

Sammlung Schubert XLIX

Nichteuklidische Geometrie

von

Dr. Heinrich Liebmann

a. o. Professor an der Technischen Hochschule in München

Mit 39 Figuren

Zweite, neubearbeitete Auflage



STADTBIBLIOTHEK
LEIPZIG-CENTRAL
LEIPZIG

Berlin und Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.

1912



91 = 1487

91 = 24 200 120

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei dieser Neubearbeitung war der Verfasser bestrebt, dem Entwicklungsgang der nichteuklidischen Geometrie während der inzwischen verflossenen Zeit gerecht zu werden, soweit es sich im vorgeschriebenen Rahmen durchführen ließ.

Viele redaktionelle Änderungen sind vorgenommen, manche Zusätze finden sich. Davon seien hier erwähnt: 1. die mehrfach eingefügten axiomatischen Betrachtungen (S. 4—13, 18, 21—22, 152—153); 2. der Hjelmslevsche Mittelliniensatz (S. 16) mit Anwendung auf Konstruktionen (S. 27, 36, 187); 3. die starke Betonung der diesmal innerhalb der Ebene nachgewiesenen Zuordnung hyperbolischer rechtwinkliger Dreiecke (Neper-Engelsche Regel, S. 41), welche dem Pentagramma mirificum von Gauß entspricht (S. 155); in beiden nichteuklidischen Geometrien wird dadurch die Elementargeometrie, die Trigonometrie und die Parallelenlehre (S. 40, 165) beherrscht*); 4. die Einführung in die dem Verfasser erst durch Gespräche mit Herrn W. Blaschke so recht zugänglich gewordenen, hier wie schon früher von W. Vogt (vgl. S. 164) in einen anderen Zusammenhang gebrachten fruchtbaren Untersuchungen Studys über die Geometrie der Speere des elliptischen Raumes (S. 189—194); 5. die Einführung der Elemente der Relativitätstheorie mit der Konstruktion der resultierenden Geschwindigkeit von A. Sommerfeld; ihm verdankt der Verfasser auch den Zusatz S. 215, Z. 13—25, der die kurze Einführung S. 213—214 erläutert. —

Weniger ausführlich ist dagegen diesmal die Entwicklung der hyperbolischen Geometrie (Kap. II der ersten Auflage) aus der Lehre von den Kreisbündeln in der eukli-

*) Inzwischen hat sich herausgestellt, daß eben mit Hilfe der Zuordnung auch die Formeln S. 190 und 191 beim Nachweis der fundamentalen Relation von Study (S. 190, Z. 6) entbehrt werden können.

dischen Ebene (§ 27, S. 144—151, vgl. Anm. **) S. 151) und die Theorie der Kegelschnitte in der hyperbolischen Ebene (§ 26, 2—3, S. 138—143) gebracht.

Eingehende Hinweise auf die historische Entwicklung sind nur gelegentlich gegeben, so z. B. S. 128, Anm. *), wo es galt, einen scheinbar noch immer nicht allgemein bekannten Tatbestand in Erinnerung zu bringen; im übrigen möge hier außer dem auf S. 10 Anm. ***) erwähnten in- zwischen auch ins Russische (von Kulischer) und Eng- lische (von Carslaw) übersetzten Werk meines frühver- storbenen und auch am Ausbau der nichteuklidischen Geometrie so rege beteiligten Freundes Roberto Bonola und seinem „Index operum ad geometriam absolutam spectantium“, Budapest 1903 noch Sommervilles sehr ausführliche „Bibliography of Non-Euclidean Geometry“ (London 1911) genannt werden.

München, Ende April 1912

Heinrich Liebmann.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Kapitel I. Das Parallelenpostulat und die Grundlagen der Geometrie	1
§ 1. Das euklidische Parallelenpostulat	1
§ 2. Ein System von Axiomen (nach Hilbert)	4
§ 3. Archimedisches Postulat und Winkelsumme im Dreieck	8
§ 4. Zur Geschichte des Parallelenpostulats	13
§ 5. Sätze, die vom Parallelenpostulat unabhängig sind	16
Kapitel II. Hyperbolische Elementargeometrie	21
§ 6. Definition und Grundeigenschaft der hyperbolischen Parallelen	21
§ 7. Die Nichtschneidenden. Einteilung der Strahlenbündel	25
§ 8. Schnittpunktsätze für das Dreieck	29
§ 9. Anwendungen auf Konstruktionen	33
§ 10. Die komplementären Figuren und ihre Anwendung	37
§ 11. Die Zyklen und die Kreisgeometrie	43
§ 12. Der Inhalt des Dreiecks	50
§ 13. Grundlagen der hyperbolischen Raumgeometrie	56
Kapitel III. Hyperbolische Trigonometrie	65
§ 14. Der Grenzkreis und die Beziehung zwischen komplementären Strecken	65
§ 15. Trigonometrische Formeln	71
§ 16. Beziehungen zur euklidischen Geometrie und zur Geometrie auf der imaginären Kugel	82
Kapitel IV. Längen- und Inhaltmessungen mit Anwendung von Integralen	88
§ 17. Rektifikation der Zyklen	88
§ 18. Flächeninhaltbestimmungen in der hyperbolischen Ebene	92
§ 19. Der Inhalt von Dreiecken	96
§ 20. Die Sphären und Kegel	98
§ 21. Das Tetraeder	105
§ 22. Das Bogenelement und die Abbildung auf die Flächenkonstanten negativen Krümmungsmaßes	109
Kapitel V. Die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene und ihre Darstellung in der euklidischen Ebene	114
§ 23. Die Weierstraßschen Koordinaten	114
§ 24. Bewegungen und Invarianten. Schnittpunktsätze	119
§ 25. Die Cayley-Kleinsche Maßgeometrie	128

	Seite
§ 26. Verallgemeinerung und Anwendungen (Kegelschnitte)	136
§ 27. Zusammenhang mit der Kreisgeometrie der euklidischen Ebene	144
Kapitel VI. Sphärisch-elliptische Geometrie	152
§ 28. Die sphärische Geometrie	152
§ 29. Die Trigonometrie der S_2	158
§ 30. Die Geometrie des sphärischen Raumes	164
§ 31. Verschiedene Abbildung der S_2 und die elliptische Geometrie	170
§ 32. Analytische Darstellung und Abbildung der sphärisch-elliptischen Raumgeometrie	177
§ 33. Die Studysche Abbildung der Geraden des elliptischen Raumes	186
Kapitel VII. Nichteuklidische Mechanik	195
§ 34. Die nichteuklidische Statik	195
§ 35. Die dynamischen Differentialgleichungen	199
§ 36. Die dem Newtonschen Potential entsprechenden Potentiale	203
§ 37. Die Planetenbewegung in der nichteuklidischen Geometrie	207
§ 38. Das Relativitätsprinzip und die hyperbolische Geometrie	213
Sachregister	220

I. Kapitel.

Das Parallelenpostulat und die Grundlagen der Geometrie.

§ 1. Das euklidische Parallelenpostulat.

1. Das Parallelenpostulat.

Euklid beginnt das erste Buch seiner „Elemente“ mit 23 Erklärungen, 5 Forderungen und 9 Grundsätzen. Die 23. Erklärung lautet:

Parallel heißen gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner Seite zusammentreffen.

Diese Erklärung fordert, daß man zuerst die Frage beantwortet: Gibt es überhaupt Gerade, die zueinander parallel sind?

Das ist in der Tat der Fall, sobald man annimmt, daß es zwischen zwei Punkten eine und nur eine Verbindungsgerade gibt*), und daß jede unbegrenzte Gerade die Ebene in zwei Teile zerlegt**).

Um dies zu zeigen, errichte man im Punkte F der Geraden g das Lot FP und ziehe durch P die Gerade h senkrecht zu PF . Würden nun g und h einander schneiden (etwa in S_1), so müßten sie einander noch in einem zweiten Punkt S_2 schneiden, der zu S_1 in bezug auf PF symmetrisch liegt. S_1 und S_2 könnten nicht zusammenfallen,

*) Diese Forderung steht bei Euklid an erster Stelle.

***) Diese Forderung hat Euklid nicht mit unter die fünf Forderungen aufgenommen, wohl aber sie immer „stillschweigend“ angenommen. Läßt man sie fallen, so gelangt man bei Fortlassen des Parallelenpostulats zu zwei Arten von Geometrien, nämlich außer zur hyperbolischen, die hier in erster Linie behandelt wird, noch zur elliptischen. (§ 32.)

weil das Lot PF zusammen mit seiner Verlängerung die Ebene in zwei Teile zertrennt; d. h. g und h würden sich in zwei verschiedenen Punkten S_1 und S_2 schneiden, was den Grundannahmen widerspricht. g und h können sich also überhaupt nicht schneiden.

Durch jeden Punkt P außerhalb g gibt es also jedenfalls eine Parallele h , die eben dadurch bestimmt wird, daß das von P auf g gefällte Lot PF in P auf h senkrecht steht. Gibt es noch weitere Parallelen durch P ?

Euklid verneint dies, indem er die Forderung aufstellt (fünfte Forderung):

Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Man sieht, daß nach dieser Forderung jede Gerade durch P , die nicht mit h identisch ist, g notwendig treffen muß.

2. Die Stellung des Parallelenpostulats und die Grundlagen der Geometrie.

Euklid hat in seiner Geometrie die Absicht verfolgt, durch die vorausgeschickten Erklärungen, Forderungen und Grundsätze alle Elemente zu geben, auf Grund deren die weiteren Entwicklungen rein logisch aufgebaut werden können; ja er hat bereits daran gedacht, jeden Beweis auf eine möglichst geringe Anzahl von Grundsätzen zu stellen, indem er mehrfach auf das Parallelenpostulat als Grundlage verzichtet, wo es doch zur Vereinfachung des Beweises wesentlich beigetragen hätte, z. B. beim Satz vom Außenwinkel im Dreieck (siehe § 2, 3). Damit hat gewissermaßen Euklid selbst den ersten Vorstoß in das Gebiet der nichteuklidischen Geometrie gemacht.

Es ist hier nicht der Ort, bei einer ausführlichen Kritik von Euklid zu verweilen*), jedenfalls ist dreierlei hervorzuheben:

*) Vgl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik II, 2. Aufl., Leipzig 1907. F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie I, übersetzt von Thieme, Leipzig 1911.

1. Euklid hat die logische Vollständigkeit der Grundlagen nicht durchaus erreicht; er benützt in seinen Beweisen noch stillschweigend weitere, nicht von Anfang an aufgezählte Annahmen, die er entweder selbst nicht bemerkt hat oder aber für so selbstverständlich hielt, daß er sie nicht aussprach.

Über diese Annahmen wird noch im einzelnen zu sprechen sein (§ 2).

2. Die Aufgabe der Erklärungen ist eine doppelte. Einmal psychologisch-didaktisch: Es soll im Zuhörer oder Leser durch die Erklärung diejenige Vorstellung erweckt werden, welche der Lehrende damit verbindet; hiervon sind einige der euklidischen Erklärungen weit entfernt. Ferner eine rein logische: Die Begriffe sind so scharf zu fassen, daß sie als Elemente für Beweise dienen können. Es darf also vor allem zwischen den verschiedenen Definitionen kein Widerspruch bestehen, auch sollen die verschiedenen Axiome außer der bereits geforderten Vollständigkeit noch die Eigenschaft besitzen, soweit dies durchführbar ist, voneinander unabhängig zu sein. Eine Willkür in der Anordnung und im Aufbau der Axiome bleibt dabei immer bestehen, auch wird es sich nie erreichen lassen, die Axiome völlig voneinander unabhängig zu formulieren.

3. Die besondere Ausnahmestellung des Parallelenpostulats hat Euklid durchaus erkannt, sie besteht darin, daß Geometrien ohne Parallelenpostulat einen viel anschaulicheren Charakter haben, als Geometrien, die — ebenfalls ohne logischen Widerspruch in sich — auf ein Axiomensystem sich gründen, in dem noch irgendein anderes der Axiome fehlt, z. B. das archimedische (siehe § 3).

Hierzu ist natürlich die einschränkende Bemerkung zu machen, daß das Wort „Anschaulichkeit“ nicht als logisches oder gar mathematisches Argument verwendet werden darf, so enthebt uns z. B. die nicht vorhandene oder vielleicht nur noch nicht entwickelte Fähigkeit, eine Geometrie mit fremdartigen Grundlagen uns anschaulich gestalten zu können, von der Verpflichtung, sie auf irgendeinem Wege, der zumeist analytisch sein wird, auszugestalten und auf Widerspruchslosigkeit hin zu untersuchen.

Unsere Aufgabe soll nun nicht darin bestehen, die

auf so verschiedenen Wegen und so verschiedenartig — je nach der Geschmacksrichtung — ausgesprochenen Grundlagen der Geometrie noch einmal zu entwickeln, sondern vielmehr die nichteuklidische Geometrie aufzubauen, unter Angabe der dabei verwendeten Grundlagen, deren Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit festgestellt ist.

§ 2. Ein System von Axiomen (nach Hilbert).

1. Die visuellen Axiome.

Wir halten uns an die Darstellung von Hilbert*) und zählen zunächst diejenigen Axiome auf, welche die Beziehung zwischen Punkt und Gerade geben, es sind dies die Axiome der Verknüpfung und Anordnung.

I. Axiome der Verknüpfung.

I, 1. Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade.

I, 2. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen diese Gerade.

I, 3. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

II. Axiome der Anordnung.

II, 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt auch B zwischen A und C .

II, 2. Wenn A und B zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es wenigstens einen Punkt C , der zwischen A und B liegt, und wenigstens einen Punkt D , so daß B zwischen A und D liegt.

(II, 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.)

Durch das Axiom II, 3 wird der Fall ausgeschlossen, daß die Gerade eine in sich zurücklaufende, geschlossene Kurve ist, wie in der sphärischen und elliptischen Geometrie (Kap. VI). II, 3 gilt nur in der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie (Kap. II).

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1909, Kap. I und Anhang III.

Aus II, 1 und II, 2 zusammen folgt, daß es zwischen A und B auf der Geraden g unbegrenzt viele Punkte gibt. Die Gesamtheit dieser Punkte heißt auch die Strecke AB oder BA , diese Strecke ist eindeutig definiert, wenn II, 3 gilt.

II, 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft; wenn dann a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke BC oder der Strecke AC (Axiom von Pasch).

Hieraus folgt dann in Verbindung mit I, 1, daß eine Halbgerade, die von einer Ecke A eines Dreiecks ausgeht und im Winkelraum (siehe III, 3) AB, AC liegt, notwendig die Seite BC treffen muß. Dieser Satz wird sehr oft benützt, ohne im euklidischen Axiomensystem ausgesprochen zu sein, und das Fehlen der Axiome II, insbesondere von II, 3 und II, 4 muß als eine ganz wesentliche Lücke bei Euklid bezeichnet werden.

Zusatz: Sobald II, 3 gilt, muß jede Gerade die Ebene in zwei getrennte Teile zerlegen. Es sei A ein Punkt auf a , und durch A legen wir eine mit a nicht zusammenfallende Gerade, auf welcher B und C zwei Punkte sind, so gewählt, daß A zwischen B und C liegt. Verbindet man B und C und nimmt einen weiteren Punkt B_1 auf der Verlängerung von AB an, so daß B zwischen B_1 und A liegt, so kann wegen II, 3 B_1 nicht zwischen B und C liegen, d. h. es gibt keine geradlinige Strecke, welche B und C verbindet, ohne a in A zu schneiden.

2. Axiome der Kongruenz und Begriff des Winkels.

Zur Aufstellung der Geometrie bedarf es noch der Vorstellung der Bewegung, d. h. der

III. Axiome der Kongruenz.

Aus den Axiomen (II) folgt, daß eine Gerade durch irgendeinen ihrer Punkte P in zwei Halbstrahlen (oder Hälften) zerfällt, derart, daß jede Strecke auf der Geraden, deren Endpunkte verschiedenen Halbstrahlen angehören, notwendig P enthalten muß. Hieran knüpfen die weiteren Axiome, die sich mit Kongruenz gerader Strecken und Kongruenz ebener Figuren befassen.

III, 1. Wenn A, B zwei Punkte der Geraden a sind und A' ein Punkt einer Geraden a' ist, so kann man auf

einer gegebenen Hälfte der Geraden a' von A' aus stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist; in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst kongruent; in Zeichen:

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad BA \equiv AB.$$

III, 2. Wenn die Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch die Strecke $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent („Transitivität der Kongruenz“).

III, 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsamen Punkt auf a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken ohne gemeinsamen Punkt auf einer Geraden a' ; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$, so ist auch $AC \equiv A'C'$ („Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches“).

III, 4 und III, 5 befassen sich mit dem Begriff des Winkels. Wir nennen ein von einem Punkte A ausgehendes Paar von Halbstrahlen h und k , die nicht auf einer und derselben Geraden liegen, einen Winkel und bezeichnen ihn entweder mit

$$\sphericalangle(hk) \quad \text{oder} \quad \sphericalangle(kh).$$

Die Punkte der Ebene, welche bezüglich h auf derselben Seite wie k und zugleich bezüglich k auf derselben Seite wie h liegen, bilden den Winkelraum von $\sphericalangle(hk)$.

III, 4. Es sei ein Winkel (hk) , eine Gerade a' und eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute h' eine Halbgerade der Geraden a' , die vom Punkte O ausgeht: dann gibt es eine und nur eine Halbgerade k' , so daß der Winkel (hk) dem Winkel $(h'k')$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$$

und daß zugleich alle Punkte des Winkelraums von $\sphericalangle(h'k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen.

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, in Zeichen

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk), \quad \sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(kh).$$

III, 5. Wenn ein Winkel (hk) sowohl dem Winkel $(h'k')$ als auch dem Winkel $(h''k'')$ kongruent ist, so ist auch der Winkel $(h'k')$ dem Winkel $(h''k'')$ kongruent.

Um noch die Kongruenzsätze des Dreiecks zu erhalten, bedarf man des Axioms:

III, 6.*) Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ und $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so ist auch stets

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

3. Folgerungen aus den Axiomen.

Aus diesen Axiomen folgen die Kongruenzsätze für Dreiecke durch indirektes Schlußverfahren (sowohl für die hyperbolische wie für die euklidische Geometrie). Fällt II, 3 fort oder I, 1, wie in der elliptischen und sphärischen Geometrie (in der sphärischen gibt es unendlich viele „Gerade“ [Hauptkreise], die zwei Gegenpunkte der Kugel verbinden), so entstehen gewisse Ausnahmen, auf die aber hier nicht näher eingegangen zu werden braucht. Z. B. können zwei sphärische Dreiecke in zwei Seiten und den gegenüber liegenden Winkeln übereinstimmen, ohne doch kongruent zu sein, wenn die beiden Seiten Quadranten sind. Ferner folgt die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, die Existenz der rechten Winkel (Winkel, die ihrem Nebenwinkel gleich sind), die Möglichkeit, in einem Punkte einer Geraden eine Senkrechte zu errichten und die Möglichkeit des Lotfällens von P auf g durch die Konstruktion:

Man verbindet P mit einem Punkt A von g , trägt den Winkel (PA, g) an g auf der andern Seite an und auf dem zweiten Schenkel die Strecke $AP' = AP$ ab. DP' schneidet dann g rechtwinklig, wie leicht zu zeigen ist.

Ferner kann man Strecken und Winkel halbieren, d. h. in zwei kongruente Teile zerlegen durch Anwendung dieser Sätze.

Der Satz vom Außenwinkel (Euklid I, 16): „In jedem Dreieck ist der Außenwinkel größer als jeder der beiden nicht anliegenden Innenwinkel“ stützt sich wesentlich mit auf II, 3:

*) A. Rosenthal hat (Math. Ann. 71, S. 257—274) gezeigt, „daß mit Hilfe der übrigen Kongruenzaxiome unter Hinzuziehung der Anordnungs- und Verknüpfungsaxiome das fünfte Kongruenzaxiom sowie Teile des ersten und vierten bewiesen werden können“.

Ist D die Mitte von BC und $AD = DE$, so sind die beiden Dreiecke ADC und EDB kongruent, daher $\sphericalangle DBE = \gamma$. Da nun aus II, 3 folgt, daß E auf derselben Seite der Grundlinie des Dreiecks liegt wie D , so ist $\sphericalangle DBE (= \gamma)$ kleiner als der Außenwinkel bei B . Der Satz gilt nicht mehr allgemein, sobald I, 1 oder II, 3 fortgelassen werden, also in der sphärischen und in der elliptischen Geometrie.

Dasselbe ist zu sagen von den aus ihm folgenden Sätzen:

„In jedem Dreieck ist die Summe irgend zweier Winkel zusammen genommen kleiner als zwei Rechte.“ (Euklid, I, 17.)

„In jedem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.“ (Euklid I, 18.)

„In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.“ (Euklid I, 19.)

„In jedem Dreieck sind irgend zwei Seiten zusammen größer als die dritte.“ (Euklid I, 20.)

Diese Sätze gelten in der elliptischen und sphärischen Geometrie nur noch im beschränkten Gebiet, aber nicht mehr für alle Dreiecke.

§ 3. Archimedisches Postulat und Winkelsumme im Dreieck.

1. Das archimedische Postulat.

Für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Größe der Winkelsumme im Dreieck und dem Parallelenpostulat, vor allem auch der Versuche, das Postulat aus andern Axiomen zu beweisen, fehlt noch ein Postulat, das hier nachzutragen ist, im übrigen aber bei dem Aufbau der hyperbolischen Elementargeometrie (Kap. II) nicht gebraucht wird, weil es dort durch das nichteuklidische Parallelenpostulat vollkommen ersetzt werden kann.

IV. Postulat des Archimedes.

Wenn a und b zwei gleichartige Größen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addieren, daß die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + a \dots + a > b.$$

Dieser Satz ist sowohl auf Strecken wie auf Winkel anzuwenden, und setzt nur voraus, daß man von zwei

Größen derselben Art immer entscheiden kann, welche größer ist, und daß man Größen addieren kann. In diesem Sinne aber sind Strecken sowohl wie Winkel „Größen“.

2. Die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als zwei Rechte.

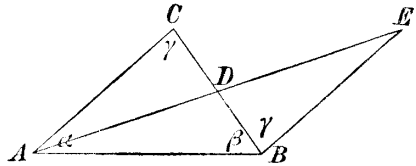


Fig. 1.

Mit Hilfe des archimedischen Postu-

lats und aller Axiome des § 2 kann gezeigt werden, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte nicht über-
treffen kann.

Beweis: Es sei (siehe Fig. 1) im Dreieck ABC

$$a \leq b \leq c \text{ also (Euklid I, 18)}$$

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma,$$

dann halbieren wir BC und machen DE gleich AD . Das Dreieck ABE hat, wie mit Kongruenzsätzen leicht nachzuweisen ist, dieselbe Winkelsumme wie ABC , und die Summe der beiden größten Winkel ist wegen

$$\sphericalangle ABE = \beta + \gamma$$

und

$$\sphericalangle BAE + \sphericalangle BEA = \alpha$$

sicher größer oder gleich

$$\beta + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \beta + \gamma + \alpha - \frac{\alpha}{2}.$$

Mit dem neuen Dreieck ABE verfahren wir in derselben Weise und erhalten, indem wir die dem kleinsten Winkel ($\leq \frac{\alpha}{2}$) gegenüberliegende Seite halbieren usw., ein Dreieck, in dem die Summe der beiden größten Winkel mindestens gleich ist

$$\beta + \gamma + \alpha - \frac{\alpha}{4}.$$

Diese Konstruktion kann beliebig fortgesetzt werden, und wenn wir im n -ten Dreieck die beiden größten Winkel

mit β_n und γ_n bezeichnen, so ist

$$\beta_n + \gamma_n \geq \alpha + \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2^n}.$$

Hätte nun das Ausgangsdreieck einen Exzeß (ε) besessen, d. h. wäre

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon,$$

so könnte man auf Grund des archimedischen Postulats die Zahl n so groß annehmen, daß

$$2^n \varepsilon > \alpha (= \alpha + \delta)$$

und man hätte sodann

$$\beta_n + \gamma_n \geq \pi + \varepsilon - \varepsilon + \frac{\delta}{2^n} > \pi,$$

im Widerspruch zu Euklid I, 17 *).

Soll also die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte sein, so muß man entweder auf I, 1 verzichten (sphärische Geometrie) oder auf II, 3 (elliptische Geometrie) oder auf das archimedische Postulat**).

3. Fortpflanzungsgesetz für die Winkelsumme.

Während der Satz: W (Winkelsumme im Dreieck) ≤ 2 Rechte, nur mit Hilfe des archimedischen Postulats bewiesen werden kann, ist der folgende Satz unabhängig davon beweisbar:

Je nach dem in einem einzigen Dreieck die Winkelsumme

$$W < \pi, \quad W = \pi, \quad W > \pi,$$

gilt dieselbe Beziehung für alle Dreiecke***).

*) Dieser Beweis rührt von Legendre her (Éléments de Géométrie, 3. Aufl. 1800, S. 313). Ein anderer Beweis von Legendre bedient sich ebenfalls des archimedischen Postulats angewandt auf Strecken (nicht auf Winkel).

**) Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. 53 (1900), S. 405—439.

***) Zuerst bewiesen von G. Saccheri, vgl. Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß, Leipzig 1895, und zwar in der weiter unten ausgesprochenen Form, nämlich als Eigenschaft des dreieckigen Vierecks. Vgl. ferner: Bonola, die nichteuklidische Geometrie, übersetzt von Liebmann, Leipzig 1908, S. 32. Dehn hat zuerst die Unabhängigkeit des Fortpflanzungsgesetzes der Winkelsumme vom archimedischen Postulat bewiesen, Bonola gab einen anderen Beweis, dem wir uns anschließen.

Diesen Satz dürfen wir wohl kurz als „Fortpflanzungsgesetz für die Winkelsumme“ bezeichnen.

Wir schicken den Beweis des folgenden vom Parallelenpostulat unabhängigen Satzes voraus: Das Mittellot einer Dreiecksseite steht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden andern Seiten senkrecht.

Beweis: (Vgl. Fig. 2.) Verbindet man im Dreieck ABC die Mitten E und F der Seiten AC und AB und fällt auf die Gerade EF die Lote AA' , BB' und CC' , so folgt aus dem zweiten Kongruenzsatze, daß diese drei Lote gleich sind. Verbindet man noch die Mitten D' von $B'C'$ und D von BC , so sind die beiden Vierecke

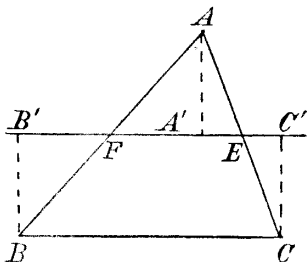


Fig. 2.

$BB'DD'$ und $CC'DD'$

(symmetrisch) kongruent, weil sie in den entsprechenden Seiten übereinstimmen:

$$BB' = CC', \quad B'D' = C'D', \quad BD = CD, \quad DD' = DD'$$

und

$$\sphericalangle BB'D' = \sphericalangle CC'D' = \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt

$$\sphericalangle BDD' = \sphericalangle CDD' = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \sphericalangle BD'D = \sphericalangle CD'D = \frac{\pi}{2},$$

d. h. das Mittellot von BC schneidet die Gerade EF in D' senkrecht.

Zugleich ist wegen

$$\sphericalangle B'BF = \sphericalangle A'AF \quad \text{und} \quad \sphericalangle C'CE = \sphericalangle A'AE$$

jeder der beiden gleichen Winkel $B'BD$ und $C'CD$ der halben Winkelsumme $\left(\frac{W}{2}\right)$ des Dreiecks ABC gleich. (Diese Konstruktion wird später noch von Bedeutung für die Inhaltsbestimmung des Dreiecks. Siehe Kap. I, § 5 und Kap. II, § 12.)

Jedes Viereck mit drei rechten Winkeln soll als „dreieckwinkliges Viereck“ bezeichnet werden, und speziell

kurzweg als Spitzeck, Rechteck oder Stumpfeck, je nachdem der vierte Winkel ein spitzer, rechter oder stumpfer ist (Hypothese des spitzen, rechten, stumpfen Winkels).

Der zu beweisende Satz über Dreiecke läßt sich dann ersetzen durch den andern:

Je nachdem für ein einziges dreieckwinkliges Viereck die Hypothese des spitzen, rechten oder stumpfen Winkels gilt, gilt sie für alle dreieckwinkligen Vierecke.

Beim Beweis beschränken wir uns auf die Hypothese des rechten Winkels.

Aus Kongruenzsätzen folgt, daß in einem Rechteck je zwei gegenüber liegende Seiten einander gleich sind.

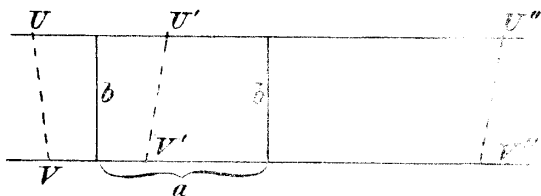


Fig. 3.

Fällt man jetzt in diesem Rechteck (Fig. 3) das Lot UV und spiegelt es an den beiden Seiten b , so ist

$$UV = U'V' = U''V''$$

und, wie aus Kongruenzsätzen folgt,

$$\sphericalangle U'U''V'' = \sphericalangle U''U'V',$$

also wegen

$$\sphericalangle UU''V'' = \sphericalangle UU'V' = \pi - \sphericalangle V'U'U''$$

$$\sphericalangle U'U''V'' = \sphericalangle V''U'V' = \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt, daß alle Lote, die von einem Punkt einer Rechteckseite oder ihrer Verlängerung auf die Gegenseite gefällt sind, gleiche Länge (und zwar die Länge der andern Seite) besitzen.

Ist nun ein Viereck $A'B'C'D'$ gegeben mit rechten Winkeln bei $A'B'$ und C' und ist $ABCD$ ein Rechteck — die Existenz eines Rechtecks wird ja vorausgesetzt —

dann legen wir die beiden Figuren so aufeinander, daß B' mit B zusammenfällt, C' auf BC oder dessen Verlängerung, A' auf BA oder dessen Verlängerung liegt. AD schneidet dann $C'D'$ in einem Punkt E , CD schneidet $A'D'$ in einem Punkt F , und die beiden Figuren $DC'C'E$, $ADFA'$ sind nach der vorausgeschickten Betrachtung wieder Rechtecke, woraus durch erneute Anwendung des Satzes folgt, daß auch $FDED'$ ein Rechteck ist, und schließlich $A'B'C'D'$ auch ein Rechteck, was bewiesen werden sollte.

Zusatz: Aus der Annahme des Rechtecks, d. h. aus der Annahme, daß im Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, folgt das euklidische Parallelenpostulat freilich erst durch eine Betrachtung, bei der das archimedische Postulat angewendet werden muß*). Die meisten Beweisversuche des Parallelenpostulats aber suchen die Annahme $W > 2R$ zu widerlegen und die Annahme $W < 2R$, da ja das archimedische Postulat als selbstverständlich galt, und von diesem Standpunkt aus die Forderung $W = 2R$ mit dem euklidischen Parallelenpostulat äquivalent ist.

§ 4. Zur Geschichte des Parallelenpostulats. **)

1. Die Beweisversuche.

Der Versuch „eine so einleuchtende und selbstverständliche Tatsache, wie das euklidische Parallelenpostulat zu beweisen“, d. h. sie auf die andern Axiome oder Forderungen zurückzuführen, hat bis ins neunzehnte Jahrhundert auch ernst zu nehmende Mathematiker beschäftigt. Man glaubte, zumal da die Widerlegung der Hypothese des stumpfen Winkels einwandfrei — mit Hilfe der Axiomgruppen I bis IV — gelungen war, zu demselben Ziel gelangen zu können bei der Hypothese des spitzen Winkels. Abgesehen von solchen Beweisen, die prinzipielle Fehler enthalten, also etwa unrichtige Figuren benützen, aus denen auch Sätze abgeleitet werden könnten, die sicher falsch sind, tauchen gelegentlich Beweisversuche auf, die mit unendlichen Größen rechnen, als ob sie vergleichbar wären.

*) Dies hat Dehn in der schon zitierten Arbeit gezeigt.

**) Vgl. die Werke von Engel-Stäckel und Bonola.

Der am meisten vorkommende Fehler ist aber die Verwendung erschlichener Annahmen, die gerade so gut als selbständige Postulate hätten aufgestellt werden müssen, wie das Parallelenpostulat — im Grunde genommen ist dann das euklidische Parallelenpostulat eben nur durch ein anderes ersetzt, so hat z. B. Legendre und vor ihm Lorenz (1791) den Beweis des euklidischen Parallelenpostulats auf die Annahme begründet*):

Von einem beliebig im Innern eines Winkels ($< \pi$) angenommenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, die die beiden Schenkel des Winkels trifft.

Es gibt noch eine Reihe solcher Annahmen, und dazu ist zu bemerken, daß es natürlich dem Geschmack des Einzelnen völlig freisteht, diese oder jene Annahme zu wählen an Stelle des etwas schwerfälligen euklidischen Parallelenpostulats — wenn er sich dabei nur bewußt bleibt, ein neues Postulat einzuführen. Überdies ist völlige Klarheit darüber zu verlangen, welche Postulate benützt werden, um aus der gewählten Fassung dann das euklidische Parallelenpostulat zu gewinnen.

Z. B. braucht man zur Ableitung des euklidischen Postulates aus der Annahme, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, außer den Axiomgruppen I bis III auch das archimedische Postulat, bei dem Lorenzschen Postulat aber nur I bis III.

2. Lobatschefskijs Beweisversuch.

Um doch wenigstens an einem Beispiel die Gedankengänge eines Beweisversuchs zu verfolgen, wählen wir die erst vor kurzem gefundene und in deutscher Sprache noch nicht veröffentlichte Betrachtung, welche N. J. Lobatschefskij — einer der Begründer der hyperbolischen Geometrie — in seiner vorkritischen Zeit in einer Vorlesung ausgeführt hat.

Wir wollen hier nur die fehlerhafte Stelle des Beweises wiedergeben und lassen Lobatschefskij das Wort:

Es sei $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, $ED \perp CD$, $FE \perp ED$, so muß EF verlängert entweder AB oder AC schneiden.

*) Bonola a. a. O. S. 61 und 127.

Beweis: (Vgl. Fig. 4.) Wir verlängern EF in entgegengesetzter Richtung und fällen von einem beliebigen Punkt der Verlängerung aus das Lot $GH \perp AB$, dann wird die Linie EF eingeschlossen[!] im Umfang des Polygons $ACDEGHA$, folglich muß sie, verlängert, den Umfang dieses Polygons wieder schneiden, was (weil die Winkelsumme im Dreieck nicht größer sein kann als zwei Rechte) nur so eintreten kann, daß EF AB oder AC schneidet.

Kritik: Die Annahme, daß das Lot GH die in der Figur gezeichnete Lage hat, also die Gerade GEF zwischen D und H liegt, ist völlig unbegründet, sie schließt ein, daß die Verlängerung von DE die Gerade AB schneidet. Diese Annahme ist aber nur dann berechtigt, wenn die Strecken AC und CD gewisse Abmessungen nicht überschreiten.

[Bedienen wir uns der im zweiten Kapitel entwickelten hyperbolischen Elementargeometrie und bezeichnen die Strecken AC und CD mit p und q , die dazu gehörigen Parallelwinkel (siehe § 6) mit $II(p)$ und $II(q)$, so muß sein

$$II(p) + II(q) > \frac{\pi}{2}.$$

Verlangt man, wie dies Lobatschefskij hier muß, daß für jedes noch so große p oder q diese Ungleichheit gilt, so setzt man eben damit an Stelle der hyperbolischen Geometrie, in der $II(p)$ ein (mit von $p = 0$ bis $p = \infty$ wachsendem p) von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 abnehmender Winkel ist, die euklidische, in der $II(p)$ beständig gleich $\frac{\pi}{2}$ ist.]

Die weiteren Schritte in Lobatschefskijs Beweis sind dann, abgesehen von dem Grundirrtum, lückenlos, er zeigt der Reihe nach, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als $\frac{\pi}{2}$ ist, daß, wenn im Dreieck ein Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist, die

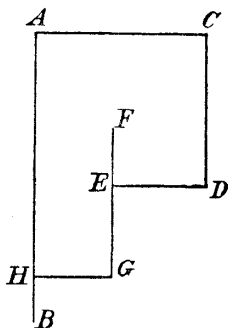


Fig. 4.

Summe der Winkel π sein muß, und endlich, daß in jedem Dreieck die Winkelsumme π beträgt.

§ 5. Sätze, die vom Parallelenpostulat unabhängig sind.

1. Die Mittellinie.

Viele einfache Sätze der Elementargeometrie werden zwar meist unter Anwendung des Parallelenpostulates bewiesen, sind aber unabhängig von ihm. Hierher gehört z. B. der Satz*):

Der Ort der Mittelpunkte der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte kongruenter geradliniger Punktreihen ist eine Gerade.

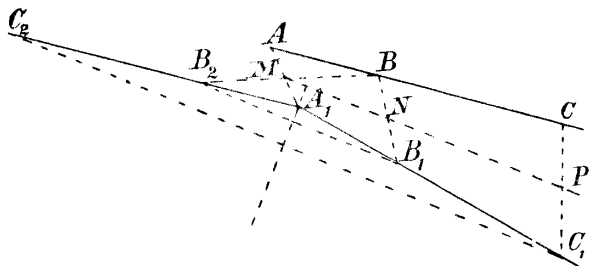


Fig. 5.

Der Beweis stützt sich auf eine Eigenschaft des Dreiecks, die ebenfalls vom Parallelenpostulat unabhängig ist, nämlich daß die Mittelsenkrechte einer Seite auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden anderen Seiten senkrecht steht (§ 3, 3).

Sind die Geraden g und g_1 gegeben und ist $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, so soll gezeigt werden, daß die drei Mittelpunkte M , N und P der Strecken AA_1 , BB_1 und CC_1 auf einer Geraden liegen (vgl. Fig. 5).

Um dies zu zeigen, verlängert man BM um sich selbst bis B_2 , dann muß das Mittellot von B_1B_2 , welches zugleich Halbierungslinie des Winkels $B_2A_1B_1$ ist, auf MN senkrecht stehen. Macht man nun $B_2C_2 = B_1C_1$, so fällt

*) Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. 64 (1907), S. 449. Diese Abhandlung ist in F. Schurs Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909, § 7 aufgenommen. Siehe S. 147 a. a. O.

das Mittellot von C_1C_2 mit dem von B_1B_2 zusammen, und die Verbindungslinie von M mit P , die auf dem genannten Mittellot ihrerseits ebenfalls senkrecht steht, fällt daher mit der Geraden MN zusammen, w. z. b. w.

Den Ort der Punkte M, N, P usw. wollen wir die Mittellinie nennen.

Fallen die Punkte M und N in einen einzigen zusammen, so geht auch CC_1 durch M .

Man kann aus diesem Satz leicht den weiteren folgern:

Ist in einem Viereck $ABCD$ die Seite AB der Seite CD gleich, so gehen die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Paare von Gegenseiten AB, CD ; AD, BC ; AC, BD alle durch einen und denselben Punkt.

Beweis: Bezeichnet man den Mittelpunkt einer Seite durch die Endpunkte in runden Klammern, also die Mitte von AB mit (AB) usw. und trägt zunächst auf AB und CD von A und C aus gleiche Strecken ab, so folgt, daß die Verbindungslinie $(AB)(CD)$ von $(AC)(BD)$ halbiert wird, ebenso auch von $(AD)(BC)$, womit der Satz bewiesen ist.

Ein Spezialfall dieses Satzes kann benützt werden, um zu beweisen, daß die Transversalen im Dreieck von den Ecken A, B, C nach den Mitten D, E, F der Gegenseiten durch einen Punkt M gehen — freilich nur für den Fall, daß der Abstand des Schnittpunkts M zweier Transversalen, z. B. AD und BE von der dritten Ecke (C) gleich der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite ist. Zum allgemeinen Beweis des — vom euklidischen Parallelenpostulat unabhängigen — Transversalensatzes müssen wir die Raumgeometrie heranziehen.

2. Übertragung auf den Raum.

Um die Kongruenzsätze im Raum und überhaupt alle vom Parallelenpostulat unabhängigen Sätze der Raumgeometrie zu erhalten, z. B. daß der Neigungswinkel zweier Ebenen längs der Schnittgeraden konstant ist, daß die Verbindungslinie der Fußpunkte $A'B'$ der Lote von den Punkten A und B einer Geraden, die eine Ebene schneidet, durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene geht usw., kurz alle elementaren Sätze der Stereometrie, bedarf man nach Hilbert nur noch der folgenden Axiome, welche zur

Ergänzung der ebenen Axiome der Verknüpfung (I, 1 bis I, 3) dienen*):

I, 4. Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene α .

I, 5. Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen die Ebene α .

I, 6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α .

I, 7. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

I, 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte. —

Wir beweisen jetzt den Satz, daß der Ort der Mittelpunkte der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte kongruenter Punktreihen auf zwei Geraden eine Gerade ist (Satz von der Mittellinie) auch für den Raum, wobei wir dieselben Bezeichnungen wie oben anwenden.

— Sind g und g_1 die windschiefen Geraden, so lege man durch AA_1 diejenige Ebene, welche zugleich den Punkt N enthält. Fällt man von B und B_1 aus die Lote BB' und $B_1B'_1$ auf diese Ebene, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke $BB'N$ und $B_1B'_1N$ kongruent, wegen

$$NB = NB_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle BNB' = \sphericalangle B_1NB'_1.$$

Daher ist

$$AB' = A_1B'_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle BAB' = \sphericalangle B_1A_1B'_1.$$

Fällt man also auf die Ebene noch die Lote CC' und $C_1C'_1$, so sind diese wegen $AC = A_1C_1$ ebenfalls gleich, d. h. die Ebene AA_1N geht auch durch die Mitte P von CC_1 .

Ferner liegen A, B' und C' auf einer Geraden, ebenso A_1, B'_1 und C'_1 und es fällt N mit der Mitte von $B'B'_1$, P mit der Mitte von $C'C'_1$ zusammen. Die drei Mitten von $AA_1, B'B'_1, C'C'_1$ liegen aber (nach 1) ebenfalls auf einer Geraden, d. h. also die drei Mittelpunkte M, N, P von AA_1, BB_1 und CC_1 liegen auf einer Geraden.

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., S. 3 und 4. Auf S. 20 wird darauf hingewiesen, daß die räumlichen Tatsachen der Kongruenz aus den ebenen und I, 4—8 folgen.

3. Der Transversalensatz.

Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt weiter:

Sind in einem Tetraeder $ABCG$ zwei Gegenkanten AB und CG einander gleich, so gehen die Verbindungslinien der Mittelpunkte gegenüberliegender Gegenkanten alle durch einen Punkt.

Beweis: Trägt man von A auf AB und von C auf CG gleiche Stücke ab, so ist der Ort der Mittelpunkte Verbindungslinien entsprechender Punkte nach Nr. 2 eine Gerade, auf ihr muß auch der Mittelpunkt der Verbindungslinie der Mitte F von AB und F' von CG liegen.

Trägt man von A auf AB und G auf GC gleiche Stücke ab, so muß der Ort der Mittelpunkte der Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Gerade sein, die auch durch die Mitte von FF' geht.

Die Verbindungslinien der Mitten

F von AB und F' von CG ,

E von AC und E' von BG ,

D von BC und D' von AG

gehen also alle durch denselben Punkt.

Mit diesem Satz kann gezeigt werden, daß die drei Transversalen von den Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten einander in einem Punkt treffen.

Man lege durch C eine nicht in der Ebene des Dreiecks gelegene Gerade und trage auf ihr die Länge $CG = c$ ab. In dem Tetraeder $ABCG$ treffen sich dann die Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten in einem Punkt N .

Die Ebenen BGE , AGD , CGF haben die Punkte G und N gemein (weil sie die Geraden EE' bzw. DD' und FF' enthalten), schneiden sich also in einer Geraden, außerdem treffen sie die Ebene ABC gerade in den Transversalen BE , AD und CF , also gehen die drei Transversalen durch einen Punkt, den Schnittpunkt M von GN mit der Ebene des Dreiecks.

Ein elementarer Beweis für die Existenz des Transversalenschnittpunkts M , bei dem von den Hilfsmitteln der Raumgeometrie nicht Gebrauch gemacht wird, und

der ebenfalls vom euklidischen Parallelenpostulat unabhängig ist, scheint bisher noch nicht erbracht worden zu sein.

Ebenso wie die Transversalen, gehen auch die Halbierungslinien der drei Innenwinkel eines Dreiecks durch einen Punkt, wie überhaupt eine Reihe „merkwürdiger Punkte“ auch in der absoluten Geometrie existieren (vgl. § 8).

II. Kapitel.

Hyperbolische Elementargeometrie.

§ 6. Definition und Grundeigenschaft der hyperbolischen Parallelen.

1. Einführung des Begriffs der Parallelen.
Axiom von J. Bolyai und Hilbert.

In der euklidischen Geometrie gibt es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine Nichtschneidende und diese heißt die Parallele. Nimmt man dagegen an, daß die Winkelsumme im Dreieck kleiner ist als zwei Rechte, so führt eine einfache Stetigkeitsbetrachtung zu einem neuen Parallelenbegriff.

Es sei $PF = p$ das Lot von P auf die Gerade g . Wir verbinden einen auf g beweglichen Punkt Q mit P und denken uns Q auf g ins Unendliche sich bewegend. Dabei wird PQ sich einer Grenzlage nähern, wenn Q nach der einen Seite sich ins Unendliche bewegt, einer in bezug auf PF symmetrischen, wenn Q auf der andern Seite von PF sich ins Unendliche bewegt. Die so entstehenden Halbstrahlen heißen die beiden (hyperbolischen) Parallelen zu g durch P , oder die Verbindungslinien von P mit den beiden Enden von g .

Für die Existenz der beiden Parallelen spricht auch die folgende Betrachtung: Gäbe es durch P nur eine g Nichtschneidende, so wäre die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte; da aber die Winkelsumme kleiner sein soll, so muß es unendlich viele Nichtschneidende geben, nämlich außer der Senkrechten auf PF in P zunächst mindestens eine und die dazu symmetrische in bezug auf PF . Wenn aber zwei von P aus nach derselben Seite von PF gehende Gerade g nicht schneiden, so kann kein im Winkelraum dieser Halbstrahlen gelegener Halbstrahl g

schneiden nach dem Axiom von Pasch (II, 4). Es folgt, daß die g nichtschneidenden Geraden durch P einen einzigen Winkelraum und natürlich seinen Scheitelwinkel lückenlos ausfüllen, und die Schenkel g_1 und g_2 dieses Winkels bilden dann die Grenze zwischen den g Schneidenden und den g Nichtschneidenden, sie heißen die Parallelen.

Diese Überlegung, von der sich die Entdecker der hyperbolischen Geometrie leiten ließen*), ist natürlich kein Beweis, vielmehr kann die Behauptung der Existenz der beiden Parallelen nur durch das folgende Postulat formuliert werden**):

Postulat von Hilbert: Ist g eine beliebige Gerade und P ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch P zwei Halbgerade g_1, g_2 , die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade g nicht schneiden, während jede in dem durch g_1, g_2 gebildeten Winkelraum gelegene, von P ausgehende Halbgerade g schneidet.

Jede Halbgerade, die von P ausgeht und in dem Winkelraum zwischen g_1 und der Fortsetzung von g_2 oder seinem Scheitel liegt, kann dann, wie schon bemerkt, g nicht schneiden.

Zusatz 1: Der Winkel zwischen p und g_1 (oder p und g_2), der durch die Länge (p) des Lotes PF eindeutig bestimmt ist, heißt nach Lobatschefskij***) der zum Lote p gehörige Parallelenwinkel $II(p)$. $II(0)$ ist gleich einem rechten Winkel, mit wachsendem p nimmt dann $II(p)$ ab. Wir werden weiter unten (2) sehen, daß zwei Gerade, die einer dritten parallel nach derselben Seite hin sind, auch zueinander parallel sind. Wir wenden diesen Satz an und tragen auf der in F zu g errichteten Senkrechten ab $FP_1 = p_1$, und $FP_2 = p_2 (> p_1)$ und ziehen durch P_1 und P_2 die rechtsseitigen Parallelen zu g , so kann $II(p_1)$ nicht gleich $II(p_2)$ sein, weil die beiden Par-

*) Vgl. z. B. Lobatschefskij a. a. O., S. 10, S. 165. J. Bolyai, Appendix § 1.

**) Hilbert, Grundlagen, S. 60, Axiom IV. Schur (Grundlagen der Geometrie, S. 100) macht darauf aufmerksam, daß dieses Postulat schon in der ersten Definition von J. Bolyai (Appendix § 1) enthalten ist.

***) Lobatschefskij a. a. O., S. 11 und 167.

allelen sonst eine gemeinsame Senkrechte hätten — es ließe sich leicht zeigen, daß das von der Mitte von $P_1 P_2$ auf die von P_1 ausgehende Gerade gefällte Lot zugleich auf der von P_2 ausgehenden senkrecht stehen müßte. A fortiori kann dann $II(p_2)$ nicht größer als $II(p_1)$ sein.

Der Nachweis, daß zu jedem auch noch so kleinen Winkel $II(p)$ ein zugehöriges Lot existiert, wird später durch Konstruktion erbracht werden (§ 9, 3).

Zusatz 2: Für die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Darstellung wird es späterhin bequem sein, Lot und zugehörigen Parallelenwinkel einfach durch die entsprechenden lateinischen und griechischen Buchstaben zu bezeichnen, also $\alpha = II(a)$, $\lambda = II(l)$ usw.

Strecken, welche Lote komplementärer Parallelwinkel sind, unterscheiden wir durch Akzente, es ist also die Strecke a' definiert durch

$$II(a') = \frac{\pi}{2} - II(a).$$

Ferner ist es oft bequem, zu setzen

$$II(-a) = \pi - II(a).$$

Für das Lot, das zu einem gegebenen Winkel α als Parallelwinkel gehört, führen wir die Bezeichnung $\Delta(\alpha)$ ein, also

$$\begin{aligned} a &= \Delta(\alpha), \quad \text{wenn } II(a) = \alpha, \\ l &= \Delta(\lambda), \quad \text{wenn } II(l) = \lambda \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

2. Grundeigenschaften der hyperbolischen Parallelen.

Den euklidischen Parallelen kommen folgende Eigenschaften zu:

1. Der Parallelismus der Geraden g_1 zur Geraden g beginnt in jedem Punkt von g , d. h.: Ist g_1 zu g parallel und P_1 ein beliebiger Punkt von g_1 , so fällt die Parallele zu g durch P_1 mit g_1 zusammen.

2. Ist g_1 zu g parallel, so ist auch g_1 zu g parallel (Reziprozität).

3. Ist g zu g_1 parallel und g_1 zu g_2 , so ist auch g zu g_2 parallel (Transitivität).

Diese drei Sätze gelten auch in der hyperbolischen Geometrie, natürlich mit der Beschränkung, daß dabei

immer der Parallelismus nach einer und derselben Seite hin (einem Ende von g hin) zu verstehen ist*).

Der Beweis des ersten Satzes ergibt sich leicht aus der Eigenschaft von g_1 , die Grenze zwischen den Schneidenden und Nichtschneidenden zu bilden, wobei noch das Axiom von Pasch benützt wird, und kann übergangen werden.

Die Reziprozität wird so bewiesen (Fig 6).

Es sei PF das Lot von P auf g und g_1 zu g parallel. Ist dann h eine in den Winkelraum FP_1 , g eintretende Gerade ($FP_1 \perp g_1$), so fällen wir das Lot PH auf h , es

wird $PH < PF$. Sodann drehen wir PH in der Lage PH_1 , wodurch h in eine Gerade h_1 übergeht, die g_1 schneiden muß. Hieraus folgt durch Anwendung des Axioms von Pasch leicht, daß g_1 die Gerade h schneidet. g bildet also die Grenze zwischen den g_1 schneidenden und den g_1 nichtschneidenden Halbgeraden durch F , d. h. g ist die rechtsseitige Parallele von g_1 .

Die Transitivität des einseitigen Parallelismus endlich ist sehr leicht zu beweisen, wenn die gemeinsame Parallele zwischen den beiden anderen liegt, der Beweis entspringt fast unmittelbar aus der Definition der Parallelen.

Liegt g_1 außerhalb (Fig. 7), etwa von g aus gerechnet,

jenseits g_2 , so folgt aus den Voraussetzungen ($g \parallel g_1$, $g_1 \parallel g_2$), daß das Lot PF_1 , g_2 in einem Punkt P_2 treffen muß, der wegen des spitzen Winkels F_1P_2E zwischen F_2 und E liegt. Ist dann $P_2F \perp g$, so muß jede von P_2 ausgehende Halbgerade im Winkelraum FP_2E , da sie eine

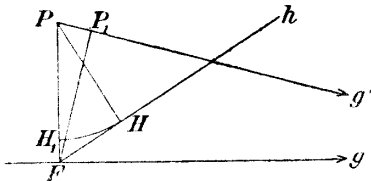


Fig. 6.

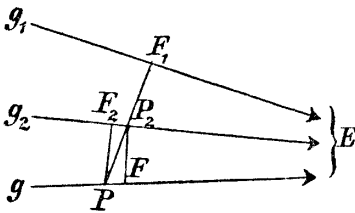


Fig. 7.

* Lobatschewskij a. a. O., S. 169—171. — Die Bezeichnung „Ende“ hat Hilbert eingeführt (Grundlagen, S. 160).

der beiden Parallelen g_1 und g schneiden muß und g_1 unmöglich treffen kann, g schneiden. Hieraus folgt aber, daß g_2 zu g parallel ist.

§ 7. Die Nichtschneidenden. Einteilung der Strahlenbüschel.

1. Das gemeinsame Lot zweier einander nicht schneidenden und nicht parallelen Geraden.

Wir beweisen zunächst den naheliegenden, von Lobatschewskij nur durch Stetigkeitsbetrachtungen erschlossenen Satz:

Zwei Gerade, die einander nicht schneiden

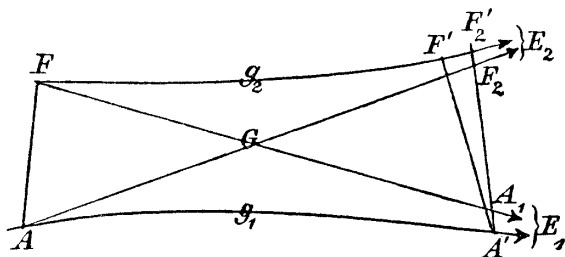


Fig. 8.

und nicht parallel sind, haben eine gemeinsame Senkrechte.

Zu diesem Zweck schicken wir eine Betrachtung voraus, die eine wichtige Eigenschaft derartiger Geraden ergibt: Sind g_1 (AE_1) und g_2 (FE_2) zwei einander nicht schneidende und nicht parallele Halbgeraden, ferner $AF \perp g_2$ und Winkel FAE_1 spitz, so gibt es auf g_1 einen Punkt A' von der Beschaffenheit, daß das von A' auf g_2 gefällte Lot mit AA' einen spitzen Winkel bildet.

Beweis (Fig. 8): Wir denken uns durch A und F die Parallelen AE_2 und FE_1 zu g_2 und g_1 gezogen, ferner sei G ihr Schnittpunkt und $GF_2 = GF$, $GA_1 = GA$. Die Gerade A_1F_2 muß dann sowohl g_2 wie g_1 schneiden (F'_2 und A' seien die Schnittpunkte). Denken wir uns noch F mit F_2 und A mit A_1 verbunden, so ist $\sphericalangle A_1F_2F = \sphericalangle AFE_2$ spitz, nämlich kleiner als $\sphericalangle AFE_2$, also nach

dem Satz vom Außenwinkel a fortiori $\sphericalangle A_1 F'_2 F$ spitz; ebenso ist $\sphericalangle A A_1 F_2 = \sphericalangle A_1 A F < \sphericalangle E_1 A F$ spitz, also a fortiori $\sphericalangle A A' F'_2$ spitz. Daraus, daß die beiden Winkel $\sphericalangle A A' F'_2$ und $\sphericalangle A' F'_2 F$ spitz sind, folgt, daß der Fußpunkt F' des von A' auf g_2 gefällten Lotes zwischen F und F'_2 liegen muß, also $\sphericalangle F' A' A < \sphericalangle F'_2 A' A$ und demnach spitz ist. Für jeden zwischen A' und E_1 gelegenen Punkt folgt dann auch wegen der Winkelsumme im Viereck (< 4 Rechte), daß das von ihm auf g_2 gefällte Lot mit g_1 einen spitzen Winkel einschließt.

Wir werden jetzt weiter zeigen: Trägt man von A und F entsprechend gleiche Strecken auf g_1 (nach E_1 hin) und auf g_2 (nach E_2 hin) ab, so wird die Mittellinie (Kap. I, § 5) das Lot $A'F'$ in einem Punkt S' schneiden, derart, daß $S'F' < S'A'$.

Beweis: Setzen wir $FF' = f$, $AA' = a (> f)$, so gibt es auf g_2 einen Punkt rechts von F' , d. h. zwischen F' und E_2 , der von F den Abstand $(a + f) : 2$ hat, außerdem einen entsprechenden Punkt auf g_1 , zwischen A und A' im Abstand $(a + f) : 2$ von A . Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte trifft $A'F'$ in S' . Durch Vergleich der bei den entstehenden Scheiteldreiecke folgt, daß $S'F' < S'A'$.

Trägt man sodann von A' und F' gleiche Strecken nach links ab und konstruiert auch die Mittellinie, wie oben, so schneidet sie AF in einem Punkt S und es ist $FS < AS$.

Die von der Mitte M von AF ausgehende Mittellinie trifft also $A'F'$ zwischen dem Mittelpunkt M' und F' , die von M' ausgehende Mittellinie trifft AF zwischen M und F .

Daraus folgt, daß die beiden Mittellinien einander schneiden. Ist M_0 dieser Schnittpunkt, so ergibt sich weiter durch Anwendung von Kongruenzsätzen leicht:

Jede Gerade durch M_0 , die g_1 (in P_1) schneidet, schneidet auch g_2 (in P_2), und es ist $M_0 P_1 = M_0 P_2$, auch schließt jede solche Gerade mit g_1 und g_2 gleiche Wechselwinkel ein.

Hieraus folgt im besondern, daß die von M_0 auf g_1 und g_2 gefällten Lote $M_0 L_1$ und $M_0 L_2$ gleich sind und L_1 , M_0 , L_2 auf einer Geraden liegen, und damit ist die Existenz des gemeinsamen Lotes bewiesen.

Sind L_1 und L_2 die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes, Q_1 und Q_2 irgendwelche Punkte auf g_1 und g_2 , ferner $Q_1L_1 = q_1$, $Q_2L_2 = q_2$, so gibt es immer auf g_1 und g_2 zwei Punkte X_1 und X_2 , für welche $L_1X_1 = X_2L_1$ ist, nämlich gleich $(q_1 - q_2) : 2$, die Verbindungslinie X_1X_2 geht durch M_0 und es ist $X_1M_0 = X_2M_0$.

