Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage

Von

Ludwig Schlesinger
ord. Professor an der Universität zu Gießen

Dritte, neubearbeitete Auflage

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER
VERLEGER WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG —
J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG — GEORG
REIMER — KARL J. TRÜBNER — VEIT & COMP.
BERLIN W. 10 UND LEIPZIG
1922

Druck der Vereinigung wissenschaftlicher Verleger Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10

Vorwort.

Die erste Auflage dieses Buches ist 1900 erschienen, die zweite, ein unveränderter Abdruck der ersten, schon 1903. Seitdem ist fast ein Menschenalter verflossen, während dessen sich anscheinend das allgemeine Interesse an dem hier behandelten Gegenstande, wenigstens in Deutschland, etwas abgeschwächt hat. Woran das liegen mag, ist schwer zu sagen: jedenfalls nicht an dem Mangel an aussichtsvollen und zugänglichen Problemen, aber auch nicht daran, daß die Bedeutung dieser Probleme für Theorie und Anwendungen geringer geworden wäre. Gilt doch auch heute noch, was S. Lie im Jahre 1893 in die Worte gefaßt hat*): „In der ganzen modernen Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste Disziplin."

Bei der Bearbeitung der neuen Auflage sind die Grundsätze beibehalten worden, die für die Abfassung der ersten maßgebend waren. Es heißt darüber in dem Vorwort zur ersten Auflage: „Es kommt, wie mir scheint, für den Anfänger nicht sosehr darauf an, daß er gleich die ganze Tragweite einer bestimmten Methode kennenlernt, als vielmehr darauf, daß er zunächst ihr Wesen richtig erfaßt. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es aber, die betreffende Methode an Beispielen zu entwickeln, die einerseits so allgemein sind, daß keine der Schwierigkeiten, die durch das Wesen jener Methode überwunden werden sollen, fehlt, und andererseits so speziell, daß Schwierigkeiten akzessorischer Natur möglichst vermieden werden."

„Der Wert einer Darstellung, wie der hier vorliegenden, wird naturgemäß nicht in ihrer durchgängigen Eigenart zu suchen sein; handelt es sich ja zum Teil um die Entwicklung von Theorien, die außer von ihren Urhebern auch schon anderweitig vielfach behandelt worden sind. Die ersten Quellen war ich bestrebt überall zu nennen, von späteren Bearbeitungen sind meist nur diejenigen angeführt, die mir bei der Ausarbeitung unmittelbar vorgelegen haben."

„Nur zwei Gesichtspunkte möchte ich mir noch erlauben hervorzuheben. Einmal, daß ich die Grundlage für einen systematischen Aufbau der Theorie der Differentialgleichungen in der Unterscheidung zwischen

*) Leipziger Berichte 1893, Seite 53.

festen und mit den Anfangswerten verschiebbaren Singularitäten der Lösungen zu finden glaubte, das andere Mal, daß ich bestrebt war, durch die hier gegebene Darstellung diese Theorie auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben."

Von dem ursprünglichen Text ist nur knapp die Hälfte im wesentlichen unverändert in die Neubearbeitung übergegangen, nämlich die für jeden Mathematiker unentbehrlichen klassischen Lehren von der Integralexistenz, den Differentialgleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten, der Gaußschen und der Besselschen Differentialgleichung. Alles andere wurde vollständig neu bearbeitet und dem derzeitigen Stande der Forschung auf diesem Gebiet angepaßt. Die in der ersten Auflage allzu knapp gehaltene Einleitung, die das Gebiet der reellen Veränderlichen behandelte, wurde vervollständigt und zu einem besonderen Kapitel gestaltet, die Theorie der linearen Differentialgleichungen wurde durch Anwendung des Matrizenkalküls vereinfacht und vereinheitlicht und bis zu den aus dieser Theorie entspringenden Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung mit festen kritischen Punkten fortgeführt, um den Leser bis zu den gegenwärtig im Vordergrund des Interesses stehenden Problemen hinzuleiten. Auch sind Beispiele aus den Anwendungen eingefügt worden; das eine gab Gelegenheit, die Lehre von den linearen Integrodifferentialgleichungen zu berühren.

An Vorkenntnissen wird eine gewisse Vertrautheit mit den Elementen der Funktionentheorie vorausgesetzt, in den Kapiteln III und IV darüber hinausgehend noch einiges aus der Lehre von den algebraischen Funktionen. Der Leser kann aber, ohne dadurch das Verständnis des Darauffolgenden zu beeinträchtigen, bei der ersten Lektüre diese beiden Kapitel zurückstellen und damit zu der Anordnung der ersten Auflage zurückkehren.

Bei der Ausarbeitung des Buches hat mir eine von unserem bisherigen Assistenten Heinrich Fuhr angefertigte Nachschrift meiner Vorlesungen vom W.-S. 1919/20 und S.-S. 1920 vorgelegen; auch bei der Anfertigung der Druckvorlage und bei der Korrektur hatte ich mich der verständnisvollen und unermüdlichen Mitarbeit Fuhrs zu erfreuen; ihm, sowie den Herren, die mich beim Lesen der Probeabzüge in freundlichster Weise unterstützt haben, meinem hiesigen Amtsgenossen F. Engel, ferner E. Hilb, F. Kämmerer und A. Plessner, sage ich für ihre wertvolle Hilfe herzlichsten Dank.

Gießen, zu Ostern 1922.

L. Schlesinger.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erstes Kapitel. **Einleitendes über Differentialgleichungen im reellen Gebiet.**

1. Begriff einer Differentialgleichung und ihrer Integration 1
2. Systeme von Differentialgleichungen. Zurückführung auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung 3
3. Orientierung über die Natur der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung. Existenzbeweis für die Lösung 5
4. Eindeutige Bestimmung der Lösung. Abhängigkeit von den Anfangswerten und von Parametern. Lineare Differentialgleichung . . . 13
5. Verallgemeinerung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Differentialgleichung n^{ter} Ordnung 18
6. Beispiel aus der analytischen Mechanik 23

Zweites Kapitel. **Allgemeine Untersuchung der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung.**

7. Differentialgleichungen erster Ordnung für komplexe Werte der Veränderlichen. Aufstellung einer Potenzreihe, die der Differentialgleichung formal genügt 27
8. Konvergenz der aufgestellten Reihe. Calcul des limites 30
9. Konvergenzbeweis nach Cauchy 31
10. Singuläre Anfangswerte. Die Ableitung wird so unendlich, daß ihr reziproker Wert holomorph bleibt 34
11. Untersuchung des Falles, wo die Integralfunktion selbst unendlich wird 38
12. Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern. Unität . . . 39
13. Analytische Fortsetzung 45
14. Feste und verschiebbare singuläre Punkte. Der Satz von Painlevé 48
15. Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten. Riccatische Differentialgleichung 54
16. Form des allgemeinen Integrals 57
17. Zusammenhang der Riccatischen Differentialgleichung mit linearen homogenen Differentialgleichungen 61

Drittes Kapitel. **Differentialgleichungen erster Ordnung, wo die Ableitung als implizite Funktion der unabhängigen Veränderlichen gegeben ist.**

18. Begriff der Integralfunktion 67
19. Untersuchung des Falles, wo der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung verschwindet 72

Seite

20. Untersuchung des Falles, wo die Diskriminante verschwindet. Vorbereitendes 75
21. Der Fall, wo die Diskriminante verschwindet, der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung aber nicht 77
22. Untersuchung der singulären Integrale 81
23. Untersuchung der Fälle, wo der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung zugleich mit der Diskriminante verschwindet, und wo das Integral selbst unendlich wird 85
24. Über die Theorie der singulären Integrale 89

Viertes Kapitel. **Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten.**

25. Zusammenfassung der Bedingungen für das Nichtauftreten verschiebbarer Verzweigungspunkte. Briot- und Bouquetsche Differentialgleichungen 93
26. Rang einer algebraischen Gleichung. Rang Null, Eins und Zwei 97
27. Gleichungen vom Range Null 100
28. Gleichungen vom Range Eins 104
29. Briot- und Bouquetsche Gleichung vom Range Eins 105
30. Integration der Differentialgleichung vom Range Eins mit festen Verzweigungspunkten 112
31. Additionstheorem der elliptischen Funktionen 116
32. Gleichungen vom Range Zwei. Zusammenfassung der Resultate 118
33. Geschichtliches. Weitere Fragestellungen 123

Fünftes Kapitel. **Singuläre Stellen linearer Differentialgleichungen.**

34. Die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung . . . 126
35. Systeme von zwei linearen Differentialgleichungen. Matrizenkalkül 132
36. Existenzbeweise im reellen und komplexen Gebiet 137
37. Methode der sukzessiven Approximationen. Mehrdeutigkeit . . . 143
38. Wertänderungen der Integralmatrix bei Umläufen. Kanonische Integralmatrix 146
39. Darstellung der Integralmatrix in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle. Cauchysche Differentialsysteme 152

