuführen, so daß beide Kriterien gleichberechtigt Einfluß auf das Bemessungsergebnis nehmen können. Nach dem Konzept der rechnerischen Querschnittswerte nach E DIN 1045-1 Abschnitt 8.5.1 (7) [31] darf das Tragverhalten in beiden Fällen einheitlich auf der Basis rechnerischer Mittelwerte der Baustoffkenngrößen modelliert werden. Lediglich beim Nachweis der Tragfähigkeit müssen die Grenzwerte des Tragwiderstandes mit einem Teilsicherheitsfaktor γ_R versehen werden. Dies vereinfacht die numerische Behandlung des Problems erheblich, da die Teilsicherheitsfaktoren aus den Systemmatrizen herausgelöst werden können. Der Nachweis der Durchbiegung wird analog zu den Angaben im Abschnitt 4.2.4.3 implementiert.

Auf der Lastseite gelten für den Nachweis der Tragfähigkeit die Bedingungen der Grundkombination. Beim Nachweis der Verformungsbeschränkung werden die Lasten nach quasi-ständiger Kombinationsregel überlagert. Für die Berechnung ist eine Erweiterung des Optimierungsschemas nach Abschnitt 3.3.5.2 um einen Variablensatz vorzusehen. Er dient der Erfassung der maßgebenden Lastkombination für den Nachweis der maximalen Durchbiegung im Randfeld des 4. OG. Die Durchbiegung wird an dieser Stelle auf 25mm beschränkt (Wert wurde zu Demonstrationszwecken speziell gewählt). Zeitliche Einflüsse auf die Durchbiegungsentwicklung (z.B. Kriechen) bleiben unberücksichtigt.

Der Aufbau des Berechnungsschemas für die Lösung der nichtlinearen Optimierungsaufgabe entspricht prinzipiell denen der Schemata nach Tafel 3.7 und 3.8. Zusätzlich zu den Komponenten der Tragfähigkeitsanalyse (u_{GZT}, λ_{GZT}) werden die Kenngrößen und Bedingungen zur Verformungsanalyse eingearbeitet (u_{GZG}, λ_{GZG}). Aus Tafel 4.4 kann die Struktur der Aufgabe entnommen werden. Mit dem Index k werden die für die Stütz- und Feldmomente maßgebenden Lastkombinationen bezeichnet, deren Wirkungen im folgenden wahlweise gekoppelt (Variante 2, Untersuchung mit Sicherung der Tragwerksadaptation nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort) bzw. entkoppelt (Varianten 3a und 3b) untersucht werden. Im Vektor EI werden die rechnerischen Mittelwerte der Steifigkeiten zusammengefaßt, die sich linear abhängig zum Fließmoment verhalten.

Die notwendigen Algorithmen zur Lösung der Bemessungsaufgaben sind Bestandteil des im Rahmen der Arbeit entwickelten Programms ODYN [90], mit dem auch nachfolgende Berechnungen durchgeführt werden.

Tafel 4.4 Berechnungsschema Beispiel 1 (GZT + Verformungsnachweis (GZG)). Mit der Indizierung 1..k werden die zu untersuchenden Lastfälle gekennzeichnet. Der Aufbau der Optimierungsaufgabe folgt prinzipiell den Regeln nach Tafel 3.7 und 3.8

		$u_{GZT,1..k}$	u_{GZG}	$\lambda_{GZT,1..k}$	λ_{GZG}	EI	r_d	1		RS
ZF							1		→	Min
GGB		$AQ(EI)A$		$-AQ(EI)A_p$				$-f_{0,GZT,1..k}$	=	0
			$AQ(EI)A$		$-AQ(EI)A_p$			$-f_{0,GZG}$	=	0
PLB		$A_p Q(EI)A$		$-A_p Q(EI)A_p$			$-s_u$		≤	0
			$-A_p Q(EI)A$		$-A_p Q(EI)A_p$		$-s_u$		≤	0
KB	$\lambda_{GZT,1..k} ($	$A_p Q(EI)A$		$-A_p Q(EI)A_p$			$-s_u$) =	0
	$\lambda_{GZG} ($		$-A_p Q(EI)A$		$-A_p Q(EI)A_p$		$-s_u$) =	0
STB		$A_{EI} Q(EI)A$		$-A_{EI} Q(EI)A_p$		1		$+ A_{EI} Q(EI)A u_E - EI_0$	=	0
DB				$A_{DB,\lambda}$				$-\varepsilon_u$	≤	0
VB			$A_{VB,u}$					$-u_u$	≤	0
NNB				-1					≤	0
					-1				≤	0

Variante 2: Grenzzustandsberechnung mit Sicherung der Tragwerksadaption

Es wird angenommen, daß im Falle extremer Beanspruchung ganze Einwirkungsfolgen zu erwarten sind und demzufolge die damit verbundenen Effekte im Entwurf berücksichtigt werden müssen. Die Erfassung dieses Einflusses wird durch Verwendung von Grenzzustandsmodellen mit Sicherstellung der Adaption des Tragwerkes ermöglicht.

Die nach Durchführung der deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse vorliegende Biegemomentenverteilung kann Abb. 4.12 entnommen werden. Zugehörig kann der Restmomentenzustand Abb. 4.13 angegeben werden. Maßgebend für die Bestimmung des Grenzzustandes wird der Nachweis der plastischen Rotation im Dachriegel (Stützenreihe B). An dieser Stelle sind mit 30% die größten Momentenumlagerungen im Tragwerk zu verzeichnen. Der parallel geführte Nachweis der Verformungen wird erfüllt und demzufolge nicht maßgebend. Die maximale Durchbiegung im Dachgeschoß unter quasi-ständiger Lasteinwirkung beträgt 24mm.

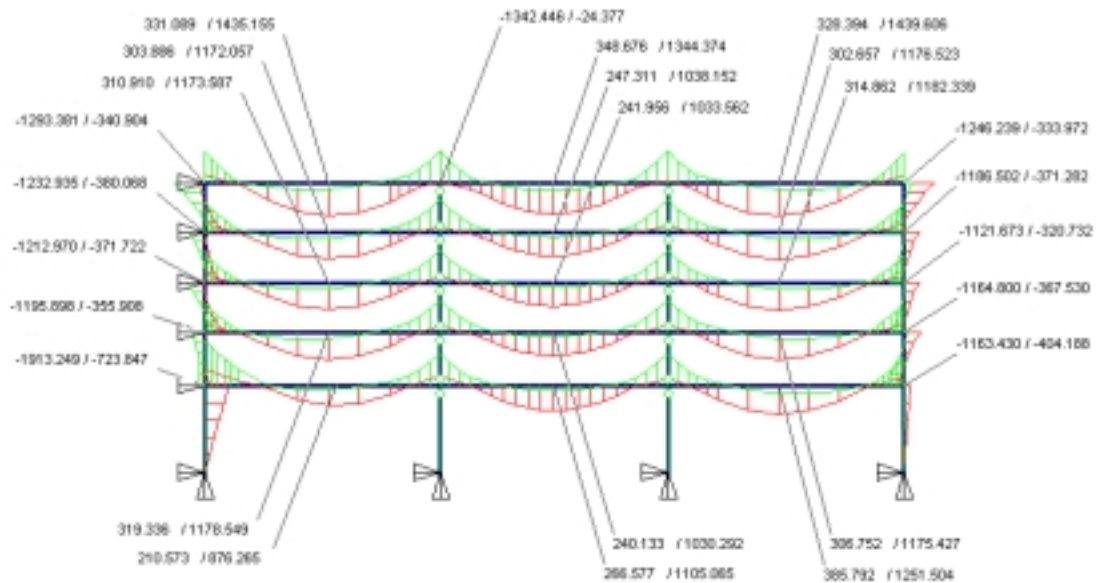


Abb. 4.12 Umhüllende der nichtlinearen Bemessungsmomente Variante 2 (Rieglmomente beschriftet) [kNm]

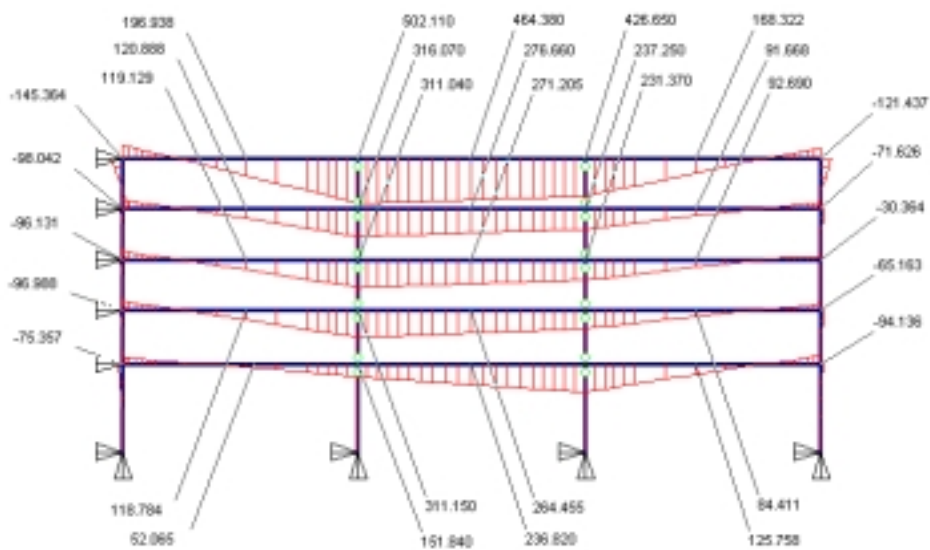


Abb. 4.13 Stabiler Restmomentenzustand (Rieglmomente beschriftet) [kNm]

Variante 3: Grenzzustandsberechnung ohne Berücksichtigung des Lastfolgeinflusses

Die Berechnung wird analog dem Konzept aus Abschnitt 3.3.4 durchgeführt. Die Entscheidung zum Einsatz dieses Konzeptes wird getroffen, da abweichend zur Variante 2 eingeschätzt werden kann, daß im ungünstigsten Fall nur eine extreme Lastsituation zu erwarten ist. In die Analyse nach dem Optimierungsschema Tafel 4.1 (ohne GZT) werden jene Lastkombinationen einbezogen, die zu den maßgebenden Stütz- bzw. Feldmomen-

ten führen. Die komplette Erfassung der maximalen Reaktionen in der Grenzzustandsaufgabe dient dabei der Berechnung der zugehörigen effektiven Steifigkeitswerte.

Variante 3a: Grenzzustandsberechnung ohne Berücksichtigung des Lastfolgeinflusses (ohne Durchbiegungsbegrenzung)

Bei Vernachlässigung des Verformungsnachweises in der nichtlinearen Berechnung werden in den plastischen Zonen Momentenwerte analog Variante 2 errechnet (Abb. 4.14). Abweichend sind lediglich die Momentenverteilungen außerhalb der Fließgelenkbereiche. Die Durchbiegung im Dachgeschoß beträgt 26mm, d.h. der Grenzwert von 25mm ist überschritten. Der Anstieg des Wertes gegenüber Variante 2 ist auf die geringeren Steifigkeiten in den Feldbereichen der Riegel zurückzuführen.