Hieraus folgt die Konstruktion des gemeinsamen Lotes:

Man nehme auf g_1 und g_2 zwei Punkte beliebig an, P_1 und P_2 , trage auf g_1 und g_2 von diesen Punkten aus gleiche Strecken ab und halbiere die Verbindungslinie P_1P_2 und die Verbindungslinie der Endpunkte; die Gerade, welche diese beiden Mittelpunkte verbindet, geht durch den Mittelpunkt M_0 des gemeinsamen Lotes der beiden Geraden. Indem man noch eine zweite solche Gerade konstruiert, erhält man als Schnittpunkt der beiden den Punkt M_0 und hieraus das gemeinsame Lot von g_1 und g_2 *).

2. Einteilung der linearen Strahlenbüschel. Fundamentalaufgaben.

In der euklidischen Geometrie haben wir zwei Arten von linearen Strahlenbüscheln, die Gesamtheit aller Geraden durch einen Punkt und die Parallelbüschel. Die Grundeigenschaften der linearen Strahlenbüschel sind:

Zwei nicht zusammenfallende Gerade bestimmen eindeutig einen Strahlenbüschel.

Die Geraden eines linearen Strahlenbüschels gehen durch Spiegelung an einer beliebigen Geraden des Büschels ineinander über.

Nachdem wir erkannt haben, daß in der hyperbolischen Geometrie zwei Gerade entweder einen reellen Punkt (P) gemein haben oder parallel sind (ein Ende E gemein haben) oder eine gemeinsame Senkrechte besitzen (einen idealen Schnittpunkt J gemein haben, wie wir sagen wollen), erkennen wir, daß es hier drei Arten von Strahlenbüscheln gibt, die unter die gegebene Definition fallen.

1. Die Geraden durch einen (reellen) Punkt P .

*) Eine andere Konstruktion findet sich bei Hilbert, a. a. O. S. 162.

2. Die Geraden durch ein Ende E , d. h. die Geraden, die einer gegebenen Geraden nach einer vorgeschriebenen Richtung hin parallel sind.

3. Die Geraden durch ein und denselben idealen Punkt J , d. h. die Geraden, welche eine gegebene gemeinsame Senkrechte (i) haben.

Die Aufgabe, zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden oder vielmehr die Gerade zu konstruieren, welche zwei gegebenen Strahlbüscheln angehört, zerfällt demnach in folgende Aufgaben: Verbindungslinie $P_1 P_2$, $P_1 E_2$, $P_1 J_2$, $E_1 E_2$, $E_1 J_2$, $J_1 J_2$.

Von diesen Aufgaben sind die erste und dritte (Lot von einem Punkt auf eine Gerade i_2) trivial, die sechste ist in Nr. 1 dieses Paragraphen gelöst, unter der selbstverständlich erforderlichen Bedingung, daß i_1 und i_2 nicht einen reellen Punkt oder ein Ende gemein haben. Ferner folgt die Existenz der Lösung der zweiten Aufgabe aus dem hyperbolischen Parallelenpostulat; um die Konstruktion auszuführen, hat man von P_1 aus das Lot auf die gegebene Gerade mit dem Ende E_2 zu fällen und sodann zu diesem Lot den Parallelwinkel zu finden (§ 6, 1 Zusatz 1).

Wir wollen zeigen, daß die vierte und fünfte Aufgabe dann nur noch die Konstruktion erfordern: Zu einem gegebenen (spitzen) Winkel $II(p)$ als Parallelwinkel das zugehörige Lot zu konstruieren.

Betrachten wir zunächst die Aufgabe, die Gerade $E_1 E_2$ zu konstruieren: Gegeben sind hier zwei Gerade, gesucht die Gerade, welche zur ersten in einem vorgeschriebenen Sinn (E_1) und zur zweiten in einem vorgeschriebenen Sinn (E_2) parallel ist.

Man verbinde einen Punkt P_2 der zweiten Geraden mit E_1 (zweite Aufgabe), halbiere sodann den Winkel $E_1 P_2 E_2$, und nun ist noch die Gerade zu finden, welche auf dieser Winkelhalbierenden senkrecht steht und zu g_1 im vorgeschriebenen Sinn parallel ist (durch E_1 geht). Wegen der Symmetrie geht sie von selbst auch durch E_2 . Mit andern Worten, es bleibt die Aufgabe:

Zu dem gegebenen Parallelwinkel $II(p)$ = $\frac{1}{2} \sphericalangle E_1 P_2 E_2$ das zugehörige Lot zu finden.

Auch die Konstruktion der Geraden $E_1 J_2$ kommt auf diese Aufgabe zurück; man soll diejenige Gerade

finden, welche auf i_2 senkrecht steht und zu g_1 im vorgeschriebenen Sinn parallel ist. Zu diesem Zweck verbindet man einen beliebigen Punkt P_2 von i_2 mit E_1 und hat nun nur noch zu dem von i_2 und $P_2 E_1$ eingeschlossenen spitzen Winkel $II(p)$ das zugehörige Lot p zu finden.

Um also alle sechs Aufgaben lösen zu können, bedürfen wir demnach nur der Lösung der beiden Aufgaben:

$II(p)$ bei gegebenem p zu finden und

p bei gegebenem $II(p)$ zu finden.

§ 8. Schnittpunktsätze für das Dreieck.

Wie schon früher (Kap. I, § 5) erwähnt, gelten eine Reihe von Schnittpunktsätzen auch in der absoluten Geometrie. Wir führen dies weiter dahin aus, daß wir im voraus betonen: Der Schnittpunkt, durch den drei Gerade gehen, kann dabei ein Ende werden, d. h. die drei Geraden sind nach einer Seite parallel, oder er kann ideal werden, d. h. die drei Geraden haben eine gemeinsame Senkrechte. Auch sind die Sätze nicht auf Dreiecke mit reellen Ecken beschränkt, die Ecken können unendlich fern („Enden“) oder ideal sein. Wie in den einzelnen Fällen die Verallgemeinerung sich gestaltet, wird die weitere Darstellung zeigen.

1. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks.

Gegeben ein Dreieck mit reellen Ecken: Gehn bei diesem Dreieck zwei Seitenmittellote durch einen reellen Punkt, so geht auch das Mittellot der dritten Seite durch diesen Punkt.

Der Beweis ist ganz elementar und deckt sich völlig mit dem Beweis desselben Satzes in der euklidischen Geometrie.

Haben dagegen etwa die Mittellote DD' und EE' der Seiten $a = BC$ und $b = CA$ eine gemeinsame Senkrechte $D'E'$, so fälle man auf diese Gerade die Lote AA' , BB' , CC' und man erkennt dann durch Anwendung von Kongruenzsätzen, daß $AA' = CC'$ und $BB' = CC'$ ist, also $AA' = BB'$. Errichtet man jetzt auf der Mitte F' von $A'B'$ die Senkrechte, die AB in F schneiden möge, so sind die beiden Vierecke $FAA'F'$ und $FBB'F'$ sym-

metrisch-kongruent, weil sie in fünf Stücken übereinstimmen, also ist $AF = FB$ und $\sphericalangle AFF' = \sphericalangle BFF'$ gleich einem rechten Winkel, d. h. FF' ist Mittelsenkrechte von AB , w. z. b. w.

Haben endlich zwei Mittellote, etwa das in D , der Mitte von a und das in E , der Mitte von b errichtete ein Ende gemein, so kann nach dem Vorhergehenden das Mittellot der dritten Seite die beiden andern nicht reell schneiden und mit keinem der beiden andern eine gemeinsame Senkrechte haben. Es sind also nur zwei Fälle möglich: Das dritte Mittellot bildet mit den beiden andern ein Parallelen-dreieck (asymptotisches Dreieck), oder alle drei Mittellote haben ein Ende gemein.

Daß aber der erstgenannte Fall auszuschließen ist, lehren die folgenden Überlegungen: Erstens können die drei Seiten eines asymptotischen Dreiecks $g_1 g_2 g_3$ mit den gegenüberliegenden Enden $E_1 E_2 E_3$ niemals von einer Geraden h alle drei reell geschnitten werden. Sind z. B. die Schnittpunkte $P_1(g_1, h)$ und $P_2(g_2, h)$ reell, so kann h die Gerade $P_1 E_1$ und die Gerade $P_2 E_2$ nicht zum zweitenmal treffen, was der Fall sein müßte, wenn h und g_3 einen reellen Schnittpunkt hätten. Zweitens aber wird in jedem Dreieck die größte Seite sicher auch von den Mittelloten der beiden andern Seiten geschnitten. Durch diese beiden Überlegungen zusammen ergibt sich, daß die drei Mittelsenkrechten der Seiten kein Parallelen-dreieck bilden können, also müssen alle drei dasselbe Ende gemein haben, wenn zwei von ihnen parallel sind.

2. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Die Halbierungslinien der drei Innenwinkel eines Dreiecks gehen durch einen Punkt. Dieser Satz wird genau wie in der euklidischen Geometrie bewiesen, er läßt sich auch ohne weiteres durch Anwendung von Kongruenzsätzen für alle Fälle nachweisen, in denen die Ecken in Enden und für einige, in denen sie in ideale Schnittpunkte ausarten, sobald man nur den Begriff: Winkelhalbierende entsprechend verallgemeinert. Unter der Halbierungslinie des von zwei Parallelen gebildeten Nullwinkels ist diejenige Gerade durch dasselbe Ende zu verstehen, zu der die beiden ersten symmetrisch liegen, unter der Halbierungslinie des idealen Winkels zweier

Geraden natürlich die Mittelsenkrechte ihres gemeinsamen Lotes. (Sobald unter den Ecken keine ideal ist, ist der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden immer reell.)

Statt bei allen Einzelfällen des Satzes zu verweilen, genügt es, den Beweis bei einem als Vorbild durchzuführen. Von den drei Ecken A, B, C seien A und B reell, C ein Ende: Die Halbierungslinien der Winkel α und β mögen einander in einem reellen Punkt M treffen, und dieser hat von BC und AC denselben senkrechten Abstand wie von AB , die Halbierungslinie des Winkels der beiden von M auf BC und AC gefällten Lote ist dann zu BC und AC parallel und diese beiden Geraden liegen zu ihr symmetrisch. Ebenso folgen die anderen Fälle.

Die Halbierungslinien eines Innenwinkels und zweier Außenwinkel eines Dreiecks mit den reellen Ecken A, B, C gehen durch denselben reellen, unendlich fernen oder idealen Schnittpunkt.

Schneiden zwei dieser Halbierungslinien einander in einem reellen Punkt, so muß die dritte ebenfalls hindurchgehen — dies ist genau wie in der euklidischen Geometrie nachweisbar. Haben dagegen z. B. die Halbierungslinien der Außenwinkel bei A und B eine gemeinsame Senkrechte, welche diese Geraden in A' und B' trifft, so haben AB und $A'B'$ ein gemeinsames Lot FF' , dessen Fußpunkte F und F' zwischen A und B , bzw. zwischen A' und B' liegen. Durch Spiegelung an AA' und BB' sieht man, daß die Gerade $A'B'$ mit der Verlängerung von CA ein gemeinsames Lot $E'E = F'F$ und mit der Verlängerung von CB ein gemeinsames Lot $D'D = F'F$ besitzt. Die Figur $D'DCEE'$ hat eine Symmetriegerade und zeigt, daß die Halbierungslinie des Winkels γ zugleich Mittelsenkrechte von $D'E'$ ist, d. h. eben auf der gemeinsamen Senkrechten der Halbierungslinien der beiden Außenwinkel ebenfalls senkrecht steht.

Die einem Innenwinkel (α) gegenüberliegende Seite wird von der Halbierungslinie von α und natürlich von den Halbierungslinien der beiden Außenwinkel bei B und C getroffen. Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes folgt also unter Anwendung der gleichen indirekten Betrachtung, wie in Nr. 1 dieses Paragraphen, der noch fehlende Spezialfall:

Haben von den drei Halbierungslinien (eines Innenwinkels und zweier Außenwinkel) zwei ein gemeinsames Ende, so enthält auch die dritte dieses Ende.

3. Der Höhenschnittpunkt.

In der euklidischen Geometrie gibt es zwei einfache Beweise des Satzes, daß die drei Höhen des Dreiecks durch einen Punkt gehen. Entweder kann man zeigen, daß die Höhen h_1 , h_2 , h_3 des Dreiecks ABC zugleich Mittelsenkrechte der Seiten eines Dreiecks sind, dessen Seiten a' , b' , c' bzw. in A , B und C auf h_1 , h_2 und h_3 senkrecht stehen, oder man weist nach, daß die Höhen die Winkel (drei Innenwinkel oder einen Innen- und zwei Außenwinkel) des Dreiecks der

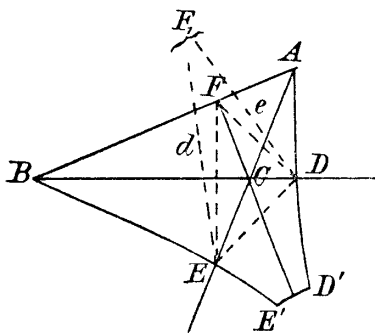


Fig. 9.

Höhenfußpunkte halbieren. Die zweite Betrachtung ist auf den Fall der hyperbolischen Geometrie leichter zu übertragen und zu erweitern als die erste, und sie soll deswegen als Vorbild dienen*).

Mit Übergang einfacher Fälle wollen wir gerade einen verwickelten vollständig behandeln (Fig. 9). Im Dreieck ABC , das bei C einen stumpfen Winkel hat, mögen die

Höhen $h_1(AD)$ und $h_2(BD)$ ein gemeinsames Lot besitzen ($E'D'$). Es ist zu zeigen, daß auch die dritte Höhe auf diesem gemeinsamen Lot senkrecht steht.

Wir spiegeln ED an a und bezeichnen das Spiegelbild mit e , ebenso an b und bezeichnen das Spiegelbild mit d . Die Geraden e und d haben von der Geraden $E'D'$ den gleichen kürzesten Abstand, gleich dem gemeinsamen Lot von ED und $E'D'$ und liegen symmetrisch zu dem von C auf $E'D'$ gefällten Lot CF' .

*) Schur (Grundlagen der Geometrie, S. 91) hebt hervor, „daß die vom Parallelenaxiom unabhängige Begründung des Satzes vom Höhenschnittpunkt aus demjenigen vom Schnittpunkte der Winkelhalbierenden keine Rücksicht darauf nimmt, daß H ein unechtiger Punkt sein kann“. Diese Lücke läßt sich aber ausfüllen.

B hat von d und ED , e und ED denselben Abstand, also haben e und d denselben Abstand von B . Ebenso läßt sich zeigen, daß A von e und d gleichen Abstand hat. Die Gerade CF' schneidet AB zwischen A und B , und hieraus folgt, daß B von d und e , A von d und e nur dann gleiche Abstände haben können, wenn e und d , die ja zu CF' symmetrisch liegen, einander schneiden. Ist F_1 dieser Schnittpunkt, so liegen A und B als Mittelpunkte zweier dem Dreieck EDF_1 anbeschriebenen Kreise mit F_1 auf einer Geraden, und CF_1 muß auf AB senkrecht stehen; da aber von C nur ein Lot auf AB gefällt werden kann, so fällt F_1 mit F zusammen und F' ist der Schnittpunkt der Höhe h_3 mit $E'D'$, d. h. die dritte Höhe steht ebenfalls auf $D'E'$ senkrecht, w. z. b. w.

Die Verallgemeinerungen für den Fall, daß die Ecken des Dreiecks ABC ausarten, sind leicht durchführbar.

§ 9. Anwendungen auf Konstruktionen.

Die gefundenen Schnittpunktsätze können dazu dienen, eine Reihe elementarer Aufgaben zu lösen.

1. Korrespondierende Punkte auf Parallelen*).

Es liegt die Aufgabe vor: Auf der Parallelen g_1 (zu g) den Punkt A_1 zu finden, welcher dem Punkt A korrespondiert, d. h. es soll A_1 so bestimmt werden, daß AA_1 mit g und g_1 nach der Seite des Parallelismus hin gleiche Winkel einschließt. Zu diesem Zweck braucht man die Symmetrielinie der beiden Parallelen, von der leicht ein Punkt gefunden werden kann: Man verbinde einen Punkt P von g mit irgendeinem Punkt P_1 auf g_1 und halbiere die Winkel, welche PP_1 mit den beiden Geraden einschließt; die Halbierungslinien schneiden einander in einem Punkt der gesuchten Symmetrielinie. In derselben Weise findet man einen zweiten Punkt von ihr.

2. Die relative Parallelenkonstruktion**).

Gegeben sind zwei Gerade g, g_1 mit gemeinsamem Ende E . Einen gegebenen Punkt P mit E zu verbinden.

*) Die Bezeichnung rührt von Gauß her (Werke VIII, Leipzig 1900, S. 207).

**) Gérard, Sur la géométrie non-euclidienne (Thèse de doctorat, Paris 1892).

d. h. durch P die Parallele zu g und g_1 nach der Seite des gemeinsamen Parallelismus zu ziehen. Man fälle von P aus die Lote h und h_1 auf g und g_1 und bezeichne die Schnittpunkte von h mit g_1 und h_1 mit g durch Q und Q_1 . Durch geeignete Bewegung oder Spiegelung von P an g oder g_1 kann immer erreicht werden, daß jedenfalls der eine dieser beiden Schnittpunkte reell ist. In dem Dreieck EQQ_1 kann man sodann die dritte Höhe konstruieren, sie muß durch P gehen und auf QQ_1 senkrecht stehen.

Sind also Q und Q_1 gefunden, wobei vielleicht einer dieser Punkte ideal ist und dann die in § 7, 1 gegebene Konstruktion angewendet werden muß, so ist die dritte Höhe, die gesuchte Parallele, die Senkrechte zu QQ_1 durch P .

Wir sehen also: Kennt man zu einer einzigen Strecke als Lot den zugehörigen Parallelwinkel, so kann der Parallelwinkel zu jedem Lot konstruiert werden.

Im Anschluß hieran kann die Aufgabe gelöst werden: Auf der Parallelen g_1 zu g mit dem gemeinsamen Ende E denjenigen Punkt P zu finden, für den das Lot PF auf g eine vorgeschriebene Größe hat.

Man errichte in irgendeinem Punkt F_1 von g eine Senkrechte von der Länge p und ziehe durch ihren Endpunkt P_1 diejenige Parallele g_2 zu g , welche mit g das von E verschiedene Ende gemein hat; dann konstruiere man die auf g senkrecht stehende Symmetrielinie (Winkelhalbierende) von g und g_2 , und spiegele P_1 daran. Auf diese Weise wird der gesuchte Punkt P erhalten.

3. Konstruktion des Lotes p zum Parallelwinkel $II(p)$.

Wir wollen zwei Lösungen der Aufgabe geben. Indem wir den Höhenschnittpunkt benützen, gelangen wir zu der ersten Lösung: In A tragen wir an g den Winkel $II(p)$ an und ziehen durch B auf g die Parallele zum Halbstrahl, der den zweiten Schenkel des Winkels bildet. In dem entstandenen Dreieck ABE fällen wir die Höhen von A und B aus, und von dem Höhenschnittpunkt, der reell oder ideal sein kann, fällen wir das Lot auf AB . Der Abstand der Punkte A und D , wobei D

der Fußpunkt des zuletzt gefällten Lotes ist, ist dann die gesuchte Strecke*).

J. Bolyai**) hat bei seiner klassischen Konstruktion von p aus $II(p)$ die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks benutzt und verfährt in folgender Weise (Fig. 10). Um auf dem einen Schenkel (c) des Winkels λ das Lot zu errichten, das zum andern Schenkel parallel ist, wird eine Strecke AE angenommen, deren zugehöriger Parallelwinkel (μ) größer als α ist. Dann trägt man an A diesen Winkel μ an, und macht $AC = 2AE$. Die Parallele CA' zu AA' schneidet dann c etwa in C_1 . Ferner wird CC' gezogen ($\sphericalangle A'CC' = \lambda$). CC' muß c schneiden, denn die Parallele C_1C' zu CC' schließt mit C_1C einen Winkel größer als $\sphericalangle AC_1A'$ ein, weil $C_1C < AC_1$, also muß auch CC' die Gerade c schneiden, etwa in D_1 . Endlich wird B aus $BD_1 = CD_1$ konstruiert und in B an c der Winkel λ angetragen. Der zweite Schenkel dieses Winkels, die Geraden $A'A$ und $A'C$ bilden dann mit den Seiten des Dreiecks ABC paarweise gleiche Winkel (λ, μ und $\lambda + \sphericalangle D_1CB = \lambda + D_1BC$), so daß sie die Verbindungslinien der Ecken

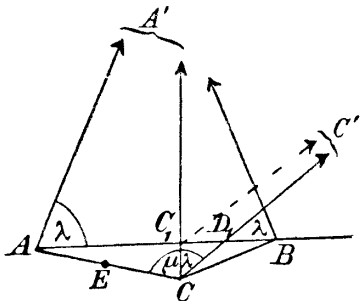


Fig. 10.

des Dreiecks ABC mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten darstellen. Zwei dieser Geraden, AA' und CA' , sind parallel, also geht auch die dritte Linie (von B aus) durch A' , ist zu den beiden andern parallel und daher ist die gesuchte Strecke, das zum Parallelwinkel λ gehörende Lot, gleich der Hälfte von AB .

4. Die absolute Parallelenkonstruktion.

Verwendet man außer den Schnittpunktsätzen noch den Satz über den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Verbindungslinien kongruenter Punktreihen (Kap. I, § 5), so gelangt man zu einer Eigenschaft der Parallelen,

*) G é r a r d a. a. O. S. 73.

**) J. Bolyai de Bolya, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens (1831), § 35.

die auf dem einfachsten Wege die von J. Bolyai herführende Parallelenkonstruktion ergibt*). (Fig. 11.)

Gegeben eine Halbgerade FE_1 , ferner $AF \perp FE_1$. Durch A denken wir uns die Parallele AE_1 zu FE_1 gezogen und auf FE_1 und AE_1 gleiche Strecken abgetragen ($AS = FD$). Der Ort der Mittelpunkte M der Verbindungs­linien SD ist dann eine Gerade, die durch die Mitte M_0 von AF und das Ende E_1 geht. Wir ziehen als Hilfs­linien noch die Parallelen FE'_1 und M_0E' (Verlängerung von E_1M_0 über M_0 hinaus), endlich sei $F'S' = AS (= FD)$. Dann steht die Mittelsenkrechte von SS' , die zugleich Mittelsenkrechte von AF ist, auf $E_1E'_1$ senkrecht, ebenso die Mittelsenkrechte von $S'D$ als Halbierungslinie des

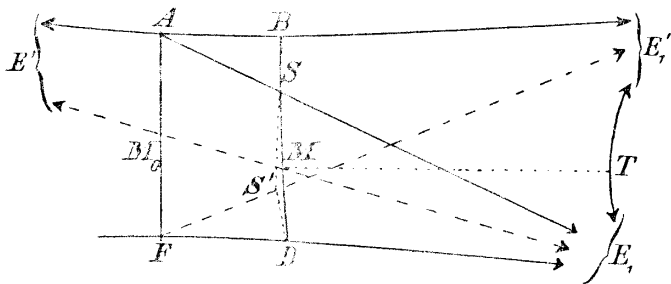


Fig. 11.

Winkels $E_1FE'_1$. Daher muß die Mittelsenkrechte von SD , also die auf SD in M errichtete Senkrechte MT nach § 8, 1 ebenfalls auf $E_1E'_1$ senkrecht stehen. Zieht man noch ME'_1 , so halbiert MT den Winkel $E_1ME'_1$, denn die beiden Parallelen zu $E_1E'_1$ durch M müssen ja mit dem Lot MT gleiche Winkel einschließen, MS halbiert also den Nebenwinkel $E'ME'_1$, d. h. die Verlängerung von MS schneidet AE'_1 senkrecht (in B).

Wir wollen das Ergebnis in anderer Form aussprechen, in Gestalt eines Satzes, aus dem die Bolyaische Parallelen­konstruktion sofort abzulesen ist:

Fällt man von A das Lot AF auf eine ge­gebene Gerade $g(AE_1)$, errichtet in A die Senk-

*) Berichte der K. S. G. d. W. 1910, S. 35—41.

rechte auf FA und fällt von einem beliebigen Punkt D der Geraden g aus das Lot DB auf jene Senkrechte, so schneidet dieses Lot von der Parallelen AE_1 eine Strecke $AS = FD$ ab.

Um also die Parallele zu finden, hat man nur mit FD als Radius von A als Mittelpunkt einen Kreis zu konstruieren und diesen mit DB zu schneiden, der Schnittpunkt S gibt mit A verbunden die gesuchte Parallele*).

§ 10. Die komplementären Figuren und ihre Anwendung.

Den Beweis für die Bolyaische absolute Parallelenkonstruktion kann man auch auf einem zweiten Weg erbringen und die dabei gewonnenen Sätze auch für andre Konstruktionen verwenden**).

1. Ableitung der Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck und am Spitzeck.

Zwischen den fünf Bestimmungsstücken a, b, c (Katheten und Hypotenuse) und λ, μ (gegenüberliegende Winkel; die zu ihnen als Parallelwinkel gehörigen Lote werden nach S. 23 mit l, m bezeichnet) bestehen gewisse Beziehungen; ebenso zwischen den fünf Stücken des Vierecks mit drei rechten Winkeln und einem spitzen Winkel, das wir kurzweg als Spitzeck bezeichnen wollen. Wir beginnen mit dem rechtwinkligen Dreieck. Verlängert man zunächst die Hypotenuse über A hinaus um die Strecke l , errichtet die (zur Verlängerung von b über a

*) Das Axiom „Enthält eine Gerade (BD) einen Punkt (B) innerhalb und einen Punkt außerhalb eines Kreises, so hat sie mit dem Kreis zwei Punkte gemein“ (vgl. Enriques-Thieme, S. 141) wird hier nicht gebraucht, da die Existenz des Punktes S als eines Punktes der Parallelen aus dem Hilbertschen Parallelenpostulat folgt.

**) Die von Lobatschewskij gefundenen Beziehungen zwischen dem rechtwinkligen Dreieck und dem zugeordneten Viereck mit drei rechten Winkeln (Spitzeck) sind zum erstenmal allein mit den Hilfsmitteln der ebenen hyperbolischen Geometrie entwickelt, Math. Annalen 61 (1905), S. 185ff. Die Arbeit knüpft an Betrachtungen von Lobatschewskij (a. a. O. S. 16) an. Über Nachweise mit Hilfe der Geometrie des hyperbolischen Raumes (von Engel und Bonola) vgl. Bonola S. 235–237.

hinaus) parallele Senkrechte und zieht noch durch B die Parallele, so folgt (vgl. Fig. 12)

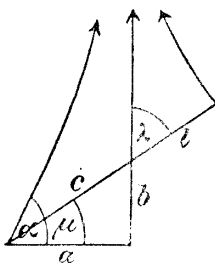


Fig. 12.

$$(1) \quad \mu + II(c + l) = II(a) = \alpha.$$

Ebenso ist

$$(1') \quad \lambda + II(c + m) = II(b) = \beta.$$

Zieht man durch A die Parallele zur Verlängerung von a über c und errichtet auf c die zu diesen beiden Geraden parallele Senkrechte, so folgt (vgl. Fig. 13)

$$(2) \quad \lambda + \beta = II(c - m).$$

Diese Formel ist auf jeden Fall richtig, gemäß der in § 6, 1 getroffenen Vereinbarung; wäre nämlich $m > c$, so hätte man

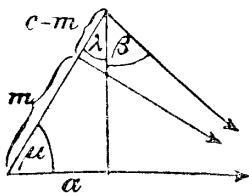


Fig. 13.

$$\pi - \lambda - \beta = II(m - c),$$

also nach der a. a. O. eingeführten Bezeichnung

$$\lambda + \beta = II(c - m).$$

Hierzu kommt entsprechend

$$(2') \quad \mu + \alpha = II(c - l).$$

Verlängern wir endlich a über B , b über C hinaus und errichten auf diesen Geraden die zur Verlängerung von c über B hinaus parallelen Senkrechten, so folgt (vgl. Fig. 14)

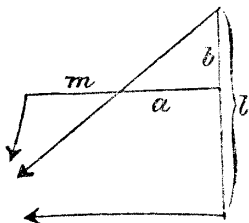


Fig. 14.

$$(3) \quad II(l - b) + II(m + a) = \frac{\pi}{2}$$

und entsprechend

$$(3') \quad II(m - a) + II(l + b) = \frac{\pi}{2}.$$

Im Spitzreck wollen wir jetzt von vornherein die Seiten mit l_1 , a_1 , m_1 und c_1 bezeichnen, den Winkel mit β_1 , was für die weitere Entwicklung zweckmäßig ist. Verlängern wir c_1 um die Strecke m_1 und errichten die Senkrechte, die wegen

$$II(m_1) + II(m_1) = \frac{\pi}{2}$$

zur Verlängerung von a_1 parallel ist, so ergibt sich (vgl. Fig. 15)

$$(I) \quad \lambda_1 + II(c_1 + m_1) = \beta_1$$

und entsprechend

$$(I') \quad \gamma_1 + II(l_1 + a'_1) = \beta_1.$$

Tragen wir m_1 auf c_1 nach der andern Seite hin ab, so folgt (vgl. Fig. 16)

$$(II) \quad \lambda_1 + \beta_1 = II(c_1 - m_1)$$

und entsprechend

$$(II') \quad \gamma_1 + \beta_1 = II(l_1 - a'_1).$$

Tragen wir m_1 auf a_1 ab, ebenso b_1 auf der Verlängerung von l_1 und errichten die Senkrechten, so folgt (vgl. Fig. 17)

$$(III) \quad II(l_1 + b_1) + II(m_1 - a_1) = \frac{\pi}{2}$$

und ebenso

$$(III') \quad II(c_1 + b_1) + II(a'_1 - m'_1) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Zuordnung von rechtwinkligem Dreieck und Spitzeck; Parallelenkonstruktion.

Das rechtwinklige Dreieck ist durch c und μ vollkommen bestimmt, das Spitzeck durch c_1 und m'_1 . Wir nehmen jetzt $c_1 = c$ und

$$II(m'_1) = \frac{\pi}{2} - \mu,$$

so daß $m_1 = m$ wird.

Dann folgt aus (1) und (2)

$$\lambda + \beta = II(c - m),$$

$$\lambda - \beta = II(c + m),$$

d. i. $2\lambda = II(c - m) - II(c + m),$

$$2\beta = II(c - m) + II(c + m).$$

Aus (I) und (II) aber folgt

$$\lambda_1 + \beta_1 = II(c_1 - m_1) = II(c - m),$$

$$\lambda_1 - \beta_1 = II(c_1 + m_1) = II(c + m),$$

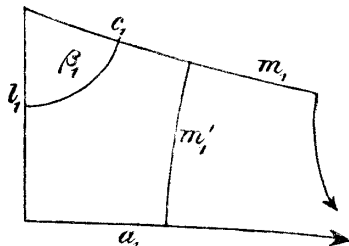


Fig. 15.

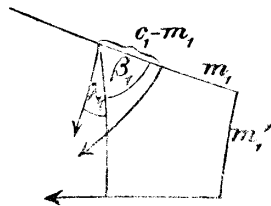


Fig. 16.

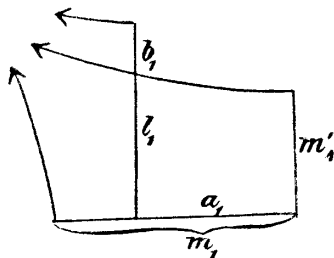


Fig. 17.

und deswegen ist $\lambda_1 = \lambda$, $\beta_1 = \beta$. (3) und (III) endlich ergeben

$$H(m - a) = \frac{\pi}{2} - H(l - b),$$

$$H(m_1 - a_1) = H(m - a_1) = \frac{\pi}{2} - H(l_1 - b_1) = \frac{\pi}{2} - H(l - b),$$

also $m - a = m - a_1$, d. h. $a_1 = a$.

Man erkennt hieraus: Sind a, b, c (λ, μ) die fünf Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks, dann gibt es ein Spitzeck mit den Seiten c, m', a, l , in dem die Seiten c und l den spitzen Winkel β einschließen.

Dieses Spitzeck möge als das dem rechtwinkligen Dreieck zugeordnete komplementäre Spitzeck bezeichnet werden.

Zusatz: Hieraus ergibt sich sofort wieder der grundlegende Satz für die Parallelenkonstruktion: Wir können das Dreieck so in das Spitzeck legen, daß die Kathete a auf die Seite a des Spitzecks fällt und die Kathete b auf die Seite l . Die Hypotenuse c des Dreiecks schließt dann mit m' den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \mu$ ein, ist also zur Seite c des Vierecks parallel, w. z. b. w.

3. Die geschlossene Kette zugeordneter rechtwinkliger Dreiecke*).

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck (a, b, c, λ, μ) gehört ein Spitzeck mit dem Winkel β und den Seiten, vom spitzen Winkel aus gezählt: c, m', a und l . Vertauscht man im Spitzeck c mit l und gleichzeitig m' mit a , so gibt es ein zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck, dessen Bestimmungsstücke sind

$$a_1 = m', \quad b_1 = b, \quad c_1 = l, \quad \lambda_1 = \gamma; \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

aus diesem rechtwinkligen Dreieck kann man ein zweites ableiten, indem man die Kathete m' festhält und die übrigen Stücke durch entsprechenden Übergang vertauscht.

*) Den Zyklus zugeordneter rechter Dreiecke hat Engel (Lobatschewskij, S. 346) vollständig aufgestellt, es sei wegen der Analogie zur Neperischen Regel gestattet, ihn die Neper-Engelsche Regel zu nennen.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird eine geschlossene sechsgliedrige Kette rechtwinkliger Dreiecke erhalten, bestehend aus drei Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke, und der Zusammenhang zwischen ihnen hat eine große Ähnlichkeit mit der Neperschen Regel für rechtwinklige sphärische Dreiecke: Sind $a, b, c; \lambda = \Pi(l), \mu = \Pi(m)$ die Katheten, die Hypotenuse und die den Katheten a und b gegenüberliegenden Winkel, so schreibe man an die Seiten eines Fünfecks die Buchstaben a', l, c, m, b' in zyklischer Folge. Man erhält jedes der zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke, wenn man an die Seiten den Zyklus $a'_i, l_i, c_i, m_i, b'_i$ im gleichen oder entgegengesetzten Sinn schreibt und die mit Indizes versehenen Stücke gleich denen ohne Indizes annimmt, die dieselben Fünfeckseiten bezeichnen.

In Fig. 18 ist das Beispiel

$$a_1 = m' \quad (\text{folgt aus } a'_1 = m),$$

$$b_1 = b, \quad c_1 = l; \quad \lambda_1 = \gamma,$$

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (m_1 = a')$$

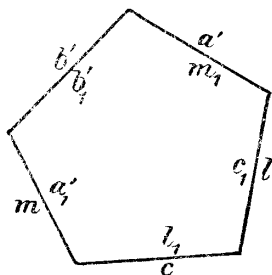


Fig. 18.

angegeben.

4. Anwendung auf Konstruktionen.

Wir können jetzt mit Leichtigkeit z. B. die Aufgabe lösen, ein rechtwinkliges Dreieck aus den beiden Winkeln λ und μ zu konstruieren, deren Summe natürlich kleiner als ein rechter Winkel sein muß. Zu $a, b, c; \lambda, \mu$ gibt es ja ein zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck

$$a_1 = m', \quad b_1 = b, \quad c_1 = l; \quad \lambda_1 = \gamma, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

von dem die beiden Stücke a_1 und c_1 ($c_1 > a_1$ wegen $\lambda < \frac{\pi}{2} - \mu$, also $\Pi(c_1) > \Pi(a_1)$) leicht konstruiert werden können, also auch die übrigen und damit alle fehlenden Stücke des ersten Dreiecks, von denen schon $b = b_1$ genügen würde.

Um ein Dreieck aus den drei Winkeln zu konstruieren*) (Fig. 19), deren Summe kleiner als zwei Rechte sein muß, und von denen wir uns den größten durch die notwendig innerhalb des Dreiecks liegende Höhe (b) in zwei unbekannte Teile λ und λ_1 zerspalten denken in zwei rechtwinklige Dreiecke (a, b, c, λ, μ und $a_1, b, c_1, \lambda_1, \mu_1$), während wir die beiden übrigbleibenden mit μ und μ_1 bezeichnen, denken wir uns für beide Teildreiecke die zugeordneten ($c', m', a', \lambda, \frac{\pi}{2} - \beta$ und

$c'_1, m'_1, a'_1, \lambda_1, \frac{\pi}{2} - \beta_1$) konstruiert, die mit den ursprünglichen die Winkel λ und λ_1 gemein haben (siehe Figur) und

legen diese Dreiecke mit den Hypotenusen aneinander. Die Figur POP_1 kann konstruiert werden, und es müssen die Senkrechten, die auf OP in P , auf OP_1 in P_1 errichtet sind, einander schneiden (S), sonst wäre

$$\lambda + \lambda_1 \geq \Pi(m') + \Pi(m'_1),$$

also

$$(\lambda + \lambda_1) + \mu + \mu_1 \geq \pi,$$

gegen die Voraussetzung. Halbiert man den Winkel dieser beiden Senkrechten und fällt auf die Winkelhalbierende von O aus das Lot, so schneidet es die beiden Senkrechten

unter gleichen Winkeln. Diese Eigenschaft kommt nur der gesuchten, die Hypotenusen der beiden zugeordneten Dreiecke enthaltenden Geraden zu, welche ja die Senkrechten beide unter dem gleichen Winkel $\frac{\pi}{2} - \beta$ treffen

muß. Aus den hiermit gefundenen, den rechtwinkligen Teildreiecken des gesuchten Dreiecks zugeordneten Dreiecken können jetzt alle Stücke gefunden werden.

*) Berichte der K. S. G. d. W. Leipzig 1901, S. 477—491. In dieser Note ist die Konstruktion auch für alle Ausartungen des Dreiecks durchgeführt.

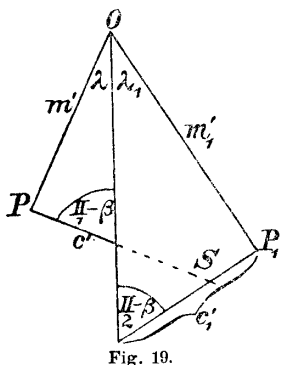


Fig. 19.

§ 11. Die Zyklen und die Kreisgeometrie.

Wir können die Beziehung zwischen rechtwinkligem Dreieck und Spitzeck auch benutzen, um eine Reihe von Eigenschaften der Kreise der hyperbolischen Geometrie nachzuweisen, zuvor wollen wir den Begriff „Kreis“ entsprechend verallgemeinern.

1. Die Zyklen.

Ein Kreis kann in der euklidischen Geometrie so definiert werden: Auf einem Strahl eines linearen Büschels ist ein Punkt (P) gegeben. Man denke sich diesen Strahl und mit ihm P an allen Strahlen des Büschels gespiegelt; der Ort dieses Spiegelbildes oder korrespondierenden Punktes ist dann der Kreis. Aus dieser Definition folgt, daß jeder Kreis vollkommen bestimmt ist durch das lineare Büschel, das wir mit dem Namen „Achsenbüschel“ bezeichnen wollen und einen Punkt: Ist nämlich s eine Achse, P der Ausgangspunkt, P_1 der durch Spiegelung von P auf einer andern Achse s_1 hervorgehende Punkt, ebenso P_2 auf s_2 , so ergibt die Spiegelung von P_1 an der Halbierungslinie des Winkels, den die Achsen s_1 und s_2 bilden, auf s_2 denselben Punkt P_2 wie die Konstruktion von s , P aus; denn die Mittelsenkrechten von PP_1 , PP_2 und P_1P_2 gehen durch einen Punkt.

Hierauf folgt unmittelbar, wie der Begriff des Kreises in der hyperbolischen Geometrie zu verallgemeinern ist: Zwei Punkte PP_1 auf zwei Strahlen ss_1 eines linearen Büschels heißen korrespondierend, wenn sie durch Spiegelung an dem Strahl des Büschels auseinander hervorgehen, zu welcher s und s_1 symmetrisch liegen.

Entsprechend den drei Arten von linearen Büscheln (Büschel von Geraden durch einen reellen Punkt, Parallelbüschel oder Strahlen mit einem gemeinsamen Ende, Strahlen durch einen idealen Punkt oder Gerade, die alle auf ein und derselben Geraden senkrecht stehen) bekommen wir jetzt drei Arten von Zyklen:

1. die eigentlichen Kreise (Achsenbüschel mit reellem Schnittpunkt);
2. die Grenzkreise (das Achsenbüschel besteht aus Geraden, die ein Ende gemein haben);

3. die Abstandslinie (die Achsen haben eine gemeinsame Senkrechte, die wir als Nulllinie bezeichnen)*).

Aus dem Satz, daß die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks einem linearen Büschel angehören (§ 8, 1), folgt genau wie in der euklidischen Geometrie:

Jeder Zykl ist durch zwei Achsen und einem Punkt der Peripherie eindeutig bestimmt.

Ferner bildet jede Sehne eines Zyklus gleiche Winkel mit den Achsen durch ihre Endpunkte.

Der Namen „Abstandslinie“ ist dadurch gerechtfertigt, daß alle Punkte dieses Zyklus den gleichen Abstand von der Nulllinie, der gemeinsamen Senkrechten aller Achsen haben: ist PF der Abstand des Punktes P von der Nulllinie, P_1F_1 der des Punktes P_1 von der Nulllinie, so geht ja nach Definition P_1F_1 aus PF hervor, wenn man PF an der Mittelsenkrechten des Stückes FF_1 der Nulllinie spiegelt.

Zusatz: Jeder Grenzkreisbogen kann in n gleiche Teile zerlegt werden, und zwar durch eine sehr einfache Konstruktion. Sind AB zwei Punkte des gegebenen Grenzkreises auf den Achsen a und b , so sind die Teilungspunkte $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ zu definieren als die Schnittpunkte des Grenzkreises mit den zwischen a und b gelegenen Achsen $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$, wobei jede zwischenliegende Achse durch Spiegelung der vorletzten an der vorausgehenden entsteht, es ist a_2 das Spiegelbild von a an a_1 , a_3 das Spiegelbild von a_1 an a_2 usw., endlich b soll das Spiegelbild von a_{n-2} an a_{n-1} sein. Es handelt sich also darum, aus a und b die dazwischen liegenden Achsen $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ zu finden.

Zu diesem Zweck nehme man eine beliebige Gerade a' und auf ihr den Punkt A' an, dazu eine beliebige Parallele a'_1 mit demselben Ende E' und auf ihr (§ 9, 1) den zu A' korrespondierenden Punkt A'_1 , dann trage man an a'_1 den Winkel $E'A'A'_1 = E'A'_1A'$ an und mache den zweiten Schenkel gleich $A'A'_1$: Dieses Verfahren ist n mal fortzusetzen und ergibt dann ein reguläres Sehnenpolygon-

*) In gleicher Bedeutung wie Grenzkreis werden auch die Worte Grenzlinie, Orizykl und „linea L.“ (J. Bolyai) gebraucht, die Abstandslinie wird in der Literatur auch als Überkreis, Hyperzykl bezeichnet.

stück $A'A_1 \dots A_{n-1}B'$ des Grenzkreises, von dem $A'E'$ eine Achse, A' ein Punkt ist.

Auf der letzten Achse b' bestimme man endlich denjenigen Punkt B_1 , dessen Abstand B_1F_1 von a' gleich dem von B auf a gefällten Lot BF ist.

Sodann bringen wir a' mit a und b' mit b zur Deckung, wobei B' und A' in korrespondierende Punkte von b und a übergehen. Mit A' und B' werden zugleich $A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}$ und die Achsen $a'_1, a'_n \dots a'_{n-1}$ auf die erste Figur gelegt, und man braucht nun nur auf allen diesen Halbgeraden von $A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}$ nach dem gemeinsamen Ende E hin dieselbe Strecke $A'A = B'B$ abzutragen, um die gesuchten Teilungspunkte $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ des Grenzkreisbogens AB zu erhalten.

Während die n -Teilung des Grenzkreisbogens leicht ausführbar ist, kann weder der Kreisbogen, noch ein Bogen der Abstandslinie, noch eine gerade Strecke für beliebiges ganzzahliges n in n gleiche Teile zerlegt werden.

2. Die Transformation der Ebene durch komplementäre Ordinaten*).

Eine weitgehende Einsicht in die Theorie der Kreissysteme und Kreisbüschel können wir in der hyperbolischen Geometrie erlangen, wenn wir die Zuordnung von rechtwinkligem Dreieck und Spitzzeck anwenden, um die folgende einfache Transformation der Halbebene zu untersuchen (vgl. Fig. 20).

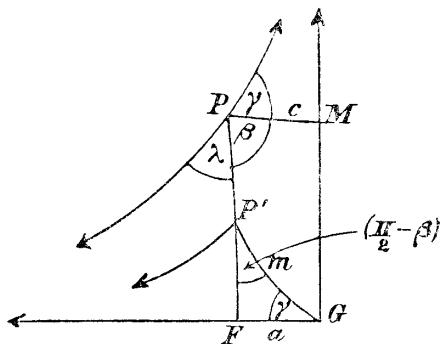


Fig. 20.

*) Die hier entwickelte Theorie der Kreisverwandtschaften ist analytisch behandelt von F. Hausdorff (Berichte der K. S. G. d. W. 1899, S. 161—214), synthetisch vom Verfasser in denselben Berichte (1902, S. 244—260), doch mit Heranziehung der hyperbolischen Raumgeometrie. Man vergleiche auch die Habilitationsschrift von Ludwig: Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie, Karlsruhe 1904.

Gegeben ist eine feste Achse (Abszissenachse); jedem Punkt P der Halbebene auf der einen Seite der Achse wird ein Punkt P' auf dem durch P gehenden Lot zur Achse zugeordnet und es sollen die Abstände $PX = y$ und $P'X = y'$ komplementäre Strecken sein, d. h. y und y' stehen in der Beziehung

$$II(y) + II(y') = \frac{1}{2}\pi.$$

Die Untersuchung dieser Abbildung wird dadurch erleichtert, daß sie involutorischen Charakter besitzt, d. h. wenn P' das Bild von P ist, so ist auch P das Bild von P' .

Die Eigenschaften der Abbildung ergeben sich, wie schon bemerkt, leicht aus den Entwicklungen in § 10, 2. — Behalten wir die dort angegebene Bezeichnung bei und beachten, daß dort dem Spitzeck (β, c, m', a, l) das rechtwinklige Dreieck $(a, b, c; \lambda, \mu)$ zugeordnet wurde, diesem aber auf Grund der Dreieckszuordnung (§ 10, 3) ein zweites rechtwinkliges Dreieck $(a, l', m; \frac{\pi}{2} - \beta, \gamma)$ zugeordnet werden kann, so können wir das zweite Dreieck in das erste Spitzeck legen und erhalten die in Fig. 20 angegebene Konstruktion.

Aus dieser Figur sind die Eigenschaften unserer soeben erläuterten Komplementärtransformation sofort abzulesen, wenn wir die Grundlinie a als ein Stück der Achse, die Punkte P und P' als zugeordnet bei der Transformation betrachten ($l = y, l' = y'$).

Wir erhalten die Sätze:

Der Abstandslinie, welche von der in G errichteten Ordinate den konstanten Abstand c hat [m' variabel, $PM = c$ konstant, also auch $\gamma = II(c)$] entspricht der Halbstrahl durch G , welcher mit der Achse den Winkel γ einschließt.

Umgekehrt bildet sich, zufolge des involutorischen Charakters der Transformation, die Gerade, welche die Achse unter dem Winkel γ schneidet, auf jene Abstandslinie ab. Ferner sieht man sofort:

Die Gerade, welche mit der Achse das gemeinsame Lot $GM = m'$ hat (m' konstant, c veränderlich), bildet sich auf einen Halbkreis mit

dem Mittelpunkt G und dem Radius m ab und umgekehrt.

Um endlich das Bild einer zur Achse parallelen Geraden zu erhalten, denken wir uns (Fig. 20) noch das Lot EM vom zweiten Ende dieser Geraden auf die Achse gefällt. Bewegt sich jetzt P auf der abzubildenden Geraden, so ist dabei $\lambda + \beta + \gamma$ beständig gleich π . Verbinden wir noch P' mit E , so ist $\sphericalangle GP'E = \Pi(l') + \frac{\pi}{2} - \beta = \pi - \lambda - \beta = \gamma$, d. h. P' und G sind korrespondierende Punkte auf Parallelen (§ 9, 1), der Ort von P' ist also ein Grenzkreis.

Das Bild einer Parallelen EE zur Achse ist der Grenzkreis durch G mit der Achse GE ; dabei bedeutet G den Fußpunkt des vom Ende E auf die Achse gefällten Lotes.

Wir sehen also, daß ganz allgemein den Geraden als Bilder Zyklen entsprechen, die auf der Achse senkrecht stehen.

Im übrigen ist die Transformation noch winkeltreu mit Umkehrung des Drehungssinnes; z. B. bildet die Abstandslinie $c = \text{konstant}$ mit PF den Winkel $\frac{\pi}{2} - \beta$, ihr Bild aber, die Gerade $P'G$, mit $P'F$ ebenfalls den Winkel $\frac{\pi}{2} - \beta$, und entsprechend kann für jede Richtung durch P gezeigt werden, daß sie mit PF einen Winkel einschließt gleich dem Winkel der entsprechenden Richtung in P' mit FP' .

3. Die Abbildung der Zyklen.

Zyklen, welche die Achse alle in dem gleichen Punkt O berühren, haben die Eigenschaft, von allen durch O gehenden und auf der Achse senkrechten Zyklen zweimal rechtwinklig geschnitten zu werden, da ja zwei Zyklen genau wie in der euklidischen Geometrie und aus demselben Grund einander zweimal unter gleichem Winkel schneiden.

Die zweite Zykelschar verwandelt sich aber auf Grund der Eigenschaften der Abbildung in ein Büschel von Parallelen, nämlich lauter Geraden, die zu der in O auf der Achse errichteten Senkrechten parallel sind. Weil

aber die Abbildung winkeltreu ist, gehen die in O die Achse berührenden Zyklen über in die Orthogonaltrajektorien dieses Parallelbüschels, d. h. in Grenzkreise.

Untersuchen wir jetzt solche Zyklen, welche die Achse schneiden (in O).

Durch O denken wir uns alle die Achse berührenden Zyklen gelegt, jeder trifft einen bestimmten durch O gehenden Zykl zweimal unter demselben Winkel.

Da aber das Berührungsbüschel übergeht in eine Schar von Grenzkreisen mit denselben Achsen (konzentrische Grenzkreise), so bekommen wir als Bild eines die Achse schneidenden Zyklus eine Kurve, die eine Schar konzentrischer Grenzkreise alle unter dem gleichen Winkel schneiden.

Wir können zeigen, daß dieses Bild K' eine Abstandslinie sein muß, und zwar eine Abstandslinie, deren Nulllinie (§ 11, 1) eine gemeinsame Achse jener Grenzkreise ist. In der Tat haben die Abstandslinien, deren Nulllinien eine Achse von einer Schar konzentrischer Grenzkreise ist, die Eigenschaft, alle diese Grenzkreise unter demselben Winkel zu schneiden, das folgt unmittelbar durch Anwendung von Kongruenzsätzen. Diese Eigenschaft kommt aber auch nur derartigen Abstandslinien zu, wie wir hier beweisen wollen:

Ist eine Schar konzentrischer Grenzkreise und eine Isogonaltrajektorie, d. h. eine Kurve, welche sie alle unter dem gleichen Winkel schneidet, gegeben, so können wir eine neue Komplementärtransformation anwenden, um die konzentrischen Grenzkreise in ein Büschel von Parallelen zu verwandeln, wobei wir als Achse der Transformation irgendeine gemeinsame Achse der Grenzkreise wählen. Dabei geht die Isogonaltrajektorie, welche alle Grenzkreise unter demselben Winkel α schneidet, über in eine Kurve K'' , die alle Parallelen des Büschels unter demselben Winkel α schneidet, und diese Eigenschaft besitzt nur eine Abstandslinie, deren Mittellinie die Achse der Transformation ist. Durch Rückverwandlung geht aber diese Abstandslinie wieder in eine Linie konstanten Abstands von der Achse über.

Demnach gehen Zyklen, die die Achse in einem reellen Punkt schneiden, über in Abstandslinien.

Schneidet ein Zykl die Achse in O_1 und O_2 , so kann die Nulllinie der Abstandslinie, in welche er übergeht, leicht angegeben werden: Das Bild K' von K ist symmetrisch zur Mittelsenkrechten von O_1O_2 , also muß die Nulllinie auf dieser Mittelsenkrechten senkrecht stehen, m. a. W., sie muß das Bild eines die Achse senkrecht schneidenden Kreises oder genauer Halbkreises sein, dessen Mittelpunkt die Mitte M von O_1O_2 ist, und wir wollen nachweisen, daß sie gerade durch Abbildung des Halbkreises durch O_1O_2 entsteht, d. h. daß sie die Enden E_1 , E_2 der in O_1 und O_2 auf der Achse errichteten Senkrechten verbindet.

Charakteristisch für die Nulllinie einer Abstandslinie ist ihre Eigenschaft, daß alle Parallelen zu ihr die Abstandslinie unter dem gleichen Winkel schneiden.

Nun gibt es aber nur zwei Berührungsbüschel von Zyklen, welche die Achse senkrecht schneiden und den abzubildenden Zykl K alle unter dem gleichen Winkel treffen, den Büschel durch O_1 und den Büschel durch O_2 , und nur diese beiden Büschel gehen daher in Strahlen mit gemeinsamem Ende über, die K' sämtlich unter dem gleichen Winkel treffen; es sind dies der Büschel von Parallelen mit dem gemeinsamen Ende E_1 und der Büschel von Parallelen mit dem gemeinsamen Ende E_2 . Die Nulllinie von K' ist also die Verbindungslinie von E_1 und E_2 , das Bild des Halbkreises durch O_1 und O_2 .

Alle Zyklen durch O_1 und O_2 gehen also über in Abstandslinien mit derselben Nulllinie E_1E_2 , dem Bild des auf der Achse senkrechten Halbkreises durch O_1 und O_2 .

Zusatz: Die Orthogonaltrajektorien aller Zyklen durch zwei feste Punkte O_1 und O_2 sind wieder Zyklen, und zwar schneiden sie die Gerade O_1O_2 senkrecht.

Beweis: Alle Zyklen durch O_1 und O_2 bilden sich, wenn O_1 und O_2 auf der Achse liegen, ab auf Abstandslinien mit derselben Nulllinie; die Orthogonaltrajektorien dieser Abstandslinien sind also Gerade, nämlich die Senkrechten zur gemeinsamen Nulllinie, sie sind also die Bilder von Zyklen, welche die Achse senkrecht schneiden. Die Gesamtheit aller die Zyklen durch O_1 und O_2 senkrecht

schneidenden Zyklen besteht also aus den Zyklen, welche die Achse O_1O_2 (und den Kreis mit dem Durchmesser O_1O_2) senkrecht schneiden.

Man kann jetzt auch leicht das Bild eines Zyklus erhalten, welcher die Achse nicht schneidet. Ein Kreis z. B. mit dem Mittelpunkt M verwandelt sich in eine Kurve, welche die Zyklen durch M' , das Bild von M , und die Achse senkrecht schneiden, Zyklen also, die durch M' und sein Spiegelbild M'' an der Achse gehen. Die Orthogonaltrajektorien sind auf Grund des soeben bewiesenen Satzes wieder Zyklen, und zwar natürlich Kreise, wenn der abzubildende Zyklus selbst ein Kreis ist, der die Achse nirgends schneidet, so daß das Bild keines seiner Punkte ins Unendliche fällt. — In ähnlicher Weise können die Bilder von Abstandslinien und Grenzkreisen gefunden werden, welche die Achse nicht schneiden.

Durch wiederholte Anwendung der Transformation kann die Theorie der Kreisbüschel und Kreisbündel der hyperbolischen Ebene noch weiter ausgebaut und entwickelt werden, wir wollen uns aber mit der hier gegebenen Grundlage begnügen.

§ 12. Der Inhalt des Dreiecks.

In der sphärischen Geometrie ist der Inhalt des Dreiecks proportional dem sphärischen Exzeß, ganz ähnlich werden wir sehen, daß er in der hyperbolischen dem Defekt proportional ist, d. h. dem Überschuß von π über die Winkelsumme*).

*) Vgl. hierzu Engels Bemerkung (Lobatschewskij, S. 266), die Untersuchungen von Dehn (Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der nichteuklidischen Geometrie, Math. Annalen 61, S. 561—586) und die Dissertation von Finzel (Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie, Straßburg 1911). Die Feststellung des Zusammenhangs zwischen Inhalt und Defekt in der hyperbolischen Geometrie ist einfach eine Übertragung der bereits 1833 von Gerwien (Journal für reine und angewandte Math. 10, 1833, S. 235) angestellten Untersuchungen im Gebiet der sphärischen Geometrie (siehe Kap. VI, § 1, 4). Bei unsern Betrachtungen sagen wir von zwei Figuren, daß sie gleichen Flächeninhalt haben, wenn sie in kongruente Teilfiguren zerlegt werden können, so daß beide Figuren aus denselben Bausteinen aufgebaut werden können („Zerlegungsgleich-

1. Dreiecke von gleichem Defekt haben gleichen Flächeninhalt.

Diesen Satz beweisen wir zunächst für Dreiecke, die außer der gleichen Winkelsumme (W) auch noch dieselbe Grundlinie a haben. (Vgl. § 3, 3 und Fig. 2).