Sechstes Kapitel. **Untersuchung der singulären Stellen, wo die Integrale nicht unbestimmt werden.**

40. Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Gestalt der Koeffizienten in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit 159
41. Übergang zum Differentialsystem. Die gefundene Form ist auch hinreichend 165
42. Berechnung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit für Differentialgleichungen zweiter Ordnung 168
43. Beispiele. Verhalten der Integrale im Unendlichen 175
44. Direkte Behandlung der Differentialsysteme 181
45. Riccatische Differentialgleichung und beliebige Differentialgleichung erster Ordnung 185
46. Der Fuchssche Typus 191
47. Das Integrationsproblem. Fundamentalsubstitutionen 196

Seite
48. Monodromiegruppe. Der Artbegriff. Fundamentallemma 200
49. Konstantenzählungen. Riemannsche Differentialsysteme 205
50. Vereinfachung des Riemannschen Differentialsystems. Gaußsche Differentialgleichung 208

Siebentes Kapitel. **Die Gaußsche Differentialgleichung.**

51. Aufstellung des kanonischen Fundamentalsystems für den Nullpunkt 210
52. Erledigung der Ausnahmefälle 212
53. Kanonische Fundamentalsysteme für $x=1, x=\infty$ 216
54. Konvergenzbereiche der aufgestellten Reihenentwicklungen . . . 217
55. Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen 219
56. Multiplikator. Adjungierte Differentialgleichung. Identität von Lagrange 223
57. Integration der Gaußschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale. Vertauschung von Parameter und Argument. Eulersche Transformierte 226
58. Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion und des Integrationsweges 228
59. Darstellung der Gaußschen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral 232
60. Darstellung des zweiten zu $x=0$ gehörigen kanonischen Integrals. Differentialgleichung für die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung 236
61. Die Klassenbeziehung 240
62. Behandlung eines speziellen Falles 243
63. Legendresche Polynome 245

Achtes Kapitel. **Untersuchung der Integrale in der Umgebung eines Punktes der Unbestimmtheit.**

64. Differentialsysteme vom Range Eins. Normalreihen 248
65. Differentialgleichung zweiter Ordnung. Riccatische Differentialgleichung 252
66. Begriff der asymptotischen Darstellung. Differentialgleichungen vom Range Eins. Angenäherte Differentialgleichungen 257
67. Laplacesche Differentialgleichung. Integration durch bestimmte Integrale 260
68. Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion und des Integrationsweges 263
69. Reellpositive Werte der unabhängigen Veränderlichen. Reihenentwicklung der Integrale. Gammafunktion 266
70. Beweis der asymptotischen Darstellung durch Untersuchung des Restgliedes 270
71. Die Besselsche Differentialgleichung 274
72. Darstellung der Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung durch Fakultätenreihen 280

Neuntes Kapitel. **Verallgemeinerungen. Parametrale Probleme.**

73. Differentialsysteme für n Unbekannte. Integrodifferentialgleichungen 286

Seite

74. Die Artbeziehung. Adjungierte Systeme 289
75. Theorie der adjungierten Systeme. Integration des vollständigen linearen Differentialsystems 292
76. Beispiel einer linearen Integrodifferentialgleichung 295
77. Die Fundamentalsubstitutionen in ihrer Abhängigkeit von den in den Koeffizienten des Differentialsystems enthaltenen Parametern. Das Riemannsche Problem 299
78. Das Fuchssche Problem. Aufstellung eines Differentialsystems zweiten Grades 303
79. Algebraische Integralgleichungen des Differentialsystems (R). Besondere Fälle 307
80. Integration des Differentialsystems (R). Bericht über neuere Untersuchungen 314

Sach- und Namenverzeichnis 321

Erstes Kapitel.

Einleitendes über Differentialgleichungen im reellen Gebiet.

1. Begriff einer Differentialgleichung und ihrer Integration.

Zahlreiche Aufgaben der Analysis, der Geometrie, der analytischen Mechanik führen auf die Aufgabe, eine Funktion von einer oder mehreren veränderlichen Größen zu bestimmen, wenn eine Beziehung zwischen dieser Funktion, ihren Ableitungen und den unabhängigen Veränderlichen gegeben ist. Eine solche Beziehung nennt man eine Differentialgleichung.

In den Institutiones calculi integralis (Petersburg 1768 bis 1770, L. Euleri Opera omnia, Ser. I, vol. XI—XIII, Leipzig und Berlin 1913—1914) bezeichnet Euler es als die Aufgabe der Integralrechnung, aus einer gegebenen Beziehung zwischen den Differentialen die Beziehung zwischen den Größen selbst zu finden (Definitio I), und teilt (Definitio III) die Integralrechnung in zwei Teile, von denen der erste die Funktionen einer Veränderlichen, der zweite die Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen zum Gegenstande hat.

Wir werden uns ausschließlich mit solchen Differentialgleichungen beschäftigen, in denen die Ableitungen der unbekannten Funktion nur nach einer der Veränderlichen, von denen die Funktion abhängt, auftreten; man bezeichnet diese als gewöhnliche Differentialgleichungen. Für eine gewöhnliche Differentialgleichung ist es also keineswegs ausgeschlossen, daß die zu bestimmende Funktion von mehr als einer Veränderlichen abhängt, vielmehr können nebst der Veränderlichen, nach der die in der Differentialgleichung enthaltenen Ableitungen genommen sind, in den Koeffizienten der Differentialgleichung noch andere, von jener unabhängige Veränderliche auftreten. Diese letzteren werden aber dann als Konstante angesehen und zum Unterschiede von derjenigen Veränderlichen, nach der die auftretenden Ableitungen genommen sind und die schlechthin die unabhängige Veränderliche heißen soll, Parameter genannt. So wird uns sehr bald (Nr. 6) die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

begegnen, in der also x als die unabhängige Veränderliche schlechthin, k^2 als der Parameter zu bezeichnen sein wird; die Lösung u kann in der Tat als Funktion der beiden voneinander unabhängigen Veränderlichen x und k^2 angesehen werden.

Wenn in einer Differentialgleichung partielle Differentialquotienten der unbekannten Funktion nach mehreren voneinander unabhängigen Veränderlichen enthalten sind, so heißt diese Differentialgleichung eine partielle.

Die schematische Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$\text{(1)} \qquad F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

wo wir in der Regel F als ganze rationale Funktion der unbekannten Funktion y und ihrer Ableitungen voraussetzen werden, deren Koeffizienten im allgemeinen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und eventuell noch gewisser Parameter sind. Wenn in einer solchen Differentialgleichung die höchste der vorkommenden Ableitungen die n-te ist, so heißt die Differentialgleichung von der n-ten Ordnung, wenn die ganze rationale Funktion F eine solche vom Grade m ist, so ist die Differentialgleichung vom m-ten Grade.

So ist also z. B. die Differentialgleichung (A) in u von der ersten Ordnung und vom ersten Grade; als Differentialgleichung für die inverse Funktion geschrieben:

$$\text{(A')} \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 - (1-x^2)(1-k^2x^2) = 0$$

wäre sie dagegen von erster Ordnung und vom vierten Grade. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0,$$

die wir in der Nr. 6 behandeln werden, ist von der zweiten Ordnung, während von einer Gradzahl nicht die Rede sein kann, weil die linke Seite kein ganzer rationaler Ausdruck der unbekannten Funktion φ und ihrer Ableitungen ist.

Unter der Auflösung der gegebenen Differentialgleichung versteht man die Bestimmung der sämtlichen Funktionen, die für y eingesetzt, die Differentialgleichung befriedigen. Einer derartigen Aufgabe begegnen wir schon in den Elementen der Integralrechnung. In der Tat ist

$$y = \int f(x)\,dx$$

die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{2}$$

und wir gewinnen aus diesem einfachen Beispiele zugleich die Einsicht, daß es im allgemeinen unendlich viele Funktionen geben wird, die einer gegebenen Differentialgleichung genügen, da ja, wenn $\varphi(x)$ eine Lösung von (2) darstellt, auch $\varphi(x) + c$, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, derselben Differentialgleichung genügt. Wir können also für eine vorgelegte Differentialgleichung entweder nach einer speziellen, oder wie man zu sagen pflegt, partikulären Lösung fragen oder nach der allgemeinen Lösung, d. h. der allgemeinsten Funktion, die der Differentialgleichung genügt. Wie im Falle des gewöhnlichen Integrals (der Quadratur), das ja einen besonderen Fall der Lösung einer Differentialgleichung darstellt, bezeichnet man auch allgemein die Auflösung einer Differentialgleichung als ihre Integration, und spricht von partikulärem und allgemeinem Integral einer solchen Gleichung.

