Jentzen, Eduard

Flächen- und Körperberechnungen nebst zahlreichen Beispielen zum praktischen Gebrauche für Bau- und Maschinentechniker

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2012300010

Jentzen

Flächen- und Körper-Berechnungen

Jentzen, Flächen- und Körper-Berechnungen

E. Jentzen

Flächen- und Körperberechnungen

nebst zahlreichen Beispielen

zum

praktischen Gebrauche

für

Bau- und Maschinentechniker

Dritte erweiterte und verbesserte Auflage

herausgegeben

von

F. Hartmann
Ingenieur in Zerbst

Mit 125 Textabbildungen und Tabellen

W. Homann
1908

Leipzig 1907
Verlag von Bernh. Friedr. Voigt

Vorwort

Von der Verlagsbuchhandlung Bernh. Friedr. Voigt in Leipzig wurde mir der ehrenvolle Auftrag zuteil, das vorliegende, von dem inzwischen verstorbenen Direktor des Thüringischen Technikums zu Ilmenau Ed. Jentzen herausgegebene Werk über Flächen- und Körperberechnungen einer Durchsicht und Umarbeitung zu unterziehen. Diesem Antrage bin ich um so lieber nachgekommen, als ich während meiner längeren Lehrtätigkeit die Erfahrung gemacht habe, daß viele junge Leute, welche eine technische Fachschule besuchen, wegen ihrer unzulänglichen Vorbildung trotz großen Eifers und Fleißes häufig nur geringe Fortschritte machen. Wie bekannt, liegt der Grund in der knappen Zeit, welche auf die Lösung von Aufgaben aus der Flächen- und Körperberechnung verwandt werden kann.

Bei der Durchsicht ließ ich mich daher von dem Gesichtspunkte leiten, die zur Anwendung gelangenden Formeln kurz und leicht verständlich *abzuleiten und dann an einer größeren Zahl von* Beispielen anzuwenden. Hierdurch hoffte ich den Schülern nicht nur ein Lehr- und Repetitionswerk an die Hand zu geben, sondern auch dem in der Praxis stehenden Fachmanne ein zuverlässiges Nachschlagebuch zu bieten.

In diesem Sinne habe ich in der Flächenberechnung neu aufgenommen die Inhaltsbestimmung des gleichseitigen Dreiecks aus der gegebenen Höhe, die Bestimmung des Radius eines Kreises aus Sehne und der dazu gehörigen Segmentenhöhe (Polierregel); in der Körperberechnung sind die Formeln über Inhalt und Oberflächen-berechnung nachbenannter Körper: abgestumpfte Pyramide, Prismatoid (Keil, Obelisk, Ponton), Kugelhaube, Kugelausschnitt und Kugelzone so elementar wie möglich abgeleitet, so daß das Buch von dem Schüler einer technischen Fachschule mit bestem Erfolge studiert werden dürfte, zumal die entwickelten Gleichungen stets durch rechnerische Beispiele erläutert sind.

Die im Anhang befindlichen Tabellen: Spezifische Gewichte, Schwerpunktslagen und besonders die neu aufgenommene über Inhalte, Mäntel und Oberflächen von Körpern, dürfte die Brauchbarkeit des Buches wesentlich erhöhen.

Um den Schülern gleichzeitig den Gebrauch der üblichen Tabellen zu zeigen, ist von mir Wert darauf gelegt worden, in den Beispielen soweit als möglich Tabellenwerte zu benutzen.

So möge denn auch die vorliegende neue, erweiterte und verbesserte Auflage des Jentzenschen Buches sich neue Freunde zu den alten erwerben und seine Bestimmung auch fernerhin erfüllen.

Zerbst, im August 1907

F. Hartmann
Ingenieur

Inhaltsverzeichnis

B. Körperberechnungen.

Tabellen.

Das metrische Maßsystem.

Das Meter ist das Urmaß des dezimalen oder metrischen Maßsystems. Es ist der zehnmillionste Teil des Erdmeridianquadranten und zwar des Quadranten zwischen dem Nordpol und Aequator. Die Einführung dieses Systems, das gegenwärtig bei den meisten Kulturvölkern unseres Erdballes gebräuchlich geworden ist, erfolgte zuerst im Jahre 1799 in Frankreich, nachdem daselbst auf Veranlassung der Regierung der ersten Republik die ersten zuverlässigen Gradmessungen vorgenommen worden waren.

Längenmaße:

1 Meter (m) = 10 Dezimeter (dcm) = 100 Zentimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm).
10 Meter heißen 1 Dekameter (dkm).
100 „ „ 1 Hektometer (hm).
1000 „ „ 1 Kilometer (km).

Flächenmaße:

1 Quadratmeter (qm) = 100 Quadratdezimeter (qdcm) = 10000 Quadratzentimeter (qcm) = 1000000 Quadratmillimeter (qmm).
100 Quadratmeter heißen 1 Ar (a).
10000 „ „ 1 Hektar (ha).
1000000 „ sind gleich 1 Quadratkilometer (qkm).

Körpermaße:

1 Kubikmeter (cbm) = 1000 Kubikdezimeter (cbdcm) = 1000000 Kubikzentimeter (ccm) = 1000000000 Kubikmillimeter (cmm).
1 Kubikdezimeter ist = 0,001 Kubikmeter und heißt 1 Liter (l).
Demnach ist 1 Kubikmeter = 1000 Liter = 10 Hektoliter (hl).
1 Hektoliter (hl) = 100 Liter.

Gewichte:

1 Gramm (g) = 10 Dezigramm (dg) = 100 Zentigramm (cg) = 1000 Milligramm (mg).
1000 Gramm heißen 1 Kilogramm (kg) = 2 Pfund.
1000 Kilogramm heißen 1 Tonne (t).
1 Kilogramm ist das Gewicht von 1 cbdcm oder 1 Liter Wasser bei + 4 ° C.

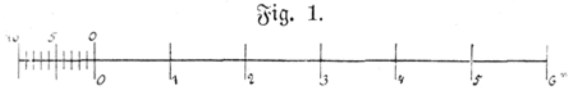
Wie aus den vorstehenden Zusammenstellungen ersichtlich ist, wendet man für die Teile der Einheiten lateinische (Dezi-, Zenti-, Milli-), für die Vielfachen griechische (Deka-, Hekto-, Kilo-) Vorsetzungen an.

A. Flächenberechnungen.

a) Der verjüngte Maßstab.

Eine gemessene Fläche kann auf dem Papier nicht in wahrer Größe dargestellt werden, zur Darstellung benutzt man einen verjüngten Maßstab.

Fig. 1.



Im Maßstabe $^1/_{100}$ ist nach Fig. 1 ein Meter in wahrer Größe

$$= \frac{1 \text{ m}}{100} = 1 \text{ cm auf dem Papier,}$$

ebenso ist 1 dcm in wahrer Größe gleich 1 mm auf dem Papier, im Maßstabe $^1/_{100}$. In Fig. 1 lassen sich 0,1 m direkt abgreifen, 0,01 allenfalls noch schätzen.

Dieser einfache Maßstab enthält bei hohem Grade der Verjüngung die Unterabteilungen mangelhaft, deshalb wendet man bei Flächenberechnungen meistens einen Transversal-Maßstab nach Fig. 2 an.

Aufgabe. Einen Transversal-Maßstab $^1/_{500}$ zu konstruieren.

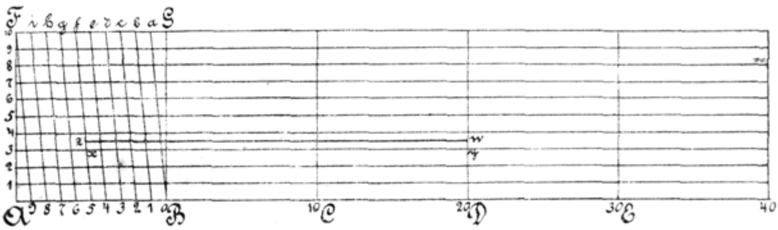
Lösung. Im Maßstabe $^1/_{500}$ sind:

500 m in Wirklichkeit = 1 m auf dem Papier, also
10 m „ „ = 2 cm „ „ „

Wir machen, um den Transversal-Maßstab $^1/_{500}$ zu konstruieren, $AB = BC = CD \ldots = 2$ cm, teilen AB in 10 gleiche Teile, so repräsentiert jedes Teilchen 1 m im Maßstab $^1/_{500}$. In A konstruieren wir AF senkrecht zu AB und tragen auf AF 10 beliebige, aber unter sich gleiche Teile ab; durch die Teilpunkte 1, 2, 3 usw. der Strecke AF ziehen wir gerade Linien parallel zu AB und in B, C, D, E usw. konstruieren wir Senkrechte zu AE. Die Strecke $FG = 2$ cm wird ebenfalls in 10 gleiche

Teile zerlegt, verbinden wir nun die Teilpunkte 0 und a, 1 und b, 2 und c . . . . . . 8 und i und 9 und F, so ist damit der Transversal-Maßstab fertig.

Fig. 2.



Soll auf diesem Maßstabe eine Länge von 25,34 m abgegriffen werden, so kann man 25,3 m in x y direkt abgreifen, 0,04 m kann man schätzen, demnach repräsentiert die Länge z w 25,34 m im Maßstabe $^1/_{500}$.

---

b) Das Parallelogramm.

Wir unterscheiden folgende Parallelogramme:

Fig. 3.

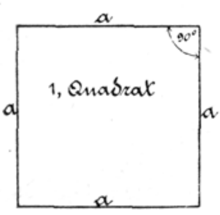


Fig. 3a.

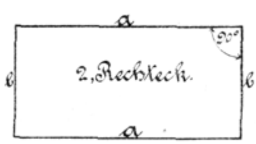


Fig. 3b.

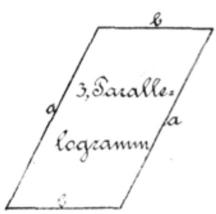


Fig. 3c.

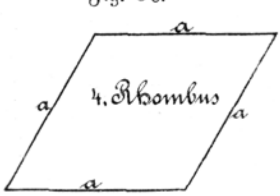


Fig. 4.

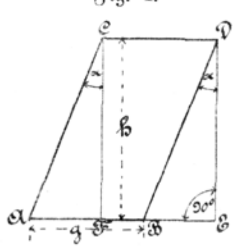


Fig. 4a.

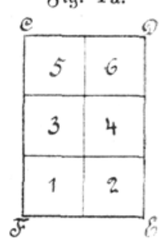
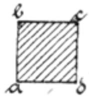


Fig. 4b.



Satz. Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich Grundlinie g mal Höhe h.

Beweis. In Fig. 4 ist Parallelogramm A B C D = Rechteck F C D E, weil △ A C F ≅ △ B D E ist. Quadrat a b c d,

Fig. 4b, sei Einheit der Flächenmaße, dann lassen sich längs der Grundlinie FE des Rechtecks FCDE g und längs der Höhe ED h Einheitsquadrate konstruieren, mithin muß

Fläche $F = gh$ sein.

Beispiele.

1. Ein Bauplatz in einer größeren Stadt ist 30,0 m lang und 22,2 m breit, was kostet derselbe, wenn 1 qm mit 20 Mark bezahlt wird?

Lösung. Fläche $= 30{,}0 \cdot 22{,}2 = 666{,}0$ qm. Kosten $= 666{,}0 \cdot 20 = 13320$ Mark.

---

2. Ein Stück Feld A hat die Form eines Parallelogramms, für das $g = 206{,}2$ m und $h = 140{,}0$ m ist; man will dasselbe gegen ein Stück Feld B umtauschen, das ebenfalls die Form eines Parallelogramms hat, dessen Grundlinie $g_1 = 162{,}0$ m ist, wie groß ist die Höhe h_1?

Lösung. Feld A $= 206{,}2 \cdot 140{,}0 = 28868{,}0$ qm.

$$h_1 = \frac{28868{,}0}{162} = 178{,}2 \text{ m.}$$

---

3. Ein Satteldach von 31,0 m Länge und 15,5 m Höhe (senkrechter Abstand zwischen First und Traufe) soll mit Dachpfannen eingedeckt werden, von denen 34 auf 1 qm kommen, was kosten die Dachpfannen, wenn für 1000 Stück 50 Mark gezahlt werden muß?

Lösung. Dachfläche $= 15{,}5 \cdot 31{,}0 = 480{,}5$ qm.

Dachpfannen $= 480{,}5 \cdot 34 = 16337 \backsim 16400$ wegen Bruch.

$$\text{Kosten} = \frac{16400 \cdot 50}{1000} = 820 \text{ Mark.}$$

---

4. Wie groß ist die Seite eines Quadrats, das einem Rechtecke, für das $g = 242{,}0$ m und $h = 160{,}0$ m ist, inhaltsgleich sein soll?

Lösung. Rechteckfläche $= gh = 242{,}0 \cdot 160{,}0 = 38720{,}0$ qm.

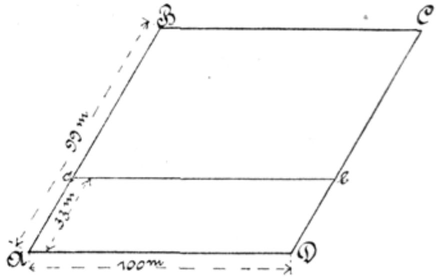
Quadratseite $a = \sqrt{38720} \backsim 197$ m.

---

5. Ein Stück Acker von 9900,0 qm Größe soll durch eine Linie ab parallel zur Grundlinie AD nach Fig. 5 in 2 Teile zerlegt werden und zwar so, daß Parallelogramm AabD gleich $^1/_3$ vom Parallelegramm ABCD wird.

Lösung. Wir messen die Seite A B, dieselbe sei 99,0 m und machen $A\,a = D\,b = \frac{99{,}0}{3} = 33{,}0$, so ist nach Fig. 5 Parallelogramm A a b D das gesuchte.

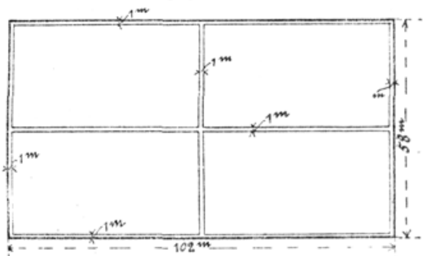
Fig. 5.



6. Ein Garten von rechteckförmiger Gestalt ist 102,0 m lang und 58,0 m breit, rund um den Garten und nach beiden Richtungen liegen rechtwinklig zu einander nach Fig. 6 Fußwege, wie groß ist die Nutzfläche?

Lösung. Nutzfläche $= 58{,}0 \cdot 102{,}0 - 3 \cdot 58{,}0 \cdot 1{,}0 - 3 \cdot 99{,}0 \cdot 1{,}0 = 5916{,}0 - 471{,}0 = 5445{,}0$ qm.

Fig. 6.



c) Das Dreieck.

Wir unterscheiden: gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige, rechtwinklige und schiefwinklige Dreiecke.

Ein Dreieck enthält sechs Bestimmungselemente: drei Seiten und drei Winkel, zur Auflösung müssen drei Elemente, darunter eine Seite, gegeben sein.

Satz. Die Fläche eines Dreiecks ist gleich Grundlinie mal Höhe durch 2,

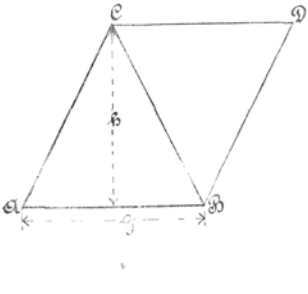
$$\text{d. i. } F = \frac{g\,h}{2}.$$

Beweis. Jedes Dreieck (A B C) kann nach Fig. 7 durch ein kongruentes Dreieck (B C D) zu einem Parallelogramm ergänzt werden, die Dreiecksfläche ist also gleich der Hälfte der Parallelogrammfläche, d. i.

$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

$$F = \frac{g\,h}{2}.$$

Fig. 7.

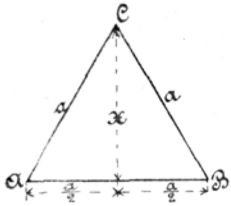


Aufgabe. Die Flächen nachstehender Dreiecke zu berechnen:

1. Das gleichseitige Dreieck, wenn gegeben:

α) Die Seite a (Fig. 8)

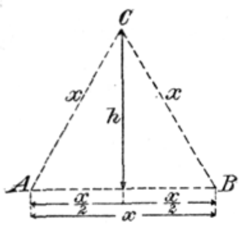
Fig. 8.



$$\text{Fläche } F = \frac{a\,x}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3\,a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

β) Die Höhe h (Fig. 9)

Fig. 9.



$$\text{Fläche } F = \frac{h\,x}{2} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2}{3}h\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}$$

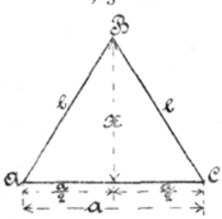
$$x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3}{4}x^2 = h^2$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{3} = h$$

$$x = \frac{2\,h}{\sqrt{3}} = \frac{2\,h\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$$

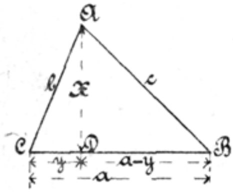
Fig 10.



2. Das gleichschenklige Dreieck (Fig. 10), wenn gegeben die Seiten a und b:

$$\text{Fläche } F = \frac{a\cdot x}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4\,b^2 - a^2}{4}} = \frac{a}{4}\sqrt{(2\,b + a)(2\,b - a)}.$$

Fig. 11.



3. Das ungleichseitige Dreieck (Fig. 11), wenn gegeben die Seiten a, b und c:

1) $\text{Fläche } F = \frac{a \cdot x}{2}.$

2) im Dreieck A C D ist: $b^2 = x^2 + y^2$

3) im Dreieck A D B ist: $c^2 = x^2 + (a - y)^2 = x^2 + a^2 - 2\,a\,y + y^2$

3 von 2 subtrahiert: $b^2 - c^2 = 2\,a\,y - a^2$

d. i. $y = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ in 2) eingesetzt:

$$x^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = b^2$$

$$x^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2 = \left(b + \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2a}\right)\left(b - \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}.$$

4) $$x^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2a} \cdot \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}.$$

Setzt man:

$a + b + c = 2s$, so ist: $a + b + c = 2s$

$-2c = -2c$ addiert

$a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$, ebenso

$a + c - b = 2(s - b)$

$-a + b + c = 2(s - a)$, in 4) eingesetzt:

$$x^2 = \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4a^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

5) $x = \frac{2}{a}\sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$ in 1) eingesetzt:

$$F = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a}\sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$$

Beispiele.

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks betragen 20,0 m bezw. 48,0 m, wie groß ist die Fläche?

Lösung. $F = \frac{48,0 \cdot 20,0}{2} = 480,0$ qm.

---

2. Eine dreieckige Dachfläche habe zur Grundlinie $g = 12,4$ m, zur Höhe $h = 8,2$ m, wie viel Dachpfannen sind zur Eindeckung erforderlich, wenn auf 1 qm 34 Pfannen kommen?

Lösung. Fläche $= \frac{g\,h}{2} = \frac{8,2 \cdot 12,4}{2} = 50,84 \backsim 51$ qm.

Dachpfannen $= 51 \cdot 34 = 1734$.

1000 Pfannen kosten 50 Mark, also:

$$\text{Kosten} = \frac{1734 \cdot 50}{1000} = 86{,}7 \text{ Mark.}$$

---

3. In einem Dreiecke ist Grundlinie $g_1 = 12{,}0$ m, dasselbe soll an Fläche einem Parallelogramm gleichen, für das $g = 22{,}0$ m und $h = 10{,}0$ m ist, wie groß ist h_1?

Lösung. Parallelogrammfläche $= g\,h = 22{,}0 \cdot 10{,}0 = 220{,}0$ qm.

$$\text{Dreiecksfläche } \frac{g_1\,h_1}{2} = \frac{12 \cdot h_1}{2} = 220{,}0 \text{ qm}$$

$$h_1 = \frac{440{,}0}{12} = 36{,}67 \text{ m.}$$

---

4. In einem gleichseitigen Dreieck ist Seite $a = 24{,}0$ m, wie groß ist die Fläche?

Lösung. $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{24{,}0 \cdot 24{,}0}{4} \cdot 1{,}732 = 249{,}41$ qm.

---

5. In einem gleichseitigen Dreieck ist die Höhe $h = 36{,}0$ m, wie groß ist die Fläche?

Lösung. $F = \frac{h^2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{36{,}0 \cdot 36{,}0}{3} \cdot 1{,}732 = 748{,}22$ qm.

---

6. In einem Dreieck ist Seite $a = 10{,}0$, $b = 12{,}0$, $c = 16{,}0$, wie groß ist die Fläche?

Lösung. $F = \sqrt{s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)}$.

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{10{,}0 + 12{,}0 + 16{,}0}{2} = 19{,}0.$$

$s - a = 19{,}0 - 10{,}0 = 9{,}0.$

$s - b = 19{,}0 - 12{,}0 = 7{,}0.$

$s - c = 19{,}0 - 16{,}0 = 3{,}0.$

Fläche $F = \sqrt{19{,}0 \cdot 9{,}0 \cdot 7{,}0 \cdot 3{,}0} = \sqrt{3591} \sim 59{,}93$ qm.

---

d) Das Trapez.

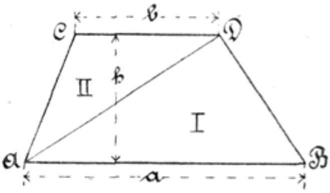
Aufgabe. Nach Fig. 12 die Fläche eines Paralleltrapezes zu berechnen.

Lösung. Gegeben a, b und h ? F

Die Diagonale AD zerlegt das Trapez in die beiden Dreiecke I und II.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\,\mathrm{I} = \dfrac{a\,h}{2} \\[2ex] \triangle\,\mathrm{II} = \dfrac{b\,h}{2} \end{array}\right\}\ \text{addiert.}$$

Fig. 12.



Trapezfläche $= \frac{a + b}{2}\,h =$ **halbe Summe der beiden parallelen Seiten mal Höhe.**

Ist $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, so heißt das Trapez ein gleichschenkliges.

Beispiele.

1. In einem Paralleltrapez ist a = 36,0 m, b = 20,0 m und h = 10,0 m, wie groß ist die Fläche?

Lösung. Fläche $= \frac{a + b}{2}\,h = \frac{36{,}0 + 20{,}0}{2} \cdot 10{,}0 = 280{,}0$ qm.

---

2. Bei einem Walmdache ist die Trauflinie 32,0 m und die Firstlinie 16,0 m, der senkrechte Abstand zwischen beiden beträgt 12,0 m, wie groß ist die Dachfläche? Wie viel Dachziegel sind zur Eindeckung erforderlich, wenn auf 1 qm 40 Ziegel gerechnet werden, was kosten dieselben, wenn 1000 Ziegel 45 Mark kosten?

Lösung. Fläche F $= \frac{32{,}0 + 16{,}0}{2} \cdot 12{,}0 = 288{,}0$ qm.

Ziegel $= 288{,}0 \cdot 40 = 11520.$

Kosten $= \frac{288{,}0 \cdot 40 \cdot 45}{1000} = 518{,}4$ Mark.

---

3. Ein Eisenbahndamm ist 2,0 m hoch und oben 7,83 m breit, wie groß ist das Profil bei $1\frac{1}{2}$facher Böschung? (Fig. 13).

Lösung. Bei Sandschüttung wird die Böschung $1\frac{1}{2}$ fach angenommen, d. h. $x = 1\frac{1}{2}\,h = 1\frac{1}{2} \cdot 2{,}0 = 3{,}0$ m.

Fläche F $= \frac{13{,}83 + 7{,}83}{2} \cdot 2{,}0$

$= 21{,}66$ qm.

Fig. 13.

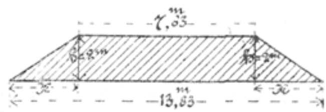
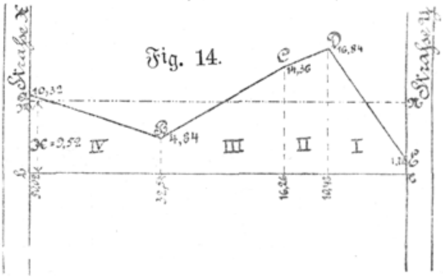


Fig. 14.



4. In einem Paralleltrapez ist $a = 24{,}0$ m, $b = 16{,}0$ m und $h = 12{,}0$ m, wie groß ist die Seite eines Quadrates, das diesem Trapez inhaltsgleich ist?

Lösung. Trapezfläche $= \frac{a + b}{2} h = \frac{24{,}0 + 16{,}0}{2} \cdot 12{,}0 = 240{,}0$ qm.

$$\text{Quadratfläche } x^2 = 240{,}0$$
$$x = \sqrt{240} = 15{,}49 \text{ m.}$$

---

5. Zwei Nachbarn wünschen statt der gebrochenen Grenze A B C D E ihrer Grundstücke eine gerade, welche senkrecht zu den beiden parallelen Straßen X und Y stehen soll, wie ist nach Fig. 14 die Senkrechte M N zu legen, damit keiner benachteiligt werde?

Lösung. Wir messen nach Fig. 14 (Seite 9) die Grenzpunkte A, B, C, D und E in bezug auf eine Senkrechte a b zu den beiden Straßen X und Y ein. Damit keiner von beiden Grundbesitzern zu kurz komme, muß die neue Grenze M N so gelegt werden, daß Rechteck a b M N = Trapez (I + II + III + IV) wird.

$$\begin{aligned} \text{Trapez } (I + II + III + IV) &= 10{,}48 \cdot \frac{16{,}84 + 1{,}72}{2} = 97{,}25 \\ &+ 5{,}78 \cdot \frac{16{,}84 + 14{,}36}{2} = 90{,}17 \\ &+ 16{,}28 \cdot \frac{14{,}36 + 4{,}84}{2} = 156{,}29 \\ &+ 17{,}48 \cdot \frac{4{,}84 + 10{,}32}{2} = 132{,}50 \\ &\text{Summa } 476{,}21 \text{ qm.} \end{aligned}$$

$$\text{Rechteck } a\,b\,M\,N = 50{,}02 \cdot x = 476{,}21$$
$$x = \frac{476{,}11}{50{,}02} = 9{,}52 \text{ m.}$$

Das Trapez kann angewendet werden, um die Fläche eines Polygons aus seinen Koordinaten zu berechnen.

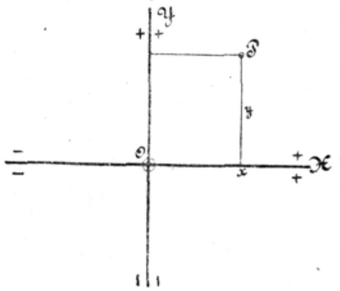
Die beiden in Fig. 15 senkrecht zu einander stehenden Linien X und Y werden Koordinatenachsen genannt, sie dienen dazu, um in der Ebene ein Gebilde festzulegen. Der Durchschnittspunkt O heißt Anfangspunkt. Der Punkt P ist durch seine rechtwinkligen Abstände x und y, Koordinaten genannt, bestimmt. x heißt Abscisse, y Ordinate, und daher die Xachse die Abscissen- und die Yachse die Ordinaten-Achse.

In bezug auf die Richtung der Achsen entscheiden die Vorzeichen nach Fig 15.

Für einfache Fälle der Baupraxis ist zur Flächenberechnung aus den Koordinaten folgendes Verfahren genügend genau:

Man messe die Seiten und Winkel eines Polygons und trage dieselben mit Anwendung des Transporteurs in einem beliebigen Maßstabe auf. Die Seiten werden zweimal gemessen und zum Auftragen das arithmetische Mittel beider Messungen benutzt. Die Winkel werden im Polygone, dessen Winkelsumme $2\,(n - 4)\,R$ beträgt, zusammengestellt, der Fehler darf die Größe $10\sqrt{n}$ (n Anzahl der Eckpunkte des Polygons) nicht überschreiten und wird derselbe dann auf sämtliche Winkelpunkte gleichmäßig verteilt. Entsteht dennoch beim Auftragen ein kleiner Fehler, den man erkennt, indem das Polygon nicht genau schließt, so muß derselbe auf die Seiten verteilt werden.

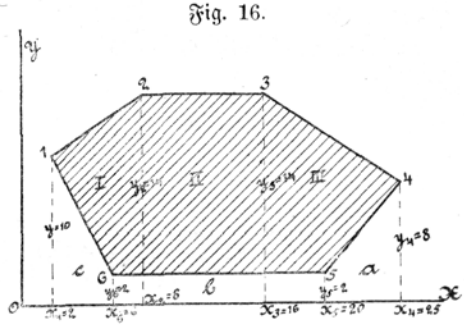
Fig. 15.



Wird das so aufgetragene Polygon auf ein beliebig angenommenes Koordinatensystem bezogen, so benutze man die direkt gemessenen Koordinaten zur Flächenberechnung.

Für das Polygon in Fig. 16 sei gefunden:

Fig. 16.



$$x_1 = 2{,}0; \quad x_2 = 8{,}0; \quad x_3 = 16{,}0;$$
$$y_1 = 10{,}0; \quad y_2 = 14{,}0; \quad y_3 = 14{,}0;$$
$$x_4 = 25{,}0; \quad x_5 = 20{,}0; \quad x_6 = 6{,}0;$$
$$y_4 = 8{,}0; \quad y_5 = 2{,}0; \quad y_6 = 2{,}0;$$

dann ist:

Polygonfläche = Trapezfläche (I + II + III) — Trapezfläche (a + b + c) d. i.

$$= \frac{10{,}0 + 14{,}0}{2}\,6{,}0 + \frac{14{,}0 + 14{,}0}{2}\,8{,}0 + \frac{14{,}0 + 8{,}0}{2}\,9{,}0 - \left[\frac{8{,}0 + 2{,}0}{2} \cdot 5{,}0 + \frac{2{,}0 + 2{,}0}{2} \cdot 14{,}0 + \frac{2{,}0 + 10{,}0}{2} \cdot 4{,}0\right]$$

$$= 72{,}0 + 112{,}0 + 99{,}0 - (25{,}0 + 28{,}0 + 24{,}0) = 283{,}0 - 77{,}0 = 206{,}0 \text{ qm}.$$

Allgemein:

$$\text{Fläche } F = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) + \frac{y_3 + y_4}{2}(x_4 - x_3) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_3 + y_4)(x_4 - x_3) + \ldots\ldots]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x_1(y_6 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_5) + x_5(y_4 - y_6) + x_6(y_5 - y_1)\Big].$$

Enthält das Polygon n Eckpunkte, so lautet hierfür diese Formel, deren Ableitung weitere Schwierigkeiten nicht bieten dürfte, ganz allgemein:

$$F = \frac{1}{2}\Big[x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + \ldots\ldots + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_1)\Big].$$

Hieraus folgt die Regel:

Man multipliziere jede Abscisse mit der Differenz aus der nächst vorhergehenden und nächst nachfolgenden Ordinate und nehme von der algebraischen Summe dieser Produkte die Hälfte.