Verbindet man die Mitten E und F der Seiten b und c und fällt auf die Mittellinie von den Ecken aus die Lote AA' , BB' und CC' , so folgt aus Kongruenzsätzen, daß $BB' = CC' = AA'$ ist, und das Viereck $BCC'B'$ ist daher symmetrisch zur Mittelsenkrechten von BC , es hat bei B und C die gleichen Winkel

$$\sphericalangle B'BC = \sphericalangle BCC' = \beta + \sphericalangle FAA' = \gamma + \sphericalangle A'AE = \frac{1}{2} W,$$

da

$$\alpha = \sphericalangle FAA' + \sphericalangle A'AE,$$

außerdem hat es denselben Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \square BCC'B' &= \triangle BB'F + \square BCFE + \triangle CC'E \\ &= \triangle AA'F + \square BCFE + \triangle AA'E = \triangle ABC. \end{aligned}$$

Führen wir für ein anderes Dreieck $A_1B_1C_1$ mit derselben Winkelsumme W und derselben Grundlinie $B_1C_1 = a$ diese Konstruktion aus, so erhalten wir ein symmetrisches Viereck $B_1C_1C'_1B'_1$ mit rechten Winkeln bei B'_1 und C'_1 , mit den Winkeln $\sphericalangle B'_1B_1C_1 = \sphericalangle C'_1C_1B_1 = \frac{1}{2} W$ und mit derselben Grundlinie a . Diese beiden Vierecke $BCC'B'$ und $B_1C_1C'_1B'_1$ sind kongruent, denn legt man sie aufeinander, so daß die beiden Grundlinien und die Winkel B mit B_1 , C mit C_1 zur Deckung kommen, dann können die zweiten Schenkel dieser Winkel nur ein gemeinsames Lot haben, sonst entstünde ein Viereck mit vier rechten Winkeln; also muß B' mit B'_1 und C' mit C'_1 zusammenfallen, und aus der Kongruenz der Vierecke $BCB'C'$ und $B_1C_1B'_1C'_1$ folgt, daß die beiden Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben.

heit⁶⁾, aber auch dann, wenn sie durch Hinzufügen kongruenter Teilfiguren in kongruente Figuren verwandelt werden können („Ergänzungsgleichheit“). Will man zwischen diesen beiden Arten von Inhaltsgleichheit einen prinzipiellen Unterschied machen, so ist hervorzuheben, daß die zweite Art der Inhaltsgleichheit sich hier auf die erste Art zurückführen läßt, aber nach Finzel (S. 28) nur mit Hilfe des archimedischen Axioms.

Um weiter zu gehen, stellen wir zunächst fest, wie man aus einem Dreieck ABC mit gegebener Grundlinie $BC = a$ und gegebener Winkelsumme W (also gegebenem Inhalt) alle andern A_1BC erhalten kann. Die vorige Betrachtung zeigt, daß das Lot $A_1A'_1$ auf die Mittellinie des Dreiecks ABC konstant ist, gleich AA' . Man hat also nur zu beachten, daß A_1 von der Mittellinie den Abstand $BB' = CC' = AA'$ hat, d. h. der Ort von A_1 ist eine Abstandslinie mit dem Abstand AA' von der Mittellinie EF des gegebenen Dreiecks ABC . Verbindet man einen beliebigen Punkt A_1 dieser Abstandslinie mit B und C , so wird stets sowohl A_1B wie A_1C von der Mittellinie halbiert.

Hiernach kann man auch leicht zeigen: Zwei Dreiecke mit gleichem Defekt haben gleichen Inhalt, wenn eine Seite (b_1) des einen größer ist als eine Seite (b) des andern Dreiecks.

Beweis: Man konstruiert die Mittellinie des Dreiecks ABC , dann ist CC' sicher höchstens gleich $\frac{1}{2}b$. Sodann konstruiert man ein Dreieck A_2BC , in dem man um C als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}b_1 > \frac{1}{2}b$ schlägt*), welcher also die Mittellinie sicher schneidet (E_2); sodann trägt man auf der Verlängerung von CE_2 nochmals $\frac{1}{2}b_1$ ab, bis A_2 .

Das Dreieck A_2BC hat den gleichen Inhalt und Defekt wie ABC , aber auch mit $A_1B_1C_1$ stimmt es im Defekt überein und, weil außerdem $A_2C = A_1C_1$ ist, dem Inhalt nach.

Liegen endlich zwei ganz beliebige Dreiecke vor, von denen wir nur wissen, daß sie gleichen Defekt haben, so verwandle man jedes durch das angegebene Verfahren in ein gleichschenkliges Dreieck (Grundlinien a und a_1) und zerfalle wieder jedes in zwei symmetrisch kongruente rechtwinklige Teildreiecke. Die aus dem ersten und aus

*) Zur Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks aus Hypotenuse und einer Kathete wird das „Kreisaxiom“ (S. 37, Anm. *) nicht gebraucht, denn die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks aus c und a kann nach § 10, 3 zurückgeführt werden auf die eines andern aus der Kathete $a_1 = a$ und dem anliegenden Winkel $\mu_1 = II(c) < II(a)$, welche nur das Errichten einer Senkrechten erfordert.

dem zweiten Dreieck abgeleiteten rechtwinkligen Dreiecke haben dann denselben Defekt, der halb so groß ist, wie der gemeinsame Defekt von ABC und $A_1B_1C_1$.

Legen wir jetzt die beiden rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten aufeinander, so können nicht gleichzeitig beide Katheten des einen Dreiecks kleiner sein als beide des andern, sonst wäre der Defekt des Dreiecks mit den kleineren Katheten, das ja ganz innerhalb des Dreiecks mit den größeren Katheten Platz hat, kleiner als der Defekt des Dreiecks mit den größeren Katheten*), also muß notwendig eine Kathete des einen dieser Dreiecke größer sein, als eine der beiden Katheten des zweiten. Da aber auch beide rechtwinklige Dreiecke gleichen Defekt haben, so folgt aus dem zuletzt bewiesenen Satz, daß die beiden Dreiecke denselben Inhalt haben, daher auch $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$. Hiermit ist der Satz allgemein bewiesen.

Zusatz: Zerlegen wir ein Dreieck durch eine Transversale, so ist die Summe der Flächeninhalte der Teildreiecke gleich dem Flächeninhalt des ganzen Dreiecks, dasselbe gilt für den Defekt. Hieraus folgt, daß der Dreiecksinhalt, der ja nur von dem Defekt abhängt, dem Defekt einfach proportional ist.

2. Das asymptotische Dreieck**).

Durch eine sehr einfache Konstruktion können wir die zunächst für Dreiecke mit drei reellen Ecken bewiesene Beziehung auf den Fall ausdehnen, daß eine Ecke zu einem Ende wird; wir werden sehen, daß der Winkel dann durch Null zu ersetzen ist. M. a. W., wir wollen zeigen, daß ein Dreieck, dessen eine Ecke unendlich fern

*) Liegt keine Ecke eines Dreiecks ABC außerhalb eines zweiten Dreiecks $A_1B_1C_1$, so ist der Defekt des zweiten Dreiecks größer als der des ersten. Dies läßt sich am einfachsten in dem hier betrachteten Fall zeigen, in dem C und C_1 zusammenfallen und A auf A_1C zwischen A_1 und C liegt, ebenso B auf B_1C zwischen B_1 und C . Sind A, A_1, A_2 und A_3 die Defekte von $ABC, A_1B_1C_1, AB_1B$ und AB_1A_1 (W, W_1, W_2, W_3 die Winkelsummen), so ist

$$W_1 = W + W_2 + W_3 - 2\pi = W - A_2 - A_3,$$

daher

$$A_1 = \pi - W = A + A_2 + A_3 > A.$$

**.) Berichte der K. S. G. d. W. 58 (1906), S. 560 ff.

ist, dessen andere beide Winkel α und β sind, in eine — nun natürlich nicht mehr endliche — Anzahl von Dreiecken zerlegt werden kann, aus denen sich eine ganz im Endlichen gelegene Figur aufbauen läßt, deren Defekt $\pi - \alpha - \beta$ ist, nämlich ein Viereck. Das asymptotische Dreieck und das Viereck sind nicht endlich-gleich, sondern durch Exhaustion gleich.

Wir nehmen an, daß α spitz ist, β dagegen stumpf und bezeichnen die Ecken mit A, B und C (C ist unendlich fern). Dies ist keine Einschränkung, denn wenn

$\beta \leq \frac{\pi}{2}$ wäre, so könnte man auf a irgendeinen Punkt B' zwischen C und dem Fußpunkt des von A auf a gefällten Lotes annehmen und mit A verbinden, sodann das endliche Dreieck ABB' und das Dreieck $AB'C$

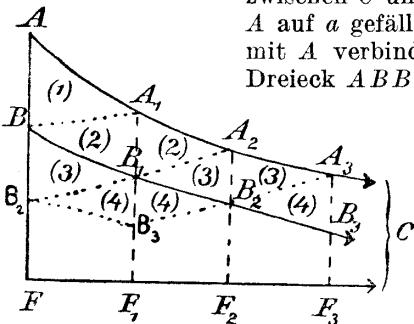


Fig. 21.

betrachten, wobei jetzt $\sphericalangle AB'C$ größer als ein rechter ist und dann die Figuren zusammensetzen.

Ist also α kleiner, β größer als ein rechter Winkel (vgl. Fig. 21) und AC parallel zu BC , so errichten wir auf der

Verlängerung von AB die zu AC parallele Senkrechte und verlängern dann die zweite Parallele durch B zu jener Senkrechten CFC' , die Gerade BC' , rückwärts, bis sie AC schneidet (A_1). Von A_1 fallen wir das Lot A_1F_1 und bringen es mit BC zum Schnitt (B_1) usw., wie es die Figur angibt. Die gebrochene Linie $AA_1B_1B_2B_3 \dots$ besteht aus lauter Strecken, die abwechselnd zu FC und FC_1 parallel sind, sie ist die wiederholt an AF und A_1F_1 reflektierte Parallele, ebenso $A_1A_2B_1B_2B_3 \dots$ die an A_1F_1 und A_2F_2 hin und her reflektierte Parallele. Das Dreieck ABC setzt sich zusammen aus:

$$\triangle ABC = (1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + \dots$$

und das Viereck AFF_2A_2 ist ebenfalls

$$\square AFF_2A_2 = (1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + \dots$$

Viereck und Dreieck können also in eine (nicht endliche) Zahl von Dreiecken zerlegt werden, derart, daß das Dreieck sich restlos aus den Bestandteilen des Vierecks aufbaut, sie haben daher denselben Flächeninhalt.

Der Flächeninhalt einer ganz im Endlichen gelegenen Figur ist gleich dem Produkt von Defekt und einer Konstanten k , im Viereck $AF F_2 A_2$ aber sind die Winkel

$$\sphericalangle F A A_2 = \alpha, \quad \sphericalangle A A_2 F_2 = \sphericalangle A_1 B F = \sphericalangle A B B_1 = \beta,$$

die Winkel bei F und F_2 sind Rechte, der Inhalt also:

$$k \left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right) = k(\pi - \alpha - \beta),$$

d. h. das Dreieck ABC hat den Inhalt $k(\pi - \alpha - \beta)$, w. z. b. w.

Zusatz: Der Inhalt des dreifach asymptotischen Dreiecks, dessen Seiten also paarweise parallel sind (A, B, C sind Enden, nicht reelle Punkte), wird demnach gleich $k\pi$: Die Konstante $k\pi$ ist der Inhalt des dreifach asymptotischen Dreiecks.

Gauß*) ist bei dem Nachweis der Beziehung

$$\triangle ABC = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

den umgekehrten Weg gegangen. Er setzt den Inhalt des dreifach asymptotischen Dreiecks gleich einer bestimmten endlichen Größe $k\pi$. Des weiteren gestaltet sich sein Schlußverfahren so: Der Inhalt des zweifach asymptotischen Dreiecks ist eine Funktion des Winkels (γ) an der im Endlichen gelegenen Ecke, die gleich $k\pi$ wird, wenn dieser Winkel zu Null wird, d. h. die Ecke unendlich fern liegt, und gleich Null, wenn der Winkel zu π wird. Wir setzen daher den Inhalt gleich $k \cdot f(\pi - \gamma)$ und wissen, daß f zu Null wird für $\gamma = \pi$, für $\gamma = 0$ dagegen f gleich π .

Ist ABC ein dreifach asymptotisches Dreieck, D ein Punkt auf BC , $\sphericalangle ADC = \delta$, so folgt:

$$\triangle ABC = k\pi = k[f(\delta) + f(\pi - \delta)] = \triangle ABD + \triangle ADC,$$

wobei δ ein ganz beliebiger Winkel sein kann. Hieraus und aus $f(0) = 0$, $f(\pi) = 1$ folgt:

$$f(\delta) = \pi - \delta.$$

*) Gauß, Werke VIII, S. 221 ff.

Demnach ist der Inhalt des zweifach asymptotischen Dreiecks mit den Winkeln

$$0, 0, \gamma \text{ gleich } k(\pi - \gamma).$$

Ist ABC ein (einfach) asymptotisches Dreieck mit den Winkeln $\alpha, \beta, 0$, ferner A_1 das eine Ende der verlängerten Strecke BA , entsprechend B_1 das Ende der verlängerten Strecke AB , und verbindet man A_1 und B_1 mit C , so folgt:

$$\begin{aligned} k\pi &= \triangle A_1 B_1 C_1 = \triangle A_1 A C + \triangle C A B + \triangle C B B_1 \\ &= k\alpha + \triangle C A B + k\beta, \end{aligned}$$

also

$$\triangle A B C = k(\pi - \alpha - \beta).$$

Schließlich ergibt sich auch der Inhalt des Dreiecks ABC mit lauter von Null verschiedenen Winkeln leicht, von denen α der größte sein möge, wenn man AC über C hinaus unbegrenzt verlängert (Ende C_1) und ebenso AB über B hinaus (Ende C_1), endlich B_1 und B mit C_1 verbindet. Wird $\sphericalangle B_1 B C_1 = \delta$, $\sphericalangle C_1 B C = \varepsilon$ gesetzt, so folgt

$$\triangle B_1 A C_1 = \triangle B_1 B C_1 + \triangle C_1 B C + \triangle A B C,$$

oder

$$k(\pi - \alpha) = k(\pi - \delta) + k(\pi - \varepsilon - \pi + \gamma) + \triangle A B C,$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß

$$\delta + \varepsilon + \beta = \pi,$$

$$k(\pi - \alpha) = k(\beta + \gamma) + \triangle A B C,$$

d. h.

$$\triangle A B C = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

dies ist die abzuleitende Beziehung.

§ 13. Grundlagen der hyperbolischen Raumgeometrie.

Wesentlich ist auch im hyperbolischen Raum die Untersuchung der Parallelen. Elementarere Betrachtungen, die denen der euklidischen Stereometrie gleichlauten und auf Anwendung von Kongruenzsätzen und den Axiomen der Raumgeometrie (vgl. Kap. I, § 5, 2) beruhen, übergehen wir.

1. Die Parallelen im hyperbolischen Raum.

Die Definition der Parallelen im Raum wird zurückgeführt auf die Definition der Parallelen in der Ebene. Man legt, um durch P die beiden Parallelen zu g zu finden, durch g und P die Ebene und zieht in dieser Ebene die beiden Parallelen zu g .

Auf Grund dieser Definition folgt z. B.:

Legt man durch einen Punkt P und die beiden zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 mit dem gemeinsamen Ende E , die mit P nicht in einer Ebene liegen, die Ebenen (P, g_1) und (P, g_2) , so schneiden sie einander in einer Geraden g_3 , welche durch E geht*).

In der Tat kann g_3 weder g_1 noch g_2 reell schneiden, denn durch diesen Schnittpunkt müßten g_1 und g_2 gehen. g_3 kann auch nicht mit g_1 ein gemeinsames Lot haben; denn die durch dieses Lot gelegte und auf der Ebene (g_1, g_2) senkrecht stehende Ebene würde mit den drei Ebenen (g_1, g_2) , (P, g_1) und (P, g_2) rechte Winkel bilden, also auch g_2 rechtwinklig schneiden, und dann hätten aber, gegen die Voraussetzung, g_1 und g_2 ein gemeinsames Lot; ebensowenig kann g_3 mit g_2 ein gemeinsames Lot haben.

Hieraus folgt, daß g_3 mit g_1 in der Ebene (P, g_1) und mit g_2 in der Ebene (P, g_2) je ein Ende gemein hat; dies muß aber gerade E sein, denn sonst läge g_3 in der Ebene g_1, g_2 .

Weiter läßt sich leicht beweisen:

Sind g_1 und g_2 zu der Geraden g_3 im selben Sinn (E) parallel, so sind sie zueinander parallel.

Zum Beweis legen wir durch einen beliebigen Punkt P auf g_1 und durch g_2 die Ebene (P, g_2) und bringen sie mit der Ebene (g_1, g_3) zum Schnitt; die Schnittgerade von (P, g_2) und (g_1, g_3) geht durch E , muß also mit g_1 zusammenfallen, da sie einen Punkt dieser Geraden enthält; g_1 liegt also mit g_2 in der Ebene (P, g_2) und geht durch E .

2. Das Parallelenbündel und die Grenzkugel**).

Die Gesamtheit aller Parallelen im Raum (das Parallelenbündel) mit gemeinsamem Ende E führt uns auf

*) Vgl. Lobatschewskij, S. 171.

***) Vgl. Lobatschewskij, S. 191ff.

das dem Grenzkreise entsprechende Gebilde, die Grenzkugel. Um zu einer vollständigen Definition zu gelangen, müssen wir zunächst eine Betrachtung anstellen, die dem Beweis der Existenz des Schnittpunkts der drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks entspricht (§ 8, 1).

Wir wollen zeigen:

Sind a , b und c drei nicht in einer Ebene gelegene Gerade mit dem gemeinsamem Ende E , ferner A und B , A und C korrespondierende Punkte auf a und b , a und c , so sind auch B und C korrespondierende Punkte auf b und c .

Beweis: Die Ebenen (μ_3 und μ_2), welche durch die Mittelpunkte F von AB und E von AC gehen und entsprechend auf diesen Geraden senkrecht stehen, schneiden ABE und ACE in zwei parallelen Geraden FE und EE . Andererseits gibt es eine und nur eine auf der Ebene ABC senkrechte Gerade durch E , deren Fußpunkt wir mit M bezeichnen wollen. Diese Gerade ist zu EE und FE parallel. Endlich, wenn die Ebenen μ_2 und μ_3 einander schneiden, so muß ihre Schnittgerade durch E gehen und auf der Ebene ABC senkrecht stehen, d. h. sie existiert und fällt mit ME zusammen. Durch den (in unserm Falle also sicher reellen) Schnittpunkt M der Mittellote der Seiten AB und AC des Dreiecks ABC geht dann auch das Mittellot MD der Seite BC , und die Punkte B und C liegen symmetrisch zur Ebene MDE , d. h. sie sind korrespondierende Punkte auf zwei Parallelen.

Den Ort aller zu A (auf a) korrespondierenden Punkte der Geraden mit dem Ende E nennen wir Grenzfläche oder Grenzkugel, die Geraden Achsen, und unser Satz zeigt, daß, wenn A und B korrespondierende Punkte sind, wir durch die Konstruktion von A und a aus auf jeder beliebigen dritten Achse c genau denselben Punkt C erhalten, wie wenn wir von b und B ausgingen. Mit andern Worten:

Die Grenzkugel ist in sich beweglich, sie geht durch Drehung um jede E enthaltende Achse in sich über.

Zusatz: Im hyperbolischen Raum haben wir drei Arten von Strahlenbündeln, die Gesamtheit der Geraden durch einen reellen Punkt, dann durch ein Ende, und

schließlich die Gesamtheit der Geraden, welche auf einer Ebene senkrecht stehen. Dadurch ergeben sich auch drei Arten von Sphären (Flächen, die Strahlen eines Bündels senkrecht schneiden), nämlich die Kugeln (mit reellem Mittelpunkt), die eben besprochenen Grenzkugeln und die Abstandsflächen*), die man erhält, wenn man in allen Punkten auf einer Ebene (Nullebene) Senkrechte gleicher Länge errichtet. Auf der Kugel gilt genau wie im euklidischen Raum die gewöhnliche sphärische Geometrie, da die Sätze der sphärischen Geometrie nur auf der Drehbarkeit der Kugel in sich beruhen, nicht auf dem Parellelenpostulat. Insbesondere ist der Inhalt eines sphärischen Dreiecks proportional dem sphärischen Exzeß. Auf der Abstandsfläche gilt die hyperbolische Geometrie, wie man durch Orthogonalprojektion dieser Fläche auf ihre Nullebene erkennt.

3. Die Kantenwinkel im Paralleldreikant und die Geometrie auf der Grenzkugel**).

Schneiden wir die Grenzkugel mit Ebenen durch E , das gemeinsame Ende ihrer Achsen, so erhalten wir, wie aus der Definition der Fläche folgt, Grenzkreise. Betrachten wir jetzt Dreiecke auf der Grenzkugel, deren Seiten Bogen der Grenzkreise, d. h. der ebenen Achsenschnitte sind, so sind die Winkel der Seiten identisch mit den Neigungswinkeln der Schnittebenen, d. h. ihren Kantenwinkeln.

Wir wollen nunmehr zeigen, daß die Summe der Kantenwinkel am Paralleldreikant zwei Rechte beträgt.

Es seien A , B und C korrespondierende Punkte auf den drei Parallelen AE , BE und CE mit dem gemeinsamen Ende E , ferner A_1 , B_1 und C_1 drei weitere korrespondierende Punkte, auf AE , BE und CE zwischen A und E , B und E , C und E gelegen. Dann ist $AA_1 = BB_1 = CC_1$,

*) Für die Grenzkugel werden auch die Bezeichnungen Orisphäre, Grenzfläche, Parasphäre, Superficies F (J. Bolyai) gebraucht, für Abstandsfläche: Überkugel, Hypersphäre.

**) Vgl. Lobatschewskij, S. 12 und S. 193. — J. Bolyai, Appendix, § 33, II. Übrigens hat schon Fr. L. Wachter in einem Briefe an Gauß vom 12. XII. 1816 mitgeteilt, daß „auf der ins Unendliche erweiterten Kugelfläche die euklidische Geometrie gilt“ (Stäckel, Math. Annalen 64 [1901], S. 59 ff.).

und diese Strecke, die wir später unbegrenzt wachsen lassen, sei mit s bezeichnet (Fig. 22).

Wir erkennen dann leicht aus den Eigenschaften, die parallele Gerade besitzen, daß mit wachsendem s der Inhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ unbegrenzt nach Null hin abnimmt, denn die drei Seiten werden mit unbegrenzt wachsendem s zu Null.

Denken wir uns ferner in A ein sphärisches Dreieck ($A; T, R, S$) konstruiert, $AT = r$ (T auf ΔE),

$$AR = r, \quad AS = r,$$

$$\sphericalangle FAS = \sphericalangle TAR = \frac{\pi}{2},$$

R in der Ebene ABE , S in der Ebene ACE , so ist $\sphericalangle RAS$ der Kantenwinkel (α) an der Kante AE . In den Ebenen $ABRE$ und $ACSE$ tragen wir jetzt an EA die Winkel $\sphericalangle EAR' = \sphericalangle EA_1B_1$ und $\sphericalangle EAS' = \sphericalangle EA_1C_1$ ein, so daß das Dreieck $A; R'S'T$ in seinen Winkeln und Seiten übereinstimmt mit den

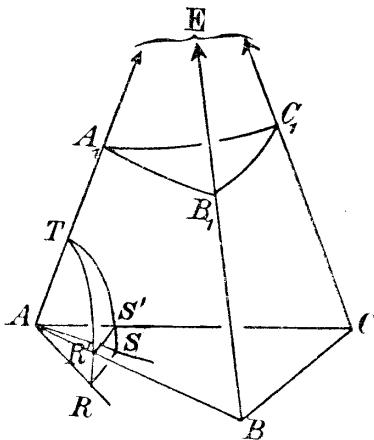


Fig. 22.

Winkeln und Seiten des Dreiecks $A_1; B_1, C_1, E$.

Sodann beachten wir, daß der Winkel $\sphericalangle EA_1B_1 = \sphericalangle EB_1A_1$, den die beiden Parallelen AE und BE mit der Verbindungslinie A_1B_1 einschließen, sich einem rechten unbegrenzt nähert, wenn A_1 und mit ihm der korrespondierende Punkt B_1 sich unbegrenzt nach dem Ende E hin entfernt, desgleichen der Winkel $\sphericalangle EA_1C_1$. Hieraus folgt, daß

$$\sphericalangle TAR' = \sphericalangle EA_1B_1$$

und

$$\sphericalangle TAS' = \sphericalangle EA_1C_1$$

beide sich mit wachsendem s dem Wert $\frac{\pi}{2}$ unbegrenzt nähern, also S' dem Punkt S und R' dem Punkt R . Hieraus folgt, daß

$$\sphericalangle S'AR' = \sphericalangle B_1A_1C_1 = \alpha_1$$

sich mit wachsendem s dem Winkel RAS , d. h. dem Kantenwinkel α , unbegrenzt nähert, dasselbe gilt für β_1 ($= \sphericalangle A_1 B_1 C_1$) und den Kantenwinkel β an der Kante BE für γ_1 ($= \sphericalangle A_1 C_1 B_1$) und den Kantenwinkel γ an der Kante CE des Paralleldreikants.

Mit wachsendem s nimmt der Inhalt des Dreiecks $A_1 B_1 C_1 = k(\pi - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1)$, wir wir oben sahen, unbegrenzt bis Null ab, auf der andern Seite erkannten wir, daß dabei α_1, β_1 und γ_1 sich den Werten α, β und γ unbegrenzt nähern. Hieraus folgt:

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma = 0$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Die Summe der Winkel an den Kanten eines Paralleldreikants beträgt also zwei Rechte.

Die Bemerkung am Anfang dieser Nummer zeigt so dann:

Die Summe der Winkel im Grenzkreisdreieck auf der Grenzkugel beträgt zwei Rechte.

Nimmt man die in der vorigen Nummer bewiesene Eigenschaft der freien Beweglichkeit der Grenzkugel in sich dazu, so folgt der Satz:

Auf der Grenzkugel gilt die euklidische Geometrie.

Zusatz: Die Zuordnung komplementärer rechtwinkliger Dreiecke (§ 10, 3) kann mit Hilfe des rechtwinkligen Paralleldreikants nachgewiesen werden, ebenso die Zuordnung des rechtwinkligen Dreiecks und des Spitzecks. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck ($a, b, c; \lambda, \mu$). In B errichten wir die Senkrechte BE auf der Ebene und ziehen zu ihr die Parallelen AE, CE .

In dem entstehenden Paralleldreikant sind dann die Winkel an den Kanten der Reihe nach μ (an BE), $\frac{\pi}{2}$

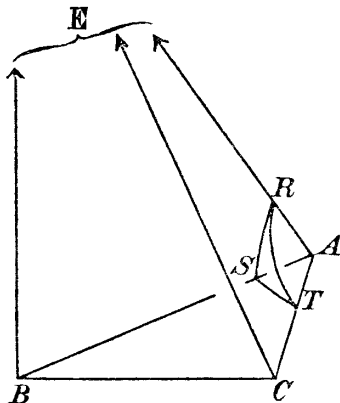


Fig. 23.

(an CE), also $\frac{1}{2}\pi - \mu$ an AE ; demnach sind die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks RST (siehe Fig. 23) Seiten, gemessen durch die Zentriwinkel:

$$RS = \sphericalangle EAB = II(c) = \gamma,$$

$$RT = \sphericalangle EAC = II(b) = \beta,$$

$$ST = \sphericalangle BAC = \lambda,$$

Winkel:

$$\sphericalangle STR = \sphericalangle BCE = II(a) = \alpha,$$

$$\sphericalangle SRT = \frac{\pi}{2} - \mu,$$

$$\sphericalangle RST = \frac{\pi}{2}.$$

Zu dem rechtwinkligen Dreieck $(a, b, c; \lambda, \mu)$ gehört also ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit den Katheten γ und λ , der Hypotenuse β und den Winkeln α (gegenüber γ) und $\frac{1}{2}\pi - \mu$ gegenüber λ . Konstruiert man jetzt nach dem umgekehrten Verfahren zu diesem sphärischen Dreieck das zugehörige rechtwinklige, läßt aber λ und γ , $\frac{\pi}{2} - \mu$ und α ihre Rollen vertauschen, so erhält man ein neues rechtwinkliges Dreieck

$$a_1 = m', \quad b_1 = b, \quad c_1 = l; \quad \lambda_1 = \gamma, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

und dies ist genau das oben in §10, 3 angegebene zugeordnete.

4. Anwendung der Raumgeometrie auf die Abbildung durch komplementäre Ordinaten.

Prinzipiell wichtig ist die Tatsache, daß die Zuordnung der Dreiecke sowohl wie die Komplementärtransformation der Ebene oben (§ 11, 2) allein mit Hilfe der ebenen hyperbolischen Geometrie abgeleitet wurde. Sehr einfach aber und anschaulich lassen sich die Eigenschaften dieser Transformation mit Hilfe der Raumgeometrie ableiten.

Um das Bild P' von P zu erhalten, kann man ja auch so verfahren: Man errichtet in P auf der Ebene (E) die unbegrenzte Senkrechte PE , legt durch PE senkrecht zur

Achse die Ebene (E'), deren Schnittpunkt mit der Achse durch H bezeichnet werden möge, dann fällt man in dieser Ebene das (zu PE parallele) Lot EQ auf E' und klappt es in die erste Ebene zurück, Q fällt auf P' , wobei

$$\Pi(PH) + \Pi(P'H) = \sphericalangle PHE + \sphericalangle EQH = \frac{\pi}{2}$$

ist, wie es die Definition verlangt.

Als Randbild einer Ebene (U) auf (E) wollen wir jetzt den Ort der Fußpunkte derjenigen Senkrechten zu E bezeichnen, welche zu irgendeiner Geraden in U parallel sind. Hat U mit E ein gemeinsames Lot $M_u M_e = m$, so ist sein Randbild ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_e und dem Radius m' . Bildet U mit E längs der Schnittgeraden g den Winkel α , so wird das Randbild eine Abstandslinie, nämlich der Ort derjenigen Punkte, die von g denselben Abstand a haben. Wenn endlich U „Zwischenebene“) zu E “ ist, d. h. E weder in einer reellen Geraden schneidet, noch mit E ein gemeinsames Lot hat, so gibt es ein Büschel von Ebenen, welche E und U senkrecht schneiden und aus diesen Ebenen je ein Büschel von Parallelen mit dem gemeinsamen Ende E ausschneiden. Das Randbild von U auf E wird dann ein Grenzkreis mit Achsen durch E . Die Randbilder von Ebenen (U) endlich, welche auf E senkrecht stehen, fallen mit den Schnittgeraden (U, E) zusammen.

Unsere Untersuchung zeigt, daß man das Bild K' einer Kurve K erhält, wenn man in den Punkten von K die Senkrechten auf E errichtet, und dann die zu diesen parallelen, aber auf E' senkrechten Geraden konstruiert. Der Ort ihrer Fußpunkte ist dann mit der Kurve K' kongruent und nur noch um die Achse in E umzuklappen.

Man erhält also das Bild einer Geraden g , wenn man durch g die Ebene senkrecht zu E legt, von dieser das Randbild auf E' konstruiert und endlich zurückklappt. Verfolgt man dies weiter, so erhält man alle Eigenschaften der Abbildung, insbesondere auch die Abbildung der Zyklen auf Zyklen mit einem Schlag: Jeder Zykl K in E ist das

*) Nach der Bezeichnung von Simon (Jahresberichte d. deutschen Math. V., 1897, S. 67).

Randbild einer Ebene (U), sein Bild K' in E' das Randbild dieser Ebene in E' usw. Man kann dann weiter die Kreisgeometrie leicht entwickeln, z. B. sind die Kreise eines Büschels Randbilder eines Ebenenbüschels, die Kreise eines Bündels Randbilder der Ebenen eines Ebenenbündels, und durch diese Konstruktion wird die Einsicht in die Kreisgeometrie der hyperbolischen Ebene bedeutend erleichtert.

III. Kapitel.

Trigonometrie.

§ 14. Der Grenzkreis und die Beziehung zwischen komplementären Strecken.

Den Zugang zur Ableitung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Ebene gewinnen wir durch Betrachtung des Grenzkreises (§ 11) und Anwendung der einander zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke (§ 10).

1. Die Verjüngung koaxialer Grenzkreisbogen. Die Einheitsstrecke.

Es seien A_1A' , A_2A' , A_3A' drei Achsen eines Grenzkreises, B_1 , B_2 , B_3 die Punkte, in denen diese Achsen einen bestimmten koaxialen Grenzkreis treffen. Bezeichnen wir die auf den Grenzkreisen liegenden Bogen*) durch die Endpunkte, also (A_1A_2) , (B_1B_2) usw., so kann man, da ja zu gleichen Sehnen gleiche Grenzkreisbogen gehören, mit Hilfe von Kongruenzsätzen leicht beweisen

$$(A_1A_2) : (A_2A_3) = (B_1B_2) : (B_2B_3),$$

sobald das Verhältnis kommensurabel ist, d. h. sobald man zwischen den Achsen A_1A' , A_2A' und A_3A' nur eine endliche Anzahl weiterer Achsen einzuschalten braucht [C_1A' , C_2A' ... C_mA' ($C_m = A_2$), $C_{m+1}A'$... C_nA' ($C_n = A_3$)], welche die Eigenschaften haben, daß $\sphericalangle A'C_{i-1}C_i = \sphericalangle A'C_iC_{i+1}$ ist ($C_0 \equiv A_1$ gesetzt).

*) Lobatschewskij, S. 189. Daß dem Grenzkreis überhaupt eine Bogenlänge zukommt, folgert Lobatschewskij durch Grenzübergang vom Kreis aus. Über die bekannten Betrachtungen, welche zur Messung des Kreisbogens führen, vgl. Enriques-Thieme, a. a. O. S. 145. Ebendasselbst S. 147ff. sind die Grundvoraussetzungen für die Theorie des Messens gerader Strecken entwickelt.

Durch Grenzübergang schließen wir, daß diese Proportion auch noch für den Fall der Inkommensurabilität besteht, d. h. daß sie allgemein gilt.

Es seien jetzt A und B zwei Punkte, die auf derselben Achse liegen und den beiden Grenzkreisen angehören, dann ist also

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_1 A}{B_1 B},$$

wo bei A auf dem äußeren Grenzkreis ganz beliebig angenommen ist. Das von der Wahl des Punktes A unabhängige Verhältnis ist jedenfalls kleiner als Eins. Wir wollen die Einheitsstrecke so wählen, daß das Verhältnis gerade den Wert e^{-1} hat (wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist), wenn $A_1 B_1$ gleich AB gleich der Einheitsstrecke ist.

Tragen wir dann die Einheitsstrecke von A aus n mal nach der Seite des gemeinsamen Endes A' hin ab, so gilt für die entsprechenden Grenzkreisbogen

$$(s = A_1 A, s_1 = B_1 B, s_2, s_3 \dots s_n)$$

die Proportion

$$s : s_1 = s_1 : s_2 \dots = s_{n-1} : s_n = e,$$

d. h. es ist

$$s_n = s e^{-n}.$$

Ist jetzt die Strecke $A_1 B_1 = AB = x$ in Streckeneinheiten ausgedrückt eine rationale Zahl, so wird

$$(B B_1) = s e^{-x},$$

und hieraus kommt durch Grenzübergang für jeden Wert von x die Formel:

$$s_x = s e^{-x}.$$

Diese Formel drückt den Bogen s_x aus durch den Bogen s und den senkrechten Abstand der beiden Grenzkreise, auf denen die von denselben Achsen eingeschlossenen Bogen liegen. —

2. Die hyperbolischen Funktionen. Für die weitere Entwicklung bedienen wir uns der hyperbo-

lischen Funktionen, die definiert sind durch die Gleichungen*):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{Sinus hyperbolicus von } x),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{Cosinus hyperbolicus von } x),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{Tangens hyperbolicus von } x),$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{Cotangens hyperbolicus von } x).$$

Für diese Funktionen gelten die leicht ableitbaren Additionstheoreme:

$$\operatorname{sh}(p + q) = \operatorname{sh} p \operatorname{ch} q + \operatorname{sh} q \operatorname{ch} p,$$

$$\operatorname{ch}(p + q) = \operatorname{ch} p \operatorname{ch} q + \operatorname{sh} p \operatorname{sh} q,$$

$$\operatorname{th}(p + q) = \frac{\operatorname{th} p + \operatorname{th} q}{1 + \operatorname{th} p \operatorname{th} q},$$

$$\operatorname{cth}(p + q) = \frac{1 + \operatorname{cth} p \operatorname{cth} q}{\operatorname{cth} p + \operatorname{cth} q}.$$

Da $\operatorname{sh} p$ eine ungerade Funktion ist, $\operatorname{ch} p$ eine gerade, und da $\operatorname{ch} 0 = 1$ ist, so folgt aus der zweiten Formel für $q = -p$,

$$\operatorname{ch}^2 p - \operatorname{sh}^2 p = 1.$$

Ferner erhält man leicht die Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sh} p}{d p} &= \operatorname{ch} p, & \frac{d \operatorname{ch} p}{d p} &= \operatorname{sh} p, \\ \frac{d \operatorname{th} p}{d p} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 p}, & \frac{d \operatorname{cth} p}{d p} &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 p}. \end{aligned}$$

Zusatz. Geometrische Deutung der hyperbolischen Funktionen.

Wir wollen zeigen, daß die gleichseitige Hyperbel der euklidischen Geometrie**):

$$x^2 - y^2 = 1$$

*) Vgl. S. Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und den verallgemeinerten Hyperbelfunktionen. Halle 1881.

**) Günther, a. a. S. 92 ff.

den Verlauf der hyperbolischen Funktionen $\text{sh } u$ und $\text{ch } u$ in ähnlich einfacher Weise veranschaulicht, wie der Kreis vom Radius Eins den Verlauf der trigonometrischen Funktionen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$.

Die Hyperbel wird dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \text{ch } u, \quad y = \text{sh } u;$$

wenn u von Null an unbegrenzt zunimmt, erhalten wir den im ersten Quadranten gelegenen Teil.

Es wird sich zeigen, daß u eine einfache geometrische Bedeutung hat. (Vgl. Fig. 24.)

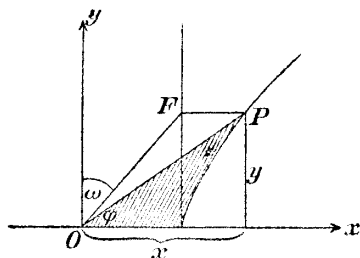


Fig. 24.

Sei v der doppelte Inhalt des von der positiven x -Ache, dem Radiusvektor $r = OP$ und dem Hyperbelbogen begrenzten in Fig. 24 schraffierten Sektors, so wird:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{d \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi} \right), \end{aligned}$$

also

$$e^{2v} = \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1} = \operatorname{th} v,$$

und

$$r^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{\operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v}{\operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v} = \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v.$$

Endlich wird

$$x = r \cos \varphi = \sqrt{\operatorname{sh}^2 v + \operatorname{ch}^2 v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 v}} = \operatorname{ch} v,$$

$$y = +\sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{sh} v,$$

oder

$$u = v.$$

Dieses einfache Ergebnis drücken wir in dem Satz aus:

Ersetzt man die Formeln

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi,$$

in denen die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des Einheitskreises als Funktionen des doppelten Sektors dargestellt werden, der von der x -Achse, dem Kreisbogen und dem Radiusvektor begrenzt ist, die trigonometrischen Funktionen durch die hyperbolischen, setzt man also

$$x = \operatorname{ch} v, \quad y = \operatorname{sh} v,$$

wobei v der doppelte Inhalt des Hyperbelsektors ist, so erhält man die Darstellung der gleichseitigen Hyperbel.

3. Die Gleichung des Grenzkreises.

Es sei ein Grenzkreisbogen und kleiner als S (Grenzkreisbogen, bei dem die Tangente im Anfangspunkt B parallel ist zur Achse im andern Endpunkt C , vgl. Fig. 25), von der Beschaffenheit also, daß die Tangente im Endpunkt B des Bogens die Achse E_1A schneidet (D). Wir ergänzen s zu S , verlängern E_1A noch über D hinaus bis A_1 , wobei

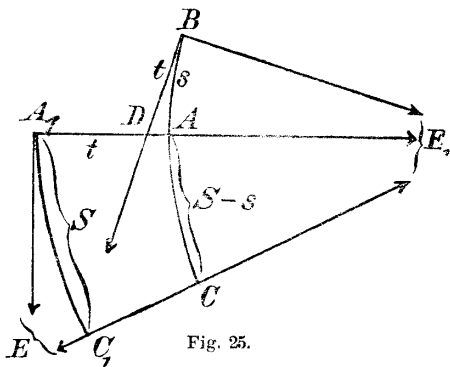


Fig. 25.

$$EA_1 \perp EE_1 \quad \text{und} \quad E_1E \text{ parallel } E_1CE.$$

Bezeichnen wir Bogen wieder durch die Endpunkte und die Strecke AD mit u , so folgt

$$(AC) = (A_1C_1) e^{-u-t}$$

oder

$$S - s = S \cdot e^{-u-t}.$$

Wir haben hier (BA) durch Fortsetzung über A hinaus zu S ergänzt, dann $AA_1 = t + u$ gemacht und durch A_1 den zu $S - s$ coaxialen Grenzkreisbogen konstruiert.

Verlängert man statt dessen (AB) über B hinaus um S und trägt von D aus t nach E_1 hin ab bis zu einem Punkt A_2 , so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$S + s = S \cdot e^{t-u}.$$

Demnach wird

$$e^u = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \text{cht},$$

$$s = S(1 - e^{-u} \cdot e^{-t}) = S \cdot \left(1 - \frac{e^{-t}}{2(e^t + e^{-t})}\right) = S \cdot \text{th}t$$

Endlich können wir hieraus die Gleichung des Grenzkreises in rechtwinkligen Koordinaten ableiten: Ist (Fig. 26) x die Abszisse, y die Ordinate des Punktes P auf dem Grenzkreis durch O und mit der Achse $O\Xi$, so legen wir durch den Fußpunkt X des Lotes PX den zu s äquidistanten Grenzkreis ($s' = s e^{-x}$), und es wird dann, da x und y für $s' = (QX)$ dieselbe Bedeutung haben, wie in der vorigen Figur u und t für den Bogen $s = (AB)$

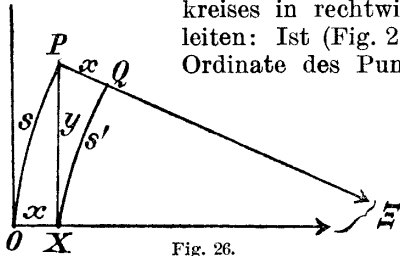


Fig. 26.

$$e^x = \text{chy}.$$

Dies ist die Gleichung des Grenzkreises in rechtwinkligen Koordinaten. Außerdem ergibt sich noch

$$\begin{aligned} s &= s' e^x = S e^x \text{thy} \\ &= S \text{sh}y. \end{aligned}$$

4. Die hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken.

Ist (Fig. 27) $s = (AB) = S e^{-x}$ und errichten wir in A die Senkrechte von der Länge $AD = x'$, so daß die auf AD errichtete Senkrechte DH zur y -Achse OH par-

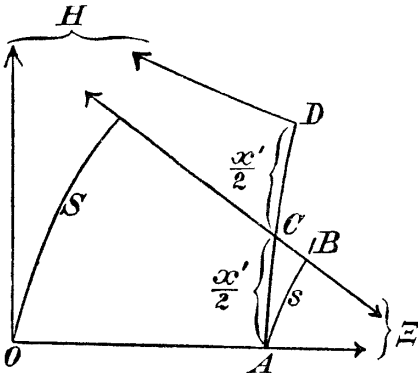


Fig. 27.

alle ist, dann halbiert die Achse εCH des Grenzkreises die Strecke AD , es ist nämlich

$$\sphericalangle HCD = \sphericalangle \varepsilon CA,$$

also

$$H(CD) = H(CA)$$

oder

$$CD = DA = \frac{1}{2} x'.$$

Wir haben daher

$$S e^{-x} = s = S \operatorname{th} \frac{x'}{2}.$$

Hieraus folgen alle Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken a und a' , nämlich

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} a &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{a'}{2}} + e^{-\frac{a'}{2}}}{e^{\frac{a'}{2}} - e^{-\frac{a'}{2}}} - \frac{e^{\frac{a'}{2}} - e^{-\frac{a'}{2}}}{e^{\frac{a'}{2}} + e^{-\frac{a'}{2}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{e^{a'} - e^{-a'}} = \frac{1}{\operatorname{sh} a'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{a'}{2}} + e^{-\frac{a'}{2}}}{e^{\frac{a'}{2}} - e^{-\frac{a'}{2}}} + \frac{e^{\frac{a'}{2}} - e^{-\frac{a'}{2}}}{e^{\frac{a'}{2}} + e^{-\frac{a'}{2}}} \right) \\ &= \frac{e^{a'} + e^{-a'}}{e^{a'} - e^{-a'}} = \operatorname{cth} a', \end{aligned}$$

$$\operatorname{th} a = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} = \frac{1}{\operatorname{ch} a'},$$

$$\operatorname{cth} a = \operatorname{ch} a'.$$

Die Formeln gehen natürlich ineinander über, wenn man a und a' miteinander vertauscht.

§ 15. Trigonometrische Formeln.*)

1. Die Streckentrigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks.

Im Anschluß an die Beziehung zwischen den hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken können die

*) Berichte der K. S. G. d. W. 59 (1907), S. 187—210.

Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck abgeleitet werden. Winkel führen wir dabei vorläufig nicht ein, wir wollen nämlich immer Figuren anwenden, in denen die zu diesen Winkeln als Parallelwinkeln gehörigen Lote auftreten.

Wir verlängern im rechtwinkligen Dreieck die Kathete AC unbegrenzt,

ziehen die Parallele BE und $LE \perp AL$ dazu (siehe Fig. 28). Dann ist, auf Grund der für das rechtwinklige Dreieck eingeführte Bezeichnungen

$$AC = b, \quad BC = a,$$

$$AB = c,$$

$$\sphericalangle BAC = \lambda \quad (AL = l),$$

ferner konstruieren wir

die beiden Grenzkreise (BB') und (LD') , die Strecke $BD = B'D'$ bezeichnen wir mit u , die Bogen (BB') , (DD') , (LD) mit s , s_1 und s_2 .

Es wird dann

$$S \operatorname{sh} a = s = s_1 e^u,$$

$$s_1 + s_2 = S \operatorname{th} l,$$

$$s_2 = S \operatorname{th}(BL) = S \operatorname{th}(l - c)$$

und

$$e^u = \operatorname{ch}(BL) = \operatorname{ch}(l - c),$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} a &= \operatorname{ch}(l - c) \cdot [\operatorname{th} l - \operatorname{th}(l - c)] \\ &= \frac{\operatorname{sh} l \operatorname{ch}(l - c) - \operatorname{ch} l \operatorname{sh}(l - c)}{\operatorname{ch} l} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} l}. \end{aligned}$$

Aus dieser ersten Formel

$$(1) \quad \operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} l$$

(Hypotenuse, Kathete, gegenüberliegender Winkel)

können alle weiteren durch Übergang zu komplementär zugeordneten rechtwinkligen Dreiecken gefunden werden, wobei die Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken zu berücksichtigen sind.

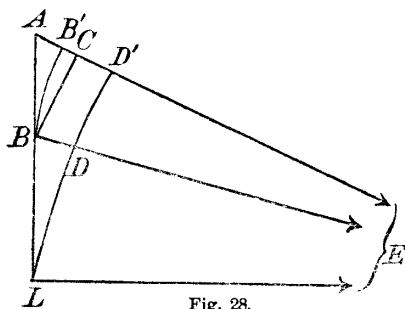


Fig. 28.

Auf Grund der Neper-Engelschen Regel folgt z. B. die Existenz des zu $(a, b, c; \lambda, \mu)$ zugeordneten Dreiecks, von dem wir nur die drei in Betracht kommenden Stücke angeben wollen

$$b'_1 = a', \quad a'_1 = l, \quad l_1 = c,$$

also folgt aus

$$\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} l$$

sofort

$$\operatorname{sh} l_1 = \operatorname{sh} b_1 \operatorname{ch} a'_1,$$

daher umgekehrt auch

$$\operatorname{sh} l = \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a'$$

oder

$$\operatorname{sh} l = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{th} a},$$

d. i.

$$(2) \quad \operatorname{sh} b = \operatorname{th} a \cdot \operatorname{sh} l \quad (\text{zwei Katheten und ein Winkel}).$$

In ähnlicher Weise findet man aus (1)

$$\operatorname{sh} l = \operatorname{ch} c \cdot \operatorname{sh} m'$$

oder

$$(3) \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{sh} l \cdot \operatorname{sh} m \quad (\text{Hypotenuse und beide Winkel}).$$

Hieraus folgt nach (2)

$$\operatorname{ch} c = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{th} a} \cdot \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{th} b},$$

also

$$(4) \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b \quad (\text{Hypotenuse und beide Katheten}).$$

Die Beziehung zwischen einer Kathete und den beiden Winkeln wird so gefunden:

Nach (2) ist

$$\operatorname{ch} a = \frac{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} l}{\operatorname{sh} b},$$

und setzt man hierin die aus (1) folgenden Werte ein

$$\operatorname{sh} a = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} l}, \quad \operatorname{sh} b = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} m},$$

so folgt

$$(5) \quad \text{cha} = \text{th}l \cdot \text{ch}m \quad (\text{Kathete und zwei Winkel}).$$

Endlich folgt leicht aus (4)

$$\text{cha}' = \text{ch}m' \cdot \text{ch}c'$$

oder

$$(6) \quad \text{tha} = \text{th}m \cdot \text{th}c$$

(Kathete, Hypotenuse und eingeschlossenen Winkel).

Dieselben Formeln gelten natürlich für das Spitzweck mit dem spitzen Winkel β und den Seiten c, m', a, l .

Zusatz: Man kann alle Formeln durch eine sehr einfache Regel zusammenfassen:

Schreibt man wieder an das Nepersche Fünfeck (§ 10, 3) die Buchstaben a', l, c, m, b' , so ist der hyperbolische Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der hyperbolischen Sinus der anliegenden und dem Produkt der hyperbolischen Kotangenten der gegenüberliegenden Stücke; dabei ist noch die Beziehung zwischen den hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken zu berücksichtigen.

Als Beispiele führen wir an

$$\text{ch}c = \text{sh}l \cdot \text{sh}m$$

und

$$\text{ch}c = \text{cth}a' \cdot \text{cth}b' = \text{ch}a \cdot \text{ch}b,$$

ferner

$$\text{ch}l = \text{sh}c \cdot \text{sh}a' = \frac{\text{sh}c}{\text{sh}a} \quad [\text{vgl. (1)}],$$

$$\text{ch}l = \text{cth}m \cdot \text{cth}b' = \text{cth}m \cdot \text{ch}b \quad [\text{vgl. (5)}].$$

Zusatz 2: Formeln für das schiefwinklige Dreieck.

Bezeichnen wir im schiefwinkligen Dreieck die Seiten mit a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel mit λ, μ, ν , so folgt, wenn wir von der Ecke A aus die Höhe ($d = AD, p = DC$) fällen nach (1)

$$\text{sh}d = \text{sh}c \cdot \text{ch}m \quad \text{und} \quad \text{sh}d = \text{sh}b \cdot \text{ch}n,$$

also

$$\text{sh}a : \text{sh}b : \text{sh}c = \text{ch}l : \text{ch}m : \text{ch}n \quad (\text{„Sinussatz“}).$$

Ebenso erhält man leicht aus (4)

$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} d \cdot \operatorname{ch} p,$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} d \cdot \operatorname{ch}(a - p)$$

und

$$\operatorname{th}(a - p) = \operatorname{th} c \cdot \operatorname{th} m \quad (6),$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} b &= \frac{\operatorname{ch} c \cdot \operatorname{ch} p}{\operatorname{ch}(a - p)} = \operatorname{ch} c \cdot \frac{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch}(a - p) - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh}(a - p)}{\operatorname{ch}(a - p)} \\ &= \operatorname{ch} c \cdot (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{th}(a - p)) \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} a \operatorname{th} m \quad (, \text{Kosinussatz} \text{ ')}.$$

Der „Sinussatz“ gibt die Beziehung zwischen Seiten und Winkeln an, der „Kosinussatz“ drückt eine Seite durch die beiden andern und den gegenüberliegenden Winkel aus.

2. Einführung des Winkelmaßes.

Wir weisen, wie in der euklidischen Geometrie, dem rechten Winkel die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ als Größe zu, entsprechend messen wir alle Winkel und stellen uns die Aufgabe, die Beziehung zwischen α und dem zu α gehörigen Lot a , definiert durch

$$\alpha = II(a)$$

und jetzt der Kürze halber bezeichnet mit

$$a = A(\alpha)$$

zu erforschen.

Unter den trigonometrischen Funktionen eines Winkels verstehen wir die Größen

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cot} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

die hier natürlich nicht die euklidische Bedeutung haben (Verhältnis von anliegender Kathete zu Hypotenuse usw.), sondern zunächst lediglich als analytische Hilfsgrößen zu betrachten sind.

Zuallererst stellen wir fest, daß die Gleichung

$$\operatorname{th} a = \cos f(\alpha)$$

eine Funktion $f(\alpha)$ definiert, die folgende Werte hat für die angegebenen Werte des Arguments:

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $a = 0$, $\operatorname{cosec} f(\alpha) = 0$, also $f(\alpha) = \frac{\pi}{2}$,

für $\alpha = 0$ ist $a = \infty$, $\operatorname{th} a = 1$, $\operatorname{cosec} f(\alpha) = 1$, $f(\alpha) = 0$,

Wächst a von 0 bis ∞ stetig, so nimmt $f(\alpha)$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 stetig ab, ebenso wie α selbst.

Außerdem wird

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{cosec} f(\alpha)}, \quad \operatorname{sh} a = \frac{\operatorname{th} a}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 a}} = \operatorname{cot} f(\alpha)$$

und

$$\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sin} f(\alpha)}.$$

Betrachten wir jetzt wieder ein schiefwinkliges, aus zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Kathete $a_1 = a$ zusammengesetztes Dreieck, wobei die Stücke der beiden Dreiecke mit $(a, b, c; \lambda, \mu)$ und $(a_1, b_1, c_1; \lambda_1, \mu_1)$ bezeichnet werden, so folgt aus dem Kosinussatz

$$\operatorname{cosec}(\mu + \mu_1) = \operatorname{th} \Delta(\mu + \mu_1) = \frac{\operatorname{ch} c \cdot \operatorname{ch} c_1 - \operatorname{ch}(b + b_1)}{\operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sh} c_1},$$

außerdem wird (6)

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cdot \operatorname{th} m = \operatorname{th} c \cdot \operatorname{cosec}(\mu)$$

und

$$\operatorname{th} a_1 = \operatorname{th} c_1 \cdot \operatorname{th} m_1 = \operatorname{th} c_1 \cdot \operatorname{cosec}(\mu_1),$$

also

$$\operatorname{cosec} c \cdot \operatorname{cosec} c_1 = \operatorname{cosec}^2 a \cdot \operatorname{cosec}(\mu) \cdot \operatorname{cosec}(\mu_1).$$

Außerdem ist nach (1)

$$\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} = \frac{1}{\operatorname{ch} m} = \operatorname{sin} f(\mu), \quad \frac{\operatorname{sh} b_1}{\operatorname{sh} c_1} = \frac{1}{\operatorname{ch} m_1} = \operatorname{sin} f(\mu_1)$$

und

$$\frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} c} \cdot \frac{\operatorname{ch} b_1}{\operatorname{sh} c_1} = \frac{\operatorname{th} m \cdot \operatorname{th} m_1}{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} a_1} = \frac{\operatorname{cosec} f(\mu) \cdot \operatorname{cosec} f(\mu_1)}{\operatorname{sh}^2 a}.$$

Setzt man alle diese Werte in die Formel des „Kosinussatzes“ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \cos f(\mu + \mu_1) &= \operatorname{cth}^2 a \cos f(\mu) \cdot \cos f(\mu_1) - \frac{\operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} b_1}{\operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sh} c_1} - \frac{\operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c_1}{\operatorname{ch} c \cdot \operatorname{ch} c_1} \\ &= \operatorname{cth}^2 a \cos f(\mu) \cdot \cos f(\mu_1) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a} \cdot \cos f(\mu) \cdot \cos f(\mu_1) \\ &\quad - \sin f(\mu) \sin f(\mu_1), \end{aligned}$$

oder

$$\cos f(\mu + \mu_1) = \cos f(\mu) \cdot \cos f(\mu_1) - \sin f(\mu) \cdot \sin f(\mu_1),$$

d. i.

$$\cos f(\mu + \mu_1) = \cos[f(\mu) + f(\mu_1)].$$

Da nun für die Argumente $\mu = \mu_1 = \mu + \mu_1 = 0$ die Funktion f zu Null wird, so folgt

$$f(\mu + \mu_1) = f(\mu) + f(\mu_1),$$

also

$$f(\mu) = \varrho \cdot \mu$$

und wegen

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

ist $\varrho = 1$, also folgt

$$f(\mu) = \mu.$$

D. h.: Mißt man die Winkel, indem man sie dem Kreisbogen proportional setzt und den rechten Winkel gleich $\frac{1}{2}\pi$ setzt, so wird, wenn $\alpha = H(a)$ gesetzt wird,

$$\operatorname{th} a = \cos f(\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{sh} a = \cot f(\alpha) = \cot \alpha,$$

$$\operatorname{cth} a = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Zusatz 1: Führt man demgemäß statt der Strecken $l = \Delta(\lambda)$ und $m = \Delta(\mu)$ die Winkel λ und μ selbst

in die Formeln für das rechtwinklige Dreieck ein, so kommt

$$(1') \quad \text{sha} = \text{sh}c \cdot \sin \lambda,$$

$$(2') \quad \text{sh}b = \text{th}a \cot \lambda,$$

$$(3') \quad \text{ch}c = \cot \mu \cdot \cot \lambda,$$

$$(4') \quad \text{ch}c = \text{ch}a \cdot \text{ch}b,$$

$$(5') \quad \cos \lambda = \text{ch}a \cdot \sin \mu,$$

$$(6') \quad \text{th}a = \text{th}c \cdot \cos \mu.$$

Aus dem Sinussatz des schiefwinkligen Dreiecks wird

$$(7) \quad \sin a : \sin b : \sin c = \sin \lambda : \sin \mu : \sin \gamma$$

und aus dem Kosinussatz

$$(8) \quad \text{ch}b = \text{ch}c \cdot \text{ch}a - \text{sh}a \cdot \text{sh}c \cdot \cos \mu.$$

Alle diese Formeln zeigen vollständige Analogie zu den Formeln im rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit der Hypotenuse c , den Katheten a und b und den gegenüberliegenden Winkeln λ und μ , beziehungsweise im schiefwinkligen sphärischen Dreieck mit den Seiten a , b , c und den gegenüberliegenden Winkeln λ , μ , ν .

Man erhält die Formeln des Dreiecks der hyperbolischen Geometrie aus denen der sphärischen, indem man in diesen letzteren die trigonometrischen Funktionen der Winkel beibehält, die der Seiten aber durch die entsprechenden hyperbolischen ersetzt. Z. B. wird aus

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

die Formel

$$\text{ch}c = \text{ch}a \cdot \text{ch}b, \quad (4)$$

aus

$$\cos c = \cot \lambda \cdot \cot \mu$$

wird

$$\text{ch}c = \cot \lambda \cot \mu \quad (3)$$

usw. Wir werden auf diesen einfachen Zusammenhang noch zurückkommen.