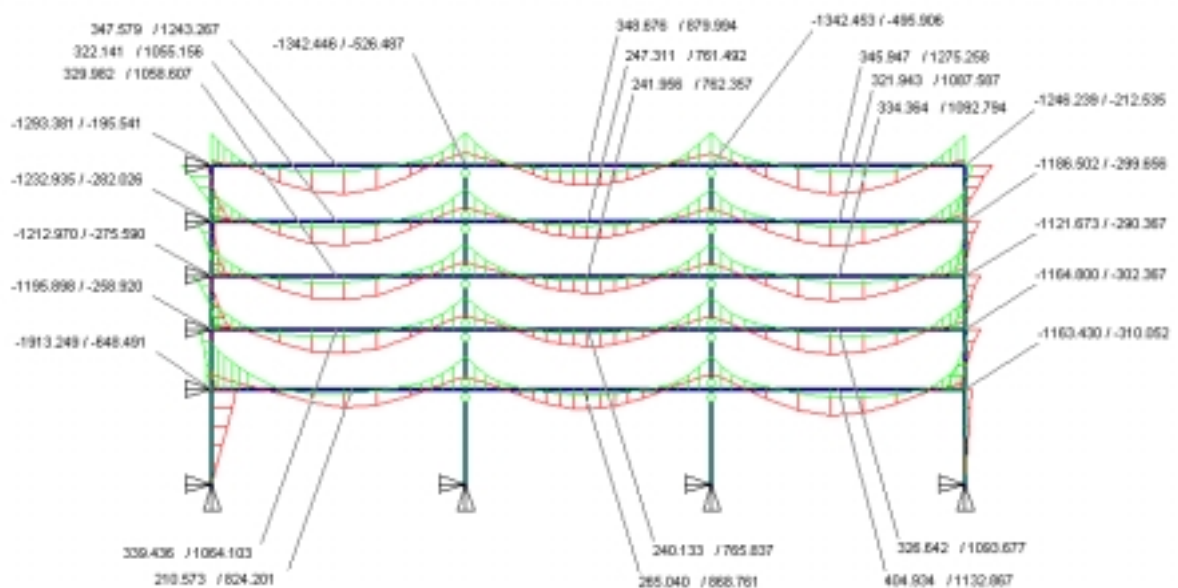


Abb. 4.14 Umhüllende der nichtlinearen Bemessungsmomente Variante 3a ohne Einbeziehung des Verformungsnachweises (Rieglmomente beschriftet) [kNm]

Variante 3b: Grenzzustandsberechnung ohne Berücksichtigung des Lastfolgeinflusses (mit Durchbiegungsbegrenzung)

Unter Einbeziehung des Verformungsnachweises in die Grenzzustandsberechnung kann direkt Einfluß auf die Bemessungsschnittgrößen genommen werden. Die Momentenumlagerung wird dabei soweit begrenzt, daß die sich ergebenden Steifigkeitsverhältnisse die

Einhaltung des Grenzwertes der Durchbiegung gewährleisten. In diesem Beispiel genügt eine geringfügige Vergrößerung der Stützmomente (Abb. 4.15). Die zugehörige Umlagerungsrate beträgt für den zugrunde liegenden Grenzzustand minimal 29% (Dachriegel, Stützenreihe B).

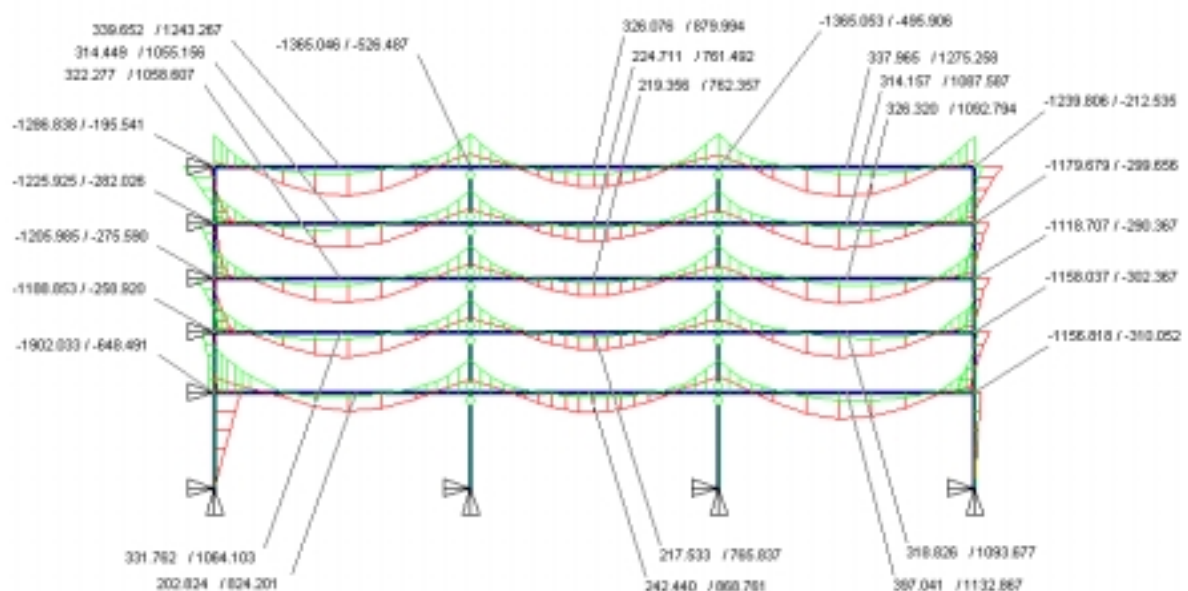


Abb. 4.15 Umhüllende der nichtlinearen Bemessungsmomente Variante 3b mit Berücksichtigung des Verformungsnachweises (Riegelmomente beschriftet) [kNm]

Die Unterschiede in den Berechnungsergebnissen der Varianten 3a und 3b sind in diesem Fall relativ gering. Sie gestatten jedoch einen Einblick in die Wirkungsweise und den Leistungsumfang des vorgeschlagenen Konzeptes.

Schritt 4: Konstruktive Durchbildung

Die Bewehrung des Tragwerkes wird je nach Variante anhand der in Abb. 4.12 bis 4.15 gegebenen Momentenzustandsfunktionen ermittelt. Empfehlenswert ist hierbei die direkte Nutzung der in Schritt 2 gewonnenen Zusammenhänge zwischen Bewehrungsmenge und Bemessungsmoment. In den Varianten 2 und 3 werden durch die Umlagerungen die Stützmomente in den Riegeln abgesenkt und angeglichen, das Bemessungsziel wird erreicht.

Die Auswirkungen der Momentenumlagerung müssen bei nachfolgenden Nachweisen und Bemessungsschritten berücksichtigt werden, insbesondere für die Bemessung der Querkraftbewehrung, für die Nachweise der Verankerung und bei Abstufungen der Längsbewehrung. Zusätzliche konstruktive Maßnahmen zur Sicherung des duktilen Verhaltens im Fließgelenkbereich sind laut E DIN 1045-1 für vorwiegend ruhend belastete Bauteile nicht durchzuführen.

Diskussion zur Variantenrechnung

Um einen tendenziellen Vergleich der Ergebnisse zu ermöglichen, werden für die untersuchten Varianten die zugehörigen Bewehrungsmengen errechnet, aufsummiert und in Tafel 4.5 prozentual gegenübergestellt. In der Zusammenstellung sind lediglich die Werte an den extremalen Stellen der Riegel und der Außenstützen des Rahmens resultierend aus Biege- und Normalkraftbeanspruchung erfaßt. Die Basis des Vergleiches bildet die Schnittgrößenverteilung der Variante 1 auf der Basis einer traditionellen linear elastischen Berechnung.

Tafel 4.5 Prozentualer Vergleich der Bewehrungsmengen (normiert auf lineare Lösung)

Bemessungsvariante	Feldebewehrung Riegel	Stützbewehrung Riegel	Außenstützenbewehrung
Variante 1: Lineare Berechnung	100 %	100 %	100 %
Variante 2: Nichtlineare Berechnung mit Sicherung der Adaption	99 %	93 %	106 %
Variante 3a: Nichtlineare Berechnung ohne Beachtung von Lastfolgeeffekten (ohne Durchbiegungsbeschränkung)	85 %	93 %	106 %
Variante 3b: Nichtlineare Berechnung ohne Beachtung von Lastfolgeeffekten (mit Durchbiegungsbeschränkung)	85 %	94 %	105 %

Die im Vergleich zu Variante 1 fast unveränderte summarische Bewehrungsmenge in den Riegefeldern der Variante 2 ist im wesentlichen auf die Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Steifigkeitsverteilungen in den Querschnitten zurückzuführen. Dieser Effekt entspricht jedoch nicht dem Regelfall, da bei Umlagerungen der Schnittgrößen einer linearen Lösung nicht nur die Verringerung der Stützmomente, sondern zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen auch entsprechende Erhöhungen der Feldmomente in den Nachbarfeldern zu erwarten sind. Im Beispiel kann dies anhand der Werte im Mittelfeld des Dachgeschosses nachvollzogen werden (Abb. 4.12), die um 17% gegenüber den Werten aus Abb. 4.11 erhöht sind.

Die Steigerung der Momente an den Außenriegeln des Dachgeschosses (um ca. 37%) und die daraus resultierende Konzentration von Bewehrung in der Rahmenecke kann Anlaß für weiterführende Untersuchungen sein. Ausgelöst wird diese Erhöhung durch die in Relation zur unmittelbaren Umgebung gestiegene Steifigkeit in diesem Bereich. Eine Möglichkeit zur Vermeidung dieses Effektes besteht in der Angabe zusätzlicher Plastizitätsbedingungen am Endauflager. Diese Bedingungen können innerhalb des Berechnungsschemas bei Bedarf auch konstant, d.h. unabhängig vom Wert des Grenzwiderstandsfaktors r_d formuliert werden. Die zugehörigen Ungleichungen des Rotationsnachweises sind zu ergänzen. Der Anstieg der Bewehrungsmenge an den Rahmenendknoten ist ebenfalls in den Untersuchungsergebnissen zur Variante 3a und 3b zu verzeichnen. Die deutliche Reduzierung der Feldbewehrung gegenüber Variante 1 und 2 resultiert aus der Tatsache, daß in die Umlagerungen lediglich die zu den extremalen Stützreaktionen zugehörigen Einzellastkombinationsantworten einbezogen werden.

Das Beispiel zeigt, daß Möglichkeiten zur Bewehrungersparnis mit dem Wechsel zu nichtlinearen Berechnungsverfahren gegeben sind. Jedoch sind diese deutlich beschränkt und können oftmals unter den Erwartungen liegen. Schnittgrößenumlagerungen bieten vor allem dann Vorteile, wenn mit ihnen Spielräume für eine Verbesserung der konstruktiven Durchbildung erschlossen werden können. Dies gilt insbesondere für Probleme, bei denen die Adaption des Tragwerkes sicherzustellen ist.