Nach dieser Formel ist im vorliegenden Beispiele

$$\text{Polygonfläche } F = \frac{1}{2}\Big[2{,}0(2{,}0 - 14{,}0) + 8{,}0(10{,}0 - 14{,}0) + 16{,}0(14{,}0 - 8{,}0) + 25{,}0(14{,}0 - 2{,}0) + 20{,}0(8{,}0 - 2{,}0) + 6{,}0(2{,}0 - 10{,}0)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}(-24{,}0 - 32{,}0 + 96{,}0 + 300{,}0 + 120{,}0 - 48{,}0) = 206{,}0 \text{ qm}.$$

Anm. Größere Flächen werden in der praktischen Geometrie in der Regel nach dieser Formel berechnet.

Zur Aufnahme solcher Flächen dient fast immer ein Polygon als Netz.

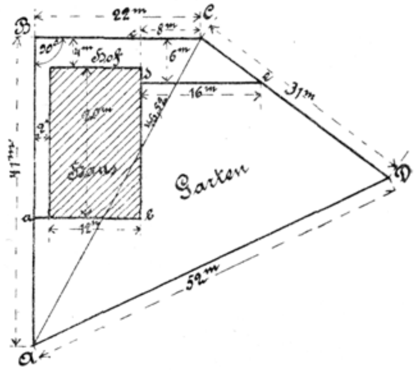
e) Unregelmäßige Vier- und Vielecke.

Diese werden zur Berechnung durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, die Flächensumme der Dreiecke liefert alsdann die Fläche der Vier- und Vielecke.

Beispiele.

1. Ein Grundstück ABCD enthält ein Haus, einen Hof und einen Garten; aus den in Fig. 17 eingeschriebenen Messungszahlen die Fläche jeder Kulturart zu bestimmen. $\sphericalangle B = 90^0$.

Fig. 17.



Lösung. Grundfläche des Hauses $= 12{,}0 \cdot 20{,}0 = 240{,}0$ qm.

Hoffläche $2{,}0 \cdot 20{,}0 + 4{,}0 \cdot 14{,}0 + \frac{8{,}0 + 16{,}0}{2} \cdot 6{,}0 = 168{,}0$ qm.

Viereck ABCD.

Es ist $AC = \sqrt{22^2 + 41^2} = \sqrt{484 + 1681} = \sqrt{2165} = 46{,}53$ m.

1) $\triangle ABC$ ist rechtwinklig

$$\text{Fläche } F = \frac{g\,h}{2} = \frac{41{,}0 \cdot 22{,}0}{2} = 451{,}0 \text{ qm.}$$

2) $\triangle ACD$.

$$\text{Fläche } F = \sqrt{s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)}$$

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{52 + 31 + 46{,}53}{2} = 64{,}765$$

$$s - a = 64{,}765 - 31 = 33{,}765$$

$$s - b = 64{,}765 - 52 = 12{,}765$$

$$s - c = 64{,}765 - 46{,}53 = 18{,}235$$

$$F = \sqrt{64{,}765 \cdot 33{,}765 \cdot 12{,}765 \cdot 18{,}235} = 713{,}46 \text{ qm.}$$

Vierecksfläche (ABCD) $= 451{,}0 + 713{,}46 = 1164{,}46$ qm.

Größe vom Garten $= 1164{,}46 - 240{,}0 - 168{,}0 = 756{,}46$ qm.

---

2. Im Viereck ABCD ist nach Fig. 18 Diagonale $AC = 62{,}0$ m, Höhe $h = 12{,}0$ m und Höhe $h_1 = 28{,}0$ m, wie groß ist die Fläche?

Lösung. $\triangle ABC = \frac{62{,}0 \cdot 12{,}0}{2} = 372{,}0$ qm

$$\triangle ACD = \frac{62{,}0 \cdot 28{,}0}{2} = 868{,}0 \text{ qm}$$

Viereck ABCD $= 1240{,}0$ qm.

---

3. Die Fläche des Fünfecks 12345, Fig. 19, aus den eingeschriebenen Messungszahlen zu berechnen.

Lösung. $\triangle\, 1\,2\,3 = \dfrac{68{,}0 \cdot 10{,}0}{2} = 340{,}0$ qm

$\triangle\, 1\,3\,4 = \dfrac{80{,}0 \cdot 37{,}0}{2} = 1480{,}0$ qm

$\triangle\, 1\,4\,5 = \dfrac{80{,}0 \cdot 36{,}0}{2} = 1440{,}0$ qm

Fünfeck $= 3260{,}0$ qm.

Fig. 18.

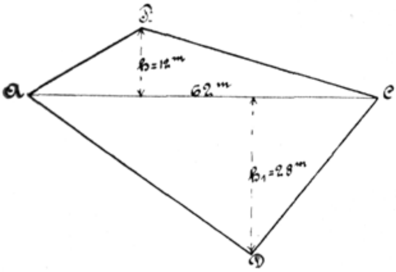
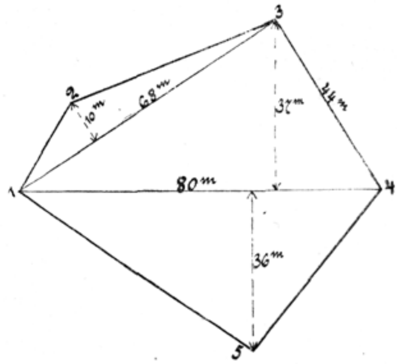


Fig. 19.



Sind die Seiten und Diagonalen des Fünfecks bekannt, so kann man die Dreiecke 1 2 3, 1 3 4 und 1 4 5 auch nach der Formel

$$F = \sqrt{s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)}$$

berechnen, ihre Flächensumme ist dann gleich der Fläche des Fünfecks.

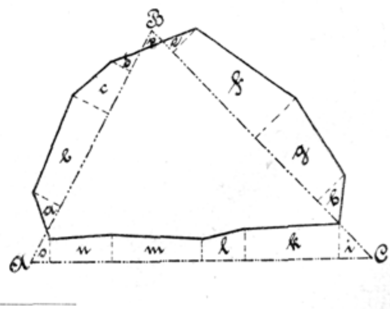
---

f) Krummbegrenzte Flächen.

Krummbegrenzte Flächen werden auf ein Messungsnetz (Dreiecke, Vier- oder Vielecke) bezogen, das von der Form der aufzunehmenden Fläche abhängt, die krumme Grenze wird genügend genau durch Dreiecke und Paralleltrapeze aufgenommen, welche auf die Seiten des Netzes bezogen werden, So ist in Fig. 20 die krummbegrenzte Fläche

$F = \triangle ABC + \triangle (a+d+e+h)$
$+$ Paralleltrapez $(b + c + f + g)$
$- \triangle (o + p + i) -$ Paralleltrapez
$(n + m + l + k)$.

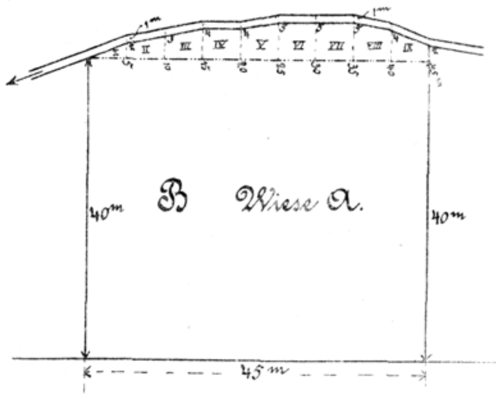
Fig. 20.



Beispiele.

1. Nach Fig. 21 die Fläche der Wiese A zu berechnen.

Fig. 21.



Lösung.

Fläche A = Rechteck B + Dreieck I + Paralleltrapez (II + III .... + IX).

$$\text{Rechteck B} = 40{,}0 \cdot 45{,}0 = 1800{,}0 \text{ qm}$$

$$+ \triangle\ 1 = \frac{5{,}0 \cdot 2{,}0}{2} = 5{,}0 \text{ „}$$

$$+ \text{Paralleltrapez II} = \frac{2{,}0 + 3{,}0}{2} \cdot 5 = 12{,}5 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ III} = \frac{3{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 5 = 17{,}5 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ IV} = \frac{4{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 5 = 20{,}0 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ V} = \frac{4{,}0 + 5{,}0}{2} \cdot 5 = 22{,}5 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ VI} = \frac{5{,}0 + 5{,}0}{2} \cdot 5 = 25{,}0 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ VII} = \frac{5{,}0 + 5{,}0}{2} \cdot 5 = 25{,}0 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ VIII} = \frac{5{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 5 = 22{,}5 \text{ „}$$

$$+ \text{ „ „ IX} = \frac{4{,}0 + 2{,}0}{2} \cdot 5 = 15{,}0 \text{ „}$$

$$\text{Wiese A} = 1965{,}0 \text{ qm.}$$

2. In Fig. 22 ist die krummbegrenzte Fläche F auf das Dreieck ABC bezogen, es soll die Fläche F berechnet werden?

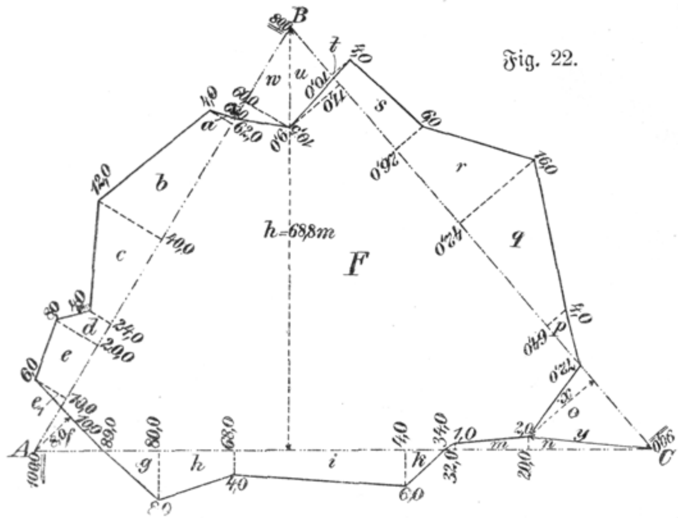


Fig. 22.

Lösung. 1) Fläche F = $\triangle$ ABC + Zugang — Abgang.

$$\triangle \text{ ABC} = \frac{100{,}0 \cdot 68{,}8}{2} = 3440{,}0 \text{ qm.}$$

Zugang.

$$\triangle \text{ a} = \frac{1{,}0 \cdot 4{,}0}{2} = 2{,}0 \text{ qm}$$

$$\text{Paralleltrapez b} = \frac{12{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 22{,}0 = 176{,}0 \text{ „}$$

$$\text{„ „ c} = \frac{12{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 16{,}0 = 128{,}0 \text{ „}$$

$$\text{„ „ d} = \frac{8{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 4{,}0 = 24{,}0 \text{ „}$$

$$\text{„ „ e} = \frac{8{,}0 + 6{,}0}{2} \cdot 10{,}0 = 70{,}0 \text{ „}$$

$$\triangle \text{ e}_1 = \frac{1{,}4 \cdot 6{,}0}{2} = 4{,}2 \text{ „}$$

$$\text{„ g} = \frac{8{,}0 \cdot 9{,}0}{2} = 36{,}0 \text{ „}$$

$$\text{Paralleltrapez h} = \frac{4{,}0 + 8{,}0}{2} \cdot 12{,}0 = 72{,}0 \text{ „}$$

Transport = 512,2 qm

$$\text{Transport} = 512{,}2 \text{ qm}$$

$$\text{Paralleltrapez } i = \frac{6{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 28{,}0 = 140{,}0 \text{ „}$$

$$\triangle\ k = \frac{6{,}0 \cdot 6{,}0}{2} = 18{,}0 \text{ „}$$

$$\triangle\ p = \frac{8{,}0 \cdot 4{,}0}{2} = 16{,}0 \text{ „}$$

$$\text{Paralleltrapez } q = \frac{16{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 22{,}0 = 220{,}0 \text{ „}$$

$$\text{„ „ } r = \frac{6{,}0 + 16{,}0}{2} \cdot 16{,}0 = 176{,}0 \text{ „}$$

$$\text{„ „ } s = \frac{6{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 16{,}0 = 80{,}0 \text{ „}$$

$$\text{Summa} = 1162{,}2 \text{ qm.}$$

Da die Höhe x im Dreieck o (Fig. 22) direkt nicht gegeben ist, erhält man nach Gleichung 5) auf Seite 7

$$x = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad y = \sqrt{20{,}0^2 + 2{,}0^2}$$

$$= \frac{2}{18}\sqrt{26{,}65 \cdot 8{,}65 \cdot 11{,}45 \cdot 6{,}55} \qquad = \sqrt{400{,}0 + 4{,}0}$$

$$= 14{,}61 \text{ m.} \qquad = \sqrt{404} = 20{,}0998$$

$$= \text{rd. } 20{,}1 \text{ m.}$$

Abgang:

$$\triangle\ f = \frac{10{,}0 \cdot 8{,}0}{2} = 40{,}0 \text{ qm.}$$

$$\triangle\ l = \frac{2{,}0 \cdot 1{,}0}{2} = 1{,}0 \text{ „}$$

$$\text{Paralleltrapez } m = \frac{1{,}0 + 2{,}0}{2} \cdot 12{,}0 = 18{,}0 \text{ „}$$

$$\triangle\ n = \frac{20{,}0 \cdot 2{,}0}{2} = 20{,}0 \text{ „}$$

$$\triangle\ o = \frac{18{,}0 \cdot 14{,}6}{2} = 131{,}4 \text{ „}$$

$$\triangle\ t = \frac{1{,}0 \cdot 4{,}0}{2} = 2{,}0 \text{ „}$$

$$\triangle\ u = \frac{11{,}0 \cdot 10{,}5}{2} = 57{,}75 \text{ „}$$

$$\triangle\ w = \frac{17{,}0 \cdot 9{,}0}{2} = 76{,}5 \text{ „}$$

$$\text{Summa} = 346{,}65 \text{ qm.}$$

Setzen wir die gefundenen Werte in 1) ein:

$$\text{Fläche } F = 3440{,}0 + 1162{,}2 - 346{,}65 = 4255{,}55 \text{ qm.}$$

---

3. Der in Fig. 23 dargestellte Teich A ist durch das Dreieck ABC und durch die Messungslinien DE und FG aufgemessen und kartiert, es soll die Fläche desselben berechnet werden.

Lösung. Wir ziehen durch die kartierte Fläche in Richtung ihrer größten Länge die Linie ab, und konstruieren in den Punkten 2, 7, 12 usw. nach Fig. 23, Senkrechte. Die Teichfläche setzt sich alsdann aus den Seg-

Fig. 23.

menten I und IX, die wir als eine Parabelfläche betrachten und nach S. 37 und 38 berechnen und den Paralleltrapezen II, III, IV . . . VIII zusammen; wir erhalten:

$$\text{Teichfläche} = \text{Segmentfläche I} = {}^2/_3 \cdot 2{,}0 \cdot 10{,}0 = 13{,}33 \text{ qm}$$

$$+ \text{Paralleltrapezfl. II} = \frac{10{,}0 + 16{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 65{,}0 \text{ qm}$$

$$+ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{III} = \frac{16{,}0 + 15{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 77{,}5 \text{ "}$$

$$+ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{IV} = \frac{15{,}0 + 13{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 70{,}0 \text{ "}$$

$$+ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{V} = \frac{13{,}0 + 16{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 72{,}5 \text{ "}$$

$$+ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{VI} = \frac{16{,}0 + 20{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 90{,}0 \text{ "}$$

$$+ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{VII} = \frac{20{,}0 + 18{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 95{,}0 \text{ "}$$

$$+ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{VIII} = \frac{18{,}0 + 15{,}0}{2} \cdot 5{,}0 = 82{,}5 \text{ "}$$

$$+ \text{Segmentfläche IX} = {}^2/_3 \cdot 15{,}0 \cdot 4{,}0 = 40{,}0 \text{ "}$$

$$\text{Summa} = 605{,}83 \text{ qm.}$$

Die krummbegrenzte Fläche kann auch nach der Simpsonschen Regel berechnet werden. In Fig. 24 ist:

$$F = \frac{a}{3}\left[b_0 + b_{2n} + 4(b_1 + b_3 + \ldots + b_{2n-1}) + 2(b_2 + b_4 + \ldots + b_{2n-2})\right]$$

Fig. 24.

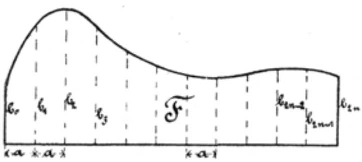
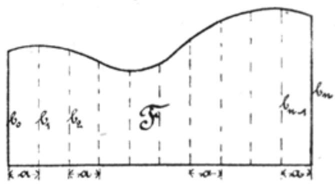


Fig. 25.



oder nach Fig. 25 direkt:

$$F = (b_0 + b_1)\frac{a}{2} + (b_1 + b_2)\cdot\frac{a}{2} + (b_2 + b_3)\frac{a}{2} + \ldots +$$

$$(b_{n-2} + b_{n-1})\frac{a}{2} + (b_{n-1} + b_n)\frac{a}{2}$$

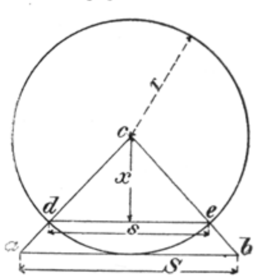
$$= \frac{a}{2}(b_0 + 2\,b_1 + 2\,b_2 + 2\,b_3 + \ldots + 2\,b_{n-2} + b_{n-1} + b_n)$$

$$= \frac{a}{2}(b_0 + b_n) + a(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n).$$

g) Regelmäßige Polygone.

Bezeichnet s die Seite des eingeschriebenen und S die Seite des umgeschriebenen regulären n-Ecks, r den Radius des zugehörigen Kreises, dann ist nach Fig. 26:

Fig. 26.



1) $\triangle\, acb = \frac{S \cdot r}{2}$, also die Fläche F des umschriebenen n-Ecks:

$$F = \frac{n\,S \cdot r}{2},$$ und

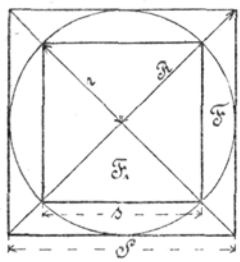
2) $\triangle\, dce = \frac{s \cdot x}{2}$; $\quad x^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{4\,r^2 - s^2},$$ also

$\triangle\, dce = \frac{s}{4}\sqrt{4\,r^2 - s^2}$, d. i. die Fläche F_1 des eingeschriebenen n-Ecks $F_1 = \frac{n \cdot s}{4}\sqrt{4\,r^2 - s^2}$.

Aufgabe. Vorstehende allgemeine Betrachtung auf das regelmäßige Viereck anzuwenden (Fig. 27).

Fig. 27.



Lösung.

1) Geg. s, ? F_1.

$$F_1 = s^2.$$

2) Geg. S, ? F.

$$F = S^2.$$

3) Geg. r, ? F_1.

$$F_1 = 2\,\frac{2\,r \cdot r}{2} = 2\,r^2.$$

4) Geg. R, ? F.

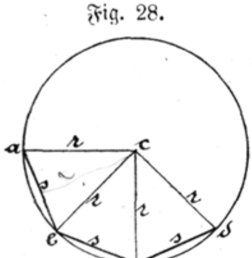
$$F = 2\,\frac{2\,R \cdot R}{2} = 2\,R^2.$$

In ähnlicher Weise läßt sich diese Betrachtung für jedes regelmäßige Polygon durchführen, die Resultate sind für einige regelmäßige Vielecke in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Nr.	Regelmäßiges Vieleck	Fläche	Seite s	Fläche
1	Dreieck	0,43301 s^2	1,7320 r	1,29904 r^2
2	Viereck	1,00000 s^2	1,41421 r	2,0000 r^2
3	Fünfeck	1,72057 s^2	1,17557 r	2,37764 r^2
4	Sechseck	2,59808 s^2	1,0000 r	2,59808 r^2
5	Siebeneck	3,63414 s^2	0,86776 r	2,73640 r^2
6	Achteck	4,8284 s^2	0,76537 r	2,82843 r^2
7	Neuneck	6,18182 s^2	0,68404 r	2,89254 r^2
8	Zehneck	7,69421 s^2	0,61803 r	2,93893 r^2
9	Zwölfeck	11,19615 s^2	0,51764 r	3,0000 r^2
10	Sechszehneck	20,10936 s^2	0,39018 r	3,06148 r^2
11	Zwanzigeck	31,56875 s^2	0,31287 r	3,09017 r^2

Vorstehende Tabelle ist auf Fig. 28 zu beziehen.

Fig. 28.



Beispiele.

1. Die Seite einer regelmäßigen achteckförmigen Mühlenwelle ist 0,2 m, wie groß ist der Querschnitt?

Lösung. Nach vorstehender Tabelle ist:

$$\text{Fläche } F = 4{,}8284 \cdot 0{,}2^2 = 4{,}8284 \cdot 0{,}04$$
$$\infty = 0{,}19314 \text{ qm}.$$

2. Die Basis eines Turmes wird durch ein regelmäßiges Sechseck gebildet, dessen äußere Seite = 1 m und dessen innere = 0,8 m ist, wie groß ist der Turmquerschnitt?

Lösung. Turmquerschnitt = f, Fläche des äußeren Sechseck = F, Fläche des inneren = F_1, also

$$f = F - F_1.$$

Nach vorstehender Tabelle ist:

$$\begin{aligned} F &= 2{,}598 \cdot 1^2 \sim = 2{,}5981 \\ F_1 &= 2{,}598 \cdot 0{,}8^2 \sim = 1{,}6728 \\ \hline f &= 0{,}9253 \text{ qm.} \end{aligned}$$

---

3. Mit 2 m als Radius wird ein Kreis beschrieben, wie groß ist die Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecks, Fünfecks, Siebenecks, Neunecks und Sechzehnecks?

Lösung. Nach vorstehender Tabelle ist die

Dreieckseite	$s = 2{,}0 \cdot 1{,}732 = 3{,}464$ m.
Fünfeckseite	$s = 2{,}0 \cdot 1{,}176 = 2{,}352$ m.
Siebeneckseite	$s = 2{,}0 \cdot 0{,}868 = 1{,}736$ m.
Neuneckseite	$s = 2{,}0 \cdot 0{,}684 = 1{,}368$ m.
Sechzehneckseite	$s = 2{,}0 \cdot 0{,}390 = 0{,}780$ m.

---

4. Der Unterbau einer Windmühle habe die Form eines regelmäßigen Achtecks, das von Ecke zu Ecke durch die Mitte 14 m messe. Wie groß ist der Umfang und Querschnitt des Achtecks?

Lösung. Nach vorstehender Tabelle ist: $F = 2{,}8284\, r^2$.

$$2\,r = 14{,}0; \quad r = 7{,}0 \text{ m.}$$

$$F = 2{,}8284 \cdot 7{,}0^2 = 2{,}8284 \cdot 49 \sim = 138{,}592 \text{ qm.}$$

Seite $s = 0{,}765 \cdot 7{,}0 = 5{,}355$ m.

Umfang $= 8 \cdot 5{,}355 = 42{,}84$ m.

---

5. Ein Kreis hat 4 m Durchmesser, wie groß ist die Seite und die Fläche eines eingeschriebenen regelmäßigen Sieben- und Sechzehnecks?

Lösung. 1) Siebeneck.

Nach vorstehender Tabelle ist: $s = 0{,}868 \cdot 2{,}0 = 1{,}736$ m.

$$F = 2{,}7364 \cdot 2{,}0^2 = 10{,}9456 \text{ qm.}$$

2) Sechzehneck.

Nach vorstehender Tabelle ist: $s = 0{,}390 \cdot 2{,}0 = 0{,}780$ m.

$$F = 3{,}0615 \cdot 2{,}0^2 = 12{,}246 \text{ qm; ebenso:}$$

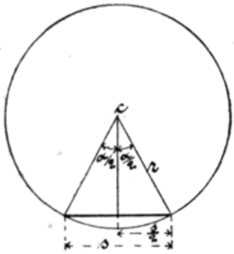
$$F = 20{,}1095\, s^2 = 20{,}1095 \cdot 0{,}780^2 = 12{,}235 \text{ qm.}$$

Anhang.

Trigonometrische Lösung.

1. Das eingeschriebene Polygon.

Fig. 29.



s = Polygonseite, r = Radius des umschriebenen Kreises, n = Seitenanzahl, also $u = s\,n$ = Umfang.

1. Geg. r, ? s, u und F.

Nach Fig. 27 ist $\sphericalangle \alpha = \frac{360^0}{n}$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{360^0}{2\,n} = \sin\frac{180^0}{n} = \frac{\frac{s}{2}}{r} = \frac{s}{2\,r}.$$

1) $2\,r\sin\frac{180^0}{n} = s.$

2) $u = n\cdot s = 2\,n\cdot r\cdot\sin\frac{180^0}{n}.$

3) $F = n\cdot\triangle$

$= n\cdot\frac{s}{2}\cdot h$

$= \frac{n}{2}\cdot 2\,r\cdot\sin\alpha/_2\;r\cdot\cos\alpha/_2$

$= n\,r^2\sin\alpha/_2\cos\alpha/_2$

$= n\cdot r^2\cdot\frac{\sin\alpha}{2}$

$= \frac{n}{2}\,r^2\sin\alpha = \frac{n}{2}\,r^2\sin\frac{360^0}{n}$

$\frac{h}{r} = \cos\alpha/_2$

$h = r\cdot\cos\alpha/_2$

$2\sin\alpha/_2\cos\alpha/_2 = \sin\alpha$

$\sin\alpha/_2\cos\alpha/_2 = \frac{\sin\alpha}{2}$

2. Geg. s, ? r.

Aus Gleichung 1) folgt: $r = \frac{s}{2\sin\frac{180^0}{n}}.$

Beispiele.

1. Es sei $r = 20{,}0$ m, ? s und u
$n = 15.$

Lösung. Es ist: $s = 2\,r\cdot\sin\frac{180^0}{n}$

$= 2\cdot 20\cdot\sin\frac{180^0}{15} = 40\cdot\sin 12^0$

$= 40\cdot 0{,}2079 = 8{,}316$ m.

$u = s\cdot n = 8{,}316\cdot 15 = 124{,}74$ m.

---

2. Geg. $s = 16$ m, $n = 18$? r.

Lösung. $r = \dfrac{s}{2 \cdot \sin \dfrac{180^0}{18}} = \dfrac{16}{2 \cdot \sin 10^0} = \dfrac{16}{2 \cdot 0{,}1736} = \dfrac{16}{0{,}3472}$

$r = 46{,}08$ m.

3. Geg. $r = 24{,}0$, $n = 12$? F.

Lösung.

$$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^0}{12} = \frac{n}{2} r^2 \sin 30^0 = \frac{n}{2} r^2 \cdot \frac{1}{2} = 3 r^2 = 3 \cdot 24{,}0^2$$

$$= 1728{,}0 \text{ qm.}$$

---

2. Das umgeschriebene Polygon.

S = Seite des regelmäßigen n-Ecks, r = Radius des zugehörigen Kreises, n = Seitenanzahl. $U = n \cdot S$ = Umfang.

1. Geg. r, ? S und F.

Nach Fig. 30 ist:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{360^0}{2n} = \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} = \frac{\frac{S}{2}}{r} = \frac{S}{2r}.$$

1) $S = 2 r \operatorname{tg} \dfrac{180^0}{n}$.

$U = n \cdot S = 2 n r \operatorname{tg} \dfrac{180^0}{n}$.

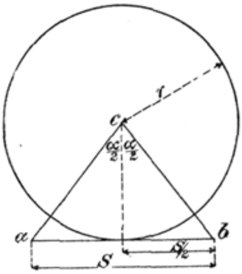
2) $F = n \triangle$

$= n \cdot \dfrac{S}{2} \cdot r$

$= n r \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot r$

$= n r^2 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{180^0}{n}$.

Fig. 30.



2. Geg. S, ? r.

Aus Gleichung 1) folgt:

$$r = \frac{S}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180^0}{n}}.$$

Beispiele.

1. Geg. $r = 10{,}0$ m, $n = 9$? S, U und F.

Lösung. 1) $S = 2\,r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{9}$

$= 2 \cdot 10 \cdot \mathrm{tg}\,20^0 = 20 \cdot 0{,}3640 = 7{,}280$ m.

2) $U = n \cdot S = 9 \cdot 7{,}280 = 65{,}52$ m.

3) $F = n\,r^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n} = 9 \cdot 10{,}0^2 \cdot \mathrm{tg} \cdot 20^0 =$

$= 9 \cdot 100{,}0 \cdot 0{,}3640 = 900 \cdot 0{,}364 = 327{,}6$ qm.

2. Geg. $S = 12{,}0$ m, $n = 15$? r.

Lösung. $r = \dfrac{S}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}} = \dfrac{12}{2\,\mathrm{tg}\,12^0} = \dfrac{12}{2 \cdot 0{,}2126} = \dfrac{12}{0{,}4252}$,

$r = 28{,}22$ m.

h) **Der Kreis.**

1. Den Kreisumfang aus dem Durchmesser zu berechnen. (Rektifikation.)

r = Radius, s = Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, S = Seite des umschriebenen regelmäßigen n-Ecks und s_1 = Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 2 n-Ecks.

Aufgabe 1. Geg. r und s, ? S.

Lösung. Nach Fig. 31:

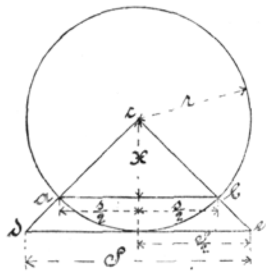


Fig. 31.

$$x : r = \frac{s}{2} : \frac{S}{2} = s : S.$$

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} : r = s : S$$

$$S = \frac{r \cdot s}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}.$$

Z. B. $n = 6$, so ist bekanntlich $s = r$, also

$$S = \frac{r \cdot s}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}} = \frac{r \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\sqrt{\frac{3}{4}\,r^2}} = \frac{r^2}{\frac{r}{2}\sqrt{3}} = \frac{2\,r}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\,r\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r = 1{,}155\,r.$$

$r = 10{,}0$ m $= s$.