3. Dreiecksinhalt, ausgedrückt durch die Seiten*).

*) Vgl. Lobatschewskij, Imaginäre Geometrie, S. 10. (Abh. d. Gesch. d. Math. XIX. Leipzig 1904.)

Setzen wir den Inhalt k des Parallelendreecks (§ 12, 2) gleich 1, so wird die früher abgeleitete Inhaltsformel

$$\triangle(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

und um den Inhalt durch die Seiten auszudrücken, verfahren wir nach Lobatschefskij so:

Nach dem Kosinussatz (7) ist:

$$\cos \alpha = \frac{\text{ch } b \text{ ch } c - \text{ch } a}{\text{sh } b \text{ sh } c},$$

daher

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 + \cos \alpha = \frac{\text{ch}(b+c) - \text{ch } a}{\text{sh } b \text{ sh } c}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$a + b + c = s,$$

so kann der Ausdruck umgeformt werden in

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha &= \frac{2 \text{sh} [\frac{1}{2}(b+c+a)] \text{sh} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sh } b \text{ sh } c} \\ &= \frac{\left(e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}\right) \left(e^{\frac{s}{2}-a} - e^{a-\frac{s}{2}}\right)}{(e^b - e^{-b})(e^c - e^{-c})} = 2 \frac{(e^s - 1)(e^{s-2a} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt noch

$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = e^{s-2a} \frac{(e^{s-2b} - 1)(e^{s-2c} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}$$

und nun ergibt sich leicht die Formelreihe

$$\cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta = \frac{e^s - 1}{e^{2c} - 1} \cdot e^{c - \frac{1}{2}s} \sin \frac{1}{2} \gamma,$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta = \frac{e^{s-c} - e^c}{e^{2c} - 1} \cdot e^{c - \frac{1}{2}s} \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma,$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta = e^{\frac{1}{2}s - a} \cdot \frac{e^{s-2b} - 1}{e^{2c} - 1} \cos \frac{1}{2} \gamma,$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta = e^{\frac{1}{2}s - b} \cdot \frac{e^{s-2a} - 1}{e^{2c} - 1} \cos \frac{1}{2} \gamma,$$

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = e^{-\frac{1}{2}s} \cdot \frac{e^s + e^c}{e^c + 1} \sin \frac{1}{2} \gamma,$$

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = e^{\frac{1}{2}s} \cdot \frac{e^{-a} + e^{-b}}{e^c + 1} \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

(Das dabei erforderliche Ziehen von Quadratwurzeln ergibt immer positives Vorzeichen, da ja α, β, γ kleiner als π sind.)

Hieraus kommt endlich

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{(1 - e^{-a})(1 - e^{-b})}{e^c + 1} \cdot e^{\frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma,$$

oder

$$\sin \frac{1}{2}\Delta = \frac{\sqrt{(e^s - 1)(e^{s-2a} - 1)(e^{s-2b} - 1)(e^{s-2c} - 1)}}{(e^a + 1)(e^b + 1)(e^c + 1)}.$$

4. Der Parallelwinkel $II(p)$.

Aus

$$\cos \alpha = \text{th } a$$

folgt

$$\text{tang } \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{e^a + e^{-a} - e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a} + e^a - e^{-a}}} = e^{-a},$$

oder

$$\text{tang } \frac{1}{2}II(p) = e^{-p}$$

und daher weiter

$$\sin II(p) = \frac{2e^{-p}}{1 + e^{-2p}} = \frac{1}{\text{ch } p},$$

$$\cos II(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{1 + e^{-2p}} = \text{th } p,$$

$$\text{tang } II(p) = \frac{1}{\text{sh } p},$$

$$\cot II(p) = \text{sh } p.$$

Man kann nun auch in der oben gegebenen geometrischen Deutung der hyperbolischen Funktionen leicht den Parallelwinkel $II(p)$, der zu einem Loch p gehört, veranschaulichen.

Für Winkel ω *), den die y -Achse mit OF bildet, ist α

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{y}{x} = \text{th } v$$

*) Den Winkel ω hat schon Lambert bei der Betrachtung der hyperbolischen Funktionen eingeführt, wie Stäckel festgestellt hat (Lobatschewskij S. 245).

und

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} v}} = e^{-v}.$$

Ist also die Maßzahl v des doppelten Hyperbelsektors

$$v = 2 \text{ Sektor } AOP$$

gleich p , so ist ω der zum Lote p gehörige Parallelwinkel.

5. Anwendung der Grenzkugel.

Die Ableitungen dieses Paragraphen fußen einzig und allein auf Betrachtungen der ebenen hyperbolischen Geometrie. J. Bolyai wie Lobatschewskij haben dagegen den Zusammenhang zwischen dem ebenen rechtwinkligen und dem Dreieck auf der Grenzkugel verwendet, das man erhält, wenn man in der Ecke A im rechtwinkligen Dreieck auf der Ebene ABC die Senkrechte AE errichtet, dazu die Parallelen BE und CE zieht und dann das bei C_1 rechtwinklige Dreieck AC_1B_1 betrachtet, in dem A , B_1 und C_1 korrespondierende Punkte auf den drei Parallelen sind.

In diesem Dreieck auf der Grenzkugel sind die Winkel λ , $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{1}{2}\pi - \lambda$, die Seiten sind nach § 14, 3 leicht zu berechnen, und man findet

$$(AC_1) = S \operatorname{th} b, \quad (AB_1) = S \operatorname{th} c, \quad \text{endlich } (B_1C_1) = S \operatorname{th} a \cdot e^{-u},$$

wobei

$$u = CC_1, \quad \text{also } e^u = \operatorname{ch} b \text{ ist.}$$

Aus dem Umstand, daß auf der Grenzkugel die euklidische Geometrie gilt, folgt dann

$$(AC_1) = (AB_1) \cos \lambda,$$

d. h.

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cdot \cos \lambda$$

und

$$(C_1B_1) = (AB_1) \sin \lambda,$$

d. h.

$$\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b} = \operatorname{th} c \sin \lambda,$$

oder

$$= \operatorname{th} b \operatorname{tang} \lambda,$$

oder

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tang} \lambda,$$

in Übereinstimmung mit den hier abgeleiteten Formeln.

Auf die weiteren Formeln brauchen wir nicht einzugehen, wie wir ja auch diese Beispiele nur zur Charakterisierung des Gedankengangs jener Klassiker angeführt haben.

Endlich mag noch erwähnt werden, wie die genannten Mathematiker zu dem Schluß gelangt sind, daß die sphärische Trigonometrie vom Parallelenpostulat unabhängig ist.

Da nach § 13, 3 zu jedem ebenen rechtwinkligen Dreieck $(a, b, c; \lambda, \mu)$ ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck $(\gamma, \lambda, \beta; \alpha, \frac{\pi}{2} - \mu)$ gehört, folgt z. B. aus

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cdot \cos \lambda$$

oder, was dasselbe ist

$$\cos \beta = \cos \gamma \cdot \cos \lambda,$$

für die Hypotenuse $c_1 = \beta$ und die beiden Katheten $a_1 = \lambda$ und $b_1 = \gamma$ im rechtwinkligen sphärischen Dreieck

$$\operatorname{cose} c_1 = \operatorname{cosa}_1 \cdot \operatorname{cos} b_1,$$

und ähnlich alle andern Formeln, in genauer Übereinstimmung mit der sphärischen Trigonometrie des euklidischen Raumes.

§ 16. Beziehungen zur euklidischen Geometrie und zur Geometrie der imaginären Kugel.

1. Gültigkeit der euklidischen Geometrie im infinitesimalen Gebiet.

Untersucht man, wie sich die Formeln (1') bis (6') im infinitesimalen Gebiet gestalten, d. h., was aus ihnen wird, wenn man nur die Glieder niedrigster Ordnung bei der Entwicklung der hyperbolischen Funktionen der Seiten beibehält, also

$$\operatorname{sha} = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = a + \dots \text{ersetzt durch } a,$$

$$\operatorname{cha} = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = 1 + \frac{a^2}{2} + \dots \text{ersetzt durch } 1 + \frac{a^2}{2},$$

$$\operatorname{tha} = \operatorname{sha} : \operatorname{cha} = a + \dots \text{ersetzt durch } a,$$

so ergeben sich aus den Formeln (1') bis (6') die bekannten Beziehungen für das rechtwinklige Dreieck der euklidischen Geometrie (mit der Hypotenuse c , den Katheten a und b und den gegenüberliegenden Winkeln λ und μ). Z. B. wird aus

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \cdot \sin \lambda$$

die Formel

$$a = c \sin \lambda,$$

aus

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b$$

wird

$$1 + \frac{c^2}{2} = \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) = 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \dots,$$

oder

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

und die Inhaltsformel für das schiefwinklige Dreieck (§ 15, 3) ausgedrückt durch die Seiten verwandelt sich in die bekannte heronische Formel

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wenn wir die Summe der Seiten jetzt mit $2s$ bezeichnen.

Man sieht also, daß die Formeln der hyperbolischen Geometrie in der Tat sich asymptotisch den Formeln der euklidischen Geometrie nähern.

2. Die von Gauß angedeutete Ableitung der nichteuklidischen Geometrie*).

Das Resultat, daß im Unendlichkleinen die euklidische Geometrie gilt, überrascht nicht. Alle Figuren sind ja frei beweglich, d. h. es gelten die Kongruenzsätze natürlich auch bei beliebig kleinen Abmessungen, außerdem aber nähert sich mit abnehmendem p der Parallelwinkel dem Wert $\frac{1}{2}\pi$, also dem Wert in der euklidischen Geometrie. Hierin liegt der innere Grund des in (1) durch Rechnung gefundenen Resultates.

*) Die nicht leicht verständliche handschriftliche Notiz von Gauß (Werke VIII, S. 225—257) ist dort vom Herausgeber (Stäckel) eingehend erläutert worden als eines der wertvollsten Zeugnisse für die Beschäftigung von Gauß mit der nichteuklidischen Geometrie.

Umgekehrt kann man mit Gauß die Gültigkeit der euklidischen Geometrie im Unendlichkleinen, also die Anwendbarkeit der Formeln (1) bis (5) an die Spitze stellen und untersuchen, welche Geometrie dann im endlichen Gebiet gelten muß, wenn die Figuren beweglich sein sollen. Es zeigt sich, daß nur drei Fälle möglich sind.

Entweder gilt die euklidische, oder die hyperbolische oder endlich die sphärische Geometrie. (Auch auf der Kugel gelten ja für die aus größten Kreisbogen gebildeten Dreiecke die Kongruenzsätze, und die Winkelsumme nähert sich auch hier der Grenze zwei Rechte, wenn das Dreieck zusammenschrumpft.)

Wir können in Anlehnung an den Gedankengang von Gauß auf etwas anderem Wege zu seinem Ergebnis gelangen durch die folgende Überlegung.

Es seien x und y Abszisse und Ordinate, dann muß das Quadrat des Bogenelementes, wenn die Ebene durch eine Verschiebung in sich übergehen soll, bei der die Punkte $y = 0$ auf der x -Achse bleiben, die Form haben

$$ds^2 = dx^2 \cdot f^2(y) + dy^2.$$

$f(y)dx$ ist hier ein Element der Abstandslinie ($y = \text{konst.}$), dessen senkrechte Projektion auf der x -Achse gleich dx ist. Ferner muß $f(-y) = f(y)$ sein und $f(0)$ gleich Eins. Eine Schar von Bewegungen sei jetzt dargestellt durch

$$x_1 = X(x, y, t), \quad y_1 = Y(x, y, t),$$

wo x_1 und y_1 für $t = 0$ in x und y übergehen. Es ist also

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{t=0} = 1, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{t=0} = 1,$$

außerdem setzen wir

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0} = \xi(x, y), \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_{t=0} = \eta(x, y).$$

Die Forderung, daß weitere Bewegungen (außer $y_1 = y$, $x_1 = x + a$) möglich sind, führt auf den Ansatz: Es muß die Gleichung

$$ds_1^2 = dx_1^2 f^2(y_1) + dy_1^2 = dx^2 f^2(y) + dy^2 = ds^2$$

unabhängig von $dy : dx$ gelten, und das ergibt die Gleichungen

$$f^2(y) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 f^2(y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2,$$

$$0 = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} f^2(y) + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$1 = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 f^2(y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2.$$

Differenziert man diese Gleichungen nach t und setzt hierauf $t=0$, so kommt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} f^2 + f \frac{df}{dy} \eta = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} f^2 + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

f ist der Voraussetzung nach eine Funktion von y allein, η darf nur von x abhängen, wie die letzte Gleichung zeigt; wir wollen daher von jetzt an die Differentialquotienten von f nach y und von η nach x einfach durch Akzente bezeichnen.

Aus

$$-\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{f' \eta}{f} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\eta'}{f^2}$$

folgt dann wegen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x}$$

sofort

$$\frac{\eta''}{\eta} = f'' f - f'^2 = \text{konst.},$$

denn auf der einen Seite steht eine von y , auf der andern eine von x freie Funktion.

Es wird also auch

$$f''' f + f'' f' - 2 f'' f' = f''' f - f'' f' = 0$$

und demnach

$$f'' = c f.$$

Je nachdem c gleich Null, positiv ($+k^2$) oder negativ ($-k^2$) ist, erhält man

$$f = ay + b,$$

$$f = a \operatorname{sh} \frac{y}{k} + b \operatorname{ch} \frac{y}{k},$$

$$f = a \sin \frac{y}{k} + b \cos \frac{y}{k},$$

und wegen der Nebenbedingungen, denen f unterliegt

$$f = 1, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

$$f = \operatorname{ch} \frac{y}{k}, \quad ds^2 = dx^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{y}{k} \right) + dy^2;$$

$$f = \cos \frac{y}{k}, \quad ds^2 = dx^2 \cos^2 \left(\frac{y}{k} \right) + dy^2,$$

drei Fälle die, wie weiter unten genauer ausgeführt wird, gerade auf die euklidische, die hyperbolische und die sphärische Geometrie führen.

3. Die hyperbolische Geometrie als imaginäre Geometrie*).

Der nahe Zusammenhang zwischen hyperbolischer und sphärischer Geometrie läßt eine analytische Deutung zu, die zu einer rein analytischen Begründung der hyperbolischen Geometrie führt.

Auf der Kugel mit dem Radius $i = \sqrt{-1}$ würden im rechtwinkligen Dreieck die Formeln gelten

$$\sin \frac{a}{i} = \sin \frac{c}{i} \sin \lambda, \quad \text{d. i. } \operatorname{sha} = \operatorname{shc} \sin \lambda,$$

$$\sin \frac{b}{i} = \operatorname{tang} \frac{a}{i} \cot \lambda, \quad \text{d. i. } \operatorname{shb} = \operatorname{tha} \cdot \cot \lambda$$

*) Vgl. Lobatschewskij, Imaginäre Geometrie, S. 9. L. verwendet noch ganz besondere Sorgfalt darauf, zu zeigen, daß die Formeln nicht etwa mit geometrischen Vorstellungen im Widerspruch stehen. (Die Summe zweier Seiten muß größer sein als die dritte usw.) — Übrigens hat schon im achtzehnten Jahrhundert Lambert geahnt, daß die hyperbolische Geometrie (oder wie er sie nennt, die Geometrie mit der Hypothese des spitzen Winkels, weil dabei im Viereck mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel spitz ist) auf der Kugel gilt, deren Radius der imaginären Einheit gleich ist. (Vgl. S. 145 des S. 10, Anm. *** genannten Werkes.)

usw.; es zeigt sich, daß die hyperbolische Trigonometrie identisch ist mit der Trigonometrie auf der Kugel vom Radius i . Da nun die Formeln der sphärischen Trigonometrie aus der — als widerspruchsfrei zu betrachtenden — euklidischen abgeleitet werden können, so muß dasselbe für die daraus abgeleitete hyperbolische gelten.

Diese künstliche Begründung ist jedenfalls die kürzeste, sie ist aber sehr wenig anschaulich, weil man dabei von den Formeln aus erst auf Umwegen zu den geometrischen Begriffen Parallelwinkel, Grenzkreis usw. gelangt.

IV. Kapitel.

Längen- und Inhaltmessungen mit Anwendung von Integralen.

§ 17. Rektifikation der Zyklen.

Die in § 15, 2 abgeleiteten trigonometrischen Relationen können dazu dienen, Bogenlängen und Flächeninhalte zu bestimmen. Wir wollen in erster Linie die Rektifikation der Zyklenbogen ausführen; zugleich wird dabei die Tatsache, daß auf der Grenzkugel die euklidische Geometrie gilt (§ 13, 3), wieder hervortreten, und über einige Konstruktionen, z. B. die der Einheitsstrecke zu sprechen sein.

1. Kreis und Abstandslinie.

Denken wir uns den Umfang des Kreises vom Radius r in n gleiche Teile zerlegt, ferner zwei benachbarte Teilpunkte untereinander und mit dem Mittelpunkt verbunden. $2p$ sei die Länge der Sehne, auf die noch vom Mittelpunkt aus das Lot gefällt wird.

Dann entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse r und der kleineren Kathete p , wobei dieser Kathete der Winkel $\varphi = 2\pi : 2n$ gegenüberliegt. Es wird also

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\text{sh } p}{\text{sh } r},$$

und, wenn p sehr klein und n sehr groß ist, nahezu

$$pn = \pi \text{sh } r,$$

mit zunehmendem n (und gleichzeitig abnehmendem p) nähert sich die Sehne $2p$ immer mehr dem Bogen, und

daher bekommt man für $n = \infty$, als Größe des Kreisumfangs

$$U = \lim_{n=\infty} 2pn = 2\pi \operatorname{sh} r = \pi(e^r - e^{-r}).$$

Das zum Peripheriewinkel φ gehörige Bogenstück wird den Wert haben

$$\varphi \cdot \operatorname{sh} r,$$

der sich mit abnehmendem r dem Werte φr , d. h. der entsprechenden Größe der euklidischen Geometrie immer mehr nähert.

Um die Abstandslinie zu messen, fällen wir von der Mitte M der Strecke $FF_1 = x$ zwischen Anfangs- und Endlot PF und P_1F_1 des auszumessenden Bogenstücks das Lot auf die Sehne $PP_1 (= 2p_1)$. Dann wird

$$\operatorname{sh} p_1 = \operatorname{sh} \frac{1}{2} x \operatorname{ch} a.$$

Hälften wir jede der Strecken FM und MF_1 , so wird die Sehne $PP_2 = P_2P_1$ die Länge p_2 haben, wobei

$$\operatorname{sh} p_2 = \operatorname{sh} \frac{1}{4} x \cdot \operatorname{ch} a$$

usw. Führen wir die Teilung immer weiter, so wird

$$2^n \operatorname{sh} p_n = 2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n} \operatorname{ch} a.$$

Der aus den 2^n untereinander gleichen Sehnen p_n bestehende gebrochene Linienzug nähert sich dem Bogen PP_1 immer mehr, andererseits ist

$$\lim_{n=\infty} 2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n} = x.$$

Es wird also

$$(PP_1) = x \cdot \operatorname{ch} a.$$

2. Möglichkeit und Unmöglichkeit einiger Konstruktionen.

Für die Länge y des vom Endpunkt des Bogens α auf den zum Anfangspunkt gehörenden Radius gefällt Lotes erhält man

$$\operatorname{sh} y = \operatorname{sh} r \sin \varphi$$

also

$$\operatorname{sh} y = s \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi},$$

wächst r über alle Grenzen, während s unverändert bleibt, so kommt für den Grenzkreis:

$$s = sh y.$$

Also ist der früher (§ 14, 3) mit S bezeichnete Bogen gerade gleich 1. Im Anschluß hieran können wir zeigen, daß weder die Streckeneinheit (§ 14, 1) konstruierbar ist, noch die n -Teilung einer gegebenen geradlinigen Strecke im allgemeinen möglich ist.

Auf der Grenzkugel gilt die euklidische Geometrie, daher sind nur solche Konstruktionen auf ihr ausführbar, welche das wiederholte Ziehen von Quadratwurzeln und rationale Operationen erfordern*). Wenn nun eine gerade Strecke (a) gegeben ist, so kann man diese als Ordinate eines Grenzkreisbogens $s = sha$ auffassen, dessen Endpunkte die korrespondierenden Punkte A und B sind. Legt man durch diesen Bogen die Grenzfläche, so ist damit auf ihr eine Strecke (AB) durch ihre Endpunkte gegeben, und es können dann die Bogen $\frac{1}{2}s, \dots, \frac{1}{n}s$ usw. konstruiert werden (wir führten die n -Teilung früher in der Ebene aus, § 11, 1 Zusatz 1), ebenso bei gegebenem s_1 und s_2 die Strecke $\sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ usw.

Aus dem obenerwähnten bekannten Satz über Konstruktionen der euklidischen Geometrie folgt dann durch Übertragung auf die hyperbolische Ebene:

Sind die geradlinigen Strecken $a_1, a_2 \dots a_n$ gegeben, so kann man jede geradlinige Strecke a konstruieren, die durch eine Gleichung der Form

$$sha = F(sh a_1, sh a_2, \dots sh a_n)$$

gegeben ist, wobei die Funktion F aus ganzen Zahlen und den n Argumenten durch rationale Operationen und Quadratwurzelziehen gebildet ist.

Andere Konstruktionen sind nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar**).

*) Siehe Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen (Sammlung Schubert I, II), S. 196.

**) Gérard a. a. O. S. 86—89.

Beispiel einer ausführbaren Konstruktion: Die Strecke z anzugeben, die durch die Gleichung

$$\operatorname{sh} z = \sqrt{\operatorname{sh}^2 c - \operatorname{sh}^2 b}$$

gegeben ist.

Die Grenzbogenstücke

$$s(z) = \operatorname{sh} z, \quad s(b) = \operatorname{sh} b, \quad s(c) = \operatorname{sh} c$$

setzen auf der Grenzkugel ein rechtwinkliges Dreieck zusammen, in dem $s(z)$ eine Kathete ist. Die Ecken des Dreiecks seien A, B, C ($\sphericalangle C = \frac{1}{2}\pi$). Wir wollen annehmen, was sich leicht erreichen läßt durch Verkleinerung der Grenzbogen $s(c)$ und $s(b)$, daß die im Punkte A auf der zugehörigen Grenzkugelachse senkrecht errichtete Ebene die zu B und C gehörenden Achsen BE, CE in zwei reellen Punkten B_1 und C_1 schneidet.

Dann wollen wir das Paralleldreieck, dessen Kanten die drei genannten Achsen sind, längs der Achsen aufschneiden und in die Ebene AB_1C_1 umklappen.

Bekannt resp. leicht konstruierbar sind die Strecken AB_1 und AC_1 , daher das rechtwinklige Dreieck AB_1C_1 , also auch das in der Ebene EBB_1C_1CE von B auf C_1E gefällte Lot $BF = z$, für das $\operatorname{sh} z = (BC)$ ist, und $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$. —

Nicht konstruierbar ist z. B. die Einheitsstrecke. Für die Einheitsstrecke $S = 1$ ist

$$\operatorname{sh} S = \operatorname{sh} 1 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Die Zahl e ist nicht algebraisch, also genügt die auf der rechten Seite stehende Funktion, die in unserem Fall statt einer Funktion eine Zahl ist, nicht den für die Konstruierbarkeit notwendigen Bedingungen, und die Einheitsstrecke $S = 1$ ist nicht konstruierbar.

Auch die Streckenteilung ist nicht ausführbar, wenn sie nicht auf fortgesetzte Halbierung zurückkommt.

Es sei $a = nx$, also

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} nx,$$

dann wird

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{n}} - e^{-\frac{a}{n}} \right),$$

d. h.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{\operatorname{sh} a + \sqrt{\operatorname{sh}^2 a + 1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{\operatorname{sh} a + \sqrt{\operatorname{sh}^2 a + 1}}} \right),$$

ein Ausdruck, der nur dann bei gegebenem a konstruierbar ist, wenn n eine Potenz von 2 ist*).

Zusatz: Die Ausführung der möglichen Konstruktionen, zu denen z. B. auch die Teilung der Kreise in 5, 17 usw. Teile gehört, innerhalb der hyperbolischen Ebene bildet für sich eine interessante Aufgabe. Jede solche Aufgabe ist übrigens durch Betrachtungen aus dem Bereich der ebenen hyperbolischen Geometrie lösbar, die Grenzkugel hat uns nur als Mittel zum Beweis der Möglichkeit oder Unmöglichkeit gedient. Das einfachste Beispiel ist die n -Teilung des Grenzkreisbogens.

§ 18. Flächeninhaltsbestimmungen in der hyperbolischen Ebene.

1. Grenzkreissectoren**).

Die Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren gelingt am besten durch Zerlegung in Stücke, die von koxialen Grenzkreisbogen und Achsenstücken begrenzt sind.

Betrachten wir zwei äquidistante von denselben Achsen begrenzte Grenzkreisstücke $(A_1 B_1)$ und $(A_2 B_2)$, so wird der Inhalt des Vierecks $(A_1 A_2 B_2 B_1)$ nur von der Länge des Bogens abhängen.

Sind $C_1 C_2$ zwei weitere auf derselben Achse und auf den Verlängerungen der Grenzbogen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gelegene Punkte, so wird für die von zwei Grenzkreisbogen und je zwei Parallelen begrenzten Vierecke die Proportion bestehen:

$$(A_1 B_1 B_2 A_2) : (A_1 C_1 C_2 A_2) = (A_1 B_1) : (A_1 C_1).$$

Wir wollen den Inhalt mit J_1 bezeichnen, wenn der Bogen $(A_1 B_1)$ gleich Eins ist und ebenso die gerade

*) Es kann gezeigt werden, daß in der hyperbolischen Geometrie (im Gegensatz zur sphärischen Geometrie), die Streckenteilung auch unter Voraussetzung der Teilbarkeit der Winkel noch nicht durchführbar wird. [Archiv f. Math., dritte Reihe, Bd. V. (1903) S. 214.]

**) Vgl. Lobatschewskij S. 39.

Strecke $A_1 A_2$. Tragen wir die Einheitsstrecke noch einmal auf den Achsen ab, sodaß $A_2 A_3 = B_2 B_3$ gleich Eins ist, so wird der Inhalt J_2 des Vierecks $(A_2 B_2 B_3 A_3)$ bestimmt durch die Proportion

$$J_1 : J_2 = (A_1 B_1) : (A_2 B_2) = 1 : e^{-1}.$$

(Vgl. § 14, 1.)

Bilden wir die Summe:

$$(J) = J_1 + J_2 + \dots + J_{(n)} = J_1(1 + e^{-1} + \dots + e^{-(n-1)}) = J_1 \left(\frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} \right),$$

so zeigt sich, daß für $n = \infty$ ein endlicher Grenzwert herauskommt

$$J = J_1 \left(\frac{1}{1 - e^{-1}} \right).$$

Diesen endlichen Wert wollen wir zur Flächeneinheit*) wählen, so daß wir bekommen

$$J_1 = 1 - e^{-1}.$$

Dann wird, wenn $A_1 A_n = n \cdot 1$ ist, und $(A_1 B_1) = 1$, der Inhalt des Vierecks $(A_1 B_1 B_n A_n)$

$$(A_1 B_1 B_n A_n) = \frac{J_1(1 - e^{-n})}{(1 - e^{-1})} = 1 - e^{-n},$$

und wenn $(A_1 B_1) = s$, $A_1 A_n = x \cdot 1$ ist

$$(A_1 B_1 B_n A_n) = s(1 - e^{-x}) = J(s, x).$$

Diese Formel drückt den Inhalt des Vierecks aus, das von zwei parallelen Strecken $A_1 A_n = B_1 B_n = x$ und zwei Grenzkreisbogen $A_1 B_1 = s$, $A_n B_n = s \cdot e^{-x}$ begrenzt ist.

2. Das Flächenelement in rechtwinkligen Koordinaten.

Um noch den Ausdruck des Doppelintegrals zu geben, das zur Berechnung des Flächeninhalts dient, gehen wir von der für $J(s, x)$ abgeleiteten Formel aus, führen weiter gewisse Koordinaten ein und transformieren dann auf die rechtwinkligen Koordinaten. Seien y und x die recht-

*) Es zeigt sich später (§ 19), daß bei dieser Wahl der Flächeneinheit der Inhalt des Dreiecks seinem Defekt gleich wird, in Übereinstimmung mit § 12 und 15, 3.

winkligen Punktkoordinaten, ξ und η zwei Koordinaten, die die Lage ebenfalls bestimmen (siehe Fig. 29) und die wir Grenzkreiskoordinaten nennen wollen.

In dem Element $PP_1P_3P_2$, dessen Eckpunkte die Koordinaten haben

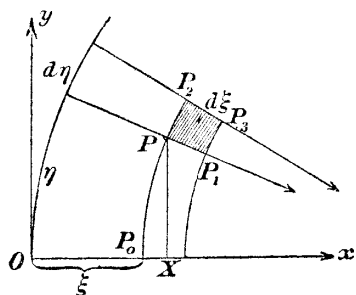


Fig. 29.

$$P: \xi, \eta$$

$$P_1: \xi + d\xi, \eta$$

$$P_2: \xi, \eta + d\eta$$

$$P_3: \xi + d\xi, \eta + d\eta,$$

sind die Seitenlängen

$$(P_1P_3) = e^{-\xi} d\eta,$$

$$PP_1 = P_2P_3 = d\xi.$$

Der Inhalt des Elements wird also

$$df = J(e^{-\xi} d\eta, d\xi) = d\eta \cdot e^{-\xi} (1 - e^{-d\xi}) = d\eta d\xi e^{-\xi}.$$

Um jetzt auf rechtwinklige Koordinaten zu transformieren, brauchen wir die Formel (vgl. § 14, 3)

$$(1) \quad (PP_0) = \eta e^{-\xi} = \text{sh } y,$$

ferner

$$(2) \quad e^{x-\xi} = \text{ch } y.$$

(1) und (2) lassen sich auch schreiben

$$e^{-\xi} = e^{-x} \text{ch } y$$

$$\eta = e^x \text{th } y.$$

Hieraus folgt leicht

$$d\xi = -e^{\xi} (-dx e^{-x} \text{ch } y + dy \text{sh } y e^{-x})$$

$$d\eta = dx e^x \text{th } y + dy \frac{e^x}{\text{ch}^2 y},$$

also

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = e^{\xi} \text{ch } y.$$

In rechtwinkligen Koordinaten wird also der Flächeninhalt ausgedrückt durch das Integral

$$F = \iint d\xi d\eta e^{-\xi} = \iint dx dy e^{\xi} \text{ch } y e^{-\xi} = \iint dx dy \text{ch } y.$$

Beispiel: Betrachten wir das von zwei Ordinaten $PF = P_1F_1 = a$, dem Achsenstück $FF_1 = x$ und dem Bogen (PP_1) der Abstandslinie begrenzte Flächenstück, so kommt für den Inhalt

$$F = \int_0^x dx \int_0^a dy \operatorname{ch} y = x \cdot \operatorname{sh} a .$$

Differenziert man nach a , so bekommt man wieder die Bogenlänge der Abstandslinie (§ 17, 1).

$$(PP_1) = x \operatorname{cha} .$$

3. Flächenelement in Polarkoordinaten. Kreisinhalt.

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck OPX ($y = PX$ ist das vom Punkte $P(x, y)$ auf die x -Achse gefällte Lot ferner $OX = x$), so ergibt sich, daß die rechtwinkligen Koordinaten x, y mit den Polarkoordinaten r, φ verknüpft sind durch die Gleichungen (§ 15, 2)

$$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{th} y : \operatorname{sh} x .$$

Es folgt daraus

$$\operatorname{sh} r \operatorname{d} r = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \operatorname{d} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \operatorname{d} y$$

$$\frac{\operatorname{d} \varphi}{\cos^2 \varphi} = - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} \operatorname{th} y \operatorname{d} x + \frac{\operatorname{d} y}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 y} ,$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sh} r} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} y} + \frac{\operatorname{sh}^2 y \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch} y \operatorname{sh}^2 x} \right) = \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} r} .$$

Der Flächeninhalt in Polarkoordinaten ausgedrückt wird also

$$\begin{aligned} \int \operatorname{d} f &= \iint \operatorname{d} x \operatorname{d} y \operatorname{ch} y = \iint \frac{\operatorname{d} r \operatorname{d} \varphi \operatorname{ch} y}{\left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)} \\ &= \iint \operatorname{d} r \operatorname{d} \varphi \cdot \operatorname{sh} r . \end{aligned}$$

Z. B. wird der Inhalt des Kreises

$$J = 2\pi \int_0^r \operatorname{d} r \operatorname{sh} r = \pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right)^2 .$$

Bei abnehmendem r nähert sich dieser Wert mehr und mehr der Größe $r^2\pi$, also dem Werte des Kreisinhalts der euklidischen Geometrie.

Differenziert man den Inhalt nach r , so ergibt sich der Umfang (§ 17, 1)

$$\frac{dJ}{dr} = 2\pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right) \left(e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} = 2\pi \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2} \right) = 2\pi \operatorname{sh} r.$$

§ 19. Der Inhalt von Dreiecken.

1. Das rechtwinklige Dreieck.

Während bei der früheren Methode der Inhaltsbestimmung (§ 12) durch Kongruenzsätze zuerst für ganz im Endlichen gelegenen Dreiecken nachgewiesen wurde, daß der Winkeldefekt unmittelbar das Maß des Inhalts ist, wollen wir jetzt ein Dreieck mit einem Nullwinkel und einem rechten Winkel zum Ausgangspunkt machen. Dabei zeigt sich, daß die Flächeneinheit (§ 18, 1) bereits so gewählt ist, daß genau wieder das frühere Resultat sich ergibt.

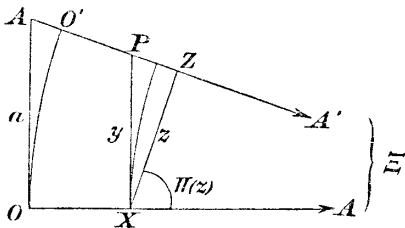


Fig. 30.

Wir legen das rechtwinklige Dreieck so, daß die unbegrenzte Kathete $O\Xi$ mit der positiven x -Achse zusammenfällt (vgl. Fig. 30).

Der Inhalt wird

$$\iint dx dy \operatorname{ch} y = \int_0^{\infty} dx \operatorname{sh} y.$$

Dabei ist nach § 17, 2.

$$\operatorname{th} y = \operatorname{sh} z = s = \operatorname{th} a \cdot e^{-x} = \cos \Pi(a) \cdot e^{-x}.$$

Demnach wird der Flächeninhalt des Dreiecks $O A \Xi$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} dx \cdot \operatorname{sh} y = \int_0^{\infty} \frac{dx \cdot \cos \Pi(a) e^{-x}}{\sqrt{1 - \cos^2 \Pi(a) \cdot e^{-2x}}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-d[\cos \Pi(a) e^{-x}]}{\sqrt{1 - \cos^2 \Pi(a) e^{-x}}} = [\operatorname{arc} \cos e^{-x} \cos \Pi(a)]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\pi - \Pi(a). \end{aligned}$$

Diese Integration zeigt also, daß der Inhalt des Dreiecks mit den Winkeln 0 , $\frac{1}{2}\pi$, $II(a)$ dem Defekt, nämlich der Größe $\frac{1}{2}\pi - II(a)$ gleich ist*).

Verlängern wir jetzt im rechtwinkligen Dreieck ABC mit lauter endlichen Seiten die eine Kathete BC unbegrenzt über C hinaus, ziehen sodann die Parallele AC' zu CC' und errichten auf AB das Lot DC' mit dem Ende C' , so zeigt sich, daß der Inhalt des Dreiecks ABC gleich ist

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle ABC' - \triangle ACC' \\ &= \triangle ADC' + \triangle BDC' - \triangle ACC' \\ &= \frac{1}{2}\pi - \lambda - II(b) + \frac{1}{2}\pi - \mu - [\frac{1}{2}\pi - II(b)] \\ &= \frac{1}{2}\pi - \lambda - \mu.\end{aligned}$$

Diese Formel zeigt, daß der Inhalt des geradlinig begrenzten Polygons seinem Winkeldefekt gleich ist, infolge der Wahl der Flächeneinheit.

2. Übergang zur euklidischen Geometrie. (Vgl. § 16, 1.)

Wir wollen noch der Formel für den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks eine solche Gestalt verleihen, daß beim Grenzübergang zur euklidischen Geometrie genau die bekannte Formel kommt:

$$\triangle = \frac{1}{2}ab.$$

Wir greifen auf die Beziehungen zurück, die bei der Aufstellung der zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke auftraten (§ 10, 1). Es folgt z. B. aus

$$2\lambda = II(c - m) - II(c + m)$$

durch Übergang zum zugeordneten Dreieck $(m', b, l; \gamma, \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$2\gamma = II(l - a') - II(l + a')$$

Ebenso ist

$$2\gamma = II(m - b') - II(m + b')$$

und, wie derselbe Übergang zeigt:

$$2\lambda = II(a' - b') - II(a' + b'),$$

*) Vgl. Lobatschefskij, Pangeometrie, S. 46.

ebenso

$$2\mu = II(b' - a') - II(a' + b')$$

also wegen

$$II(b' - a') = \pi - II(a' - b') \text{ weiter}$$

$$\lambda + \mu = \frac{\pi}{2} - II(a' + b')$$

oder

$$\Delta = \frac{\pi}{2} - \lambda - \mu = II(a' + b').$$

Diese Formel drückt den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks durch die Katheten aus*), Sodann ist noch der Grenzübergang auszuführen.

Es wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} II(a' + b') = e^{-(a' + b')} \\ &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} II(a') \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} II(b') \\ &= \operatorname{tang} [\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} II(a)] \cdot \operatorname{tang} [\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} II(b)] \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta &= \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} \cdot \frac{1 - e^{-b}}{1 + e^{-b}}. \end{aligned}$$

Entwickelt man in Reihen und schreibt nur die Anfangsglieder hin, so kommt

$$\frac{1}{2} \Delta + \dots = \frac{a - \dots}{1 + 1 - a + \dots} \cdot \frac{b - \dots}{1 + 1 - b + \dots}$$

oder, wie es sein muß,

$$\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

§ 20. Die Sphären und Kegel.

1. Räumliche Polarkoordinaten und die Kugel.

Bei der Berechnung von Körperinhalt und Oberflächen wollen wir davon Gebrauch machen, daß im unendlich kleinen Gebiet die euklidische Geometrie gilt, eine Tatsache, die schon in der Ebene (§ 18) die Rechnung erleichtert und z. B. gestattet hätte, unmittelbar die Formeln für das Flächenelement hinzuschreiben, ohne die Grenzkreissectoren voranzustellen und hinterher die Transfor-

*) Vgl. Lobatschewskij, Pangeometrie, S. 60.

mationen auf die anderen Koordinatensysteme unter Benutzung von Funktionaldeterminanten rechnerisch auszuführen.

Wir führen zuerst räumliche Polarkoordinaten ein: r (Entfernung vom Koordinatenanfang O), φ (geographische Länge) und ϑ (Breite). Von Punkt P aus fallen wir noch das Lot $PZ = \varrho$, auf die Polarachse ($\vartheta = \frac{1}{2}\pi$) und haben dann in dem rechtwinkligen Dreieck OPZ noch die Relation:

$$\cos \vartheta = \sin(\frac{1}{2}\pi - \vartheta) = \text{sh } \varrho : \text{sh } r .$$

Der Umfang des durch den Punkt P gelegten Parallelkreises wird (§ 17, 1)

$$2\pi \text{sh } \varrho = 2\pi \text{sh } r \cos \vartheta .$$

Betrachten wir jetzt das unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipedon, bei dem die drei dem Punkt P benachbarten Ecken die Koordinaten haben

$$P_1 : r + dr, \vartheta, \varphi$$

$$P_2 : r, \vartheta + d\vartheta, \varphi$$

$$P_3 : r, \vartheta, \varphi + d\varphi ,$$

so haben wir die Kantenlängen

$$PP_1 = dr, PP_2 = \text{sh } r \cdot d\vartheta, PP_3 = \text{sh } r \cos \vartheta \cdot d\varphi .$$

Daraus ergibt sich für das Volumen das dreifache Integral

$$V = \iiint dr d\varphi d\vartheta \text{sh}^2 r \cos \vartheta .$$

Der Inhalt der Kugel vom Radius r wird z. B.*)

$$K = \int_0^r \text{sh}^2 r dr \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_0^r (e^{2r} - 2 + e^{-2r}) dr$$

$$K = \frac{1}{2} \pi (e^{2r} - e^{-2r} - 4r) .$$

Für sehr kleines r hat man

$$K = \frac{\pi}{2} \left(4r + 2 \cdot \frac{8r^3}{6} \dots - 4r \right),$$

*) Vgl. Lobatschewskij S. 50 (Gl. 56).

also angenähert

$$K = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Die Kugeloberfläche ist gegeben durch das Integral

$$F = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \text{sh}^2 r \, d\theta \, \cos \theta \, d\varphi = 4\pi \cdot \text{sh}^2 r,$$

ein Ausdruck, der für kleine Werte von r sich der Funktion $4r^2\pi$ nähert und auch durch Differentiation von K nach r sich ergibt.

2. Rechtwinklige Koordinaten und die Abstandsfläche.

Die rechtwinkligen Punktkoordinaten im Raum seien x, y, z . (z die Länge des Lotes auf die xy -Ebene, y die Länge des vom Fußpunkt von z auf die x -Achse gefällten Lotes, x der Abstand zwischen diesem Punkt der x -Achse und dem Koordinatenanfang O).

Die Punkte $P_1 P_2 P_3$ mögen die Koordinaten haben $x + dx, y, z$; $x, y + dy, z$; $x, y, z + dz$.

Dann ist

$$PP_3 = dz$$

$$PP_2 = dy \operatorname{ch} z \quad (\S 18, 2)$$

$$PP_1 = dx \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z.$$

(Die Projektion der Strecke PP_1 auf die xy -Ebene ist $dx \operatorname{ch} y$, daher PP_1 selber gleich $dx \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z$.)

Wir berechnen jetzt das Volumen einer Röhre, die seitlich von Loten auf der xy -Ebene begrenzt ist, als Grundfläche ein Stück f dieser Ebene hat, und als Deckfläche das von dieser Röhre ausgeschnittene Stück der Abstandsfläche $z = z_0$.

Das Volumen wird *)

$$V = \iiint dx \, dy \, dz \operatorname{ch} y \operatorname{ch}^2 z = f \int_0^{z_0} dz \operatorname{ch}^2 z$$

$$V = \frac{f}{8} (e^{2z_0} + 4z_0 - e^{-2z_0}).$$

$$= \frac{f}{8} \left(8z_0 + \frac{16z_0^3}{6} + \dots \right).$$

*) Bei Lobatschewskij, S. 52 (Gl. 59) findet sich diese Formel für das Raumelement, nur stehen, wie überall bei Lobatschewskij, die trigonometrischen Funktionen des Parallelwinkels an Stelle der hyperbolischen Funktionen der Strecken.

Der Flächeninhalt der Deckfläche wird

$$F = \iint dx dy \operatorname{ch} y \cdot \operatorname{ch}^2 z_0 = \operatorname{ch}^2 z_0 \cdot f.$$

Die Länge eines Kurvenstückes auf der Abstandsfäche unterscheidet sich von der Projektion durch den Faktor $\operatorname{ch} z_0$.

3. Die Grenzkugel.

Wir führen folgende Koordinaten ein: ζ die Länge des Lotes, das vom Punkte P auf eine bestimmte Grenzkugel gefällt ist, die durch den Koordinatenanfang O geht und die positive z -Achse zur Achse hat. Durch dieses Lot werden dann noch die Ebenen senkrecht zur xz -Ebene und senkrecht zur yz -Ebene gelegt und die Grenzkreisstücke, die sie bis zu diesen Ebenen hin auf der Grenzkugel ausschneiden, mit η und ξ bezeichnet.

Betrachten wir hier ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten sind

$$\begin{aligned} PP_3 &= d\zeta & (P_3 : \xi, \eta, \zeta + d\zeta) \\ PP_2 &= d\eta \cdot e^{-\zeta} & (P_2 : \xi, \eta + d\eta, \zeta) \\ PP_1 &= d\xi e^{-\zeta} & (P_1 : \xi + d\xi, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

so wird sein Inhalt

$$d\xi d\eta d\zeta e^{-2\zeta}.$$

Der Rauminhalt des Körpers, der von zwei coaxialen Grenzkugelflächenstücken ($\zeta = 0$ und $\zeta = \zeta_0$) und von gemeinsamen Achsen der Flächen begrenzt ist, wird also

$$V = \frac{1}{2} f (1 - e^{-2\zeta_0}),$$

wenn f das auf der Fläche $\zeta = 0$ ausgeschnittene Stück ist.

4. Der asymptotische Kegel.

Wir wollen die soeben eingeführten Koordinaten noch benutzen, um den Inhalt des geraden Kegels zu berechnen, dessen Grundfläche ein Kreis vom Radius r ist, und dessen Kanten alle dem im Mittelpunkt des Kreises ertreteten Lot parallel sind.

Auf der Grenzfläche $\zeta = 0$ können wir noch gewöhnliche Polarkoordinaten einführen, indem wir setzen

$$\xi = \varrho \cos \varphi, \quad \eta = \varrho \sin \varphi.$$

Wählen wir jetzt zur Achse des asymptotischen geraden Kegels die z -Achse, so wird das Integral übergehen in

$$K = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint \varrho d\varrho d\zeta e^{-2\zeta} = 2\pi \iint \varrho d\varrho d\zeta e^{-2\zeta}.$$

Das Doppelintegral ist über eine Fläche zu erstrecken, die von zwei zur z -Achse symmetrisch gelegenen Parallelen einerseits und andererseits von der Strecke $2r$ begrenzt ist, die die Parallelen in korrespondierenden Punkten trifft.

Das Doppelintegral ist in bezug auf ζ zwischen den Grenzen ζ_0 und ∞ zu erstrecken, wobei

$$e^{-\zeta_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varrho^2}},$$

ist, und nach ϱ zwischen den Grenzen 0 und ϱ_1 , wobei der Radius r des Grundkreises mit ϱ_1 durch die Beziehung verknüpft ist

$$\text{th } r = \varrho_1.$$

Es kommt also

$$\begin{aligned} K &= 2\pi \int_0^{\varrho_1} \frac{\varrho d\varrho}{2(1 - \varrho^2)} = -\frac{\pi}{2} \log(1 - \varrho_1^2) \\ &= -\frac{\pi}{2} \log \left(\frac{(e^r + e^{-r})^2 - (e^r - e^{-r})^2}{(e^r + e^{-r})^2} \right) = \pi \log \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right); \end{aligned}$$

d. h.

$$K = 2\pi \log \text{ch } r.$$

Auch die Mantelfläche dieses Kegels ist leicht zu berechnen. Schneidet man den Kegel längs einer Kante auf und rollt in die Ebene ab, so bekommt man einen Grenzkreisesektor, dessen Inhalt nach § 18, 2 ist

$$M = 2\pi \text{sh } r.$$

5. Der Kreiskegel mit reeller Spitze.

Wir führen noch Zylinderkoordinaten ein:

φ = Winkel der Meridianebene gegen eine bestimmte Anfangsebene.

ϱ = Länge des Lotes auf die z -Achse.

z = Abstand des Fußpunktes dieses Lotes vom Koordinatenanfang.

Betrachtet man die Punkte $P(\varphi, \varrho, z)$, $P_1(\varphi + d\varphi, \varrho, z)$, $P_2(\varphi, \varrho + d\varrho, z)$, $P_3(\varphi, \varrho, z + dz)$, so ist

$$PP_1 = \text{sh } \varrho \, d\varphi$$

$$PP_2 = d\varrho$$

$$PP_3 = \text{ch } \varrho \, dz.$$

Das Volumelement wird dann

$$dV = \text{sh } \varrho \, \text{ch } \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz.$$

Der Kegel hat dann den Rauminhalt

$$2\pi \int_0^h dz \int_0^{\varrho_0} \text{sh } \varrho \, \text{ch } \varrho \, d\varrho.$$

Dabei ist h die Höhe, ϱ_0 der Parallelkreis, der von der Ebene $z = \text{konst.}$ ausgeschnitten wird. Das Integral wird

$$K = 2\pi \int_0^h dz \frac{(\text{ch}^2 \varrho_0 - 1)}{2} = \pi \left(\int_0^h dz \, \text{ch}^2 \varrho_0 - h \right).$$

Ist α der Winkel zwischen Höhe und Mantellinie, so ist nach § 15, 2

$$\text{th } z = \cos \alpha \, \text{th } r,$$

$$\text{sh } \varrho_0 = \text{sh } r \sin \alpha,$$

also wenn man die Länge r der Mantellinie zwischen der Höhe 0 und der Höhe z als neue Veränderliche einführt

$$\begin{aligned} dz \, \text{ch}^2 \varrho_0 &= \cos \alpha \frac{dr}{\text{ch}^2 r} \cdot \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha \, \text{th}^2 r} \cdot (1 + \sin^2 \alpha \, \text{sh}^2 r) \\ &= \cos \alpha \, dr, \end{aligned}$$

und*)

$$K = \pi (m \cos \alpha - h),$$

wobei m die Länge der ganzen Mantellinie von der Spitze ($z = 0$) bis zur Grundfläche ($z = h$) ist.

Den Übergang zur euklidischen Geometrie bekommt man, wenn man die Gleichung hinzuzieht:

$$\text{th } h = \cos \alpha \cdot \text{th } m,$$

d. h.

$$h = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \cos \alpha \cdot \text{th } m}{1 - \cos \alpha \cdot \text{th } m} \right).$$

*) Vgl. Lobatschewskij, S. 49 Gl. 55, wo dann auch im Anschluß der Grenzübergang ausgeführt wird.

Ist m sehr klein und h auch, so kommt

$$\begin{aligned} K &= \pi \left(m \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{th} m - \frac{\cos^3 \alpha \operatorname{th}^3 m}{3} \dots \right) \\ &= \pi \left[m \cos \alpha - \cos \alpha \left(m - \frac{m^3}{3} \right) + \cos^3 \alpha \frac{m^3}{3} \dots \right] \\ &= \pi \frac{m^3}{3} \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

wie in der euklidischen Geometrie. —

Die Mantelfläche wird

$$M = 4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{m}{2} \sin \alpha = m^2 \pi \sin \alpha + \dots$$

6. Der Kegel mit idealer Spitze.

Wir untersuchen noch das Volumen des Körpers, der durch Rotation einer Geraden um eine andere entsteht, wenn die beiden Geraden ein gemeinsames Lot haben.

In einem Meridianschnitt, also auf einer Mantellinie der Fläche, die von der den Mantel senkrecht schneidenden Ebene $z = 0$ und der Ebene $z = h$ begrenzt sein möge, bezeichnen wir mit ζ den Abschnitt von einem Punkt der Kegelkante bis zur Ebene $z = 0$, mit ϱ das von dem Punkt auf die Achse gefällte Lot.

Das Volumen ist dann

$$V = \pi \left(\int_0^h dz \operatorname{ch}^2 \varrho - h \right),$$

wobei sich das erste Integral noch auswerten läßt mit Hilfe der Formeln für das dreieckwinklige Viereck, die ja aus denen des rechtwinkligen Dreiecks folgen (§ 15, 2)

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{th} \zeta}{\operatorname{ch} a}, \quad \operatorname{sh} \varrho = \operatorname{ch} \zeta \operatorname{sh} a.$$

Führt man ζ als Veränderliche ein, so wird

$$\operatorname{ch}^2 \varrho = 1 + \operatorname{ch}^2 \zeta \operatorname{sh}^2 a$$

und

$$dz \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}^2 \zeta \operatorname{ch} a \left(1 - \frac{\operatorname{th} \zeta}{\operatorname{ch}^2 a} \right)} = \frac{\operatorname{ch} a d\zeta}{\operatorname{ch}^2 \zeta \operatorname{sh}^2 a + 1},$$

also, wenn mit m der Abschnitt auf der Meridiangeraden zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = h$ bezeichnet wird

$$\int_0^h dz \cdot \operatorname{ch}^2 \varrho = \operatorname{ch} a \int_0^m d\zeta = \operatorname{ch} a \cdot m.$$

Das Volumen wird also

$$V = \pi (m \cdot \operatorname{ch} a - h).$$

Setzt man hierin für m seinen Wert ein

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \operatorname{ch} a \operatorname{th} h}{1 - \operatorname{ch} a \operatorname{th} h} \right) \\ &= \left(h - \frac{h^3}{3} \dots \right) \left(1 + \frac{a^2}{2} \dots \right) + \left(\frac{h^3}{3} \dots \right) (1 + \dots), \end{aligned}$$

so kommt

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\left(h - \frac{h^3}{3} \dots \right) (1 + a^2 + \dots) + \frac{h^3}{3} + \dots - h \right] \\ &= \pi h \cdot a^2 + \dots \end{aligned}$$

Für kleine Werte von a und h also kommt näherungsweise derselbe Wert wie in der euklidischen Geometrie. —

Die Mantelfläche wird

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} m \\ &= 2\pi (a + \dots) \frac{\operatorname{th} h \operatorname{ch} a}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 h \operatorname{ch}^2 a}} = 2\pi a h + \dots \end{aligned}$$

§ 21. Das Tetraeder. *)

1. Das einfach asymptotische Tetraeder mit rechtwinkligen Grundfläche.

Wir könnten die in § 20, 4 gegebene Formel benutzen, um das Tetraeder zu berechnen, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist mit den Katheten a und b und

*) Stäckel hat eine Übersicht über verschiedene Wege zur Inhaltsberechnung des Tetraeders nach Gauß, Lobatschewskij und Bolyai gegeben. (Math. und naturw. Berichte aus Ungarn. XVIII, 1902, S. 297—307.) Vgl. auch die Dissertation von F. Dannmeyer. Die Oberflächen- und Volumberechnung für den Lobatschewskij'schen Raum mit besonderer Berücksichtigung der Rotationskörper und Polyeder (Kiel, 1904).

der Hypotenuse c , dessen drei weitere Kanten parallel sind und von denen eine (h) im Punkte $B(a, c)$ auf der Grundfläche senkrecht steht.

Man gelangt dabei zu der Formel

$$T = \int_0^\beta d\varphi \log \operatorname{chr},$$

dabei ist

$$\cos\varphi \operatorname{thr} = \operatorname{tha}, \quad \text{und} \quad \cos\beta \cdot \operatorname{th}c = \operatorname{tha}.$$

Das ergibt sich durch Zerlegung in Sektoren mit Hilfe von Ebenen, die durch B gehen und auf der Grundebene senkrecht stehen.

Wir wollen noch eine andere Zerlegung vornehmen, nämlich in Scheiben, deren Begrenzungsebenen auf der durch h und a gelegten Ebene senkrecht stehen und diese Ebene in Parallelen zu h schneiden.

Die Grundfläche der Scheibe ist ein Viereck mit zwei rechten Winkeln, von dem eine Seite gleich dx , die andere gleich y ist.

Führen wir die in § 20, 4 gebrauchten Koordinaten ein, so ergibt sich als Inhalt der Lamelle

$$d\xi \int \int d\eta d\zeta e^{-2\xi}.$$

Dabei ist

$$\xi = \operatorname{th}x;$$

η ist von Null bis zur Grenze $\operatorname{th}y : \operatorname{ch}x$ zu integrieren, und die Grenzen von ζ sind bestimmt durch

$$e^\zeta = 1 : \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y, \quad \zeta = \infty.$$

Dann kommt also

$$dV = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} \int_0^y \frac{dy}{\operatorname{ch}^2 y \operatorname{ch} x} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 y \operatorname{ch}^2 x,$$

d. h.

$$dV = \frac{1}{2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \cdot y,$$

wofür man nach § 15, 4 auch schreiben kann

$$dV = -\frac{1}{2} dII(x) \cdot y.$$

Das Volumen wird also

$$V = \frac{1}{2} \int_{II(a)}^{\frac{1}{2}\pi} dII(x) \cdot y,$$

und hierin kann für y noch sein Wert eingesetzt werden

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \operatorname{sh} x \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{sh} x \operatorname{tang} \beta} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cot II(x) \operatorname{tang} \beta}{1 - \cot II(x) \operatorname{tang} \beta} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sin(II(x) + \beta)}{\sin(II(x) - \beta)}. \end{aligned}$$

Das Volumen wird also*)

$$V = \frac{1}{4} \int_{II(a)}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \log \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\varphi - \beta)}.$$

2. Ein bestimmtes endliches Tetraeder**).

Wir haben oben (§ 12, 2) gesehen, wie das Dreieck sich berechnen läßt durch Addition und Subtraktion von Dreiecken mit je einer unendlich fernen Ecke. Drei solche asymptotische Dreiecke waren nötig, um jedes beliebig endliche Dreieck zu erhalten. Genau so kann ein bestimmtes endliches Tetraeder aus vier asymptotischen Tetraedern von der in (1) beschriebenen Art erhalten werden.

Wir wollen die Zusammensetzung zeigen und angeben, wie man zu den trigonometrischen Relationen gelangt, welche die in den verschiedenen Integralen vorkommenden Stücke mit den Bestimmungsstücken des Tetraeders verknüpfen.

Dieses spezielle Tetraeder hat als Seitenflächen vier rechtwinklige Dreiecke, die sich in vier Paare anordnen. Die Dreiecke eines Paares haben jedesmal eine Kathete gemein (z. B. $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ die Kathete AC ; $\triangle BCD$ und DBA die Kathete BD).

Endlich verlängern wir die Höhe $BD = h$ unbegrenzt über D hinaus und ziehen durch A und C die Parallele dazu. Dann wird noch CD und AD über D hinaus ver-

*) Lobatschewskij S. 56 (Gl. 73).

***) Lobatschewskij S. 57 (Gl. 76).

längert bis zu den Punkten E und F ($ED' \parallel DD'$ und $\sphericalangle DED' = \frac{1}{2}\pi$; $\sphericalangle EFD = \frac{1}{2}\pi$, $FD' \parallel DD'$).