2. Systeme von Differentialgleichungen. Zurückführung auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

In dem aus den Elementen der Integralrechnung entnommenen Beispiele handelt es sich um die Auffindung einer gegebenen Funktion, für die eine Differentialgleichung gegeben ist. Oft handelt es sich aber um eine allgemeinere Aufgabe. Betrachten wir z. B. die Bewegung eines Systems materieller Punkte unter dem Einflusse gewisser Kräfte, die auf diese Punkte einwirken. Es seien

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_m, y_m, z_m)$$

die rechtwinkligen Koordinaten von m solchen Punkten, dann hat man die Aufgabe, diese $3m$ Koordinaten als Funktionen der Zeit t zu bestimmen. Die ersten Differentialquotienten von (x_k, y_k, z_k) nach t geben die Komponenten der Geschwindigkeit, die zweiten Differentialquotienten derselben Größen die Komponenten der Beschleunigung für den Punkt (x_k, y_k, z_k). Die mechanische Aufgabe, auf deren Lösung es ankommt, liefert eine gewisse Anzahl von Beziehungen zwischen den Koordinaten, den Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten und der Zeit t, die wir uns in der Regel von der Form

$$\begin{gathered} F_\lambda\Big(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_m, y_m, z_m; \\ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \ldots; \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \frac{d^2 z_1}{dt^2}, \ldots\Big) = 0 \\ (\lambda = 1, 2, \ldots, p) \end{gathered} \tag{3}$$

denken, wo die F_λ ganze rationale Funktionen der angedeuteten Elemente mit von t abhängigen Koeffizienten bedeuten. Gewöhnlich ist die Anzahl p dieser Relationen gleich der Anzahl $3m$ der zu bestimmenden Koordinaten, dabei ist es nicht ausgeschlossen, daß einzelne dieser Relationen nur die Koordinaten, nicht aber deren Differentialquotienten enthalten, d. h. sogenannte Bedingungsgleichungen sind. Ein solches System von Relationen bildet dann ein System von Differentialgleichungen (kürzer Differentialsystem) für die unbekannten Funktionen. Im allgemeinen können in einem Systeme von Differentialgleichungen natürlich nicht nur die ersten und zweiten, sondern auch noch höhere Differentialquotienten der unbekannten Funktionen auftreten. In jedem Falle ist es aber durch ein rein formales Verfahren möglich, ein System von Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu ersetzen, wobei allerdings die Anzahl der zu bestimmenden Funktionen und damit auch die Anzahl der Differentialgleichungen vergrößert werden muß. Setzt man z. B. in dem Falle der Gleichungen (3)

$$(4)\qquad \frac{dx_k}{dt} = \xi_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = \eta_k, \quad \frac{dz_k}{dt} = \zeta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

so haben wir für die $6m$ unbekannten Funktionen

$$x_k, y_k, z_k, \xi_k, \eta_k, \zeta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

die Gleichungen

$$(5)\quad F_\lambda\left(x_1, y_1, z_1, \ldots; \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots; \frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\eta_1}{dt}, \frac{d\zeta_1}{dt}, \ldots\right) = 0,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, 3m)$$

die in Verbindung mit den Gleichungen (4) ein System von $6m$ Differentialgleichungen erster Ordnung bilden.

Auf diese Weise kann auch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

für die eine unbekannte Funktion y, durch das System

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \ldots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$

$$F\left(y, y_1, \ldots, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0$$

von n Differentialgleichungen erster Ordnung für die n unbekannten Funktionen

$$y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$$

ersetzt werden.

Hiernach besteht die allgemeinste Aufgabe der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Bestimmung der sämtlichen

Funktionssysteme, die einem Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leisten. Die schematische Form eines solchen Differentialsystems ist

$$(6) \qquad G_\lambda\left(y_1, y_2, \ldots, y_n; \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_n}{dx}\right) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

wo wir in der Regel die G_λ als ganze rationale Funktionen der angedeuteten Elemente, mit von x abhängigen Koeffizienten voraussetzen werden.

Wenn wir in den Gleichungen (6) die

$$(7) \qquad \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$$

als Unbekannte ansehen, so kann man nach den Regeln der Eliminationstheorie das Gleichungssystem (6) durch ein ihm im algebraischen Sinne äquivalentes System ersetzen, das so beschaffen ist, daß in jeder Gleichung dieses neuen Systems nur eine der Größen (7) auftritt, das also die Form hat

$$(8) \qquad F_\lambda\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die F_λ ebenfalls ganze rationale Funktionen der angedeuteten Elemente mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten; der Übergang von den Gleichungen (6) zu den Gleichungen (8) erfolgt durch Ausführung rein rationaler Operationen.

Die allgemeinste Aufgabe, mit der wir uns zu beschäftigen haben, besteht also darin, für ein gegebenes Gleichungssystem von der Form (8), sei es ein spezielles (partikuläres), sei es das allgemeinste Funktionssystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu bestimmen, das diese Gleichungen befriedigt. Man nennt ein solches Funktionssystem ein partikuläres beziehungsweise das allgemeine Integralsystem des gegebenen Systems von Differentialgleichungen.

Bei der Darlegung der Methoden, die für die Lösung dieser Aufgabe ausgebildet worden sind, werden wir uns zumeist auf den einfachsten Fall $n = 1$ beschränken, da das Wesen dieser Methoden an diesem Falle in völlig ausreichender Weise erläutert werden kann, und durch diese Beschränkung eine nicht geringe Menge von Schwierigkeiten algebraischer und funktionentheoretischer Natur vermieden wird, die bei der Behandlung der allgemeinen Aufgabe auftreten.

3. Orientierung über die Natur der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung. Existenzbeweis für die Lösung.

Wenn $n = 1$ ist, so wird das System der Gleichungen (6) zu der einen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Die ganze rationale Funktion F sei in $\frac{dy}{dx}$ vom m-ten Grade; denken wir uns nach Potenzen dieser Größe geordnet, so hat die Differentialgleichung die Gestalt:

$$(9) \qquad \varphi_0(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + \varphi_1(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + \varphi_m(y) = 0,$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten. Um vorerst Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, die das Wesen der hier zu entwickelnden Prinzipien nicht berühren, denken wir uns aus dieser Gleichung m-ten Grades $\frac{dy}{dx}$ ausgerechnet. Wir kommen an späterer Stelle auf die Art und Weise, wie man sich diese Rechnung ausgeführt zu denken hat, zurück; hier genügt es zu bemerken, daß sich im allgemeinen m verschiedene Lösungen für $\frac{dy}{dx}$ ergeben, deren eine wir den nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde legen und in der Form

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

schreiben wollen, wo $f(x, y)$ von den Koeffizienten der Gleichung (9) in algebraischer Weise abhängt.

Die Gleichung (10) besagt, daß der Differentialquotient der unbekannten Funktion y durch x und y bestimmt ist. Deuten wir x und y als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, so wird die unbekannte Funktion y von x durch eine Kurve dieser Ebene, eine sogenannte Integralkurve, dargestellt, und die Gleichung (10) liefert die trigonometrische Tangente des Winkels, unter dem sich die an jene Kurve im Punkte (x, y) gelegte Tangente zur positiven x-Achse neigt, ausgedrückt durch die Koordinaten dieses Punktes. Es sei nun (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt jener Kurve, so kennen wir vermöge der Gleichung (10) den Wert

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f(x_0, y_0),$$

also die Tangente an jene Kurve im Punkte (x_0, y_0), vorausgesetzt, daß $f(x_0, y_0)$ einen eindeutig bestimmten Wert hat. Diese Tangente enthält nun den dem Punkte (x_0, y_0) unendlich benachbarten Punkt der Kurve mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x_0 + dx &= x_1, \\ y_0 + dy &= y_1, \end{aligned}$$

in dem wir zufolge der Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = f(x_1, y_1)$$

wieder die Tangente konstruieren können. Diese geht wieder durch den dem (x_1, y_1) unendlich benachbarten Punkt der Kurve hindurch, und auf diese Weise fortfahrend, können wir die auf einander folgenden Punkte der Kurve konstruieren, bis wir zu einem Punkte (x, y) kommen, wo $f(x, y)$ aufhört, einen eindeutig bestimmten Wert darzustellen. Bemerkenswert ist, daß diese Konstruktion stets ausführbar bleibt, wie auch der Anfangspunkt (x_0, y_0) gewählt werden mag, daß wir also durch jeden beliebigen Punkt der Ebene als Anfangspunkt eine solche Integralkurve hindurchlegen können, vorausgesetzt, daß für die Koordinaten dieses Punktes die Funktion $f(x, y)$ einen eindeutig bestimmten Wert besitzt.

Wir wollen nun diese auf die geometrische Anschauung gegründete Betrachtung in schärferer analytischer Fassung reproduzieren, wodurch sich uns zugleich ein Weg eröffnen wird, auf dem man einerseits in gewisse Stetigkeitseigenschaften der Integralfunktion Einsicht gewinnen, andererseits aber zu einer angenäherten Berechnung dieser Funktion gelangen kann. Das Bedürfnis nach solchen Näherungsverfahren ist aus den Anwendungen erwachsen, weil es für die meisten in den Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen nicht möglich ist, die Lösung in endlicher Form durch bekannte Funktionen darzustellen.