$S = 1{,}155 \cdot 10{,}0 = 11{,}55$ m,

Aufgabe 2. Geg. s und r, ? s_1.

Lösung. Nach Fig. 32 ist:

$$2\,r : s_1 = s_1 : y$$

$$y = r - x = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}, \text{ also}$$

$$2\,r : s_1 = s_1 : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)$$

$$s_1 = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

z. B. 1. $n = 4 \cdot s = r\sqrt{2}$

$$s_1 = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{(r\sqrt{2})^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{2\,r^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{\frac{r^2}{2}}}$$

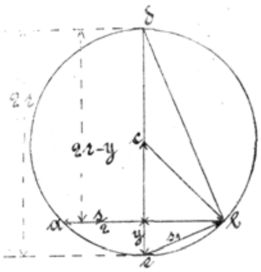
$$= \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{\frac{2\,r^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2\,r^2 - r^2\sqrt{2}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$= 0{,}765\,r.$$

Fig. 32.



2. $n = 6.$ $s = r.$

$$s_1 = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{\frac{3\,r^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2\,r^2 - r^2\sqrt{3}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}518\,r.$$

Ist z. B. $r = 10{,}0$ m $= s$, also beim Sechseck, so ist beim Zwölfeck $s_1 = 5{,}18$ m.

Berechnen wir uns hiernach den Umfang des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, so liegt zwischen beiden der Kreisumfang. Aus der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks berechnen wir die des Zwölfecks und hieraus die des umgeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks; zwischen dem Umfang dieses ein- und umgeschriebenen Zwölfecks liegt der Kreisumfang. Aus den Umfängen der Zwölfecke berechnen wir die der Vierundzwanzigecke und hieraus die der Achtundvierzigecke u. s. f. Die Resultate dieser Rechnungen enthält folgende Tabelle:

Seitenzahl	Halber Umfang des eingeschriebenen Polygons	Halber Umfang des umgeschriebenen Polygons
6	3,00000 r	3,464101 r
12	3,10583 r	3,215390 r
24	3,13263 r	3,159660 r
48	3,13935 r	3,146086 r
96	3,14103 r	3,142714 r
192	3,14145 r	3,141874 r
384	3,14156 r	3,141647 r
768	3,14158 r	3,14161 r
1536	3,14159 r	3,14160 r
usw.	usw.	usw.

Hiernach ist also der halbe Kreisumfang $= 3{,}14159\ldots r$, die Zahl 3,14159 ... setzt man ganz allgemein $= \pi$, es ist:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950\ldots$$

π ist eine irrationale Zahl, in der Regel rechnet man $\pi = 3{,}1416$. Der Kreisumfang ist hiernach $= 2\,r\,\pi = d\,\pi$.

Beispiele.

1. Ein kreisrunder Baum hat 6,5973 m Umfang, wie groß ist sein Durchmesser?

Lösung. $d\,\pi = 6{,}5973$

$$d = \frac{6{,}5973}{\pi} = 2{,}1 \text{ m}.$$

2. Ein Wagenrad hat 1,6 m Durchmesser, wie groß ist der Umfang?

Lösung. $u = d\,\pi = 1{,}6 \cdot \pi = 5{,}026$ m.

3. Die Hinterräder eines Wagens haben 1,2 m, die Vorderräder 0,96 m Durchmesser, wie oft mal drehen sich beide um, wenn der Wagen 1 Meile durchläuft?

Lösung. Umfang der Hinterräder $= 1{,}2 \cdot \pi = 3{,}77$ m

„ „ Vorderräder $= 0{,}96 \cdot \pi = 3{,}016$ m,

das Hinterrad dreht sich $\frac{7500}{3{,}77} = 1989{,}38$ mal,

„ Vorderrad „ „ $\frac{7500}{3{,}016} = 2486{,}74$ mal.

4. Ein Kammrad hat 2,0 m Radius und 120 Zähne, wie weit stehen die Zähne von Mitte zu Mitte ab?

Lösung. $\text{Zahnabstand} = \frac{2\,r \cdot \pi}{120} = \frac{2 \cdot 2{,}0 \cdot \pi}{120} = 0{,}10472$ m.

5. Zwei Räder greifen ineinander, der Radius R des größeren Rades ist gleich 0,399 m, der des kleineren r ist gleich 0,133 m, die Teilung Zahnbreite + Zahnlücke) ist 0,038 m, wie viel Zähne erhält jedes Rad?

Lösung. Das große Rad erhält:

$$\frac{2\,R\,\pi}{0{,}038} = \frac{2 \cdot 0{,}399 \cdot \pi}{0{,}038} = \frac{2507}{38} = 66 \text{ Zähne.}$$

Das kleine Rad erhält:

$$\frac{2\,r\,\pi}{0{,}038} = \frac{2 \cdot 0{,}133 \cdot \pi}{0{,}038} = \frac{835{,}66}{38} = 22 \text{ Zähne.}$$

6. Die Geschwindigkeit (Weg pro Sekunde) einer Lokomotive beträgt 10,0 m, das Triebrad macht in der Minute 120 Umdrehungen, wie groß ist der Durchmesser?

Lösung. Weg pro Minute $= 120 \cdot d \cdot \pi = 10{,}0 \cdot 60$.

$$d = \frac{600}{120\,\pi} = \frac{5}{\pi} = \frac{5}{\pi} = 1{,}59 \text{ m.}$$

7. Ein Wasserrad hat 5,0 m Durchmesser und dreht sich mit 1,5 m Geschwindigkeit, wie groß ist die Umdrehungszahl pro Minute?

Lösung $d\,\pi = 5{,}0 \cdot \pi = 15{,}708$ m = Weg bei einer Umdrehung.

Weg pro Minute $= 1{,}5 \cdot 60 = 90$ m.

$$n = \frac{90}{15{,}708} = 5{,}73 \text{ mal.}$$

8. Ein Schwungrad mit 20,0 m Geschwindigkeit macht in der Minute 80 Umdrehungen, wie groß ist der Durchmesser?

Lösung. $80\,d\,\pi = 20{,}0 \cdot 60$;

$$d = \frac{20 \cdot 60}{80 \cdot \pi} = \frac{15}{\pi} = 4{,}77 \text{ m.}$$

9. Eine Riemenscheibe von 2,0 m Durchmesser macht in der Minute 200 Umdrehungen, wie groß ist die Geschwindigkeit?

Lösung. Geschwindigkeit v = Weg in der Sekunde

$$= \frac{200 \cdot d\,\pi}{60} = \frac{200 \cdot 2{,}0 \cdot \pi}{60} = 20{,}943 \text{ m.}$$

10. Ein Kreis hat 4,6 m Durchmesser, wie groß ist der Bogen b des Zentriwinkels 30°.

Lösung. $b = 4{,}6 \cdot \pi \frac{30^0}{360^0} = \frac{14{,}451}{12} = 1{,}204$ m.

11. Der Umfang eines Kreises sei 26,5 m, wie groß ist der Zentriwinkel zum Bogen 5,3 m.

Lösung. $\frac{b}{360} = \frac{5{,}3}{26{,}5} = \frac{1}{5}$;

$$b = \frac{1}{5} \cdot 360^0 = 72^0.$$

12. Welcher Bogen ist gleich dem Radius?

Lösung. $\frac{r}{2 r \pi} = \frac{b}{360}$;

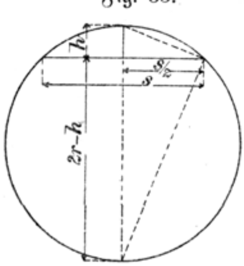
$$b = \frac{360}{2 \pi} = 57^0 17' 44{,}82''.$$

2. Den Kreisradius aus der Sehne (der Spannweite) und der Bogenhöhe (dem Stich) zu berechnen.

r = Radius, s = Sehne und h = Bogenhöhe.

1. Lösung. Nach Fig. 33 ist:

Fig. 33.

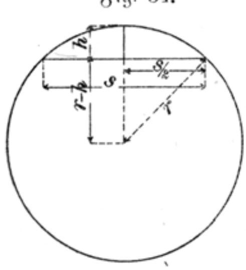


$$r^2 = (s/_2)^2 + (r - h)^2$$
$$r^2 = (s/_2)^2 + r^2 - 2 h r + h^2$$
$$2 h r = (s/_2)^2 + h^2$$
$$r = \frac{(s/_2)^2 + h^2}{2 h}$$

2. Lösung. Nach Fig. 34 ist:

$$(2 r - h) \cdot h = (s/_2)^2$$
$$2 r h - h^2 = (s/_2)^2$$
$$2 r h = (s/_2)^2 + h^2$$
$$r = \frac{(s/_2)^2 + h^2}{2 h}$$

Fig. 34.



Beide Lösungen ergeben dasselbe Endresultat und liefern zugleich den mathematischen Beweis einer alten Polier-Regel, welche lautet:

Der Radius eines Kreises ist gleich: halbe Spannweite mal halbe Spannweite plus Stich mal Stich durch doppelten Stich.

Beispiele.

1. Ein Gewölbe hat 6,0 m Spannweite, $^1/_8$ Stich ($^1/_8$ der Spannweite = 0,75 m). Wie groß ist der zugehörige Radius?

$$r = \frac{(s/_2)^2 + h^2}{2\,h} = \frac{3{,}0^2 + 0{,}75^2}{2 \cdot 0{,}75} = \frac{9{,}0 + 0{,}5625}{1{,}5} = \frac{9{,}5625}{1{,}5} = 6{,}375 \text{ m}.$$

2. Der Durchmesser einer Kugelschale beträgt 0,6 m, die Höhe 0,06 m. Wie groß ist der Radius der zugehörigen Kugel?

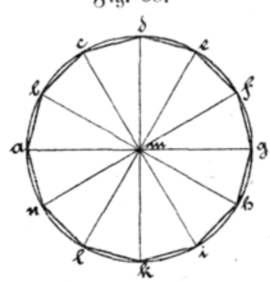
$$r = \frac{(s/_2)^2 + h^2}{2\,h} = \frac{0{,}3^2 + 0{,}06^2}{2 \cdot 0{,}06} = \frac{0{,}09 + 0{,}0036}{0{,}12} = \frac{0{,}0936}{0{,}12} = 0{,}78 \text{ m}.$$

3. Die Kreisfläche zu berechnen (Quadratur).

Die Kreisfläche ist gleich der Fläche eines eingeschriebenen regelmäßigen Polygons von unendlich vielen Seiten. Der Umfang dieses Polygons ist $2\,r\,\pi$, also Kreisfläche

$$F = 2\,r \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} = r^2\,\pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \frac{d^2\,\pi}{4}.$$

Fig. 35.



Beispiele.

1. Wie groß ist die Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser = 8,0 m ist?

Lösung. $F = \frac{d^2\,\pi}{4} = \frac{8{,}0^2 \cdot \pi}{4} = 50{,}27$ qm.

2. Ein kreisrunder Baumstamm hat 220 cm Umfang, wie groß ist der Durchmesser und Querschnitt?

Lösung. $d\,\pi = 220$

$$d = \frac{220}{\pi} \backsim = 70{,}0 \text{ cm}.$$

$$F = \frac{d^2\,\pi}{4} = \frac{70{,}0^2 \cdot \pi}{4} = 3848{,}45 \text{ qcm}.$$

3. Die Fläche eines Kreises beträgt 6939,78 qcm, wie groß ist der Umfang und Radius?

Lösung. $\frac{d^2 \pi}{4} = 6939{,}78;$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 6939{,}78}{\pi}} = 94{,}0 \text{ cm, also } r = 47{,}0 \text{ cm.}$$

$$d\pi = 94{,}0 \cdot \pi = 295{,}31 \text{ cm.}$$

---

4. Eine kreisrunde schmiedeeiserne Zugstange soll 15000 kg Zug aufnehmen, wie groß ist ihr Durchmesser und Querschnitt, wenn 1 qmm Querschnitt 9,0 kg Zug aufnehmen darf?

Lösung. $F = \frac{15000}{9{,}0} = 1666{,}67 \text{ qmm} = \frac{d^2 \pi}{4};$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 1666{,}67}{\pi}} = 46{,}1 \text{ mm.}$$

---

5. Eine kreisrunde Holzstütze von geringer Länge soll 9000 kg Druck aufnehmen, wie groß ist der Querschnitt und Durchmesser, wenn 1 qcm mit 60 kg Druck belastet werden darf?

Lösung. $F = \frac{9000}{60} = 150{,}0 \text{ qcm} = \frac{d^2 \pi}{4};$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 150{,}0}{\pi}} = 13{,}8 \text{ cm;}$$

$$r = 6{,}9 \text{ cm.}$$

---

6. Die Radien zweier Kreise betragen 4,0 m bezw. 6,0 m, wie verhalten sich die Flächen?

Lösung. $\frac{F}{F_1} = \frac{4{,}0^2 \pi}{6{,}0^2 \pi} = \frac{4{,}0^2}{6{,}0^2}$ d. h. wie die Quadrate der Radien.

---

7. Ein kreisrunder Platz von 16,0 m Durchmesser soll mit Klinkern abgepflastert werden, von denen 40 Stück auf 1 qm kommen, 1000 Klinker kosten 30 Mark, was kosten die Klinkersteine?

Lösung. $F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{16{,}0^2 \cdot \pi}{4} = 201{,}06 \text{ qm.}$

$$\text{Steine} = 201{,}06 \cdot 40 = 8042{,}4 \sim 8043.$$

$$\text{Kosten} = \frac{8043 \cdot 30}{1000} = 241{,}29 \text{ Mark.}$$

---

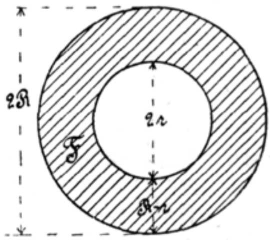
8. Ein russisches Rauchrohr habe 20,0 cm Durchmesser. Auf 80,0 qcm Rohrquerschnitt rechnet man einen Ofen. Wie viel Oefen darf man in das Rohr münden lassen?

Lösung. Rohrquerschnitt $= \frac{20,0^2 \cdot \pi}{4} = 314,16$ qcm.

$$\text{Oefenanzahl} = \frac{314,16}{80} \infty = 4.$$

3. Der Kreisring.

Fig. 36.



Nach Fig. 36 ist für den Kreisring der innere Umfang $= 2\,r\,\pi$ und der äußere Umfang $= 2\,R\,\pi$.

Die Kreisringfläche ist gleich der Differenz der Kreisflächen der Radien R und r, d. i.

Kreisringfläche $F = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$
$= \pi(R + r)(R - r)$.

Beispiele.

1. In einem Kreisringe ist $R = 20,0$ m, $r = 16,0$ m, wie groß ist die Fläche F?

Lösung.

$$F = R^2\pi - r^2\pi = 20,0^2 \cdot \pi - 16,0^2 \cdot \pi = \pi(400 - 256) = 144\,\pi$$
$$= 452,39 \text{ qm.}$$

2. Der äußere Umfang eines Kreisringes betrage 169,65 cm, der innere 135,09 cm, wie groß ist D, d und F?

Lösung. $D\pi = 169,65$;

$$D = \frac{169,65}{\pi} = 54,0 \text{ cm};$$

$$d = 135,09;$$

$$d = \frac{135,09}{\pi} = 43,0 \text{ cm.}$$

$$F = \frac{D^2\pi}{4} - \frac{d^2\pi}{4} = 2290,22 - 1452,20 = 838,02 \text{ qm.}$$

3. Der äußere Durchmesser eines Brunnens sei 2 m, der innere 1,5 m, wie stark ist die Brunnenmauer und wie groß ist ihr Querschnitt?

Lösung. Mauerdicke $= \frac{2,0 - 1,5}{2} = 0,25$ m;

$$\text{Mauerquerschnitt} = \frac{2,0^2\pi}{4} - \frac{1,5^2\pi}{4} = 3,1416 - 1,7671 = 1,3745 \text{ qm.}$$

4. Eine Kuh ist auf der Weide mittels eines Seiles an einen Pfahl gebunden, sie frißt in 2 Tagen das Gras ab, das sie erreichen kann, darauf wird das Seil noch einmal so lang gemacht, wie lange hat die Kuh nun noch zu fressen?

Lösung. Bezeichnen wir den Radius des inneren Kreises mit r, so ist die abgefressene Fläche $= r^2 \pi$. Wird das Seil noch einmal so lang gemacht, so kann die Kuh begrasen die Fläche: $(2\,r)^2 \pi - r^2 \pi = 4\,r^2 \pi - r^2 \pi = 3\,r^2 \pi$.

Zu der Fläche $r^2 \pi$ gebraucht die Kuh 2 Tage, sie kommt folglich mit der Fläche $3\,r^2 \pi$ noch 6 Tage aus.

5. Eine kurze gußeiserne Säule von kreisförmigem Querschnitt (D = 210 mm und d = 170 mm) darf pro Quadratmillimeter mit 7,5 kg belastet werden, welche Last kann die Säule tragen?

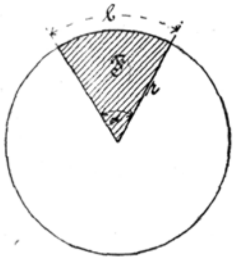
Lösung $$\text{Fläche} = \frac{D^2 \pi}{4} - \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{210{,}0^2 \cdot \pi}{4} - \frac{170{,}0^2 \cdot \pi}{4}$$
$$= 34636{,}0 - 22698{,}0 = 11938 \text{ qmm.}$$
$$\text{Belastung} = 11938{,}0 \cdot 7{,}5 = 99535 \text{ kg.}$$

6. Eine kurze gußeiserne Säule wird mit 150 000 kg belastet, das Höhlungsverhältnis $\frac{d}{D} = 0{,}8$, wie groß ist der innere und äußere Durchmesser des Querschnitts, wenn ein Quadratmillimeter mit 7,5 kg belastet werden darf.

Lösung.

$$\text{Querschnitt } F = \left(\frac{D^2 - d^2}{4}\right)\pi = \left(\frac{D^2 - (0{,}8\,D)^2}{4}\right)\pi$$
$$= \left(\frac{D^2 - 0{,}64\,D^2}{4}\right)\pi = \left(\frac{1 - 0{,}64}{4}\right) D^2 \pi.$$
$$F = \frac{0{,}36\,D^2 \pi}{4} = \frac{150000}{7{,}5} = 20000 \text{ qmm.}$$
$$D = \sqrt{\frac{2000 \cdot 4}{0{,}36 \cdot \pi}} = 265{,}97 \text{ mm.}$$
$$d = 0{,}8\,D = 0{,}8 \cdot 265{,}97 = 212{,}78 \text{ mm.}$$

Fig. 37.



4. Der Kreisausschnitt oder Kreissektor.

Nach Fig. 37 ist die Fläche des Kreisausschnitts $F = \frac{b\,r}{2}$; ist der Zentriwinkel α^0 gegeben, so ist $b = 2\,r\,\pi \frac{\alpha^0}{360^0}$, also $F = 2\,r\,\pi \frac{\alpha^0}{360^0} \frac{r}{2} = r^2 \pi \frac{\alpha^0}{360^0}$.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Fläche eines Kreisausschnittes, wenn $r = 5{,}0\,m$ und $\alpha = 60^0$ ist?

Lösung. $$F = r^2 \pi \frac{\alpha^0}{360} = 5{,}0^2 \cdot \pi \frac{60}{360} = \frac{25{,}0 \cdot \pi}{6}$$
$$= \frac{78{,}54}{6} = 13{,}09 \text{ qm}.$$

Länge der Kreisbögen für Radius = 1.

Grade				Minuten		Sekunden	
0	0,00 000	25	0,43 633	**0**	0,00 000	**0**	0,00 000
1	0,01 745	26	0,45 379	1	0,00 029	1	0,00 000
2	0,03 491	27	0,47 124	2	0,00 058	2	0,00 001
3	0,05 236	28	0,48 869	3	0,00 087	3	0,00 001
4	0,06 981	29	0,50 615	4	0,00 116	4	0,00 002
5	0,08 727	**30**	0,52 360	5	0,00 145	5	0,00 002
6	0,10 472	31	0,54 105	6	0,00 175	6	0,00 003
7	0,12 217	32	0,55 851	7	0,00 204	7	0,00 003
8	0,13 963	33	0,57 596	8	0,00 233	8	0,00 004
9	0,15 708	34	0,59 341	9	0,00 262	9	0,00 004
10	0,17 453	35	0,61 087	**10**	0,00 291	**10**	0,00 005
11	0,19 199	36	0,62 832	11	0,00 320	11	0,00 005
12	0,20 944	37	0,64 577	12	0,00 349	12	0,00 006
13	0,22 689	38	0,66 323	13	0,00 378	13	0,00 006
14	0,24 435	39	0,68 068	14	0,00 407	14	0,00 007
15	0,26 180	**40**	0,69 813	15	0,00 436	15	0,00 007
16	0,27 925	41	0,71 558	16	0,00 465	16	0,00 008
17	0,29 671	42	0,73 304	17	0,00 495	17	0,00 008
18	0,31 416	43	0,75 049	18	0,00 524	18	0,00 009
19	0,33 161	44	0,76 794	19	0,00 553	19	0,00 009
20	0,34 907	45	0,78 540	**20**	0,00 582	**20**	0,00 010
21	0,36 652	46	0,80 285	21	0,00 611	21	0,00 010
22	0,38 397	47	0,82 030	22	0,00 640	22	0,00 011
23	0,40 143	48	0,83 776	23	0,00 669	23	0,00 011
24	0,41 888	49	0,85 521	24	0,00 698	24	0,00 012

Grade				Minuten		Sekunden	
50	0,87 266	85	1,48 353	25	0,00 727	25	0,00 012
51	0,89 012	86	1,50 098	26	0,00 756	26	0,00 013
52	0,90 757	87	1,51 844	27	0,00 785	27	0,00 013
53	0,92 502	88	1,53 589	28	0,00 814	28	0,00 014
54	0,94 248	89	1,55 334	29	0,00 844	29	0,00 014
55	0,95 993	**90**	1,57 080	**30**	0,00 873	**30**	0,00 015
56	0,97 738	91	1,58 825	31	0,00 902	31	0,00 015
57	0,99 484	92	1,60 570	32	0,00 931	32	0,00 016
58	1,01 229	93	1,62 316	33	0,00 960	33	0,00 016
59	1,02 974	94	1,64 061	34	0,00 989	34	0,00 016
60	1,04 720	95	1,65 806	35	0,01 018	35	0,00 017
61	1,06 465	96	1,67 552	36	0,01 047	36	0,00 017
62	1,08 210	97	1,69 297	37	0,01 076	37	0,00 018
63	1,09 956	98	1,71 042	38	0,01 105	38	0,00 018
64	1,11 701	99	1,72 788	39	0,01 134	39	0,00 019
65	1,13 446	**100**	1,74 533	**40**	0,01 164	**40**	0,00 019
66	1,15 192	110	1,91 986	41	0,01 193	41	0,00 020
67	1,16 937	120	2,09 440	42	0,01 222	42	0,00 020
68	1,18 682	130	2,26 893	43	0,01 251	43	0,00 021
69	1,20 428	140	2.44 346	44	0,01 280	44	0,00 021
70	1,22 173	150	2,61 799	45	0,01 309	45	0,00 022
71	1,23 918	160	2,79 253	46	0,01 338	46	0,00 022
72	1,25 664	170	2,96 706	47	0,01 367	47	0,00 023
73	1,27 409	180	3,14 159	48	0,01 396	48	0,00 023
74	1,29 154	190	3,31 613	49	0,01 425	49	0,00 024
75	1,30 900	**200**	3,49 066	**50**	0,01 454	**50**	0,00 024
76	1,32 645	210	3,66 519	51	0,01 484	51	0,00 025
77	1,34 390	220	3,83 972	52	0,01 513	52	0,00 025
78	1,36 136	230	4,01 426	53	0,01 542	53	0,00 026
79	1,37 881	240	4,18 879	54	0,01 571	54	0,00 026
80	1,39 626	250	4,36 332	55	0,01 600	55	0,00 027
81	1,41 372	260	4,53 786	56	0,01 629	56	0,00 027
82	1,43 117	270	4,71 239	57	0,01 658	57	0,00 028
83	1,44 862	300	5,23 599	58	0,01 687	58	0,00 028
84	1,46 608	330	5,75 959	59	0,01 716	59	0,00 029
		360	6,28 319	**60**	0,01 745	**60**	0,00 029

2. Aus vorstehender Tabelle die Bogenlänge für den Radius gleich 10,0 m und für den Zentriwinkel $\alpha = 36^0\,47'\,48''$ zu berechnen.

Lösung. Es ist für den Radius = 1

$$\begin{aligned} \text{Bogen b zu } 36^0 &= 0{,}62832 \\ 47' &= 0{,}01367 \\ 48'' &= 0{,}00023 \\ \hline \text{Bogen b zu } 36^0\,47'\,48'' &= 0{,}64222 \text{ für Radius} = 1, \end{aligned}$$

also für Radius = 10,0 ist, Bogen b zu $36^0\,47'\,48'' = 6{,}4222$ m.

---

3. Wie groß ist der Kreisausschnitt für r = 6,2 m und Zentriwinkel $\alpha = 46^0$?

Lösung. $F = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{6{,}2 \cdot 0{,}80285 \cdot 6{,}2}{2} = 15{,}431$ qm.

---

4. Eine Brücke hat nach Fig. 38: 20,0 m Spannweite, 3,0 m Pfeil, das Gewölbe ist 1,0 m stark, wie groß die Querschnittsfläche des Gewölbes?

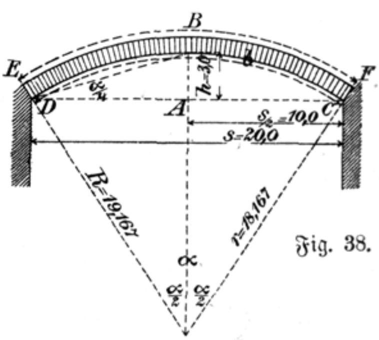


Fig. 38.

Lösung. Es ist:

$$r = \frac{(s/_2)^2 + h^2}{2\,h} = \frac{10{,}0^2 + 3{,}0^2}{2 \cdot 3{,}0} = \frac{100{,}0 + 9{,}0}{6{,}0} = \frac{109{,}0}{6{,}0}$$

$= 18{,}167$ m, also $R = 19{,}167$ m.

Im Dreieck B A D nennt man das Verhältnis

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Anliegende Kathete}} = \text{tangens.}$$

Demnach $\operatorname{tg} \alpha/_4 = \frac{3}{10} = 0{,}3000 \quad \operatorname{tg} 16^0\,50' = 0{,}3026 \quad 32 = 10'$

$$\operatorname{tg} 16^0 \frac{40' = 0{,}2994}{6} \qquad \operatorname{tg} 16^0 \frac{40 = 0{,}2994}{32} \qquad \frac{6 = ?}{\frac{10 \cdot 6}{32} = 2'}$$

$\alpha/_4 = 16^0\,42'$, also $\alpha = 66^0\,48'$.

Kreisausschnitt M E F $= B \cdot \frac{R}{2} = \frac{19{,}167 \cdot 1{,}16588 \cdot 19{,}167}{2} = 215{,}2$ qm;

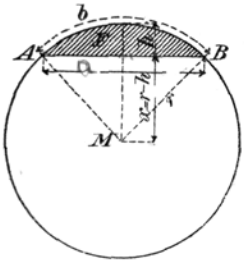
Kreisausschnitt M D C $= b \cdot \frac{r}{2} = \frac{18{,}167 \cdot 1{,}16588 \cdot 18{,}167}{2} = 192{,}4$ qm.

Gewölbequerschnitt $= 215{,}2 - 192{,}4 = 22{,}8$ qm.

---

5. Der Kreisabschnitt oder das Kreissegment.

Fig. 39.



Nach Fig. 39 ist Fläche des Kreisabschnitts:

$$F = \text{Kreisausschnitt } MAB - \triangle MAB$$
$$= \frac{b\,r}{2} - \frac{a\,(r-h)}{2}.$$

Es ist ferner:

$$\frac{a^2}{4} = r^2 - (r-h)^2 = r^2 - r^2 + 2\,r\,h - h^2.$$

$$1)\quad a = \sqrt{4\,(2\,r\,h - h^2)} = 2\sqrt{h\,(2\,r - h)}$$

$$2\,r\,h = \frac{a^2}{4} + h^2 = \frac{a^2 + 4\,h^2}{4}.$$

$$2)\quad r = \frac{a^2 + 4\,h^2}{8\,h}.$$

$$3)\quad h = r - x = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

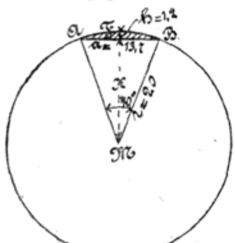
Beispiele.

1. Ein Kreis hat einen Radius von 20,0 m, es soll für den Zentriwinkel 40^0, die Fläche des Kreisabschnitts berechnet werden (Fig 40).

Lösung. Kreisabschnitt = Kreisausschnitt — $\triangle$ M A B.

$$\text{Kreisausschnitt} = \frac{b \cdot r}{2} = 0{,}69813 \cdot 20{,}0 \cdot \frac{20{,}0}{2} = 139{,}63 \text{ qm}.$$

Fig. 40.



$$\triangle MAB = \frac{a \cdot x}{2}.$$

$$\text{Es ist: } \sin 20^0 = \frac{\frac{a}{2}}{20}$$

$$a = 40 \cdot \sin 20^0 = 40 \cdot 0{,}342 \backsim 13{,}7 \text{ m}.$$

$$x = \sqrt{20{,}0^2 - \left(\frac{13{,}7}{2}\right)^2} \backsim 18{,}8 \text{ m}.$$

$$\triangle MAB = \frac{13{,}7 \cdot 18{,}8}{2} = 128{,}78 \text{ qm}.$$

$$\text{Kreisabschnitt} = 139{,}63 - 128{,}78 = 10{,}85 \text{ qm}.$$

---

2. Ein Brückenbogen hat 20,0 m Spannweite, 2,0 m Pfeilhöhe, wie groß ist die Durchflußöffnung bei 5,0 m Höhe und $^1/_{20}$ Dossierung der Pfeiler (Fig. 41)?