Da $DC \perp AC$, steht ED' auf der Tetraederebene ACD senkrecht, und man sieht nun, wie sich das Tetraeder aus lauter asymptotischen Tetraedern zusammensetzt. Wir wollen ein asymptotisches Tetraeder mit rechtwinkliger Grundfläche, bei dem eine Kante in der Ecke B auf der Grundfläche senkrecht steht, während bei C der rechte Winkel ist, bezeichnen mit

$$T(A, B, C).$$

Dann ist der Inhalt des Tetraeders

$$V = T(A, B, C) - T(A, E, C) + T(A, E, F) - T(D, E, F)$$

und alle vier Größen T sind Integrale der Gestalt

$$T = \frac{1}{4} \int_{H(a)}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \log \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\varphi - \beta)}.$$

Im zweiten Tetraeder tritt an Stelle von a und β :

$$CE \text{ und } \sphericalangle AEC.$$

Im dritten Tetraeder tritt an Stelle von a und β :

$$EF \text{ und } \sphericalangle AEF.$$

Im vierten Tetraeder tritt an Stelle von a und β :

$$EF \text{ und } \sphericalangle DEF.$$

Der Wert von CE ergibt sich daraus, daß $DE (= CE - CD)$ das Lot ist, das zum Parallelwinkel $\sphericalangle CDB$ gehört; von dem rechtwinkligen Dreieck ACE kennt man hiermit die beiden Katheten, also auch AE und den Winkel AEC . Hieraus ergeben sich leicht die nötigen Elemente des dritten und vierten Tetraeders.

Auch kann man das Volumen in Form eines einfachen Integrals angeben, anknüpfend an § 20, 4. Es wird dann

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\varphi m \cdot \cos \psi - \frac{1}{2} \beta h.$$

Dieser Wert ergibt sich, wenn man in Sektoren zerlegt durch Ebenen, die $BD = h$ zur gemeinsamen Achse

haben. φ ist der Winkel, den diese Ebenen mit DBC bilden, m die Länge der Schnittgeraden einer solchen Ebene und der Ebene DAC , gerechnet von D bis zum Schnitt mit AC , und ψ der Winkel zwischen m und DB .

Es ist also

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\psi &= \operatorname{thr} : \operatorname{sh}h \\ \operatorname{ch}m &= \operatorname{chr} \cdot \operatorname{ch}h,\end{aligned}$$

wobei r zu bestimmen ist aus

$$\operatorname{thr} = \operatorname{tha} : \cos\varphi.$$

Bemerkung: Aus Tetraedern der hier behandelten Art kann jedes Tetraeder zusammengesetzt werden: Man fälle von einer Ecke (D) aus das Lot DE auf die Grundfläche, lege durch DE die drei Ebenen durch A , B und C , und die drei Ebenen senkrecht zu AB , BC und CA , dann erhält man sechs Elementartetraeder der genannten Art.

§ 22. Das Bogenelement und die Abbildung auf die Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes*).

1. Die quadratische Differentialform für das Bogenelement.

Wir wollen noch die quadratische Differentialform für das Bogenelement aufstellen, und zwar in den drei verschiedenen, schon früher (§ 18) gebrauchten Koordinatensystemen.

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P , $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ die von P_1 . Von P aus fallen wir das Lot $PQ = q$ auf P_1F_1 , und bezeichnen noch P_1Q mit z , QF_1 mit z_1 , PP_1 mit Δs .

Dann ist, bis auf Größen höherer Ordnung

$$\Delta s^2 = q^2 + z^2,$$

und in dem Viereck FF_1QP , das bei F , F_1 und Q rechtwinklig ist, ergibt sich (§ 15)

$$\operatorname{sh}\Delta x = \frac{\operatorname{sh}q}{\operatorname{ch}y},$$

*) Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Giorn. Mat. VI (1808) p. 285—315. — Vgl. Sammlung Schubert XLIV, S. 148 ff.

d. h.

$$q = \Delta x \cdot \operatorname{ch} y + \dots$$

und

$$\operatorname{ch} \Delta x = \operatorname{th} y \cdot \operatorname{cth} z,$$

d. h.

$$z_1 = y + \frac{\Delta x^2}{2} (\) + \dots$$

Es wird also

$$z = y + \Delta y - z_1 = \Delta y + \dots$$

und

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 \operatorname{ch}^2 y + \Delta y^2 + \dots$$

Bei rechtwinkligen Punktkoordinaten bekommt man also das Quadrat des Bogenelementes

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 \operatorname{ch}^2 y + dy^2.$$

Geht man zu Polarkoordinaten über, setzt man also

$$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{sh} x},$$

so kommt

$$(2) \quad ds^2 = \operatorname{sh}^2 r d\varphi^2 + dr^2,$$

und bei Einführung von Grenzkreisordinaten endlich, die durch die Gleichungen (§ 18)

$$e^{-\xi} = e^{-x} \operatorname{ch} y$$

$$\eta = e^x \operatorname{th} y$$

gegeben sind, wird

$$(3) \quad ds^2 = d\xi^2 + e^{-2\xi} d\eta^2.$$

2. Abbildung auf die Pseudosphäre.

Die Formel (3) dient zum Nachweis, daß die hyperbolische Ebene sich in der Weise auf die Rotationstraktrix des euklidischen Raumes (Pseudosphäre) abwickeln läßt, wobei der Parallelenschar $\eta = \text{constans}$ die Meridiane, den Grenzkreisen $\xi = \text{constans}$ aber die Parallelkreise der genannten Fläche des euklidischen Raumes entsprechen.

Stellen wir die Gleichung der Traktrix auf aus der Bedingung, daß die Länge der Tangente von Punkt (r, z)

— wir betrachten einen Meridianschnitt der Fläche — bis zur Asymptote ($r = 0$) konstant ist, so führt das auf die Differentialgleichung:

$$r^2 \left[\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2.$$

Die Länge der Tangente ist dabei gleich Eins angenommen.

Die Gleichung wird erfüllt, wenn man setzt

$$r = e^{-\xi}, \quad z = \int_0^{\xi} \sqrt{1 - e^{-2\xi}} d\xi.$$

Das Bogenelement der Fläche

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \int_0^{\xi} \sqrt{1 - e^{-2\xi}} d\xi$$

ist also gegeben durch

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = d\xi^2 + e^{-2\xi} d\varphi^2,$$

und hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung.

3. Die anderen Typen von Rotationsflächen konstanten negativen Krümmungsmaßes.

Setzt man

$$r = a \cdot \operatorname{ch} u, \quad z = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sh}^2 u} du,$$

so wird

$$ds^2 = du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u d\varphi^2,$$

und die Substitution

$$a\varphi = x, \quad u = y$$

bildet diese Rotationsfläche ab auf die hyperbolische Ebene. Den Meridianen ($\varphi = \text{konst.}$) entsprechen Gerade mit gemeinsamem Lot, den Parallelkreisen Abstandslinien. Der Minimalwert von r ist a (für $u = 0$), und die Fläche hat die Form von aufeinandergesetzten Serviettenringen. Sie macht die Divergenz der Geraden mit gemeinsamem Lot anschaulich; das gemeinsame Lot erscheint eben als Kehlkreis $r = a$.

Setzt man

$$r = a \operatorname{sh} u, \quad z = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \operatorname{ch}^2 u} du,$$

so wird

$$ds^2 = du^2 + (a d\varphi)^2 \operatorname{sh}^2 u.$$

Die Gleichungen

$$u = r, \quad a\varphi = \psi$$

geben die Abbildung auf die hyperbolische Ebene. Die Meridiane werden in ein Geradenbüschel übergehen, die sich im Mittelpunkte der konzentrischen Kreise schneiden, welche den Parallelkreisen entsprechen.

Die Fläche hat im Punkte $u = 0$ eine Spitze, einen konischen Punkt, und besteht aus übereinandergesetzten spindelförmigen Körpern, die an Doppelkegel erinnern.

4. Beltramis Begründung der hyperbolischen Geometrie.

Die hyperbolische Ebene ist auf alle Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes (-1) abwickelbar. Um das nachzuweisen, hätte eine einzige der drei hier gegebenen Abbildungen genügt, etwa die auf die Pseudosphäre; denn alle Flächen mit dem Krümmungsmaß -1 sind aufeinander abwickelbar*), und zwar jede auf die andere noch in ∞^3 verschiedenen Arten. Nun kann man aus der Form des Bogenelementes heraus, d. h. aus dem quadratischen Differentialausdruck ds^2 , die ganze Trigonometrie entwickeln. Das gibt eine neue Begründung der hyperbolischen Geometrie: Mit dem euklidischen Raum müssen die Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes als gegeben, d. h. als widerspruchsfreie Gebilde betrachtet werden, also auch die hyperbolische Geometrie.

Ein vollkommenes kongruentes Abbild der hyperbolischen Geometrie kann man aber im euklidischen Raum nicht geben: Keine Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes kann vollkommen auf die hyperbolische Ebene abgewickelt werden; denn alle diese Flächen haben Singularitäten**).

Für die Rotationstraktrix (1) z. B. ist $\xi = 0$ eine Rückkehrkante, für die erste in (3) genannte Fläche ebenso der Parallelkreis u_0 , bestimmt durch $sh u_0 = 1 : a$, für die dritte der Kreis u_0 , bestimmt durch $ch u_0 = 1 : a$; außerdem hat sie ja für $u = 0$ einen konischen Punkt.

Während also im hyperbolischen Raum singularitäten-

*) Vgl. Sammlung Schubert XLIV, S. 139, Satz 1; ferner § 28.

***) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, II. Aufl. Leipzig 1909, S. 251.

freie auf die euklidische Ebene abwickelbare Flächen — die Grenzkugeln — sich vorfinden, ist das Umgekehrte nicht der Fall.

Zusatz: Wir hatten früher (§ 16, 2) aus der Forderung der Beweglichkeit der Ebene in sich die drei Formen für das Quadrat des Bogenelements abgeleitet.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad ds^2 = dx^2 \cos^2 \frac{y}{k} + dy^2,$$

$$ds^2 = dx^2 \operatorname{ch}^2 \frac{y}{k} + dy^2$$

und dies sind, wenn wir in den beiden letzten $k = 1$ setzen, was nur auf eine Änderung der Maße hinauskommt, gerade die Ausdrücke für das Quadrat des Bogenelements in der Euklidischen Ebene, auf der Kugel, deren rechtwinklige Koordinaten ξ , η , ζ gegeben sind durch

$$\xi = \cos y \cdot \cos x, \quad \eta = \cos y \cdot \sin x, \quad \zeta = \sin y$$

und in der hyperbolischen Ebene; d. h. die drei möglichen Werte von $f(y)$ in

$$ds^2 = dx^2 f^2(y) + dy^2$$

führen gerade auf euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie.

V. Kapitel.

Die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene und ihre Darstellungen in der euklidischen Ebene.

§ 23. Die Weierstraßschen Koordinaten.

1. Einführung der Koordinaten. Gleichung der Geraden.

Um die Geometrie auf der Kugel vom Radius 1 in der euklidischen Geometrie analytisch zu behandeln, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten lautet

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

empfiehlt es sich für viele Zwecke, nicht geographische Länge (λ) und Breite (φ) zu benutzen, mit deren Hilfe x , y und z dargestellt werden durch

$$x = \cos \lambda \cdot \cos \varphi, \quad y = \sin \lambda \cdot \cos \varphi, \quad z = \sin \varphi,$$

sondern eben die rechtwinkligen Koordinaten beizubehalten: Bei Anwendung der durch die Gleichung verbundenen x , y und z wird die Gleichung eines Hauptkreises (größten Kreises) linear und homogen, die Gleichung eines sphärischen Kegelschnittes wird homogen vom zweiten Grade usw.

Entsprechend kann man mit Vorteil statt der rechtwinkligen Koordinaten x und y (oder ρ und η in Fig. 31) sich der von Killing*) wohl zuerst in großem Umfang benutzten homogenen Weierstraßschen Koordinaten be-

*) Vgl. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung (Leipzig 1885). — Gérard in seiner Dissertation und Hausdorff (in der auf S. 45 zitierten Arbeit) wenden ebenfalls diese Koordinaten an als „das vorgeschriebene analytische Instrument zur Entwicklung der nichteuklidischen Metrik ohne projektive Einleitung“.

dienen, um eine elegante Darstellung der hyperbolischen Geometrie zu erhalten.

Diese Koordinaten sind:

$$x = \text{sh } \xi, \quad y = \text{sh } \eta, \quad p = \text{chr}$$

[entsprechend bedeuten oben x , y und z die Sinus der sphärischen Abstände eines Punktes von zwei zueinander senkrechten Meridianen ($\lambda = \frac{\pi}{2}$ und $\lambda = 0$) und den Cosinus des Polabstandes] und es wird dann

$$p = \text{ch } \eta \text{ ch } \varrho = \text{ch } \xi \text{ ch } \sigma,$$

$$x = \text{sh } \xi = \text{sh } \varrho \text{ ch } \eta,$$

$$y = \text{sh } \eta = \text{sh } \sigma \cdot \text{ch } \xi.$$

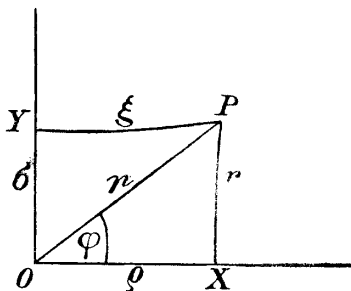


Fig. 31.

Hieraus folgt übrigens

$$p^2 - x^2 - y^2 = (\text{ch}^2 \varrho - \text{sh}^2 \varrho) \text{ch}^2 \eta - \text{sh}^2 \eta = 1.$$

Wir stellen sogleich auch die Gleichung der Geraden auf, zunächst dreier speziellen Geraden.

Für jeden Punkt einer Geraden, die durch den Koordinatenanfang geht und den Winkel $\varphi = \alpha$ mit der x -Achse bildet, ist

$$y = \text{sh } \eta = \text{sh } r \cdot \sin \alpha$$

$$x = \text{sh } \xi = \text{sh } r \cdot \cos \alpha,$$

also

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0.$$

Ist ϱ dagegen konstant, gleich a , so ergibt sich

$$p = \text{ch } \eta \cdot \text{ch } a, \quad x = \text{ch } \eta \cdot \text{sh } a,$$

also

$$x \text{ ch } a - y \text{ sh } a = 0.$$

Betrachten wir endlich eine Gerade, die im ersten Quadranten liegt und zu beiden Achsen parallel ist, so ist

$$\Pi(\xi) + \Pi(\eta) = \pi - \sphericalangle YPX,$$

und andererseits

$$\cos \sphericalangle YPX = \text{th } \xi \cdot \text{th } \eta$$

aber

$$\begin{aligned}\cos[II(\xi) + II(\eta)] &= \cos II(\xi) \cdot \cos II(\eta) - \sin II(\xi) \cdot \sin II(\eta) \\ &= \operatorname{th} \xi \operatorname{th} \eta - \frac{1}{\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \eta}\end{aligned}$$

also kommt

$$2 \operatorname{sh} \xi \cdot \operatorname{sh} \eta - 1 = 0$$

oder

$$2xy - p^2 + x^2 + y^2 = (x + y + p)(x + y - p) = 0.$$

Für einen Punkt x, y, p dieser Geraden, die im ersten Quadranten liegt, sind x und y positiv, sodaß sich die Gleichung ergibt

$$x + y - p = 0.$$

2. Die allgemeine Gleichung der Geraden. Linienkoordinaten.

Wir gelangen leicht zur allgemeinen Gleichung der Geraden, die vom Koordinatenanfang den Abstand a hat, der mit der x -Achse den Winkel α einschließt, wenn wir zuvor die Formeln für die Drehung um den Koordinatenanfang entwickeln.

Sind x, y, p die Koordinaten eines Punktes vor der Drehung, x_1, y_1, p_1 nach der Drehung um den Winkel α , so wird

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{sh} \xi_1 = \operatorname{sh} r \cos(\alpha + \varphi) = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y_1 &= \operatorname{sh} \eta_1 = \operatorname{sh} r \sin(\alpha + \varphi) = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \\ p_1 &= \operatorname{ch} r = p.\end{aligned}$$

Dreht man jetzt die Gerade

$$x \cdot \operatorname{ch} a - p \operatorname{sh} a = 0$$

um den Winkel α , so kommt

$$\operatorname{ch} a(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) - p \operatorname{sh} a = 0,$$

oder, wenn wir die Koordinaten wieder mit x, y, p bezeichnen

$$x \operatorname{ch} a \cdot \cos \alpha + y \operatorname{ch} a \cdot \sin \alpha - p \operatorname{sh} a = 0$$

als allgemeine Gleichung der Geraden in der Normalform.

Umgekehrt bedeutet

$$ux + vy - wp = 0$$

worin w positiv angenommen ist und

$$u^2 + v^2 - w^2 = 1$$

eine Gerade, deren kürzester Abstand von O gegeben ist durch

$$\text{sha} = w$$

und mit der x -Achse den Winkel α einschließt, der gegeben ist durch

$$\sin \alpha = \frac{v}{\sqrt{1 + w^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{1 + w^2}},$$

wobei beidesmal das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen ist.

Setzt man $p = 1$, $\text{sha} = a$, $\text{cha} = 1$, so erhält man die Formeln der analytischen euklidischen Geometrie.

Die Größen u , v , w sind die Weierstraßschen Linienkoordinaten.

3. Abstandsberechnungen und Gleichungen der Zyklen.

Für den Abstand s zweier Punkte $(x_1 y_1 p_1)$ und $(x_2 y_2 p_2)$ ergibt sich nach § 15 und Fig. 31

$$\begin{aligned} \text{chs} &= \text{ch}\eta_1 \text{ch}\eta_2 \text{ch}(\varrho_2 - \varrho_1) - \text{sh}\eta_1 \text{sh}\eta_2 \\ &= \text{ch}\eta_1 \text{ch}\varrho_1 \cdot \text{ch}\eta_2 \text{ch}\varrho_2 - \text{ch}\eta_1 \text{sh}\varrho_1 \cdot \text{ch}\eta_2 \text{sh}\varrho_2 - \text{sh}\eta_1 \cdot \text{sh}\eta_2 \end{aligned}$$

oder

$$\text{chs} = p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2.$$

Hieraus folgt für den Kreis, dessen Mittelpunkt die Weierstraßschen Koordinaten a , b , c hat und dessen Radius gleich s ist, die Gleichung

$$\text{chs} = pc - ax - by.$$

Um den Abstand z eines Punktes $P(x, y, p)$ von der Geraden

$$ux + vy - wp \equiv \text{cha}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \text{sha} \cdot p = 0$$

zu finden, fällen wir von P noch das Lot $PQ (= b_1)$ auf

das von O auf die Gerade gefällte Lot (a) und bezeichnen OQ mit a_1 und $\sphericalangle QOP$ mit $\varphi = \alpha$. Dann ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \text{sh}z &= \text{sh}(a_1 - a) \text{ch}l_1 \\ &= +\text{cha} \cdot (\text{sh}\eta_1 \text{ch}l_1) - \text{sha} \cdot (\text{ch}a_1 \cdot \text{ch}l_1) \\ &= +\text{cha} \text{shr} \cdot \cos(\varphi - \alpha) - \text{sha} \cdot \text{chr} \end{aligned}$$

d. i.

$$\text{sh}z = ux + vy - wp.$$

Diese Formel zeigt: Setzt man in der Normalform der Gleichung einer Geraden die Koordinaten eines nicht auf ihr gelegenen Punktes P ein, so erhält man den hyperbolischen Sinus des senkrechten Abstandes dieses Punktes von der Geraden, versehen mit dem negativen oder positiven Vorzeichen, je nachdem P auf derselben Seite der Geraden liegt, wie der Koordinatenanfang, oder aber auf der entgegengesetzten.

Es gibt zwei Abstandslinien, deren Abstand von der Geraden $u_0 v_0 w_0$ dem absoluten Betrag nach gleich z_0 ist, beide zusammen sind dargestellt durch

$$\text{sh}^2 z_0 = (u_0 x + v_0 y - w_0 p)^2.$$

Um endlich den Grenzkreis zu erhalten, ziehen wir von O aus eine Grenzkreisachse, sie möge den Winkel α mit der x -Achse bilden; der Schnittpunkt mit dem Grenzkreis sei A und $OA = a$. Ist P ein Punkt des Grenzkreises, $PF = d$ das Lot von P auf diese Achse und endlich $OF = c$, so wird

$$e^{c-a} = \text{ch}d,$$

ferner

$$p = \text{chr} = \text{ch}c \cdot \text{ch}d$$

und

$$\text{sh}c \cdot \text{ch}d = \text{shr} \cdot \cos(\varphi - \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

demnach

$$\text{ch}^2 d = p^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2$$

und

$$\frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1} = \text{th}c = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{p},$$

also

$$e^{2c} = \frac{p + x \cos \alpha + y \sin \alpha}{p - x \cos \alpha - y \sin \alpha}.$$

Setzt man in die zuerst eingeschriebene Gleichung ein, so kommt

$$e^{-2a} = (p - x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2.$$

Zusatz: In der homogenen Gleichung der Geraden können x , y , p ersetzt werden durch Größen, die ihnen proportional sind. Um dies auch für die drei Zyklengleichungen zu erreichen, schreiben wir sie in der Form

$$\text{ch}^2 s (p^2 - x^2 - y^2) = (pc - ax - by)^2$$

Gleichung des Kreises,

$$\text{sh}^2 z (p^2 - x^2 - y^2) = (u_0 x + v_0 y - w_0 p)^2$$

Gleichung der Abstandslinie,

$$e^{-2a} (p^2 - x^2 - y^2) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2$$

Gleichung des Grenzkreises.

Diese lassen sich wieder zusammenfassen in die Gestalt

$$p^2 - x^2 - y^2 = (lx + my - np)^2$$

und die drei Fälle unterscheiden sich dadurch, daß der Reihe nach die Bedingungen erfüllt sind

$$0 < n^2 - l^2 - m^2 \text{ (Kreis),}$$

$$0 < l^2 + m^2 - n^2 \text{ (Abstandslinie),}$$

$$0 = l^2 + m^2 - n^2 \text{ (Grenzkreis).}$$

§ 24. Bewegungen und Invarianten. Schnittpunktsätze.

1. Die eingliedrigen Bewegungsgruppen.

Die Bewegungen innerhalb der euklidischen Ebene lassen sich zusammensetzen aus Parallelverschiebungen längs der beiden Achsen und Drehungen um den Koordinatenanfang O . Jede dieser drei Arten von Bewegungen bildet für sich eine Gruppe, d. h. die Folge zweier beliebigen Bewegungen dieser bestimmten Art läßt sich durch eine einzige derselben Art ersetzen. Ebenso wollen wir in der hyperbolischen Ebene drei Untergruppen unterscheiden, nämlich die Drehung um O , die Schiebung längs der x -Achse und

die Drehung um das Ende der $+x$ -Achse, d. h. diejenige Bewegung, bei der die Parallelen zur $+x$ -Achse, in einander übergehen und jeder dazu senkrechte Grenzkreis in sich selbst.

Die Drehung (Drehungswinkel α) ist dargestellt durch

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

$$p_1 = p.$$

Die Schiebung, bei der die Punkte der x -Achse um die Strecke a nach rechts verschoben werden, ist dargestellt durch

$$\varrho_1 = \varrho + a,$$

$$\eta_1 = \eta,$$

und dies ergibt

$$x_1 = \operatorname{sh} \xi_1 = \operatorname{sh} \varrho_1 \operatorname{ch} \eta = \operatorname{sh}(\varrho + a) \operatorname{ch} \eta = x \operatorname{ch} a + p \operatorname{sh} a$$

$$y_1 = \operatorname{ch} \varrho_1 \operatorname{sh} \eta = y$$

$$p_1 = \operatorname{ch} \varrho_1 \operatorname{ch} \eta = \operatorname{ch}(\varrho + a) \operatorname{ch} \eta = x \operatorname{sh} a + p \operatorname{ch} a.$$

Um endlich die dritte Untergruppe zu untersuchen, betrachten wir die Schar der Grenzkreise, welche die x -Achse senkrecht schneiden und gehen von Grenzkreiskoordinaten aus, die wir für den Augenblick mit u und v bezeichnen wollen: Durch $P(x, y, p)$ legen wir den Grenzkreis, der die x -Achse in U schneiden mag, und die Parallele zur $+x$ -Achse, die den Grenzkreis durch O in V schneiden mag. Dann sei

$$OU = u$$

und der Bogen

$$(OV) = v.$$

Die Bewegung ist dann dadurch charakterisiert, daß u unverändert bleibt, während v übergeht in $v + a$. Um nun zur Darstellung in Weierstraßschen Koordinaten überzugehen, beachten wir zunächst den Zusammenhang von u und v mit den rechtwinkligen Koordinaten η und ϱ

Es ist

$$v = e^u \cdot \operatorname{sh} \eta$$

und

$$e^{\varrho - u} = \operatorname{ch} \eta.$$

Hieraus folgt bei Übergang zu den Weierstraßschen Koordinaten durch einfache Rechnung

$$y = \operatorname{sh} \eta = v e^{-u},$$

$$x = \operatorname{sh} \varrho \cdot \operatorname{ch} \eta = \frac{e^u \operatorname{ch}^2 \eta - e^{-u}}{2} = \frac{1}{2} v^2 e^{-u} + \operatorname{sh} u,$$

$$p = \operatorname{ch} \varrho \cdot \operatorname{ch} \eta = \frac{e^u \operatorname{ch}^2 \eta + e^{-u}}{2} = \frac{1}{2} v^2 e^{-u} + \operatorname{ch} u,$$

also

$$p + x = v^2 e^{-u} + e^u$$

$$p - x = e^{-u}$$

und daher

$$x_1 = \frac{1}{2} (v + a)^2 e^{-u} + \operatorname{sh} u = \frac{1}{2} v^2 e^{-u} + \operatorname{sh} u + a v e^{-u} + \frac{a^2}{2} e^{-u},$$

oder

$$x_1 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) x + a y + \frac{a^2}{2} p$$

und weiter

$$y_1 = -a x + y + a p,$$

$$p_1 = -\frac{a^2}{2} x + a y + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) p.$$

Man überzeugt sich durch Rechnung leicht, daß in allen drei Fällen wird

$$p_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = p^2 - x^2 - y^2.$$

2. Die allgemeine Bewegung.

Durch Zusammensetzung folgt, daß die allgemeinste Bewegung dargestellt wird durch ein Formelsystem

$$x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} p,$$

$$y_1 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} p,$$

$$p_1 = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} p,$$

und wir können die notwendigen und hinreichenden Bedingungen leicht direkt ableiten, welche die neun Koeffizienten erfüllen müssen.

Erstens muß sein

$$p_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = p^2 - x^2 - y^2 (= 1),$$

zweitens aber muß die Entfernung s zweier Punkte (PP') eine Invariante sein, also

$$chs = p p' - x x' - y y' = ch s_1 = p_1 p'_1 - x_1 x'_1 - y_1 y'_1.$$

Schreibt man die Gleichungen in der Form

$$x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \frac{\alpha_{13}}{i} (p i),$$

$$y_1 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \frac{\alpha_{23}}{i} (p i),$$

$$i p_1 = i \alpha_{31} x + i \alpha_{32} y + \alpha_{33} (i p)$$

und beachtet, daß $x_1, y_1, i p_1$ sich transformieren wie die Richtungskosinus (l, m, n) einer Geraden durch den Koordinatenanfang bei der Drehung im euklidischen Raum, weil unsere Forderungen sich schreiben lassen

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = l^2 + m^2 + n^2,$$

$$l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1 = l l' + m m' + n n',$$

so folgt: Die neun Größen

$$\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \frac{\alpha_{13}}{i},$$

$$\alpha_{21} \quad \alpha_{22} \quad \frac{\alpha_{23}}{i},$$

$$i \alpha_{31} \quad i \alpha_{32} \quad \alpha_{33}$$

müssen dieselben Bedingungen erfüllen wie die Koeffizienten bei der Drehung im euklidischen Raum, d. h.

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \left(\frac{\alpha_{13}}{i}\right)^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 = 1,$$

ebenso

$$\begin{aligned} \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 - \alpha_{23}^2 &= 1, \\ -\alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

und dazu kommen die drei Gleichungen

$$\alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} - \alpha_{13} \alpha_{23} = 0,$$

$$\alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{23} \alpha_{33} = 0,$$

$$\alpha_{31} \alpha_{11} + \alpha_{32} \alpha_{12} - \alpha_{33} \alpha_{13} = 0.$$

Die Transformation der Linienkoordinaten ergibt sich leicht aus dem Umstand, daß der Abstand eines

beliebigen Punktes von einer beliebigen Geraden eine Invariante ist, d. h.

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + v_1 y_1 + (i w_1)(i p_1) &= u x + v y + (i w)(i p) \\ &= u \{ \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} y_1 + (i \alpha_{31})(i p_1) \} \\ &\quad + v \{ \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} y_1 + (i \alpha_{32})(i p) \} \\ &\quad + (i w) \left\{ \frac{\alpha_{13}}{i} x_1 + \frac{\alpha_{23}}{i} y_1 + \alpha_{33}(i p_1) \right\}. \end{aligned}$$

Ordnet man auch auf der rechten Seite nach x_1, y_1 und $i p_1$ und setzt die entsprechenden Koeffizienten auf beiden Seiten einander gleich, so kommt

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11} u + \alpha_{12} v + \alpha_{13} w, \\ v_1 &= \alpha_{21} u + \alpha_{22} v + \alpha_{23} w, \\ w_1 &= \alpha_{31} u + \alpha_{32} v + \alpha_{33} w. \end{aligned}$$

Die Weierstraßschen Linienkoordinaten transformieren sich also bei Bewegung genau so wie die Weierstraßschen Punktkoordinaten.

3. Die Invarianten und ihre Deutung.

Sind a, b, c und $a' b' c'$ Weierstraßsche Koordinaten zweier Punkte P und P' so ist

$$c_1 c'_1 - a_1 a'_1 - c_1 b'_1 = c c' - a a' - b b'.$$

Da aber Linien- und Punktkoordinaten sich in gleicher Weise (kogredient) transformieren, so folgt, daß diese Größe eine Invariante ist, einerlei ob die verknüpften Größen Punkt- oder Linienkoordinaten sind. So ergeben sich dreierlei Invarianten, und wir kennen schon die geometrische Bedeutung von

$$\begin{aligned} p p' - x x' - y y' &= \text{ch}(PP'), \\ x u' + y v' - p w' &= \text{sh}(PF) \end{aligned}$$

wobei PF das Lot von $P(x, y, p)$ auf die Gerade $G(u', v', w')$ ist.

Die Invariante zweier Geraden können wir leicht deuten, indem wir den Geraden eine spezielle Lage erteilen: Zwei einander unter dem Winkel α schneidende Gerade können durch Bewegung transformiert werden in

$$\begin{aligned} x \sin \alpha - y \cos \alpha &= 0 & (u = \sin \alpha, v = -\cos \alpha, w = 0) \\ y &= 0 & (u' = 0, v' = 1, w' = 0) \end{aligned}$$

und hier ist

$$ww' - uu' - vv' = \cos \alpha.$$

Zwei Gerade mit dem gemeinsamen Lot a können transformiert werden in

$$\begin{aligned} x \operatorname{cha} - p \operatorname{sha} &= 0 \quad (u = \operatorname{cha}, \quad v = 0, \quad w = \operatorname{sha}) \\ x &= 0 \quad (u' = 1, \quad v' = 0, \quad w' = 0) \end{aligned}$$

und hier ist

$$ww' - uu' - vv' = -\operatorname{cha}.$$

Damit ist die geometrische Bedeutung der Invariante (Cosinus des Schnittwinkels, bzw. hyperbolischer Cosinus des gemeinsamen Lotes) gegeben. Wenn die Geraden parallel sind, so wird

$$uu' + vv' - ww' = 1.$$

Für die invarianten quadratischen Differenzialformen

$$dx^2 + dy^2 - dp^2 = dx_1^2 + dy_1^2 - dp_1^2$$

und

$$du^2 + dv^2 - dw^2 = du_1^2 + dv_1^2 - dw_1^2,$$

deren Invarianz daraus folgt, daß die Differentiale wegen der homogenen Gestalt der Gleichungen sich genau transformieren wie die Gleichungen selbst, ergibt sich auch leicht die geometrische Deutung. Was zunächst zwei Punkte PP' betrifft, die den Abstand ds haben, so ist

$$1 + \frac{1}{2} ds^2 = \operatorname{ch} ds = p(p + dp) - x(x + dx) - y(y + dy)$$

und wegen

$$\begin{aligned} 1 &= (p + dp)^2 - (x + dx)^2 - (y + dy)^2 = p^2 - x^2 - y^2 \\ &+ 2(pdp - xdx - ydy) + dp^2 - dx^2 - dy^2 \end{aligned}$$

weiter

$$1 + \frac{1}{2} ds^2 = 1 + \frac{1}{2} (dx^2 + dy^2 - dp^2),$$

oder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dp^2.$$

Für zwei einander unter dem Winkel $d\alpha$ schneidende Gerade haben wir

$$1 - \frac{d\alpha^2}{2} = \cos d\alpha = w(w + dw) - u(u + du) - v(v + dv),$$

und wegen

$$2(u\,du + v\,dv - w\,dw) + du^2 + dv^2 - dw^2 = 0,$$

$$d\alpha^2 = 2(w\,dw - u\,du - v\,dv) = du^2 + dv^2 - dw^2.$$

Für zwei Gerade mit dem gemeinsamen Lot dl endlich ergibt sich

$$1 + \frac{dl^2}{2} = \operatorname{ch} dl = u(u + du) + v(v + dv) - w(w + dw),$$

oder

$$dl^2 = dw^2 - du^2 - dv^2.$$

Für zwei benachbarte Punkte bedeutet die Invariante also das Quadrat des Abstandes, für zwei benachbarte Geraden je nach ihrem Vorzeichen das Quadrat des eingeschlossenen Winkels oder des gemeinsamen Lotes.

Eine zur x -Achse ($y = 0$) parallele Gerade wird durch eine Gleichung der Form

$$u'x + v'y - w'p = 0$$

dargestellt, wobei zu verlangen ist, daß der Winkel α genau der Parallelwinkel zum Lote a ist, d. h. es ist

$$u' = \operatorname{cha} \cdot \cos II(a) = \operatorname{sha}, \quad v' = \operatorname{cha} \cdot \sin II(a) = 1, \quad w' = \operatorname{sha}.$$

Wird nun a ersetzt durch da , so kommt

$$u' = u + du = 0 + du = da, \quad dv = 0, \quad dw = da,$$

also

$$du^2 + dv^2 - dw^2 = 0.$$

Für zwei unendlich benachbarte parallele Gerade ist also die quadratische Differentialinvariante gleich Null.

4. Schnittpunktssätze.

Sind $x_1 y_1 p_1$ und $x_2 y_2 p_2$ die Koordinaten zweier Punkte so stellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho l &= \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2, \\ \varrho m &= \lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2, \\ \varrho n &= \lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2, \end{aligned}$$

sobald

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1)^2 - (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1) - (\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1)^2 \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 (p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) \end{aligned}$$

positiv ist, einen Punkt ($x = l$, $y = m$, $p = n$) dar. ϱ ist dann mit demjenigen Vorzeichen zu versehen, das der Größe n einen positiven Wert erteilt. Dieser Punkt P liegt auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 , denn seine Koordinaten genügen der von $x_1 y_1 p_1$ und $x_2 y_2 p_2$ erfüllten linearen Gleichung. Wir gehen zunächst auf diesen Fall genauer ein, und setzen

$$P_1 P_2 = s_{12}, \quad PP_1 = s_1, \quad PP_2 = s_2.$$

$$\lambda_1 = \varrho \mu_1, \quad \lambda_2 = \varrho \mu_2,$$

so daß sich ergibt

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \operatorname{ch} s_{12} = 1.$$

Dann wird

$$\operatorname{ch} s_1 = p_1 (\mu p_1 - \mu_1 p_2) - x_1 (\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2) - y_1 (\mu_2 y_1 - \mu_1 y_2)$$

$$= \mu_2 - \mu_1 \operatorname{ch} s_{12}$$

und

$$\operatorname{sh} s_1 = \sqrt{\mu_2^2 + \mu_1^2 \operatorname{ch}^2 s_{12} - 2\mu_2 \mu_1 \operatorname{ch} s_{12} - \mu_1^2 - \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_2 \operatorname{ch} s_{12}}$$

$$= \mu_1 \operatorname{sh} s_{12}$$

und

$$\operatorname{sh} s_2 = \operatorname{sh}(s_1 + s_{12}) = \mu_1 \operatorname{sh}_{12} \operatorname{ch} s_{12} + (\mu_2 - \mu_1 \operatorname{ch} s_{12}) \operatorname{sh} s_{12}$$

$$= \mu_2 \operatorname{sh} s_{12},$$

also ergibt sich für das Verhältnis der hyperbolischen Sinus der Strecken $s_1 = PP_1$ und $s_2 = PP_2$ die Gleichung

$$\operatorname{sh} s_1 : \operatorname{sh} s_2 = \mu_1 : \mu_2 = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Ist die oben mit ϱ^2 bezeichnete Größe nicht positiv, sondern negativ, so läßt sich leicht zeigen, daß xyp nicht mehr Punktkoordinaten sind, sondern Linienkoordinaten einer Geraden, die auf der Verbindungslinie von $P_1 P_2$ senkrecht steht.

Zieht man jetzt durch die drei Ecken $A(x_1 y_1 p_1)$, $B(x_2 y_2 p_2)$ und $C(x_3 y_3 p_3)$ eines Dreiecks Transversalen AD , BE , CF , welche die Gegenseiten in $BD = a_2$, $CD = a_3$, $CE = b_3$, $AE = b_1$ und $AF = c_1$, $BF = c_2$ zerlegen, und ist

$$\operatorname{sh} a_2 : \operatorname{sh} a_3 = \lambda_2 : \lambda_3,$$

$$\operatorname{sh} b_3 : \operatorname{sh} b_1 = \mu_3 : \mu_1,$$

$$\operatorname{sh} c_1 : \operatorname{sh} c_2 = \nu_1 : \nu_2.$$

So läßt sich jeder Punkt der Verbindungslinien AD , BE , CF darstellen durch

$$x = \varrho x_1 + \varrho'(\lambda_2 x_3 - \lambda_3 x_2), \quad y = \dots, \quad p = \dots \quad (AD),$$

$$x = \sigma x_2 + \sigma'(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3), \quad y = \dots, \quad p = \dots \quad (BE),$$

$$x = \tau x_3 + \tau'(\nu_1 x_2 - \nu_2 x_1), \quad y = \dots, \quad p = \dots \quad (CF),$$

wobei die nicht eingeschriebenen Gleichungen durch Vertauschung von $x_1 x_2 x_3$ mit $y_1 y_2 y_3$ bzw. $p_1 p_2 p_3$ sich ergeben. Damit diese drei Gleichungssysteme von dem gleichen Wertsystem x, y, p sich erfüllen lassen, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\varrho = \sigma' \mu_3 = \tau' \nu_2,$$

$$\sigma = \tau' \nu_1 = \varrho' \lambda_3,$$

$$\tau = \varrho' \lambda_2 = \sigma' \mu_1$$

ist, woraus die notwendige und hinreichende Bedingung folgt

$$\mu_3 \nu_1 \lambda_2 = \nu_2 \lambda_3 \mu_1 \quad \ddagger$$

oder

$$\text{sh} a_2 \text{sh} c_1 \text{sh} b_3 = \text{sh} a_3 \text{sh} b_1 \text{sh} c_2 .$$

Hierin liegt der Satz (Verallgemeinerter Satz des Ceva):

Die drei Transversalen eines Dreiecks, welche die Gegenseiten derart in Strecken zerlegen, daß die Produkte des hyperbolischen Sinus von je drei nicht aneinander stoßenden gleich sind, gehen durch denselben (reellen, ideellen oder unendlich fernen) Punkt.

In bezug auf den dritten Fall ist noch eine Ergänzung des Beweises notwendig: Man sieht leicht ein, daß alle Geraden, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen

$$nl + vm - wn = 0,$$

wobei

$$l^2 + m^2 - n^2 = 0$$

ist, ein gemeinsames Ende E haben, und daß die Richtung der Verbindungslinie OE daher bestimmt ist durch

$$\cos y = \frac{l}{n}, \quad \sin y = \frac{m}{n} .$$

Diese Betrachtung ist dann anzuwenden, wenn sich für die Koordinaten des gemeinsamen Punktes x, y, p der drei Transversalen Werte ergeben, die weder Punkt- noch Linienkoordinaten sind, sondern eben die Gleichung

$$x^2 + y^2 - p^2 = 0$$

erfüllen.

Als Spezialfall ergibt sich, daß die Transversalen von den Ecken nach den Mitten der Seiten durch einen Punkt gehen, ebenso je drei Winkelhalbierende und endlich die drei Höhen. (Vgl. § 5 und § 8.) Übrigens gehen auch die drei flächenhalbierenden Transversalen durch einen Punkt.

§ 25. Die Cayley-Kleinsche Maßgeometrie*).

1. Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die euklidische Ebene. Der Fundamentalkreis.

Wir bilden die hyperbolische Ebene auf die euklidische ab, indem wir dem Punkt (x, y, p) in der ersten den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$x' = \frac{x}{p}, \quad y' = \frac{y}{p}$$

in der zweiten entsprechen lassen. x, y, p mögen dabei entweder die Weierstraßschen Koordinaten selbst sein,

*) Klein: Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Annalen IV, 1871, S. 573—621. Vgl. Bonola, Die nicht-euklidische Geometrie, § 79 ff.

Klein hat nicht nur zuerst die Beziehung zwischen der allgemeinsten hyperbolischen Maßbestimmung und der hyperbolischen Geometrie erkannt, sondern auch durch die später von den Mathematikern wieder aufgenommene Begründung der Maßbestimmung auf rein projektivem Wege, d. h. unabhängig von der euklidischen Geometrie ihr das allgemeinste Fundament gegeben. Trotzdem konnte sich Cayley nicht recht davon überzeugen, daß hiermit eine unabhängige Begründung der nichteuklidischen Geometrie gegeben ist, nicht nur ein „Einbau“ in die euklidische!

Die Darstellung der nichteuklidischen Geometrie auf Grund der projektiven Maßbestimmung findet sich auch in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie II, Leipzig 1891 und ist von M. Großmann mehrfach zur Ausführung nichteuklidischer Konstruktionen verwendet worden (Math. Annalen 58 (1905), S. 578—582; 68 (1910), S. 141—144.

oder Größen, die sich von ihnen nur um einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor unterscheiden.

Dann ist jedenfalls für alle reellen Punkte der hyperbolischen Ebene

$$p^2 - x^2 - y^2 > 0,$$

also

$$x'^2 + y'^2 - 1 = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} - 1 < 0,$$

d. h. Die Punkte der hyperbolischen Ebene werden auf die Punkte innerhalb des Kreises

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0$$

abgebildet. Diesen Kreis nennen wir den Fundamentalkreis.

Statt der rechtwinkligen Koordinaten x' , y' kann man bei der weiteren Untersuchung auch die Größen x , y , p als homogene mit den rechtwinkligen einfach zusammenhängende Koordinaten verwenden. Bei dieser Abbildung entsprechen den Geraden wieder Gerade, weil diese ja durch lineare Gleichungen dargestellt werden.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Entfernung $s_{12} = [P_1 P_2]$, bestimmt durch

$$\text{ch } s_{12} = \frac{p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{p_1^2 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{p_2^2 - x_2^2 - y_2^2}}$$

und den Winkel in der euklidischen Ebene zu deuten.

2. Die Entfernung zweier Punkte.

Sind P_1, P_2, P_3 drei Punkte einer Geraden und bezeichnen wir die Strecken mit $[P_1 P_2]$ usw., so ist

$$[P_1 P_3] = [P_1 P_2] + [P_2 P_3].$$

Betrachten wir andererseits in der euklidischen Ebene die entsprechenden Punkte und bezeichnen sie ebenfalls mit P_1, P_2 und P_3 . Sind dann K_1 und K_2 die Schnittpunkte der (euklidischen) Geraden mit dem Fundamentalkreis, ferner $k_1 k_2$, bzw. s_1, s_2, s_3 die Strecken von ein und demselben Punkt O dieser Geraden nach K_1, K_2, P_1, P_2, P_3 , so ist das Doppelverhältnis $(K_1 K_2 P_1 P_2)$, das wir kurzweg als Doppelverhältnis von $P_1 P_2$ mit

dem Fundamentalkreis bezeichnen wollen, definiert durch

$$(K_1 K_2 P_1 P_2) = \frac{k_1 - s_1}{k_2 - s_1} \cdot \frac{k_1 - s_2}{k_2 - s_2} = \frac{(k_1 - s_1)(k_2 - s_2)}{(k_2 - s_1)(k_1 - s_2)}.$$

Betrachten wir drei Punkte auf einer Geraden, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (K_1 K_2 P_1 P_2)(K_1 K_2 P_2 P_3) \\ &= \frac{(k_1 - s_1)(k_2 - s_2)}{(k_2 - s_1)(k_1 - s_2)} \cdot \frac{(k_1 - s_2)(k_2 - s_3)}{(k_2 - s_2)(k_2 - s_3)} = (K_1 K_2 P_1 P_3), \end{aligned}$$

also

$$\log(K_1 K_2 P_1 P_2) + \log(K_1 K_2 P_2 P_3) = \log(K_1 K_2 P_1 P_3).$$

Diese Gleichung, verglichen mit

$$[P_1 P_2] + [P_2 P_3] = [P_1 P_3],$$

führt bereits auf die Tatsache, daß die Strecke $[P_1 P_2]$ der hyperbolischen Geometrie in der euklidischen Geometrie gedeutet, dem Logarithmus des Doppelverhältnisses proportional ist, das die zwei Punkte und die beiden Schnittpunkte K_1 und K_2 der Geraden durch P_1 und P_2 mit dem Fundamentalkreis bilden.

Um dies genau festzustellen und zugleich den Proportionalitätsfaktor zu bestimmen, müssen wir das Doppelverhältnis wirklich berechnen.

Sind $x_1 : p_1$, $y_1 : p_1$ und $x_2 : p_2$, $y_2 : p_2$ die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte, so kann jeder Punkt der Verbindungslinie dargestellt werden durch

$$\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{p_1 + \lambda p_2}, \quad \eta = \frac{y_1 + \lambda y_2}{p_1 + \lambda p_2}.$$

Sind $Q_1(\lambda = \lambda_1)$ und $Q_2(\lambda = \lambda_2)$ zwei solche Punkte, so wird das Doppelverhältnis $(Q_1 Q_2 P_1 P_2)$, das ja gleich dem Doppelverhältnis der Abszissen ist

$$\begin{aligned} (Q_1 Q_2 P_1 P_2) &= \frac{\left(\frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{p_1 + \lambda_1 p_2} - \frac{x_1}{p_1}\right)}{\left(\frac{x_1 + \lambda_2 x_2}{p_1 + \lambda_2 p_2} - \frac{x_1}{p_1}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{x_1 + \lambda_2 x_2}{p_1 + \lambda_2 p_2} - \frac{x_2}{p_2}\right)}{\left(\frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{p_1 + \lambda_1 p_2} - \frac{x_2}{p_2}\right)} \\ &= \frac{\lambda_1(x_2 p_1 - x_1 p_2) \cdot (x_1 p_2 - x_2 p_1)}{\lambda_2(x_2 p_1 - x_1 p_2) \cdot (x_1 p_2 - x_2 p_1)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{aligned}$$

Um nun die Größe $(K_1 K_2 P_1 P_2)$ zu bilden, haben wir λ_1 und λ_2 so zu bestimmen, daß ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 auf dem Fundamentalkreis liegen, d. h. λ_1 und λ_2 sind dann die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - (p_1 + \lambda p_2)^2 = 0.$$

Führen wir die Abkürzungen ein

$$k_{11} = p_1^2 - x_1^2 - y_1^2,$$

$$k_{22} = p_2^2 - x_2^2 - y_2^2,$$

$$k_{12} = p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2,$$

so läßt sich die Gleichung schreiben:

$$k_{11} + 2\lambda k_{12} + \lambda^2 k_{22} = 0$$

und es wird, wenn λ_1 und λ_2 die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_{12} - \sqrt{k_{12}^2 - k_{11} k_{22}}}{k_{12} + \sqrt{k_{12}^2 - k_{11} k_{22}}}.$$

Ist weiter σ der Logarithmus der Quadratwurzel dieser Zahl, so wird

$$\begin{aligned} \frac{e^\sigma + e^{-\sigma}}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{2k_{12}}{2\sqrt{k_{11} k_{22}}} \\ &= \frac{p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{p_1^2 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{p_2^2 - x_2^2 - y_2^2}} \\ &= \operatorname{ch} s_{12}, \end{aligned}$$

d. h.

$$[P_1 P_2] = \frac{1}{2} \log(K_1 K_2 P_1 P_2).$$

Der hyperbolische Abstand $[P_1 P_2]$ ist also gleich dem halben Logarithmus des Doppelverhältnisses von $P_1 P_2$ mit dem Fundamentalkreis.

3. Die Winkelbestimmung.

Gerade bilden sich wie schon bemerkt auf euklidische Gerade ab, und zwar lassen die Linienkoordinaten u, v , w eine einfache Deutung zu.

Hat eine (euklidische) Gerade in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$x'u + y'v - w = 0$$

oder in homogenen

$$xu + yv - wp = 0,$$

so ist sie die Polare des Punktes

$$\bar{x} = \frac{u}{w}, \quad \bar{y} = \frac{v}{w}$$

in bezug auf den Fundamentalkreis.

Die hyperbolischen Linienkoordinaten sind also einfach homogene euklidische Koordinaten des Poles der entsprechenden Geraden.

Der hyperbolisch gemessene Winkel (φ) zweier Geraden $g_1 (u_1 v_1 w_1)$ und $g_2 (u_2 v_2 w_2)$ ist gegeben durch

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi = \frac{w_1 w_2 - u_1 u_2 - v_1 v_2}{\sqrt{w_1^2 - u_1^2 - v_1^2} \sqrt{w_2^2 - u_2^2 - v_2^2}}$$

und diese Größe ist nach den eben entwickelten Betrachtungen nichts anderes als

$$\frac{e^\sigma + e^{-\sigma}}{2},$$

wobei σ der halbe Logarithmus des Doppelverhältnisses ist, das die Pole der beiden Geraden mit den (imaginären) Schnittpunkten von der Geraden $P_1 P_2$ und dem Kreis bilden. Berücksichtigen wir schließlich noch, daß das Doppelverhältnis jener vier Punkte gleich dem Doppelverhältnis von den Geraden $g_1 g_2$ und den durch ihren Schnittpunkt an den Kreis gelegten (imaginären) Tangenten ist, so folgt

$$[\varphi] = \sphericalangle [g_1, g_2] = \frac{1}{2i} \log(t_1 t_2 g_1 g_2).$$

Der hyperbolische Winkel zweier Geraden ist gleich dem durch $2i$ dividierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das sie mit den durch ihren Schnittpunkt an den Fundamentalkreis gelegten Tangenten bilden.

Den Inhalt dieser beiden Sätze können wir auch so aussprechen:

Ersetzt man die euklidische Maßbestimmung

$$P_1 P_2 = \sqrt{\left(\frac{x_1}{p_1} - \frac{x_2}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{p^1} - \frac{y_2}{p_2}\right)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2}}$$

durch die (hyperbolische)

$$[P_1 P_2] = \frac{1}{2} \log(K_1 K_2 P_1 P_2)$$

$$[g_1 g_2] = \frac{1}{2i} \log(t_1 t_2 g_1 g_2)$$

so erhält man ein Bild der hyperbolischen Geometrie, bei dem die hyperbolischen Geraden durch Gerade dargestellt werden.

4. Die Zyklen.

Die Zyklen werden durch folgende Formeln dargestellt:

$$p^2 - x^2 - y^2 = (lx + my - np)^2$$

und zwar erhält man einen Kreis mit dem Mittelpunkt

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{n^2 - l^2 - m^2}}, \quad y_0 = \frac{m}{\sqrt{n^2 - l^2 - m^2}},$$

$$p_0 = \frac{n}{\sqrt{n^2 - l^2 - m^2}},$$

wenn die Quadratwurzel reell ist, eine Abstandslinie, wenn sie imaginär ist ($x_0 : p_0$ und $y_0 : p_0$ sind dann die rechtwinkligen Koordinaten des Poles der Nulllinie). Liegt ein Grenzkreis vor, so ist $n^2 - l^2 - m^2$ gleich Null.

Diese drei Arten von Zyklen stellen also, da ihre Gleichung vom zweiten Grad ist, Kegelschnitte in der euklidischen Ebene dar, und zwar haben diese Kegelschnitte eine besondere Lage zum Fundamentalkreis.

Um die vier Schnittpunkte mit dem Fundamentalkreis zu bestimmen, suchen wir nach den Methoden der analytischen Geometrie die im Büschel

$$p^2 - x^2 - y^2 + \lambda \{ p^2 - x^2 - y^2 - (lx + my - np)^2 \} = 0$$

enthaltenen Geradenpaare auf und bekommen für $\lambda = -1$ die Doppelgerade

$$(lx + my - np)^2 = 0.$$

Hieraus folgt, daß der Zykl und der Fundamentalkreis in den beiden Schnittpunkten dieser Geraden mit dem Fundamentalkreis einander berühren.

Die Zyklen werden also abgebildet auf Kegelschnitte, die den Fundamentalkreis zweimal berühren. (Im ersten Fall sind die Berührungspunkte imaginär, im zweiten reell, und die Nulllinie ist nichts anderes als die Verbindungslinie der Berührungspunkte.)

Ist $l^2 + m^2 - n^2 = 0$, so liegt der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $l : n$ und $m : n$ auf dem Fundamentalkreis, die Gerade, welche die Berührungspunkte verbindet, ist selbst Tangente des Fundamentalkreises, d. h. Grenzkreis und Fundamentalkreis berühren einander vierpunktig in diesem Punkt, oder der Grenzkreis stellt sich als eine Ellipse dar, die den Fundamentalkreis im Endpunkt der kleinen Achse berührt, und zwar ist er an dieser Stelle ihr Krümmungskreis.

5. Projektive Deutung der hyperbolischen Bewegung.

Auch die linearen Transformationen, welche die Bewegungen darstellen, haben eine einfache Bedeutung: Sie sind linear gebrochen in den rechtwinkligen Koordinaten mit demselben Nenner, also projektive Transformationen. Alle aufgestellten Bedingungen, die die Koeffizienten erfüllen, laufen auf die Forderung hinaus, daß

$$x_1^2 + y_1^2 - p_1^2 \equiv x^2 + y^2 - p^2$$

ist, d. h., daß die Koeffizienten der linken Seite, wenn man darin für x_1, y_1, p_1 die Ausdrücke in x, y und p einsetzt, den entsprechenden der rechten Seite gleich sind.

Mit andern Worten: Die hyperbolischen Bewegungen sind diejenigen projektiven Transformationen, bei denen der Fundamentalkreis in sich übergeht.

Die drei Untergruppen (§ 24, 1) entstehen so: Bei der Transformation bleiben zwei reelle Punkte des Fundamentalkreises fest, dies gibt die hyperbolische Schiebung längs ihrer Verbindungslinie; oder zwei konjugiert imaginäre, dies gibt die hyperbolische Drehung um den (im Innern des Fundamentalkreises gelegenen) Pol ihrer Verbindungslinie; oder endlich es bleiben zwei zusammenfallende Punkte

fest, dies gibt die hyperbolische Paralleldrehung, d. h. die Drehung um ein „Ende“, das durch den festbleibenden Doppelpunkt dargestellt wird.

Zusatz: Hieraus kann die analytische Darstellung der hyperbolischen Bewegungen abgeleitet werden. Die Punkte des Fundamentalkreises

$$x^2 + y^2 - p^2 = 0$$

sind gegeben durch

$$x : y : p = 2t : (1 - t^2) : (1 + t^2),$$

wobei der Parameter t alle reellen Werte durchläuft, und eine projektive Transformation der verlangten Art ist vollkommen bestimmt, wenn angegeben ist, wie sich die Punkte des Fundamentalkreises aufeinander abbilden. Die diese Abbildung bestimmende Gleichung muß in t linear gebrochen sein, also von der Form

$$t_1 = \frac{at + b}{ct + d},$$

wobei die Konstanten a, b, c, d noch der Bedingung unterworfen werden können

$$ad - bc = 1,$$

Die Koeffizienten von x, y und p bei der Transformation findet man dann durch den Ansatz

$$x_1 : y_1 : p_1 = (1 - t_1^2) : 2t_1 : (1 + t_1^2),$$

und zwar wollen wir direkt setzen

$$x_1 = (ct + d)^2 - (at + b)^2 = d^2 - b^2 + 2t(cd - ab) + t^2(c^2 - a^2),$$

$$y_1 = 2(ct + d)(at + b) = 2bd + 2t(cb + ad) + 2t^2ac,$$

$$p_1 = (ct + d)^2 + (at + b)^2 = d^2 + b^2 + 2t(cd + ab) + t^2(a^2 + c^2),$$

und hieraus findet man dann die Koeffizienten durch die Forderung, daß die Koeffizienten der Potenzen t^0, t, t^2 in diesen Ausdrücken identisch sein müssen mit den entsprechenden in

$$x_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}p = \alpha_{11}(1 - t^2) + 2\alpha_{12}t + \alpha_{13}(1 + t^2)$$

usw.

Beispielsweise ergibt sich hieraus:

$$d^2 - b^2 = \alpha_{11} + \alpha_{13}, \quad a^2 - c^2 = \alpha_{11} - \alpha_{13}, \quad cd - ab = \alpha_{12},$$

und man findet, daß in der Tat

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 = (a^2 - c^2)(d^2 - b^2) + (cd - ab)^2 = (ad - bc)^2 = 1$$

ist, usw. (S. 122).

Die drei Arten von Bewegungen ergeben sich, je nachdem die Wurzeln von

$$ct^2 + t(d - a) - b = 0$$

reell oder konjugiert imaginär sind, oder endlich zusammenfallen.

§ 26. Verallgemeinerung und Anwendungen.

1. Projektive Verallgemeinerung.

Wir legen uns jetzt die Frage vor: Was ist die allgemeinste Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die euklidische, bei der den Geraden wieder Gerade entsprechen? — oder, was dasselbe ist: Was ist die allgemeinste Art der Maßbestimmung für Abstand und Winkel in der euklidischen Ebene, mit deren Hilfe man ein Bild der hyperbolischen Ebene erhält, in dem die hyperbolischen Geraden durch euklidische Gerade dargestellt sind?

Die Antwort gibt die projektive Geometrie: Eine Abbildung ist uns bekannt, die allgemeinste müssen wir erhalten, indem wir noch eine beliebige Transformation der euklidischen Ebene hinzufügen, welche jede Gerade wieder in eine Gerade verwandelt, d. h. eine beliebige projektive Transformation.

Dadurch geht der Fundamentalkreis in einen Fundamentalk Kegelschnitt über, die Maßbestimmungen aber, die in ihrer Definition nur geometrische Beziehungen benutzen (Doppelverhältnisse), welche invariant sind bei projektiven Transformationen, bleiben dem Inhalt nach ungeändert, sind aber nunmehr natürlich auf den Fundamentalk Kegelschnitt zu beziehen. Den Punkten im Innern des Kreises entsprechen dabei die Punkte, denen der Fundamentalk Kegelschnitt seine konkave Seite zuwendet.