Unsere geometrische Betrachtung hat uns gezeigt, daß die Aufgabe eine Funktion zu suchen, die der Differentialgleichung genügt, noch durch die Forderung verschärft werden kann, daß jene Funktion für einen gegebenen Wert x_0 der unabhängigen Veränderlichen einen willkürlich vorgeschriebenen Wert y_0 annehmen soll, d. h. daß man die gesuchte Funktion noch gewissen sogenannten Anfangsbedingungen zu unterwerfen hat, um sie genauer zu bestimmen. Man versucht nun zunächst eine Funktion η herzustellen, die die Anfangsbedingungen erfüllt, also für $x = x_0$ den Wert $\eta = y_0$ annimmt, und die gegebene Differentialgleichung (10) mit einer gewissen Annäherung erfüllt, d. h. der Gleichung

$$\frac{d\eta}{dx} = f(x, \eta) + \Delta \tag{10*}$$

Genüge leistet, wo Δ eine dem absoluten Betrage nach kleine Größe bedeutet. Für die Quadratur, d. h. für die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{10 a}$$

wo $f(x)$ von y unabhängig ist, gelingt dies bekanntlich am einfachsten in folgender Weise. Wenn etwa $f(x)$ in dem Intervalle $(x_0 \ldots a)$ stetig ist, so teilt man dieses Intervall der x-Achse durch die Punkte $x_0 < x_1$

$< x_2 < \ldots < x_{n-1} < a$ in n Teile, ersetzt die Differentialgleichung (10a) durch die Kette von Differenzengleichungen

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0),$$
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f(x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und verbindet in der (x, y)-Ebene je zwei aufeinander folgende der Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (a, b) durch gerade Linien. Die so entstehende gebrochene Linie stellt dann eine Funktion η von x dar, deren Ableitung sich nur an den Knickstellen (x_k, y_k) sprungweise ändert. Verfeinert man die Teilung so weit, daß innerhalb eines jeden Teiles die Schwankung von $f(x)$[1]) kleiner als ε bleibt, so befriedigt η die Gleichung

$$\text{(10*a)} \qquad \frac{d\eta}{dx} = f(x) + \Delta,$$

wo $|\Delta| < \varepsilon$ ist. Es entsteht aber nun die Frage, ob die Funktion, die der angenäherten Differentialgleichung genügt, auch eine Annäherung an die Lösung y der gegebenen Differentialgleichung liefert, und wenn das der Fall ist, ob sich der Unterschied zwischen η und y beliebig verkleinern läßt. Man weiß aus den Elementen der Integralrechnung, wie diese Fragen zu einem Existenzbeweis für die Lösung der Differentialgleichung (10a), d. h. zur Definition des bestimmten Integrals als

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_{k-1})$$

hinführen. Wir wollen hier gleich die analogen Untersuchungen für die allgemeine Gleichung (10) in Angriff nehmen.

Es sei $f(x, y)$ in dem Bereich B der (x, y)-Ebene eindeutig, stetig und beschränkt,

$$\text{(a)} \qquad |f(x, y)| < M,$$

der Anfangspunkt (x_0, y_0) und das durch die Ungleichungen $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ gegebene Rechteck $\bar{R}$ seien innerhalb B gelegen. Dieses Rechteck denken wir uns durch Parallelen zur x- und y-Achse in rechteckige Zellen geteilt. Wir gehen nun von (x_0, y_0) in der durch $f(x_0, y_0)$ bestimmten Richtung aus und beschreiben eine gebrochene Linie L, die ihre Richtung nur beim Auftreffen auf eine der Zellwände in der Weise ändert, daß sie allemal durch den Wert von $f(x, y)$ in dem Treffpunkte bestimmt wird (Fig. 1). Die Gleichung der von (x_0, y_0) ausgehenden Geraden lautet also

[1]) D. h. $|f(x) - f(x')|$ für irgend zwei innerhalb jenes Teiles gelegene Werte x, x'.

$$\eta - y_0 = f(x_0, y_0)\,(x - x_0).$$

Es seien x_1, y_1 die Koordinaten des Punktes, in dem diese Gerade die Begrenzung der Zelle trifft, in der der Punkt (x_0, y_0) gelegen ist, dann ist

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\,(x_1 - x_0)$$

und die Gleichung des von (x_1, y_1) ausgehenden Stücks der gebrochenen Linie L lautet

$$\eta - y_1 = f(x_1, y_1)\,(x - x_1).$$

Der nächste Treffpunkt dieser Geraden mit einer Zellwand sei (x_2, y_2), also

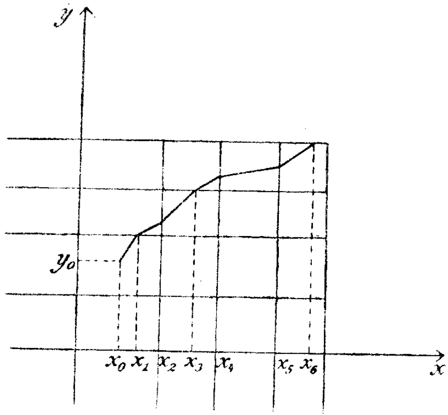

Fig. 1.

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,(x_2 - x_1)$$

usw. Wenn also $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ die Koordinaten der Treffpunkte von L mit den Zellwänden sind, so haben wir die Folge von Differenzengleichungen:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\,f(x_0, y_0),$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\,f(x_1, y_1),$$
$$y_3 - y_2 = (x_3 - x_2)\,f(x_2, y_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und es handelt sich nun zuvörderst darum, es so einzurichten, daß die Linie L aus dem Rechteck $\bar{R}$ nicht hinaussteigt. Wir beschränken darum x auf das Intervall

(b) $$|x - x_0| \leqq A,$$

wo A kleiner ist als die kleinere der beiden Größen a, $\dfrac{b}{M}$ und bezeichnen das Rechteck $|x - x_0| \leqq A$, $|y - y_0| \leqq b$ mit R. Wenn dann die Treffpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ noch innerhalb von R liegen, so sind alle $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_k, y_k)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als M, und folglich ist für das von (x_k, y_k) ausgehende geradlinige Stück

$$\eta - y_k = (x - x_k)\,f(x_k, y_k), \quad x_k \leqq x \leqq x_{k+1},$$

von L

$$|\eta - y_0| = \left|\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu - x_{\nu-1})\,f(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}) + (x - x_k)\,f(x_k, y_k)\right|$$
$$< |x - x_0|\,M,$$

also, solange x der Ungleichung (b) genügt,

$$|\eta - y_0| \leqq A\,M < b.$$

Es liegt also in der Tat auch noch dieses von (x_k, y_k) ausgehende Stück von L innerhalb von R.

Die durch L dargestellte Funktion $\eta = \varphi(x)$ hat außer in den Treffpunkten eine stetige Ableitung; es ist ja für das von (x_k, y_k) ausgehende geradlinige Stück von L

$$\frac{d\eta}{dx} = f(x_k, y_k),$$

also konstant. Wenn wir die Zellenteilung von R so eng machen, daß innerhalb einer jeden Zelle die Schwankung von $f(x, y)$ [1]) kleiner bleibt als ε, so ist also für das gedachte geradlinige Stück

$$|f(x, \eta) - f(x_k, y_k)| < \varepsilon$$

und $\eta = \varphi(x)$ befriedigt folglich die Differentialgleichung (10*)

$$\frac{d\eta}{dx} = f(x, \eta) + \varDelta,$$

wo $|\varDelta| < \varepsilon$, d. h. η befriedigt die Differentialgleichung (10) bis auf einen Fehler, der kleiner ist als ε. Es seien nun η, η' irgend zwei stetige Funktionen mit gleichen Anfangswerten und mit, abgesehen von einzelnen Ausnahmepunkten, stetigen Ableitungen, die bis auf Fehler, die kleiner als ε sind, die Differentialgleichung (10) befriedigen, für die also die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dx} = f(x, \eta) + \varDelta, \quad |\varDelta| < \varepsilon$$

$$\frac{d\eta'}{dx} = f(x, \eta') + \varDelta', \quad |\varDelta'| < \varepsilon$$

gelten. Dann folgt aus diesen Gleichungen durch Integration — die ja trotz der etwa vorhandenen Ausnahmepunkte gestattet ist — und Subtraktion

$$(11) \qquad \eta' - \eta = \int_{x_0}^{x} (f(x, \eta') - f(x, \eta) + \varDelta' - \varDelta)\, dx.$$

Um diese Differenz abschätzen zu können, unterwerfen wir die Funktion $f(x, y)$ noch der sogenannten Lipschitzschen Bedingung, d. h. wir setzen voraus, daß ein positives N vorhanden ist, für das

$$(\mathrm{c}) \qquad |f(x, y) - f(x, y')| < N\,|y - y'|$$

ist, wenn die Punkte (x, y) und (x, y') innerhalb des Bereiches B gelegen sind. Bedeutet dann μ die obere Schranke von $|\eta' - \eta|$ für das Intervall $|x - x_0| < A$, so folgt aus (11) mit Rücksicht auf die Bedingung (c), daß für Werte von x, die diesem Intervall angehören,

$$|\eta' - \eta| \leq \int_{x_0}^{x_0 + A} (N\mu + 2\varepsilon)\, dx = N\mu A + 2\varepsilon A.$$

[1]) D. h. $|f(x, y) - f(x', y')|$ für irgend zwei innerhalb der gleichen Zelle gelegene Punkte (x, y) und (x', y').

und daher

$$\mu \leqq N\mu A + 2\varepsilon A$$

ist. Wenn wir also jetzt dafür sorgen, daß A auch kleiner als $\frac{1}{N}$ ist, so haben wir

$$\mu < \frac{2\varepsilon A}{1 - AN}, \tag{12}$$

d. h. es wird der Unterschied $\eta' - \eta$ mit ε beliebig klein und zwar so, daß der Grenzwert von $\frac{\mu}{\varepsilon}$ für ein gegen Null abnehmendes ε unterhalb der angebbaren Größe

$$\frac{2A}{1 - AN}$$

verbleibt.