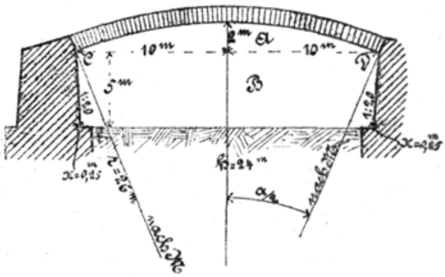
Lösung. Durchflußöffnung = Kreissegment A + Paralleltrapez B.
Kreissegment = Kreissektor M C D — Dreieck M C D.

1) Kreissektor $= \frac{b \cdot r}{2}$;

$$r = \frac{(s/2)^2 + h^2}{2\,h} = \frac{10{,}0^2 + 2{,}0^2}{2 \cdot 2{,}0} = \frac{100{,}0 + 4{,}0}{4{,}0} = \frac{104{,}0}{4{,}0} = 26{,}0 \text{ m.}$$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{26} = 0{,}3846$

Fig. 41.



$\sphericalangle \frac{\alpha}{2} = 22^0\,37'$

$\sphericalangle\, \alpha = 45^0\,14'$, also b $= 0{,}7895 \cdot 26{,}0$ in 1) eingesetzt:

Kreissektor M C D

$= 0{,}7895 \cdot 26{,}0 \cdot \frac{26{,}0}{2} =$

$= 266{,}85$ qm.

Dreieck M C D $= \frac{20{,}0 \cdot 24{,}0}{2} = 240{,}0$ qm, also

Kreissegment $= 266{,}85 - 240{,}0 = 26{,}85$ qm.

Durchflußöffnung $= 26{,}85 + \frac{20{,}0 + 19{,}5}{2} \cdot 5{,}0 = 26{,}85 + 98{,}75$

$= 125{,}60$ qm.

Bei $^1/_{20}$ Dossierung ist $x = \frac{5}{20} = 0{,}25$ m.

---

3. Wie verhält sich ein Kreisabschnitt, dessen Zentriwinkel $= 60^0$ ist, zu dem Abschnitt desselben Kreises, der zu einem Zentriwinkel von 120^0 gehört?

Lösung.

$$\frac{\text{Flächeninhalt des ersten Abschnitts}}{\text{Flächeninhalt des zweiten Abschnitts}} = \frac{\frac{r^2 \pi}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{r^2 \pi}{3} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{4\,\pi - 6\sqrt{3}}{8\,\pi - 6\sqrt{3}} = \frac{2\,\pi - 3\sqrt{3}}{4\,\pi - 3\sqrt{3}} \backsim \frac{1}{6{,}78}.$$

---

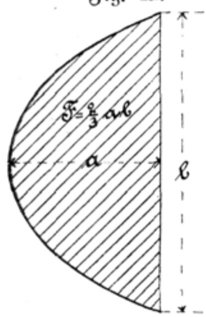
i) Die Parabel.

Nach Fig. 42 ist die Fläche einer Parabel $= \frac{2}{3}$ a b, und die Länge eines gedrückten Parabelbogens $L = b\left(1 + \frac{8}{3}\,\frac{a^2}{b^2}\right)$.

Ein Kreisabschnitt kann annähernd als ein parabolisches Segment betrachtet werden.

Beispiele.

Fig. 42.



1. Wie groß ist der Fehler, der gemacht wird, wenn die Flächen der Kreisabschnitte in Fig. 40 und 41 nach der Formel für die Parabelfläche berechnet werden?

Lösung.

(Fig. 40) Fläche $= \frac{2}{3} \cdot 13{,}7 \cdot 1{,}2 = 10{,}96$ qm, also

Fehler $f = 10{,}96 - 10{,}85 = 0{,}11$ qm.

(Fig. 41) Fläche $= \frac{2}{3} \cdot 20{,}0 \cdot 2{,}0 = 26{,}67$ qm.

$f = 26{,}85 - 26{,}67 = 0{,}18$ qm.

In der Praxis wird man daher die Flächen der Kreisabschnitte geringer Pfeilhöhen, ohne einen erheblichen Fehler zu machen, nach der Flächenformel der Parabel berechnen.

2. Für eine Parabel ist nach Fig. 43 $a = 4{,}0$, $b = 15{,}0$ cm, wie groß ist die Parabelfläche und der Umfang?

Lösung. $F = \frac{2}{3} a b = \frac{2}{3} \cdot 4{,}0 \cdot 15{,}0 = 40{,}0$ qcm.

$$L = b\left(1 + \frac{8}{3}\frac{a^2}{b^2}\right) = 15{,}0 \cdot \left(1 + \frac{8}{3}\frac{4{,}0^2}{15{,}0^2}\right) = 17{,}84 \text{ cm.}$$

Fig. 43.

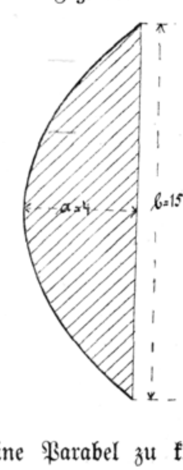
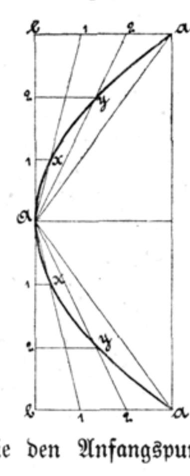


Fig. 44.

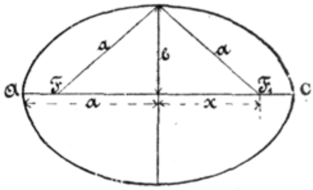


3. Eine Parabel zu konstruieren, die den Anfangspunkt in A hat und durch den Punkt a geht (Fig. 44).

Lösung. Wir teilen nach Fig. 44 Ab und ba in eine Anzahl, etwa 3 gleiche Teile, ziehen A 1, A 2 und 1 x und 2 y, so sind A, x, y und a Parabelpunkte.

k) Die Ellipse.

Fig. 45.



In Fig. 45 bezeichnet a die halbe große und b die halbe kleine Achse der Ellipse; es ist die Ellipsenfläche $= a b \pi$, der Ellipsenumfang ist gleich

$$1{,}99\,\pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = 4{,}42\sqrt{a^2+b^2}.$$

Konstruieren wir um B mit a als Radius einen Kreisbogen, so schneidet dieser AC in den Brennpunkten F und F_1.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Fläche und der Umfang einer Ellipse, deren halbe große Achse $a = 6{,}0$ und deren halbe kleine Achse $b = 4{,}0$ m ist?

Lösung. Fläche $F = \pi a \cdot b = \pi \cdot 4{,}0 \cdot 6{,}0 = 75{,}398$ qm.

$$\text{Umfang} = 4{,}42\sqrt{a^2+b^2} = 4{,}42\sqrt{6{,}0^2+4{,}0^2} = 4{,}42\sqrt{52} = 4{,}42 \cdot 7{,}21 = 31{,}87 \text{ m}.$$

2. Ein Gärtner will eine Ellipse konstruieren, die für $a = 34{,}0$ und $b = 30{,}0$ m ist, wie weit sind die Brennpunkte F und F_1 vom Mittelpunkt entfernt?

Lösung. Die Brennpunkte werden nach Fig. 45 gefunden, indem man mit der halben großen Achse um B einen Kreis beschreibt, der AC in den Brennpunkten F und F_1 schneidet.

Nach Fig. 41 ist die Entfernung

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{34{,}0^2 - 30{,}0^2} = \sqrt{1156 - 900} = \sqrt{256} = 16 \text{ m}.$$

Anmerkung. Um eine Ellipse zu konstruieren, befestigt man in der Praxis in den Brennpunkten F und F_1 die Enden einer geschlossenen Doppelschnur von der Länge 2a. Wird die Schnur straff gespannt, so daß sie ein Dreieck $F a F_1$ bildet und führt man sie nun mittels eines Stiftes um den Durchmesser AC, so beschreibt der Stift eine Ellipse.

3. Die beiden Brennpunkte einer Ellipse sind 20,0 m entfernt, die halbe große Achse ist gleich 16 m, wie groß ist die kleine? (Fig. 46.)

Lösung. $x = \frac{20,0}{2} = 10,0.$

$$b^2 = a^2 - x^2 = 16,0^2 - 10,0^2 = 256,0 - 100,0 = 156,0.$$

$$b = \sqrt{156} = 12,49 \text{ m}.$$

4. Ein Teich hat die Form einer Ellipse, für die $a = 60,0$ und $b = 40,0$ m ist, mitten im Teich liegt eine Insel von kreisförmiger Gestalt

Fig. 46.

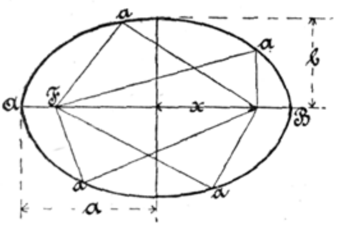
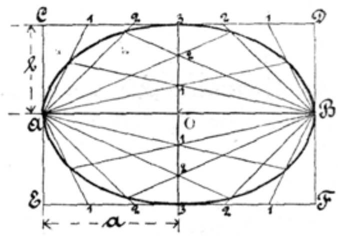


Fig. 47.



und von 20,0 m Durchmesser. Wie groß ist die Fläche der Ellipse, die Fläche der Insel und die des Wasserspiegels?

Lösung. Ellipsenfläche $= \pi a b = \pi \cdot 60,0 \cdot 40,0 = 7539,8$ qm.

Fläche der Insel $= r^2 \pi = 10,0^2 \cdot \pi = 314,16$ qm.

Fläche des Wasserspiegels $= 7539,8 - 314,16 = 7225,64$ qm.

5. Es soll eine Ellipse aus den beiden Achsen konstruiert werden.

Lösung. Wir ziehen das Tangentenviereck CDEF, teilen nach Fig. 47 O 3 und C 3 in beliebig viele, aber gleiche Teile (in Fig. 47 sind 3 Teile gewählt), ziehen A 1, A 2 und B 1, B 2, so schneiden diese sich in den zu suchenden Ellipsenpunkten.

B. Körperberechnungen.

a) Das Prisma.

Satz. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt Grundfläche mal Höhe (G · h).

Beweis. a b c d e f g h, Fig. 49, sei ein Einheitswürfel mit dem das Prisma ausgemessen werden soll, alsdann lassen sich längs der Grundfläche G offenbar, nach Fig. 48, G Einheitswürfel plazieren und bei der Höhe h lassen sich also im Prisma G · h Einheitswürfel unterbringen, d. h. Inhalt ist gleich G · h = Grundfläche mal Höhe.

Fig. 48.

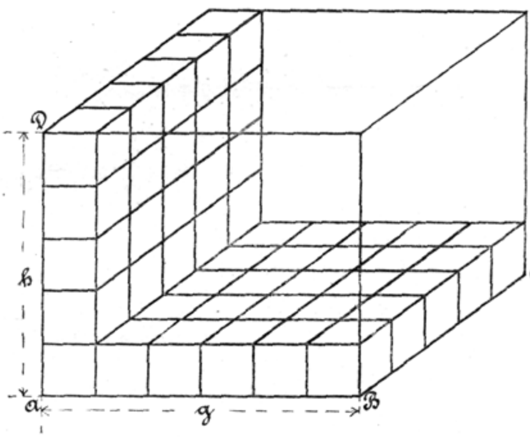
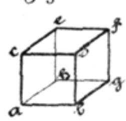


Fig. 49.



Beispiele.

1. Wie groß ist der Inhalt einer 0,51 m dicken, 8,0 m langen und 4,0 m hohen Mauer aus Ziegelsteinen, wie viele Steine sind zur Herstellung erforderlich, wenn auf 1 cbm 400 Steine gehen, was ist für diese Steine zu zahlen, wenn 1000 Stück 28,50 Mark kosten, was ist an Arbeitslohn

zu zahlen, wenn für 1 cbm 3,50 Mark gezahlt werden und was wiegt die Mauer (1 cbm = 1600 kg)?

Lösung. Mauerinhalt: $0{,}51 \cdot 8{,}0 \cdot 4{,}0 = 16{,}32$ cbm.

Ziegelsteine: $16{,}32 \cdot 400 = 6528$.

Kosten: $\frac{6528 \cdot 28{,}50}{1000} = 186{,}05$ Mark.

Arbeitslohn: $16{,}32 \cdot 3{,}50 = 57{,}12$ Mark.

Gewicht: $16{,}32 \cdot 1600 = 26112$ kg.

---

2. Ein Prisma ist 4,2 m hoch, die Grundfläche habe die Form eines Paralleltrapezes, für das $a = 8{,}0$, $b = 4{,}0$ und $h = 5{,}0$ m ist, wie groß ist der Inhalt des Prismas?

Lösung. $J = G\,h = \frac{8{,}0 + 4{,}0}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 4{,}2 = 126{,}0$ cbm.

---

3. Ein Baumstamm hat 1 m Durchmesser, derselbe ist 8,1 m hoch, aus demselben soll ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma geschnitten werden, wie groß ist dessen Grundfläche und Inhalt?

Lösung. Die Seite des Sechsecks ist gleich $r = 0{,}5$ m. Nach der Tabelle auf S. 20, Pos. 4 ist:

Fläche F = Grundfläche $g = 2{,}59808 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}64952$ qm.

Inhalt $J = 0{,}64952 \cdot 8{,}1 = 5{,}26$ cbm.

Ist das Prisma schräg abgeschnitten, so wird der Inhalt gefunden, indem man die Grundfläche mit dem arithmetischen Mittel der Kanten multipliziert.

4. Ein prismatischer Erdabtrag habe 4,0 qm Grundfläche, die 5 ungleichen Höhen betragen: 1,5, 2,6, 3,4, 4,2 und 5,5 m, wie groß ist der Inhalt?

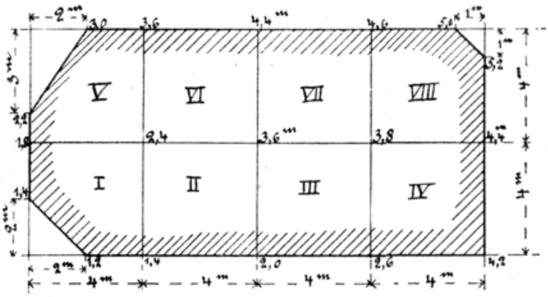
Lösung.

$$J = 4{,}0\,\frac{1{,}5 + 2{,}6 + 3{,}4 + 4{,}2 + 5{,}5}{5} = 4{,}0 \cdot 3{,}44 = 13{,}76 \text{ cbm.}$$

---

5. Von einem Festungswall soll ein Teil abgetragen werden, zu diesem Zweck ist ein Quadratnetz, dessen Seiten 4,0 m betragen, gelegt worden, durch Nivellement ergeben sich für die Höhen in den Eckpunkten der Quadrate die in Fig. 50 eingeschriebenen Werte, wie viel Erdmasse ist auszuschachten?

Fig. 50.



Lösung. Wir erhalten nach Fig. 50:

Prisma I =

$$\left(4{,}0 \cdot 4{,}0 - \frac{2{,}0 \cdot 2{,}0}{2}\right) \frac{1{,}4 + 1{,}8 + 2{,}4 + 1{,}4 + 1{,}2}{5} = 14{,}0 \cdot 1{,}64 = 22{,}96 \text{ cbm}$$

Prisma II =

$$4{,}0 \cdot 4{,}0 \frac{1{,}4 + 2{,}4 + 3{,}6 + 2{,}0}{4} = 16{,}0 \cdot 2{,}35 = 37{,}60 \text{ „}$$

Prisma III =

$$4{,}0 \cdot 4{,}0 \frac{3{,}6 + 3{,}8 + 2{,}6 + 2{,}0}{4} = 16{,}0 \cdot 3{,}0 = 48{,}00 \text{ „}$$

Prisma IV =

$$4{,}0 \cdot 4{,}0 \frac{3{,}8 + 4{,}4 + 4{,}2 + 2{,}6}{4} = 16{,}0 \cdot 37{,}5 = 60{,}00 \text{ „}$$

Prisma V =

$$\left(4{,}0 \cdot 4{,}0 - \frac{3{,}0 \cdot 2{,}0}{2}\right) \frac{1{,}8 + 2{,}2 + 3{,}0 + 3{,}6 + 2{,}4}{5} = 13{,}0 \cdot 2{,}6 = 33{,}80 \text{ „}$$

Prisma VI =

$$4{,}0 \cdot 4{,}0 \frac{3{,}6 + 4{,}4 + 3{,}6 + 2{,}4}{4} = 16{,}0 \cdot 3{,}5 = 56{,}00 \text{ „}$$

Prisma VII =

$$4{,}0 \cdot 4{,}0 \frac{4{,}4 + 4{,}6 + 3{,}8 + 3{,}6}{4} = 16{,}0 \cdot 4{,}1 = 65{,}60 \text{ „}$$

Prisma VIII =

$$\left(4{,}0 \cdot 4{,}0 - \frac{1{,}0 \cdot 1{,}0}{2}\right) \frac{4{,}6 + 5{,}0 + 5{,}2 + 4{,}4 + 3{,}8}{5} = 15{,}5 \cdot 4{,}6 = 71{,}30 \text{ „}$$

Summa 395,26 cbm

---

6. Ein Eisenbahndamm ist 2,0 m hoch, oben 8,0 m breit und unten 14,0 m breit, wie viel Erdmasse enthält derselbe bei 204,0 m Länge?

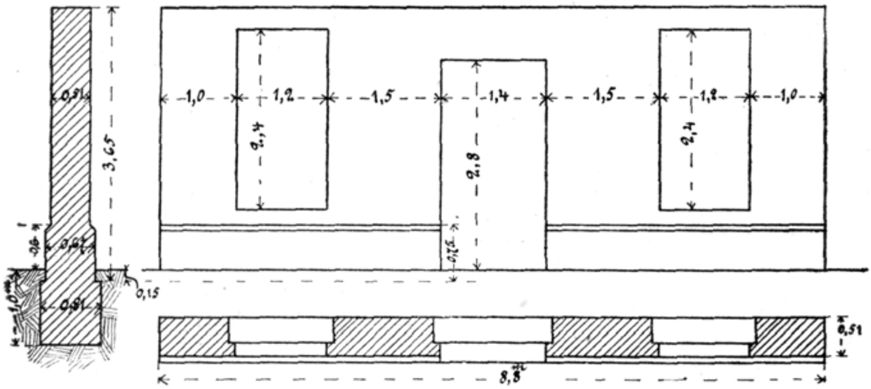
Lösung.

$$\text{Inhalt } J = G\,h = \frac{8{,}0 + 14{,}0}{2} \cdot 2{,}0 \cdot 204{,}0 = 22{,}0 \cdot 204{,}0 = 4488{,}0 \text{ cbm.}$$

---

7. Was ist zur Herstellung der in Fig. 51 skizzierten Mauer für Materialien und Arbeitslohn zu zahlen?

Fig. 51.



Lösung. 1. Erdarbeiten.

Es ist auszuschachten $0{,}81 \cdot 8{,}8 \cdot 1{,}0 = 7{,}128$ cbm, wegen des Arbeitsraumes rechnet man $^1/_6$ mehr, das ist: $\frac{7}{6} \cdot 7{,}128 \backsim 8{,}32$ cbm Erdmasse.

2. Materialbedarf.

a) Steine: Fundament: $0{,}77 \cdot 0{,}85 \cdot 8{,}8 = 5{,}7596$ cbm
Sockel: $0{,}64 \cdot 0{,}75 \cdot 8{,}8 = 4{,}224$ „
Mauer: $0{,}51 \cdot 2{,}9 \cdot 8{,}8 = 13{,}0152$ „
Summe 22,9988 cbm

davon gehen ab für zwei Fenster und eine Tür:
$2\,(1{,}2 \cdot 2{,}4) \cdot 0{,}51 + (0{,}75 \cdot 0{,}64 + 2{,}05 \cdot 0{,}51)\,1{,}4 = 5{,}0733$ cbm
bleibt 17,9255 cbm.

Man rechnet auf 1 cbm 400 Steine, also
$17{,}9255 \cdot 400 = 7170{,}2 \backsim 7200$ Steine.

b) Mörtel: Man rechnet auf 1 cbm Mauerwerk 280 Liter Mörtel, also $280 \cdot 17{,}9255 = 5019{,}14 \backsim 5020$ Liter Mörtel.

3. Kosten.

1) 8,32 cbm Erde auszuschachten und 50 m fort zu karren à Kubikmeter 60 Pfg. ∽ 4,99 Mark,
2) 7200 Steine à 1000 Stück 28,50 Mark ∽ 205,20 „
3) 5020 l Mörtel à Kubikmeter fertig Baustelle 7 Mk. ∽ 35,14 „
4) 17,926 cbm Mauerwerk à Kubikm. 3,50 Mk. Arbeitslohn ∽ 61,74 „

Kosten 307,07 Mark.

8. Zur Herstellung der Decke eines Gebäudes dienen 10 Balken à 12,4 m lang und vom Querschnitt 20/26 cm, wie viel Festmeter Holz sind vorhanden?

Lösung. Ganze Länge $= 10 \cdot 12{,}4 = 124{,}0$ m.

Festmeter $= 124{,}0 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}26 = 6{,}45$ cbm.

---

9. Ein Prisma ist 6 m lang, der Querschnitt wird durch ein regelmäßiges Sechseck gebildet, dessen Seite gleich 0,5 m beträgt, wie groß ist die Oberfläche?

Lösung. Oberfläche = 6 Seitenflächen + 2 Endflächen

$$= 6 \cdot 0{,}5 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 2{,}59808 \cdot 0{,}5^2 = 19{,}29904 \backsim 19{,}3 \text{ qm}.$$

---

10. Wie groß ist der Mantel eines vierseitigen, schräg abgeschnittenen Prismas der Kanten 2,4, 4,6, 8,4 und 10,2 m und der rechteckförmigen Grundfläche der Seiten 6,0 und 4,0 m?

Lösung.

$$\text{Mantel} = \frac{2{,}4 + 4{,}6}{2} \cdot 6{,}0 + \frac{4{,}6 + 10{,}2}{2} 4{,}0 + \frac{10{,}2 + 8{,}4}{2} 6{,}0 + \frac{8{,}4 + 2{,}4}{2} 4{,}0 = 21{,}0 + 29{,}6 + 55{,}8 + 21{,}6 = 128{,}0 \text{ qm}.$$

---

11. Wie viel Kubikmeter Sauerstoff enthält die Luft eines rechteckigen Zimmers von 11,0 m Länge, 7,0 m Breite und 5,0 m Höhe, wenn in 100 Teilen Luft 21 Teile Sauerstoff enthalten sind?

Lösung. $J = 11{,}0 \cdot 7{,}0 \cdot 5{,}0 = 385$ cbm.

$$100 : 21 = 385 : x; \quad x = \frac{385 \cdot 21}{100} = 80{,}85 \text{ cbm Sauerstoff}.$$

---

12. Was kostet der laufende Meter eines Balkens 18/24 cm stark, wenn 1 cbm Holz 46,50 Mark kostet?

Lösung. 1 cbm Holz kostet 46,50 Mark.

$0{,}18 \cdot 0{,}24 \cdot 1{,}0$ Holz kostet ?

$$\frac{46{,}50 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}24 \cdot 1{,}0}{1{,}0} = 2{,}01 \text{ Mark}.$$

---

13. Wenn der laufende Meter eines Balkens 20/26 cm stark, 2,53 Mark kostet; was kostet 1 cbm des betreffenden Materials?

Lösung. $0{,}20 \cdot 0{,}26 \cdot 1{,}0$ cbm Holz kostet 2,53 Mark.

1,0 cbm Holz kostet ?

$$\frac{2{,}53 \cdot 1{,}0}{0{,}20 \cdot 0{,}26 \cdot 1{,}0} = 48{,}65 \text{ Mark}.$$

---

b) Der Zylinder.

Inhalt. Ein Zylinder kann als ein Prisma mit unendlich vielen Seitenflächen betrachtet werden, der Inhalt ist also $G\,h = r^2 \pi \cdot h$.

Oberfläche. Denken wir uns den Zylinder nach einer Seitenlinie aufgeschnitten und den Mantel abgewickelt, Fig. 52, so erhalten wir für letzteren ein Rechteck mit den Seiten $2\,r\,\pi$ und h, also Mantelfläche $= 2\,r\,\pi\,h$ und Oberfläche $= 2\,r\,\pi\,h + 2\,r^2\,\pi$.

Ist der Zylinder nach Fig. 53 schräg abgeschnitten, so ist

$$\text{Mantel } M = 2\,r\,\pi \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = r\,\pi\,(h_1 + h_2)$$

$$\text{und Inhalt } J = r^2\,\pi\,\frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Fig. 52.

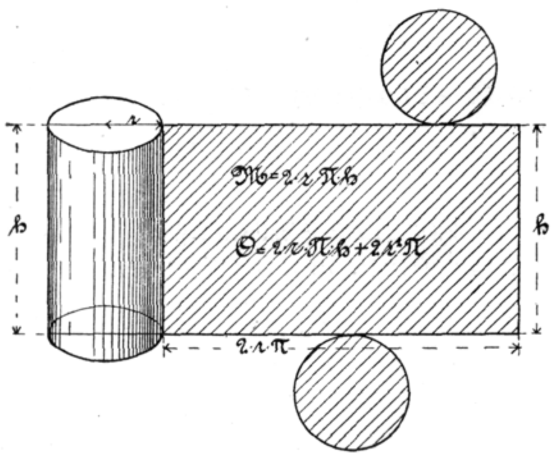


Fig. 53.

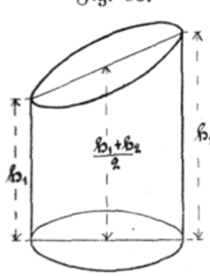


Fig. 54.

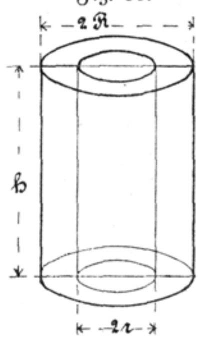
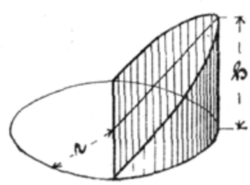


Fig. 55.



Hohlzylinder, Fig. 54, Mantel $M = 2\pi h(R + r)$.

Inhalt $J = \pi h(R^2 - r^2)$.

Zylinderhuf nach Fig. 55, Mantel $M = 2rh$.

Inhalt $J = \frac{2}{3} h r^2$.

Beispiele.

1. Der Halbmesser des Grundkreises eines Zylinders ist 2,1 m, die Höhe 5,2 m, wie groß die Oberfläche und der Inhalt?

Lösung. Oberfläche $= 2r\pi h = 2 \cdot 2{,}1 \cdot \pi \cdot 5{,}2 = 68{,}61$ qm.

Inhalt $= r^2 \pi h = 2{,}1^2 \cdot \pi \cdot 5{,}2 = 72{,}04$ cbm.

2. Wie viel Hektoliter Wasser faßt ein zylindrischer Brunnen von 1,2 m Durchmesser und 6,48 m Tiefe?

Lösung.

$$J = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot h = \frac{1{,}2^2 \cdot \pi}{4} \cdot 6{,}48 = 7{,}3288 \text{ cbm}.$$

$$\text{Wassermenge: } \frac{7{,}3288 \cdot 1000}{100} = 73{,}288 \text{ hl}.$$

3. Die Endflächen eines 4,5 m langen Kessels werden durch Ellipsen gebildet, deren halbe große Achse 3 m und deren halbe kleine Achse 2 m beträgt, wie groß ist der Kesselinhalt?

Lösung. $J = ab\pi h = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 4{,}5 = 84{,}823$ cbm.

4. Wie viel Kubikmeter Dampf faßt ein Dampfzylinder von 1,5 m Höhe und 1 m Durchmesser, wie viel Wasser gehört dazu, wenn 1 ccm Wasser 938 ccm Dampf gibt?

Lösung.

$$J = 1{,}0^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}5 = 1{,}1781 \text{ cbm} = 1178100 \text{ ccm}.$$

$$\text{Wasser: } \frac{1178100}{938} = 1256 \text{ ccm} = 1{,}256 \text{ l}.$$

5. Wie groß ist der Mantel des Zylinders im Beispiel 4?

Umfang $= 2r\pi h = 1{,}0 \cdot \pi \cdot 1{,}5 = 4{,}7124$ qm.

6. Der äußere Umfang eines runden Turmes sei 27,646 m, die Mauerstärke 0,8 m, die Höhe 10,5 m, wie viel Kubikmeter Mauerwerk enthält der Turm?

Lösung. $2\,R\,\pi = 27{,}646.$

$$2\,R = \frac{27{,}646}{\pi} = 8{,}8 \text{ m},$$

$$R = 4{,}4 \text{ m};$$

$$r = \frac{8{,}8 - 1{,}6}{2} = 3{,}6 \text{ m}.$$

$$J = \pi\,h\,(R^2 - r^2) = \pi \cdot 10{,}5\,(4{,}4^2 - 3{,}6^2) = \pi \cdot 10{,}5\,(4{,}4 + 3{,}6)\,(4{,}4 - 3{,}6) = 211{,}12 \text{ cbm}.$$

---

7. Ein Gasometer soll 25000 cbm Gas fassen, wie groß ist die Höhe und der Durchmesser des Grundkreises, wenn die Oberfläche am kleinsten sein soll?

Anmerkung. Die Oberfläche eines hohlen, oben offenen Zylinders wird bei gegebenem Inhalte am kleinsten, wenn die Höhe desselben gleich dem Radius des Grundkreises wird.

Lösung. Inhalt $= r^2\,\pi \cdot r = r^3\,\pi = 25000$

$$r = \sqrt[3]{\frac{25000}{\pi}} = 19{,}964 \text{ m} = h.$$

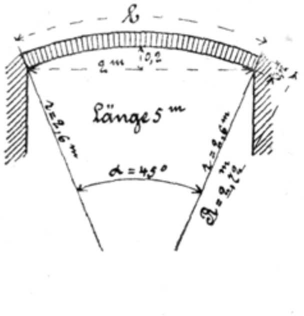
---

8. Eine zylindrische Zugstange von 5 cm Durchmesser und 15,0 m Länge bestehe aus Schmiedeeisen von spezifischem Gewichte 7,8, wie schwer ist dieselbe?

Lösung. Inhalt $= 0{,}5^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 150 \text{ dcm} = 29{,}4525 \text{ cbdm}.$

Gewicht $= 29{,}4525 \cdot 7{,}8 = 229{,}75 \text{ kg}.$

Fig. 56.