4.3.2 Seismisch beanspruchtes Tragwerk

Die im Abschnitt 4.2.5 vorgestellte Konzeption zur Lösung dynamischer Grenzzustandsprobleme unter Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens wird für die Bemessung des seismisch beanspruchten Stützen-Riegel-Systems aus Stahlbeton eines in [96] unter-

suchten Bürogebäudes angewendet. Die Bemessung folgt den Vorgaben der E DIN 1045-1 (11/1998) [31] und EC 8 [28].

Schritt 1: Modellbildung und Berechnung unter Annahme elastischen Verhaltens

Die geometrischen und stofflichen Daten werden im wesentlichen von [96] übernommen. Die Berechnung wird für Beanspruchungen in Richtung der Querachse des Tragwerkes durchgeführt. Das Gebäude ist in dieser Richtung verschieblich und wird über die Wirkung steifer Rahmen stabilisiert. Da es sich um ein regelmäßiges System handelt, kann die Untersuchung auf eine Ebene des Rahmens reduziert werden.

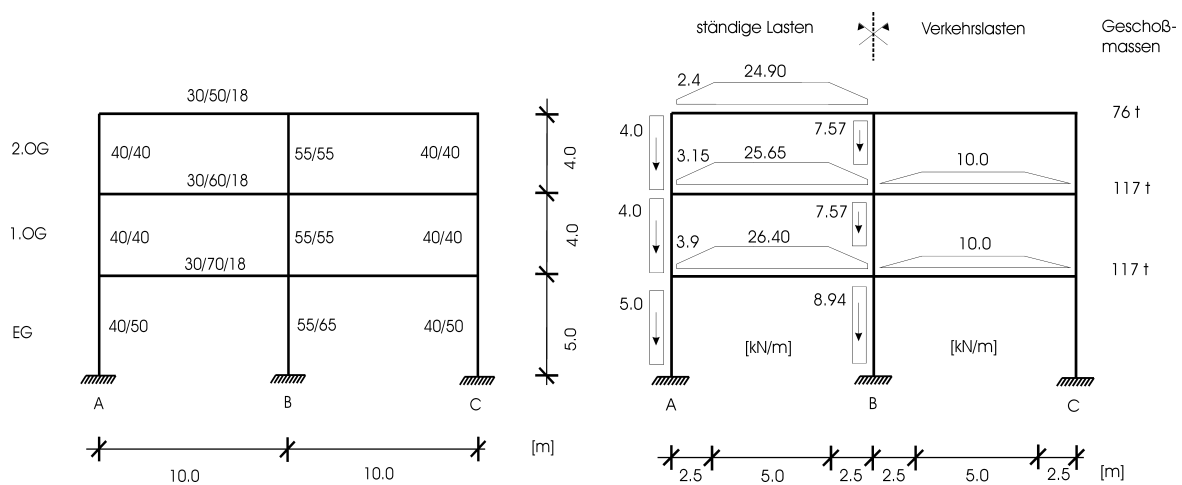


Abb 4.16 Tragwerksmodell, Querschnittsabmessungen, char. Werte der statischen Lasten, Massen

Das statische System eines Teilrahmens ist in Abb. 4.16 dargestellt. Das Deckensystem ist zweiachsig gespannt, wobei die einzelnen Rahmenebenen in einem Abstand von 5m voneinander entfernt sind. Die Fundamente werden als eingespannt betrachtet, die Bauwerk-Boden-Interaktion wird im Modell vernachlässigt. Die Querschnittsabmessungen für Riegel (Plattenbalkenquerschnitte) und Stützen (Rechteckquerschnitte) können Abb. 4.16 entnommen werden.

Als Baustoffe werden gemäß [31] Beton C30/37 und Betonstahl S500 (hohe Duktilität) verwendet. Den Berechnungen werden mittlere Steifigkeiten nach *Bachmann* [58] zugrunde gelegt:

Riegel	$EI_{\text{eff}} = 0.5 EI_0$	
Außenstützen	$EI_{\text{eff}} = 0.8 EI_0$	
Innenstützen	$EI_{\text{eff}} = 1.0 EI_0$	(4-14)

Es werden die Bemessungsschnittgrößen infolge zweier Lastfälle errechnet:

- LF1 statische Einwirkung nach DIN 1045-1
- LF2 statische und seismische Einwirkung nach EC 8

Die charakteristischen Werte der statischen Lasten und Massen werden nach DIN 1055 [97] zusammengestellt und sind in Bild 4.16 angegeben. Eine linear elastische statische Berechnung mit der Lastkombination nach [31]

$$) 1.35 G_{ki} +) 1.5 Q_{ki} \quad (4-15)$$

liefert im Ergebnis die Umhüllende der Biegemomente nach Bild 4.17.

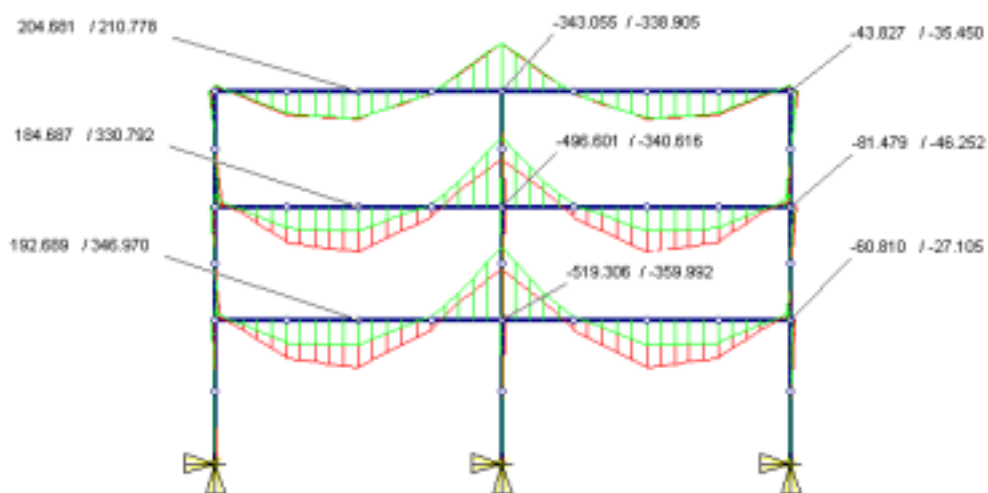


Abb. 4.17 Momentenumhüllende infolge Lastfall 1

Für den Lastfall Erdbeben wird eine Lastkombination nach EC8 1-1 Abschnitt 4.4

$$) G_{ki} + y_l A_{Ed} +) <_{2i} Q_{ki} \quad (4-16)$$

gebildet. Der Bedeutungsbeiwert y_l beträgt 1.2 für Bedeutungskategorie II, der Kombinationsbeiwert $<_{2i}$ für veränderliche statische Lasten Q_{ki} beträgt einheitlich 0.3. Die seismische Einwirkung A_{Ed} wird in Form eines synthetisch erzeugten Zeitverlaufs aufgebracht (EC8 1-1 Abschnitt 4.3.2.2). Grundlage der Lastermittlung ist ein elastisches Normspektrum nach EC8 1-1 Abschnitt 4.2.2. Hierbei beträgt der effektive Spitzenwert der Bodenbeschleunigung 1.5 m/s^2 , die Baugrundverhältnisse werden der Baugrundklasse B nach EC8 1-1 Abschnitt 3.1 zugeordnet. Für die Erzeugung des Zeitverlaufes wird das Pro-

gramm SYN [89] verwendet. Der Zeitverlauf ist in Abb 4.18 dargestellt, das zugehörige Antwortspektrum enthält Abb. 4.19.

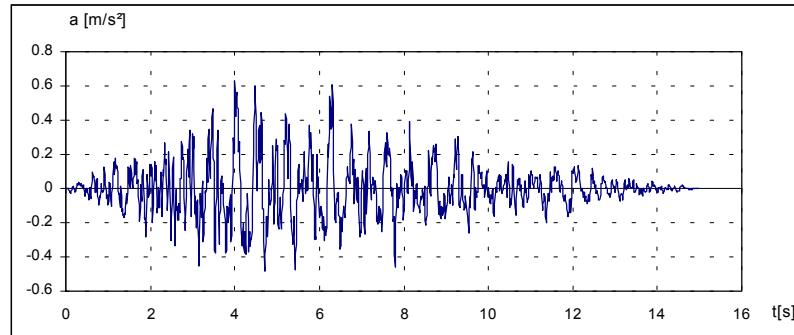


Abb 4.18 Spektrumkompatibler Beschleunigungs-Zeitverlauf (charakteristisch)

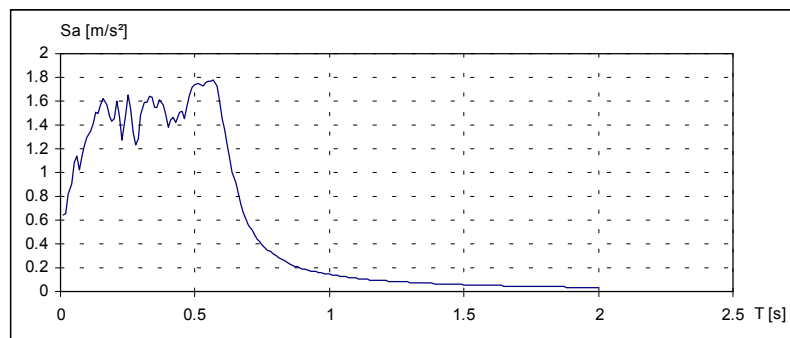


Abb 4.19 Antwortspektrum (charakteristisch)

Die elastische Reaktion des Tragwerkes wird mit Hilfe von Zeitintegrationsmethoden ermittelt. Es wird verkürzend angenommen, daß bereits die Untersuchung mit nur einem Zeitverlauf für die Ermittlung repräsentativer elastischer Umhüllungsantworten für die Schnittgrößen und Verformungen ausreichend ist. Mit diesem Zeitverlauf wird im Anschluß an die Bemessung eine Verifikation der Ergebnisse unter Verwendung nichtlinearer Zeitintegrationsmethoden durchgeführt.

Nach einer linearen Zeitverlaufsberechnung kann der Momentenverlauf infolge Lastfall 2 im Riegel über EG Stützenreihe B nach Abb. 4.20 angegeben werden. Die Extremwerte der Gesamtreaktion werden zusammengestellt, Abb. 4.21 enthält die Umhüllungsreaktion der elastischen Biegemomente.