Lassen wir nunmehr ε gegen Null konvergieren und betrachten die Folge der zugehörigen Funktionen $\eta = \varphi(x)$, so wird also der Unterschied zwischen zwei beliebigen unter ihnen kleiner sein als ε multipliziert mit einer von x unabhängigen angebbaren Größe. Diese Funktionen nähern sich demnach einer Grenzfunktion $y = F(x)$ und zwar gleichmäßig, so lange x die Bedingung (b) erfüllt, in der jetzt A kleiner gewählt werden muß als die kleinste der drei Größen a, $\frac{b}{M}$, $\frac{1}{N}$. Die Grenzfunktion der stetigen Funktion $\varphi(x)$

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(x)$$

ist folglich selbst stetig, und es ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0}^{x} f(x, \eta)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, F(x))\, dx\text{[1]}.$$

[1] Nähert sich die Folge $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ stetiger Funktionen für ein gewisses Intervall $(a \ldots b)$ der Veränderlichen x gleichmäßig der Grenzfunktion $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x)$, so gilt:

1) $F(x)$ ist selbst stetig.

2) wenn $f(x, y)$ eine stetige Funktion von y ist, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x, \varphi_n(x)) = f(x, F(x))$, und zwar erfolgt die Annäherung von $f(x, \varphi_n(x))$ an $f(x, F(x))$ ebenfalls gleichmäßig, wie aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x, y)$ folgt,

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\, dx = \int_\alpha^\beta F(x)\, dx$, und ebenso $\lim\limits_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x, \varphi_n(x))\, dx$ $= \int_\alpha^\beta f(x, F(x))\, dx$, wenn das Integrationsintervall $(\alpha \ldots \beta)$ in dem Intervall $(a \ldots b)$ enthalten ist. Vergl. z. B. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie I (1912), S. 91 ff.

Aus der für jedes η geltenden Gleichung (10*) folgt durch Integration die Integralgleichung

$$\eta - y_0 = \int_{x_0}^{x} (f(x, \eta) + \Delta)\, dx, \quad |\Delta| < \varepsilon;$$

lassen wir hierin ε gegen Null konvergieren, so ergibt sich

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, F(x))\, dx.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $F(x)$ der Anfangsbedingung

$$F(x_0) = y_0$$

genügt, und durch Differentiation des Integrals nach der oberen Grenze, die erlaubt ist, da $F(x)$ und folglich auch $f(x, F(x))$ stetig ist,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x, F(x)),$$

so daß also $F(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (10) darstellt, die die Anfangsbedingung, für $x = x_0$ den Wert y_0 anzunehmen, erfüllt.

Damit sind wir von der Frage der angenäherten Lösung unserer Differentialgleichung (10) ausgehend, zu einem Existenzbeweis für die den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügende Lösung von (10) vorgedrungen. Es erübrigt noch, in bezug auf diese Lösung weitere Folgerungen zu ziehen; ehe wir aber dazu übergehen, seien noch einige geschichtliche Bemerkungen gemacht.

Die Frage der angenäherten Darstellung für die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung hat auch Euler in den Institutiones calculi integralis (vol. I, art. . 650 ff.) in der hier gegebenen Form behandelt, ohne sich jedoch mit der quantitativen Abschätzung des begangenen Fehlers zu beschäftigen. Der erste, der versucht hat, dies zu tun, war Cauchy in seinen (1823 gehaltenen) Vorlesungen an der Pariser École Polytéchnique[1]). Seine Betrachtungen wurden dann von R. Lipschitz (Lehrbuch der Analysis II, Bonn 1880, S. 500) vereinfacht und verschärft, indem Lipschitz hervorhob, daß die Funktion $f(x, y)$ außer den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit noch der Bedingung (c) unterworfen werden muß, einer Bedingung, die z. B. stets erfüllt ist, wenn $f(x, y)$ in dem Bereich B eine beschränkte partielle Ableitung nach y, besitzt, vorausgesetzt, daß die Begrenzung von B von einer Parallelen zur y-Achse in nicht mehr als zwei Punkten getroffen wird. Man hat nämlich dann nur auf die Differenz $f(x, y') - f(x, y)$ den Rolleschen Satz anzuwenden, um

[1]) A. L. Cauchy, Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées par l'Abbé Moigno, t. II, Paris 1844, 26. leçon, S. 385 ff.

zu erkennen, daß N gleich der oberen Schranke von $\frac{\partial f}{\partial y}$ gewählt werden kann. Man bezeichnet die entwickelte Methode gewöhnlich als die Cauchy-Lipschitzsche. Die hier dargelegte Form stammt von Runge und de la Vallée Poussin[1]).

4. Eindeutige Bestimmung der Lösung. Abhängigkeit von den Anfangswerten und von Parametern. Lineare Differentialgleichung.

Aus der Abschätzungsformel (12) der vorigen Nummer, die für irgend zwei stetige Funktionen gilt, die der Differentialgleichung (10) bis auf Fehler von der Größe ε genügen, folgt nunmehr, daß der Unterschied zwischen einer solchen Funktion η und der Lösung $F(x)$ mit demselben Anfangswert y_0 mit ε beliebig klein wird, und zwar so, daß das Verhältnis

$$\frac{|F(x) - \eta|}{\varepsilon}$$

unterhalb einer angebbaren Größe bleibt. F kann nämlich als eine stetige Funktion angesehen werden, die der Differentialgleichung bis auf einen Fehler von der Größe 0 genügt, und damit ist zugleich gezeigt, daß die Lösung F durch ihren Anfangswert eindeutig bestimmt ist. Diese Bemerkung ist namentlich für die Anwendungen von Wichtigkeit; denn wenn z. B. eine physikalische Aufgabe die Bestimmung einer Funktion erfordert, die die Differentialgleichung (10) befriedigt und für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, so sind wir jetzt sicher, eben diese Funktion durch unsere Funktionen $\eta = \varphi(x)$ mit beliebiger Annäherung dargestellt und als Grenzwert dieser Funktionen für $\varepsilon \to 0$ bestimmt zu haben.

Da aus dem Integral $y = F(x, y_0)$ bei geeigneter Wahl von y_0 jede Lösung unserer Differentialgleichung hervorgeht, die für $x = x_0$ einen bestimmten Wert annimmt, so kann man, indem man x_0 fest, y_0 willkürlich läßt, die Funktion $F(x, y_0)$ als das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10) ansehen; dieses hängt also von der einen willkürlichen Konstanten y_0 ab.

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß der Satz von der eindeutigen Bestimmung des Integrals durch die Anfangsbedingung wesentlich daran geknüpft ist, daß für $f(x, y)$ die Lipschitzsche Bedin-

[1]) Siehe C. Runge, Mathem. Annalen, Bd. 44 (1894), S. 437 ff.; de la Vallée Poussin. Cours d'Analyse infinitésimale, T. II, 2e éd., Louvain et Paris 1912, S. 181 ff.

gung besteht. Dies zeigt das folgende von Peano[1]) herrührende Beispiel der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4yx^3}{y^2 + x^4},$$

wenn für $x = 0$ der Anfangswert $y = 0$ vorgeschrieben wird. Zunächst scheint der Punkt $x = 0$, $y = 0$ eine singuläre Stelle der Funktion $f(x, y)$ zu sein; beachtet man aber, daß

$$y^2 + x^4 - 2y\,x^2 = (y - x^2)^2,$$

also für alle reellen Werte von x und y

$$\left| \frac{2x^2y}{y^2 + x^4} \right| < 1$$

ist, so erkennt man, daß

$$\frac{4yx^3}{y^2 + x^4} = 2x \cdot \frac{2x^2y}{y^2 + x^4}$$

als Funktion der reellen Veränderlichen x, y für $x = 0$, $y = 0$ stetig und in jedem endlichen Gebiete $|x| < a$, $|y| < b$ beschränkt ist. Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ergibt sich, indem man $x^4 = \zeta$ setzt, leicht in der Form

$$y + C = \frac{\zeta}{y},$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, oder

$$x^4 = y^2 + Cy.$$

Wir erkennen daraus, daß y bei jedem Wert der Konstanten C für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annehmen kann, daß also durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$ unendlich viele Integralkurven hindurchgehen. Der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ist demnach eine singuläre Stelle der Differentialgleichung, nach der Bezeichnungsweise von Poincaré ein Sattelpunkt.