9. Ein $\frac{1}{2}$ Stein starkes Kappengewölbe ist 5,0 m lang und hat bei $\frac{1}{10}$ Pfeil 2,0 m Spannweite, wie viele Steine und wie viel Mörtel gebraucht braucht man zur Herstellung desselben?

Lösung. Nach Seite 38 ist unter Benutzung der Fig. 35:

$$r = \frac{(s/_2)^2 + h^2}{2\,h} = \frac{1{,}0^2 + 0{,}2^2}{2 \cdot 0{,}2} = \frac{1{,}0 + 0{,}04}{0{,}4} = \frac{1{,}04}{0{,}4} = 2{,}6 \text{ m}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha/_4 = \frac{0{,}2}{1{,}0} = 0{,}2 \qquad \operatorname{tg}11^0\,20' = 0{,}2004 \qquad 30 = 10'$$

$$\operatorname{tg}11^0\,10' = \frac{0{,}1974}{26} \qquad \operatorname{tg}11^0\,10' = \frac{0{,}1974}{30} \qquad \frac{26 = ?}{\dfrac{10'\cdot 26}{30}} = 8{,}7'$$

$$\alpha/4 = 11^0\,18{,}7' \text{ also } \alpha = 45^0\,15'$$

$$b = d\,\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0} = 5{,}44\;\pi\cdot\frac{45^0\,15'}{360^0} = \frac{17{,}09\cdot 2715}{21600} = 2{,}148 \text{ m.}$$

Rechnen wir für die Fuge 1 cm, so gehen auf 26,0 m Gewölbelänge 100 Steine und da ein Stein 6,5 cm hoch ist, auf 3,0 m Bogenlänge 40 Steine, mithin erhalten wir

$$\text{Steine} = \frac{5{,}0}{26{,}0}\cdot 100\cdot\frac{2{,}148}{3{,}0}\cdot 40 = 19{,}231\cdot 28{,}64 = 551$$

dazu 10 % für Bruch macht + 50

∞ 600 Steine.

Auf 1000 Ziegel rechnet man 1000 l Mörtel, folglich sind zur Herstellung der Kappe 600 l Mörtel erforderlich.

In der Praxis pflegt man den Bogen nicht zu berechnen, sondern zu messen, indem man ein bestimmtes kleineres Stück in den Zirkel faßt und damit die Biegung entlang mißt, dies würde in Fig. 56 geben b = 2,2 m.

Bei $^1/_{10}$ — $^1/_{12}$ Pfeil der Knaggen rechnet man in der Praxis an Ziegel für das Gewölbe und Hintermauerung pro Quadratmeter der Horizontalprojektion 75 Steine, dies gibt für unser Beispiel:

$$5\cdot 2 \text{ qm à } 75 = 750 \text{ Steine.}$$

Zur Herstellung des Gewölbes sind 600 Steine erforderlich, demnach kommen 150 Steine auf die Hintermauerung.

---

10. Wie viel Steine sind zur Herstellung eines 1 Stein starken, 2,0 m weiten und 4,0 m tiefen Brunnen erforderlich.

Lösung 1. Die Steinezahl einer Schicht erhalten wir, indem wir den Umfang des inneren Kreises durch die Steinbreite dividieren:

$$\text{d. i.} \quad \frac{d\,\pi}{12} = \frac{200\cdot\pi}{12 \text{ cm}} = \frac{628{,}3}{12} \infty = 53.$$

Ein Stein ist 6,5 cm, also mit 1 cm Fuge 7,5 cm hoch, mithin sind erforderlich

$$\frac{400}{7{,}5} = 53 \text{ Ringe à 53 Steine gibt: 2809 Steine.}$$

Lösung 2.
$$J = \left(\frac{D^2\,\pi}{4} - \frac{d^2\,\pi}{4}\right)h$$
$$= \left(\frac{2{,}5^2\,\pi}{4} - \frac{2{,}0^2\,\pi}{4}\right)\cdot 4{,}0$$
$$= (4{,}9087 - 3{,}1416)\cdot 4{,}0$$
$$= 7{,}0684 \text{ cbm.}$$

Ein Kubikmeter enthält 400 Steine, demnach:

Anzahl der Steine $7{,}0684 \cdot 400 = 2828$ Stück.

Lösung 3. $J = \pi h (R^2 - r^2)$

$$= \pi h (R + r)(R - r)$$
$$= \pi \cdot 4{,}0 \cdot (1{,}25 + 1{,}0)(1{,}25 - 1{,}0)$$
$$= \pi \cdot 4{,}0 \cdot 2{,}25 \cdot 0{,}25$$
$$= 2{,}25 \cdot \pi = 7{,}0686 \text{ cbm.}$$

Lösung 4. Mit Hilfe der Guldinischen Regel (Seite 85)

$$J = F \cdot w$$
$$= 0{,}25 \cdot 4{,}0 \cdot 2 \cdot x_0 \pi$$
$$= 1{,}0 \cdot 2 \cdot 1{,}125 \cdot \pi$$
$$= 7{,}0686 \text{ cbm.}$$

---

11. Ein schräg abgeschnittener Zylinder von 0,5 m Durchmesser ist an der kurzen Seite 4,0 m, an der langen Seite 6,0 m hoch, wie groß ist der Mantel und der Inhalt?

Lösung.

$$M = \pi r (h_1 + h_2) = \pi \cdot 0{,}25 (6{,}0 + 4{,}0) = 0{,}7854 \cdot 10{,}0 = 7{,}854 \text{ qm.}$$

$$J = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi \cdot 0{,}25^2 \frac{6{,}0 + 4{,}0}{2} = 0{,}1964 \cdot 5 = 0{,}9820 \text{ cbm.}$$

---

12. Eine Walze aus Kork, deren Grundflächen-Radius $r = 36{,}77$ cm ist, soll der Länge nach durch eine konzentrische Zylinderfläche so ausgebohrt werden, daß sie, nachdem die Höhlung durch eine genau in dieselbe passende Walze von Blei vom Radius ϱ ausgefüllt worden, auf Wasser gelegt, zur Hälfte einsinke. Welchen Radius muß die Walze aus Blei haben?

Spez. Gewicht des Korkes $s = 0{,}24$, des Bleies $s_1 = 11{,}33$.

Lösung. Korkwalze + Bleiwalze = Wasserquantum

$$(r^2 - \varrho^2) \pi h s + \varrho^2 \pi h s_1 = \frac{r^2 \pi h}{2}$$

oder $$(r^2 - \varrho^2) s + \varrho^2 s_1 = \frac{r^2}{2}$$

$$r^2 s - \varrho^2 s + \varrho^2 s_1 = \frac{r^2}{2}$$

$$\varrho^2 s_1 - \varrho^2 s = \frac{r^2}{2} - r^2 s$$

$$\varrho^2 (s_1 - s) = \frac{r^2 - 2 r^2 s}{2}$$

$$\varrho^2 = r^2 \cdot \frac{1 - 2 s}{2 (s_1 - s)}$$

$$\varrho = r \sqrt{\frac{1 - 2 s}{2 (s_1 - s)}}$$

$$= r \sqrt{\frac{1 - 2 \cdot 0{,}24}{2 (11{,}33 - 0{,}24)}}$$

$$= 36{,}77 \sqrt{\frac{1 - 0{,}48}{2 \cdot 11{,}09}}$$

$$= 36{,}77 \cdot \sqrt{\frac{0{,}52}{2 \cdot 11{,}09}}$$

$$= 36{,}77 \cdot \sqrt{\frac{26}{1109}}$$

$$= 5{,}63 \text{ cm.}$$

---

c) Die Pyramide.

Ein Prisma läßt sich durch Diagonalebenen in 3 inhaltsgleiche Pyramiden zerlegen, mithin ist der Inhalt einer Pyramide

$J = \frac{G\,h}{3}$ und der Mantel = Fläche aller Seitendreiecke.

Wir unterscheiden: gerade und schiefe, drei- und mehrseitige Pyramiden.

Beispiele.

1. Wie groß ist der Inhalt einer Pyramide von 6,0 m Höhe, deren Grundfläche ein Rechteck von 2,0 m Länge und 1,0 m Breite ist? Was wiegt dieselbe? Material: Ziegelsteine von spezifischem Gewichte 1,6.

$$J = \frac{G\,h}{3} = \frac{2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 6{,}0}{3} = 4{,}0 \text{ cbm} \quad \text{Gewicht} = 4{,}0 \cdot 1600 = 6400 \text{ kg.}$$

2. Die Grundfläche einer zwölfseitigen Pyramide von 7,35 m Höhe sei ein regelmäßiges Zwölfeck mit der Seite 1,19 m, wie groß ist der Inhalt?

Lösung.

Nach Seite 20 ist die Fläche des Zwölfecks $= 11{,}19615 \cdot 1{,}19^2$.

$$\text{Inhalt } J = \frac{11{,}19615 \cdot 1{,}19^2 \cdot 7{,}35}{3} = 38{,}844 \text{ cbm.}$$

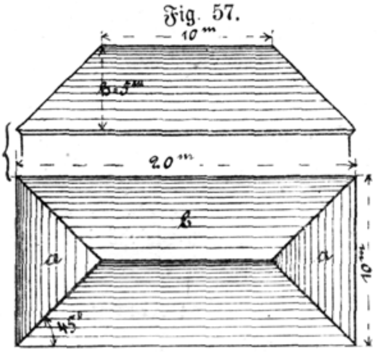
3. Die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe 4,0 m, sei ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 2,7 m, wie groß ist die Seite eines der Pyramide inhaltsgleichen Würfels?

Lösung.

$$\text{Inhalt} = \frac{G\,h}{3} = \frac{2{,}59808 \cdot 2{,}7^2}{3} \cdot 4{,}0 = a^3 \text{ (a Würfelseite).}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{2{,}59808 \cdot 2{,}7^2}{3} \cdot 4{,}0} = 2{,}93 \text{ m.}$$

Fig. 57.



4. Die Sparren eines 20,0 m langen und 10,0 m breiten Hauses stehen oben unter 90°, also Dachhöhe gleich 5,0 m, wie viel Ziegel sind zur Eindeckung erforderlich, wenn pro Quadratmeter 40 Stück gerechnet werden, wie viel laufende Meter Latten, die 18 cm entfernt liegen, werden gebraucht, wie groß ist der Inhalt des Dachraumes, wenn ein einfaches Walmdach vor-

ausgesetzt wird? Wie viel Fuder Heu lassen sich im Dachraum unterbringen, wenn pro Fuder 10 cbm Raum erforderlich sind? (Fig. 57.)

Lösung. Senkrechter Abstand zwischen First und Traufe

$$= \sqrt{5{,}0^2 + 5{,}0^2} = \sqrt{50{,}0} = 7{,}071 \text{ m.}$$

Die vordere Walmfläche rechnen wir nicht besonders, es ist gleiche Dachneigung vorhanden, daher kann man das Satteldach voll rechnen, weil die Dachflächen sich gleich bleiben.

$$\text{Dachflächen} = 2 \cdot 7{,}071 \cdot 20{,}0 = 282{,}84 \text{ qm.}$$

$$\text{Dachziegel} = 282{,}84 \cdot 40 = 11313{,}6 \backsim 11320$$

dazu 5 % für Bruch mit 566

11886

$\backsim$ 12000 Ziegel.

Die Latten liegen 18 cm entfernt, also erforderliche Lattenlänge:

$$= 2 \cdot 20{,}0 \frac{707{,}1}{18} + 20 \backsim = 40{,}0 \cdot 38{,}53 = 1541{,}2 \text{ lfd. Meter.}$$

Inhalt des Dachraumes: Prisma b — 2 Pyramiden a

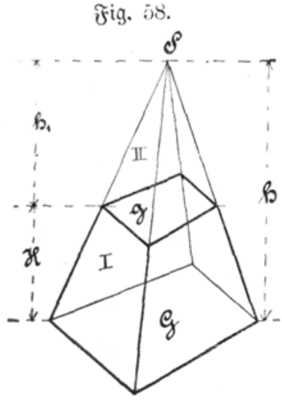
$$= \frac{10{,}0 \cdot 5{,}0}{2} 20{,}0 - \frac{2 \frac{10{,}0 \cdot 5{,}0}{2} 5{,}0}{3} = 500 - \backsim 83 = 417 \text{ cbm.}$$

$$\text{Fuderanzahl} = \frac{417}{10} \backsim = 42.$$

5. Die Pyramide zu Memphis hat eine Höhe von 142,0 m, die Grundfläche ist ein Quadrat, dessen Seite 226,0 m lang ist. Wie viel Kubikmeter Inhalt hat diese Pyramide?

Lösung. $J = \frac{226{,}0^2 \cdot 142{,}0}{3} = 2417597$ cbm.

Fig. 58.



d) Die abgestumpfte Pyramide.

Wir bezeichnen nach Fig. 58 die Endflächen der abgestumpften Pyramide, die ungleiche Figuren sind, mit G und g, die Höhe mit h und die Höhe der Ergänzungspyramide II mit h_1, und die Höhe der ganzen Pyramide mit H.

Aufgabe. Gegeben: G, g und h; Gesucht Inhalt J.

Lösung. Es verhält sich:

$$G : g = H^2 : h_1{}^2$$

$$1)\quad \sqrt{G} : \sqrt{g} = H : h_1$$

Es ist $H = h + h_1$; in 1) eingesetzt:

$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + h_1) : h_1$. Hieraus folgt

$$h_1 \sqrt{G} = h \sqrt{g} + h_1 \sqrt{G}$$

$$2)\quad h_1 = \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Der Inhalt des Pyramidenstumpfes kann nun als die Differenz zweier Pyramiden mit den Grundflächen G bezw. g und mit den Höhen $(h + h_1)$ bezw. h_1 berechnet werden.

Es ist
$$J = \frac{1}{3} G (h + h_1) - \frac{1}{3} g h_1$$
$$= \frac{1}{3}\left[G h + G h_1 - g h_1\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[G h + h_1 (G - g)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[G h + \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}(G - g)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[G h + \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}(\sqrt{G} + \sqrt{g})(\sqrt{G} - \sqrt{g})\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[G h + h\sqrt{g}(\sqrt{G} + \sqrt{g})\right]$$
$$= \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{G g} + g\right).$$

Beispiele.

1. Die Grundfläche einer quadratisch abgestumpften Pyramide habe zur einen Seite 12,0 m und zur anderen 7,0 m, die Höhe sei 5,0 m, wie groß ist ihr Inhalt?

Lösung. $J = \frac{h}{3}(G + \sqrt{G g} + g)$

$$= \frac{5}{3}\left(12{,}0^2 + \sqrt{12{,}0^2 \cdot 7{,}0^2} + 7{,}0^2\right) = \frac{5}{3}(144{,}0 + 84 + 49{,}0) = 461{,}67 \text{ cbm}.$$

---

2. Ein Pyramidenstumpf von 4,0 m Höhe ist an beiden Seiten regelmäßig sechseckig abgestumpft, die Seite des oberen Sechsecks sei 5,0 m, die des unteren 8,0 m, wie groß ist der Inhalt? Was wiegt der aus Mauerwerk (1 cbm = 1600 kg) bestehende Körper?

Lösung. Untere Endfläche $G = 2{,}59808 \cdot s^2.$
$= 2{,}59808 \cdot 8{,}0^2 = 166{,}28$ qm.
Obere Endfläche $g = 2{,}59808\, s^2.$
$= 2{,}59808 \cdot 5{,}0^2 = 64{,}95$ qm.

$$\text{Inhalt } J = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{G\,g} + g\right)$$
$$= \frac{4{,}0}{3}\left(166{,}28 + \sqrt{166{,}28 \cdot 64{,}95} + 64{,}95\right)$$
$$= \frac{4{,}0}{3} \cdot 335{,}15 = 446{,}87 \text{ cbm.}$$

1 cbm Mauerwerk wiegt 1600 kg.
Gewicht des Pyramidenstumpfes $= 446{,}87 \cdot 1600 = 714992$ kg

---

e) Das Prismatoid.

Ein Prismatoid wird nach Fig. 59 von zwei parallelen, sonst aber voneinander unabhängigen Polygonen als Endflächen und im allgemeinen von Dreiecken, die mit der einen Endfläche eine Seite und mit der anderen einen Eckpunkt gemein haben, begrenzt. Bezeichnet:

G und g untere und obere Endfläche, h die Höhe und M die Durchschnittsfläche in halber Höhe, so ist: Inhalt J eines Prismatoids

$$J = \frac{h}{6}\left(G + 4\,M + g\right)$$

Fig. 59.

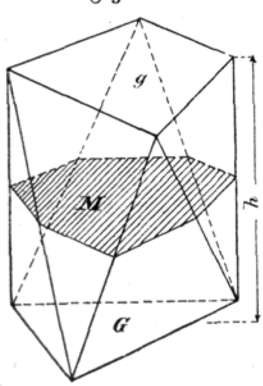
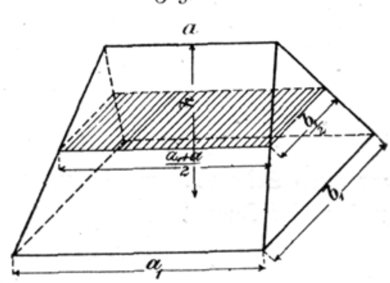


Fig. 60.



---

1. Der Keil.

Nach Fig. 60 ist für den Keil mit rechteckiger Grundfläche:

$$g = 0,\; G = a_1\, b_1,\; M = \frac{a_1 + a}{2} \cdot \frac{b_1}{2}$$

also $J = \frac{h}{6}(G + 4M + g)$

$$= \frac{h}{6}\left(a_1 b_1 + 4 \cdot \frac{a_1 + a}{2} \cdot \frac{b_1}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{6}[a_1 b_1 + (a_1 + a) b_1]$$

$$= \frac{h}{6}(a_1 b_1 + a_1 b_1 + a b_1)$$

$$= \frac{h}{6}(2 a_1 b_1 + a b_1)$$

Wird $a_1 = a$, so ist:

$$J = \frac{h}{6}(2 a_1 b_1 + a_1 b_1)$$

$$= \frac{h}{6} \cdot 3 a_1 b_1$$

$$= h \cdot \frac{a_1 b_1}{2}$$

$$= h M,$$

eine Formel, nach der in der Praxis fast immer gerechnet wird.

Beispiele.

1. In einem Keile ist nach Fig. 60 $a_1 = 20{,}0$ m, $b_1 = 10{,}0$ m, $a = 16{,}0$ m und $h = 6{,}0$ m, Wie groß ist der Inhalt?

Lösung. $J = \frac{h}{6}(2 a_1 b_1 + a b_1)$

$$= \frac{6{,}0}{6}(2 \cdot 20{,}0 \cdot 10{,}0 + 16{,}0 \cdot 10{,}0)$$

$$= 560{,}0 \text{ cbm}.$$

---

2. Der Obelisk.

Sind die Endflächen Rechtecke, so führt der Obeliks den Namen Ponton oder Keilstumpf (Fig. 61).

Nach Fig. 61 ist:

$$J = \frac{h}{6}(G + 4M + g)$$

$$= \frac{h}{6}\left(a_1 b_1 + 4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} + a_2 b_2\right)$$

$$= \frac{h}{6}[a_1 b_1 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2 b_2]$$

$$= \frac{h}{6}[a_1 b_1 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_2)$$

$$= \frac{h}{6}[2 a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + 2 a_2 b_2]$$

$$= \frac{h}{6}[(2 a_1 + a_2) b_1 + (a_1 + 2 a_2) b_2].$$

Sind die beiden Grundflächen eines Obelisken kongruent, so sind die Seitenkanten einander parallel und der Körper geht in ein Prisma über.

Setzen sich die Grundflächen eines Obelisken aus ähnlichen Figuren zusammen, so verwandelt sich der Körper in einen P y r a m i d e n s t u m p f.

Somit sind Prismen, Pyramidenstumpfe, Keile und Obelisken nur Abarten des Prismatoids.

Beispiele.

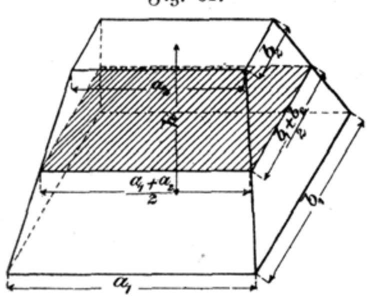
1. Ein Bauunternehmer soll eine Grube ausschachten, für die nach Fig. 61: $h = 6{,}0$ m, $a_1 = 24{,}0$ m, $a_2 = 20{,}0$ m, $b_1 = 16{,}0$ m und $b_2 = 12{,}0$ m ist. Wie groß ist die auszuschachtende Erdmasse? Welchen Verlust erfährt er infolge fehlerhafter Berechnung, wenn die Grube durch Ausmittelung der Grundkanten berechnet wird? Welchen Gewinn hat er zu verzeichnen, wenn die Grube durch Ausmittelung der Grundflächen berechnet wird?

L ö s u n g.

1. Erdmassenberechnung nach der Formel des Keilstumpfes:

$$J = \frac{h}{6}\left[(2\,a_1 + a_2)\,b_1 + (a_1 + 2\,a_2)\,b_2\right]$$
$$= \frac{6{,}0}{6}\left[(2 \cdot 24{,}0 + 20{,}0) \cdot 16{,}0 + (24{,}0 + 2 \cdot 20{,}0)\,12{,}0\right]$$
$$= 68{,}0 \cdot 16{,}0 + 64{,}0 \cdot 12{,}0$$
$$= 1088{,}0 + 768{,}0$$
$$= 1856{,}0 \text{ cbm.}$$

Fig. 61.



2. Erdmassenberechnung durch Ausmittelung der Grundkanten:

$$J = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$$
$$= \frac{24{,}0 + 20{,}0}{2} \cdot \frac{16{,}0 + 12{,}0}{2} \cdot 6{,}0$$
$$= 22{,}0 \cdot 14{,}0 \cdot 6{,}0$$
$$= 1848{,}0 \text{ cbm.}$$

3. Erdmassenberechnung durch Ausmittelung der Grundflächen:

$$J = \frac{a_1\,b_1 + a_2\,b_2}{2} \cdot h$$
$$= \frac{24{,}0 \cdot 16{,}0 + 20{,}0 \cdot 12{,}0}{2} \cdot 6{,}0$$
$$= (384{,}0 + 240{,}0) \cdot 3{,}0$$
$$= 1872{,}0 \text{ cbm.}$$

Verlust: $1856{,}0 - 1848{,}0 = 8{,}0$ cbm.

Gewinn: $1872{,}0 - 1856{,}0 = 16{,}0$ cbm.

---

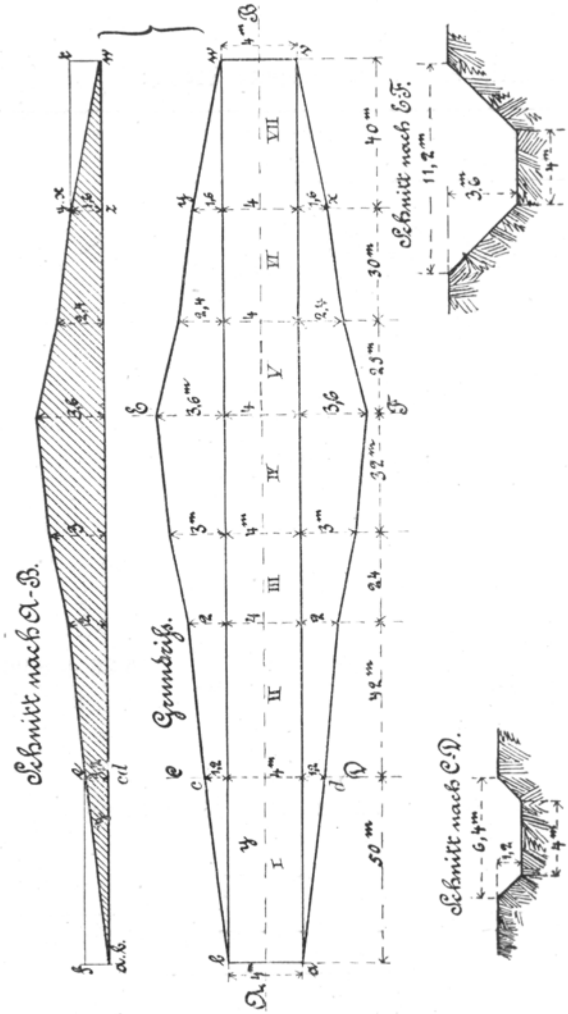
2. Ein Steinhaufen ist 0,6 m hoch, die Endflächen sind Rechtecke, unten 4,0 m lang, 2,0 m breit und oben bezw. 2,0 m lang und 1,0 m breit. Wie groß ist der Inhalt?

Lösung.
$$J = \frac{h}{6}\left[(2\,a_1 + a_2)\,b_1 + (a_1 + 2\,a_2)\,b_2\right]$$
$$= \frac{0,6}{6}\left[(2 \cdot 4,0 + 2,0)\,2,0 + (4,0 + 2 \cdot 2,0) \cdot 1,0\right]$$
$$= 0,1\,[20,0 + 8,0]$$
$$= 2,8 \text{ cbm.}$$

---

3. Die Erdmasse eines nach den in Fig. 62 angegebenen Abmessungen auszuschachtenden Weges zu berechnen.

Fig. 62.



Lösung. Berechnung der Erdmasse.

Inhalt des Keiles I $= \frac{1}{2}$ Prisma a b c d e f $= \frac{\text{Parralleltrapez } y \cdot 50}{2}$

$$= \frac{\frac{4{,}0 + 6{,}4}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 50}{2} = 156{,}0 \text{ cbm.}$$

Prisma II $= h\,M$;

Endfläche A $= \frac{4{,}0 + 6{,}4}{2} \cdot 1{,}2 = 6{,}24$;

Endfläche B $= \frac{4{,}0 + 8{,}0}{2} \cdot 2{,}0 = 12{,}0$, also

Inhalt $= \frac{6{,}24 + 12{,}0}{2} \cdot 42{,}0 = 383{,}04$ cbm,

in ähnlicher Weise berechnet sich folgende Tabelle:

Körper	Endfläche rückwärts gelegen	Endfläche vorwärts gelegen	Mittel beider Endflächen	Länge	Inhalt cbm
Keil I					156,00
Prisma II	$\frac{4{,}0 + 6{,}4}{2} \cdot 1{,}2 = 6{,}24$	$\frac{4{,}0 + 8{,}0}{2}$ 2,0 = 12,0	$\frac{12{,}0 + 6{,}24}{2} = 9{,}12$	42,0	383,04
„ III	12,0	$\frac{4{,}0 + 10{,}0}{2}$ 3,0 = 21,0	$\frac{12{,}0 + 21{,}0}{2} = 16{,}5$	24,0	396,00
„ IV	21,0	$\frac{4{,}0 + 11{,}2}{2} \cdot 3{,}6 = 27{,}36$	$\frac{21{,}0 + 27{,}36}{2} = 24{,}18$	32,0	773,76
„ V	27,36	$\frac{4{,}0 + 8{,}8}{2} \cdot 2{,}4 = 15{,}36$	$\frac{27{,}36 + 15{,}36}{2} = 21{,}36$	25,0	534,00
„ VI	15,36	$\frac{4{,}0 + 7{,}2}{2} \cdot 1{,}6 = 8{,}96$	$\frac{15{,}36 + 8{,}96}{2} = 12{,}16$	30,0	364,80
„ VII		$= \frac{1}{2}$ Prisma x y z t w v = Parralleltrapez $\frac{x\,y \cdot 40}{2}$ $= 8{,}96 \cdot \frac{40}{2} =$			179,20

Auszuschachtende Erdmasse = 2786,80

f) Der Kegel.

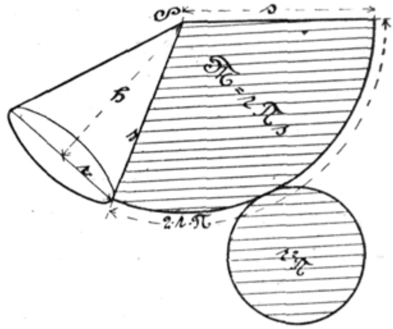
Ein Kegel kann betrachtet werden als eine Pyramide mit unendlich vielen Seiten, der Inhalt einer Pyramide ist:

$$J = \frac{G\,h}{3},$$

für den Kegel ist $G = r^2 \pi$, also

$$\text{Inhalt des Kegels} = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

Fig. 63.



Nach Fig. 63 ist der Mantel des Kegels

$$= \frac{2 r \pi s}{2} = r \pi s = r \pi \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Beispiele.

1. In einem Kegel ist $r = 10{,}0$ m, $h = 24{,}0$ m, wie groß ist der Inhalt und Mantel?

Lösung.

$$J = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{10{,}0^2 \cdot \pi \cdot 24{,}0}{3} = 2513{,}27 \text{ cbm};$$

$$\text{Seitenlinie } s = \sqrt{10{,}0^2 + 24{,}0^2} = \sqrt{676{,}0} = 26{,}0 \text{ m}.$$

$$M = r \pi \cdot s = 10{,}0 \cdot \pi \cdot 26{,}0 = 816{,}81 \text{ qm}.$$

---

2. Für ein kegelförmiges Zeltdach sei $r = 4{,}3$ m und $s = 6{,}6$ m, wie groß ist Inhalt und Mantel?

Lösung.

$$J = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{6{,}6^2 - 4{,}3^2} \sim 5{,}01$$

$$J = \frac{4{,}3^2 \cdot \pi}{3}\, 5{,}01 = 97{,}01 \text{ cbm}.$$

$$M = r \pi s = 4{,}3 \cdot \pi \cdot 6{,}6 = 89{,}16 \text{ qm}.$$

---

3. Für einen Kegel ist $r = 10{,}0$ cm, $h = 10\sqrt{2} = 14{,}142$ cm, wie groß ist Inhalt und Mantel?

Lösung. $J = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{10{,}0^2 \cdot \pi \cdot 14{,}142}{3} = 1480{,}95$ ccm.

$M = r \pi s = 10{,}0 \cdot \pi \cdot \sqrt{10{,}0^2 + 14{,}142^2} = 544{,}14$ qcm.

Anmerkung. Unter allen normalen Kegeln von gleichem Inhalt hat der den kleinsten Mantel, für den $r : h = 1 : \sqrt{2}$ stattfindet.