Wir haben also das Ergebnis: Die allgemeinste hyperbolische Maßbestimmung in der euklidischen Ebene, bei der hyperbolische Gerade durch euklidische dargestellt werden, erhält man, wenn man die Entfernung zweier Punkte $[P_1 P_2]$ gleichsetzt

$$[P_1 P_2] = \frac{1}{2} \log(K_1 K_2 P_1 P_2),$$

wobei $(K_1 K_2 P_1 P_2)$ das Doppelverhältnis ist, das P_1 und P_2 und die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit einem bestimmten Fundamentalkegelschnitt (K) bilden und

$$\star(g_1 g_2) = \frac{1}{2i} \log(t_1 t_2 g_1 g_2),$$

wobei $(t_1 t_2 g_1 g_2)$ das Doppelverhältnis ist, welches $(g_1 g_2)$ mit den beiden durch ihren Schnittpunkt an K gelegten Tangenten bilden.

Zusatz 1. Mit Hilfe der Methoden der projektiven Geometrie können jetzt auch die fundamentalen Konstruktionsaufgaben gelöst werden, wobei zuerst alle metrischen Beziehungen in projektive zum Fundamentalkegelschnitt umzudeuten sind. Z. B. bedeutet (hyperbolische) Orthogonalität zweier Geraden, daß sie konjugierte Polaren in bezug auf den Fundamentalkegelschnitt sind. Ferner ist die Gleichheit der hyperbolischen Abstände $[P_1 P_2] = [Q_1 Q_2]$ durch folgende, auf projektiven Sätzen und der Definition durch das Doppelverhältnis beruhenden Konstruktionen gewährt: Verbindet man $P_1 P_2$, so schneidet diese Gerade den Fundamentalkegelschnitt K in $A_1 A_2$, ebenso die Gerade $Q_1 Q_2$ K in B_1 und B_2 . Verbindet man jetzt A_2 und B_1 und projiziert vom Schnittpunkt der Geraden $(A_1 B_1)$ und $(A_2 B_2)$ aus P_1 und P_2 auf $(B_1 A_2)$, dann Q_1 und Q_2 mit diesen Projektionen P'_1, P'_2 , so müssen die drei Geraden $P'_1 Q_1, P'_2 Q_2$ und $A_2 B_2$ durch einen Punkt gehen.

M. Großmann hat, wie schon Seite 128, Anm. erwähnt worden ist, eine Reihe eleganter Konstruktionen der hyperbolischen Geometrie auf dieser durch die projektive Geometrie gegebenen Grundlage ausgeführt.

Zusatz 2. Projektive Begründung der hyperbolischen Metrik. Diese ganze Betrachtung kann nun

in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden, wobei durchaus nicht etwa die Formeln der projektiven Geometrie nötig sind. Man gibt einen beliebigen Kegelschnitt K als Fundamentalkegelschnitt, man definiert die Gleichheit zweier Entfernungen $[P_1 P_2]$ und $[Q_1 Q_2]$ durch die Forderung, daß die vier Punkte $A_1 A_2 P_1 P_2$ (s. oben) projektiv zugeordnet sind den vier Punkten $B_1 B_2 Q_1 Q_2$ usw. und leitet aus den rein geometrisch unabhängig vom Parallelenpostulat begründeten Sätzen der projektiven Geometrie nunmehr die ganze hyperbolische Geometrie ab, also auf projektiver, nicht die euklidische Geometrie erfordernder Grundlage. Diese Aufgabe ist von F. Klein gelöst worden.

2. Die Kegelschnitte der hyperbolischen Geometrie*).

Die Kleinsche Darstellung der hyperbolischen Geometrie, d. h. die Anwendung der hyperbolischen Maßbestimmung wird in manchen Fällen übersichtlicher als die direkte. Dies zeigt sich z. B. bei der Untersuchung und Einteilung der Kegelschnitte.

Bevor wir aber zu diesem Ergebnis gelangen, müssen wir uns doch zuerst darüber Rechenschaft geben, wie die Kegelschnitte als geometrische Orte in der hyperbolischen Geometrie zu definieren sind.

Die allgemeinste Definition in der euklidischen Ebene ist folgende: gegeben sind zwei Kreise (von denen auch einer in eine Gerade ausarten kann). Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort eines Punktes, der von diesen beiden Kreisen gleichen Abstand hat.

Wir haben absichtlich diese Definition gewählt, um in der hyperbolischen Geometrie keinen Fall zu übersehen.

Hier lautet die Definition:

Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei Zyklen denselben Abstand hat.

Es würde nicht genügen, den Kegelschnitt als Ort

*) Vgl. Killings Werk Abschnitt I, § 5, ferner Story, On non-euclidean properties of conics (Ann. Journ. of Math. V, 1882, S. 358—381) und J. L. Coolidge, The elements of non euclidean Geometry (Oxford 1909), Kap. XII (dasselbst S. 142 ausführliche Literaturangaben).

eines Punktes zu definieren, für den die Summe oder die Differenz der Abstände von zwei Punkten, einem Punkt und einer Geraden oder zwei Geraden konstant ist, denn hierbei würde der Fall unberücksichtigt bleiben, daß einer der Zyklen zu einem Grenzkreis wird. Überdies hat die von uns gewählte Definition den Vorzug der Kürze.

Die Definition der Kegelschnitte als Schnitte eines Kreiskegels ließe sich auch verallgemeinern. An Stelle des Kreiskegels treten alle möglichen entsprechenden Kegel, und diese erhält man als Ort aller Geraden, die von den Punkten irgendeines Zyklus ausgehen und in Symmetrieebenen, d. h. in Ebenen senkrecht zum Zyklus und also durch je eine Achse gehend liegen, und die alle mit den entsprechenden Achsen gleiche Winkel einschließen. Diese Kegel sind dann mit beliebigen Ebenen zu schneiden, und daraus ließen sich mit einer der bekannten Queetelettschen Konstruktion für die Brennpunkte der Ellipse, Parabel und Hyperbel entsprechenden Betrachtung alle Fälle ableiten.

Unsere Aufgabe wird jetzt darin bestehen, zu zeigen, daß ein Kegelschnitt immer durch eine homogene Gleichung zweiten Grades in Weierstraßschen Koordinaten dargestellt wird.

Für die Berechnung im einzelnen werden wir die eingehende und geometrisch einfachere Definition schon wegen der nicht vermeidbaren Unterscheidung der Fälle heranziehen.

Betrachten wir die Ellipse, den Ort der Punkte, die von zwei festen Punkten $P(x, y, p)$, $P_1(x_1, y_1, p_1)$ und $P_2(x_2, y_2, p_2)$ Abstände r_1 und r_2 hat, deren Summe konstant ist ($= 2a$) und setzen wir zur Abkürzung

$$\operatorname{ch} r_1 = p p_1 - x x_1 - y y_1 = g_1, \quad \operatorname{sh} r_1 = \sqrt{g_1^2 - 1} = g'_1,$$

ebenso

$$\operatorname{ch} r_2 = p p_2 - x x_2 - y y_2 = g_2, \quad \operatorname{sh} r_2 = \sqrt{g_2^2 - 1} = g'_2,$$

so wird gefordert

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Hieraus folgt z. B.

$$g_2 = \operatorname{ch}(2a - r_1) = \operatorname{ch} 2a \cdot g_1 - \operatorname{sh} 2a \cdot g'_1,$$

d. i.

$$g_1' \operatorname{sh} 2a = g_1 \cdot \operatorname{ch} 2a - g_2$$

und daher

$$(g_1^2 - 1) \operatorname{sh}^2 2a = g_1^2 \operatorname{ch}^2 2a + g_2^2 - 2g_1 g_2 \operatorname{ch} 2a,$$

also

$$g_1^2 + g_2^2 - 2g_1 g_2 \operatorname{ch} 2a + \operatorname{sh}^2 2a = 0$$

oder

$$\begin{aligned} & (pp_1 - xx_1 - yy_1)^2 + (pp_2 - xx_2 - yy_2)^2 \\ & - 2 \operatorname{ch} 2a (pp_1 - xx_1 - yy_1) (pp_2 - xx_2 - yy_2) \\ & + \operatorname{sh}^2 2a (p^2 - x^2 - y^2) = 0, \end{aligned}$$

d. h. es ergibt sich eine homogene Gleichung zweiten Grades. Ganz ähnlich sind die Ansätze und Eliminationen durchzuführen bei allen anderen Kegelschnitten, solange in der Definition des geometrischen Ortes kein Grenzkreis vorkommt.

Der Abstand u des Punktes x, y, p vom Grenzkreis

$$p^2 - x^2 - y^2 = e^{2a}(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2$$

ist gegeben durch

$$e^u = e^a(p - x \cos \alpha - y \sin \alpha).$$

Soll also z. B. ein Punkt von $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und von einem gegebenen Grenzkreis gleichen Abstand haben, so muß sein

$$\begin{aligned} 2(pp_1 - xx_1 - yy_1) &= e^a(p - x \cos \alpha - y \sin \alpha) \\ &+ \frac{e^{-a}(p^2 - x^2 - y^2)}{p - x \cos \alpha - y \sin \alpha}, \end{aligned}$$

und diese Gleichung ist leicht wieder in eine homogene Gleichung zweiten Grades zu verwandeln. Sollen die beiden Abstände verschieden sein, so kann man den Grenzkreis leicht durch einen andern k' ersetzen, so daß P von P_1 und k' den gleichen Abstand hat.

Ebenso ist der Fall gleichen Abstandes von einer Geraden $(u_0 v_0 w_0)$ und dem Grenzkreis

$$p^2 - x^2 - y^2 = e^{2a}(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2$$

zu behandeln, es ergibt sich, indem man jetzt den hyperbolischen Sinus berechnet

$$\{ 2(u_0 x + v_0 y - w_0 p) - e^a(p - x \cos \alpha - y \sin \alpha) \} \\ + \frac{e^{-a}(p^2 - x^2 - y^2)}{p - x \cos \alpha - y \sin \alpha} = 0.$$

Sollen endlich die Abstände von zwei Grenzkreisen, deren Bestimmungsstücke wir mit $\alpha_1 a_1$ und $\alpha_2 a_2$ bezeichnen, eine konstante Summe ergeben, so erhalten wir

$$e^{a_1 + a_2 - b}(p^2 - x^2 - y^2) \\ - (p - x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1)(p - x \cos \alpha_2 - y \sin \alpha_2) = 0.$$

Ist die Differenz $u_1 - u_2$ konstant, so bekommen wir eine Gerade, deren Bedeutung leicht zu erkennen ist: Man ersetzt den einen Grenzkreis k_2 durch einen andern k'_2 , so daß die Differenz der Abstände des Punktes P von k_1 und k'_2 gleich Null ist, K_1 und K'_2 seien ferner die Schnittpunkte der Verbindungslinien der beiden unendlich fernen Mittelpunkte der Kreise k_1 und k'_2 mit ihnen. Jene Gerade ist dann die Mittelsenkrechte von K_1 und K'_2 .

Als allgemeines Ergebnis haben wir erhalten:

Jeder Kegelschnitt, der nicht in eine Gerade ausartet, kann durch eine homogene Gleichung zweiten Grades in Weierstraßschen Koordinaten dargestellt werden.

3. Einteilung der Kegelschnitte.

Wie die verschiedenen Typen sich gestalten und was für Typen auftreten, können wir jetzt sofort sehen; denn der (hyperbolische) Kegelschnitt wird ja durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt, ist daher bei unserer Abbildung oder Darstellung der hyperbolischen Ebene wieder ein Kegelschnitt.

Je nach Art und Lage seiner Schnittpunkte mit dem Fundamentalkreis (oder Fundamentalkegelschnitt) entstehen also die einzelnen Klassen, und zwar erkennen wir sofort, daß wir die folgenden Arten zu unterscheiden haben:

Zunächst vier Arten, bei denen von den vier Schnittpunkten mit dem Fundamentalkreis F keine zusammenfallen, und zwar sind dies:

1. Ellipse (Kegelschnitt, der ganz innerhalb F und von F getrennt liegt).

2. Hyperbel mit äußerem Mittelpunkt (dargestellt durch eine Hyperbel, deren beide Äste F in je zwei getrennten Punkten schneidet).

3. Hyperbel mit innerem Mittelpunkt (dargestellt durch einen Kegelschnitt K , dessen einer Ast F in vier reellen Punkten schneidet).

Diese beiden Hyperbeln sind zweiastige Kurven.

4. Semihyperbel (dargestellt durch K , der F in zwei reellen Punkten schneidet, aber nicht berührt). Die Kurve hat nur einen Ast.

Daran schließen sich vier Arten von Parabeln, dargestellt durch Kegelschnitte K , die F einmal berühren.

5. Elliptische Parabel (K liegt ganz innerhalb F).

6. Hyperbolische einteilige Parabel mit äußerem Ende (K ist eine Hyperbel, der eine Ast berührt F von außen und der andere Hyperbelast schneidet K zweimal).

7. Hyperbolische einteilige Parabel mit innerem Ende (K berührt F auch von innen, schneidet aber noch in zwei reellen Punkten).

8. Zweiteilige Parabel (K berührt F von außen und derselbe Ast von K schneidet F noch in zwei reellen Punkten).

Die Typen 5—8 entstehen aus 1—4 durch Grenzübergang.

Endlich bleibt noch der Fall, daß drei Schnittpunkte von K und F zusammenfallen:

9. Semizirkuläre Parabel.

Zusatz: Die projektiven Sätze über Kegelschnitte (Satz des Pascal, des Brianchou usw.) gelten ohne weiteres auch in der hyperbolischen Geometrie mit der oft besprochenen Erweiterung des Begriffs „Schnittpunkt“.

4. Konfokale Kegelschnitte.

Auch die Untersuchung konfokaler Kegelschnitte gestaltet sich ähnlich wie in der euklidischen Geometrie, nur mit mehr Fallunterscheidungen. Brennpunkt eines Kegelschnittes K ist jeder Schnittpunkt zweier Tangenten, die K und F berühren; ergibt sich dabei, daß er ein reeller außerhalb von F gelegener Punkt ist, so wird seine Polare in bezug auf F , die Fokalgerade, für K eine besondere Bedeutung haben.

Betrachten wir z. B. die (hyperbolische) Ellipse, den Ort derjenigen Punkte P , für welche die Summe der Abstände $r_1 + r_2$ von den Punkten

$$P_1(+f, 0, \sqrt{1+f^2}) \quad \text{und} \quad P_2(-f, 0, \sqrt{1+f^2})$$

konstant ist, nämlich

$$\text{sh}\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = a,$$

so ergibt sich aus der oben entwickelten Gleichung für diesen Fall

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} - \frac{p^2}{1 + a^2} = 0.$$

Die Polare des Punktes P_1 in bezug auf den Fundamentalkreis hat die Gleichung

$$xf - p\sqrt{1+f^2} = 0,$$

und das von P_2 an den Fundamentalkreis gelegte Tangentenpaar hat die Gleichung

$$(x\sqrt{1+f^2} - fp)^2 + y^2 \equiv x^2 + y^2 - p^2 + (xf - p\sqrt{1+f^2})^2 = 0.$$

Die Polare von P_1 für K hat die Gleichung

$$\frac{xf}{a^2} - \frac{p\sqrt{1+f^2}}{1+a^2} = 0$$

und es ist

$$\begin{aligned} (a^2 - f^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} - \frac{p^2}{1 + a^2} \right) + a^2(1 + a^2) \left(\frac{xf}{a^2} - \frac{p\sqrt{1+f^2}}{1+a^2} \right)^2 \\ = x^2(1+f^2) + y^2 + p^2f^2 - 2xpf\sqrt{1+f^2} = (x\sqrt{1+f^2} - fp)^2 + y^2 \end{aligned}$$

die Gleichung des von P_1 an K gelegten Tangentenpaares, die mit der anderen übereinstimmt. P_1 ist also in der Tat ein Punkt, in dem zwei gemeinsame (konjugiert imaginäre) Tangenten von K und F , die Geraden

$$x\sqrt{1+f^2} - fp \pm iy = 0$$

einander schneiden.

§ 27. Zusammenhang mit der Kreisgeometrie der euklidischen Ebene.

1. Eine Abbildung auf die euklidische Ebene.

Führen wir ähnlich wie früher Grenzkreiskoordinaten ein, indem wir jetzt einen Punkt bestimmen durch die folgenden beiden Größen: Durch $P(x, y, p)$ ziehen wir die Parallele zur $+y$ -Achse und den Grenzkreis senkrecht dazu, der die y -Achse im Punkte V treffen mag, und dann wird gesetzt

$$\begin{aligned} \text{Bogen } (VP) &= u e^{-v}, \\ OV &= v, \end{aligned}$$

so wird der Zusammenhang mit den Weierstraßschen Koordinaten gegeben durch

$$x = u e^{-v}, \quad y = \text{sh } v + \frac{1}{2} u^2 e^{-v}, \quad p = \text{ch } v + \frac{1}{2} u^2 e^{-v},$$

oder

$$x : y : p = 2u : (u^2 - 1 + e^{2v}) : (u^2 + 1 + e^{2v}).$$

Die Enden (Punkte des Fundamentalkreises) sind, was wir gleich hier erwähnen, dadurch bestimmt, daß

$$\begin{aligned} p^2 - x^2 - y^2 &= \lambda^2 (u^2 + 1 + e^{2v})^2 - (u^2 - 1 + e^{2v})^2 - 4u^2 \\ &= \lambda^2 (4e^{2v}) = 0 \end{aligned}$$

wird, d. h. $v = -\infty$.

Nunmehr bilden wir auf die euklidische Ebene (ξ, η) ab, indem wir setzen

$$\xi = u, \quad \eta = e^v.$$

Dann entsprechen den Punkten der hyperbolischen Ebene alle Punkte $\eta \geq 0$, den Enden ($v = -\infty$) insbesondere die Punkte der ξ -Achse.

Den Geraden

$$lx + my - np = 0$$

entsprechen die Kurven

$$2l\xi + m(\xi^2 + \eta^2 - 1) - n(\xi^2 + \eta^2 + 1) = 0,$$

d. i.

$$(\xi^2 + \eta^2)(m - n) + 2l\xi - (m + n) = 0,$$

das sind also Kreise, welche die ξ -Achse senkrecht schneiden, oder vielmehr nur die in der Halbebene $\eta > 0$ gelegenen Teile von ihnen.

Betrachten wir den Winkel zweier Linienelemente ds und ds_1 in der hyperbolischen Ebene und untersuchen zunächst den Winkel, den ein Element (ds , gegeben durch du und dv) mit den beiden hindurchgehenden Linien $dv = 0$ und $du = 0$ bildet, so kommt

$$\cos(ds, du) = \frac{du e^{-v}}{ds} = \sin(ds, dv).$$

$$\sin(ds, du) = \frac{dv}{ds} = \cos(ds, dv),$$

$$\cos(ds_1, ds_2) = \frac{du_1 \cdot du_2 e^{-2v} + dv_1 dv_2}{ds \cdot ds_1},$$

wobei zu setzen ist

$$ds_1^2 = e^{-2v} du_1^2 + dv_1^2, \quad ds_2^2 = e^{-2v} du_2^2 + dv_2^2.$$

Der Winkel der entsprechenden Elemente ($d\sigma_1 d\sigma_2$) ist

$$\begin{aligned} \cos(d\sigma_1, d\sigma_2) &= \frac{d\xi_1 d\xi_2 + d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{d\xi_1^2 + d\eta_1^2} \sqrt{d\xi_2^2 + d\eta_2^2}} \\ &= \frac{du_1 du_2 + dv_1 \cdot dv_2 e^{2v}}{\sqrt{du_1^2 + dv_1^2 e^{2v}} \sqrt{du_2^2 + dv_2^2 e^{2v}}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sphericalangle(ds_1, ds_2) = \sphericalangle(d\sigma_1, d\sigma_2).$$

Die angegebene Abbildung

$$\xi = u, \quad \eta = e^v$$

ist also winkeltreu (konform).

2. Abbildung der Zyklen.

Die allgemeine Gleichung der Zyklen ist (S. 119)

$$1 = p^2 - x^2 - y^2 = (lx + my - np)^2,$$

dies gibt

$$4\eta^2 = ((\xi^2 + \eta^2)(m - n) + 2l\xi - (m + n))^2.$$

Ein Zykl bildet sich also auf ein Kreispaar ab; genauer gesagt, auf diejenigen Punkte dieser beiden Kreise, welche oberhalb der ξ -Achse liegen. Wir wollen genauere Einsicht in die Abbildung der Zyklen gewinnen und untersuchen zu diesem Zweck die einzelnen Fälle.

Ein Grenzkreis ist (S. 119) gegeben durch

$$p^2 - x^2 - y^2 = e^{-2\alpha}(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2.$$

Sein Bild ist daher gegeben durch

$$4 \eta^2 = e^{-2\alpha}((\xi^2 + \eta^2)(\sin \alpha - 1) + 2 \cos \alpha \xi - (\sin \alpha + 1))^2.$$

Setzen wir hierin $\eta = 0$, so kommt

$$\xi^2(\sin \alpha - 1) + 2 \cos \alpha \xi - (\sin \alpha + 1) = 0,$$

oder

$$(\xi \sqrt{1 - \sin \alpha} + \sqrt{1 + \sin \alpha})^2 = 0,$$

d. h.: Die Bilder koaxialer Grenzkreise ($\alpha = \text{constans}$) sind Kreise, welche die ξ -Achse alle in demselben Punkt berühren.

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt u_1, v_1 und dem Radius r hat die Gleichung

$$\text{chr} = p p_1 - x x_1 - y y_1$$

und daraus wird

$$\begin{aligned} \text{chr} = & \frac{1}{4} \left\{ \eta + \frac{1}{\eta} + \frac{\xi^2}{\eta} \right\} \left\{ \eta_1 + \frac{1}{\eta_1} + \frac{\xi_1^2}{\eta_1} \right\} - \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\xi_1}{\eta_1} \\ & - \frac{1}{4} \left\{ \eta - \frac{1}{\eta} + \frac{\xi^2}{\eta} \right\} \left\{ \eta_1 - \frac{1}{\eta_1} + \frac{\xi_1^2}{\eta_1} \right\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 4 \text{chr} \cdot \eta \cdot \eta_1 = & (\eta^2 + 1 + \xi^2)(\eta_1^2 + 1 + \xi_1^2) - 4 \xi \xi_1 \\ & - (\eta^2 - 1 + \xi^2)(\eta_1^2 - 1 + \xi_1^2) \end{aligned}$$

oder

$$\eta^2 + \xi^2 - 2 \xi \xi_1 - 2 \text{chr} \cdot \eta \cdot \eta_1 + \eta_1^2 + \xi_1^2 = 0$$

oder

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1 \text{chr})^2 - \eta_1^2 \text{sh}^2 r = 0.$$

Dieser Kreis liegt ganz oberhalb der ξ -Achse, sein Mittelpunkt hat die Koordinaten

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1 \text{chr}$$

und der Radius ist gleich $\eta_1 \text{shr}$.

Wir erhalten, wenn u_1 und v_1 unverändert bleiben, das Kreisbüschel

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 - 2 \eta \eta_1 (\text{chr} - 1) = 0,$$

und diese Kreise stehen senkrecht auf den Kreisen durch die beiden Punkte $\xi = \xi_1, \eta = \pm \eta_1$, welche ihrerseits die

Bilder der Radien der konzentrischen Kreise der hyperbolischen Ebene sind.

Der Abstandslinie

$$\operatorname{sh} z = lx + my - np$$

endlich, deren Nulllinie die Weierstraßschen Linienkoordinaten l, m, n hat, entspricht der Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{2l\xi}{m-n} - 2\eta \frac{\operatorname{sh} z}{m-n} - \frac{m+n}{m-n} = 0,$$

ändert sich z , so bekommen wir ein Büschel von Kreisen durch die beiden Punkte

$$\eta = 0, \quad \xi = -\frac{l \pm \sqrt{l^2 + m^2 - n^2}}{m-n},$$

die den Enden der Mittellinie entsprechen.

Die beiden Äste einer Abstandslinie, entsprechend z und $-z$, stehen, wie man sich leicht überzeugen kann, im folgenden Zusammenhang:

Spiegelt man das Bild des einen Teils an der ξ -Achse, so erhält man den unterhalb der ξ -Achse gelegenen Teil desjenigen Kreises, dessen oberer Teil das Bild des anderen Astes der Abstandslinie ist.

3. Die Bewegungen.

Um zu erkennen, welche Bedeutung in unserer Bildebene die hyperbolischen Bewegungen haben, stellen wir zunächst fest, daß aus den Gleichungen

$$x : y : p = 2\xi : (\xi^2 + \eta^2 - 1) : (\xi^2 + \eta^2 + 1),$$

wenn wir noch berücksichtigen, daß x, y und p linear transformiert werden, sofort folgt:

ξ_1 und $\xi_1^2 + \eta_1^2$ müssen linear gebrochene Funktionen von ξ und $\xi^2 + \eta^2$ mit demselben Nenner werden.

Außerdem aber sind die „Enden“ ($p^2 - x^2 - y^2 = 0$) gegeben durch

$$x : y : p = 2\xi : \xi^2 - 1 : \xi^2 + 1.$$

Nun hatten wir aber früher (§ 25, 5) festgestellt, daß, wenn man die Enden in der Form darstellt

$$x : y : p = 2t : (1 - t^2) : (1 + t^2)$$

die allgemeinste Bewegung gegeben ist durch

$$t_1 = \frac{at + b}{ct + d}.$$

Hieraus folgt, daß für $\eta = 0$ aus

$$\xi_1 = \frac{a_{11}\xi + a_{12}(\xi^2 + \eta^2) + a_{13}}{a_{31}\xi + a_{32}(\xi^2 + \eta^2) + a_{23}}$$

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \frac{a_{21}\xi + a_{22}(\xi^2 + \eta^2) + a_{23}}{a_{31}\xi + a_{32}(\xi^2 + \eta^2) + a_{33}}$$

werden muß

$$\xi_1 = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \xi_1^2 = \frac{(a\xi + b)^2}{(c\xi + d)^2},$$

d. h. es ist, wenn η von Null verschieden ist

$$\xi_1 = \frac{(a\xi + b)(c\xi + d) + ac\eta^2}{(c\xi + d)^2 + c^2\eta^2}$$

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \frac{(a\xi + b)^2 + a^2\eta^2}{(c\xi + d)^2 + c^2\eta^2},$$

woraus noch folgt:

$$\eta_1^2 = \frac{\eta^2(ad - bc)^2}{((c\xi + d)^2 + c^2\eta^2)^2},$$

und, wenn wir annehmen, daß $ad - bc$ positiv ist,

$$\eta_1 = \frac{\eta(ad - bc)}{(c\xi + d)^2 + c^2\eta^2}.$$

Daraus folgern wir

$$\xi_1 + i\eta_1 = \frac{(a\xi + b)(c\xi + d) + ac\eta^2 + i\eta(ad - bc)}{(c\xi + d)^2 + c^2\eta^2}$$

$$= \frac{(a(\xi + i\eta) + b)(c(\xi - i\eta) + d)}{(c(\xi + i\eta) + d)(c(\xi - i\eta) + d)}$$

oder endlich

$$\xi_1 + i\eta_1 = \frac{a(\xi + i\eta) + b}{c(\xi + i\eta) + d}$$

und entsprechend

$$\xi_1 - i\eta_1 = \frac{a(\xi - i\eta) + b}{c(\xi - i\eta) + d}.$$

Die Bewegung wird also dargestellt durch eine lineare Transformation der komplexen Größe $\xi + i\eta$, wobei die Determinante $ad - bc$ positiv sein muß, z. B. gleich $+1$ angenommen werden kann.

Dies Ergebnis mußten wir auch von vorneherein erwarten, da ja die Bewegung sich darstellen muß als eine Transformation, welche alle Kreise (nämlich hyperbolische Gerade und Zyklen) wieder in Kreise überführt und bei der überdies die Punkte der reellen Achse ($\eta = 0$) wieder in Punkte der reellen Achse übergehen. Jede Kreisverwandtschaft aber wird bekanntlich durch eine linear gebrochene Transformation der komplexen Veränderlichen $\zeta = \xi + i\eta$ dargestellt. Wenn wir noch verlangen, daß die reelle Achse festbleibt, die obere Halbebene in sich übergeht und der Drehungssinn der Winkel sich nicht ändert, dann müssen außerdem die vier Koeffizienten reell sein und die aus ihnen gebildete Determinante $ad - bc$ positiv.

Zusatz: Die allgemeinste Kreisverwandtschaft der $\xi\eta$ -Ebene erhält man durch den Ansatz

$$\zeta_1 = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d},$$

worin a, b, c und d komplexe Zahlen sind. Um ξ_1 und η_1 zu berechnen, hat man nur auf der rechten Seite in den reellen und den imaginären Bestandteil zu zerlegen und ξ_1 dem reellen, η_1 dem imaginären gleichzusetzen. Damit ist dann zugleich die allgemeinste Kreisverwandtschaft der hyperbolischen Ebene gegeben, da ja bei unserer Abbildung die Zyklen der hyperbolischen in Kreise der euklidischen Geometrie übergehen.

4. Begründung der hyperbolischen Geometrie aus der Kreisgeometrie.

Wir können unser Ergebnis so zusammenfassen:

Behält man in der euklidischen Halbebene ($-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta < \infty$) das gewöhnliche Winkelmaß bei, ersetzt aber das Bogenmaß

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

durch

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2},$$

so erhält man eine Darstellung der hyperbolischen Geometrie.

Die Halbkreise und Halbgeraden, welche die ξ -Achse senkrecht schneiden, entsprechen dabei den hyperbolischen Geraden, alle übrigen Kreise und Geraden den Zyklen der hyperbolischen Geometrie.

Wir wollen schließlich noch den hyperbolischen Abstand $s = [P_1 P_2]$ zweier Punkte mit den euklidischen Koordinaten

$$\xi_1 = a + \varrho \cos \varphi_1, \quad \eta_1 = \varrho \sin \varphi_1$$

$$\xi_2 = a + \varrho \cos \varphi_2, \quad \eta_2 = \varrho \sin \varphi_2$$

berechnen, die beide auf der hyperbolischen Geraden

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 = \varrho^2$$

gelegen sind.

Bezeichnet man den hyperbolischen Abstand mit s , so findet man leicht

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} s &= p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 = \frac{1}{2 \eta_1 \eta_2} \{ \eta_1^2 + \eta_2^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2 \} \\ &= \frac{1 - \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}. \end{aligned}$$

Führt man die Tangenten der halben Winkel ein:

$$t_1 = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi_1, \quad t_2 = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi_2,$$

so kommt auf der rechten Seite

$$\frac{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2) - (1 - t_1^2)(1 - t_2^2)}{4 t_1 t_2} = \frac{2(t_1^2 + t_2^2)}{4 t_1 t_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} \right).$$

Auf der linken Seite steht

$$\operatorname{ch} s = \frac{e^s + e^{-s}}{2},$$

also wird

$$[P_1 P_2] = \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi_1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi_2}.$$

Man kann nun die ganze hyperbolische Geometrie auch umgekehrt aus der Theorie der Kreisverwandtschaften, bei denen die Halbebene $\eta \geq 0$ in sich übergeht, entwickeln und hat damit nicht nur eine neue Art der Ein-

führung, sondern auch einen Existenzbeweis für die hyperbolische Geometrie gewonnen, denn ein Widerspruch in der hyperbolischen Geometrie würde einen Widerspruch in der euklidischen bedingen*).

Auch die hyperbolische Raumgeometrie kann im euklidischen Raum (ξ, η, ζ) oder genauer gesagt, im Halbraum $\zeta \geq 0$ dargestellt werden. Als Bogenmaß dient dabei

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\zeta^2},$$

während das Winkelmaß beibehalten wird. Die hyperbolischen Ebenen sind dann durch die Halbebenen und Halbkugeln dargestellt, welche die $\xi\eta$ -Ebene senkrecht schneiden, alle andern Ebenen und Kugeln bedeuten Sphären der hyperbolischen Raumgeometrie**).

*) Man vergleiche Note VI in F. Kleins „Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“. (Erlangen 1872), wieder abgedruckt in Band 43, S. 63—100 der Math. Annalen (Leipzig 1893). Eine ähnliche Darstellung der hyperbolischen Geometrie, wobei die Geraden als auf der xy -Ebene senkrecht stehende Halbkreise, die auf einer Halbkugel liegen, erscheinen, findet sich bereits in Beltramis Teoria degli spazii di curvatura costante. Annali di Mat. Ser. II. Tomo II, S. 232—255 (Milano 1868—1869.) Als eigentliche Quelle dieser Einführung dürfte wohl Riemanns Habilitationsschrift (1854) (Ges. Werke, 2. Auflage, Leipzig 1892, S. 277 ff.) zu bezeichnen sein. — In Zusammenhang mit der Funktionentheorie haben diese Vorstellung gebracht F. Klein (vgl. z. B. Fricke und Klein, Automorphe Funktionen I [Leipzig 1897] S. 26—30) und H. Poincaré (Acta mathematica I [1883] S. 6—9).

**) In Kapitel II, S. 15—68 der ersten Auflage dieses Buchs ist dieser Aufbau der hyperbolischen Geometrie ausführlich dargestellt. Im Hinblick auf den diesmal erweiterten und vereinfachten Aufbau der hyperbolischen Geometrie aus sich selbst heraus (Kap. II) konnte aber in der neuen Auflage um so eher darauf verzichtet werden, als in Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik II (2. Auflage, Leipzig 1907), in § 10 und 11 diese Methode — Entwicklung der hyperbolischen Geometrie aus der Lehre von den Kreisbündeln bzw. der Kugelgebüsche — ausführlich dargestellt ist.

VI. Kapitel.

Sphärisch-elliptische Geometrie.

§ 28. Sphärische Geometrie.

1. Unabhängige Begründung der Sphärik.

Die sphärische Geometrie, d. h. die Geometrie, wie sie auf der Kugel herrscht, kann unabhängig vom Parallelenpostulat aus den Grundeigenschaften der Kugel abgeleitet werden: Die Kugel ist der Ort der Punkte, die von einem festen Punkt konstanten Abstand haben, „Gerade“ der Sphärik sind die Hauptkreise, d. h. die Schnitte mit Ebenen durch den Mittelpunkt. Dann werden die Kongruenzsätze aus der Drehbarkeit der Kugel in sich gefolgert usw.

Bei diesem Verfahren gewinnen wir die sphärische (zweidimensionale) Geometrie als Geometrie auf einer Fläche, die in einem dreidimensionalen Raum liegt, für den die Axiome der Anordnung, Verknüpfung und Kongruenz gelten (§ 2 und § 5, 2 S. 18).

Wir wollen aber ein anderes Verfahren einschlagen; indem wir außer der Beweglichkeit der Fläche in sich und dem Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte ist, nur noch einige wenige weitere Voraussetzungen machen, die wir im einzelnen sogleich anführen wollen.

Anders ausgedrückt, wir stellen uns die Aufgabe, die Geometrie auf der Kugel vom Standpunkt eines zweidimensionalen sphärischen Wesens aus aufzubauen, das sich nicht bewußt ist, daß die Kugel für die euklidische oder hyperbolische Vorstellung keine „Ebene“ ist.

Die Grundtatsachen oder Axiome lauten dann:

1. Es gelten die Kongruenzsätze für Dreiecke.
2. Die Winkelsumme im Dreieck ist größer als zwei Rechte.
3. Jede Gerade zerlegt das ganze Gebiet in zwei getrennte Teile. Durch Spiegelung an jeder Geraden gehen beide Teile ineinander über, die Figuren in symmetrisch-kongruente.

(Bei dem Wort „Spiegelung“ darf man hier natürlich nicht an die Spiegelung der Kugel an einer Ebene durch den Mittelpunkt denken. Vielmehr ist gemeint: Fällt man von ABC die Lote AD , BE , CF auf eine Gerade und verdoppelt sie, so entsteht aus ABC ein neues Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten und Winkel den entsprechenden Seiten und Winkeln von ABC gleich sind.)

4. Zwei beliebige Gerade treffen einander in mindestens zwei Punkten.

Aus 2. und 3. könnte man 4. mit Hilfe des archimedischen Postulats ableiten, da wir aber das archimedische Postulat im übrigen vorläufig nicht brauchen, haben wir den Satz für sich als Postulat aufgestellt.

Das zweidimensionale Gebiet dieser Geometrie bezeichnen wir mit S_2 .

2. Die Geometrie des S_2 .

Alle Eigenschaften der Kugel, die sonst aus der Raumgeometrie gewonnen werden, sollen jetzt mit Hilfe unserer Postulate abgeleitet werden.

Wir beweisen zuerst den Satz:

Alle von einem Punkt A ausgehenden Halbgeraden treffen einander zum erstenmal wieder in einem und demselben Punkt B ; alle diese Strecken AB sind einander gleich.

Zwei von A ausgehende Gerade mögen einander zum erstenmal wieder in B treffen. Verbindet man die Mittelpunkte M_1 und M_2 der beiden Strecken AB , so entstehen zwei kongruente Dreiecke, also steht M_1M_2 auf den beiden Geraden senkrecht. Die Dreiecke AM_1M_2 und BM_1M_2 sind dann beide gleichschenkelig, weil sie an der Basis gleiche Winkel (gleich einem Rechten) haben, und daraus folgt, daß die beiden Strecken AB gleich sind.

Verbinden wir jetzt P_1 auf M_1M_2 mit A , machen M_2P_2 gleich M_1P_1 und verbinden noch P_2 mit A , so sind die beiden Dreiecke AM_1P_1 und AM_2P_2 einander kongruent, und daher

$$\sphericalangle AP_2M_2 = \sphericalangle AP_1M_1, \quad AP_1 = AP_2.$$

In dem gleichschenkligen Dreieck AP_1P_2 müssen die Basiswinkel einander gleich sein, und zwar wegen

$$\sphericalangle AP_2P_1 = \sphericalangle \pi - \sphericalangle AP_1P_2$$

beide gleich einem Rechten. Daraus schließt man weiter

$$AP_1 = AM_1 (= AM_2) = AP_2$$

und daß die Gerade AP_1 durch B geht.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Zugleich folgt, daß der Ort der Mittelpunkte aller Strecken AB ein Kreis mit dem Halbmesser AM_1 ist, d. h.

Alle Geraden sind zugleich Kreise.

Diese Kreise wollen wir Hauptkreise nennen, sie müssen alle denselben Halbmesser haben.

Nun erkennt man auch die Zusammenhangsverhältnisse der S_2 : Ein Hauptkreis hat zwei Mittelpunkte, die durch Spiegelung an ihm auseinander hervorgehen, und die beiden Teile, in welche ein Hauptkreis die S_2 zerlegt, symmetrisch kongruent, machen zusammen die ganze S_2 aus.

Die ganze S_2 kann jetzt, wenn ein durch A gehender Hauptkreis gegeben ist, in acht kongruente Oktanten zerlegt werden: Sie entstehen, indem man durch A einen zum ersten senkrechten Hauptkreis legt und um A als Mittelpunkt einen dritten Hauptkreis legt.

Auf Grund dieser Überlegungen ergibt sich auch die Grundlage für die Streckenmessung:

Zwei Strecken, z. B. P_1P_2 und M_1M_2 sind kongruent, wenn die Zentriwinkel M_1AM_2 und P_1AP_2 gleich sind. Bezeichnen wir daher die Länge der geschlossenen Geraden mit 2π , so wird die Länge einer beliebigen geraden Strecke gleich dem Zentriwinkel zu setzen sein, den die beiden von demselben Mittelpunkt dieses Hauptkreises nach den Endpunkten der Strecke gezogenen Radien miteinander einschließen.

Der Radius jedes Hauptkreises ist dann gleich $\frac{1}{2}\pi$.

Jeder der beiden Mittelpunkte soll als Pol bezeichnet werden.

3. Zugeordnete rechtwinklige Dreiecke*).

Durch eine hier natürlich ganz anders als in der hyperbolischen Geometrie geartete Betrachtung können wir ebenfalls zu einem Zyklus einander zugeordneter recht-

*) Vgl. Hessenberg. Trigonometrie (Samml. Götschen), S. 115. Die Figur, welche die Kette der zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke zeigt, ist das Gaußsche „Pentagramma mirificum“ (Gauß' Werke III, S. 481).

winkliger Dreiecke gelangen. (Vgl. § 10, 3.) Verlängern wir (Fig. 33) BA um $\frac{1}{2}\pi - c$ bis C' und CA um $\frac{1}{2}\pi - b$ bis B' , so ist wegen

$$B'C = \frac{1}{2}\pi$$

und

$$\sphericalangle BCB' = \frac{1}{2}\pi$$

der Punkt B' Pol von BC , also auch

$$BB' = \frac{1}{2}\pi.$$

Hieraus folgt weiter, wegen

$$BC' = BB' = \frac{1}{2}\pi,$$

daß B der Pol von $B'C'$ ist. Endlich ist wegen

$$BB' = \frac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \sphericalangle BB'C' = \sphericalangle BC'B' = \frac{\pi}{2}$$

das Dreieck $BB'D$ ein Oktant der S_2 .

Hieraus ergeben sich für das bei C' rechtwinklige Dreieck $A'C'B'$ die Bestimmungsstücke:

$$\sphericalangle C'AB' = \alpha, \quad \sphericalangle AB'C' = CD = \frac{\pi}{2} - a,$$

$$C'B' = \frac{\pi}{2} - C'D' = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad AC' = \frac{\pi}{2} - c, \quad AB' = \frac{\pi}{2} - b.$$

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b , der Hypotenuse c und den Gegenwinkeln α und β gehört also ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit folgenden Bestimmungsstücken:

$$a_1 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad b_1 = \frac{\pi}{2} - c, \quad c_1 = \frac{\pi}{2} - b,$$

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - a,$$

oder, wenn wir das Komplement eines Winkels durch denselben Buchstaben bezeichnen, aber mit Akzent versehen:

$$a_1 = \beta', \quad b_1 = c', \quad c_1 = b', \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = a'.$$

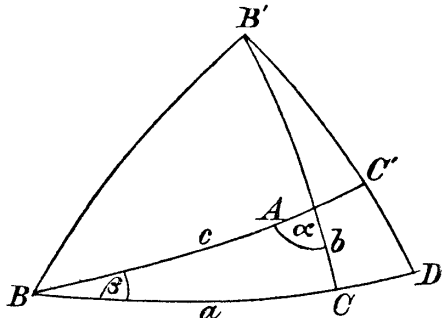


Fig. 33.

Von hier aus gelangt man zu dem rechtwinkligen Dreieck

$$a_2 = c'_1 = b, \quad b_2 = \alpha'_1 = \alpha', \quad c_2 = a'_1 = \beta, \quad \alpha_2 = b'_1 = c, \\ \beta_2 = \beta_1 = a' \text{ usf.},$$

und alle weiter entstehenden Dreiecke können durch folgende Regel (Nepersche Regel) zusammengefaßt werden (vgl.

Fig. 34):

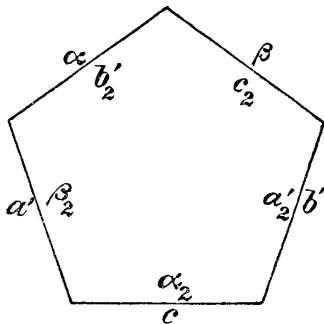


Fig. 34.

Schreibt man an die Seiten eines Fünfecks die fünf Bestimmungsstücke $c, a' = \frac{\pi}{2} - a, \alpha, \beta, b' = \frac{\pi}{2} - b$, so erhält man die fünf Bestimmungsstücke eines anderen rechtwinkligen Dreiecks, wenn man dieselben Buchstaben im gleichen oder umgekehrten Zyklus an die Seiten schreibt und nun Stücke, die an denselben Seiten

stehen, einander gleich annimmt. In der Figur ist z. B. angegeben

$$a'_2 = b',$$

also

$$a_2 = b, \quad b_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad c_2 = \beta, \quad \alpha_2 = c, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - a,$$

das ist das oben abgeleitete zweite Dreieck.

Zusatz: Durch diese Zuordnung werden auch die Konstruktionsaufgaben zugänglich. Z. B. die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck aus den beiden Winkeln α und β zu konstruieren, die zusammen größer sein müssen als ein rechter Winkel, läßt sich darauf zurückführen, ein anderes rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse

$c_2 = \beta$ und der Kathete $b_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ zu konstruieren, und das ist möglich, weil

$$b_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha < \beta, \quad \text{d. h.} < c_2.$$

Die Aufgabe der Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln α, β und γ , deren Summe größer

als π sein muß, ist wie in der hyperbolischen Geometrie durch Zerspaltung in zwei rechtwinklige Dreiecke zu lösen (vgl. § 10, 4). Sie kommt, wie eine einfache Überlegung zeigt, darauf hinaus, das Viereck $ADFE$ zu zeichnen, indem

$$\sphericalangle DAE = \alpha, \quad \sphericalangle ADF = \sphericalangle AEF = \frac{\pi}{2}, \quad DF = \frac{\pi}{2} - \beta, \\ DE = \frac{\pi}{2} - \gamma \text{ ist.}$$

Man hat nun, wenn irgend zwei Gerade vorliegen, die den Winkel α einschließen, nur um ihre Pole Kreise mit den Radien β und γ zu konstruieren und zum Schnitt zu bringen, um F zu erhalten. Diese beiden Kreise schneiden einander, da der Abstand der Pole gleich

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha$$

ist, aber

$$\beta + \gamma > \pi - \alpha.$$

Die so gefundene Strecke AF ist dann gleich $\frac{\pi}{2} - h$, wobei h die Höhe von der Ecke die zum Winkel α im gesuchten Dreieck gehört, auf die Gegenseite ist, außerdem zerlegt AF den Winkel α in genau dieselben Teile, wie die Höhe im Dreieck, und daher können jetzt die rechtwinkligen Teildreiecke — aus h und α_1 , bzw. h und α_2 — und damit das gesuchte Dreieck konstruiert werden.

Die gewöhnliche Konstruktion benutzt den durch Betrachtung der Kugel als Fläche im dreidimensionalen Raume — nicht in der S_2 — gewonnenen Satz, daß zu jedem Dreieck ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$) ein polares Dreieck gehört, dessen Seiten und Winkel die Supplemente der Winkel und Seiten des ersten sind.

4. Inhalt und Exzeß.

Fast genau wie in der hyperbolischen Geometrie*) kann gezeigt werden, daß der Inhalt eines geradlinigen n -Ecks dem an die Stelle des Defektes tretenden sphärischen Exzeß, d. h. dem Überschuß seiner Winkelsumme über $2n - 4$ Rechte proportional ist. Es genügt, den Nachweis für das Dreieck zu führen, und auch hierfür kann

*) Vgl. § 12 und die Anmerkung S. 50.

er ganz kurz dargestellt werden, da er ganz parallel der früheren Betrachtung verläuft.

Vergleicht man zunächst zwei Dreiecke ABC und A_1BC mit derselben Grundlinie und gleicher Winkelsumme, so wird man wieder die Mitten E und F von AC und AB verbinden, auf diese Mittellinie die Lote AA' , BB' , CC' von A , B und C fällen, und erkennen, daß das bei B' und C' rechtwinklige Viereck $BB'C'C$ denselben Inhalt wie ABC hat, außerdem ist

$$\sphericalangle B'BC = \sphericalangle BCC' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Führt man dieselbe Konstruktion für das zweite Dreieck aus, so entsteht ein Viereck BB_1C_1C , ebenfalls bei B_1 und C_1 rechtwinklig, in dem außerdem noch

$$\sphericalangle B_1BC = \sphericalangle BCC_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$$

ist. B_1 und B , C_1 und C müssen dann zusammenfallen, sonst entstünde ja ein Viereck $B_1C_1C'B$ mit vier rechten Winkeln.

Demnach haben ABC und A_1BC denselben Inhalt.

Von der besonderen Voraussetzung, daß die beiden Dreiecke außer in der Winkelsumme noch in einer Seite übereinstimmen, kann man sich aber genau wie früher befreien, und hat damit den Satz, daß der Inhalt eine Funktion der Winkelsumme oder des Exzesses ist. Zerlegen wir ein Dreieck durch eine Transversale, so ist die Summe der Exzesse der Teile gleich dem Exzeß des Ganzen, beendasselbe gilt für den Inhalt. Daraus folgt, daß Inhalt und Exzeß proportional sind. Der Inhalt wird dem Exzeß gleich, wenn wir als Inhalt für die geschlossene S_2 die Zahl 4π festsetzen, denn dann wird der Inhalt eines Hauptkreises gleich 2π , und das ist zugleich der Exzeß, da ja ein Hauptkreis so viel ist wie ein Dreieck mit drei Winkeln der Größe π .

§ 29. Die Trigonometrie der S_2 .

1. Inhalts- und Umfangsfunktion*).

Aus der Grundannahme der Beweglichkeit, insbesondere der freien Drehung um einen Punkt, folgt, daß Bogen (s)

*) Berichte der K. S. G. d. W. 60 (1908), S. 289—305.

und Sektor (S) eines Kreises proportional sind dem Zentriwinkel φ . Wir setzen

$$s = \varphi \cdot U(r)$$

$$S = \varphi \cdot J(r)$$

und führen damit die allein vom Radius abhängigen Umfangs- und Inhaltsfunktion ein.

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist aber zugleich auch eine Abstandslinie, nämlich der Ort derjenigen Punkte, die von dem zu M als Pol gehörigen Hauptkreis den Abstand $l = \frac{\pi}{2} - r$ haben. Bogenstück der Abstandslinie und Inhalt der Figur, die von dem Hauptkreis, den beiden Radien in den Endpunkten und dem Bogenstück begrenzt sind, sind ihrerseits proportional dem Stück φ der Basis, der Hauptkreisstrecke, die eben die senkrechte Projektion der Abstandslinie ist. So gelangen wir zu den beiden Funktionen $U'(l)$ und $J'(l)$, die Bogen und Inhalt proportional sind, und wir finden leicht die Beziehung zu U und J , da ja ein Kreis mit dem Radius r

dasselbe ist, wie eine Abstandslinie mit $l = \frac{\pi}{2} - r$.

Auf diese Weise finden wir

$$s = \varphi \cdot U(r) = \varphi \cdot U'\left(\frac{\pi}{2} - r\right)$$

$$S = \varphi \cdot J(r) = \varphi \left[1 - J'\left(\frac{\pi}{2} - r\right) \right],$$

also

$$U(r) = U'\left(\frac{\pi}{2} - r\right), \quad J(r) = 1 - J'\left(\frac{\pi}{2} - r\right).$$

Für $r = 0$ wird

$$U(r) = 0, \quad J(r) = 0,$$

also ist

$$U'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad J'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ebenso findet man

$$U\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad U'(0) = 1, \quad J\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad J'(0) = 0.$$

2. Bestimmung der Funktionen $U(r)$ und $J(r)$.

Um jetzt die Funktionen $U(r)$ und $J(r)$ selbst zu erhalten, müssen wir von folgenden Prinzipien Gebrauch machen, die zur Ergänzung der in § 28, 1 aufgestellten Axiome dienen.

5. Beschreibt man einem Kreisbogen einen regulären Sehnenzug (n gleiche Sehnen) ein und läßt die Anzahl n unbegrenzt wachsen, wobei zugleich die Größe der Sehnen unbegrenzt abnimmt, so ist der Grenzwert der Sehnensumme dem Kreisbogen gleich.

6. Bildet der Rand von n sich aneinanderschließender, nicht überdeckenden Teilfiguren einen Linienzug, der bei unbegrenzt wachsendem n mit dem Rand einer gegebenen Figur zusammenfällt, während zugleich das Innere der Teilfiguren mit dem Inneren der Figur zusammenfällt, so ist der Inhalt der Figur gleich dem Grenzwert der Inhaltsumme der Teilfiguren.

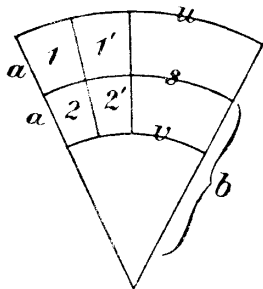


Fig. 35.

Wir betrachten jetzt Umfang $(u + v)$ und Inhalt einer Figur, die von zwei Kreisbögen mit den Radien $b + a$ und $b - a$ begrenzt ist, ferner von zwei Radien, die den Winkel φ einschließen (Fig. 35).

Jetzt zerlegen wir durch Radien, indem wir den Winkel φ uns in n gleiche Teile zerlegt denken, und ziehen die entsprechenden n Sehnen auf s , u und v . Die entstehenden Figuren legen wir dann „Kopf gegen Fuß“ aneinander (Fig. 36). Es entsteht eine Figur, in der nunmehr der bei der ersten Figur dem Bogen s eingefügte Sehnenzug geradlinig wird. Im Grenzfall wird der Sehnenzug dem Bogen s gleich, der obere und untere, zunächst aus lauter Kreisbogen zusammengesetzte Linienzug, geht in zwei Abstandslinien über, jede von der Länge $\frac{1}{2}(u + v)$, und wir erhalten

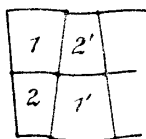


Fig. 36.

$$\begin{aligned} u + v &= \varphi \cdot (U(b + a) + U(b - a)) = 2s \cdot U'(a), \\ &= 2\varphi \cdot U(b) U'(a). \end{aligned}$$

Bezeichnet man das Komplement von b mit b' , so folgt

$$U\left(\frac{\pi}{2} - b' + a\right) + U\left(\frac{\pi}{2} - b' - a\right) = 2 U'(b') \cdot U'(a)$$

oder, wenn wir für b' wieder b schreiben

$$U'(b - a) + U'(b + a) = 2 U'(a) U'(b).$$

Auf demselben Wege findet man durch Betrachtung des Inhalts und Anwendung des zweiten Prinzips:

$$\varphi(J(b + a) - J(b - a)) = 2 \varphi \cdot U(b) \cdot J'(a)$$

oder

$$J(b + a) - J(b - a) = 2 U(b) \left[1 - J\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \right].$$

Die Funktionalgleichung für U' hat die Lösungen

$$U'(a) = 1, \quad U'(a) = \operatorname{ch} \frac{a}{k}, \quad U'(a) = \cos \frac{a}{k},$$

von denen nur die dritte in Betracht kommt, da $U'(a)$ mit wachsendem a abnimmt; weil $U'(a)$ für $a = \frac{\pi}{2}$ zu Null wird, folgt

$$U'(a) = \cos a, \quad U(a) = \sin a.$$

Die zweite Funktionalgleichung läßt sich umformen in

$$J'(b' + a) - J'(b' - a) = 2 U(b') J'(a)$$

oder, wenn wir für b' wieder b schreiben:

$$J'(b + a) - J'(b - a) = 2 \cos b \cdot J'(a).$$

Hieraus folgt

$$J'(a) = \sin a,$$

also

$$J(a) = 1 - \cos a.$$

Jetzt sind die gesuchten Funktionen gefunden: Für Bogen (s) und Sektor (S) eines Kreises vom Radius r haben wir, wenn φ der Zentriwinkel ist,

$$s = \varphi \cdot \sin r$$

$$S = \varphi(1 - \cos r).$$

3. Ableitung des Kosinussatzes.

Lassen wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecke A festgehalten wird, eine Drehung um den Winkel φ ausführen, wobei die Punkte C und B in C' und B' übergehen, so beschreibt AB die Fläche

$$\varphi(1 - \cos c),$$

AC beschreibt die Fläche

$$\varphi(1 - \cos b)$$

und CB ein Viereck $(CC'B'B)$, das von zwei Kreisbögen (CC') und (BB') , außerdem von den Geraden CB und $C'B'$ begrenzt ist, und es ist

$$\varphi(1 - \cos c) = \varphi(1 - \cos b) + (CC'B'B).$$

Den Inhalt dieses Vierecks können wir wieder durch einen Grenzübergang bestimmen, indem wir den Bogen CC' in n gleiche Teile zerlegen und in den Teilpunkten $C_1 C_2 \dots C_{n-1}$ überall die Tangenten an den Kreis legen. Ist $\Delta\tau$ der Kontingenzwinkel, so wird

$$(CC'B'B) \approx n \Delta\tau \cdot (1 - \cos a).$$

Dabei bedeutet das geschwungene Gleichheitszeichen, daß die Formel nur asymptotisch gilt, für den Grenzübergang zu $n = \infty$.

Der Inhalt der Vierecke, die von zwei benachbarten Radien und den Tangenten in ihren Endpunkten gebildet werden, ist

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (\pi - \Delta\tau) - 2\pi = \frac{\varphi}{n} - \Delta\tau,$$

und ihre Inhaltsumme

$$n \left(\frac{\varphi}{n} - \Delta\tau \right) = \varphi - n \Delta\tau.$$

Diese Formel führt beim Grenzübergang ($n = \infty$), durch den die Vierecksumme sich in den Sektor des Kreises mit dem Radius b verwandelt, auf

$$\varphi(1 - \cos b) \approx \varphi - n \Delta\tau,$$

und wir erhalten aus der eben gewonnenen Beziehung:

$$\varphi(1 - \cos c) = \varphi(1 - \cos b) + \varphi \cos b (1 - \cos a)$$

oder

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b .$$

Damit ist der Kosinussatz für das rechtwinklige Dreieck der S_2 mit der Kathete a und b und der Hypotenuse c nachgewiesen.

4. Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks.

Aus dem Kosinussatz können alle anderen Formeln durch Übergang zu zugeordneten Dreiecken (§ 28, 3) abgeleitet werden. Bezeichnen wir jetzt Hypotenuse, Kathete und Winkel mit c, a, b, λ, μ , so folgt aus

$$(4) \quad \cos c = \cos a \cdot \cos b$$

z. B.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$$

oder

$$(1) \quad \sin b = \sin c \cdot \sin \mu$$

und

$$\cos \mu = \cos b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

d. i.

$$(5) \quad \cos \mu = \cos b \sin \lambda ,$$

aus (5) und

$$\cos \lambda = \cos a \sin \mu$$

zusammen mit (4)

$$(3) \quad \cos c = \operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{ctg} \mu$$

und durch Übergang

$$(6) \quad \cos \mu = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tga}$$

sowie

$$(2) \quad \sin a = \operatorname{ctg} \mu \cdot \operatorname{tgb} .$$

Wir haben hier die Formeln entsprechend numeriert, wie in § 15, 2, S. 78, und die zusammenfassende Regel lautet: Schreibt man an ein Fünfeck die Stücke $c, \frac{\pi}{2} - a, \lambda, \mu, \frac{\pi}{2} - b$, so ist der Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Sinus der anliegenden und dem Produkt der Kotangenten der gegenüberliegenden Stücke.

§ 30. Die Geometrie des sphärischen Raumes.

1. Absolute Polaren und die Cliffordschen Parallelen*).

Der Aufbau der sphärischen Raumgeometrie schließt sich leicht an, nachdem die Geometrie der S_2 entwickelt ist, und wir wollen nur auf einige besondere Eigentümlichkeiten hinweisen.