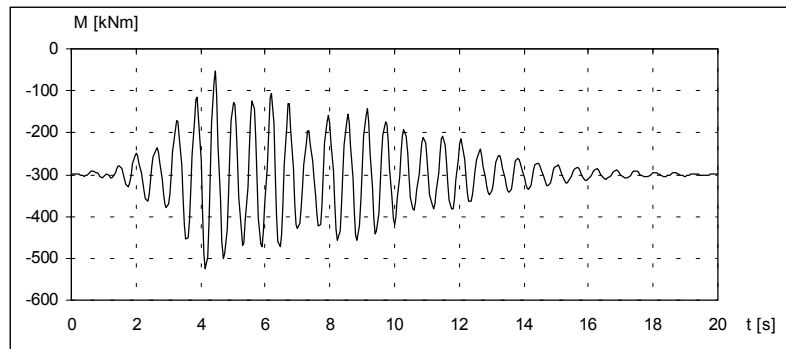


Abb. 4.20 Elastischer Momentenverlauf infolge Erdbeben im Riegel über EG (Stützenreihe B)

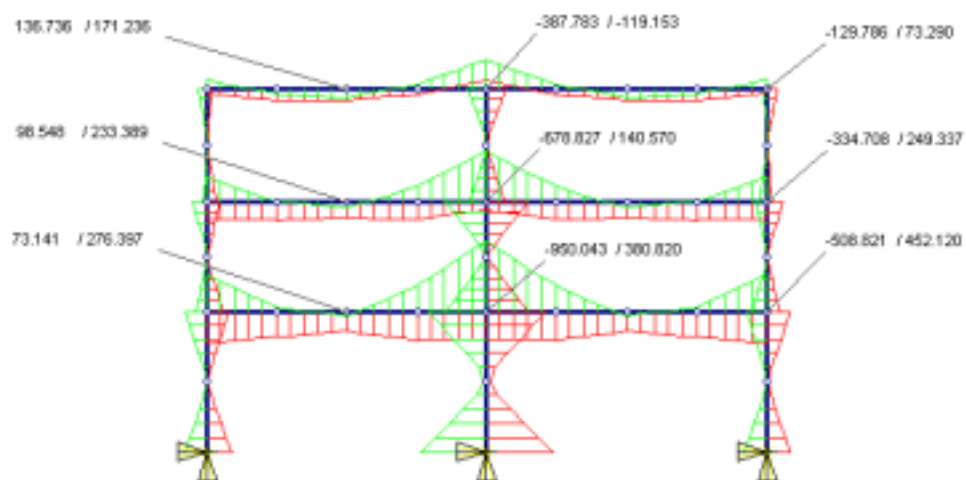


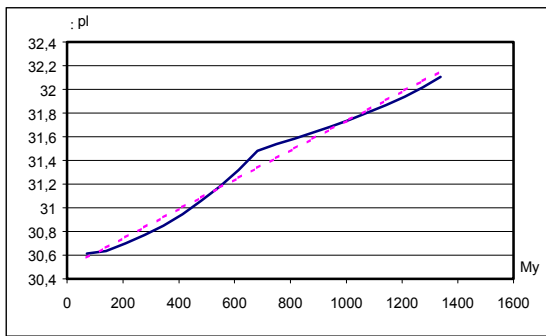
Abb. 4.21 Elastische Momentenumhüllende infolge Lastfall 2

Die Extremwerte der negativen Rieglmomente werden durch die Einwirkung nach Lastfall 2 hervorgerufen.

Schritt 2: Vorbemessung und Systemanpassung

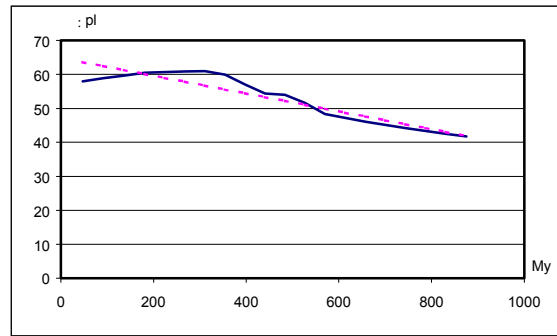
Für die Riegel- und Stützenquerschnitte werden Parameterstudien nach Abschnitt 4.2.4.2 durchgeführt. Für die Berechnung wird eine Grenzstauchung im Beton von 0.0035 zugrunde gelegt. Auszugsweise sind die Ergebnisse der Querschnittsanalyse für den Riegelquerschnitt im Erdgeschoß in Tafel 4.6 angegeben. Den nachfolgenden Untersuchungen werden konstante Grenzwerte der plastischen Krümmung von 0.03 mm^{-1} (1. und 2.OG) und 0.044 mm^{-1} (EG) zugrunde gelegt.

Tafel 4.6 Ergebnis Querschnittsanalyse für Riegelquerschnitt (1.OG, EG)



Beziehung Fließmoment zu plastischer Krümmung

Polynomgrad	Polynomkoeffizienten
1	30,49172846
2	0,001240602



Beziehung Fließmoment zu plastischer Krümmung

Polynomgrad	Polynomkoeffizienten
1	64,88629976
2	-0,026253962

Schritt 3: Formulierung und Lösung der Bemessungsaufgabe

Zur Begrenzung des Schädigungsniveaus wird das Einspielen des Tragwerks gefordert. Die zur Lösung des Problems herangezogene Optimierungsaufgabe wird nach dem Konzept des superponierten Restzustandes nach Abschnitt 3.3.5.1 konzipiert. Entsprechend den Regeln der Kapazitätsbemessung werden plastische Gelenke in den Riegelanschlüssen zugelassen. Zu diesem Zweck werden die negativen Riegelmomente mit Hilfe von Plastizitätsbedingungen begrenzt. Als Startwerte für den zugehörigen Vektor der Plastizitätsbedingungen werden die elastischen Werte nach Abb. 4.21 verwendet. In den Deformationsbedingungen werden die Grenzwerte der plastischen Rotationen aus Schritt 2 implementiert. Die elastischen Umhüllungsantworten der Schnitt- und Formänderungsgrößen werden in die zugehörigen Vektoren des Optimierungsproblems übertragen.

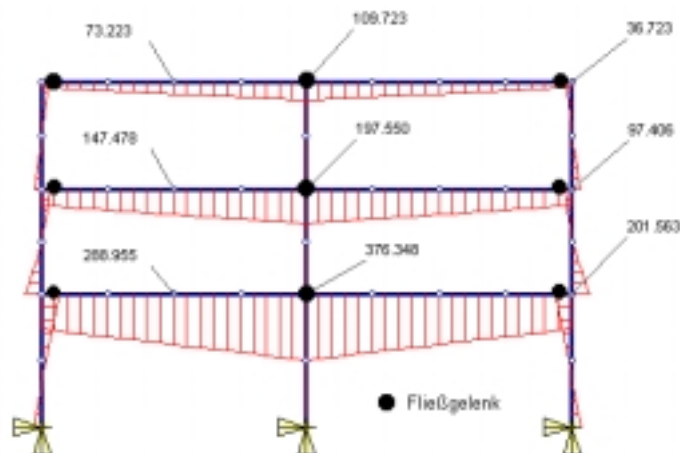


Abb. 4.22 Stabile Restmomentenverteilung als Ergebnis der deformationsbasierten Grenzwiderstandsaufgabe

Für die numerische Behandlung wird das Programm ODYN [90] verwendet. Maßgebend für die Berechnung des deformationsbasierten Grenzzustandes ist das Erreichen der Grenzrotation im Punkt 1. Im Ergebnis wird der Restmomentenzustand nach Abb. 4.22. ausgewiesen. Nach der Überlagerung mit den elastischen Schnittgrößenanteilen (Abb. 4.21) erhält man die Bemessungsmomente für dieses Tragwerk.

Schritt 4: Konstruktive Durchbildung

In dieser Arbeit werden die Untersuchungen für vorwiegend biege- und normalkraftbeanspruchte Tragwerke durchgeführt. Darüber hinaus müssen weitere Nachweise für die Bemessung seismisch beanspruchter Tragwerke angeschlossen werden. Entwurfsbestimmend sind zahlreiche konstruktive Forderungen für die Durchbildung der potentiell plastischen Zonen des Tragwerkes entsprechend den Regeln der Kapazitätsbemessung. Zur Sicherstellung des gewählten Mechanismus werden die elastisch verbleibenden Bereiche des Tragwerkes mit einem höheren Tragwiderstand ausgestattet.

Vergleich mit Ergebnissen einer nichtlinearen Zeitverlaufsuntersuchung

Zur Einschätzung der errechneten Tragwerksauslegung wird eine nichtlineare Zeitintegrationsberechnung mit Einwirkung des Lastfalles 2 durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, daß sich das Tragwerk entsprechend dem vorgegebenen Bemessungsziel verhält. Einerseits werden unter Einwirkung des Bebens plastische Verformungen im Tragwerk hervorgerufen, andererseits ist das Schädigungsmaß soweit beschränkt, daß weder alternierende noch progressive Plastizierungen bzw. Überschreitungen der vorgegebenen Bruchduktilitäten auftreten.

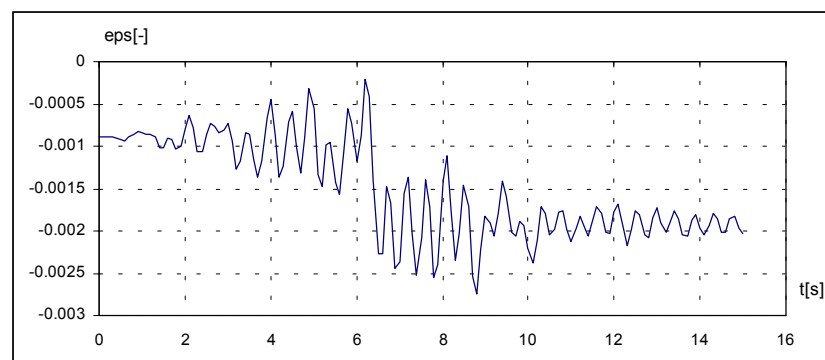


Abb.4.23 Betonstauchung im Punkt 1

In Abb. 4.23 ist die Entwicklung der Druckzonendehnung am Riegelrand (EG, Stützenreihe B) aufgetragen. Es kann festgestellt werden, daß der in Schritt 2 festgelegte Grenzwert der Betonstauchung von 0.0035 zu keinem Zeitpunkt überschritten wird.

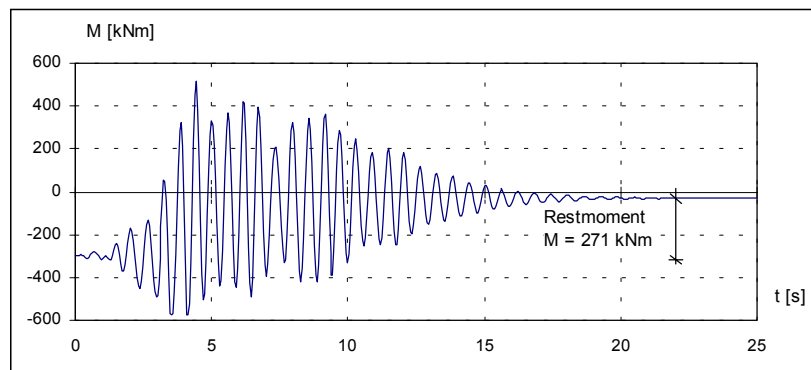


Abb.4.24 Biegemoment im Punkt 1 (Zeitverlaufsuntersuchung)

Der Restschnittgrößenzustand im Punkt 1 kann im Diagramm Abb. 4.24 abgegriffen werden. Im Vergleich zu den Werten aus Abb. 4.22 werden im gesamten Tragwerk geringere Werte erreicht. Der mit Hilfe der Grenzzustandsaufgabe ermittelte Restmomentenzustand stellt obere Grenzwerte bezüglich der Resultate aus der nichtlinearen Zeitverlaufsrechnung bereit.