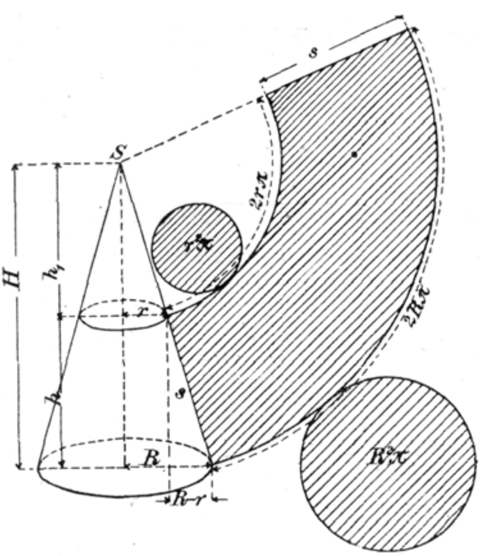
g) Der abgestumpfte Kegel.

Es sei: Höhe $= H$, $R =$ Radius der unteren, $r =$ Radius der oberen Endfläche, $h_1 =$ Höhe des Ergänzungskegels und $h =$ Höhe des Vollkegels.

Aufgabe. Inhalt und Mantel eines abgestumpften Kegels zu berechnen.

Lösung. Geg. R, r und h ? J und M.

Fig. 64.



Nach Fig. 64 ist: 1) Inhalt $J = \frac{1}{3} \pi (R^2 H - r^2 h_1)$

$$R : r = H : h_1$$
$$R : r = H : (H - h)$$
$$RH - Rh = rH$$
$$H (R - r) = Rh.$$

$$2)\qquad H = \frac{R\,h}{R - r}$$

$$r : R = h_1 : H$$
$$r : R = h_1 : (h + h_1)$$
$$r\,h + r\,h_1 = R\,h_1$$
$$r\,h = h_1\,(R - r)$$

$$3)\qquad h_1 = \frac{r\,h}{R - r}.$$

Gleichung 2) und 3) in 1) eingesetzt:

$$J = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R^2 \cdot R\,h}{R - r} - \frac{r^2 \cdot r\,h}{R - r}\right) = \frac{h\,\pi}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R - r} = \boxed{\frac{\pi\,h}{3}(R^2 + R\,r + r^2).}$$

$$\text{Mantel } M = \frac{2\,r\,\pi + 2\,R\,\pi}{2}\,s = \pi\,s\,(R + r).$$

$$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}.$$

Beispiele.

1. In einem abgestumpften Kegel ist $h = 17{,}0$ cm, $R = 12{,}0$ cm und $r = 7{,}0$ cm, wie groß ist Inhalt J und Mantel M?

Lösung.

$$J = \frac{h \cdot \pi}{3}(R^2 + R\,r + r^2) = \frac{17{,}0 \cdot \pi}{3}(12{,}0^2 + 12{,}0 \cdot 7{,}0 + 7{,}0^2)$$
$$= 4931{,}25 \text{ ccm}.$$

$$s = \sqrt{17{,}0^2 + (12{,}0 - 7{,}0)^2} = \sqrt{17{,}0^2 + 5{,}0^2} = 17{,}72 \text{ cm}.$$
$$M = \pi\,s\,(12{,}0 + 7{,}0) = \pi \cdot 17{,}72 \cdot 19{,}0 = 1057{,}71 \text{ qcm}.$$

---

2. Ein Baumstamm von 15,0 m Länge hat an einem Ende 2,0 m, am anderen 1,0 m Durchmesser, wie groß ist sein Inhalt?

Lösung. $J = \frac{15{,}0 \cdot \pi}{3}(1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2) = 27{,}49$ cbm.

---

3. Wie groß ist die Oberfläche eines abgestumpften Kegels, für den $R = 54{,}0$ cm, $h = 31{,}0$ cm und $r = 41{,}0$ cm ist?

Lösung. Oberfläche $= \pi\,s\,(R + r) + R^2\,\pi + r^2\,\pi$.

$$s = \sqrt{31{,}0^2 + 13{,}0^2} = 33{,}6 \text{ cm}.$$

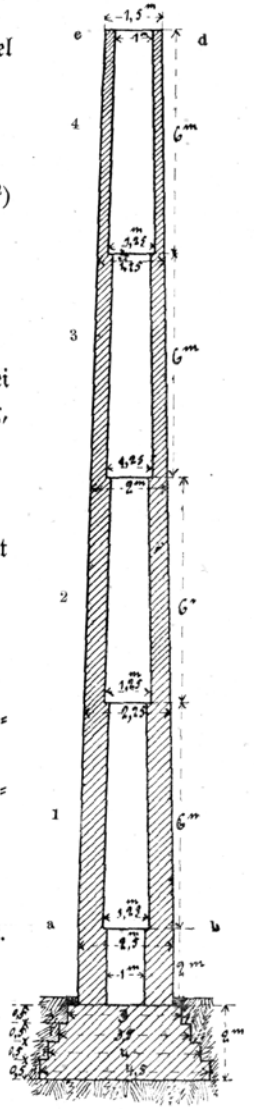
$$= \pi\,s \cdot 95{,}0 + 54{,}0^2\,\pi + 41{,}0^2 \cdot \pi = 298{,}45 \cdot 33{,}6 + 9160{,}90 + 5281{,}02$$
$$= 10027{,}92 + 9160{,}90 + 5281{,}02 = 24468{,}84 \text{ qcm} \sim 2{,}45 \text{ qm}.$$

---

4. Den Inhalt und das Gewicht eines Dampfschornsteines nach den Abmessungen in Fig. 65 zu berechnen.

Lösung.

Fig. 65.



1. Schornstein bis zum Sockel.

Inh. = abgest. Kegel a b c d — 4 abgest. Hohlkegel (1 + 2 + 3 + 4).

$$= \frac{24{,}0}{3} \cdot \pi (1{,}25^2 + 1{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}75^2)$$

$$- 4 \cdot \frac{6{,}0}{3} \cdot \pi (0{,}625^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}625 + 0{,}5^2)$$

$$= 8{,}0 \cdot \pi \cdot 3{,}0625 - 8{,}0 \cdot \pi \cdot 0{,}953125$$

$$= 8{,}0\, \pi (3{,}0625 - 0{,}953125)$$

$$= 25{,}133 \cdot 2{,}109375$$

$$= 53{,}015 \text{ cbm.}$$

Das spezifische Gewicht des Mauerwerks sei 1,6 kg, also wiegt 1 cbm Mauerwerk 1600 kg, mithin

Gewicht $G = 53{,}015 \cdot 1600 = 84824$ kg.

---

2. Fundament. (Das Fundament besteht aus 4 Zylindern.)

$$J = 0{,}5 \cdot \pi (2{,}25^2 + 2{,}0^2 + 1{,}75^2 + 1{,}5^2)$$

$$= 1{,}5708 \cdot 14{,}375 = 22{,}58 \text{ cbm Mauerwerk.}$$

---

3. Sockel. (Der Sockel ist ebenfalls zylindrisch.)

$J = 2 \cdot \pi (1{,}25^2 - 0{,}5^2) = 8{,}24$ cbm Mauerwerk.

Sockel + Fundament enthält

$22{,}58 + 8{,}24 = 30{,}82$ cbm.

Gewicht von beiden $= 30{,}82 \cdot 1600 = 49312$ kg.

Totalgewicht des Schornsteins

$84824 + 49312 = 134136$ kg.

Rechnet man pro Kubikmeter 400 Steine, dann sind erforderlich

$53{,}015 + 30{,}82 = 83{,}835$ cbm $\cdot 400 = 33534$ Steine.

Vielfach werden die Inhalte der Fabrikschornsteine mit Hilfe der Guldinischen Regel, welche auf Seite 85 behandelt worden ist, berechnet.

---

5. Wie hoch muß ein Gefäß in Form eines abgestumpften Kegels sein, das 0,05 Liter fassen soll, wenn $R = 50{,}3$ mm und $r = 33{,}5$ mm ist?

Lösung. $1\,l = 1$ cdm $= 100 \cdot 100 \cdot 100$ cbmm, also
$0{,}05\,l = 500000$ cbmm.

$$J = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = 500000$$

$$\frac{\pi h}{3}(50{,}3^2 + 50{,}3 \cdot 33{,}5 + 33{,}5^2) = 500000$$

$$h = \frac{3 \cdot 500000}{\pi(2530{,}09 + 1685{,}05 + 1122{,}25)}$$

$$= \frac{1500000}{\pi \cdot 5337{,}39}$$

$$= 89{,}46 \text{ mm.}$$

---

6. Ein kegelförmiger Holzstamm hat eine Höhe $h = 2{,}5$ m, am dicken Ende einen Umfang von 0,9 m und am dünnen Ende von 0,6 m; es soll aus demselben ein prismatischer Balken gehauen werden, dessen Endfläche x^2 ein der kleineren Kegelendfläche eingeschriebenes Quadrat sein soll. Wie groß ist der Rauminhalt des Holzabfalles?

Lösung. J = Kegelstumpf — Prisma.

$$1) \qquad = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) - x^2 h.$$

Hierin bezeichnet R den Radius des Kreises am dicken, r den des Kreises am dünnen Ende und x die Seite des eingeschriebenen Quadrats.

Es ist: $2R\pi = u = 0{,}9$, also $R = \dfrac{u}{2\pi}$,

$2r\pi = u_1 = 0{,}6$, also $r = \dfrac{u_1}{2\pi}$.

Ferner ist $(2r)^2 = x^2 + x^2$

$$4r^2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2r^2 = 2\frac{u_1^{\,2}}{4\pi^2}.$$

Diese Werte in Gleichung 1) eingesetzt:

$$I = h\left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{u^2}{4\pi^2} + \frac{u u_1}{4\pi^2} + \frac{u_1^{\,2}}{4\pi^2}\right) - \frac{2u_1^{\,2}}{4\pi^2}\right]$$

$$= \frac{h}{4\pi^2}\left[\frac{\pi}{3}(u^2 + u u_1 + u_1^{\,2}) - 2u_1^{\,2}\right].$$

$h = 2{,}5$. $u = 0{,}9$. $u_1 = 0{,}6$ . .

eingesetzt:

$$J = \frac{2,5}{4\pi^2}\left[\frac{\pi}{3}(0,81 + 0,9 \cdot 0,6 + 0,36) - 2 \cdot 0,36\right]$$
$$= \frac{2,5}{4\pi^2}\left[\frac{\pi}{3}1,71 - 0,72\right]$$
$$= \frac{2,5}{4\pi^2}(0,57\,\pi - 0,72)$$
$$= \frac{2,5}{4\pi^2}\cdot(1,79 - 0,72)$$
$$= \frac{2,5}{4\pi^2}\cdot 1,07$$
$$= 0,068 \text{ cbm.}$$

---

7. Auf einem abgestumpften geraden Kegel, dessen untere Grundfläche den Durchmesser $2\,r = 30,0$ cm hat, steht ein gerader Zylinder, dessen Grundfläche die obere Endfläche des Kegelstumpfes ist, und der mit diesem gleiches Volumen hat. Die Höhe des Kegelstumpfes ist $h_1 = 50,0$ cm, die des Zylinders $h_2 = 80,0$ cm. Die krumme Seitenfläche des Gesamtkörpers soll vergoldet werden. Wie teuer ist die Vergoldung, wenn der Quadratzentimeter mit 18 Pfg. berechnet wird?

Lösung.

Inhalt des Kegelstumpfes: $J_1 = \frac{\pi h_1}{3}(R^2 + R\,r + r^2)$.

Inhalt des Zylinders: $J_2 = r^2 \pi h_2$.

$$J_1 = J_2, \text{ d. i. } \frac{\pi h_1}{3}(R^2 + R\,r + r^2) = r^2 \pi h_2$$

oder $h_1 (R^2 + R\,r + r^2) = 3\,r^2 h_2$

$$R^2 + R\,r + r^2 = \frac{3\,r^2 h_2}{h_1}$$
$$r^2 - \frac{3\,r^2 h_2}{h_1} + R\,r = -R^2$$
$$r^2\left(1 - \frac{3\,h_2}{h_1}\right) + R\,r = -R^2$$
$$r^2 + \frac{R\,r}{1 - \frac{3\,h_2}{h_1}} = -\frac{R^2}{1 - \frac{3\,h_2}{h_1}}$$
$$r^2 + \frac{R\,h_1}{h_1 - 3\,h_2}\,r = -\frac{R^2 h_1}{h_1 - 3\,h_2}$$
$$r^2 + \frac{R\,h_1}{h - 3\,h_2}\,r + \left(\frac{R\,h_1}{2\,(h_1 - 3\,h_2)}\right)^2 = -\frac{R^2 h_1}{h_1 - 3\,h_2} + \left(\frac{R\,h_1}{2\,(h_1 - 3\,h_2)}\right)^2$$

$$\left(r + \frac{R h_1}{2(h_1 - 3h_2)}\right)^2 = -\frac{R^2 h_1}{h_1 - 3h_2} + \frac{R^2 h_1^{\,2}}{4(h_1 - 3h_2)^2}$$

$$r + \frac{R h_1}{2(h_1 - 3h_2)} = \pm\sqrt{\frac{R^2 h_1^{\,2}}{4(h_1 - 3h_2)^2} - \frac{R^2 h_1}{h_1 - 3h_2}}$$

$$r = -\frac{R h_1}{2(h_1 - 3h_2)} \pm\sqrt{\frac{R^2 h_1^{\,2}}{4(h_1 - 3h_2)^2} - \frac{R^2 h_1}{h_1 - 3h_2}}$$

Die gegebenen Werte eingesetzt:

$$r = -\frac{15{,}0 \cdot 50{,}0}{2(50{,}0 - 3 \cdot 80{,}0)} \pm\sqrt{\frac{15{,}0^2 \cdot 50{,}0^2}{4(50{,}0 - 3 \cdot 80{,}0)^2} - \frac{15{,}0^2 \cdot 50{,}0}{50{,}0 - 3 \cdot 80{,}0}}$$

$$= -\frac{750}{-380} \pm\sqrt{\frac{562500}{144400} - \frac{11250}{-190}}$$

$$= \frac{75}{38} \pm\sqrt{\frac{5625 + 85500}{1444}}$$

$$= \frac{75}{38} + \sqrt{\frac{91125}{1444}}$$

$$= \frac{75}{38} + \frac{301{,}87}{38}$$

$$= 9{,}92 \text{ cm.}$$

Nun ist die Mantelfläche des Kegelstumpfes: $M_1 = \pi s (R + r)$.

" " Zylinders: $M_2 = 2 r \pi h_2$,

d. i. $M_1 = \pi \cdot \sqrt{50{,}0^2 + (15{,}0 - 9{,}92)^2} \cdot (15{,}0 + 9{,}92)$

$= \pi \cdot 50{,}26 \cdot 24{,}92$

$= 3934{,}8$ qcm.

$M_2 = 2 \cdot 9{,}92 \cdot \pi \cdot 80{,}0$

$= 4986{,}3$ qcm.

$M_1 + M_2 = 3934{,}8 + 4986{,}3 = 8921{,}1$ qcm.

Kostenpunkt $8921{,}1 \cdot 0{,}18 = 1605{,}80$ Mark.

---

h) Die Kugel.

1) Inhalt.

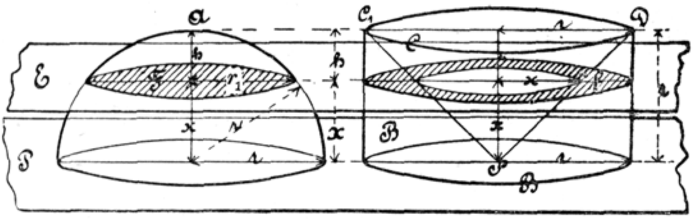
Satz. Nach Fig. 66 ist Halbkugel A inhaltsgleich Zylinder B — Kegel C von der Höhe r.

Beweis. Wir stellen die Halbkugel A und den Zylinder B, aus dem der Kegel C herausgeschnitten wurde, auf eine Ebene P, und legen in der Höhe x eine Ebene E parallel zur Ebene P, welche die Kugel in einem

Kreise der Fläche F und den Hohlzylinder in einem Kreisring der Fläche f schneidet. Nach Fig. 66 ist:

$$F = r_1{}^2 \pi = (r^2 - x^2)\pi \text{ und } f = (r^2 - x^2)\pi, \text{ es ist also}$$
$$F = f,$$

Fig. 66.



dies gilt für jeden Parallelschnitt, also muß, wenn wir die Kugelschnitte mit F_1, F_2, F_3 usw. und die Schnitte mit dem Hohlzylinder mit f_1, f_2, f_3, f_4 usw. bezeichnet werden:

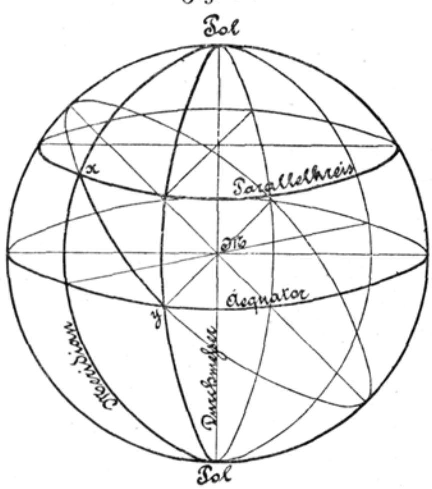
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + \ldots = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \ldots \text{ d. i.}$$

$$\text{Halbkugel } A = \text{Zylinder } B - \text{Kegel } C$$
$$= r^2 \pi \cdot r - \frac{r^2 \pi \cdot r}{3} = \frac{2}{3} r^3 \pi, \text{ also}$$
$$\text{Vollkugel } = \frac{4}{3} r^3 \pi = 4{,}189\, r^3.$$

---

2) Oberfläche.

Fig. 67.



Der Kugelinhalt ist gleich mit dem Inhalt unendlich vieler Pyramiden, deren Basen auf der Kugeloberfläche und deren Spitzen im Kugelmittelpunkt liegen; bezeichnen wir die Kugeloberfläche mit O, so ist:

$$\text{Inhalt } J = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi$$
$$O = 4\, r^2 \pi = 12{,}566\, r^2.$$

Der größte Kugelkreis, der zu einem Kugeldurchmesser senkrecht steht, heißt **Aequator** desselben. Die Endpunkte dieses Durchmessers heißen **Pole**. Größte Kugelkreise, die durch die

Pole gehen, heißen Meridiane. Kugelkreise, welche parallel zum Aequator sind, heißen Parallelkreise (Fig. 67).

Jeder Punkt auf der Erdoberfläche ist durch seinen Meridian und Parallelkreis bestimmt. Die Entfernung zweier Punkte x und y auf der Erdoberfläche ist bestimmt durch den Bogen xy eines größten Kugelkreises, der durch dieselben gelegt werden kann.

Beispiele.

1. Für eine Kugel aus Eisen vom spezifischen Gewicht 7,8 ist $r = 7{,}0$ cm, wie groß ist der Inhalt, die Oberfläche und das Gewicht?

Lösung.

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 7{,}0^3 \cdot \pi = 1437 \text{ ccm} = 1{,}437 \text{ cdm}.$$

$$G = 1{,}437 \cdot 7{,}8 = 11{,}21 \text{ kg}.$$

$$O = 4 r^2 \pi = 4 \cdot 7{,}0^2 \cdot \pi = 615{,}75 \text{ qcm}.$$

---

2. Eine Kugel aus Eisen hat 65,973 cm Umfang, wie groß ist der Radius, die Oberfläche, der Inhalt und das Gewicht? Spezifisches Gewicht gleich 7,8.

Lösung. $2 r \pi = 65{,}973;$

$$r = \frac{65{,}973}{2 \cdot \pi} = 10{,}5 \text{ cm}.$$

$$O = 4 r^2 \pi = 4 \cdot 10{,}5^2 \cdot \pi = 1385{,}44 \text{ qcm}.$$

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 10{,}5^3 \cdot \pi = 4849 \text{ ccm} = 4{,}849 \text{ cdm}.$$

$$G = 4{,}849 \cdot 7{,}8 \backsim = 37{,}82 \text{ kg}.$$

---

3. Was wiegt eine Kugel aus Granit von 1 dcm Radius? Spezifisches Gewicht gleich 2,8.

Lösung. $J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 1{,}0^3 \cdot \pi \backsim = 4{,}19$ cdm

$$G = 4{,}19 \cdot 2{,}8 = 11{,}732 \backsim 11{,}7 \text{ kg}.$$

---

4. Ein Turmknopf von 1 m Durchmesser soll vergoldet werden, 1 qm kostet 200 Mark, was ist für die Vergoldung zu zahlen?

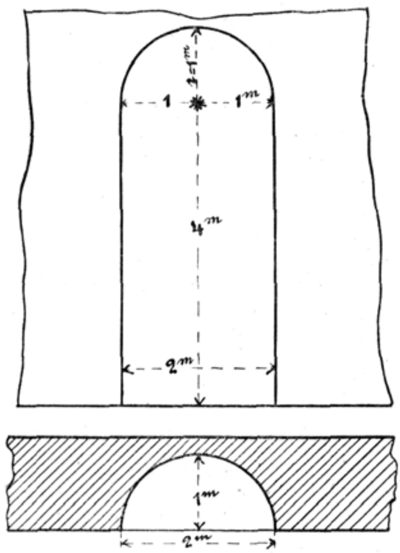
Lösung. $O = 4 r^2 \pi = 4 \cdot 0{,}5^2 \pi = 3{,}1416$ qm.

Kosten $= 3{,}1416 \cdot 200 = 628{,}32$ Mark.

---

5. In einer Wand befindet sich nach Fig. 68 eine zylindrische Nische, die oben durch eine Viertelkugel geschlossen wird, wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt derselben?

Fig. 68.



Lösung. J = Halbzylinder + Viertelkugel

$$= \frac{r^2 \pi h}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3 \pi}{4} = \frac{1{,}0^2 \cdot \pi \, 4{,}0}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1{,}0^3 \cdot \pi}{4} = 7{,}3304 \text{ cbm.}$$

$$O = \frac{2 r \pi h}{2} + \frac{4 r^2 \pi}{4} = 1{,}0 \cdot \pi \cdot 4{,}0 + 1{,}0^2 \cdot \pi = 15{,}708 \text{ qm.}$$

---

6. Den Inhalt und die innere Oberfläche eines Kugelgewölbes von 12,0 m Durchmesser und 0,6 m Gewölbestärke zu berechnen.

Lösung. $J = \dfrac{\frac{4}{3} R^3 \pi - \frac{4}{3} r^3 \pi}{2}$

$$= \frac{2}{3} \pi \, (R^3 - r^3)$$

$$= 2{,}094\,(6{,}6^3 - 6{,}0^3)$$

$$= 2{,}094\,(287{,}496 - 216{,}000)$$

$$= 2{,}094 \cdot 71{,}496$$

$$= 149{,}71 \text{ cbm.}$$

$$O = 4 r^2 \pi = 4 \cdot 6{,}0^2 \cdot \pi = 452{,}39 \text{ qm.}$$

Zur Herstellung sind erforderlich $149{,}71 \cdot 400 = 59884$ Steine.

7. Wie groß ist die Seite eines Würfels, deren Inhalt einer Kugel von 1 m Durchmesser gleich ist?

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = a^3$$

$$\frac{4}{3} 0{,}5^3 \cdot \pi = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3} 0{,}5^3 \cdot \pi} = 0{,}806 \text{ m.}$$

8. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel von 100,0 qm Oberfläche?

Lösung. $4 r^2 \pi = 100,$

$$d = 2r = 2\sqrt{\frac{100}{4 \cdot \pi}} = 5{,}642 \text{ m.}$$

9. Wie groß ist der Durchmesser eines kugeligen Gefäßes, das 1 l faßt?

Lösung. $J = \frac{4}{3} r^3 \pi = 1000 \text{ ccm}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000}{4 \cdot \pi}} = 6{,}2034 \text{ cm, also } d = 12{,}41 \text{ cm.}$$

10. Ein halbkugeliges Gefäß aus Schmiedeeisen vom spezifischen Gewicht 7,8 hat 5 mm Wandstärke und 2 dcm inneren Durchmesser, wie schwer ist das Gefäß für sich und mit Wasser gefüllt?

Lösung.

$$\text{Gefäßinhalt} = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 1{,}0^3 \cdot \pi}{2} = 2{,}0943 \text{ cdm.}$$

$$\text{Inhalt der vollen Halbkugel} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 1{,}05^3 \cdot \pi}{2} = 2{,}4244 \text{ cdm.}$$

$$\text{Gewicht} = (2{,}4243 - 2{,}0944) \cdot 7{,}8 = 2{,}574 \text{ kg}$$

$$\text{Gewicht des Wassers} = 2{,}0944 \cdot 1 = 2{,}0943 \text{ kg}$$

Zusammen: 4,6683 kg.

11. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Erde, wenn der Durchmesser 1716,96 geographische Meilen beträgt?

Lösung.

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3}\left(\frac{1716{,}96}{2}\right)^3 \cdot \pi \sim 2650240000 \text{ Kubikmeilen.}$$

$$O = 4 r^2 \pi = 4 \cdot \left(\frac{1716{,}96}{2}\right)^2 \cdot \pi \sim 9261260 \text{ Quadratmeilen.}$$

12. Der große Nadarsche Luftballon, der im Jahre 1867 in Paris aufstieg, hatte 20,0 m Durchmesser und war mit Leuchtgas gefüllt, von dem 1 cbm 0,518 kg schwer war, wie groß war der Auftrieb, wenn 1 cbm Luft 1,294 kg wiegt und wenn das Gewicht des Ballons -- Hülle, Netzwerk, Stricke, Anker, Instrumente, Ballastbemannung usw. — 2100 kg betrug?

Lösung. $J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 10{,}0^3 \pi = 4189$ cbm.

Gewicht der Luftmasse	$4189 \cdot 1{,}294 = 5421$ kg
Gewicht des Leuchtgases	$4189 \cdot 0{,}518 = 2170$ kg
	Ueberschuß: 3251 kg
Davon ab das Ballongewicht usw.	mit: 2100 kg
	Auftrieb: 1151 kg.

Der Auftrieb wird gleich Null, wenn ein Kubikmeter Luft verdünnt wird um $\frac{1151}{4189} = 0{,}275$ kg, in dieser Höhe wiegt ein Kubikmeter Luft $1{,}294 - 0{,}275 = 1{,}019$ kg.

---

13. Welche Wandstärke muß eine kupferne Hohlkugel von 1 kg Gewicht haben, um im Wasser zu schweben, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers 8,897 ist.

Lösung. Wenn die Kugel im Wasser schweben soll, so muß ihr Volumen gleich dem eines Kilogramm Wassers = 1000 ccm sein. Setzt man den Halbmesser der Kugel = r, so muß $\frac{4}{3} r^3 \pi = 1000$ sein, woraus $r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} = 6{,}204$ cm. Das Volumen eines Kilogramms Kupfer ist $\frac{1000}{8{,}897}$, folglich das Volumen des hohlen Raumes der Kugel $= 1000 - \frac{1000}{8{,}897} = \frac{7897}{8{,}897}$ ccm. Nun sei der Halbmesser des hohlen Raumes $= \varrho$, so muß sein $\frac{4}{3} \varrho^3 \pi = \frac{7897}{8{,}897}$, woraus $\varrho = \sqrt[3]{\frac{7897 \cdot 3}{8{,}897 \cdot 4\pi}} = 5{,}962$ cm. Die Wanddicke der Kupferkugel ist $= 6{,}204 - 5{,}962 = 0{,}242$ cm.

---

3) Der Kugelabschnitt, auch wohl die Kugelschale, Kugelkalotte, Kugelhaube oder Kugelkappe genannt.

Nach den Betrachtungen bei der Berechnung des Inhalts der Kugel und nach Fig. 69 ist:

Inhalt des Kugelabschnittes A = Zylinder B — abgestumpfter Kegel C.

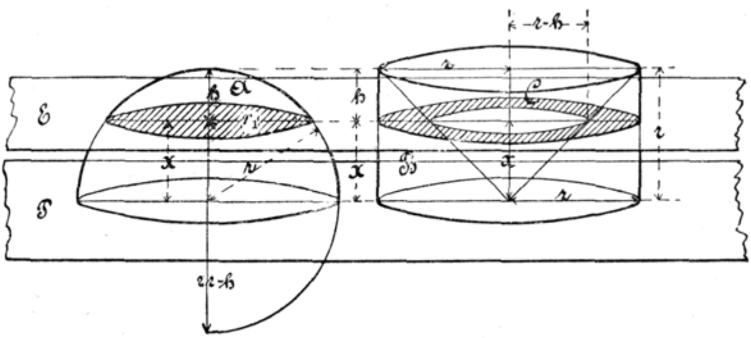
Inhalt des Zylinders $B = r^2 \pi h$.

Inhalt des abgestumpften Kegels $C = \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r - h) + (r - h)^2]$

$$= \frac{\pi h}{3}(r^2 + r^2 - rh + r^2 - 2rh + h^2).$$

$$= \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2).$$

Fig. 69.



Kugelabschnitt $= r^2 \pi h - \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2)$.

$$= r^2 \pi h - r^2 \pi h + r \pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

$$h : r_1 = r_1 : (2r - h)$$

$$2rh = r_1^2 + h^2,$$

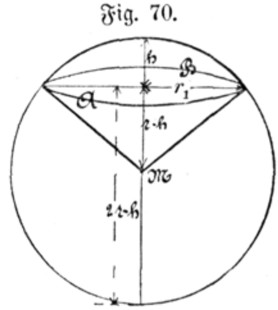
$$r = \frac{r_1^2 + h^2}{2h},$$ also ist auch

$$J = \frac{\pi h^2}{3}\left(3 \cdot \frac{r_1^2 + h^2}{2h} - h\right)$$

$$= \frac{\pi h^2}{6h}(3r_1^2 + 3h^2 - 2h^2)$$

$$= \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + h^2).$$

Fig. 70.



4) **Den Inhalt eines Kugelausschnitts (Sektors) zu berechnen.**

Nach Fig. 70 ist: Kugelausschnitt A = Kugelabschnitt B + Kegel C.

$$\text{Kugelabschnitt } B = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

$$\text{Kegel } C = r_1{}^2 \pi \left(\frac{r - h}{3}\right).$$

$$h : r_1 = r_1 : (2r - h).$$

$$r_1{}^2 = (2r - h)h, \text{ also}$$

$$\text{Kegel } C = \frac{\pi}{3}(2r - h)h \cdot (r - h).$$

$$= \frac{\pi}{3}(2rh - h^2)(r - h) = \frac{\pi}{3}(2r^2h - rh^2 - 2rh^2 + h^3)$$

$$= \frac{\pi}{3}(2r^2h - 3rh^2 + h^3), \text{ also}$$

$$\text{Kugelausschnitt} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi}{3}(2r^2h - 3rh^2 + h^3)$$

$$= \frac{\pi}{3}(3h^2r - h^3 + 2r^2h - 3rh^2 + h^3) = \frac{2}{3}r^2\pi h$$

oder da $h = r - x$ und $x = \sqrt{r^2 - r_1{}^2}$ ist, also

$$h = r - \sqrt{r^2 - r_1{}^2}$$

$$J = \frac{2}{3}r^2\pi\left(r - \sqrt{r^2 - r_1{}^2}\right).$$

---

5) Die Oberfläche eines Kugelabschnitts zu berechnen.