Das Auftreten dieses Sattelpunkts hängt nun damit zusammen, daß unsere Funktion $f(x, y)$ nicht für alle Werte $|x| < a$, $|y| < b$ die Lipschitzsche Bedingung in bezug auf y erfüllt. Nach ihr müßte für $|x| < a$, $|y'| < b$, $|y''| < b$

$$\left| \frac{4y''x^3}{y''^2 + x^4} - \frac{4y'x^3}{y'^2 + x^4} \right| < N\,|y'' - y'|$$

sein, wo N eine endliche, angebbare Zahl bedeutet. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man z. B. $y' = 0$ nimmt, da dann

$$\frac{4x^3}{y''^2 + x^4}$$

für hinreichend kleine Werte von x und y'' beliebig groß gemacht werden kann.

---

[1]) G. Peano, Mathem. Annalen Bd. 37 (1890), S. 182.

Aus der zu Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung können wir noch eine Reihe weiterer wichtiger Folgerungen ziehen.

Wir untersuchen zunächst die Lösung $y = F(x, y_0)$ als Funktion des Anfangswertes y_0. Es bedeute y'_0 einen anderen zu x_0 gehörigen Anfangswert und $y' = F(x, y'_0)$ die entsprechende Lösung. Dann ist $y' - (y'_0 - y_0)$ eine stetige Funktion von x mit dem Anfangswerte y_0 für $x = x_0$, die die Differentialgleichung (10) bis auf den Fehler

$$f(x, y') - f(x, y' - (y'_0 - y_0))$$

befriedigt, und dieser Fehler ist vermöge der Lipschitzschen Bedingung sicher kleiner als

$$N \,|\, y'_0 - y_0 \,|.$$

Wenn also $|\, y'_0 - y_0 \,| < \delta$ ist, so wird nach unserer Bemerkung der Unterschied zwischen $y' - (y'_0 - y_0)$ und y mit δ beliebig klein; das gleiche gilt also auch für $y' - y$ und zwar bleibt das Verhältnis $\dfrac{y' - y}{y'_0 - y_0}$ mit gegen Null abnehmendem δ unterhalb einer angebbaren Grenze.

Die Lösung $F(x, y_0)$ ist folglich eine stetige Funktion ihres für $x = x_0$ vorgeschriebenen Anfangswertes y_0.

Auf Grund dieses Ergebnisses können die vorstehenden, bisher nur für das Intervall $|\, x - x_0 \,| \leqq A$ bewiesenen Sätze, auf alle diejenigen Wertepaare (x, y) erweitert werden, für die der Punkt (x, y) innerhalb des Bereiches B verbleibt. In der Tat können wir das für $|\, x - x_0 \,| \leqq A$ erklärte Integral $F(x, y_0)$ über dieses Intervall hinaus fortsetzen, indem wir als neuen Anfangswert den Wert von $F(x, y_0)$ in einem der Endpunkte dieses Intervalls wählen, und können so fortfahren, so lange nicht die Begrenzung des Bereiches B erreicht wird. Die Werte x, für die dies eintritt, sind im allgemeinen singuläre Stellen der so definierten Integralfunktion, und es ist eine der wichtigsten Aufgaben, diese Stellen und damit den Geltungsbereich der durch unser Verfahren gewonnenen Integralfunktion zu bestimmen. Im allgemeinen hängen die singulären Punkte eines Integrals von den Anfangswerten ab; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2,$$

für die der Bereich B aus allen im Endlichen gelegenen Punkten der (x, y)-Ebene besteht, die der Anfangsbedingung $y = y_0$ für $x = x_0$ genügende Lösung

$$y = F(x, y_0) = \frac{-1}{x - x_0 - \dfrac{1}{y_0}},$$

die nur bis zu der Stelle $x_1 = x_0 + \frac{1}{y_0}$ hin Werte annimmt, die zu den Punkten (x, y) im Innern von B gehören. Die Abhängigkeit der singulären Stelle x_1 von den Anfangswerten (x_0, y_0) liegt hier klar zutage.

Besonders einfach gestaltet sich die Auffindung der singulären Stellen, wenn ihre Lage nicht von der Wahl der Anfangswerte abhängt; das ist z. B. offenbar der Fall für die gewöhnliche Quadratur

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

aber es trifft auch für die allgemeine lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot g(x) + f(x)$$

zu. Wie wir später sehen werden, kann diese Gleichung auf die sogenannte homogene

$$\text{(a)} \qquad \frac{dy}{dx} = y \cdot g(x)$$

zurückgeführt werden, deren Lösung sich sofort in der Form

$$y = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(x)\, dx}$$

ergibt. Danach sind also singuläre Stellen die x-Werte, wo $g(x)$ aufhört, stetig und beschränkt zu sein.

Man kann das aber auch direkt aus dem Cauchy-Lipschitzschen Verfahren entnehmen. Es sei nämlich für $|x - x_0| < a$ die Funktion $g(x)$ stetig und beschränkt, $|g(x)| < M$, b kann einen beliebigen endlichen Wert bedeuten; die Lipschitzsche Bedingung

$$|f(x, y) - f(x, y')| < N\,|y - y'|$$

ist für $N = M$ erfüllt. A ist also kleiner als a und kleiner als $\frac{1}{M}$ zu nehmen.

Setzen wir $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ voraus, so folgt aus den Differenzengleichungen

$$y_k - y_{k-1} = (x_k - x_{k-1})\, g(x_{k-1})\, y_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

die Ungleichung

$$|y_k| < |y_{k-1}|\,(1 + \overline{M}(x_k - x_{k-1})),$$

und da für $a > 0$, $1 + a < e^a$ ist,

$$|y_k| < |y_{k-1}|\, e^{M(x_k - x_{k-1})} < |y_0|\, e^{M(x_k - x_0)}.$$

Die $|y_k|$ bleiben also unter einer angebbaren Schranke, so lange dies für $g(x)$ zutrifft. Ferner kann für das von (x_k, y_k) ausgehende geradlinige Stück der approximierenden gebrochenen Linie

$$\eta - y_k = (x - x_k)\, g\,(x_k) \cdot y_k, \qquad x_k \leqq x \leqq x_{k+1},$$

die oben mit Δ bezeichnete Größe, d. h. für unseren Fall

$$\Delta = g(x) \cdot \eta - g(x_k) \cdot y_k$$

dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden, indem man die Differenz $x_{k+1} - x_k$ hinreichend klein macht; es ist nämlich

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leqq |y_k - \eta|\,|g(x_k)| + |g(x_k) - g(x)|\,|\eta| \\ &\leqq |x - x_k|\,g(x_k)^2\,|y_k| + |g(x_k) - g(x)|\,|\eta|. \end{aligned}$$

Wir erzielen also in diesem Falle Konvergenz, wenn wir, vorerst unter Beschränkung auf das Intervall $|x - x_0| < A$, zwischen x_0 und x Teilpunkte $x_1, x_2, \ldots$ so einschalten, daß jedes Teilintervall $x_k - x_{k-1}$ kleiner als ε ist, und dann ε gegen Null konvergieren lassen. Für die so entstehende Lösung ergibt sich dann durch Multiplikation der Gleichungen

$$\text{(b)} \quad y_k = y_{k-1}\,(1 + (x_k - x_{k-1})\,g(x_{k-1})) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und Übergang zur Grenze im Punkte $x = x_n$ der Wert

$$(*) \quad y = F(x, y_0) = y_0 \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{k=1}^{n} (1 + (x_k - x_{k-1})\,g(x_{k-1})).$$

Die Erweiterung auf das ganze Intervall $|x - x_0| < a$ erfolgt dann wie im allgemeinen Falle.

Die Analogie des Grenzausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (*) mit dem zur Definition des bestimmten Integrals dienenden Grenzwert einer Summe (siehe oben S. 8) fällt in die Augen. Wir wollen daher setzen

$$\widehat{\int_{x_0}^{x}} (1 + g(x)dx) = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{k=1}^{n} (1 + (x_k - x_{k-1})\,g(x_{k-1})),$$

wobei das Zeichen $\widehat{\int}$ [1]) ähnlich an das Produkt Π erinnern soll, wie das gewöhnliche Integralzeichen $\int$ an die Summe Σ. Freilich kann das eingeführte Symbol in diesem Falle durch den Ausdruck $e^{\int_{x_0}^{x} g(x)\,dx}$ ersetzt werden; wir werden aber später eine Verallgemeinerung kennen lernen, wo eine solche Zurückführung auf bekannte Zeichen nicht mehr möglich ist.