Legt man durch eine sphärische Gerade g alle möglichen S_2 , so gehen diese auch durch Drehung um die Achse g auseinander hervor. Jede sphärische Gerade hat (als Hauptkreis) in jeder durch sie gehenden S_2 zwei Mittelpunkte, und bei der Drehung des Raumes um g beschreiben beide Mittelpunkte denselben Hauptkreis g' , nämlich wieder einen Kreis vom Radius $\frac{\pi}{2}$. Jeder Punkt

von g' ist Pol (Mittelpunkt) von g , und jeder Punkt von g Pol von g' . Von zwei solchen Geraden g und g' sagen wir, daß jede die absolute Polare der anderen ist.

Dreht man den Raum mit g als Achse um den Drehwinkel φ , so geht dabei jeder Punkt P der absoluten Polaren in einen Punkt P_1 über, so daß PP_1 gleich φ ist, und alle Punkte die in einer S_2 durch g' liegen, bleiben in derselben S_2 :

Die Drehung des Raumes mit g als Achse und dem Drehwinkel φ ist dasselbe wie Schiebung längs g' um die Strecke φ .

Clifford hat gezeigt, daß man im S_3 auch zu dem Begriff paralleler Geraden gelangen kann. Wir folgen den Überlegungen von Bonola um zu diesen, wie wir gleich sehen werden, windschiefen Parallelen zu gelangen.

Zwei Geraden sollen zueinander parallel heißen, wenn sie lauter gemeinsame Lote gleicher Länge haben. Ein erstes Beispiel sind zwei absolute Polaren: Trägt man

*) Clifford, Preliminary sketch on Biquaternions (Proceedings of the London Math. Society IV, [1873], p. 381—395). — Klein, Die nichteuklidische Geometrie II (Autographiertes Vorlesungsheft, Göttingen 1893), S. 234—238. — Über die von uns entwickelte metrische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der Cliffordschen Fläche vgl. Bonola, S. 195 ff. und Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen usw. (Leipzig 1909).

auf den Senkrechten zu g die Strecke $\frac{\pi}{2}$ ab, so erhält man die absolute Polare, und es trifft jede auf g senkrecht stehende Gerade auch g' .

Wir werden jetzt durch eine Konstruktion zu den weiteren Parallelen gelangen, und zwar ist es ein merkwürdiges Spiel des Zufalls — so muß man wohl sagen — daß die Zuordnung zwischen rechtwinkligen Dreiecken und Vierecken mit drei rechten Winkeln, auf so verschiedenen Grundlagen sie in der hyperbolischen Geometrie und in der sphärischen beruht, hier wie dort als Ausgangspunkt für die Untersuchung der Parallelen dienen kann.

Wir errichten auf g , von der ein Mittelpunkt mit M bezeichnet ist, die Senkrechte $AA_1 = a$,

dann in der Ebene gA_1 die beiden Senkrechten A_1F_1 und PF_1 . So entsteht ein Stumpfeck AA_1F_1P mit drei rechten Winkeln und einem stumpfen bei F_1 , und es ist $PF_1 < a$. Auf der Ebene (g, M) errichten wir in F_1 die Senkrechte F_1P_1 und bringen sie mit dem Kreis vom Radius a mit dem Mittelpunkt P zum Schnitt (vgl. Fig. 36).

Jetzt betrachten wir die rechtwinkligen Dreiecke MA_1F_1 , PF_1P_1 und $A_1F_1P_1$. Im ersten Dreieck sind Hypotenuse, Katheten und Gegenwinkel:

$$\frac{\pi}{2} - u, \quad v, \quad \frac{\pi}{2} - a; \quad s, \quad \pi - \varphi.$$

Hierzu gibt es die zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke

$$c_1 = a, \quad a_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u\right) = u,$$

$$b_1 = \frac{\pi}{2} - (\pi - \varphi) = \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - v, \quad \beta_1 = s$$

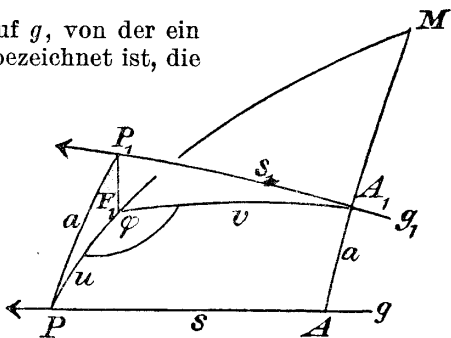


Fig. 36.

und

$$c_2 = s, \quad a_2 = v, \quad b_2 = \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - u, \quad \beta_2 = a.$$

Das erste zugeordnete Dreieck ist aber mit PF_1P_1 kongruent, weil Hypotenuse ($PP_1 = a$) und eine Kathete ($PF_1 = u$) in beiden gleich sind, und das zweite mit $A_1F_1P_1$, weil zwei Katheten ($A_1F_1 = v$ und $F_1P_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}$) in beiden übereinstimmen. Hieraus folgt:

$$\sphericalangle F_1PP_1 = \beta_1 = s, \quad \sphericalangle F_1A_1P_1 = \beta_2 = a, \quad A_1P_1 = c_2 = s,$$

und endlich wegen der Kongruenz der beiden Dreiecke $PA A_1$ und A_1P_1P :

$$\sphericalangle PP_1A_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ändert man s , so werden beständig diese Beziehungen erhalten bleiben. g und g_1 besitzen also die geforderte Eigenschaft, es sind zwei Gerade mit dem konstanten Abstand a . Durch A_1 gibt es natürlich noch eine zweite zu g parallele Gerade g_2 , welche aus g_1 durch Spiegelung an der Ebene (gM) hervorgeht.

Wir fassen das Ergebnis noch einmal zusammen:

Errichtet man in A auf g die Senkrechte von der Länge $AA_1 = a$, so gehen durch A_1 zwei Gerade, welche von g den konstanten senkrechten Abstand a haben, sie schließen mit der Ebene S_2 durch g und A_1 beide den Neigungswinkel a ein.

Diese beiden Geraden sind die Cliffordschen Parallelen, und ihren Abstand a von g können wir zugleich, weil er der Neigungswinkel gegen die Ebene (A_1, g) ist, als Parallelwinkel bezeichnen, der zum Lote a gehört.

Für $a = 0$ fallen die beiden Cliffordschen Parallelen mit g zusammen, für $a = \frac{\pi}{2}$ gehen sie in die absolute Polare von g über.

2. Die Cliffordsche Fläche.

Die Cliffordsche Fläche ist definiert als Rotationszylinder mit der Achse g und dem Halbmesser a . Schneiden wir ihn mit Ebenen durch g , so erhalten wir als

Schnitte ein Kreispaar vom Radius $\frac{\pi}{2} - a$, dieses Kreispaar können wir als Meridianschnitt der Fläche bezeichnen, weil es in einer Ebene durch die Achse g liegt. Schneiden wir aber mit einer Ebene, die durch die absolute Polare g' von g geht, so erhalten wir gleichfalls ein Kreispaar (Kreise mit dem Radius a), und zwar werden wir jeden solchen Kreis als Parallelkreis bezeichnen, weil er in einer Ebene liegt, welche die Achse g senkrecht schneidet.

Jede Cliffordsche Fläche geht in sich über durch Drehung um g (die zugleich Schiebung längs g' ist) und Schiebung längs g (womit eine Drehung um g' verbunden ist).

Die Kreise, welche als Meridiane und Parallelkreise zu bezeichnen sind, wenn man g als Achse betrachtet, sind zugleich Parallelkreise und Meridiane, wenn man g' als Achse betrachtet.

Jede Cliffordsche Fläche wird durch ihre Meridiane und Parallelkreise in ein Netz von Rechtecken zerlegt, wobei in jedem Rechteck die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind. Hieraus folgt, daß die Winkelsumme in jedem Dreieck auf der Cliffordschen Fläche, dessen Seiten Schraubenlinien d. h. Isogonaltrajektorien der Parallelkreise also zugleich auch der Meridiankreise sind, zwei Rechte beträgt.

Schneidet man eine Cliffordsche Fläche längs eines Meridianes und eines Parallelkreises auf, so kann man sie innerhalb des S_3 verbiegen, genau wie einen Rotationszylinder des euklidischen Raumes, und zwar in der Weise, daß Meridiane sowohl wie Parallelkreise Kreisbogen bleiben. Es entspricht dies genau der Verbiegung eines Rotationszylinders des euklidischen Raumes, den man längs einer Mantellinie aufgeschnitten hat, und bei dem man den Radius des Querschnittes ändert.

Bei dieser Verbiegung bleibt die zerschnittene Fläche immer ein Stück einer Cliffordschen Fläche, und es wird das durch die Schnitte erhaltene Rechteck zwar nicht eine Cliffordsche Fläche ganz bedecken, wohl aber beständig ein von zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen begrenztes Rechteck bleiben.

Wir sehen also: Alle Cliffordschen Flächen sind aufeinander abwickelbar.

Die auf einer Cliffordschen Fläche mit der Achse g und dem Radius a gelegenen Cliffordschen Parallelen zur Achse g schließen mit den Meridianen den Winkel a ein, und wenn a von Null bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, nimmt auch dieser Neigungswinkel von Null bis $\frac{\pi}{2}$ zu.

Wickeln wir jetzt alle andern Cliffordschen Flächen auf einer bestimmten ab, so verwandeln sich, weil doch bei der Abwicklung außer den Längen auch die Winkel ungeändert bleiben, die Geraden der Cliffordschen Fläche mit dem Radius r dabei in Schraubenlinien, die die Meridiane unter dem Winkel r schneiden.

Umgekehrt kann jede Cliffordsche Fläche vom Radius a so verbogen werden, daß eine beliebige Schraubenlinie auf ihr, d. h. jede Kurve, welche die Parallelkreise unter einem bestimmten, beliebig vorgeschriebenen Winkel schneidet, dabei in eine Gerade übergeht.

3. Gültigkeit der euklidischen Geometrie auf der Cliffordschen Fläche.

Um zu zeigen, daß auf der Cliffordschen Fläche die euklidische Geometrie gilt, brauchen wir außer den früher gefundenen Funktionalgleichungen und den Eigenschaften der Cliffordschen Fläche, insbesondere der Abwickelbarkeit, die wir in der vorigen Nummer ausführlich besprochen haben, kein weiteres Hilfsmittel, insbesondere ist für den Nachweis der Kongruenzsätze die Auflösung der Funktionalgleichungen (S. 161) nicht erforderlich.

Zunächst führen wir noch die Bezeichnung ein

$$V(\varphi) = U\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = U'(\varphi),$$

und aus der Formel auf S. 161 folgt

$$V^2(\varphi) + U^2(\varphi) = 1,$$

$$V(\varphi + \psi) + V(\varphi - \psi) = 2V(\varphi)V(\psi),$$

woraus noch folgt

$$U\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \psi\right) + U\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \psi\right) = 2V\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)V(\psi),$$

oder, wenn man $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ersetzt durch φ

$$U(\varphi + \psi) + U(\varphi - \psi) = 2 U(\varphi) V(\psi) .$$

Betrachtet man jetzt auf der Cliffordschen Fläche vom Radius φ eine geradlinige Strecke (Stück einer geradlinigen Erzeugenden) von der Länge $AB = c$, fällt von A und B die Lote $AA' = BB' = \varphi$ auf die Achse und legt durch A den Meridian (AC), durch B den Parallelkreis (BC), so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, und der Fußpunkt C' des Lotes von C auf die Achse fällt mit B' zusammen, ferner ist $A'B' = AB = c$.

Es wird, wenn wir setzen

$$\begin{aligned} (BC) &= a, & (AC) &= b, \\ b &= c V(\varphi), & a &= c U(\varphi), \end{aligned}$$

also

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Damit ist der pythagoreische Lehrsatz bewiesen, und zwar auf allen Cliffordschen Flächen, für rechtwinklige Dreiecke, bei denen die beiden Katheten Stücke von Meridianen und Parallelkreisen sind, die Hypotenuse kann eine Schraubenlinie sein und braucht nicht notwendig eine Gerade zu sein.

Betrachten wir jetzt ein bei C rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten Schraubenlinien sind, und dessen Winkel wir mit α und β bezeichnen: Ist φ der Winkel, den BC mit dem durch B gehenden Meridian einschließt, und legt man durch C als Hilfslinien Meridian und Parallelkreis, durch A einen Parallelkreis, so findet man durch senkrechte Projektion auf den Parallelkreis durch A und den Meridian durch B leicht:

$$\begin{aligned} a U(\varphi) + b V(\varphi) &= c U(\varphi + \beta) , \\ a V(\varphi) - b U(\varphi) &= c V(\varphi + \beta) . \end{aligned}$$

Aus der Relation

$$U^2(\varphi) + V^2(\varphi) = 1$$

folgt dann zunächst

$$a^2 + b^2 = c^2 ,$$

also der pythagoreische Lehrsatz für jedes rechtwinklige Dreieck.

Ferner wird

$$a(U^2(\varphi) + V^2(\varphi)) = c\{U(\varphi + \beta)U(\varphi) + V(\varphi + \beta)V(\varphi)\},$$

und der Faktor von c wird

$$U(\varphi)\{U(\varphi)V(\beta) + U(\beta)V(\varphi)\} \\ + V(\varphi)\{V(\varphi)V(\beta) - U(\varphi)U(\beta)\} = V(\beta),$$

d. i.

$$a = c \cdot V(\beta),$$

wofür, weil α und β sich zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen, auch geschrieben werden kann

$$a = c U(\alpha).$$

Ebenso

$$b = c V(\alpha) = c U(\beta).$$

Hieraus folgt: Stimmen auf einer Cliffordschen Fläche zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten Schraubenlinien sind, in irgend zwei entsprechenden Bestimmungsstücken, die nicht zwei Winkel sind, überein, dann sind alle entsprechenden Stücke einander gleich.

Da außerdem die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, so gilt die euklidische Geometrie auf den Cliffordschen Flächen; dabei entsprechen den Geraden der euklidischen Ebene die Schraubenlinien.

§ 31. Verschiedene Abbildungen der S_2 und die elliptische Geometrie.

Den verschiedenen Arten der Darstellung oder Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die euklidische, die sich an die analytische Geometrie anschließen (§ 25—27), stehen hier entsprechende Betrachtungen gegenüber, die sich aber viel einfacher gestalten, da die Kugel als Feld der sphärischen Geometrie einerseits, als Fläche des euklidischen Raumes andererseits ein ausgezeichneter Vermittler zwischen euklidischer und sphärischer Geometrie ist.

1. Konforme Abbildung durch stereographische Projektion.

Projiziert man die Punkte der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ von Nordpol ($x = y = 0, z = 1$) aus stereographisch*) auf die Äquatorebene ($z = 0$), so entsprechen den Geraden der sphärischen Geometrie, d. h. den Hauptkreisen, die durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

gegeben sind, die Kreise

$$2Ax + 2By + C(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Sie stellen ein Diametralbündel dar, denn sie schneiden den Kreis

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

in gegenüberliegenden Punkten eines Durchmessers.

Die Maßbestimmung erhält man durch Übertragung von der Kugel.

Winkel sind also einfach in euklidischem Maße zu messen, da die stereographische Projektion konform ist.

Der sphärische Abstand s zweier Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ auf der Kugel ist gegeben durch die Formel

$$\sin \frac{1}{2} s = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Geht man zur Ebene über, so ist x, y und z zu ersetzen durch

$$\frac{2x}{N}, \quad \frac{2y}{N}, \quad 1 - \frac{2}{N} (N = x^2 + y^2 + 1),$$

so daß sich ergibt

$$\sin \frac{1}{2} s = \frac{\sqrt{(x_1 N_2 - x_2 N_1)^2 + (y_1 N_2 - y_2 N_1)^2 + (r_1^2 - r_2^2)^2}}{N_1 \cdot N_2}.$$

Hierin ist gesetzt

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad N_1 = r_1^2 + 1, \quad N_2 = r_2^2 + 1.$$

Man kann den Ausdruck noch umformen in

$$\sin \frac{1}{2} s = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{N_1 N_2}}.$$

*) Vgl. Sammlung Schubert XXVIII, S. 223.

Hieraus folgt z. B. — was übrigens die stereographische Projektion, die ja auch die kleinen Kreise der Kugel in Kreise der Ebene verwandelt, unmittelbar ergibt, — daß die Kreise in unserm Bild einfach mit den Kreisen der euklidischen Geometrie zusammenfallen. Soll die Entfernung s des Punktes $x_1 = a$, $y_1 = b$ von dem beweglichen Punkt x , y konstant sein, so führt dies auf die Gleichung

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + 1)(a^2 + b^2 + 1) \sin^2 \frac{1}{2} s \\ & = x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - 2(ax + by), \end{aligned}$$

die einen euklidischen Kreis darstellt.

Für das Bogenelement bekommt man, indem man $x_1 = x$, $y_1 = y$, $x_2 = x + dx$, $y_2 = y + dy$ setzt

$$\frac{1}{2} ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Die Gesamtlänge der Pseudogeraden, z. B. der euklidischen Geraden $y = 0$ (die mit zu den Kreisen des Diametralbündels gehört) wird, wie es sein muß

$$s = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = 2\pi.$$

Als Bewegungen sind alle Kreisverwandtschaften anzusprechen, bei denen die Kreise des Diametralbündels ineinander übergehen.

2. Geodätische Abbildung durch gnomonische Projektion.

Eine Darstellung der Geometrie der S_2 innerhalb der euklidischen Ebene, wobei den Hauptkreisen Gerade entsprechen, also geodätische Linien in geodätische Linien übergehen, erhält man durch perspektivische (gnomonische) Projektion der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ vom Mittelpunkt auf irgendeine Ebene, z. B. die Tangentialebene im Nordpol

$$z = 1.$$

Sind ξ und η die rechtwinkligen Koordinaten, so wird die Abbildung vermittelt durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{x}{z}, \quad \eta = \frac{y}{z}.$$

Einem Punkt der Ebene entsprechen zwei Punkte der Kugel

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}},$$

wobei in allen drei Ausdrücken dasselbe Vorzeichen der Wurzel zu nehmen ist, entweder + oder -.

Dem sphärischen Abstand (s), gegeben durch

$$\cos s = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

entspricht

$$\cos s = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + 1} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + 1}}.$$

Auch dieser Ausdruck läßt eine ähnliche Deutung zu, wie der entsprechende bei der Darstellung der hyperbolischen Geometrie.

Berechnet man das Doppelverhältnis der vier Punkte $P_1(\xi_1 \eta_1) P_2(\xi_2 \eta_2) K_1 K_2$, wobei K_1 und K_2 die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P_2$ mit dem imaginären Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$$

sind, so findet man als Wert den Quotienten der beiden Wurzeln der Gleichung

$$(\xi_1^2 + \eta_1^2 + 1) + 2\lambda(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + 1) + \lambda^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + 1) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{2(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + 1)}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + 1} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + 1}}$$

oder

$$= 2 \cos s = e^{is} + e^{-is}$$

$$s = \frac{1}{2i} \log(P_1 P_2 K_1 K_2) \quad (\text{vgl. S. 131}).$$

Bei dieser Maßbestimmung ist also die Strecke ähnlich wie früher zu messen durch den mit $2i$ dividierten Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden Punkte und ihrer Schnittpunkte mit dem — imaginären — Fundamentalkegelschnitt

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0.$$

Der Winkel zweier Hauptkreise ist dem Winkel ihrer Achsen gleich oder dem sphärischen Abstand ihrer Pole. Schreiben wir die Gleichung eines Hauptkreises

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = 0,$$

wobei $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten des Poles sind, so erhalten wir, wenn $\xi_1 \eta_1$ die Koordinaten des Schnittpunktes der Achse mit der Ebene sind, oder, was dasselbe ist, die gnomonische Projektion des Poles, als Bild in der Ebene

$$\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + 1 = 0.$$

Diese Gleichung aber, in der $\xi_1 \eta_1$ bestimmte Werte haben, stellt gerade die Polare des Punktes $\xi_1 \eta_1$ in bezug auf den Fundamentalkegelschnitt dar, d. h.:

In der Abbildung ist der Winkel (φ) zweier sphärischen Geraden

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = 0,$$

$$x x_2 + y y_2 + z z_2 = 0$$

der gegeben ist durch

$$\cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + 1} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + 1}}$$

gleich dem durch $2i$ dividierten Logarithmus des Doppelverhältnisses ihrer Pole i. b. auf den Fundamentalkegelschnitt und der Schnittpunkte der Verbindungslinie der Pole mit dem Fundamentalkegelschnitt.

Dieses Doppelverhältnis ist aber, nach bekannten Sätzen der projektiven Geometrie, gleich dem der Geraden selbst mit den von ihrem Schnittpunkt aus an den Fundamentalkegelschnitt gelegten imaginären Tangenten.

Die allgemeinste geodätische Abbildung erhält man durch Hinzufügen einer beliebigen reellen projektiven Transformation, wodurch der Fundamentalkegelschnitt

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$$

in einen beliebigen andern „nullteiligen“ verwandelt wird, d. h. in einen Kegelschnitt, der keine reellen Punkte besitzt, aber durch eine Gleichung mit lauter reellen Koeffizienten dargestellt wird.

Die Definitionen für Abstands- und Winkelmaße bleiben dabei ungeändert, da ja Doppelverhältnisse bei projektiven Transformationen invariant sind.

Zusatz: Die Maßbestimmung für das Bogenelement ergibt sich aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d^2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right) + d^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right) + d^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right),$$

woraus folgt

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + (\eta d\xi - \xi d\eta)^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2}$$

statt des Wertes in der euklidischen Geometrie

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Das Winkelmaß für den Winkel zweier Geraden

$$u_1 \xi + v_1 \eta + 1 = 0,$$

$$u_2 \xi + v_2 \eta + 1 = 0$$

ist nicht das euklidische

$$\left(\cos \varphi = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2}} \right),$$

sondern zu ersetzen durch

$$\cos \varphi = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2 + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + 1} \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + 1}}$$

und für den Winkel ($d\varphi$) zweier unendlich benachbarten Geraden, deren Linienkoordinaten u, v und $u + du, v + dv$ sind, erhalten wir nicht, wie in der euklidischen Geometrie

$$d\varphi^2 = \frac{(u dv - v du)^2}{(u^2 + v^2)^2},$$

sondern

$$d\varphi^2 = \frac{du^2 + dv^2 + (u dv - v du)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2}.$$

3. Elliptische Geometrie*). Die gnomonische Abbildung ist nicht eindeutig. Einem Punkt der Ebene entsprechen zwei diametral gegenüberliegende der Kugel oder ein Durchmesser der Kugel.

Eindeutige Beziehung besteht also zwischen der in der vorigen Nummer aufgebauten Geometrie und der Geometrie der Vollstrahlen (nicht der Halbstrahlen, Kugelradien) durch einen Punkt. Wir müssen zwischen der Geometrie auf der Kugel (der sphärischen Geometrie) und der Geometrie im Bündel der Vollstrahlen und ihrem durch gnomonische Projektion erhaltenen Bild, der elliptischen Geometrie unterscheiden.

Im umgrenzten Gebiet, das von einer geschlossenen einfach zusammenhängenden Kurve berandet ist, unterscheiden sich die beiden Geometrien nicht, wohl aber ist das Gesamtbild ein anderes.

Zwei Hauptkreise schneiden einander in zwei Punkten, zwei Gerade der elliptischen Geometrie aber nur in einem Punkt.

Wie ist es nun zu erklären, daß trotz der Gültigkeit des archimedische Postulates die Winkelsumme im Dreieck bei der elliptischen Geometrie größer ist als zwei Rechte, während doch hier zwei Gerade nur einen Schnittpunkt haben? (Vgl. § 3, 2!)

Die Erklärung liegt darin, daß die Gerade in der elliptischen Geometrie die Ebene nicht mehr in zwei getrennte Teile zerlegt: Ist nämlich g das perspektivische (gnomonische) Bild irgendeines Hauptkreises auf der Ebene, also der Schnitt der durch den Hauptkreis und den Mittelpunkt O der Kugel gehenden Diametralebene mit der Bildebene, und verbindet man irgendeinen Punkt P der Bildebene mit O , so kann man den Durchmesser OP , ohne daß er bei der Drehung g schneidet, so bewegen, daß er bei der Drehung in OP_1 übergeht. Verfolgt man die Bewegung genauer, so erkennt man, daß dabei der Schnittpunkt des Durchmessers mit der Bildebene auf der Geraden PP_1 von P sich nach der zu P_1 entgegengesetzten Richtung entfernt und zwar — im Sinne euklidischer Maßbestimmung — ins Unendliche (wenn der Durchmesser

*) Die Gegenüberstellung von sphärischer und elliptischer Geometrie rührt von Klein her (Math. Annalen IV, S. 604).

zur Bildebene parallel ist); dann aber bewegt sich der Schnittpunkt auf der andern Seite von g , aus dem Unendlichen nach P_1 hin, und g ist dabei nicht überschritten worden.

Schneidet man die elliptische Ebene längs einer Geraden auf, so hängen die beiden Teile immer noch zusammen, man kann ja von jedem Punkt zu jedem andern gelangen, ohne die Gerade zu überschreiten. Die zerschnittene Ebene zerfällt aber in zwei getrennte Teile, wenn man noch längs einer weiteren Geraden aufschneidet.

Weil die Gerade die elliptische Ebene noch nicht in zwei getrennte Teile zerlegt, nennen wir die elliptische Ebene einseitig, und weil die längs einer Geraden aufgeschnittene Ebene durch jeden weiteren Schnitt, der in sich zurückläuft, in zwei getrennte Teile zerlegt wird, einfach zusammenhängend.

Die Ebene mit elliptischer Maßbestimmung oder das Vollstrahlenbündel ist demnach ein einseitiges, einfach zusammenhängendes Gebiet, während die euklidische sowohl wie die hyperbolische Ebene zweiseitig und einfach zusammenhängend sind.

Anschaulich machen kann man sich diese Art des Zusammenhanges, den die elliptische Ebene besitzt, auch im euklidischen Raum durch gewisse geschlossene Flächen, die sich nicht ins Unendliche erstrecken. Freilich sehen sie sehr kompliziert aus, weil sie Selbstdurchdringungslinien besitzen*).

§ 32. Analytische Darstellung und Abbildung der sphärisch-elliptischen Raumgeometrie.

1. Darstellung im vierdimensionalen euklidischen Raum.

Die zweidimensionale sphärische Geometrie ist die Geometrie auf der Kugel, und zur analytischen Darstellung gelangt man daher rechnerisch am einfachsten, indem man an die analytische Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes anknüpft, die rechtwinkligen Koordinaten x , y und z aber der Nebenbedingung unterwirft

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

*) Vgl. W. Boy, Über die curvatura integra geschlossener Flächen. Math. Annalen, Band 57, S. 151—184.

Genau so ist die dreidimensionale sphärische Geometrie nichts anderes als die Geometrie auf einer dreidimensionalen Kugel, die wir uns am einfachsten als in einem vierdimensionalen euklidischen Raume*) gelegen darstellen können, oder gegeben durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4 rechtwinklige cartesische Koordinaten sind. „Ebenen“ unserer Geometrie sind die Gebilde, für welche die vier Veränderlichen außerdem eine lineare Gleichung

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0$$

erfüllen. Diese Gebilde sind einfach euklidische Kugeln. Der Schnitt zweier solcher „Ebenen“, also eine „Gerade“, ist ein euklidischer Kreis usw.

„Bewegungen“ sind lineare Transformationen der Form

$$x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 + \alpha_{i4} x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei die Koeffizienten α_{ik} noch gewisse quadratische und bilineare Bedingungen zu erfüllen haben, damit

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 + (x'_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

ist.

Der Winkel zweier Richtungen, den die vom Punkt $a_1 a_2 a_3 a_4$ ausgehenden Pseudogeraden bilden, welche die Geraden

$$x - a_1 : x - a_2 : x - a_3 : x - a_4 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4$$

und

$$x - a_1 : x - a_2 : x - a_3 : x - a_4 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4$$

berühren, ist bestimmt durch

$$\cos \varphi = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2}},$$

der Abstand s zweier Punkte durch die Formel

$$\sin \frac{1}{2} s = \frac{1}{4} \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2}.$$

Die einfache Rechnung, welche zeigt, daß diese Größen bei allen Bewegungen ungeändert bleiben, ist leicht auszuführen.

*) Vgl. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, Samml. Schubert XXXV.

Wir wollen uns mit dieser Andeutung begnügen und von weiteren Einzelheiten absehen, weil die geometrische Vorstellungskraft hier versagt und durch Analogie mit der Kugel im dreidimensionalen Raum nicht vollkommen ersetzt werden kann.

2. Stereographische Projektion und Darstellung im euklidischen R_3 .

Ausführlich wollen wir bei dem Bild der Geometrie des dreidimensionalen sphärischen Raums verweilen, das wir zuerst durch eine Verallgemeinerung der stereographischen Projektion gewinnen. Dasselbe Bild läßt sich aber, wie wir gleich hier hervorheben wollen, ganz unabhängig davon entwickeln, ohne jenes analytisch einfache, der Anschauung aber nicht zugängliche Hilfsmittel.

Wir projizieren stereographisch auf den dreidimensionalen Raum, indem wir die Geraden, die durch den Punkt

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0$$

und den Punkt $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ auf der Kugel

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1$$

der vierdimensionalen Raumes gehen, mit dem dreidimensionalen ebenen Raum

$$\xi_1 = 0$$

zum Schnitt bringen.

Bezeichnen wir die Koordinaten des Schnittpunkts mit diesem ebenen R_3 durch

$$\xi_2 = x, \quad \xi_3 = y, \quad \xi_4 = z,$$

so bestehen die Gleichungen

$$\xi_1 : \xi_2 - x : \xi_3 - y : \xi_4 - z = 1 : x : y : z$$

oder

$$\xi_1 = \lambda - 1,$$

$$\xi_2 = \lambda x,$$

$$\xi_3 = \lambda y,$$

$$\xi_4 = \lambda z,$$

und es ist λ zu bestimmen aus

$$1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 \cdot N$$

$$N = 1 + x^2 + y^2 + z^2,$$

d. h.

$$\lambda = \frac{2}{N}.$$

Man hat also

$$\xi_1 = (x^2 + y^2 + z^2 - 1) : N,$$

$$\xi_2 = 2x : N,$$

$$\xi_3 = 2y : N,$$

$$\xi_4 = 2z : N.$$

Dies sind die Formeln der stereographischen Abbildung.

Bilder der Pseudoebenen

$$A \xi_1 + B \xi_2 + C \xi_3 + D \xi_4 = 0$$

werden die Kugeln

$$2Ax + 2By + 2Cz + D(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0,$$

die die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

sämtlich in größten Kreisen treffen. Diese Kugeln bilden also ein sogenanntes Diametralgebüsch.

Um nun die Maßbestimmung zu gewinnen, drücken wir zunächst den Abstand s , gegeben durch die oben stehende Formel (S. 178), aus in x, y, z . Der sphärische Abstand der beiden Punkte, deren stereographische Bilder die Koordinaten $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ sind, ist dann, wie sich leicht berechnen läßt, gegeben durch

$$\sin \frac{1}{2} s = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 1)}},$$

woraus noch für das Bogenelement folgt

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}.$$

Aus der Formel für den Abstand erkennt man auch sofort, daß die Kugeln des sphärischen Raumes dargestellt

werden durch Kugeln des euklidischen Raumes. Denn nimmt man an, daß s und $x_2 = a$, $y_2 = b$, $z_2 = c$ konstant bleiben, so gibt die Gleichung für $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + 1) \cdot \sin^2 \frac{1}{2} s \\ - (x - a)^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2 = 0,$$

das ist aber eine Kugel. Den sphärischen Ebenen S_2 im S_3 schließlich entsprechen, wie wir nochmals zeigen wollen, Kugeln des Diametralgebüsches.

In der Tat gibt unsere Gleichung für $s = \frac{1}{2} \pi$, d. h. für sphärische Ebenen, als Bilder

$$+ \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + 1) \\ - x^2 - y^2 - z^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ax + 2by + 2cz = 0$$

oder

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(a^2 + b^2 + c^2 - 1) + 2ax + 2by + 2cz = 0,$$

und jede solche Kugel schneidet die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

in einem Hauptkreis, d. h. die Kugeln bilden ein Diametralgebüsch*).

Endlich ist die Abbildung auch winkeltreu, denn der Winkel zweier Linienelemente ($d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4$; $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \delta\xi_3, \delta\xi_4$) der S_3 ist gegeben durch

$$\cos \varphi = \frac{d\xi_1 \delta\xi_1 + d\xi_2 \delta\xi_2 + d\xi_3 \delta\xi_3 + d\xi_4 \delta\xi_4}{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2} \sqrt{\delta\xi_1^2 + \delta\xi_2^2 + \delta\xi_3^2 + \delta\xi_4^2}}$$

und die Transformation ergibt durch einfache Rechnung, daß dieser Ausdruck gleich

$$\frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}}$$

ist, also gleich dem Winkel der entsprechenden Linienelemente**).

*) Über Kugelgeometrie vgl. Döhlemann, Geometrische Transformationen II (Samml. Schubert XXVIII), § 27.

**) In der ersten Auflage (§ 45 u. 46, S. 206—215) ist hier an die Untersuchung der Clifford'schen Parallelen und der Clifford'schen Fläche geknüpft, die wir aber jetzt bereits direkt elementargeometrisch erledigt haben in § 30, 2.

3. Elliptische Maßbestimmung im euklidischen Raum.

Der elliptischen Maßbestimmung in der euklidischen Ebene steht entsprechend eine elliptische Maßbestimmung im euklidischen Raum gegenüber, die ebenfalls ein geodätisches Bild ergibt, d. h. ein Bild, bei dem den Geraden des S_3 Gerade des euklidischen R_3 entsprechen. Und gerade wie oben ist die Abbildung nicht eindeutig, und deshalb die bei der Maßbestimmung gewonnene Geometrie wohl im begrenzten Gebiet mit der des sphärischen Raumes übereinstimmend, in ihrer Gesamtheit aber verschieden: Die Ebene wird dabei einseitig, usw.

Wenn wir die Kugel

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1$$

auf die Ebene $\xi_4 = 1$ abbilden durch Zentralprojektion oder ihre Koordinaten darstellen durch

$$\xi_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}, \quad \xi_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}},$$

$$\xi_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}, \quad \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}},$$

so erhalten wir die elliptische Maßbestimmung im euklidischen R_3 .

Der Abstand zweier Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ und $(x_2 y_2 z_2)$ ist dann zu messen durch $\cos s = 1 + 2 \sin^2 \frac{s}{2}$, wobei für $\sin^2 \frac{s}{2}$ die oben in Nr. 1 gegebene Formel zu verwenden ist. Dies gibt

$$\cos s = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 1}}.$$

Ebenso findet man, genau wie oben daß der Winkel zweier Ebenen

$$\text{und} \quad x x_1 + y y_1 + z z_1 + 1 = 0$$

$$x x_2 + y y_2 + z z_2 + 1 = 0$$

zu messen ist durch

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 1}},$$

d. h. daß er gleich dem elliptisch gemessenen Abstand ihrer Pole in bezug auf die Fundamentalfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

ist.

Verbinden wir die zwei Punkte $P_1 P_2$ und bringen sie mit der nullteiligen (d. h. durch eine Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellten) Fundamentalfläche, die aber keinen reellen Punkt hat) zum Schnitt, indem wir

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}$$

in die Gleichung der Fundamentalfläche einsetzen, so ist das Doppelverhältnis von $P_1 P_2$ und den beiden Schnittpunkten ($K_1 K_2$) der Verbindungslinie mit der Fundamentalfläche das Verhältnis der beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1) - 2\lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1) + \lambda^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 1),$$

also

$$\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 1}} = 2 \cos s = e^{is} + e^{-is},$$

also

$$s = \frac{1}{2i} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2i} \log (P_1 P_2 K_1 K_2).$$

Das elliptische Abstandsmaß zweier Punkte ist also gleich dem mit $2i$ dividierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das P_1 und P_2 mit den Schnittpunkten $K_1 K_2$ ihrer Verbindungslinie und der Fundamentalfläche bilden.

Entsprechendes gilt für das Winkelmaß zweier Ebenen, es ist gleich dem $2i$ dividierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das zwei Ebenen mit den beiden durch ihre Schnittgerade an die Fundamentalfläche gelegten Tangentialebenen bilden.

Auch diese Definitionen lassen Verallgemeinerungen zu, indem die nullteilige Fundamentalfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

durch eine beliebige andere nullteilige Fundamentalfläche ersetzt wird, wie in § 26, 1 und § 31, 2 der Fundamentalkegelschnitt.

4. Die Bedeutung der Cliffordschen Parallelen.

Führen wir im Raum die elliptische Maßbestimmung ein, so können wir auch den Weg gehen, auf welchem Clifford zur Entdeckung der nach ihm benannten Parallelen des elliptisch-sphärischen Raumes gelangt ist. Dabei müssen freilich Vorkenntnisse über die projektiven Eigenschaften der Flächen zweiten Grades vorausgesetzt werden, um weitere Einzelheiten der elliptischen Metrik projektiv umzudeuten.

Orthogonalität zweier Ebenen

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 + 1 = 0,$$

$$x x_2 + y y_2 + z z_2 + 1 = 0$$

im Sinn unserer elliptischen Maßbestimmung, d. h. die Erfüllung der Gleichung

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + 1 = 0$$

bedeutet, daß die Ebenen konjugiert sind (in bezug auf die Fundamentalfläche), d. h. daß jede den Pol der anderen enthält. Des weiteren haben wir folgende Beziehungen:

Projektive Eigenschaft in bezug auf die Fundamentalfläche F_2 :

1. Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind konjugiert.
2. E geht durch die Polare g' von g .
3. g und g' Polaren in bezug auf F_2 .

Elliptische Maßbestimmung:

1. E_1 und E_2 orthogonal.
2. g senkrecht auf E .
3. g und g' absolute Polaren.

Wir betrachten jetzt g , welche F_2 in U und V trifft und ihre absolute Polare g' , die F_2 in U' und V' trifft. Die Polarebene von U ist Tangentialebene von F_2 , ebenso die Polarebene von V ; ihr Schnitt, die absolute Polare g' von g , ist also die Verbindungslinie der Schnittpunkte $U'V'$ zweier Paare von geradlinigen (imaginären) Erzeugenden der F_2 .

Wir betrachten jetzt das Vierseit $UU'VV'$ und verbinden einen Punkt A von g mit einem Punkt A' von g' , dann ist AA' zu g und g' orthogonal.

UU' , AA' , VV' sind drei windschiefe Gerade, die eine zweite Fläche zweiten Grades F'_2 bestimmen und gehören auf ihr derselben Schar an. Der zweiten Schar von geradlinigen Erzeugenden gehören UV und $U'V'$ an, weil sie die drei genannten Geraden treffen. Ist PP' eine beliebige weitere Gerade der ersten Schar, wobei P auf UV , P' auf $U'V'$ gelegen ist, so sind die Doppelverhältnisse

$$(UPAV) = (U'P'A'V'),$$

daher im Sinn der elliptischen Maßbestimmung

$$AP = A'P'.$$

Durch A_1 auf AA' legen wir die zweite Gerade der Hilfsfläche F'_2 , sie möge UU' , PP' und VV' in C , P_1 und D schneiden. Dann ist auch

$$(UPAV) = (CP_1A_1D),$$

also, da C und D ebenfalls der Fundamentalfläche angehören, im Sinn der elliptischen Maßbestimmung

$$PA = P_1A_1.$$

In dem windschiefen Vierseit AA_1P_1P ist jetzt

$$AP = A_1P_1,$$

$$AP \perp AA_1, \quad AP \perp PP_1.$$

F'_2 und F_2 können gleichzeitig jede in sich übergeführt werden durch eine projektive Transformation, bei der die beiden Geraden UCU' und $V'DV$ Punkt für Punkt festbleiben, aber P_1 in A_1 und P in A übergeht, und hieraus folgt

$$PP_1 = AA_1,$$

$$A_1P_1 \perp P_1P \perp PA,$$

d. h. aber:

A_1P_1 ist eine Cliffordsche Parallele zu AP , und wir haben den Satz:

Trifft g die Fundamentalfläche in UV , g' ihre absolute Polare, die Fundamentalfläche in $U'V'$, so wird jede Schar von Cliffordschen Parallelen

zu g , die selbst zueinander parallel sind, dargestellt durch die eine Schar von Erzeugenden einer F'_2 , welche zwei Gegenseiten des windschiefen Vierecks $UVV'U'$ und die absoluten Polaren g und g' enthält.

Eine solche F'_2 ist bestimmt, wenn man irgend zwei Punkte auf zwei Gegenseiten verbindet, z. B. C auf UU' und D auf VV' , und auf dieser Fläche gehören einer Geradenschar an

$$UU' \text{ und } VV'$$

der andern Schar gehören an

$$g(UV), CD \text{ und } g'(U'V')$$

die Geraden dieser zweiten Schar sind die Cliffordschen Parallelen zu g .

Die beiden Cliffordschen Parallelen zu g durch A_1 lassen sich nun leicht finden: Die eine ist der Schnitt der beiden Ebenen (A_1UU') und (A_1VV') , die andere der Schnitt der beiden Ebenen (A_1UV') und $(A_1U'V)$.

§ 33. Die Studysche Abbildung der Geraden des elliptischen Raumes.

Wir wollen, nachdem die Darstellung der Grundeigenschaften des elliptischen Raumes vorangeschickt ist, noch eine von Study*) angegebene Abbildung der Geraden oder vielmehr der „Speere“ (orientierten, d. h. in einem vorgeschriebenen Sinne zu durchlaufenden Geraden) auf die Punktpaare einer Kugel untersuchen, wozu noch einige elementare Hilfssätze erforderlich sind.

1. Elliptischer und sphärischer Raum.

Die elliptische Raumgeometrie steht zur sphärischen in derselben Beziehung wie die entsprechenden zweidimensionalen Geometrien (vgl. § 32, 3). Im elliptischen Raum ist also die Gesamtlänge einer Geraden gleich π , ferner können zwei Geraden g_1, g_2 einander höchstens in einem Punkt schneiden, oder, wenn sie einander nicht schneiden, haben sie zwei gemeinsame Lote.

*) Study, Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie. Am. Journ. of Math. 29, p. 116 ff. —

Jedes gemeinsame Lot kann mit Anwendung des in § 5, 2 allgemein bewiesenen Satzes von der Mittellinie leicht konstruiert werden, genau wie in § 7, 1 das gemeinsame Lot zweier einander nicht schneidenden Geraden der hyperbolischen Ebene. Der Mittelpunkt des gemeinsamen Lotes von g_1 und g_2 ist also der Schnittpunkt aller Geraden (Mittellinien), welche die geometrischen Örter der Mitten der Verbindungslinien entsprechender Punkte kongruenter Punktreihen auf den beiden Geraden sind. Man erhält zwei gemeinsame Lote, je nachdem man den Umlaufssinn der beiden Punktreihen gleich oder entgegengesetzt wählt.

Die Beziehung zwischen den beiden gemeinsamen Loten folgt aus den Eigenschaften der absoluten Polaren (§ 30, 1). Auf einer Geraden h nehmen wir P und Q beliebig an ($PQ = \beta$) und errichten senkrecht zu h

$$PP' = QQ' = \frac{\pi}{2},$$

wobei QQ' aus PP' durch eine Drehung um den Winkel α hervorgehen soll. Dann sind $P'Q'$ zwei Punkte der absoluten Polaren h' von h_1 und es ist $P'Q'$ gleich α , während $Q'Q$ mit $P'P$ den Winkel β bildet; denn nach den früher (§ 30, 1, S. 164) gegebenen Ausführungen ist Drehung um h (Drehwinkel α) verbunden mit Schiebung $PQ = \beta$ dasselbe wie Drehung um h' (Drehwinkel β) verbunden mit Schiebung ($P'Q' = \alpha$).

2. Der orientierte Parallelismus.

Eine von einem Punkt A ausgehende mit Richtungssinn versehene Gerade g_a wollen wir mit Study als orientierte Gerade oder Speer bezeichnen. Wir wollen jetzt auf einer durch A gehenden und zu g_a senkrechten Ebene E den Speer bis zum Punkt B verschieben. Durch B gehen dann zwei zu g_a parallele Speere. Beide liegen in der Ebene E' , die auf BA senkrecht steht, der eine (rechtsparelle) Speer g'_b entsteht, indem man in dieser Ebene (E') den auf E in B senkrecht stehenden Speer nach rechts dreht um den Winkel, der der Strecke AB gleich ist (vgl. S. 166), der linksparelle Speer entsteht ebenso durch Linksdrehung um denselben Winkel.

Nunmehr können wir leicht den Satz beweisen:

Sind zwei Speere einem und demselben dritten rechtsseitig (linksseitig) parallel, so sind sie untereinander rechtsseitig (linksseitig) parallel.

Wir bezeichnen die beiden (als rechtsseitig parallel zu g_a) angenommenen Speere mit g'_b und g'_c . A sei ein bestimmter Punkt von g_a , die Ebene senkrecht zu g_a durch A möge g'_b und g'_c in B und C schneiden. Ferner sei P ein beliebiger Punkt von g_a , so daß AP im Durchlaufungssinn des Speeres g_a aufeinander folgen; durch P legen wir wieder die Ebene senkrecht zu g_a , sie möge g'_b und g'_c in Q' und R' schneiden.

Dann ist auf Grund der Eigenschaften der Clifford'schen Parallelen

$$AP = BQ' = CR'$$

und

$$AB = PQ', \quad AC = PR',$$

ferner steht PQ' auf g_a senkrecht und geht aus AB durch rechtsläufige Schraubung (Schiebung längs g_a verbunden mit Drehung um die Achse) hervor, so daß Drehwinkel und Schiebungsstrecke einander gleich und zwar gleich AP sind. Dieselbe Schraubung verwandelt AQ in PR' , also sind die beiden Dreiecke ABC und $PQ'R'$ einander kongruent.

Im windschiefen Viereck $BCR'Q'$ sind also die Paare von Gegenseiten einander gleich

$$BC = Q'R', \quad BQ' = CR',$$

außerdem, wie aus Betrachtung kongruenter Dreiecke folgt,

$$\sphericalangle Q'R'C = \sphericalangle CBQ' = \text{const.},$$

$$\sphericalangle R'Q'B = \sphericalangle BCR' = \text{const.},$$

also sind auch die von B und Q' , ein Punkt der auf g'_b beliebig angenommen werden kann, auf g'_c gefällten Lote einander gleich.

g'_b ist also eine orientierte Gerade, welche zu der orientierten Geraden g'_c parallel ist, weil sie von ihr konstanten Abstand hat. Daß diese beiden Speere rechtsseitig parallel sind, erkennt man sofort, indem man die Schraubung beachtet, welche das Dreieck ABC in $PQ'R'$ überführt.

Hiermit ist die Behauptung bewiesen: Die zu g_a rechtsseitig parallelen Speere g'_b und g'_c sind zueinander rechtsseitig parallel.

Genau so erkennt man, daß die zu g_a linksseitig parallelen Speere g''_b und g''_c zueinander linksseitig parallel sind*).

3. Die Studysche Abbildung der Speere.

Mit Study betrachten wir jetzt die folgende Abbildung der Speere auf die Punktepaare einer Kugel: Zum Speer g legen wir durch den Mittelpunkt O der Kugel den rechtsparallelen und den linksparallelen Speer, und bezeichnen die Schnittpunkte dieser Speere mit der Kugel durch R und L .

Dadurch ist eine eindeutige Abbildung der Speere auf die Punktepaare gegeben. Jedem Speer entspricht ein Paar von Punkten der Kugel, und umgekehrt jedem Paar von Punkten RL ein Speer, den man durch die folgende Konstruktion findet: Ist O der Mittelpunkt der Kugel, so errichtet man senkrecht auf der Ebene ROL in O den Speer und zwar nach der Seite, von der aus gesehen die Drehung, welche OL in OR überführt, eine rechtsläufige ist. Auf diesem Speer trägt man von O aus

$$OU = \frac{1}{2} \sphericalangle ROL$$

ab und errichtet in der Ebene durch OU , welche den Winkel ROL halbiert, die Senkrechte g . Die Orientierung von g ist dadurch gegeben, daß g aus der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ROL$, die O mit der Mitte M des Bogens (RL) verbindet, durch Verschiebung längs OU hervorgeht.

Nennen wir die Winkelhalbierende OM , wobei mit M der Mittelpunkt des Bogens RL bezeichnet ist, so fällt der rechtsparallele Speer zu g durch O in der Tat mit OR , der linksparallele mit OL zusammen, denn OL und OR stehn auf UO senkrecht, und es ist

$$\sphericalangle MOL = \sphericalangle MOR = \frac{1}{2} UO,$$

wie es die Theorie der Cliffordschen Parallelen fordert.

Sind jetzt g_1 und g_2 zwei Speere, $P_1P_2 = \beta$ das eine gemeinsame Lot, $MU = u$ das Lot vom Mittelpunkt der

*) Vgl. Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen (§ 2).

Kugel auf die Gerade P_1P_2 , $UP_1 = \beta_1$, $UP_2 = \beta_2 = \beta_1 = \beta$, ferner α_1 und $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ die Winkel der beiden Speere mit der Ebene MUP_1P_2 , endlich R_1L_1 und R_2L_2 die Punktepaare, welche den beiden Speeren bei der Studyschen Abbildung entsprechen, so ist nach Study

$$(R_1R_2) = \alpha - \beta, \quad (L_1L_2) = \alpha + \beta,$$

diese Abstände stehen also in sehr einfacher Beziehung zu dem kürzesten Abstand (β) und dem Winkel (α) der beiden Speere und sie sind von der Lage der Kugel unabhängig.

Dies können wir leicht beweisen, wobei außer dem in Nr. 2 dieses Paragraphen aufgestellten Satz nur die einfachsten Formeln für das rechtwinklige Dreieck der elliptisch-sphärischen Geometrie gebraucht werden.

Durch U legen wir die rechtsseitige Parallele g'_1 zu g_1 ; sie liegt in der Ebene MOU und schließt mit der Verlängerung von OU den Winkel $\alpha_1 - \beta_1$ ein, sodann fallen wir von O auf g'_1 das Lot OQ'_1 und betrachten nunmehr das rechtwinklige Dreieck OQ'_1U , dessen Bestimmungsstücke

und

$$OU = u \text{ (Hypotenuse)}$$

$$\sphericalangle O U Q'_1 = \alpha_1 - \beta_1$$

bekannt sind. Wir bezeichnen noch OQ'_1 mit γ'_1 und den Winkel Q'_1OU mit $\frac{\pi}{2} - \vartheta'_1$. Aus § 29, 4 findet man dann leicht

$$\sin \gamma'_1 = \sin u \cdot \sin(\alpha_1 - \beta_1),$$

$$\cos \gamma'_1 \cos \vartheta'_1 = \cos(\alpha_1 - \beta_1),$$

$$\cos \gamma'_1 \sin \vartheta'_1 = \cos u \sin(\alpha_1 - \beta_1).$$

Führt man auf der Hilfskugel geographische Koordinaten (ϑ Breite, φ Länge) ein, wobei als Nordpol M gewählt ist und als Anfangsmeridian der Schnitt der Kugel mit der Ebene MOU , und setzt man

$$\xi = \cos \varphi \cos \vartheta, \quad \eta = \sin \varphi \cos \vartheta, \quad \zeta = \sin \vartheta,$$

so schneidet der Speer, welcher in der Ebene $U(Q'_1)OM$ auf Q'_1O senkrecht steht, die Kugel in dem Punkt mit den geographischen Koordinaten

$$\zeta = \sin \vartheta'_1, \quad \xi = \cos \vartheta'_1, \quad \eta = 0,$$

und die geographischen Koordinaten des Schnittpunktes R_1 des zu g'_1 also auch zu g_1 rechtsparallelen Speeres durch O mit der Kugel ergeben sich aus

$$\xi \sin \vartheta'_1 - \zeta \cos \vartheta'_1 = 0,$$

$$\xi \cos \vartheta'_1 + \zeta \sin \vartheta'_1 = \cos \gamma'_1.$$

Die erste Gleichung drückt die Forderung aus, daß OR_1 in der zu Q'_1O senkrechten Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegen muß, die zweite, daß g'_1 durch Schiebung längs Q'_1O verbunden mit Drehung um den Winkel γ'_1 in OR_1 übergeht.

Hieraus folgt für die geographischen Koordinaten von R_1

$$\xi'_1 = \cos \gamma'_1 \cos \vartheta'_1 = \cos(\alpha_1 - \beta_1),$$

$$\zeta'_1 = \cos \gamma'_1 \sin \vartheta'_1 = \cos u \cdot \sin(\alpha_1 - \beta_1),$$

$$\eta'_1 = \sin \gamma'_1 = \sin u \sin(\alpha_1 - \beta_1).$$

Bildet man in derselben Weise die geographischen Koordinaten von R_2 , dem Schnittpunkt des zu g_2 rechtsparallelen Speeres durch O mit der Kugel, so kommt

$$\xi'_2 = \cos(\alpha_2 - \beta_2),$$

$$\zeta'_2 = \cos u \sin(\alpha_2 - \beta_2),$$

$$\eta'_2 = \sin u \sin(\alpha_2 - \beta_2)$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \cos(R_1 R_2) &= \xi'_1 \xi'_2 + \eta'_1 \eta'_2 + \zeta'_1 \zeta'_2 \\ &= \cos(\alpha_1 - \beta_1) \cos(\alpha_2 - \beta_2) \\ &\quad + \sin(\alpha_1 - \beta_1) \sin(\alpha_2 - \beta_2) (\cos^2 u + \sin^2 u) \\ &= \cos(\alpha_1 - \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2) = \cos(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

d. h.

$$(R_1 R_2) = \alpha - \beta.$$

Eine entsprechende Rechnung führt auf

$$\cos(L_1 L_2) = \cos(\alpha_1 + \beta_1) \cos(\alpha_2 + \beta_2) + \sin(\alpha_1 + \beta_1) \sin(\alpha_2 + \beta_2),$$

d. h.

$$(L_1 L_2) = \alpha + \beta.$$

Hiermit ist der so außerordentlich weittragende Satz von Study mit elementaren Hilfsmitteln der elliptischen

Raumgeometrie bewiesen: von Formeln werden nur die Trigonometrie des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks angewendet.

4. Folgerungen aus der Studyschen Abbildung.

Wir wollen jetzt einige Folgerungen aus der Abbildung ziehen, um wenigstens zum Teil seine vom Entdecker und von Fano, Coolidge, Beck und Salkowski in noch viel größerem Umfange verwertete Tragweite zu zeigen.

Die Speere g des elliptischen Raumes sind auf die Punktepaare LR einer (doppeltüberdeckten) Kugel (Rechtskugel K_r und Linkskugel K_l) abgebildet, und es ist für zwei Speere g_1 und g_2

$$(R_1 R_2) = \alpha - \beta, \quad (L_1 L_2) = \alpha + \beta,$$

wobei man nach Nr. 1 dieses Paragraphen, nach Belieben α als Winkel und β als kürzesten Abstand der Speere bezeichnen kann oder umgekehrt, denn wir haben ja zwei gemeinsame Lote β und α und entsprechend zwei Drehwinkel α und β , um die man g_1 längs β (α) verschrauben muß, wenn man g_1 mit g_2 zur Deckung bringen will.

Hieraus folgt:

Zwei Speere mit den Bildpunkten $L_1 R_1$ und $L_2 R_2$ schneiden einander dann und nur dann, wenn

$$R_1 R_2 = L_1 L_2 \quad \text{ist} \quad (\beta = 0).$$

Den ∞^2 Speeren durch einen festen Punkt des elliptischen Raumes entspricht eine kongruente Zuordnung der Rechtskugel K_r zur Linkskugel K_l , oder eine Drehung der Bildkugel.

Sind nämlich R_1 und R_2 die Schnittpunkte der rechtsparallelen Speere durch O zu g_1 und g_2 mit der Kugel, so ist, da ja g_1 und g_2 einander schneiden, $R_1 R_2 = L_1 L_2$. Daß die Abbildung eine Kongruenz ist, d. h. durch Drehung ohne Spiegelung erreicht werden kann, folgt durch Betrachtung des speziellen Falles, indem man den gemeinsamen Schnittpunkt der Speere mit O zusammenfallen läßt; dann fällt jedes R mit dem entsprechenden L zusammen.

Den ∞^2 Speeren einer Ebene des elliptischen Raumes entspricht eine symmetrische Abbildung (Kongruenz + Spiegelung) der Bildkugel.

In der Tat müssen wieder entsprechende Strecken einander gleich sein, da ja zwei Speere einer Ebene einander schneiden. Betrachtet man speziell die Speere der absoluten Polarebene von O (Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\frac{\pi}{2}$), so geht die absolute Polare eines solchen Speeres in einen Durchmesser der Kugel über, die beiden parallelen Speere aber in zwei zusammenfallende auf diesem Durchmesser gelegene entgegengesetzt orientierte Gerade, d. h. die zugeordneten Punktepaare LR sind diametral gegenüberliegende Punkte der Bildkugel und K_e geht in K_r über durch Spiegelung an einer beliebigen Diametralebene verbunden mit Drehung um den zu ihr senkrechten Durchmesser um den Winkel π , d. h. eine allgemeine Symmetrie.

Bei einer Bewegung des elliptischen Raumes (der orientierten Geraden) ändert sich für je zwei Gerade g_1, g_2 weder α_{12} noch β_{12} , d. h. es ist, wenn $R_1 L_1 R_2 L_2$ der Bildpunkte vor der Bewegung bedeuten, $R'_1 L'_1 R'_2 L'_2$ die Bildpunkte nach der Bewegung

$$(R'_1 R'_2) = \alpha_{12} - \beta_{12} = (R_1 R_2),$$

$$(L'_1 L'_2) = \alpha_{12} + \beta_{12} = (L_1 L_2).$$

Hieraus folgt:

Den Bewegungen der orientierten Geraden entsprechen die (unabhängigen) Paare von Drehungen von K_l und K_r .

Dies bestätigt dann auch die oben für die Abbildung der Speere durch einen Punkt und der Speere in einer Ebene aufgestellte Behauptung: Die spezielle kongruente Abbildung (Identität), welche die Speere durch O herstellen, und die spezielle Symmetrie, welche die Speere in der absoluten Polarebene von O herstellen, verwandeln sich in allgemeinere Kongruenz und allgemeiner Symmetrie, wenn eine Bewegung des elliptischen Raumes hinzukommt.

Einer Cliffordschen Fläche mit dem Radius β , von der wir etwa die rechtsp parallelen Speere zur Achse g betrachten, entspricht auf der Kugel ein Kreis mit dem Mittelpunkt K (Bildpunkt des zur Achse rechtsp parallelen Speeres) und dem Radius $(KL) = 2\beta$.