Bezeichnen wir die Oberfläche mit O, dann ist der Inhalt des Kugelsektors gleich den Inhalten unendlich vieler Pyramiden, deren Basen auf der Oberfläche des Kugelabschnitts und deren Spitzen im Mittelpunkt M liegen, d. i. $J = \frac{O \cdot r}{3}$, also

Fig. ~~70~~ 69

$$\frac{Or}{3} = \frac{2}{3}r^2\pi h$$

$$\boxed{O = 2r\pi h,}$$

$$h : r_1 = r_1 : (2r - h)$$

$$r = \frac{r_1{}^2 + h^2}{2h}, \text{ also auch}$$

$$O = 2 \cdot \frac{r_1{}^2 + h^2}{2h}\pi \cdot h = (r_1{}^2 + h^2)\pi.$$

---

6) Inhalt und Oberfläche der Kugelzone.

Inhalt. Der Inhalt einer Kugelzone läßt sich berechnen als die Differenz zweier Kugelabschnitte, d. i. nach Fig. 71

Kugelzone: $J = \frac{\pi h_2{}^2}{3}(3r - h_2) - \frac{\pi h_1{}^2}{3}(3r - h_1)$

$$= \frac{\pi (h + h_1)^2}{3}[3r - (h + h_1)] - \frac{\pi h_1{}^2}{3}(3r - h_1)$$

$$= \frac{\pi}{3}[(h + h_1)^2 (3r - h - h_1) - h_1{}^2 (3r - h_1)]$$

$$= \frac{\pi}{3}[(h^2 + 2hh_1 + h_1{}^2)(3r - h - h_1) - h_1{}^2(3r - h_1)]$$

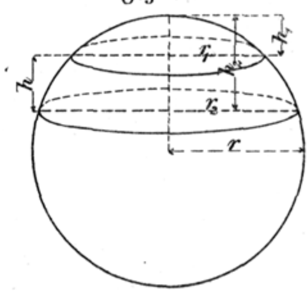
$$= \frac{\pi}{3}(3rh^2 + 6rhh_1 + 3rh_1{}^2 - h^3 - 2h^2h_1 - hh_1{}^2 -$$
$$- h^2h_1 - 2hh_1{}^2 - h_1{}^3 - 3rh_1{}^2 + h_1{}^3)$$

$$= \frac{\pi}{3}(3rh^2 + 6rhh_1 - h^3 - 3h^2h_1 - 3hh_1{}^2)$$

$$= \frac{\pi h}{3}(3rh + 6rh_1 - h^2 - 3hh_1 - 3h_1{}^2)$$

Ferner ist

Fig. 71.



$$r_1{}^2 = r^2 - (r - h_1)^2$$
$$= r^2 - r^2 + 2rh_1 - h_1{}^2$$
$$= 2rh_1 - h_1{}^2$$

und $r_2{}^2 = r^2 - [r - (h + h_1)]^2$
$$= r^2 - (r - h - h_1)^2$$
$$= r^2 - r^2 + 2rh + 2rh_1 - h^2 - h_1{}^2 - 2hh_1$$
$$= 2rh + 2rh_1 - h^2 - h_1{}^2 - 2hh_1$$

also ist $r_1{}^2 + r_2{}^2 = 2rh_1 - h_1{}^2 + 2rh + 2rh_1 - h^2 - h_1{}^2 - 2hh_1$
$$= 4rh_1 - 2h_1{}^2 - 2hh_1 + 2rh - h^2$$

demnach $r_1{}^2 + r_2{}^2 + h^2 = 4rh_1 - 2h_1{}^2 - 2hh_1 + 2rh$

und $\frac{3}{2}(r_1{}^2 + r_2{}^2 + h^2) = 6rh_1 - 3h_1{}^2 - 3hh_1 + 3rh.$

Setzt man diesen Ausdruck in den obigen für J, so erhält man:

$$J = \frac{\pi h}{3}\left[\frac{3}{2}(r_1{}^2 + r_2{}^2 + h^2) - h^2\right]$$
$$= \frac{\pi h}{3}\left(\frac{3}{2}r_1{}^2 + \frac{3}{2}r_2{}^2 + \frac{3}{2}h^2 - h^2\right)$$
$$= \frac{\pi h}{3}\left(\frac{3}{2}r_1{}^2 + \frac{3}{2}r_2{}^2 + \frac{h^2}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi h}{6}(3r_1{}^2 + 3r_2{}^2 + h^2).$$

Oberfläche. Die Oberfläche einer Kugelzone von der Höhe h kann betrachtet werden als die Differenz der Oberflächen zweier Kugelabschnitte der Höhen h_1 und h_2, d. i. nach Fig. 71

$$O = 2\,r\,\pi\,h_2 - 2\,r\,\pi\,h_1 = 2\,r\,\pi\,(h_2 - h_1) = \underline{2\,r\,\pi\,h.}$$ Fig. 71

Beispiele.

1. Eine Kugel aus Eisen vom spezifischen Gewicht 7,8 hat einen Radius gleich 24,0 cm, sie wird im Abstande 17,0 vom Mittelpunkt durch eine Ebene geschnitten, wie groß ist die Oberfläche, der Inhalt und das Gewicht beider Abschnitte?

Lösung. 1. Vollkugel:

$$O = 4\,r^2\,\pi = 4 \cdot 24{,}0^2 \cdot \pi = 7238{,}4 \text{ qcm.}$$

$$J = \frac{4}{3}\,r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 24{,}0^3 \cdot \pi = 57904{,}13 \text{ ccm.}$$

$$= 57{,}9 \text{ cdm.}$$

$$G = 57{,}9 \cdot 7{,}8 = 451{,}62 \text{ kg.}$$

2. Kleiner Kugelsplitter:

$$O = 2\,r\,\pi\,h = 2 \cdot 24{,}0 \cdot \pi \cdot 7{,}0 = 1055{,}6 \text{ qcm.}$$

$$J = \frac{\pi\,h^2}{3}(3\,r - h) = \frac{\pi \cdot 49{,}0}{3}(3 \cdot 24{,}0 - 7{,}0)$$

$$= 3335{,}37 \text{ ccm} \backsim 3{,}34 \text{ cdm.}$$

$$G = 3{,}34 \cdot 7{,}8 = 26{,}05 \text{ kg.}$$

3. Großer Kugelabschnitt.

$$O = 7238{,}4 - 1055{,}6 = 6182{,}8 \text{ qm.}$$

$$J = 57{,}9 - 3{,}34 = 54{,}56 \text{ cdm.}$$

$$G = 54{,}56 \cdot 7{,}8 = 451{,}62 - 26{,}05 = 425{,}57 \text{ kg.}$$

2. Die Höhe des Abschnitts einer Steinkugel betrage 5,0 cm, der Radius des Endkreises sei 18,0 cm, wie groß ist der Inhalt und das Gewicht des Kugelabschnitts? Spezifisches Gewicht = 2,8.

Lösung. $J = \frac{\pi\,h}{6}(3\,r_1{}^2 + h^2)$

$$= \frac{\pi \cdot 5{,}0}{6}(3 \cdot 18{,}0^2 + 5{,}0^2)$$

$$= 2479{,}25 = 2{,}48 \text{ cdm}$$

$$G = 2{,}48 \cdot 2{,}8 = 6{,}9 \text{ kg}$$

3. Eine Kugel von 4,0 m Radius wird in den Abständen 2,0 m bezw. 1,0 m vom Mittelpunkt durch parallele Ebenen geschnitten, wie groß

ist der Inhalt, die Oberfläche und das Gewicht der Vollkugel und aller Abschnitte, wenn das spezifische Gewicht gleich 1,7 ist?

a) Inhalte.

1) Vollkugel.

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 4{,}0^3 \cdot \pi = 268{,}08 \text{ cbm.}$$

2) Obere Kugelschale:

$$J = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi \cdot 2{,}0^2}{3}(3 \cdot 4{,}0 - 2{,}0) = 41{,}89 \text{ cbm.}$$

3) Untere Kugelschale:

$$J = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi \cdot 3{,}0^2}{3}(3 \cdot 4{,}0 - 3{,}0) = 84{,}82 \text{ cbm, also}$$

4) Kugelzone:

$$J = 84{,}82 - 41{,}89 = 42{,}93 \text{ cbm.}$$

b) Oberflächen:

1) Vollkugel:

$$O = 4 r^2 \pi = 4 \cdot 4{,}0^2 \cdot \pi = 201{,}06 \text{ qm.}$$

2) Obere Kugelschale:

$$O = 2 r \pi h = 2 \cdot 4{,}0 \cdot \pi \cdot 2{,}0 = 50{,}27 \text{ qm.}$$

3) Untere Kugelschale:

$$O = 2 r \pi h = 2 \cdot 4{,}0 \cdot \pi \cdot 3{,}0 = 75{,}40 \text{ qm.}$$

4) Kugelzone:

$$O = 2 r \pi h = 2 \cdot 4{,}0 \cdot \pi \cdot 1{,}0 = 25{,}13 \text{ qm.}$$

c) Gewichte:

1) Vollkugel:

$$G = 268{,}08 \cdot 1{,}7 = 455{,}74 \text{ kg.}$$

2) Obere Kugelschale:

$$G = 41{,}89 \cdot 1{,}7 = 71{,}21 \text{ kg.}$$

3) Untere Kugelschale:

$$G = 84{,}82 \cdot 1{,}7 = 144{,}19 \text{ kg.}$$

4) Kugelzone:

$$G = 42{,}93 \cdot 1{,}7 = 72{,}98 \text{ kg.}$$

---

4. Ein Gewölbe von der Form einer Kugelkappe soll innen mit Oelfarbe gestrichen werden; 1 qm kostet 1,5 Mark, was ist hierfür zu zahlen, wenn $r = 12{,}0$ m und $h = 4{,}0$ m ist? !

Lösung. $O = 2 r \pi h = 2 \cdot 12{,}0 \cdot \pi \cdot 4{,}0 = 301{,}59$ qm.

Kosten $= 301{,}59 \cdot 1{,}5 = 452{,}39$ Mark.

---

5. Wie groß ist die Fläche der fünf Zonen auf der Erde? Erddurchmesser = 1716,96 Meilen, Abstände der Ebenen des Wende- und Polarkreises vom Erdmittelpunkt 341,73 bezw. 787,53 geographische Meilen.

Lösung. 1) Heiße Zone

$= 2\,r\,\pi\,h = 2 \cdot 858{,}48 \cdot \pi \cdot 683{,}46 = 3686580$ Quadratmeilen.

2) Jede der gemäßigten Zone

$= 2\,r\,\pi\,h = 2 \cdot 858{,}48 \cdot \pi \cdot 445{,}8 = 2404640$ Quadratmeilen.

3) Jede der kalten Zonen

$= 2\,r\,\pi\,h = 2 \cdot 858{,}48 \cdot \pi \cdot 70{,}95 = 382740$ Quadratmeilen.

---

6. Ein zylindrisches Gefäß von 1,28 m Weite und 0,84 m Tiefe wird unten durch eine Kugelschale von 0,3 m Höhe geschlossen, wie groß ist die innere Oberfläche, der Inhalt und wie viele Liter Wasser füllen das Gefäß?

Lösung.
$$\begin{aligned} J &= r^2 \pi h + \frac{\pi h_1}{6}(3\,r^2 + h_1{}^2) \\ &= 0{,}64^2 \pi \cdot 0{,}84 + \frac{\pi \cdot 0{,}3}{6}(3 \cdot 0{,}64^2 + 0{,}3^2) \\ &= 1{,}0809 + 0{,}2072 \\ &= 1{,}2881 \text{ cbm}, \end{aligned}$$

also das Gefäß faßt: 12,881 hl Wasser.

Wird mit r_1 der zugehörige Radius der Kugelschale bezeichnet, so erhält man nach Seite 71 für

$$r_1 = \frac{0{,}64^2 + 0{,}3^2}{2 \cdot 0{,}3} = 0{,}833 \text{ m}.$$

$$\begin{aligned} O &= 2\,r\,\pi\,h + 2\,r_1\,\pi\,h_1 \\ &= 2\,\pi\,(r\,h + r_1\,h_1) \\ &= 2\,\pi\,(0{,}64 \cdot 0{,}84 + 0{,}833 \cdot 0{,}3) \\ &= 2\,\pi \cdot 0{,}7875 \\ &= 4{,}948 \text{ qm}. \end{aligned}$$

---

7. Es soll der Inhalt und das Gewicht eines Dampfkessels, von den in Fig. 72 angegebenen Dimensionen berechnet werden.

Lösung. Die Enden des Kessels werden durch eine Kugelschale geschlossen, deren Radius gleich dem Durchmesser des Zylinders, also gleich 1,5 m ist, hieraus berechnet sich

$$\begin{aligned} h &= r - x; \\ x &= \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}75^2} = \sqrt{1{,}6875} \backsim 1{,}30; \\ h &= 1{,}5 - 1{,}3 = 0{,}2 \text{ m}. \end{aligned}$$

1) Inhalt des Kesselraumes + Wandung.

$$J_1 = \text{Zylinder} + 2 \text{ Kugelschalen:}$$

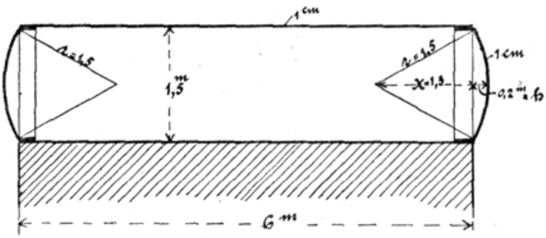
$$= r^2 \pi h + 2 \frac{\pi \cdot h_1}{3} (3r - h_1)$$

$$= 0{,}76^2 \pi \cdot 6{,}0 + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{3} (3 \cdot 1{,}6 - 0{,}3)$$

$$= 10{,}8876 + 0{,}8482$$

$$= 11{,}7358 \text{ cbm.}$$

Fig. 72.



2) Inhalt des Kesselraumes.

$$J_2 = \text{Zylinder} + 2 \text{ Kugelschalen:}$$

$$= r^2 \pi h + 2 \cdot \frac{\pi \cdot h_1{}^2}{3} (3r - h_1)$$

$$= 0{,}75^2 \pi \cdot 6{,}0 + \frac{2 \cdot 0{,}2^2}{3} (3 \cdot 1{,}5 - 0{,}2)$$

$$= 10{,}6026 + 0{,}3602$$

$$= 10{,}9628 \text{ cbm.}$$

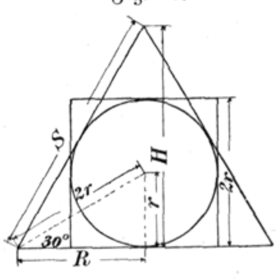
Eisenmasse des Kessels: $J_1 - J_2 = 11{,}7358 - 10{,}9628 = 0{,}773$ cbm.

Nimmt man das spezifische Gewicht des Eisens zu 7,8 an, so wiegt ein Kubikmeter Eisen 7800 kg.

Gewicht des Kessels $= 0{,}773 \cdot 7800$ . .	$= 6029$ kg
dazu für Laschen, Niete usw. etwa 20 % .	$= 1206$ kg
	Gesamtgewicht $= 7235$ kg.

8. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte und Oberflächen einer Kugel, des umgeschriebenen geraden Zylinders und des umgeschriebenen geraden Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zu einander? Fig. 73.

Fig. 73.



Lösung.

$H = 3r$

$R^2 = (2r)^2 - r^2$

$= 4r^2 - r^2$

$= 3r^2.$

$R = r\sqrt{3}.$

$S = 2R$

$= 2r\sqrt{3}.$

α. Inhalte:

Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi = 4 \cdot \frac{r^3 \pi}{3} = 4 \frac{r^3 \pi}{3}$

Zylinder $= r^2 \pi \cdot h = r^2 \pi \cdot 2r = 2r^3 \pi = 6 \frac{r^3 \pi}{3}$

Kegel $= \frac{R^2 \pi H}{3} = \frac{3r^2 \cdot \pi \cdot 3r}{3} = 3r^3 \pi = 9 \frac{r^3 \pi}{3}$

Kugel : Zylinder : Kegel $= 4 \frac{r^3 \pi}{3} : 6 \frac{r^3 \pi}{3} : 9 \frac{r^3 \pi}{3}$

" " " $= 4 : 6 : 9.$

β) Oberflächen:

Kugel $= 4r^2 \pi = 4r^2 \pi = 4r^2 \pi = 4r^2 \pi$

Zylinder $= 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi \cdot 2r + 2r^2 \pi = 4r^2\pi + 2r^2\pi = 6r^2\pi$

Kegel $= R\pi S + R^2 \pi = r\sqrt{3}\pi \cdot 2r\sqrt{3} + 3r^2\pi = 6r^2\pi + 3r^2\pi = 9r^2\pi$

Kugel : Zylinder : Kegel $= 4r^2\pi : 6r^2\pi : 9r^2\pi$

" " " $= 4 : 6 : 9.$

Sowohl die Inhalte, als auch die Oberflächen der betreffenden Körper verhalten sich zu einander wie 4 : 6 : 9.

---

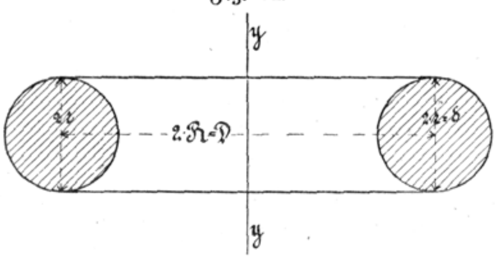
i) Der zylindrische Ring.

Nach Fig. 74 ist

Inhalt $J = 2\pi^2 R \cdot r^2 = 2{,}467\, D \cdot d^2.$

Oberfläche $O = 4\pi^2 R \cdot r = 39{,}478\, R \cdot r = 9{,}87\, D \cdot d.$

Fig. 74.



Z. B. für einen zylindrischen Ring aus Schmiedeeisen ist R = 10,0 dcm, r = 1,0 dcm, wie groß ist die Oberfläche, der Inhalt und das Gewicht desselben? Spezifisches Gewicht gleich 7,8.

Lösung. $O = 9{,}87 \cdot D \cdot d = 9{,}87 \cdot 20{,}0 \cdot 2{,}0 = 394{,}8$ qdcm.

$J = 2{,}467 \cdot D \cdot d^2 = 2{,}467 \cdot 20{,}0 \cdot 2{,}0^2 = 197{,}36$ cdm.

Gewicht $= 197{,}36 \cdot 7{,}8 = 1539{,}4$ kg.

Die Seite eines Würfels, die diesem Ring inhaltsgleich sein würde, ist:

$$a = \sqrt[3]{197{,}36} = 5{,}82 \text{ dcm.}$$

---

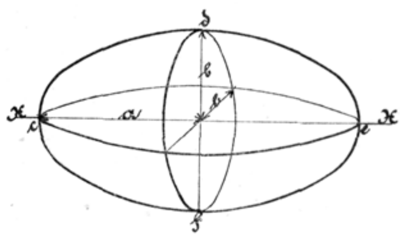
k) Ellipsoid und Paraboloid.

1. Das einfache Rotationsellipsoid.

Dieser Körper entsteht, wenn eine Ellipse c d e f um die x-Linie rotiert. Nach Fig. 75 ist: Inhalt

$$J = \frac{4}{3} \pi b^2 \cdot a.$$

Fig. 75.



Z. B. $a = 5{,}0$ dcm, $b = 3{,}0$ dcm, dann ist:

$$J = \frac{4}{3} \pi b^2 \cdot a = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}0^2 \cdot 5{,}0 = 188{,}5 \text{ cdm.}$$

Bei Schmiedeeisen vom spezifischen Gewichte 7,8 ist:

$$G = 1470{,}3 \text{ kg.}$$

---

2. Das dreiachsige Ellipsoid.

Jeder Querschnitt senkrecht zur x- und y-Linie ist eine Ellipse. Nach Fig. 76 ist: Inhalt

$$J = \frac{4}{3} \pi a b \cdot c.$$

Z. B. $a = 5{,}0$ dcm, $b = 4{,}0$ und $c = 3{,}0$ dcm.

$$J = \frac{4}{3} \pi a \cdot b \cdot c = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 3{,}0 = 251{,}33 \text{ cbdm.}$$

---

3. Das Paraboloid.

Dieser Körper entsteht, wenn eine Parabel um die x-Linie rotiert. Nach Fig. 77 ist:

$$\text{Inhalt } J = \frac{\pi}{2} b^2 \cdot a.$$

Fig. 76.

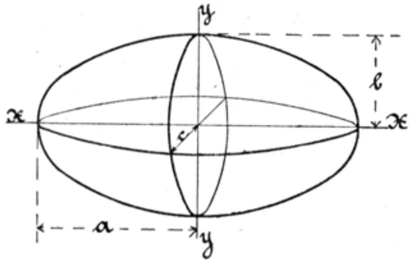
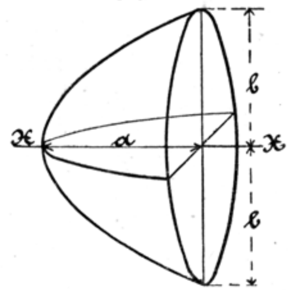


Fig. 77.

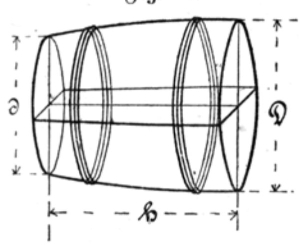


Z. B. b = 8,0 und a = 6,0 dcm.

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot 8{,}0^2 \cdot 6{,}0 = \pi \cdot \frac{8{,}0^2 \cdot 6{,}0}{2} = 603{,}19 \text{ cdm.}$$

l) Fässer.

Fig. 78.



Nach Fig. 78 findet man den Inhalt faßförmiger Körper nach der Formel:

$$J = \frac{h\,\pi}{12} (2\,D^2 + d^2).$$

Beispiele. 1. Ein Faß ist 8,0 dcm hoch, der untere Boden hat 4,0 dcm, der obere 3,0 dcm Durchmesser, das Faß ist mit Zement vom spezifischen Gewicht 3,0 angefüllt, was wiegt der Zement?

Lösung.

$$J = \frac{h\,\pi}{12} (2\,D^2 + d^2) = \frac{8{,}0 \cdot \pi}{12} (2 \cdot 4{,}0^2 + 3{,}0^2) = 85{,}87 \text{ cbdm.}$$

$$\text{Gewicht } G = 85{,}87 \cdot 3{,}0 = 257{,}61 \text{ kg.}$$

Wird nach Fig. 78 $D = d$, so ist

$$J = \frac{h\,\pi}{12} (2\,d^2 + d^2) = \frac{h\,\pi \cdot 3\,d^2}{12} = \frac{h\,\pi\,d^2}{4}.$$

2. Den kubischen Inhalt leerer Fässer berechnet man annäherungsweise auch nach einer der beiden folgenden Formeln, worin D den größten durch den Spund gemessenen Durchmesser, d den kleinen Durchmesser der parallelen Böden und h die Länge des Fasses bedeutet:

$$J = \frac{\pi\, h}{9}\left(D + \frac{1}{2}\, d\right)^2,$$

oder genauer:

$$J = 0{,}04909\, h\, (10\, D^2 + 5\, d^2 + D\, d).$$

Beispiel. Ist $D = 150{,}0$ cm, $d = 100{,}0$ cm, $h = 180{,}0$ cm, so gibt die erste Formel:

$$J = \frac{\pi \cdot 180{,}0}{9}\left(150{,}0 + \frac{1}{2} \cdot 100{,}0\right)^2 = 2513 \text{ Liter},$$

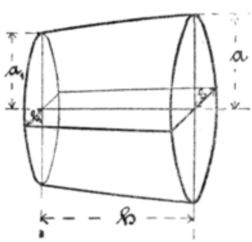
die zweite Formel:

$$J = 0{,}04909 \cdot 180{,}0\, (10 \cdot 150{,}0^2 + 5 \cdot 100{,}0^2 + 150{,}0 \cdot 100{,}0)$$
$$= 25625 \text{ Liter}.$$

Anmerkung. Sind die beiden Böden von verschiedenem Durchmesser, so nimmt man für d das arithmetische Mittel derselben.

m) Kübel mit unähnlichen elliptischen Endflächen.

Fig. 79.



Nach Fig. 79 findet man den Inhalt dieser Kübel nach der Formel:

$$J = \frac{\pi\, h}{6}[2\,(a\, b + a_1\, b_1) + a\, b_1 + a_1\, b].$$

Beispiele.

1. Es sei: $h = 1{,}2$ m, $a = 1{,}0$ m, $b = 0{,}5$ m, $a_1 = 1{,}2$ m, $b_1 = 0{,}6$ m ? J.

Lösung.

$$J = \frac{\pi\, h}{6}[2\,(a\, b + a_1\, b_1) + a\, b_1 + a_1\, b)$$
$$= \frac{\pi \cdot 1{,}2}{6}[2\,(1{,}0 \cdot 0{,}5 + 1{,}2 \cdot 0{,}6) + 1{,}0 \cdot 0{,}6 + 1{,}2 \cdot 0{,}5]$$
$$= \pi \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}64$$
$$= 2{,}287 \text{ cbm}.$$

Angenommen der Kübel wäre mit Bier von spezifischem Gewichte 1,025 angefüllt, so ist das Gewicht des Bieres:

$$G = 2{,}287 \cdot 1025 = 2344{,}2 \text{ kg}.$$

2. Eine Badewanne ist 0,6 m hoch, die Endflächen sind Ellipsen, für die $a = 0{,}7$, $b = 0{,}4$, $a_1 = 0{,}8$ und $b_1 = 0{,}5$ ist, wie viele Liter Wasser faßt die Wanne?

Lösung.

$$J = \frac{\pi\, h}{6} [2 (a\, b + a_1\, b_1) + a\, b_1 + a_1\, b]$$

$$J = \frac{\pi \cdot 0{,}6}{6} [2 \cdot (0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}5) + 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}4]$$

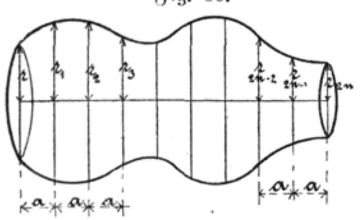
$$= \pi \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}03 = 0{,}63774 \text{ cbm.}$$

Die Wanne faßt: 637,7 l Wasser.

---

n) Berechnung unregelmäßiger Rotationskörper nach der Chapmannschen Formel.

Fig. 80.



Wir legen durch den gegebenen Körper beliebig viele, jedoch eine ungerade Anzahl unter sich paralleler Ebenen, im Abstande a, die den Körper in den Flächen: $f, f_1, f_2, f_3, \ldots f_{2n-1}, f_{2n}$, schneiden, alsdann ist:

$$J = \frac{a}{3} (f + 4\, f_1 + 2\, f_2 + 4\, f_3 + 2\, f_4 + \ldots + f_{2n}).$$

Sind die Schnittflächen f, f_1, f_2, usw. Kreise der Radien r, r_1, r_2 usw., dann ist:

$$J = \frac{a\, \pi}{3} (r^2 + 4\, r^2_1 + 2\, r^2_2 + \ldots + 4\, r^2_{2n-1} + r^2_{2n}).$$

Beispiele.

1. Es soll der Inhalt des unregelmäßig begrenzten Körpers A, dessen Dimensionen in Fig. 81 angegeben sind, berechnet werden.

Lösung.

$$J = \frac{a\, \pi}{3} (r^2 + 4\, r_1{}^2 + 2\, r_2{}^2 + \ldots + 4\, r^2_{2n-1} + r^2_{2n})$$

$$J = \frac{3{,}0 \cdot \pi}{3} (2{,}0^2 + 4 \cdot 3{,}0^2 + 2 \cdot 5{,}0^2 + 4 \cdot 6{,}0^2 + 2 \cdot 10{,}0^2 + 4 \cdot 8{,}0^2 + 2 \cdot 6{,}0^2 + 4 \cdot 4{,}0^2 + 2{,}0^2)$$

$$= \pi \cdot 830{,}0$$

$$= 2607{,}5 \text{ cdm.}$$

---

2. Den Inhalt eines glockenförmigen Körpers nach Fig. 82 zu berechnen.

Fig. 81.

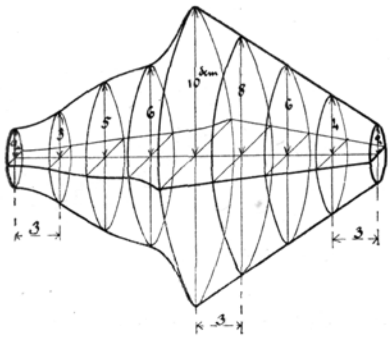
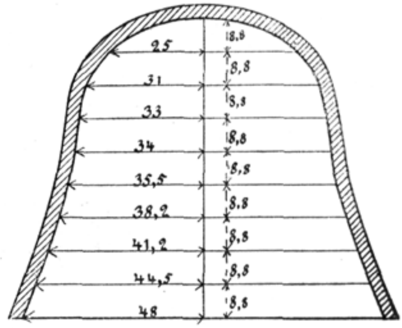


Fig. 82.



Lösung.

$$J = \frac{a\pi}{3}(r^2 + 4r^2_1 + 2r^2_2 + \ldots + 4r^2_{2n-1} + r^2_{2n})$$

$$= \frac{8{,}8 \cdot \pi}{3}(25{,}0^2 + 4 \cdot 31{,}0^2 + 2 \cdot 33{,}0^2 + 4 \cdot 34{,}0^2 + 2 \cdot 35{,}5^2 + 4 \cdot 38{,}2^2$$

$$+ 2 \cdot 41{,}2^2 + 4 \cdot 44{,}5^2 + 48{,}0^2) = 306394{,}45 \text{ ccm} \infty = 306{,}4 \text{ cdm.}$$

Dieser Körper faßt also 306,4 l Wasser.