Hier wollen wir nur noch den besonderen Fall anmerken, wo $g(x)$ den konstanten Wert 1 besitzt. Teilen wir dann das Intervall $(x_0 \ldots x)$ in n gleiche Teile und lassen n ins Unendliche wachsen, so ergibt sich

$$\widehat{\int_{x_0}^{x}} (1 + dx) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x - x_0}{n}\right)^n,$$

also die übliche Definition der Exponentialfunktion $e^{x - x_0}$.

Zum allgemeinen Falle der Gleichung (10) zurückkehrend, wollen wir noch untersuchen, wie die Lösung dieser Gleichung von Parametern

[1]) Wir lesen es: Produktintegral.

$\alpha, \beta, \ldots$ abhängt, die in $f(x, y)$ auftreten mögen. Es sei also $f(x, y)$ eine stetige Funktion von gewissen Parametern $\alpha, \beta, \ldots$, was wir in der Bezeichnung $f(x, y; \alpha, \beta, \ldots)$ zum Ausdruck bringen, und es möge auch vom Anfangswerte y_0 das gleiche gelten. Wird dann das Wertesystem $(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$ auf einen Bereich B beschränkt, innerhalb dessen die stetige Funktion $f(x, y; \alpha, \beta, \ldots)$ noch der Lipschitzschen Bedingung in bezug auf y genügt, so behaupten wir, daß die Lösung $y = F(x, y_0)$, die ja jetzt als Funktion $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ erscheint, auch eine stetige Funktion von $\alpha, \beta, \ldots$ sein wird. Es sei nämlich $\alpha', \beta', \ldots$ ein Wertesystem der Parameter, das dem Bereich B angehört, und für das $|\alpha' - \alpha|, |\beta' - \beta|, \ldots$ kleiner als δ sind, y_0' der diesem Wertesystem entsprechende Anfangswert, und $y' = F(x, \alpha', \beta', \ldots)$ das zugehörige Integral. Dann hat $y' - (y_0' - y_0)$ für $x = x_0$ den Anfangswert y_0 und befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \alpha, \beta, \cdots)$$

bis auf den Fehler

$$f(x, y'; \alpha', \beta', \cdots) - f(x, y' - (y_0' - y_0); \alpha, \beta, \cdots),$$

der nach unseren Voraussetzungen mit δ beliebig klein gemacht werden kann. Es kann folglich nach unserer Bemerkung auch der Unterschied zwischen $y' - (y_0' - y_0)$ und y und demnach auch die Differenz $|y' - y|$ mit δ beliebig klein gemacht werden.

5. Verallgemeinerung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Wir wenden uns nun zu dem Falle eines Systems von n Differentialgleichungen erster Ordnung und denken uns auch hier die dieses System darstellenden Gleichungen (8) der Nr. 2 (S. 5) in bezug auf die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ aufgelöst, so daß also Gleichungen von der Form

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = f_\lambda(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

vorliegen. Die Übertragung der in den Nrn. 3 und 4 durchgeführten Betrachtung auf diese allgemeinere Aufgabe bereitet keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten, so daß wir uns damit begnügen können, das für das System (13) geltende Ergebnis auszusprechen:

Es sei B ein Bereich im Gebiete der reellen Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$, innerhalb dessen die Funktionen f_λ stetig und beschränkt sind. Es mögen ferner die Lipschitzschen Bedingungen bestehen, d. h. es seien positive

Konstanten $N_1, \ldots N_n$ vorhanden derart, daß für irgend zwei Punkte $(x, y_1, \ldots, y_n)$ und $(x, y_1', \ldots, y_n')$ von B

$$(14) \qquad | f_\lambda(x, y_1, \cdots, y_n) | - f_\lambda(x, y_1', \cdots, y_n') | < N_\lambda \sum_{i=1}^{n} | y_i' - y_i |$$

ist. Ist dann $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ irgendein Punkt von B, so besitzt das System (13) stets ein System von Lösungen

$$y_\lambda = F_\lambda(x; x_0, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

die für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_\lambda = y_\lambda^{(0)}$ annehmen und stetige Funktionen der Werte $x, x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ sind. Dieses Lösungssystem ist durch die Angabe der Anfangswerte eindeutig bestimmt.

Wir bemerken, daß die Lipschitzschen Bedingungen (14) in einem konvexen Bereiche B [1]) stets erfüllt sind, wenn die Funktionen f_λ in bezug auf die $y_1, \ldots, y_n$ beschränkte partielle Ableitungen besitzen.

Spezialisieren wir dieses Resultat auf den Fall einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

aus der wir uns wieder die n-te Ableitung in der Form

$$(15) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ausgerechnet denken wollen, so ist diese Differentialgleichung dem Systeme

$$(15\text{a}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \quad \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \quad \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

von n Differentialgleichungen äquivalent (vgl. Nr. 2, S. 4). Nach dem oben für ein solches System ausgesprochenen Satze gibt es also ein System von Funktionen

$$y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1},$$

das für $x = x_0$ die Werte

$$y = y_0, \quad y_1 = y_0', \quad y_2 = y_0^{(2)}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y_0^{(n-1)}$$

annimmt, in der Nähe von x_0 stetig ist, dem Systeme von Differentialgleichungen (15a) Genüge leistet und durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, daß die sonst willkürlich zu wählenden reellen Anfangswerte

$$x_0, y_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$$

---

[1]) Ein Bereich B heißt konvex, wenn er mit zwei Punkten auch alle Punkte ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke enthält.

einem Bereiche B angehören, innerhalb dessen die Funktion

$$f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})$$

stetig und beschränkt ist und der Lipschitzschen Bedingung genügt.

Die Differentialgleichung n-ter Ordnung (15) besitzt folglich ein und nur ein eindeutiges und stetiges Integral, das für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und dessen $n - 1$ erste Ableitungen ebenfalls für $x = x_0$ die Werte $y'_0, y^{(2)}_0, \ldots, y^{(n-1)}_0$ annehmen. Für ein festes x_0 und willkürliche

$$y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-1)}_0$$

ist dieses Integral das allgemeine; das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung hängt demnach von n willkürlichen Konstanten ab.

Auf Grund der in den drei letzten Nummern angegebenen Resultate können wir jetzt die in der Theorie der Differentialgleichungen zu lösende Aufgabe schärfer fassen. An Stelle der allgemein gehaltenen Aufgabe, die sämtlichen Funktionssysteme zu finden, die ein gegebenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen, setzen wir die folgende:

Es ist dasjenige Funktionssystem zu bestimmen, das einem gegebenen Systeme von Differentialgleichungen Genüge leistet und gewisse vorgeschriebene Anfangsbedingungen erfüllt, und zu erforschen, wie dieses Funktionssystem von der unabhängigen Variabeln, den gegebenen Anfangswerten, und von den in den Koeffizienten eventuell noch auftretenden Parametern abhängt.

Für das System homogener linearer Differentialgleichungen, das eine Verallgemeinerung der linearen Differentialgleichung (a), S. 16, darstellt

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \cdots + y_n a_{n1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \cdots + y_n a_{nn}, \end{cases}$$

wo die a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ Funktionen von x sind, haben wir zur Bestimmung des Lösungssystems, das für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_1 = y_1^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)}$ annimmt, das System von Differenzengleichungen

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} y_k^{(1)} - y_k^{(0)} = (x_1 - x_0) \sum\limits_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(0)} a_{\lambda k}(x_0), \\ y_k^{(2)} - y_k^{(1)} = (x_2 - x_1) \sum\limits_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(1)} a_{\lambda k}(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Wenn die Funktionen a_{ik} von x für $|x - x_0| < a$ stetig und beschränkt sind, $|a_{ik}| < \overline{M}$, so sind die Lipschitzschen Bedingungen (14) wieder von selbst erfüllt, wenn man alle N_λ gleich M annimmt. A bedeute die kleinere der beiden Größen a und $\frac{1}{\overline{M}n}$, und es sei $|x - x_0| < A$; wir wählen ferner $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$. Es ist dann

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k^{(1)}| < \{1 + n\,\overline{M}(x_1 - x_0)\} \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}|,$$

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k^{(2)}| < \{1 + n\,\overline{M}(x_2 - x_1)\} \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(1)}|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also

$$\text{(III)} \qquad \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(\nu)}| < \prod_{\mu=1}^{\nu} \{1 + n\overline{M}(x_\mu - x_{\mu-1})\} \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}|$$

und mit Rücksicht auf $1 + \alpha < e^\alpha$ für $\alpha > 0$,

$$\text{(IIIa)} \qquad \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(\nu)}| < e^{(x_\nu - x_0)\overline{M}n} \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(0)}|.$$

Die $y_1^{(\nu)}, \ldots, y_n^{(\nu)}$ bleiben also unterhalb einer angebbaren Schranke, solange die a_{ik} selbst beschränkt sind.