Die Unterschreitungen der nach Abb. 4.21 errechneten Restmomentenwerte sind darauf zurückzuführen, daß bei Ansatz des Einspielzustandes von einer hinreichenden Wiederholung jedes Impulses bis zum Einspielen ausgegangen wird, die bei einmaliger Einwirkung des zugrunde liegenden Zeitverlaufes nicht gegeben ist. Gleichzeitig wird aber auch ein Vorzug des vorgeschlagenen Verfahrens deutlich, da nicht nur ein Einzelereignis, sondern eine ganze Klasse von möglichen Impulsfolgen gleichartiger Intensität sowie Nachbebeneinwirkungen im Modell erfaßt werden und somit dem stochastischen Charakter der seismischen Einwirkung entsprochen wird.

5 Schlußbemerkungen

5.1 Ergebnisse

Mit dem in dieser Arbeit beschriebenen Bemessungskonzept wird eine numerisch unter-setzte Methode und Plattform zur Unterstützung von Planungsprozessen im Stahlbeton-bau vorgeschlagen. Durch die Einbeziehung deformationsbasierter Kenngrößen in die Grenzzustandsbetrachtung werden einerseits wesentliche Ergänzungen zum Leistungs-umfang klassischer Grenzzustandsmodelle bezüglich der Erfassung des physikalisch und geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens und des Spektrums möglicher Grenzzustands-analysen vorgenommen, andererseits ergeben sich neue methodische Ansätze für die Formulierung von Bemessungsaufgaben. Die Vorteile des Konzeptes werden vor allem bei Berechnungen von Tragwerken aus bedingt duktilen Baustoffen wie z.B. Stahlbeton sichtbar.

Den methodischen Kern des Bemessungskonzeptes bilden deformationsbasierte Grenz-zustandsmodelle auf der Basis von Kuhn-Tucker-Formulierungen für die strukturmechani-schen Grundbeziehungen. Durch Verwendung von Algorithmen der mathematischen Op-timierung zur Lösung von abgeleiteten diskreten Problemen ist es möglich, abweichend von Pfadverfolgungsstrategien den gesuchten Zustand direkt, d.h. ohne Angabe von Zwi-schenzuständen zu errechnen. Bei der Modellbildung kann auf bewährte Ansätze der Strukturmechanik zurückgegriffen werden, insbesondere auf den umfangreichen Modell-vorrat der Finiten Elemente Methode.

In der Arbeit werden Grenzzustandsmodelle mit und ohne Berücksichtigung von Lastfol-geeffekten vorgestellt. Grenzzustandsmodelle ohne Berücksichtigung von Lastfolgeeffek-ten eignen sich zur Untersuchung von Tragwerken, die in Einzelereignissen extrem bela-stet werden. Besteht dagegen die Notwendigkeit zur Untersuchung von extremen Lastfol-gen, bieten sich alternativ zu nichtlinearen Zeitverlaufsuntersuchungen Analysen mit Grenzzustandsmodellen auf der Grundlage der Theorie des adaptiven Körpers an. Die Festlegung der Tragfähigkeit von zyklisch beanspruchten Tragwerken anhand des Ein-spielkriteriums bietet einerseits Möglichkeiten zur planmäßigen Nutzung plastischer Re-serven, andererseits wird das Schadensniveau soweit begrenzt, daß Akkumulationen von Schädigungen im Tragwerk ausgeschlossen sind. Für die Lösung von Grenzwiderstands-aufgaben mit Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens werden zwei Berechnungs-konzepte vorgestellt:

- Konzept des superponierten Restzustandes mit separater Berechnung des elastischen Anteils und Restanteils der Tragwerksantwort (traditionelle Vorgehensweise)
- Konzept der gekoppelten plastischen Antwort mit gemeinsamer Berechnung von elastischen und plastischen Antwortanteilen (Neuvorschlag).

Durch die Berechnung der Tragwerksantwort in Teilschritten wird bei Anwendung des Konzeptes des superponierten Restzustandes eine schnelle und einfache numerische Berechnung des Grenzzustandes möglich. Vorteile ergeben sich unter anderem bei umfangreichen Lastfalluntersuchungen im geometrisch linearen Fall. Das Konzept ermöglicht ein einheitliches Vorgehen bei der Behandlung statischer und dynamische Problemstellungen. Eine Berechnung nach diesem Konzept führt zu externen Iterationen, falls die Annahmen für die einzelnen Berechnungsschritte auf der Grundlage der Ergebnisse nachfolgender Schritte angepaßt werden müssen.

Alternativ wurde das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort entwickelt, bei dessen Anwendung der Grenzzustand des Systems in einem einzigen Berechnungsschritt ermittelt werden kann. Die Vorteile des Konzeptes werden dadurch wirksam, daß zusätzliche Verknüpfungen zwischen Strukturkenngößen eingeführt werden, z.B. in Form polynomialer Näherungsfunktionen und somit externe Iterationen vermieden werden können. Wegen der komplexen Struktur der Aufgabe wird die Anwendung dieses Konzeptes vorrangig für die Untersuchung von statischen Problemen empfohlen.

Zusammenfassend können folgende Merkmale einer deformationsbasierten Grenzzustandsanalyse mit Methoden der mathematischen Optimierung herausgestellt werden:

- Wesentliche Erweiterungen der Grenzzustandsbeschreibung gegenüber klassischen Grenzzustandsmodellen
- Möglichkeit einer stufenlos skalierbaren Grenzzustandsbetrachtung im elastischen und plastischen Bereich von Arbeitslinien bis hin zum Erreichen kinematischer Ketten bzw. des adaptiven Grenzzustandes
- Unterstützung von Bemessungsprozessen ohne Vorgabe einer kompletten Widerstandsverteilung im Tragwerk
- Übernahme von bewährten strukturmechanischen Ansätzen, wie z.B. aus der Finiten Elemente Methode

- Berücksichtigung vielfältiger strukturmechanischer Effekte durch Nutzung der Schnittstellen von Optimierungsalgorithmen (Hinzufügen von linearen und nichtlinearen Gleichungen und Ungleichungen wie z.B. von Kontaktbedingungen)
- Vielfältige Einsatzgebiete durch Verwendung unterschiedlicher Zielfunktionen und Nebenbedingungskombinationen zur Lösung ein- oder mehrparametrischer Grenzzustandsaufgaben
- Verwendung der Methoden der nichtlinearen Optimierung zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungs- und Ungleichungssysteme mit dem Vorteil, daß ein Großteil der notwendigen Programmkomponenten für die Organisation von Iterationen, der Behandlung von Ungleichungsrestriktionen sowie dem automatisierten Verfolgen von Optimierungszielen bereits Teil verfügbarer Optimierungsalgorithmen sind
- Einheitliche Formulierung von statischen und dynamischen Problemen auf der Basis des Konzeptes des superponierten Restzustandes
- Direkte Bestimmung von Grenzzuständen ohne Angabe von Zwischenzuständen.

Die Einbindung der vorgestellten deformationsbasierten Grenzwiderstandsmodelle in eine Bemessungskonzeption für Stahlbetontragwerke wurde in Abschnitt 4 erläutert. Der Bearbeitungsablauf wird dabei in 4 Teilschritte untergliedert. Im Konzept wird die für Normen charakteristische getrennte Betrachtungsweise an Querschnitts- und Tragwerksmodellen aufrechterhalten. Für eine näherungsweise Übertragung von funktionellen Abhängigkeiten zwischen beiden Modellebenen wird die Nutzung von Polynomfunktionen empfohlen. Diese Methode ist immer dann anwendbar, wenn es gelingt, Querschnittsuntersuchungen vorab durchzuführen.

Die vorgeschlagene Konzeption bietet folgende Leistungsmerkmale:

- Einheitliche bzw. parallele Untersuchungen von Grenzzuständen der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit
- Einbeziehung normativer Modell- und Sicherheitskonzepte
- Parallele Verarbeitung unterschiedlicher Nachweisformate; durch Einbindung in Optimierungsstrategien werden diese in Bemessungsansätze überführt
- Ausschöpfen von inelastischen Potentialen durch gezielte Grenzzustandsbestimmung

- Option zur Vermeidung von Schadensakkumulationen
- Unterstützung bei der konstruktiven Durchbildung z.B. durch kontrollierte Nutzung von Möglichkeiten zur Schnittgrößenumlagerung
- Erschließung von inelastischen Dissipationsmöglichkeiten für dynamisch beanspruchte Tragwerke bei gleichzeitiger Gewährleistung eines begrenzten Schadensniveaus
- Umsetzung der Prinzipien der Kapazitätsbemessung bei der konstruktiven Durchbildung von seismisch beanspruchten Tragwerken
- Vereinfachungen für Lastfall- und Zeitverlaufsuntersuchungen durch Anwendung des Konzeptes des superponierten Restzustandes.

Wie die Untersuchungen zu dieser Arbeit zeigen, hat sich die Bemessungskonzeption auf der Basis deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen als leistungsfähig erwiesen und kann deshalb für die Bemessung statisch und dynamisch beanspruchter Tragwerke aus Stahlbeton empfohlen werden.

5.2 Ausblick

Die Arbeit dient der Entwicklung einer numerisch gestützten Methode zur Bemessung von Stahlbetontragwerken. Neben der Formulierung von Modellen zur Grenzzustandsanalyse liegt ein Schwerpunkt auf der anwendungsbezogenen Einbindung dieser nichtlinearen Analyseverfahren in den Tragwerksplanungsprozess. Bei der Übertragung der methodischen Vorgaben auf andere Untersuchungsbedingungen werden Erweiterungen und spezifische Anpassungen notwendig sein. Dies betrifft vor allem Implementierungen für komplexe Materialgesetze (z.B. Rißbildung, Verbund) insbesondere für flächige oder räumliche Strukturen. Weitere Schwerpunkte liegen in der Einbeziehung eines vergrößerten Satzes von Strukturparametern und deren Interaktionen (z.B. Querkraft und Torsion) in die Betrachtungen sowie dem allgemeinen Ausbau der Modelle zur Erfassung weiterer geometrisch nichtlinearer Effekte sowie von Stabilitätsproblemen.