---

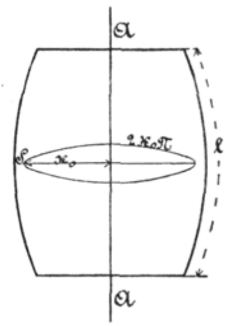
o) Oberflächen- und Inhaltsberechnungen von Rotationskörpern nach der Guldinischen Regel.

1. Oberflächenberechnungen. Guldinische Regel.

Die Oberfläche eines beliebigen Rotationskörpers wird gefunden, indem man nach Fig. 83 die Länge der rotierenden Linie l mit dem Wege ihres Schwerpunktes S multipliziert, d. i.:

$$O = 2\,x_0\,\pi\,l$$

Fig. 83.



Beispiele.

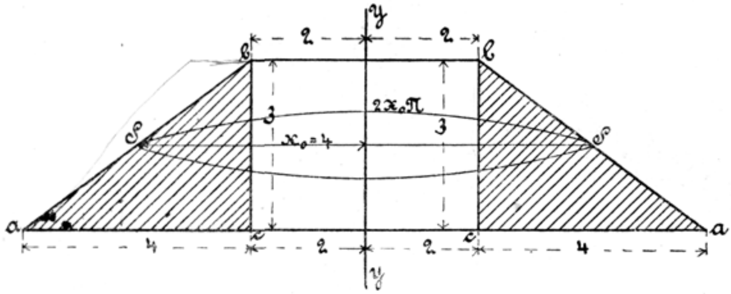
1. Ein rechtwinkliges Dreieck abc dreht sich nach Fig. 84 um die yy-Linie, es soll die Oberfläche des Rotationskörpers berechnet werden.

Lösung. Länge l der rotierenden Linie

$$ab = \sqrt{4{,}0^2 + 3{,}0^2} = \sqrt{25{,}0} = 5{,}0.$$

Der Schwerpunkt S liegt in $\frac{ab}{2}$, also ist der Abstand derselben von der Drehachse $x_0 = 4{,}0$, also $2\,x_0\,\pi$ Weg des Schwerpunktes $= 2 \cdot 4{,}0 \cdot \pi$.

Fig. 84.



Oberfläche $O = 2 x_0 \pi l = 2 \cdot 4{,}0 \cdot \pi \cdot 5{,}0 = 125{,}66$ qm.

Die Basis des Rotationskörpers ist gleich

$$(R^2 - r^2)\pi = (6{,}0^2 - 2{,}0^2)\pi = 100{,}53 \text{ qm.}$$

---

2. Die Oberfläche eines Zylinders, Kegels und einer Kugel zu berechnen.

Fig. 85.

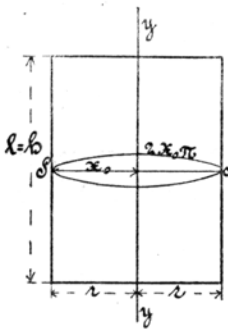


Fig. 86.

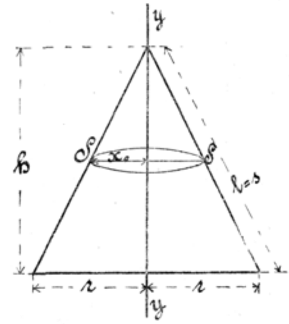
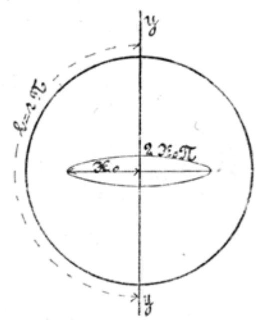


Fig. 87.



Lösung.

1) Zylinder:

$O = 2 x_0 \pi l$

Nach Fig. 85:

$O = 2 r \pi h$

$x_0 = r$

$l = h.$

2) Kegel:

Nach Fig. 86:

$O = 2 x_0 \pi l$

$x_0 = \frac{r}{2}; \; s = l$

$O = 2 \frac{r}{2} \cdot \pi s$

$= r \pi s = r \pi \sqrt{h^2 + r^2}.$

3) Kugel:

Nach Fig. 87:

$O = 2 x_0 \pi l$

$x_0 = \frac{2r}{\pi}; \; l = r\pi$

$O = 2 \cdot \frac{2r}{\pi} \pi \cdot r \cdot \pi =$

$4 r^2 \cdot \pi.$

---

3. Die Oberfläche eines Ringes A und einer Hohlkehle B nach den in Fig. 88 und Fig. 89 angegebenen Abmessungen zu berechnen.

Lösung. 1) Ring A.

$$O = 2\,x_0\,\pi\,l$$

$$x_0 = 1{,}0 + \frac{2\,r}{\pi} = 1{,}0 + \frac{2 \cdot 0{,}5}{\pi}$$

$$= 1{,}3183$$

$$l = r \cdot \pi = 0{,}5 \cdot \pi = 1{,}57$$

$$O = 2 \cdot 1{,}3183 \cdot \pi \cdot 1{,}57$$

$$= 13{,}00 \text{ qm.}$$

2) Hohlkehle B.

$$x_0 = 6{,}0 - \frac{2\,r}{\pi} = 6{,}0 - \frac{4{,}0}{\pi} = 4{,}727$$

$$l = r \cdot \pi = 2 \cdot \pi = 6{,}283$$

$$O = 2 \cdot 4{,}727 \cdot \pi \cdot 6{,}283$$

$$= 186{,}61 \text{ qcm.}$$

Fig. 88.

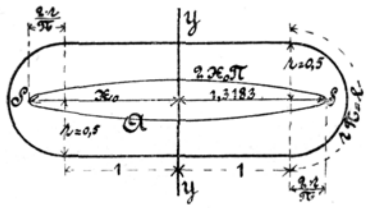
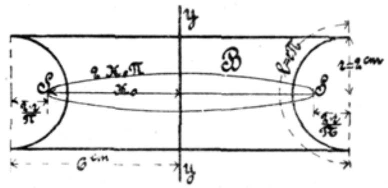


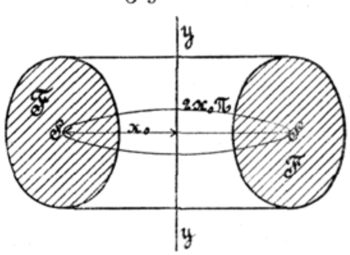
Fig. 89.



2. Inhaltsberechnungen. Guldinische Regel.

Der Inhalt eines Rotationskörpers wird gefunden, indem man die rotierende Fläche mit der Weglänge ihres Schwerpunktes multipliziert.

Fig. 90.



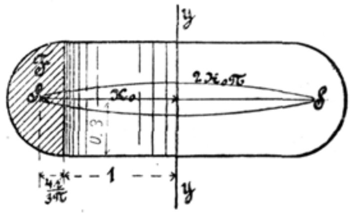
Nach Fig. 90 ist:

Inhalt $J = 2\,x_0\,\pi\,F$.

Beispiele.

1. Nach Fig. 91 rotiert ein Halbkreis um die yy-Linie, es soll der Inhalt des entstandenen Rotationskörpers berechnet werden.

Fig. 91.



Lösung.

$$J = 2 \cdot x_0\,\pi \cdot F$$

$$= 2 \cdot \left(1{,}0 + \frac{4\,r}{3\,\pi}\right)\pi \cdot \frac{r^2\,\pi}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot \pi + 4 \cdot 0{,}3}{3} \cdot 0{,}3^2\,\pi$$

$$= 1{,}00136 \text{ cbm.}$$

2. Nach Fig. 92 rotiert die Fläche a b c d um die Linie y y, den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen.

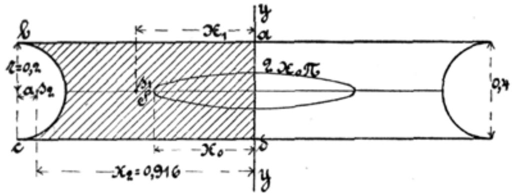
Lösung. Nach Fig. 92 ist

$$a = \frac{4\,r}{3\,\pi} = \frac{4 \cdot 0{,}2}{3 \cdot \pi} = 0{,}085, \text{ also } x_2 = 0{,}915$$

$$x_1 = 0{,}5$$

$$x_0 = \frac{f_1\,x_1 - f_2\,x_2}{f_1 - f_2} = \frac{1{,}0 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 - \frac{0{,}2^2 \cdot \pi}{2} \cdot 0{,}915}{1{,}0 \cdot 0{,}4 - \frac{0{,}2^2 \cdot \pi}{2}} = 0{,}423 \text{ m.}$$

Fig. 92.



f_1 = Fläche des Rechtecks a b c d und x_1 dessen Schwerpunktsabstand von der Drehachse.

f_2 = Fläche des Halbkreises b c e und x_2 dessen Schwerpunktsabstand von der Drehachse.

$$J = 2\,x_0\,\pi\,F = 2 \cdot 0{,}423 \cdot \pi \cdot \left(1{,}0 \cdot 0{,}4 - \frac{0{,}2^2 \cdot \pi}{2}\right) = 0{,}89541 \text{ cbm.}$$

---

3. Den Inhalt eines Zylinders, eines Kegels und einer Kugel zu berechnen.

Fig. 93.

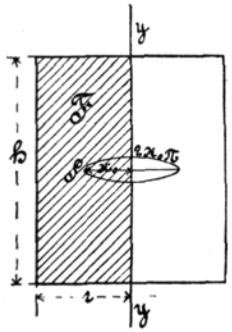


Fig. 94.

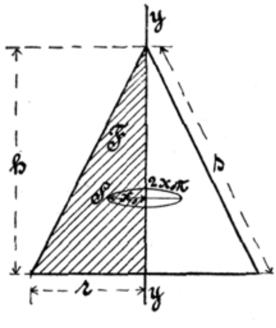
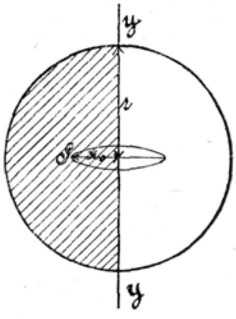


Fig. 95.



Lösung.

1) Zylinder.

Nach Fig. 93 ist:

$$J = 2\,x_0\,\pi\,F$$

$$x_0 = \frac{r}{2} \text{ und } F = r \cdot h$$

$$J = 2 \cdot \frac{r}{2}\,\pi \cdot r \cdot h$$

$$= r^2\,\pi\,h.$$

2) Kegel.

Nach Fig. 94 ist:

$$J = 2\,x_0\,\pi\,F$$

$$x_0 = \frac{r}{3} \text{ und } F = \frac{r\,h}{2}$$

$$J = 2 \cdot \frac{r}{3}\,\pi \cdot \frac{r\,h}{2}$$

$$= \frac{r^2\,\pi\,h}{3}.$$

3) Kugel.

Nach Fig. 95 ist:

$$J = 2\,x_0\,\pi\,F$$

$$x_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi} \text{ und } F = \frac{r^2\,\pi}{2}$$

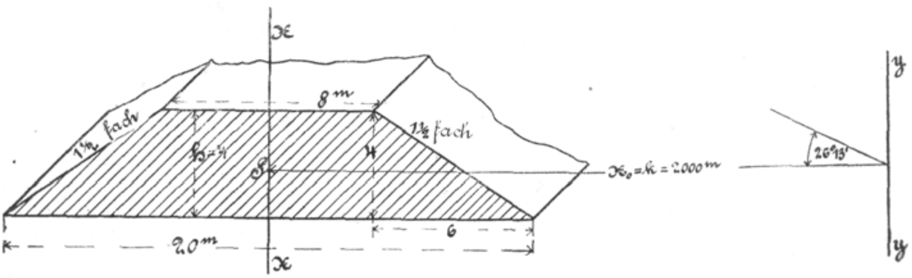
$$J = 2 \cdot \frac{4\,r}{3\,\pi}\,\pi \cdot r^2\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4}{3}\,r^3\,\pi.$$

---

4. Für einen Eisenbahndamm betrage die Höhe h 4 m, die Böschung sei $1\frac{1}{2}$ fach, der Kurvenwinkel betrage 26° 13′, der Radius R nach Fig. 96 2000 m, es soll die Erdmasse desselben berechnet werden.

Fig. 96.



Lösung. Der Schwerpunkt S des Profils liegt auf der Mittellinie x x in der Höhe

$$x_1 = \frac{b_2 + 2\,b_1}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{20{,}0 + 2 \cdot 8{,}0}{8{,}0 + 20{,}0} \cdot \frac{4{,}0}{3} = 1{,}714 \text{ m}.$$

Denken wir uns das Profil des Dammes drehe sich um die Achse y y, dann ist der Weg, den der Schwerpunkt S zurücklegt, gleich der Bogenlänge t w, d. i.

$$\text{Bogen } t\,w = 2000 \cdot 0{,}45757 = 915{,}14,$$

für den Radius = 1 ist die Bogenlänge, die zum ∢ 26° 13′ gehört, gleich 0,45757.

$$J = \text{Weg des Schwerpunktes } S \cdot \text{Fläche } F$$

$$= 915{,}14 \cdot \left(\frac{8{,}0 + 20{,}0}{2}\right) \cdot 4{,}0 = 5124{,}784 \text{ cbm}.$$

Spezifische Gewichte.

Tabelle 1.

Nr.	Material	Spezifisches Gewicht	
	a) Feste Körper.		
1	Anthrazit	1,34—1,46	
2	Antimon	6,65—6,72	
3	Asphalt	1,07—1,16	
4	Blei	11,376	
5	Braunkohle	0,8—1,5	
6	Butter	0,94	
7	Zement	2,72—3,05	
8	Eis bei 0° C.	0,92	
9	Schmiedeeisen	7,6—7,8	
10	Gußeisen	7,0—7,5	
11	Erde	1,34—2,40	
12	Glas	2,46—3,78	
13	Glockenmetall	8,81	
14	Gold	18,6—19,3	
15	Gips	0,97—1,81	
16	Gußstahl	7,83—7,92	
		lufttrocken	frisch
17	Rotbuche	0,66—0,83	0,85—1,12
18	Eiche	0,69—1,03	0,93—1,28
19	Fichte	0,35—0,60	0,40—1,07
20	Kiefernholz	0,31—0,76	0,38—1,08
21	Tanne	0,37—0,75	0,77—1,23
22	Kalk, gebrannt	1,64—1,86	
23	Kalkstein	2,46—2,84	
24	Kupfer	8,59—8,90	
25	Lehm	1,52—2,85	
26	Marmor	2,52—2,85	
27	Kalkmörtel	1,6—1,8	
28	Sandstein	1,9—2,7	
29	Sand, fein und trocken	1,40—1,64	
	Sand, feucht	1,9—2,1	
	Sand, grob und trocken	1,4—1,5	
30	Ziegelsteine	1,4—1,7	

Nr.	Material	Spezifisches Gewicht
31	Poröse Ziegelsteine	0,95
32	Stahl	7,26—7,80
33	Schiefer	2,64--2,74
34	Schnee	0,125
35	Silber	10,1—10,6
36	Steinsalz	2,22—2,30
37	Ton	1,8—2,63
38	Torf	0,51—0,84
39	Ziegelmauerwerk	1,5—1,7
40	Zink	6,8—7,2
41	Zinn	7,29
42	Zucker, weißer	1,61
	b) Flüssige Körper.	
43	Alkohol	0,793
44	Bier	1,023—1,034
45	Milch	1,025
46	Rüböl	0,914
47	Schwefelsäure	1,842
48	Seewasser	1,029
49	Rheinwein	0,992—1,002
	c) Gasförmige Körper. (Atmosphärische Luft = 1.)	
50	Chlorgas	2,47
51	Kohlensäure	1,5291
52	Kohlenwasserstoff	0,974
53	Sauerstoff	1,1056
54	Wasserdampf bei 0° C. . . .	0,6225
55	„ bei 100° C. . . .	0,4686
56	Wasserstoff	0,06927

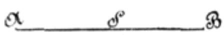
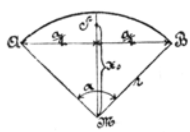
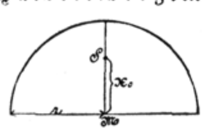
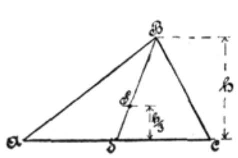
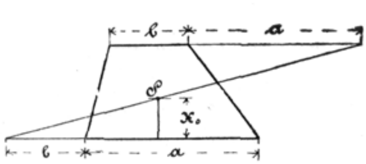
Anmerkung.

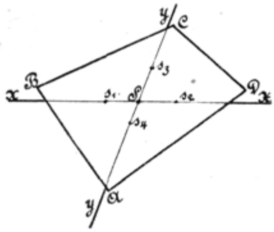
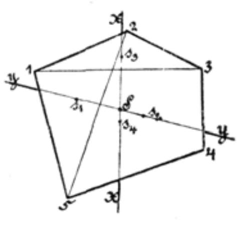
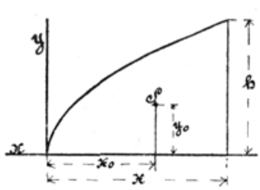
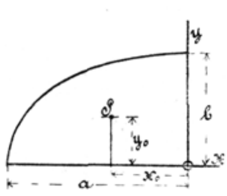
Das spezifische Gewicht gibt an, wie viel mal ein Körper schwerer ist als Wasser bei + 4° C.

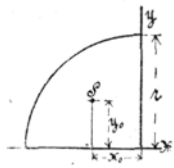
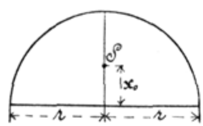
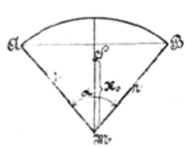
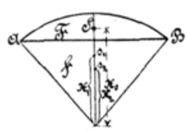
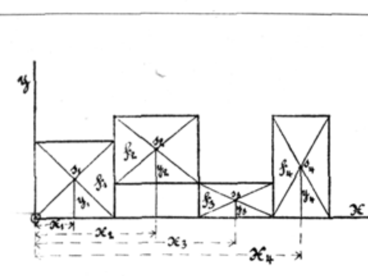
1 cdm Wasser wiegt 1 kg, also 1 cdm Schmiedeeisen nach Pos. 9: 7,8 kg, d. i. 1 cbm Schmiedeeisen wiegt 7800 kg.

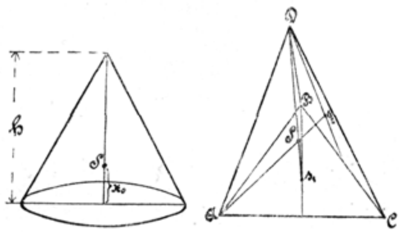
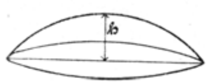
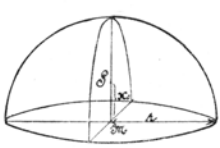
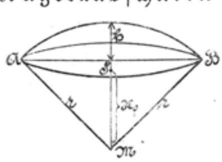
Schwerpunktslagen bei Linien, Flächen und Körpern.

Tabelle 2.

Pos.	Gegenstand	Schwerpunktslage
	a) Linien.	
1	Gerade. 	Der Schwerpunkt S liegt in der Mitte von A B.
2	Kreisbogen. 	$x_0 = \frac{2 r \sin \alpha}{\alpha}$.
3	Halbkreisbogen. 	$x_0 = \frac{2 r}{\pi}$.
	b) Flächen.	
4	Dreieck. 	Halbiere A C in d, ziehe d B, teile d B in 3 gleiche Teile, im ersten Drittel liegt Schwerpunkt S. S liegt auch auf einer Parallelen zu A C im ersten Drittel der Höhe h.
5	Trapez. 	$x_0 = \frac{a + 2 b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$.

Pos.	Gegenstand	Schwerpunktslage
6	Viereck. 	Zerlege das Viereck durch die Diagonalen AC und BD in Dreiecke, bestimme die Schwerpunkte s_1, s_2, s_3 und s_4 dieser Dreiecke, ziehe die Schwerlinien xx, yy, beide schneiden sich im Schwerpunkt S.
7	Der Schwerpunkt S eines Quadrats, Rechtecks und Parallelogrammes liegt im Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen.	
8	Vieleck. 	Zerlege das Vieleck durch eine Diagonale in zwei Teile (Drei- oder Vierecke) und bestimme die Schwerpunkte s_1 und s_2 beider Teile, die verbunden eine Schwerlinie yy liefern; durch eine neue Zerlegung bestimme man eine zweite Schwerlinie xx, beide Schwerlinien schneiden sich im Schwerpunkt S.
9	Parabel. 	$x_0 = \frac{3}{5} x;$ $y_0 = \frac{3}{8} h.$
10	Viertel-Ellipse. 	$x_0 = \frac{4a}{3\pi};$ $y_0 = \frac{4b}{3\pi};$

Pos.	Gegenstand	Schwerpunktslage
11	**Viertelkreis.** 	$x_0 = y_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi}$.
12	**Halbkreis.** 	$x_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi}$.
13	**Kreisausschnitt.** 	$x_0 = \frac{4\,r \sin\alpha}{3\,\alpha}$. NB. Der Schwerpunkt der Fläche einer Kugelzone oder Schale liegt in halber Höhe.
14	**Kreisabschnitt.** 	$x_0 = \frac{F\,x_1 - f\,x_2}{F - f}$. F = Fläche des Kreisausschnitts $M\,A\,B$, x_1 = Schwerpunktsabstand des Kreisausschnitts $M\,A\,B$, f = Fläche des Dreiecks $M\,A\,B$, x_2 = Schwerpunktsabstand des Dreiecks $M\,A\,B$.
15		Flächen aus Teilen zusammengesetzt, deren Schwerpunktslagen bekannt sind: $x_0 = \frac{f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + \ldots + f_n\,x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$ Allgemein: $y_0 = \frac{f_1\,y_1 + f_2\,y_2 + \ldots + f_n\,y_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$

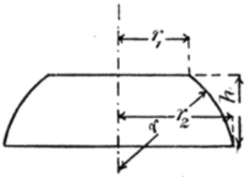
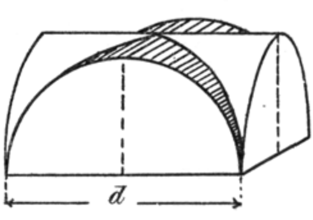
Pos.	Gegenstand	Schwerpunktslage
	c) Körper. Der Schwerpunkt eines Zylinders, eines Prismas und eines Kubus liegt in halber Höhe. (Parallele Endflächen vorausgesetzt.	
16		Kegel und Pyramide. $x_0 = \frac{h}{4}.$ Bestimme die Schwerpunkte s_1 und s_2 der Seitenflächen A B C und C B D, verbinde s_1 und s_2 mit den gegenüberliegenden Spitzen D und A, so schneiden die Schwerlinien D s_1 und A s_2 sich im Schwerpunkt S.
17	Kugelabschnitt. 	$x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$ r = Kugelradius.
18	Halbkugel. 	$x_0 = \frac{3}{8} r.$
19	Kugelausschnitt. 	$x_0 = \frac{3}{4}\left(r - \frac{h}{2}\right).$
20	Abgestumpfter Kegel. Abgestumpfte Pyramide.	$x_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{F + 3f + 2\sqrt{Ff}}{F + f + \sqrt{Ff}}.$ F größere, f kleine Endfläche, h Stumpfhöhe und x_0 Schwerpunkt-Abstand von der größeren Endfläche.

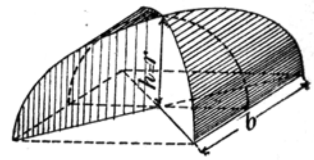
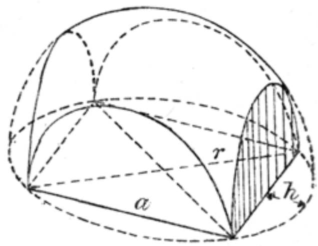
Pos.	Gegenstand	Schwerpunktslage
21	Körper aus Teilen gebildet, deren Schwerpunktslagen bekannt sind.	$x_0 = \frac{i_1 x_1 + i_2 x_2 + \ldots + i_n x_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_n}$ $y_0 = \frac{i_1 y_1 + i_2 y_2 + \ldots + i_n y_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_n}$

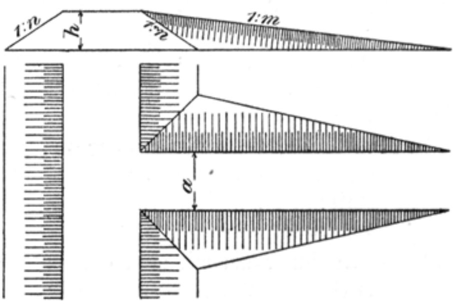
Tabelle über Inhalt, Mantel und Oberfläche verschiedener stereometrischer Körper.

Tabelle 3.

Lfde. Nr.	Körper-bezeichnung	Inhalt	Mantel	Oberfläche	Bemerkungen
1	Prisma	$G \cdot h$			
2	Würfel	a^3	$4\,a^2$	$6\,a^2$	Diagonale $= a\sqrt{3}$
3	Zylinder	$r^2 \pi h$	$2 r \pi h$	$2 r \pi h + 2 r^2 \pi$	
4	Pyramide	$\frac{G h}{3}$			
5	Kegel	$\frac{r^2 \pi h}{3}$	$r \pi s$	$r \pi s + r^2 \pi$	
6	abgestumpfte Pyramide	$\frac{h}{3}(G + \sqrt{G g} + g)$			
7	abgestumpfter Kegel	$\frac{\pi h}{3}(R^2 + R r + r^2)$	$\pi s (R + r)$	$\pi s (R + r) + \pi (R^2 + r^2)$	
8	Kugel	$\frac{4}{3} r^3 \pi$		$4 r^2 \pi$	
9	Kugel-abschnitt	$\frac{\pi h^2}{3}(3 r - h)$ $\frac{\pi h}{6}(3 r_1{}^2 + h^2)$	$2 r \pi h$		
10	Kugel-ausschnitt	$\frac{2}{3} r^2 \pi h$			

Lfde. Nr.	Körperbezeichnung	Inhalt	Mantel	Oberfläche	Bemerkungen
11	Kugelzone	$\frac{\pi h}{6}(3 r_1{}^2 + 3 r_2{}^2 + h^2)$	$2 r \pi h$		
12	Prismatoid	$\frac{h}{6}(G + 4 M + g)$			Vrgl. Fig. 59 Seite 54
13	Schräg abgeschnittenes dreiseitiges Prisma	$G \cdot \frac{a + b + c}{3}$			
14	Keil mit schrägen Seiten	$\frac{h}{6}(2 a_1 b_1 + a b_1)$			Vrgl. Fig. 60 Seite 54
15	Gerader Keil mit geraden Seiten	$h \cdot \frac{a_1 b_1}{2} = h M$			
16	Obelisk, Ponton oder Keilstumpf	$\frac{h}{6}[(2 a_1 + a_2) b_1 + (a_1 + 2 a_2) b_2]$			Vrgl. Fig. 61 Seite 56
17	Baumstamm	$0{,}8\, d^2 l$			l = Stammlänge d = mittlerer Durchmesser
18	Stammholz (praktisch verwendbar)	$0{,}62\, d^2 l$			ausschließlich Bast und Rinde
19	Zylinderhuf	$\frac{2}{3} r^2 h$	$2 r h$		Vrgl. Fig. 55 Seite 46
20	Klostergewölbe (Halbkreis)		$b h$	Leibungsfläche einer Gewölbewange 	

Lfde. Nr.	Körperbezeichnung	Inhalt	Mantel	Oberfläche	Bemerkungen
21	Kreuzgewölbe (Quadrat)		$1{,}1416\ d^2$		Leibung des quadratischen Kreuzgewölbes 
22	Quadratische Hängekuppel		$2{,}601\ r^2$ $1{,}30\ a^2$		
23	Hohlzylinder	$\pi h (R^2 - r^2)$	$2 \pi h (R + r)$		Vrgl. Fig. 54 Seite 46
24	Schräg abgeschnittener Zylinder	$r^2 \pi \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$	$r \pi (h_1 + h_2)$		Vrgl. Fig. 53 Seite 46
25	Faß mit kreisförmigen Dauben	$\frac{\pi h}{12} (2 D^2 + d^2)$ $\frac{\pi h}{9} \left(D + \frac{d}{2}\right)^2$ oder genauer $0{,}04909\ h (10 D^2 + 5 d^2 + D d)$			D = Durchmesser am Spundloch d = innerer Bodendurchmesser h = Abstand der Faßböden. Sind die beiden Böden von verschiedenen Durchmesser, so nimmt man für d das arithmetische Mittel derselben. Vergl. Fig. 77 Seite 80
26	Zylindrischer Ring	$2 \pi^2 R r^2$		$4 \pi^2 R r$	Vrgl. Fig. 73 Seite 77
27	Das einfache Rotations-Ellipsoid	$\frac{4}{3} \pi b^2 a$			Vrgl. Fig. 74 Seite 78

Lfde. Nr.	Körper-bezeichnung	Inhalt	Mantel	Oberfläche	Bemerkungen
28	Das dreiachsige Ellipsoid	$\frac{4}{3}\pi a b c$			Vrgl. Fig. 75 Seite 79
29	Paraboloid	$\frac{\pi}{2} b^2 a$			Vrgl. Fig. 76 Seite 80
30	Wegerampe	$3a + 2hn\left(1 - \frac{n}{m}\right)$ $(m - n)\frac{h^2}{2}$			

Guldinische Regel:

1. Oberflächenberechnungen: Die Oberfläche, bezw. der Mantel eines Rotationskörpers ist gleich der Länge der rotierenden Linie mal Schwerpunktsweg.
2. Inhaltsberechnungen: Der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Inhalte der rotierenden Fläche mal Schwerpunktsweg.

Chapmannsche Formel.

Berechnung unregelmäßiger Rotationskörper. Durch den Körper werden beliebig viele, jedoch eine ungerade Anzahl unter sich paralleler Ebenen, im Abstande a, die den Körper in den Flächen: $f, f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_{2n-1}, f_{2n}$ schneiden, gelegt. Es ist:

$$J = \frac{a}{3}(f + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + \ldots\ldots + f_{2n}).$$

Sind die Schnittflächen f, f_1, f_2 usw. Kreise mit den Radien r, r_1, r_2 usw., so ist:

$$J = \frac{a\pi}{3}(r^2 + 4 r_1{}^2 + 2 r^2{}_2 + \ldots\ldots + 4 r^2{}_{2n-1} + r^2{}_{2n}).$$

Druck von Straubing & Müller, Weimar