Beweis: Man kann ja ohne damit das Ergebnis zu spezialisieren, annehmen, daß die Achse der Cliffordschen Fläche durch den Mittelpunkt der Bildkugel geht, woraus das Weitere leicht folgt: Die zur orientierten Achse rechtsparallelen Erzeugenden schließen mit ihr alle den Winkel β , der dem Lot von der Achse auf die Erzeugenden gleich ist, ein, und wenn man zu einer Erzeugenden dann den linksparallelen Speer durch O zieht, so schließt er mit der Achse den Winkel 2β ein.

5. Quasielliptische Geometrie.

In letzter Zeit ist unter der Bezeichnung quasielliptische Geometrie von W. Blaschke*) ein Grenzfall der elliptischen Maßbestimmung untersucht worden, dessen absolutes Gebilde aus einem Paar konjugiert-imaginärer Ebenen und einem Paar konjugiert-imaginärer Punkte auf der Schnittlinie dieser Ebenen besteht. Bemerkenswert ist, daß es in dieser Geometrie gerade wie in der euklidischen auch Ähnlichkeitstransformationen gibt. Das Analogon zur Studyschen Abbildung in der quasielliptischen Geometrie ist eine Abbildung der Geraden g des quasielliptischen Raumes auf die Punktepaare L, R in zwei euklidischen Ebenen. Bei dieser Abbildung gehen die quasielliptischen Bewegungen $g \rightarrow g'$ über in die euklidischen Bewegungen $L \rightarrow R', L \rightarrow R'$ dieser beiden Ebenen und somit wird die Kinematik der euklidischen Ebene abgebildet auf diesen Grenzfall der elliptischen Geometrie.

Die Zuordnung zwischen Raumgeraden g und Punktepaaren L, R wird durch eine einfache geometrische Konstruktion vermittelt. Sich schneidende Geraden g, g' gehen in solche Punktepaare $L, R; L', R'$ über, daß die Strecken LL' und RR' einander gleich sind.

*) W. Blaschke: Euklidische Kinematik und nicht-euklidische Geometrie, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 60, S. 61. J. Grünwald: Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen verknüpft. Wien. Ber., Bd. CXX.

VII. Kapitel.

Nichteuklidische Mechanik.

§ 34. Die nichteuklidische Statik.

1. Statische Grundgesetze und ihre Anwendung.

Im Infinitesimalen gilt die euklidische Geometrie, daher werden wir für die Zusammensetzung der Kräfte in einem Punkt das Kräftepolygon als Gesetz aufstellen. Wirken z. B. zwei Kräfte K_1 und K_2 , die den Winkel α einschließen, so können sie ersetzt werden durch eine einzige Kraft, deren Größe K bestimmt ist durch

$$K_1 : K_2 : K = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin \alpha .$$

Hierin sind die Winkel $\alpha_1 = \sphericalangle(K_1, K)$ und $\alpha_2 = \sphericalangle(K, K_2)$ bestimmt durch

$$K_1 : K_2 = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1$$

in Verbindung mit

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha .$$

Außerdem setzen wir voraus, daß jede Kraft in ihrer Angriffslinie innerhalb des starren Körpers verlegt werden kann.

Zusatz: Aus den Grundgesetzen der Statik, welche implizite außer der Gültigkeit der euklidischen Geometrie im infinitesimalen Gebiet die freie Beweglichkeit der Figuren fordern, können geradezu die drei Geometrien (euklidische, elliptische und hyperbolische) abgeleitet werden. Ohne bei diesem interessanten Gedankengang zu verweilen*), wollen wir die Statik benützen zum Beweis vom Lehrsatz des Ceva (vgl. S. 127).

In der Ecke A eines Dreiecks mögen die Kräfte K_2 (Richtung AC) und K_3 (AB) angreifen, ebenso in B die

*) Vgl. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, Anhang II.

Kräfte K_3 (Richtung BA) und K_1 (Richtung BC), in C die Kräfte K_1 (Richtung CB) und K_2 (Richtung CA). Längs jeder Seite des Dreiecks wirken dann Kräfte, die einander aufheben, und wenn man in jeder Ecke die Richtung der Resultierenden konstruiert, so müssen diese drei Resultierenden zusammen die Resultante Null ergeben; d. h. wenn zwei von ihnen sich in einem Punkt schneiden, muß die dritte ebenfalls durch diesen Punkt gehen. Wir verweilen bei dem Fall des reellen Schnittpunkts, der sicher eintritt, wenn die beiden in einer Ecke angreifenden Kräfte nach den beiden andern Ecken hin (nicht nach außen) wirken.

Sind DEF die Schnittpunkte der drei Resultierenden mit den Seiten a, b, c , werden ferner die Seitenabschnitte in folgender Weise bezeichnet:

$$BD = a_2, \quad CD = a_3, \quad CE = b_3, \\ AE = b_1, \quad AF = c_1, \quad BF = c_2,$$

und entsprechend die Winkel, in welche die drei Resultierenden die Winkel des Dreiecks zerlegen, mit $\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$, so findet man

$$\sin \beta_1 : \sin \beta_3 = K_1 : K_3,$$

und aus dem Sinussatze

$$\frac{\text{sh } c \cdot \sin \beta_1}{\text{sh } b_1} = \frac{\text{sh } a \cdot \sin \beta_3}{\text{sh } b_3},$$

oder

$$\frac{\text{sh } c \cdot K_1}{\text{sh } b_1} = \frac{\text{sh } a \cdot K_3}{\text{sh } b_3}.$$

Dazu kommen die beiden weiteren Gleichungen

$$\frac{\text{sh } a \cdot K_2}{\text{sh } c_2} = \frac{\text{sh } b \cdot K_1}{\text{sh } c_1},$$

$$\frac{\text{sh } b \cdot K_3}{\text{sh } a_3} = \frac{\text{sh } c \cdot K_2}{\text{sh } a_2},$$

und aus diesen drei Gleichungen folgt

$$\text{sh } b_1 \text{ sh } c_2 \text{ sh } a_3 = \text{sh } b_3 \text{ sh } c_1 \text{ sh } a_2.$$

D. h.: Nimmt man auf den Seiten a, b, c eines Dreiecks je einen Punkt D, E, F an, derart daß die beiden Produkte der hyperbolischen Sinus je dreier nicht aneinanderstoßender Stücke einander gleich sind, so gehen die drei Geraden AD, BE, CF durch einen Punkt.

2. Konstruktion der Resultante in einem Beispiel.

Mit Hilfe der Grundgesetze lösen wir die Aufgabe, die Resultante von zwei gleichen Kräften zu konstruieren, die beide senkrecht zu einer gegebenen Geraden (nach derselben Seite hin) wirken.

Es sei $2a$ der Abstand der Angriffspunkte, K die gemeinsame Größe der beiden Kräfte. Wir tragen jetzt an die Kraftvektoren in den Angriffspunkten die Winkel α (nach außen) an, so daß die beiden Kräfte $K' = K : \cos \alpha$, die in den Richtungen der äußeren Schenkel dieser beiden Winkel wirken, die beiden Kräfte K ersetzen können nach dem Kräfteparallelogramm und dem Prinzip der Gleichheit von actio und reactio. Die Geraden, in denen die Kräfte K' wirken, sollen sich schneiden, was immer erreicht werden kann, wenn α hinreichend groß angenommen wird. Ihr Schnittpunkt liegt auf der Geraden, zu der die beiden Kraftvektoren symmetrisch liegen. In diesem Punkt kann die Wirkung der beiden Kräfte K' ersetzt werden durch eine Kraft

$$2K'' = 2K' \cos \alpha',$$

wobei α' der Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit einer Kathete a und dem anliegenden Winkel $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ ist, der a gegenüberliegt. Demnach ist (§ 15, 2)

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \sin \beta \operatorname{ch} a \\ &= \cos \alpha \cdot \operatorname{ch} a \end{aligned}$$

und

$$2K'' = 2K' \cos \alpha' = 2K \operatorname{ch} a.$$

D. h. also: Die resultierende Kraft greift zwar auch in der Mitte zwischen den Angriffspunkten der Kräfte K an, ist aber größer als $2K$ (nicht gleich wie in der euklidischen Geometrie).

(In der sphärischen Geometrie würde sich ein kleinerer Wert

$$2K'' = 2K \cos \alpha$$

als Resultante ergeben.)

3. Druck bewirkt durch Zug.

Das Ergebnis gibt Anlaß zu einer Anordnung, die ein scheinbar paradoxes Resultat liefert: Betrachten wir das folgende System, bestehend aus zwei Balken A und B mit einer Führung, die bewirkt, daß der Balken B immer mit A ein gemeinsames Mittellot hat, das Symmetrielinie des

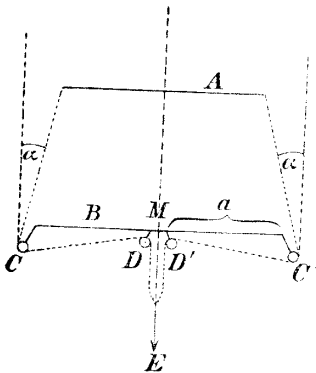


Fig. 38.

Systems ist (vgl. Fig. 38). B soll außerdem vier Rollen $CDD'C'$ tragen, über die in der Weise, wie es die Figur angibt, ein Faden geschlungen ist, dessen Enden mit A fest verknüpft sind. $2a$ sei der Abstand von C und C' , der von D und D' soll sehr klein sein. Wirkt nun in E eine Kraft $2T$ nach unten in Richtung der Symmetrieachse, die den Faden spannt, so wird durch Vermittelung der Rollen D und D' der Balken B in M nach unten gezogen mit der Kraft $2T$, in C und C'

greifen senkrecht nach oben wirkend die Kräfte $T \cos \alpha$ an. Im ganzen kommt als Resultante also die senkrecht nach unten ziehende Kraft

$$K = 2T(1 - \operatorname{ch} a \cos \alpha).$$

Ist $\operatorname{ch} a \cdot \cos \alpha > 1$, so verwandelt sich der Zug nach unten in einen Druck nach oben, ein ganz paradoxes Resultat, das weder in der euklidischen noch in der sphärisch-elliptischen Geometrie eintreten würde. Denn dieselbe Anordnung würde die Resultanten ergeben:

$$K = 2T(1 - \cos \alpha)$$

und

$$K = 2T(1 - \cos \alpha \cdot \cos a),$$

also immer positive Größen.

§ 35. Die dynamischen Differentialgleichungen.*)

1. Ausgangspunkt.

Die Grundbegriffe für die Dynamik eines Punktes: Masse, Kraft und Geschwindigkeit sind vom Parallelenpostulat unabhängig. Auch kann, da im Unendlichkleinen die euklidische Geometrie gilt, das Kräfteparallelogramm und das Parallelogramm der Bewegungen zur Ableitung der dynamischen Differentialgleichungen benutzt werden.

Die Lage eines Punktes P , der zur Zeit t die Lage (x, y) hat, wird sich also in folgender Weise für den Zeitpunkt $t + dt$ bestimmen:

Wir zerlegen, wenn v die Geschwindigkeit ist, die Strecke $v dt$ in zwei Komponenten nach zwei bestimmten Richtungen, ferner die Strecke $\frac{1}{2} K dt^2$, die der Punkt, wenn er zur Zeit t keine Anfangsgeschwindigkeit gehabt hätte, in Richtung der Kraft K zurückgelegt haben würde, ebenfalls in zwei Komponenten nach denselben Richtungen. Dann addieren wir die entsprechenden Komponenten und bekommen als Diagonale in dem unendlich kleinen Parallelogramm aus den durch Addition gewonnenen Komponenten die in der Zeit dt zurückgelegte Strecke der Größe und Richtung nach.

Diese Betrachtungen sollen jetzt für die hyperbolische Geometrie angewendet werden.

2. Die dynamischen Differentialgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten.

Als Richtungen der Kraftkomponenten nehmen wir die Tangente an die durch den Punkt xy gelegte Abstandslinie und die Richtung senkrecht dazu. Die Arbeit, die zur Bewegung in Richtung dieser Komponenten notwendig ist, bezeichnen wir mit $Y dy$ (längs $x = \text{konstant}$) und $X dx$ (längs $y = \text{konstant}$). Da die entsprechenden Wegelemente gleich dy und $ch y dx$ sind, so sind die Kraftkomponenten Y und $X : ch y$.

Um auch die Geschwindigkeitskomponenten zu bekommen, vermöge deren der Punkt von der Stelle x, y zur Stelle $x + \Delta x, y + \Delta y$ gelangt, hat man die Strecke,

*) Literaturangaben zur Nichteuklidischen Mechanik hat P. Stäckel gegeben. (Jahresbericht der D. Mathematikervereinigung 1903, S. 469—481.)

welche die beiden Lagen verbindet, auf jene Richtungen zu projizieren.

In erster Annäherung sind, wie man sofort sieht, diese Strecken gleich $chy \Delta x$ und Δy . Es wird aber Genauigkeit bis zur zweiten Ordnung einschließlich verlangt.

Um zu dieser Genauigkeit zu gelangen, müssen wir das Viereck betrachten, das von dem Abszissenstück Δx , den beiden durch seine Endpunkte gehenden Ordinaten und dem vom Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ auf die erste Ordinate gefällten Lot begrenzt wird. Die Projektion der die Punkte x, y und $x + \Delta x, y + \Delta y$ verbindenden Strecke auf die durch den Punkt x, y gehende Ordinate ist dann die vierte Seite in diesem Viereck vermindert um y .

Die vierte Viereckseite w ist (§ 15, 1) bestimmt durch

$$\text{th } w = \frac{\text{th}(y + \Delta y)}{\text{ch } \Delta x},$$

woraus die bis auf Größen zweiter Ordnung richtige Gleichung folgt

$$w - y = \Delta y - \frac{1}{2} \text{sh } y \text{ ch } y \Delta x^2.$$

Das Zusatzglied, um welches $chy \Delta x$ zu vermehren ist, ist Δy multipliziert mit dem Kosinus des spitzen Winkels in dem Viereck mit drei Seiten $chy \Delta x, y, \Delta x$; dieser Kosinus ist gleich $\text{sh } y \text{ sh } \Delta x$.

Die gesuchte Strecke ist also bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$\text{ch } y \Delta x + \Delta x \Delta y \cdot \text{sh } y.$$

Gibt der Winkel α die Richtung, v die Größe der Geschwindigkeit an, so ist demnach

$$\text{ch } y \cdot x' + x' y' \text{sh } y \Delta t = v \sin \alpha,$$

$$y' - \frac{1}{2} \text{sh } y \text{ ch } y x'^2 \Delta t = v \cos \alpha.$$

Wirkt noch eine Kraft mit den Komponenten $X : \text{ch } y$ und Y , so erhält man:

$$\Delta(x' \cdot \text{ch } y) + x' y' \text{sh } y \Delta t = v \sin \alpha + \frac{X}{\text{ch } y} \Delta t,$$

$$\Delta(y') - \frac{1}{2} x'^2 \text{sh } y \text{ ch } y \Delta t = v \cos \alpha + Y \Delta t,$$

woraus folgt:

$$\frac{d}{dt}(x' \operatorname{ch} y) + x' y' \operatorname{sh} y = \frac{X}{\operatorname{ch} y},$$

$$y'' - \frac{1}{2} x'^2 \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y = Y.$$

Beachtet man den Ausdruck für die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} (y'^2 + x'^2 \operatorname{ch}^2 y),$$

so kann man die Gleichungen schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \right) = X,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Y.$$

3. Die Lagrangeschen Differentialgleichungen der zweiten Art und das Integral der lebendigen Kraft.

Führt man an Stelle von x und y beliebige Punktkoordinaten (q_1, q_2) ein durch die Gleichungen

$$x = x(q_1, q_2),$$

$$y = y(q_1, q_2),$$

so kann man die ersten und zweiten Differentialquotienten von x und y nach t durch die entsprechenden von q_1 und q_2 ausdrücken und gelangt auf diesem Wege zu den bekannten Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Art; man findet nämlich durch einfache Umrechnung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} (= Q_1),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_2'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2} (= Q_2).$$

Dabei ist $Q_1 dq_1$ die von der Kraft geleistete Arbeit, wenn der bewegte Punkt von der Lage (q_1, q_2) in die Lage $(q_1 + dq_1, q_2)$ übergeht, ebenso $Q_2 dq_2$ bei dem Übergang von der Lage (q_1, q_2) in $(q_1, q_2 + dq_2)$.

Aus diesen Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Art können wir auch leicht das Integral der lebendigen Kraft für den Fall einer Potentialbewegung ableiten.

Da T eine homogene Funktion zweiten Grades in q'_1 und q'_2 ist, so wird

$$q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} = 2T$$

und daher

$$q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q''_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + q'_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) + q'_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_2} \right) = 2 \frac{dT}{dt}.$$

Existiert ein Potential V , d. h. ist

$$Q_1 = - \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad Q_2 = - \frac{\partial V}{\partial q_2},$$

so ergeben die Lagrangeschen der zweiten Art, wenn man die erste mit q'_1 , die zweite mit q'_2 multipliziert und sie addiert, auf der rechten Seite

$$- \frac{dV}{dt}$$

und auf der linken Seite

$$\begin{aligned} & q'_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) + q'_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_2} \right) - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - q'_2 \frac{\partial T}{\partial q_2} \\ &= 2 \frac{dT}{dt} - q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} - q''_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - q'_2 \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{dT}{dt}, \end{aligned}$$

es kommt also

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{dV}{dt},$$

oder

$$T + V = \text{konstans} = h.$$

Dies ist das Integral der lebendigen Kraft:

Die Gleichung besagt, daß, wenn die Kräfte ein Potential besitzen (eine potentielle Energiefunktion V existiert), bei der Bewegung die Summe von kinetischer Energie (lebendiger Kraft) und potentieller Energie konstant ist.

§ 36. Die dem Newtonschen Potential entsprechenden Potentiale.

1. Deutung des Newtonschen Potentials.

Das Newtonsche Gesetz unterwirft die Bewegung eines Punktes der Bedingung, daß die Kraft nach einem bestimmten Zentrum hin gerichtet ist, und dem Quadrat der Entfernung von diesem Punkt umgekehrt proportional ist. Bezeichnet man die Entfernung des beweglichen Punktes vom Zentrum mit r , so wird das Potential $-1:r$.

Bekanntlich kann man dem Potential im Raum eine hydrodynamische Deutung geben: Findet im Raum eine Flüssigkeitsströmung statt, die nach Richtung und Geschwindigkeit durch die Newtonsche Kraft gegeben ist (die also nach dem anziehenden Punkte hin gerichtet ist, und bei der die Geschwindigkeit proportional $1:r^2$ ist), so ist diese Flüssigkeitsbewegung inkompressibel. Betrachten wir nämlich ein Oberflächenelement, d. h. die Kugel vom Radius r_1 , und legen durch die Berandung die Radien, die dann auf der Kugel r_2 ein Element $df_2 = df_1 \cdot r_2^2 : r_1^2$ begrenzen, so strömt im Zeitelement dt durch df die Flüssigkeitsmenge $c dt \cdot df_1 : r_1^2$ ein, durch den aus Radien gebildeten Mantel findet weder Zufluß noch Abfluß statt, da ja die Strömung in Richtung der Radien vor sich geht, durch das Element df_2 findet ein Abfluß statt, wobei die abströmende Menge den Wert hat

$$c dt \cdot \frac{df_2}{r_2^2} = \frac{c dt df_1}{r_1^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{c dt df_1}{r_1^2}.$$

Der Zustrom (durch das Element df_1) ist also gleich dem Abfluß (durch das Element df_2), d. h. wir haben, wie behauptet wurde, eine inkompressible Flüssigkeitsbewegung.

2. Die drei partiellen Differentialgleichungen für das Potential in der hyperbolischen Raumgeometrie.

Nun stellen wir das gefundene Resultat in der hyperbolischen Geometrie als Forderung:

V soll das Potential sein für eine inkompressible Flüssigkeitsbewegung, d. h. die Flüssigkeitsbewegung, bei der

die Strecke ds von einem Teilchen in der Zeit in $dt \cdot dV : ds$ durchlaufen wird, soll inkompressibel sein.

Das gibt für V eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir in dreierlei Koordinatensystemen aufstellen wollen, nämlich den räumlichen Polarkoordinaten (§ 20, 1), den rechtwinkligen Koordinaten (§ 20, 2) und den Grenzkugelkoordinaten (§ 20, 3).

Im ersten Fall betrachten wir ein rechtwinkliges Parallelepipedon, von dem die drei Kanten sind

$$dr, \quad shr \, d\vartheta, \quad shr \cos \vartheta \, d\varphi.$$

Durch die Seitenfläche $sh^2 r \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ strömt in der Zeit dt eine Flüssigkeitsmenge

$$sh^2 r \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \left(dt \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

ein; durch die gegenüberliegende strömt aus

$$sh^2 r \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dt \frac{\partial V}{\partial r} + dt \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \frac{\partial}{\partial r} \left(sh^2 r \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial r} \right);$$

die Differenz ist also

$$dt \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \frac{\partial}{\partial r} \left(sh^2 r \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial r} \right).$$

Ebenso strömt durch die Seitenfläche $dr \, shr \cos \vartheta \, d\varphi$ ein

$$sh \, r \cos \vartheta \, dr \, d\varphi \left(dt \frac{\partial V}{sh \, r \, \partial \vartheta} \right)$$

und durch die gegenüberliegende Fläche aus

$$dt \, dr \, d\varphi \, shr \frac{\cos \vartheta \, \partial V}{sh \, r \, \partial \vartheta} + dt \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right),$$

so daß die Differenz ist

$$dt \, d\varphi \, dr \, d\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right).$$

Durch die Seitenfläche $dr \, shr \, d\vartheta$ strömt ein

$$dr \, d\vartheta \, shr \left(dt \cdot \frac{\partial V}{sh \, r \cos \vartheta \, \partial \varphi} \right) = dr \, d\vartheta \, dt \left(\frac{\partial V}{\cos \vartheta \, \partial \varphi} \right),$$

und durch die gegenüberliegende aus

$$dr d\vartheta dt \left(\frac{\partial V}{\cos \vartheta \partial \varphi} \right) + dr d\vartheta dt d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V}{\cos \vartheta \partial \varphi} \right),$$

so daß sich als Differenz ergibt

$$dt d\varphi dr d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V}{\cos \vartheta \partial \varphi} \right).$$

Soll nun die Strömung inkompressibel sein, so muß die Summe dieser Differenzen gleich Null werden, d. h. es kommt

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\text{sh}^2 r \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos \vartheta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

Zerlegen wir ebenso die Bewegung in drei Komponenten parallel den Kanten des rechtwinkligen Parallelepipedons.

$$dx \text{ ch } y \text{ ch } z, \quad dy \text{ ch } z, \quad dz,$$

so gelangen wir zu der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\text{ch } y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\text{ch } y \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\text{ch } y \text{ ch}^2 z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0.$$

Endlich haben wir das Parallelepipedon mit den Kanten

$$d\xi e^{-\zeta}, \quad d\eta e^{-\zeta}, \quad d\zeta$$

zu betrachten und erhalten die Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(e^{-2\zeta} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) = 0.$$

3. Die einfachsten Potentiale.

Wir bestimmen hieraus diejenigen Potentiale, für welche die Flüssigkeitsströmung die Richtung der Achse der Sphäre hat, die Kraft also nach dem Mittelpunkt der Kugel oder senkrecht zur Abstandsfläche oder endlich senkrecht zur Grenzkugel wirkt. Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind also dann zu erfüllen durch Funktionen, die von r , bzw. von z oder ζ allein abhängen.

Dies führt auf die Gleichungen

$$\frac{d}{dr} \left(\text{sh}^2 r \frac{dV_1}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} \left(\text{ch}^2 z \frac{dV_2}{dz} \right) = 0, \quad \frac{d}{d\zeta} \left(e^{-2\zeta} \frac{dV_3}{d\zeta} \right) = 0$$

und man erhält

$$V_1 = c \int \frac{dr}{\text{sh}^2 r} = -c \text{cth} r,$$

$$V_2 = c \int \frac{dz}{\text{ch}^2 z} = c \text{th} z,$$

$$V_3 = c \int d\zeta e^{2\zeta} = \frac{c}{2} e^{2\zeta}.$$

(Die additiven Konstanten sind unwesentlich, da sie bei der Differentiation zum Zweck der Berechnung der Kraft wieder fortfallen.)

Man beachte, daß, wenn r , z , ζ sehr klein angenommen werden, V_1 , V_2 und V_3 in $c' : r$, cz , $c''\zeta$ (+ konstans) übergehen, d. h. in das Newtonsche Potential und das Potential der Fallbewegung, wenn dabei die konstante Kraft der Richtung der z -Achse (ζ -Achse) parallel ist.

Diese drei Potentiale entsprechen also dem Newtonschen Potential (und seiner Ausartung) im euklidischen Raum.

4. Der Fall des sphärischen Raumes.

Im sphärischen dreidimensionalen Raum kann das Quadrat des Bogenelements in der Form dargestellt werden:

$$ds^2 = d\lambda_1^2 + \cos^2 \lambda_1 d\lambda_2^2 + \cos^2 \lambda_1 \cos^2 \lambda_2 d\lambda_3^2.$$

Man erhält diese Form durch Einführung von Polarkoordinaten (λ_1 , λ_2 , λ_3) aus

$$x_1 = \sin \lambda_1,$$

$$x_2 = \cos \lambda_1 \sin \lambda_2,$$

$$x_3 = \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2 \sin \lambda_3,$$

$$x_4 = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cdot \cos \lambda_3$$

auf der vierdimensionalen Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

(vgl. § 32, 1).

Wir wollen hierin

$$\frac{\pi}{2} - \lambda_1 = r, \quad \lambda_2 = \vartheta, \quad \lambda_3 = \varphi$$

setzen. $r\vartheta\varphi$ entsprechen dann den Polarkoordinaten des hyperbolischen Raumes.

Betrachten wir jetzt das rechtwinklige Parallelepipeton mit den Kanten

$$dr, \quad \sin r d\vartheta, \quad \sin r \cos \vartheta d\varphi$$

und stellen die der Gleichung (1) in Nr. 2 entsprechende Gleichung auf, so kommt

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sin^2 r \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

Dem Potential

$$- c \operatorname{cth} r$$

entspricht dann

$$V'_1 = \int \frac{dr}{\sin^2 r} = -c \operatorname{cot} r.$$

Man beachte, daß das Potential mehrdeutig ist, denn zwei Punkte, die die Entfernung r haben, haben zugleich die Entfernung $2\pi - r$, d. h.

$$V'_1 = \mp c \operatorname{cot} r.$$

§ 37. Die Planetenbewegung in der nichteuklidischen Geometrie*).

1. Der Flächensatz.

Wir beginnen mit dem Flächensatz, wobei wir uns nicht auf das gefundene Potential beschränken wollen, sondern gleich den allgemeinen Fall einer Zentralkraft

*) Für dieses Problem hat sich schon J. Bolyai interessiert (vgl. Stäckel, Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten, Jahresbericht d. D. M. V. 1903, S. 476). Wenn man auch geneigt ist diese Untersuchungen zu den „selbstgeschaffenen Schmerzen“ zu rechnen, so darf vielleicht das Interesse verschiedener Astronomen entgegengehalten werden, die übrigens den sphärischen Raum bevorzugen (Schwarzschild, Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft 1900, Harzer, Die Sterne und der Raum, Jahresbericht d. D. M. V. 1908, S. 237—267) und eine Mitteilung von Lipschitz über Dirichlet (Journal f. d. reine und angew. Mathematik 72 [1872], S. 116): „Derselbe sagte mir vor ungefähr zwanzig Jahren, er habe untersucht, wie sich die Theorie der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetz gestaltet, wenn dabei die Gaußsche Theorie des imaginären Raumes zugrunde gelegt wird, teilte mir aber keine Einzelheiten mit.“

behandeln werden. Aus dem Ausdruck für die lebendige Kraft.

$$T = \frac{1}{2} (r'^2 + \text{sh}^2 r \varphi'^2)$$

und den Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Form folgt

$$r'' - \text{shr} \text{chr} \varphi'^2 = X \frac{\partial x}{\partial r} + Y \frac{\partial y}{\partial r} = K_r,$$

$$\frac{d}{dt} (\text{sh}^2 r \cdot \varphi') = X \frac{\partial x}{\partial y} + Y \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{K_\varphi}{\text{shr}}$$

und da die Kraftkomponente in der Richtung senkrecht zum Radiusvektor gleich Null sein soll

$$\frac{d}{dt} (\text{sh}^2 r \varphi') = 0, \quad \text{sh}^2 r \varphi' = c.$$

Der Differentialquotient aber des Flächenraums, den der doppelte Radiusvektor beschreibt, ist

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} (e^r - e^{-r})^2 = 2 \frac{d\varphi}{dt} \text{sh}^2 r,$$

und wir erkennen demnach:

Wirkt auf den beweglichen Punkt P eine Kraft, die nach dem festen Punkt O hin gerichtet ist, so beschreibt der verdoppelte Radiusvektor $2OP$ in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

2. Die Keplersche Ellipse.

Wir stellen zunächst die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten auf, wobei a die große Halbachse ist, $2f$ der Abstand der Brennpunkte (OO_1), r der Radiusvektor von einem Brennpunkt O nach dem Ellipsenpunkt P und φ der Winkel von r mit der großen Achse.

Bezeichnet man den Brennstrahl O_1P mit r_1 , so findet man die Gleichung in Polarkoordinaten durch Elimination von r_1 aus den beiden Gleichungen

$$\text{chr}_1 = \text{chr} \text{ch} 2f + \text{shr} \text{sh} 2f \cos \varphi,$$

$$\text{chr}_1 = \text{ch}(2a - r) = \text{ch} 2a \text{chr} - \text{sh} 2a \text{shr},$$

und erhält

$$\text{thr} = \frac{\text{ch} 2a - \text{ch} 2f}{\text{sh} 2a + \text{sh} 2f \cos \varphi} = \frac{2 \text{sh}(a + f) \text{sh}(a - f)}{\text{sh} 2a + \text{sh} 2f \cos \varphi},$$

woraus folgt

$$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 r} = - \frac{2 \text{sh}(a+f) \text{sh}(a-f)}{(\text{sh} 2a + \text{sh} 2f \cos \varphi)^2} \text{sh} 2f \cdot \sin \varphi$$

und weiter durch Elimination von φ mit Hilfe der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \text{sh}^2 r \left(\frac{\text{chr sh} r \text{sh} 2a - \text{ch} 2a \text{sh}^2 r}{\text{sh}(a-f) \text{sh}(a+f)} - 1 \right).$$

Auf der andern Seite wollen wir den Flächensatz

$$\frac{d\varphi}{dt} \cdot \text{sh}^2 r = c$$

und das Integral der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \text{sh}^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] - \text{cth} r = h$$

benützen, um φ an Stelle von t als unabhängige Veränderliche einzuführen, wir erhalten auf diese Weise

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \text{sh}^2 r \right\} = (h + \text{cth} r) \cdot \frac{\text{sh}^4 r}{c^2}$$

oder

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \text{sh}^2 r \left\{ 2(h + \text{cth} r) \frac{\text{sh}^2 r}{c^2} - 1 \right\}.$$

Wir machen jetzt zwei Voraussetzungen, die nötig sind, damit die Bewegung schließlich eine Ellipse ergibt: h soll negativ sein, und c^2 soll kleiner sein als $-h + \sqrt{1+h^2}$. Dann dürfen wir setzen

$$h = -\text{cth} 2a,$$

$$c^2 = \frac{\text{ch} 2a - \text{ch} 2f}{\text{sh} 2a},$$

woraus folgt, daß $f < a$ wird.

Dadurch erhält das Integral der lebendigen Kraft die Form

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \text{sh}^2 r \left\{ \frac{2(\text{chr sh} 2a - \text{ch} 2a \text{sh} r) \cdot \text{sh} r}{2 \text{sh}(a+f) \text{sh}(a-f)} - 1 \right\}$$

und der Vergleich mit der oben abgeleiteten Formel zeigt:

Liegt die Geschwindigkeit des Punktes P der Größe und Richtung nach innerhalb gewisser Grenzen, so beschreibt der Punkt P unter dem Einfluß der nach O hin gerichteten Kraft von der Größe $1:sh^2r$ eine Ellipse, von der O ein Brennpunkt ist (Erstes Keplersches Gesetz).

3. Die Umlaufszeit.

Auch für die Umlaufszeit T bekommen wir ein Gesetz, das mit dem dritten Keplerschen Gesetz in der euklidischen Mechanik große Ähnlichkeit zeigt.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{c} \int_0^\pi d\varphi sh^2r \\ &= \frac{2}{c} \int_0^\pi \frac{d\varphi (ch\,2a - ch\,2f)^2}{(sh\,2a + sh\,2f \cos\varphi)^2 - (ch\,2a - ch\,2f)^2} \\ &= \frac{ch\,2a - ch\,2f}{c} \left[\int_0^\pi \frac{d\varphi}{sh\,2f \cos\varphi + sh\,2a - ch\,2a + ch\,2f} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \frac{d\varphi}{sh\,2f \cos\varphi + sh\,2a + ch\,2a - ch\,2f} \right]. \end{aligned}$$

Jedes der beiden Integrale läßt sich nach der Formel auswerten

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{p + q \cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} (p^2 > q^2),$$

und es kommt schließlich

$$T = \pi \sqrt{sh\,2a} \frac{\sqrt{ch\,2a - ch\,2f} \cdot 2sh\,a}{\sqrt{2(ch\,2a - ch\,2f)}} = 2\pi ch^{\frac{1}{2}}a (sh\,a)^{\frac{3}{2}}.$$

Das ist die Formel für die Umlaufszeit; sie hängt, wie im dritten Keplerschen Gesetz in der euklidischen Geometrie, nur von der großen Achse der Ellipse ab und es wird für kleine Werte von a das Quadrat der Umlaufszeit der dritten Potenz der großen Halbachse proportional.

4. Der Bertrandsche Satz in der nichteuklidischen Geometrie.

J. Bertrand*) hat bewiesen, daß es (in der euklidischen Ebene) nur zwei Anziehungsgesetze gibt, für die Anziehungskraft eines festen Punktes O auf einen beweglichen P , bei denen die Bahnen unter Voraussetzung gewisser Ungleichheiten, die zwischen den Koordinaten der Anfangslage von P und den Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit bestehen müssen, geschlossen sind.

Er führte das dynamische Problem auf das rein analytische zurück, die Funktion $\psi(z)$ so zu bestimmen, daß die Lösungen der Differentialgleichung

$$\psi(z) = K^2 \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z \right)$$

periodische Funktionen von φ mit der Periode 2π werden, und weist nach, daß $\psi(z)$ eine der beiden Formen haben muß

$$\psi(z) = A, \quad \psi(z) = Az^{-3},$$

und es führt dabei der zweite Fall auf die elastische Anziehung (die Kraft ist der Entfernung OP proportional), der erste auf das Newtonsche Gesetz.

Ein ähnlicher Satz gilt auch in den nichteuklidischen Geometrien, und wir wollen jetzt auch auf Grund von Bertrands Ergebnis dies für die hyperbolische Geometrie nachweisen.

Indem wir Polarkoordinaten einführen, können wir dem Integral der lebendigen Kraft die Gestalt geben

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \text{sh}^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2V = 2h.$$

Dann lauten die Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Art

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \text{sh} r \text{ch} r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{dV}{dr} = -f(r),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\text{sh}^2 r \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0.$$

*) Comptes rendus 78 (1873), S. 146.

Das zweite gibt den Flächensatz

$$\text{sh}^2 r \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Weiterhin wird

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{c}{\text{sh}^2 r} = -c \frac{d \text{cthr}}{d\varphi},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{c^2}{\text{sh}^2 r} \frac{d^2 \text{cthr}}{d\varphi^2},$$

und die erste der beiden Bewegungsgleichungen erhält die Gestalt

$$-c^2 \left(\frac{d^2 \text{cthr}}{d\varphi^2} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2 r} + \frac{\text{chr}}{\text{sh}^3 r} \right) = -f(r).$$

Setzt man jetzt

$$\text{cthr} = z,$$

$$\text{sh}^2 r f(r) = \psi(z),$$

so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\psi(z) = c^2 \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z \right).$$

r , daher auch z soll eine periodische Funktion mit der Periode 2π werden, und dazu ist nach Bertrand notwendig, daß $\psi(z)$ einen der beiden Werte hat

$$\psi(z) = k, \quad \psi(z) = k z^{-3}.$$

Im ersten Fall erhalten wir aus

$$k = \text{sh}^2(r) f(r)$$

die weiteren Werte

$$f(r) = \frac{k}{\text{sh}^2 r}, \quad V = \int f(r) dr = -\frac{k}{\text{cthr}}$$

und dies ist das von uns behandelte übertragene Newtonsche Gesetz; im zweiten Fall kommt

$$\text{sh}^2 r f(r) = k \frac{\text{sh}^3 r}{\text{ch}^3 r}$$

also

$$f(r) = k \frac{\text{sh} r}{\text{ch}^3 r}, \quad V = \int f(r) dr = \frac{k}{2} \text{th}^2 r.$$

(Für die sphärisch-elliptische Geometrie ergeben sich die entsprechenden Werte

$$f(r) = \frac{k}{\sin^2 r}, \quad f(r) = k \frac{\sin r}{\cos^3 r}.$$

Das gefundene zweite Anziehungsgesetz entspricht seinerseits vollkommen der elastischen Anziehungskraft in der euklidischen Geometrie; die Bewegung von P verläuft auch in einer Ellipse mit dem Mittelpunkt O , sobald Anfangslage und Geschwindigkeit gewisse Ungleichheiten erfüllen. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung nämlich, welche $z = \cot r$ als Funktion von φ bestimmt, wird dann

$$k \cdot z^{-3} = c^2 \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z \right)$$

und ihre Lösung kann in der Form geschrieben werden

$$z^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

Die Konstanten a^2 und b^2 , die übrigens die Gleichung

$$k = c^2 \cdot a^2 b^2$$

erfüllen, bestimmen sich durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit, und wenn sie beide positiv sind, so erhält man eine Ellipse, deren Gleichung in Weierstraßschen Koordinaten lautet

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - p^2 = 0.$$

§ 38. Das Relativitätsprinzip und die hyperbolische Geometrie.

1. Das Relativitätsprinzip*).

Wir wollen in aller Kürze und ohne weitgehende Darstellung der physikalischen Grundlagen**) Betrachtungen anstellen, welche auf die allgemeinen Lorentz-

*) A. Einstein, Annalen der Physik 17 (1905), S. 891ff. Jahrbuch der Elektronik 4 (1907), S. 411ff. — H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908, S. 53.

**) Vgl. M. Laue, Relativitätstheorie. Braunschweig 1911. — W. Wien, Die Relativitätstheorie. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker 1911, S. 283ff.

Minkowskischen Transformationen führen, die sich genau mit den hyperbolischen Bewegungen decken.

Das Michelsonsche Experiment hat zuerst auf die Annahme geführt: „Eine geradlinige Strecke, die im Ruhezustand eine gewisse Länge hat, erscheint dem ruhenden Beobachter, wenn sie in ihrer eigenen Richtung fortbewegt wird mit der Geschwindigkeit v , verkürzt im Verhältnis

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.“

Als Ort der Strecke nehmen wir die x -achse. Die Abszisse des Endpunktes, die vor der Bewegung x_1 war, im Moment der beginnenden Bewegung sich aber in

$$x_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

verwandelt hat, ist dann nach der Zeit t nicht

$$x_1 + vt,$$

sondern

$$x = x_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt.$$

Fordern wir jetzt, daß für den mitbewegten Beobachter die Geschwindigkeit ebenfalls den Wert v zu haben scheint, so haben wir für ihn ein anderes Zeitmaß einzuführen und zu setzen

$$x_1 = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt_1,$$

damit die Identität besteht

$$\frac{\partial x(x_1, t)}{\partial t} = - \frac{\partial x_1(x, t_1)}{\partial t_1}.$$

Setzt man

$$v = c \cdot \text{th } u,$$

so folgt

$$x = \frac{x_1}{\text{ch } u} + ct \cdot \text{th } u, \quad x_1 = \frac{x}{\text{ch } u} - ct_1 \cdot \text{th } u$$

oder

$$x_1 = x \cdot \text{ch} u - ct \cdot \text{sh} u,$$

$$ct_1 = -x \cdot \text{sh} u + ct \cdot \text{ch} u.$$

Diese beiden Formeln geben den Übergang vom einen Raumzeitsystem (x, t) zum andern (x_1, t_1) und entstehen, um dies nochmals hervorzuheben, aus zwei Forderungen, der Streckenverkürzung in Richtung der Bewegung und dem Grundsatz der Gleichheit der Geschwindigkeiten im angegebenen Sinn.

Setzt man

$$ict = l, \quad iu = \varphi,$$

so kommen einfach die Formeln für den Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu einem andern, entsprechend der Figur 39 aus der ja, entsprechend dem ersten Gleichungssystem, abgelesen werden kann

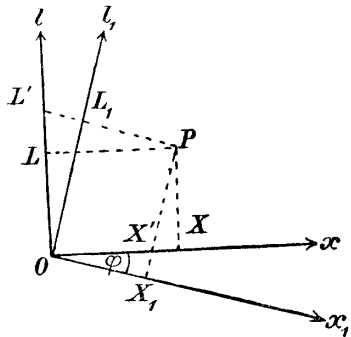


Fig. 39.

$$x = OX = OX' + X'X = \frac{x_1}{\cos \varphi} + l \tan \varphi,$$

$$x_1 = L_1P = L'P - L'L_1 = \frac{x}{\cos \varphi} - l_1 \tan \varphi,$$

Formeln, die bei Ausführung der verschiedenen Substitutionen wieder in unsere Ausgangsgleichungen übergehen.

2. Die homogenen Raumzeittransformationen und die hyperbolischen Bewegungen*).

Gehn wir jetzt zum System x, y, t über, wobei x und y die rechtwinkligen Koordinaten für den ruhenden Beobachter sind und untersuchen wir die Translation der Ebene mit der Geschwindigkeit $v = c \text{th} u$ in einer Richtung, die mit der x -achse den Winkel φ mit der x_1 -achse den Winkel φ_1 einschließt. Strecken, die diese Richtung

*) Vgl. V. Varičak, Die Relativitätstheorie und die Lobatschefskysche Geometrie. Physikalische Zeitschrift 11 (1910), S. 287—293.

haben, sollen wieder im Verhältnis

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 : \text{ch } u$$

verkürzt erscheinen, Strecken senkrecht zur Verschiebungsrichtung unverändert.

Kleiden wir diese Forderung analytisch ein, so erhalten wir für $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$

$$x_1 = x \text{ ch } u - ct \text{ sh } u,$$

$$y_1 = y,$$

$$ct_1 = -x \text{ sh } u + ct \text{ ch } u.$$

Ist aber φ und φ_1 von Null verschieden, so kommt

$$x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \text{ ch } u + ct \cdot \text{sh } u$$

$$- x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$ct_1 = -(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \text{ sh } u + ct \cdot \text{ch } u,$$

wenn wir verlangen, daß für $v = 0$ die Transformation übergeht in

$$t_1 = t,$$

$$x_1 = x \cos(\varphi - \varphi_1) + y \sin(\varphi - \varphi_1),$$

$$y_1 = -x \sin(\varphi - \varphi_1) + y \cos(\varphi - \varphi_1),$$

gemäß der Forderung, daß für $v = 0$ Zeitmaß und Längenmaße unverändert bleiben.

Bei allen besprochenen Transformationen ist

$$c^2 t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2.$$

Man kann noch weitergehen, indem man außerdem den Koordinatenanfang verlegt und hat dann die Invariante

$$c^2 \Delta t_1^2 - \Delta x_1^2 - \Delta y_1^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2,$$

wobei durch den Buchstaben Δ die Differenz der Raumzeitkoordinaten angedeutet wird. Es entstehen dann aber nur Formeln, die sich durch additive Konstanten von den früheren unterscheiden.

Die homogenen Transformationen in x , y und ct , zu denen wir gelangt sind, können als hyperbolische Bewegungen gedeutet werden. In der Tat erhalten wir für die Koeffizienten in

$$x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} ct,$$

$$y_1 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} ct,$$

$$ct_1 = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} ct,$$

wenn wir die Forderung des Relativitätsprinzips

$$c^2 t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2$$

aufstellen, genau dieselben Gleichungen wie oben (S. 122).

Deutet man x , y und ct als homogene Weierstraßsche Koordinaten, d. h. bildet man auf die hyperbolische Ebene ab durch die Formeln

$$x' = \frac{x}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}},$$

$$p' = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}},$$

so bilden sich die Raumzeittransformationen auf hyperbolische Bewegungen ab.

Zusatz: Die allgemeinste Raumzeittransformation erhält man, wenn man auf der rechten Seite noch Konstanten (a_1, a_2, a_3) hinzufügt. Führt man statt $x, y, ct = z$ in einem dreidimensionalen euklidischen Raum homogene Koordinaten ein durch die Gleichungen

$$x : y : t : 1 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4,$$

so sind die allgemeinsten Raumzeittransformationen leicht zu deuten als diejenigen projektiven Transformationen, bei denen der ∞ ferne Kegelschnitt

$$\xi_4 = 0, \quad c^2 \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$$

in sich übergeht*).

3. Die geometrische Addition der Geschwindigkeiten.

Ein Punkt P möge sich in einem Raumzeitsystem geradlinig und gleichförmig bewegen, seine Bahn also dargestellt sein durch

$$x = v \cdot t = c \operatorname{th} u \cdot t, \quad y = 0.$$

*) Vgl. F. Klein, Jahresberichte der D. Math. V. 1910, S. 281—300. Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe.

Ferner möge P_1 in dem mit P fortgeführten, also durch die Gleichungen

$$x_1 = x \operatorname{ch} u - ct \cdot \operatorname{sh} u,$$

$$y_1 = y,$$

$$ct_1 = -x \operatorname{sh} u + ct \cdot \operatorname{ch} u$$

definierten System sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_1 = c \operatorname{th} u_1$ auf einer Geraden bewegen, die durch den Koordinatenanfang geht und den Winkel φ mit der x -Achse einschließt. Wie erscheint die Bewegung von P_1 im System x, y, t ? — oder anders ausgedrückt: Wie ist die resultierende Geschwindigkeit zu konstruieren?

Es wird

$$x_1 = ct_1 \cdot \operatorname{th} u_1 \cdot \cos \varphi, \quad y_1 = ct_1 \operatorname{th} u_1 \sin \varphi,$$

also

$$x = ct(\operatorname{ch} u \cdot \operatorname{sh} u_1 \cos \varphi + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u_1) : (\operatorname{sh} u \operatorname{sh} u_1 \cos \varphi + \operatorname{ch} u \operatorname{ch} u_1),$$

$$y = ct \operatorname{sh} u_1 \sin \varphi : (\operatorname{sh} u \operatorname{sh} u_1 \cos \varphi + \operatorname{ch} u \operatorname{ch} u_1)$$

und bei der Abbildung

$$x' = \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u_1 \cos \varphi + \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} u_1,$$

$$y' = \operatorname{sh} u_1 \sin \varphi,$$

$$p' = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} u_1 + \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{sh} u_1 \cos \varphi.$$

Bezeichnet man die Entfernung OP mit u_2 , den Winkel von OP und der x -achse mit ψ , so ist

$$x' = \operatorname{th} u_2 \cos \psi \cdot p', \quad y' = \operatorname{th} u_2 \sin \psi \cdot p'$$

also, umgedeutet, $c \cdot \operatorname{th} u_2$ die Geschwindigkeit, ψ der Winkel der geradlinigen Bahn des Punktes P_1 mit der x -achse.

Damit ist die Konstruktion der resultierenden Geschwindigkeit gegeben: Man trage in der hyperbolischen Ebene die Größe u (bestimmt durch $v = c \operatorname{th} u$) von O aus der Größe und Richtung nach an, im Endpunkt sodann in der Richtung der zweiten relativen Geschwindigkeit ($v_1 = c \operatorname{th} u_1$) die Größe u_1 .

Die Strecke u_2 , welche O mit dem Endpunkt der zweiten Strecke verbindet, stimmt der Rich-

tung nach überein mit der resultierenden Geschwindigkeit v_2 , und es ist

$$v_2 = c \operatorname{th} u_2.$$

Die Konstruktion der resultierenden Geschwindigkeit deckt sich also mit der geometrischen Addition der Vektoren in der hyperbolischen Geometrie, insbesondere sind bei dieser Konstruktion die beiden Geschwindigkeiten nicht vertauschbar, im Gegensatz zur klassischen (Galileischen) Mechanik*).

Nehmen wir übrigens an Stelle der hyperbolischen Ebene die euklidische mit hyperbolischer Maßbestimmung, setzen wir also

$$\xi = \frac{x}{ct}, \quad \eta = \frac{y}{ct},$$

so erhalten wir als Fundamentalkegelschnitt den Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 - c^2 = 0,$$

und wir bekommen also die resultierende Geschwindigkeit

$$v_2 = c \operatorname{th} u_2,$$

wenn wir die Größen u ($v = c \operatorname{th} u$) und u_1 ($v_1 = c \operatorname{th} u_1$) in der durch den Fundamentalkreis gegebenen projektiven Maßbestimmung ihrer Größe und Richtung nach an einander fügen.

*) Sommerfeld, Physikalische Zeitschrift 10 (1909), S. 828. — Varičak, ebendasselbst 11 (1910), S. 93—96.

Sachregister.

(Abkürzungen: E. = Ebene, zweidimensionales Gebiet. G. = Geometrie, R. = dreidimensionales Gebiet, e. = euklidisch, ell. = elliptisch, h. = hyperbolisch, s. = sphärisch).

- Abbildungen auf e. E. und e. R.:**
— der h. E. 110, 128, 144.
— des h. R. 151.
— der s. E. (Kugel) 171.
— der s. R. 180.
— der ell. E. 172.
— des ell. R. 182.
- Absolute Polaren (s. und ell. R.)** 166, 184.
- Abstandsfläche (h. R.)** 100.
- Abstandslinie (h. E.)** 44, 89.
— (s. E.) 159.
- Archimedisches Postulat** 8.
- Asymptotisches Dreieck (h. E.)** 30.
—, sein Inhalt 53.
- Außenwinkel im Dreieck** 8.
- Axiome, allgemeine d. E.** 4—8.
— d. R. 18.
— der h. E. 22.
— der s. E. 152, 160.
- Bertrandscher Satz** 211.
- Bewegung der h. E.** 121, 135, 149.
— angewandt auf Relativitätstheorie 217.
— des ell. R. 178, 193.
- Bewegungsinvarianten (h. E.)** 123 ff.
- Bogenelement, allgemeines** 86, 113.
— in der h. E. 109 f., 124, 149.
— im h. R. 151.
— in der ell. E. 175.
— im s. R. 180, 206.
- Bolyai-Hilbertsches Postulat** 22.
- Cayley-Kleinsche Maßbestimmung für Entfernung und Winkel (h. G.)** 131, 133, 137.
— (ell. G.) 173 f.
- Cevascher Satz (h. E.)** 127, 196.
- Cliffordsche Fläche (ell. und s. R.)** 166.
—, als Trägerin der e. G. 170.
- Cliffordsche Parallelen (ell. und s. R.)** 166.
—, projektiv gedeutet 184.
—, orientierte 188.
- Defekt als Inhaltsmaß (h. E.)** 51, 96.
- Diametralbündel von Kreisen (e. E.)** 171.
- Diametralgebüsch von Kugeln (e. R.)** 181.
- Differentialformen, quadratisch** 124 ff.
- Dreieck, aus den Winkeln konstruiert (h. E.)** 42.
— — (s. E.) 157.
—, s. a. rechtwinkliges Dreieck.
- Dreiecksinhalt aus den Winkeln (h. E.)** 97.
— — (s. E.) 158.
— aus den Seiten (h. E.) 79, 83.
- Einheitsstrecke (h. E.)** 66.
— ist nicht konstruierbar 91.
- Einseitige Flächen** 177.
- Ellipse (h. E.)** 139, 142.
— als Bahnkurve 208, 213.
- Elliptische Geometrie, Definition** 176.

- Ende (Parallelenbüschel der h. E.) 28.
 — (Parallelenbündel des h. R.) 57.
 Entfernung, durch Doppelverhältnis bestimmt (h. G.) 131, 137.
 — (ell. G.) 173, 183.
 Euklidisches Parallelenpostulat 2.
 Euklidische Geometrie, im Infinitesimalgebiet h. E. 83, 97.
 — auf der Grenzkugel 61.
 — auf der Cliffordschen Fläche 170.
 Exhaustionsmethode 54.
 Exzeß als Inhaltsmaß 59, 158.
 Flächenelement (h. E.) 94 ff.
 — (h. R.) 101 ff.
 Flächensatz (h. E.) 208.
 Fundamentalfäche (ell. R.) 183.
 Fundamentalkugelschnitt (h. E.) 129, 136.
 — (ell. E.) 173 f.
 Geographische Koordinaten 114, 190.
 Geschwindigkeitskomponenten (h. E.) 200.
 Geschwindigkeitsresultierende (Relativitätstheorie) 218.
 Gnomonische Projektion 172, 182.
 Grenzkreis (h. E.) 43.
 —, Teilung 44.
 —, Gleichung 70, 119.
 — -koordinaten 94.
 — -sektoren 92.
 Grenzkugel 58, 101.
 Hauptkreise der Kugel als s. Gerade 154.
 Hjelmsevscher Mittelliniensatz 18, 32, 36.
 Höhenschnittpunkt im Dreieck (h. E.) 32.
 Hyperbel (h. E.) 142.
 Hyperbolische Funktionen 67.
 — geometrische Deutung 68.
 Hyperbolische Geometrie (Definition) 22.
 Hypothese des rechten, spitzen, stumpfen Winkels 12.
 Imaginäre Geometrie (= h. G.) 86.
 Inhaltswertfunktion (s. E.) 159.
 Kegel (h. R.) 101 ff.
 Kegelschnitte (h. G.) 138.
 —, Einteilung 142.
 —, konfokale 142.
 Keplers Gesetze 208—210.
 Kleins Begründung der nicht-euklidischen G. 128.
 Komplementäre Figuren (h. E.) 37.
 Komplementärtransformation (h. E.) 46, 62.
 Konforme Abbildung der h. E. auf die e. E. 145.
 — der s. E. auf die e. E. 171.
 Korrespondierende Punkte auf Parallelen (h. E.) 33, 43.
 — (h. R.) 58.
 Kosinussatz (h. E.) 75, 78.
 — (s. E.) 162.
 Kreisgeometrie der h. E. 49, 64.
 — der e. E. als Grundlage der h. G. 149.
 Kreisinhalt (h. E.) 95.
 — (s. E.) 161.
 Kreisumfang (h. E.) 89.
 — (s. E.) 161.
 Kugelgeometrie des e. R. als Grundlage der s. G. 181.
 Lagrangesche Differentialgleichungen 201.
 Lebendige Kraft 202.
 Linienkoordinaten (h. E.) 117.
 Lot, gemeinsames, zweier Geraden (h. E.) 25.
 — — seine Konstruktion 27.
 — zweier windschiefen Geraden (ell. R.) 164, 187.
 Lot p zum Parallelwinkel II (p) 22.
 —, Konstruktion 35.
 —, Berechnung 77.
 Mittelsenkrechte der Dreieckseiten (h. E.) 29.
 Nepersche Regel (s. E.) 156.
 Neper-Engelsche Regel (h. E.) 41, 73.
 Nulllinie (einer Abstandslinie) 44.

- Orthogonaltrajektorien eines Zy-
 klenbüschels 49.
- Parabel (h. E.) 142.
- Paradoxon, statisches (von An-
 drade) 198.
- Parallelen, euklidische 1.
 —, hyperbolische (h. E.) 20.
 — — (h. R.) 57.
 —, elliptische s. Clifford.
- Parallelenbündel (h. R.) 57.
- Parallelendreikant (h. R.) 59.
- Parallelenpostulat, euklidisches
 2.
 — —, Beweisversuche 14f.
 —, hyperbolisches 22.
- Parallelismus, orientierter (ell.
 R.) 187.
- Parallelwinkel II (p) zum Lot p
 15, 22.
 —, Berechnung 80.
 —, Konstruktion 34, 36, 40.
 — im s. R. 166.
- Pentagramma mirificum 154.
- Planetenbewegung (h. R.) 207.
- Polarkoordinaten (h. E.) 95.
 — (h. R.) 99.
 — (s. R.) 207.
- Potentiale (verallgemeinerte
 Newtonsche) 206f.
- Pseudosphäre 110.
- Quasielliptische G. 194.
- Randbild einer E. (h. G.) 63.
- Raumgeometrie (h.) 56 ff.
 — (sph.-ell.) 164f., 177f.
- Raumzeittransformation 215.
- Rechtwinklige Dreiecke, zuge-
 ordnete (h. E.) 40, 62.
 — (s. E.) 157.
 — aus zwei Winkeln konstruiert
 (h. E.) 41.
 —, trigonometrische Formeln
 (h. E.) 78.
 — (s. E.) 163.
- Relativitätsprinzip 213.
- Resultante 197.
- Rotationsflächen konst. neg.
 Krümmungsmaßes 111.
- Schnittpunktsätze (h. E.) 29ff.
 125f.
- Sinussatz (h. E.) 74, 78.
- Speere (e. R.) 186.
- Sphären (verallgemeinerter Be-
 griff der Kugel im h. R.) 98ff.
- Sphärik 152.
- Spitzeck (h. E.) 37, 74.
- Stereographische Projektion 171,
 179.
- Strahlenbüschel, lineare (h. E.)
 als Zyklenachsen 43.
- Streckeneinheit (h. G.) 66.
 — nichtkonstruierbar 91.
- Streckenteilung (h. G.) 91.
- Streckenverkürzung 215.
- Studysche Abbildung der Speere
 (ell. R.) 189.
- Stumpfleck (s. E.) 165.
- Tetraedervolumen (h. R.) 107.
- Transversalensatz (h. E.) 17, 19.
- Trigonometrie (h. E.) 71 ff.
 — (s. E.) 163.
- Umfangsfunktion (s. E.) 159.
- Umlaufzeit 210.
- Vierdimensionaler e. Raum 178.
- Viereck mit drei rechten Win-
 keln 11.
 —, dem rechtwinkligen Dreieck
 zugeordnet (h. E.) 39.
- Weierstraßsche Koordinaten
 115.
- Winkelhalbierende im Dreieck
 (h. E.) 31.
- Winkelmaß, eingeführt in die
 h. G. 75.
 s. auch Cayley.
- Winkelsumme im Dreieck 9f.
- Zwischenebene (h. R.) 63.
- Zyklen (verallgemeinerter Be-
 griff des Kreises in der
 h. E.) 43.
 — als Randbilder von Ebenen 63.
 —, Gleichungen 117—119, 133.
 —, Abbildungen 134, 145.