In dieser Arbeit beschränken sich die Untersuchungen auf deterministische Problemstellungen. Die übliche Verwendung von Teilsicherheitskonzepten bleibt in der Regel auf die in Normen spezifizierten Modellvorgaben beschränkt. Beim Überschreiten der dort gesetzten Rahmenbedingungen kann nicht von einer uneingeschränkten Übertragbarkeit der

Konzepte ausgegangen werden, so daß ein Übergang zu allgemeinen stochastischen Untersuchungen notwendig wird.

Der in dieser Arbeit vorgeschlagene Weg einer methodisch einheitlichen Betrachtung von Grenzzuständen auf der Basis von Deformationskriterien in Bemessungsprozessen bedingt, daß traditionelle kraftgrößenbasierte Nachweisformate in die korrespondierenden Formate transformiert werden. Die mit der Anwendung nichtlinearer Verfahren wachsende Bedeutung von Gebrauchstauglichkeitsgrenzzuständen wird zudem die Entwicklung weiterer Nachweisformate vorantreiben.

Das Konzept der numerischen Unterersetzung der Grenzzustandsanalyse mit Algorithmen der nichtlinearen Optimierung hat sich als effektiv und leistungsfähig erwiesen. Die rasante Forschung auf dem Gebiet der mathematischen Optimierung wird für die Zukunft weitere Spielräume für Berechnungen in der Tragwerksplanung eröffnen. Besonders vielseitig erscheint die Anwendung genetischer Algorithmen im Zusammenhang mit Untersuchungen nichtkonvexer Optimierungsprobleme.

6 Literaturverzeichnis

- [1] Meyer, Ch.: Design of Concrete Structures; Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996
- [2] Reynolds, Ch.; et. al.: Reinforced Concrete Designer's Handbook, E. & Fn. Spon, London 1988
- [3] Rabich, R.: Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahlbeton unter Berücksichtigung der Rißbildung, Bauplanung- Bautechnik 23, Heft 4/5, 1969
- [4] Blaschke, F.; et.al.: Materialmodelle und Methoden zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Beton-, Stahlbeton-, und Spannbetonbauteilen; Festschrift Prof. Dr.-Ing. Gerhard Mehlhorn, Fachbereich Bauwesen, Gesamthochschule Kassel, 1997
- [5] Despot, Z.; et. al.: FEM- und CAD-konforme Bemessung von Stahlbetonscheiben, Bericht Nr. 215, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Dez. 1995
- [6] Müller, P.: Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken; Bericht Nr. 83, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juli 1978
- [7] Jagd, L.K.: Nonlinear FEM analysis of 2D concrete structures; Dissertation Technical University of Denmark, Dep. of Structural Engineering and Materials, 1997
- [8] Clough, R.W.: Original formulation of the Finite Element Method; Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 7, 1991
- [9] State of the art report on : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete; American Society of Civil Engineers, New York 1982
- [10] Eibl, J.; Stempniewski, L.: Finite Elemente in Stahlbeton; Beton- Kalender 1993, Teil 1, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1993
- [11] Zahlten, W.: Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen, IKIB-TWM Nr. 90-2, Ruhr-Universität Bochum 1990

- [12] Grote, K.: Anwendung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Algorithmen auf Flächentragwerke aus Stahlbeton, Bericht 1/1992 des Fachgebiets Baustatik, Universität Kaiserslautern 1992
- [13] Meiswinkel, R.: Entwurf von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Strukturanalysen, Bericht 1/1998 des Fachgebiets Baustatik, Universität Kaiserslautern 1998
- [14] Margoldova, I.; Pukl, R.; Cervenka, V.: Serviceability Analysis of Reinforced Concrete Slabs; IABSE Colloquium Stuttgart, IABSE Reports 62, ETH Höngerberg 1991
- [15] Kollegger, A.: Algorithmus zur Bemessung von Flächentragwerken unter Normalkraft- und Momentenbeanspruchung; Beton und Stahlbeton 86, 1991
- [16] Marti, P.: Bemessung und Konstruktion von Betontragwerken, IABSE Colloquium Stuttgart, IABSE Reports 62, ETH Höngerberg 1991
- [17] Sjödin, B.: Numerical methods for large strain plasticity and elasticity; Thesis No. 391, Institute of Technology, Dep. of Mechanical Engineering, Linköping University Sweden, 1993
- [18] Lichtenfels, A.; Wagner, W.: Traglastberechnung ebener Stahlbetonstabwerke nach Eurocode 2; Bauingenieur 1998/1
- [19] Eibl, J.; Retzepis, I.: Nichtlineare Berechnungen der Schnittkraft und Zwangsbeanspruchungen von Stahlbetontragwerke; Beton und Stahlbetonbau, Ernst und Sohn, Heft 1/2, 1995
- [20] Spanke, H.: Erfahrungen aus der Anwendung von EC2 aus der Sicht des Unternehmers und des Planers; Beton und Stahlbetonbau; Heft 5/1998
- [21] Anderegg, E.; et. al.: Finite elements and plasticity theory - Integration in optimum reinforcement design; Proc. 6th. Int. Conf. on Computing in civil and building engineering; Berlin, July 1995
- [22] Steffen, P.: Elasto-plastische Dimensionierung von Stahlbetonplatten mittels finiter Bemessungselemente und linearer Optimierung; Bericht Nr. 220, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1996

- [23] Tabatabai, S.M.R.: Finite element-based elasto-plastic optimum reinforced dimensioning of spatial concrete panel structures; Bericht Nr. 225, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Nov. 1996
- [24] Nielson, M.P.: Limit Analysis and Concrete Plasticity; Prentice- Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1984
- [25] Jones, L.L.: Ultimate load analysis of reinforced and prestressed concrete structures; Chatto and Windus, London 1968
- [26] Krätzig, W.B.; Meskouris, K.; Hanskötter, U.: Nichtlineare Berechnung von Stahlbeton-Rahmentragwerken nach dem Fließgelenkverfahren. Die Bautechnik 71 (1994), Heft 12, S. 767-775.
- [27] Bertero, V.V.; Uang, C.-M.: Issues and future directions in the use of an energy approach for seismic resistant design of structures; in: Nonlinear seismic analysis and design of reinforced concrete buildings (Fajfar, P.; Krahwinkler, H.; eds.) Elsevier, London 1992
- [28] Muttoni, A.: Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton; Bericht Nr. 176, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juni 1990
- [29] Zilch, K.: Geometrisch und physikalisch nichtlineare Verfahren zur Berechnung von Stabtragwerken des Stahlbetonbaus; Tagungsheft BB5, 20.1.20.14, Baustatik Baupraxis, Arbeitskreis der Lehrstühle und Institute für Statik an deutschsprachigen Universitäten und technischen Hochschulen, München, März 1993
- [30] Hampe, E.; Raue, E.; Kaller, F.: Stahlbeton - Teil 1 Grundlagen; Lehrbuch; Verlag für Bauwesen Berlin, München, 1993
- [31] E DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion; DIN Deutsches Institut für Normung e.V. Berlin , Nov. 1998
- [32] DIN V ENV 1992, Teil 1-1, EC2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau; Europäisches Komitee für Normung und DIN Deutsches Institut für Normung e.V. Brüssel, Berlin , 1992

- [33] Dilger, W.: Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung; Deutscher Ausschuß für Stahlbeton Heft 179, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1966
- [34] Zilch, K.; Vismann, U.: Eingeprägte Verformungen im Betonbau, Entwicklung eines Bemessungs- und Sicherheitskonzeptes, Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben, IRB-Verlag, Aachen Nov. 1993
- [35] Raue, E.: Berechnung von Balken unter Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität; Technische Mechanik 10 Heft 4; 1989
- [36] Raue, E.: Untersuchungen der Grenzlast von Flächentragwerken aus Stahlbeton; Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Nr. 28 3/4, Weimar 1982
- [37] Mehlhorn, G.: Der Ingenieurbau - Grundwissen - Rechnerorientierte Baumechanik; Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1996
- [38] Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik; Basel; Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1961
- [39] Göldner, H. et.al.: Lehrbuch höhere Festigkeitslehre; Band 1 und 2, Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 1991/92
- [40] Cyras, A.A.: Matematičeskie modeli analiza i optimizacii uprugoplastičeskich sistem. Vilnius Mokslas Publishers, 1982 (engl.: Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures. Ellis Horwood Limited, Chichester 1983)
- [41] Grüning, M.: Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung; Springer Verlag Berlin, 1926
- [42] Bleich, H.: Über die Bemessung statisch unbestimmter Stabtragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes; Der Bauingenieur, Berlin 13, 1932, 19/29, S.261
- [43] Melan, E.: Theorie statisch unbestimmter Stahltragwerke aus idealplastischem Baustoff; Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIa 1932, 145, 195-218

- [44] Koiter, W.T.: A new general theorem on shake down of elastic plastic structures; Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. B59, 23-34, 1956
- [45] Neal, B.G.: Die Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stahlstabtragwerke; Springer Verlag Berlin 1958
- [46] Pöschel, G.: Rahmentragwerke unter variabler wiederholter Belastung; Bauinformationen der Bauakademie der DDR, Berlin 1979
- [47] Rothert, H.; Gensichen, V.: Nichtlineare Stabstatik - Baustatische Methoden, Grundlagen und Anwendungen; Springer Verlag Berlin, 1987
- [48] Washizu, K.: Variational methods in Elasticity and Plasticity, 2nd edition, Pergamon Press Oxford- New York, 1975
- [49] Raue, E.; Barthl, J.: Berechnung von Zylinderschalen, Kreis- und Kreisringplatten mit elastisch-plastischem Materialverhalten mit Methoden der linearen und quadratischen Optimierung; Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, IKM 1990
- [50] Raue, E.: Zur Bestimmung der adaptiven Grenzlaster statisch unbestimmter Tragwerke; Industrie und Spezialbau, Theorie und Anwendung, Festschrift Erhard Hampe, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, 1993
- [51] Raue, E.; Timmler, H.-G.: Konsequenzen aus der Anwendung nichtlinearer Berechnungsmethoden für die Bemessung von Stahlbetontragwerken; 6. Tagung Baustatik- Baupraxis, Weimar 1996
- [52] Ceradini, G.: Sull'adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche; Giornale del Genio Civile, No. 107, 239-250, 1969
- [53] Ho Hwa-Shan: Shakedown in elastoplastic systems under dynamic loading. Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, 1972
- [54] Corradi, L.; Maier, G.: Dynamic nonshakedown theorems for elastic-perfectly plastic continua, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 22, S. 401-413, 1974
- [55] Maier, G.: A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes; Meccanica 3/1970

- [56] Schüler, H.: Zur Analyse und zur Bemessung adaptiver Tragwerke aus Stahlbeton unter dynamischen Einwirkungen; Dissertation an Fakultät Bauingenieurwesen, Bauhaus-Universität Weimar, 1997
- [57] Eurocode 8 - Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures, Europäische Vornorm ENV 1998, Europäisches Komitee für Normung und DIN Deutsches Institut für Normung e.V. Brüssel, Berlin , Juni 1997
- [58] Paulay, Th.; Bachmann, H.; Moser, K.: Erdbebenbemessung von Stahlbetonhochbauten; Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1990
- [59] Capurso, M.: Displacements bounding principles in the dynamics of elastoplastic continua. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,(3), 1974-1975, 259-281
- [60] Polizotto, C.: A bounding technique for dynamic deformations of damped structures. *Nuclear Engineering and design* 79, 1984, 363-376
- [61] Ponter, A.R.S.: General displacement and work bounds for dynamically loaded bodies. *J. Mech.. Phys. Solids*, 1975, Vol 23, 151-163
- [62] Raue, E.; Weitzmann, R.: On dynamic analysis of elasto-plastic structures with methods of nonlinear mathematical programming; 5th International Conference "Modern building materials, structures and techniques", Faculty of Civil Engineering Vilnius Technical University, May 1997
- [63] Wriggers P.; Wagner, W.: *Nonlinear Computational Mechanics*; Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1991
- [64] Wriggers, P., et.al.: *Finite Elemente in der Baupraxis: Modellierung, Berechnung und Konstruktion*; Beiträge der Tagung FEM'98; Ernst und Sohn Berlin, 1998
- [65] Thieme, D.: *Einführung in die Finite-Elemente-Methode für Bauingenieure* ; 2. Auflage; Verlag für Bauwesen; Berlin 1996
- [66] Chen, W.F.: *Plasticity in reinforced concrete*; McGraw-Hill Inc., 1982
- [67] Krätzig, W.B.; Wittek, U.: *Tragwerke*; Band 1,2,3; Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1990
- [68] Bathe, K.J.: *Finite Elemente Methoden*; Springer Verlag, Heidelberg, New York 1990

- [69] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, Vieweg Verlagsgesellschaft, Braunschweig, Wiesbaden, 1992
- [70] Zienkiewicz, O. C.: The finite element method in engineering science; McGraw- Hill Publishing Company Limited, London 1971
- [71] Elster, K.H.: Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte, Band 15, Nichtlineare Optimierung; B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1980
- [72] Programmsystem NAG, The Numerical Algorithms Group Ltd.: Oxford 1998
- [73] Atkociunas, J.J.: Rascet uprugoplastitscheskich system pri povtornirch nagruschenijach. (Design of elastoplastic systems under repeated loading); Science Encyclopedia Publishers, Vilnius, 1994
- [74] Corradi, L.; De Donato, O.: Dynamic Shakedown theory allowing for second order geometric effects. Meccanica, June 1975, (2), 93-106
- [75] Quast, U.: Zur nichtlinearen Berechnung im Stahlbeton- und Spannbetonbau, Beton- und Stahlbetonbau 89, Heft 9/10, 1994
- [76] Quast, U.: Nichtlineare Verfahren, normreif oder nicht?, Festschrift zum 60. Geburtstag von Univ. Prof. Dr.-Ing. Horst Falkner, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, MPA Braunschweig, TU Braunschweig, Heft 142, 1999
- [77] Weitzmann, R.: Programm zur Berechnung polygonal begrenzter Stahlbetonquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft; Studienarbeit, Bauhaus-Universität Weimar, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, 1995
- [78] Busjaeger, D.; Quast, U.: Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft (Programm MASQUE), Deutscher Ausschuß für Stahlbeton DAfStb Heft 415, Beuth Verlag GmbH, Köln, Berlin 1990
- [79] Marx, S.; Raue, E.: Analyse von Stahlbetonquerschnitten mit Methoden der mathematischen Optimierung; 37. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschuß für Stahlbeton, Bauhaus-Universität Weimar, Okt. 1999

- [80] Marx, S.: Anwendung der mathematischen Optimierung bei der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analyse von Stahlbetontragwerken; Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen, Weimar 2000
- [81] Grasser, E.; Thielen, G.: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken; Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 240, Berlin 1991
- [82] Graubner, C.A.; Six, M.: Konsistentes Sicherheitsformat für die nichtlineare Strukturanalyse von Betontragwerken; 11. Forum Bauinformatik Damstadt 99, Fortschritt Berichte VDI Reihe 4 Nr. 156, VDI Verlag Düsseldorf 1999
- [83] Eibl, J.: Nichtlineare Traglastermittlung und Bemessung; Beton- und Stahlbetonbau, 6/1992
- [84] Eibl, J.; Schmidt-Hurtienne, B.: Nichtlineare Traglastermittlung von Stahlbetonstrukturen nach Eurocode 2 - Stochastische Finite Elemente; Baustatik-Baupraxis 6, Bauhaus-Universität, Weimar 1996
- [85] Ahner, C.; Nguyen Viet Tue: A New Safety Format for the Design of Reinforced Concrete Structures with Nonlinear Behaviour of Materials; Leipzig annual civil engineering report (LACER) No. 2, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Leipzig, 1997
- [86] Krätzig, W.B.: Schädigungsorientierte Nachweiskonzepte für seismisch beanspruchte Tragwerke; in: Tagungsunterlagen Kolloquium "Baudynamik 95, Forschung und Praxis", Bochum 1995
- [87] Meskouris, K.; Zahlten, W.: Seismische Schädigungsanalyse von Stahlbetonhochhäusern; Baustatik/Baupraxis 6, Weimar 1996, 6.1-6.19.
- [88] Meskouris, K.; Zahlten, W.; Weitkemper, U.: Seismische Schädigung von Stahlbetonhochhäusern. Bauingenieur 74 (1999), Heft 7/8, S. 325-331.
- [89] Meskouris, K.; Krätzig, W.B.; Elenas, A.; Heiny, L.; Meyer, I.F.: Mikrocomputerunterstützte Erdbebenuntersuchung von Tragwerken; SFB 151, Research Report No. 8, 1988

- [90] Weitzmann, R.: ODYN (Einsatz der mathematischen Optimierung zur Lösung von Problemstellungen der Statik und Dynamik); Programmreferenz, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Bauhaus-Universität Weimar, 2000
- [91] Marx, S.; Weitzmann, R.: Anwendung der mathematischen Optimierung bei der nichtlinearen Berechnung von Tragwerken unter statischer und dynamischer Belastung; Forum Bauinformatik Cottbus 1996
- [92] Garstka, B.: Untersuchungen zum Trag- und Schädigungsverhalten stabförmiger Stahlbetonteile mit Berücksichtigung des Schubeinflusses bei zyklisch nichtlinearer Beanspruchung; Technisch Wissenschaftliche Mitteilungen des Institutes für Konstruktiven Ingenieurbau Nr. 93-2, Ruhr-Universität Bochum, 1993
- [93] Park, Y.-J.; Ang, H.-S.; Wen, Y. K.: Seismic damage analysis of reinforced concrete buildings; in: Journ. of the Struct. Div., ASCE, Vol 111, No. 4, 1985
- [94] Krahwinkler, H.; Nasser, A.A.: Seismic design based on ductility and cumulative damage demands and capacities; Nonlinear seismic analysis and design of reinforced concrete buildings (Fajfar P., Krahwinkler H.; eds.), Elsevier, London 1992
- [95] Bachmann, H.: Erdbebensicherung von Bauwerken; Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1995
- [96] Müller, F.P.; Keinzel, E.: Erdbebensicherung von Hochbauten; Ernst und Sohn, Berlin 1984
- [97] DIN 1055: Lastannahmen für Bauten; DIN Deutsches Institut für Normung e.V. Berlin, 6/78

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen und Abkürzungen

Tiefgestellte Indizes

e	elastische Größe bzw. Anteil
p	plastische Größe bzw. Anteil
r	Restgröße bzw. -anteil
re	elastischer Anteils einer Restgröße
a	adaptive Größe
c	konservative Größe
d	deformationsbasierte Größe bzw. Anteil
0	Anfangs- oder eingeprägte Kenngröße
u	Grenzwert bzw. kinematische Größe
v	veränderlicher Anteil
s	ständiger Anteil, bzw. eingeprägte Größe
1,2,3	Koordinatenrichtungen bzw. Stelle
A	Elementanfang
E	Elementende
:	Krümmung
EI	Biegesteifigkeit
S	Einwirkung oder Nachfrage
R	Widerstand oder Angebot
k	charakteristische Größe
d	Bemessungsgröße
E	Erdbebenlastfall

Hochgestellte Indizes

T	Transponierte einer Matrix oder eines Vektors
(1) ... (k)	Nr. des Lastfalls

Allgemeine Größen

p	Grenzlastfaktor
r	Grenzwiderstandsfaktor
t	Zeit
M	Moment
N	Normalkraft
v	Verschiebung

Physikalische Größen für die Beschreibung im Kontinuum

x	Ortsvektoren
V	Volumen
S	Oberfläche
u	Verformungsvektor
σ	Spannungsvektor
ε	Verzerrungsvektor
f	Vektor der Volumenkräfte
A	Differentialoperator der stat. und kin. Feldgleichungen
A_k	Differentialoperator der Formänderungsbedingungen
A_s	Operator der statischen Randbedingungen
A_u	Operator der kinematischen Randbedingungen
g_s	Vektor der vorgegebenen Oberflächenspannungen
u_s	Vektor der vorgegebenen Oberflächenverschiebungen
Φ	Fließfunktion
F	Ausgangsflißfunktion, bzw. lineare Fließfunktion
H	Verfestigungsfunktion
λ	Fließparameter
s_u	konstantes Glied der Fließfunktion
ε_u, u_u	Verzerrungs- bzw. Verformungsgrenzwerte
$\sigma_0, \varepsilon_0, u_0$	Vorspannung, -verzerrung, -verformung
$\sigma_r, \varepsilon_r, u_r$	Restspannung, -verzerrung, -verformung
σ_{re}	elastischer Anteil der Restspannung
ε_e, u_e	elastische Verzerrung, Verformung
D	Elastizitätsmatrix
$:$	Querschnittskrümmung
EI	Biegesteifigkeit
EA	Dehnsteifigkeit
$=$	Duktilität
m	Massendichte
c	Dämpfungsichte

Physikalische Größen für die Beschreibung der diskreten Struktur

x	Ortsvektoren globales Koordinatensystem
u	Vektor Knotenverschiebungen
ε	Vektor unabhängige Elementranddeformationen
s	Vektor der unabhängigen Elementrandschnittgrößen

\tilde{s}	Vektor der abhängigen Elementrandschnittgrößen
f_0	Vektor Knotenlasten
f_c	Vektor Dämpfungskräfte
f_m	Vektor Massenkräfte
g_s	Vektor Randschnittgrößen
u_s	Vektor Randverformungen
S	Vektor Knotenkräfte
A	Transformationsmatrix der Gleichgewichtsbedingungen
A	Transformationsmatrix der Formänderungsbedingungen
A_p	Matrix lineare Plastizitätsbedingungen
A_u	Matrix lineare Verformungsbedingungen
A_e	Matrix lineare Deformationsbedingungen
A	Matrix vereinfachte Theorie II. Ordnung (gesamt)
T_v	Transformation zw. abhängigen u. unabhängigen Größen
T_l	Transformationsmatrix der Koordinatenrichtungen
T_z	Zuordnungsmatrix
T	Matrix vereinfachte Theorie II. Ordnung
Q	Steifigkeitsmatrix
Q^{-1}	Flexibilitätsmatrix
Q	Matrix erweiterte Theorie II. Ordnung
F	abhängiger Teil der Funktion der Fließfläche
F'	Ableitung von F
Φ	Fließfunktion (allgemein)
H	Matrix der linearen Verfestigungsfunktion
λ	Vektor der Fließparameter/ plastische Multiplikatoren
s_u	konstantes Glied der Fließfunktion
ε_u, u_u	Grenzwerte der Verzerrungen, Verformungen
$s_0, , u_0$	Vektor Vorspannungen, -verzerrungen, -verschiebungen
s_e, ε_e, u_e	Vektoren der elastischen Teilantwort
s_r, ε_r, u_r	Vektoren der Restantwort
0	Nullvektor
1	Einheitsmatrix oder -vektor
n	Anzahl Knoten
m	Anzahl Elemente
\tilde{x}	Koordinate im Stabelement
ξ	bezogene Koordinate im Stabelement
τ	Stabverdrehungen
$\%$	Potential
l	Länge Stabelement
l_p	Länge des plastischen Gelenkes

Allgemeine Abkürzungen und Formelzeichen

GZT	Grenzzustand der Tragfähigkeit
GZG	Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
ZF	Zielfunktion
NB	Nebenbedingung
MG	Materialgesetz
VTB	Verträglichkeitsbedingung
GGB	Gleichgewichtsbedingung (auch inkl. MB und VTB)
PLB	Plastizitätsbedingung
KB	Komplementaritätsbedingung
DB	Dehnungs- bzw. Verzerrungsbedingung
VB	Verformungsbedingung
NNB	Nichtnegativitätsbedingung
STB	Steifigkeitsbedingung

Abkürzungen nach EC2 oder E DIN 1045-1

G	ständiger Lastanteil
Q	veränderlicher Lastanteil
A_E	seismische Einwirkung
ψ	Kombinationsbeiwert
R	widerstehende Größe
S	einwirkende Größe

Verzeichnis der Abbildungen und Tafeln

Abbildungen

- Abb. 2.1 Beispiel zur Grenzzustandsanalyse
- Abb. 2.2 Elastischer Grenzzustand: Biegemomente und Restzustand, $r_e = 0.95$
- Abb. 2.3 Plastischer Grenzzustand: Biegemomente und Restmomentenzustände
- Abb. 2.4 Adaptiver Grenzzustand: Biegemomente und Restmomentenzustand
- Abb. 2.5 Ergebnis Lastfolgeuntersuchung für Widerstandsintensität von $r = 0.73$
- Abb. 2.6 Ergebnis Lastfolgeuntersuchung bei geringfügiger Unterschreitung des adaptiven Widerstandes $r = 0.72$
- Abb. 2.7 Ergebnis Lastfolgeuntersuchung im adaptiven Grenzzustand $r = 0.73$
- Abb. 2.8 Vergleich Entwicklung der plastischen Krümmungen bei unterschiedlicher Widerstandsintensität (Beispielrahmen, Knoten 1)
- Abb. 3.1 Zur Definition der Strukturvariablen
- Abb. 3.2 Grafische Darstellung der Normalenregel der assoziierten Plastizitätstheorie für einen zweiachsigen Spannungszustand mit isotroper linearer Verfestigung
- Abb. 3.3 Beispiel zur Bildung multilinearer Arbeitslinien durch Superposition elastisch-plastischer Teilkörper
- Abb. 3.4 Schematischer Aufbau und Erweiterung des zeitinvarianten Kuhn-Tucker-Problems für linear elastisch-plastische Materialien
- Abb. 3.5 Ergebnis Grenzzustandsanalyse (Durchbiegungsbegrenzung 30mm an Knoten 3)
- Abb. 3.6 Zur vektoriellen Zerlegung der Tragwerksantwort
- Abb. 3.7 Zur Bestimmung der Umhüllungsantwort bei nichtlinearen Fließbedingungen
- Abb. 3.8 Zur Bestimmung des Vektors der umhüllenden Spannungsantwort bzgl. der linearen Plastizitätsbedingung Φ_1
- Abb. 3.9 Definition der Knoten- und Stabkenngrößen für ebenes Stabelement
- Abb. 3.10 Beispiel für die Linearisierung von Plastizitätsbedingungen
- Abb. 3.11 Zur Erläuterung der Verfestigungsfunktionen für reine Momentenbegrenzung
- Abb. 3.12 Ergebnis einer mehrparametrischen Grenzwiderstandsanalyse für das Beispiel nach Abschnitt 2.3
- Abb. 4.1 Darstellung unterschiedlicher Modellierungsebenen
- Abb. 4.2 Prinzip der Nachweisführung und Grenzzustandsbestimmung

- Abb. 4.3 Vorgang zur Bildung von Polynomfunktionen zur näherungsweisen Abbildung von Beziehungen zwischen Querschnittskenngrößen in Tragwerksmodellen
- Abb. 4.4 Verlauf des Berechnungsprozesses für statische Beanspruchungen nach unterschiedlichen Konzepten
- Abb. 4.5 Beispiel für die Abhängigkeit der zulässigen plastischen Rotation vom Bewehrungsgrad nach [31] mit und ohne vereinfachter Bestimmung der Druckzonenhöhe
- Abb. 4.6 System und Geometrie
- Abb. 4.7 Querschnitte
- Abb. 4.8 Charakteristische Werte der Riegelbelastung und Einzellasten (g =ständige Lastanteile [kN/m], q =veränderliche Lastanteile [kN/m])
- Abb. 4.9 Charakteristische Werte der Stützeigenlasten
- Abb. 4.10 Umhüllende der linearen Normalkraftverteilung (Bemessungswerte) [kN]
- Abb. 4.11 Umhüllende der linearen Biegemomentenverteilung Variante 1 (Bemessungswerte, Rieglmomente beschriftet) [kNm]
- Abb. 4.12 Umhüllende der nichtlinearen Bemessungsmomente Variante 2 (Rieglmomente beschriftet) [kNm]
- Abb. 4.13 Stabiler Restmomentenzustand (Rieglmomente beschriftet) [kNm]
- Abb. 4.14 Umhüllende der nichtlinearen Bemessungsmomente Variante 3a ohne Einbeziehung des Verformungsnachweises (Rieglmomente beschriftet) [kNm]
- Abb. 4.15 Umhüllende der nichtlinearen Bemessungsmomente Variante 3b mit Berücksichtigung des Verformungsnachweises (Rieglmomente beschriftet) [kNm]
- Abb. 4.16 Tragwerksmodell, Querschnittsabmessungen, char. Werte der statischen Lasten, Massen
- Abb. 4.17 Momentenumhüllende infolge Lastfall 1
- Abb. 4.18 Spektrumkompatibler Beschleunigungs-Zeitverlauf (charakteristisch)
- Abb. 4.19 Antwortspektrum (charakteristisch)
- Abb. 4.20 Elastischer Momentenverlauf infolge Erdbeben im Riegel über EG (Stützenreihe B)
- Abb. 4.21 Elastische Momentenumhüllende infolge Lastfall 2
- Abb. 4.22 Stabile Restmomentenverteilung als Ergebnis der deformationsbasierten Grenzwiderstandsaufgabe
- Abb. 4.23 Betonstauchung im Punkt 1
- Abb. 4.24 Biegemoment im Punkt 1 (Zeitverlaufsuntersuchung)

Tafeln

- Tafel 1.1 Beziehungen zwischen strukturmechanischen Größen und Ansatzpunkte für Nachweiskonzepte
- Tafel 2.1 Zur Eindeutigkeit von Restzuständen in Abhängigkeit von der Beanspruchungsintensität
- Tafel 3.1 Schema zur Lösung der plastischen Grenzwiderstandsaufgabe
- Tafel 3.2 Schema zur Lösung der adaptiven Grenzwiderstandsaufgabe
- Tafel 3.3 Allgemeines Schema zur Berechnung des plastischen Grenzwiderstandes $r = r_p$ (mit Verfestigung)
- Tafel 3.4 Fortsetzung von Tafel 3.3: Verformungs- und Deformationsbedingungen – Übergang zur deformationsbasierten Grenzwiderstandsaufgabe für eine Lastsituation (Beispiel)
- Tafel 3.5 Verkürztes Schema zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes (mit Verfestigung) für eine Lastsituation f_0
- Tafel 3.6 Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach dem Konzept des superponierten Restzustandes (mit Verfestigung)
- Tafel 3.7 Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (linear elastisch-idealplastisches Material, $a_{ij} = 1.0$)
- Tafel 3.8 Modifikationen des Schemas Tafel 3.7 zur Ermittlung anderer Grenzzustände
- Tafel 3.9 Grenzwiderstandsaufgabe mit Anpassung der Steifigkeiten an die Schnittgrößensituation
- Tafel 3.10 Schema zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach vereinfachter Theorie II. Ordnung für eine Lastsituation f_0
- Tafel 3.11 Schema zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach Theorie II. Ordnung (ohne Vorverformung, mit Verfestigung) für eine Lastsituation f_0
- Tafel 3.12 Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes nach dem Konzept des superponierten Restzustandes (Theorie II. Ordnung, mit Verfestigung)
- Tafel 3.13 Berechnung des konservativen deformationsbasierten Grenzwiderstandes II. Ordnung nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (maßgebender Lastfall i)

- Tafel 3.14 Berechnung des unteren deformationsbasierten Grenzwiderstandes II. Ordnung nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (ohne Verfestigung)
- Tafel 3.15 Vergleich unterschiedlicher Grenzwiderstandsberechnungen für Beispiel nach Abschnitt 2.3 (nichtmaßgebende Resultate in Klammern)
- Tafel 3.16 Mehrparametrische Optimierungsaufgabe zur Berechnung des deformationsbasierten Grenzwiderstandes
- Tafel 4.1 Schematische Übersicht zum Bemessungskonzept
- Tafel 4.2 Beispiel zur Abhängigkeit von Querschnittskenngrößen vom Fließmoment (nach [80])
- Tafel 4.3 Ergebnis Querschnittsanalyse für Riegelquerschnitt (Feldmitte)
- Tafel 4.4 Berechnungsschema Beispiel 1 (GZT + Verformungsnachweis (GZG)). Mit der Indizierung 1..k werden die zu untersuchenden Lastfälle gekennzeichnet. Der Aufbau der Optimierungsaufgabe folgt prinzipiell den Regeln nach Tafel 3.7 und 3.8
- Tafel 4.5 Prozentualer Vergleich der Bewehrungsmengen (normiert auf lineare Lösung)
- Tafel 4.6 Ergebnis Querschnittsanalyse für Riegelquerschnitt (1.OG, EG)