Wir definieren nun n Funktionen $\eta_k = \varphi_k(x)$ so, daß zwischen x_ν und $x_{\nu+1}$

$$(*) \qquad \eta_k - y_k^{(\nu)} = (x - x_\nu) \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(\nu)} a_{\lambda k}(x_\nu) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Dann befriedigen die η_k das Differentialsystem

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \frac{d\eta_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda a_{\lambda k}(x) + \Delta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo in dem Intervall $(x_\nu \ldots x_{\nu+1})$

$$\Delta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(\nu)} a_{\lambda k}(x_\nu) - \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda a_{\lambda k}(x)$$

ist. Nun ist aber

$$|\Delta_k| \leq \sum_{\lambda=1}^{n} \{|y_\lambda^{(\nu)} - \eta_\lambda|\,|a_{\lambda k}(x_\nu)| + |a_{\lambda k}(x_\nu) - a_{\lambda k}(x)|\,|\eta_\lambda|\},$$

also mit Rücksicht auf $(*)$ und auf $|a_{\lambda k}(x)| < \overline{M}$

$$|\Delta_k| \leq (x - x_\nu)n\overline{M}^2 \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(\nu)}| + \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\lambda k}(x_\nu) - a_{\lambda k}(x)|\,|\eta_\lambda|.$$

Aus den Ungleichungen (III) und aus der Stetigkeit der $a_{\lambda k}(x)$ folgt jetzt, daß die $|\Delta_k| < \varepsilon$ gemacht werden können, indem man $x_{\nu+1} - x_\nu$ hinreichend klein wählt. Indem man also die $x_1, x_2, \ldots$ hinreichend eng aneinander rückt, kann man bewirken, daß die Funktionen $\eta_k = \varphi_k(x)$

das System (I*) mit $|\Delta_k| < \varepsilon$ befriedigen; d. h. diese Funktionen genügen dem System (I) bis auf einen Fehler, der kleiner ist als ε.

Hat man nun zwei Funktionssysteme η_k, η'_k mit denselben Anfangswerten für $x = x_0$, die das System (I) bis auf einen Fehler, der kleiner als ε ist, befriedigen, d. h. ist

$$\frac{d\eta_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda\, a_{k\lambda}(x) + \Delta_k, \qquad \frac{d\eta'_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta'_\lambda\, a_{\lambda k}(x) + \Delta'_k, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

so folgt durch Integration, die ja trotz der Unstetigkeit der $\frac{d\eta_k}{dx}, \frac{d\eta'_k}{dx}$ an den Stellen $x_1, x_2, \ldots$ erlaubt ist,

$$|\eta_k - \eta'_k| < \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\lambda k}(x)|\, |\eta_\lambda - \eta'_\lambda| + |\Delta_k - \Delta'_k| \right) dx.$$

Bedeutet dann μ die obere Schranke der Differenzen $|\eta_k - \eta'_k|$ in dem Intervall $(x_0 \ldots x_0 + A)$, so haben wir

$$\mu < \int_{x_0}^{x_0+A} (M n \mu + 2\varepsilon)\, dx,$$

also da $A < n M$ sein sollte,

$$\mu < \frac{2\varepsilon A}{1 - nMA}, \quad \frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2A}{1 - nMA},$$

d. h. die Unterschiede $\eta'_k - \eta_k$ werden mit ε beliebig klein und zwar so, daß für ein gegen Null abnehmendes ε die Grenzwerte $\frac{\eta'_k - \eta_k}{\varepsilon}$ unterhalb einer angebbaren Größe bleiben.

Daraus folgt nun, daß sich die $\eta_k = \varphi_k(x)$ mit Verkleinerung der Abstände zwischen den Punkten $x_0, x_1, \ldots$ bestimmten, stetigen Grenzfunktionen

$$y_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_k(x)$$

gleichmäßig annähern, von denen man (wie oben in den Nrn. 3 und 4) leicht zeigt, daß sie dem System (I) genügen, für $x = x_0$ die vorgeschriebenen Anfangswerte annehmen und durch diese eindeutig bestimmt sind. Die Fortsetzung über das ganze Intervall $|x - x_0| < a$ bereitet jetzt keine Schwierigkeiten und wir haben also den Satz:

Innerhalb eines Intervalls der x-Achse, wo die $a_{\lambda k}(x)$ stetig und beschränkt sind, hat das durch das Cauchy-Lipschitzsche Verfahren bestimmte Lösungssystem $y_1, \ldots, y_n$ der linearen homogenen Differentialgleichungen (I) keine singuläre Stelle.

Eine eingehendere Untersuchung der durch ein System (I) definierten Funktionen wird an späterer Stelle gegeben.

6. Beispiel aus der analytischen Mechanik[1]).

Die Art und Weise, wie man sich die Auflösung einer Differentialgleichung zu denken hat, wird vielleicht am deutlichsten hervortreten, wenn wir zunächst für ein Beispiel diese Auflösung zu geben suchen. Wir wählen hierzu ein Problem der analytischen Mechanik, um zu zeigen, daß gerade die angegebene Fassung des Integrationsproblems auch diejenige ist, die gewählt werden muß, wenn es sich darum handelt, den Verlauf einer Bewegung auf Grund der diese Bewegung charakterisierenden Differentialgleichungen zu beschreiben.

Bedeutet φ den Winkel, den ein einfaches (in einer Ebene schwingendes) mathematisches Pendel von der Länge l zur Zeit t mit der Vertikalen einschließt, so genügt φ nach den Lehren der Mechanik der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{16}$$

wo g die Konstante der Gravitation bedeutet. Diese Differentialgleichung ist von der zweiten Ordnung; zur völligen Bestimmung eines Integrals hat man demnach als Anfangsbedingungen die Werte von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ zu einer bestimmten Zeit anzugeben. Man muß also, um die Bewegung des Pendels völlig zu bestimmen, die Lage des Pendels und die Winkelgeschwindigkeit des pendelnden Punktes in einem Zeitmomente kennen.

Das Pendel möge sich zur Zeit $t = 0$ gerade in der Vertikalen befinden, und in diesem Momente sei die Winkelgeschwindigkeit gleich v_0, dann haben wir also die Anfangsbedingungen

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = v_0, \quad \text{für } t = 0. \tag{17}$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (16) mit $2\frac{d\varphi}{dt}$, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{2g}{l}\frac{d\cos\varphi}{dt},$$

[1]) Vergl. Durège, Elliptische Funktionen, (1862), 3. Aufl. (1878), S. 11 ff.; Kirchhoff, Mechanik, (1876), S. 18 ff.

und indem man auf beiden Seiten nach t integriert,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{18}$$

wo α die Integrationskonstante bedeutet. Setzen wir $t = 0$, so ergibt sich zufolge der Anfangsbedingungen (17)

$$v_0^2 = \frac{2g}{l}(1 - \cos\alpha),$$

woraus

$$\cos\alpha = 1 - \frac{lv_0^2}{2g}. \tag{19}$$

Hieraus können wir schon einen Schluß ziehen, der die Art, wie der Verlauf der Bewegung von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt, hervortreten läßt. In der Tat ist:

$$\begin{aligned} &\text{für } lv_0^2 < 2g, && |\alpha| < \frac{\pi}{2}, \\ &\text{,,} \quad 2g < lv_0^2 < 4g, && |\alpha| > \frac{\pi}{2}, \\ &\text{,,} \quad lv_0^2 > 4g, && \alpha \text{ imaginär}. \end{aligned}$$

Wenn α reell und $|\alpha| \leqq \pi$ ist, so haben wir für $\varphi = \pm\alpha$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \operatorname{sgn}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\operatorname{sgn}(\pm\alpha)\,^{1}),$$

die Funktion φ von t nimmt also für $\varphi = \pm\alpha$ einen extremen Wert (Maximum oder Minimum) an. D. h. wenn α reell ist, oder, wenn lv_0^2, die sogenannte Zentrifugalkraft zur Zeit des Durchgangs durch die Vertikale, $t = 0$, nicht größer ist als die vierfache Schwere, schwingt das Pendel zwischen zwei Extremlagen hin und her, und zwar bleibt es unterhalb der durch den Aufhängepunkt gehenden Horizontalen, wenn die Zentrifugalkraft im Momente $t = 0$ kleiner ist als die doppelte Schwere, während es sich im entgegengesetzten Falle über diese Horizontale erhebt. Wenn α imaginär ist, d. h. wenn die Zentrifugalkraft zur Zeit des Durchgangs durch die Vertikale größer ist als die vierfache Schwere, schwingt das Pendel im ganzen Kreise herum, da in diesem Falle eine Extremlage nicht existiert.

Lassen wir den letzteren Fall beiseite, beschränken uns also auf das hin und her schwingende Pendel, so folgt aus (18)

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}},$$

[1]) Durch sgn α bezeichnen wir in üblicher Weise das Vorzeichen einer reellen Größe α.

also durch Integration und mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen (17)

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}},$$

oder wenn wir durch die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = x \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

eine neue Integrationsvariable x einführen und überdies

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = k$$

setzen,

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Das hier auftretende Integral ist ein elliptisches; wir werden an späterer Stelle (Nr. 29) zeigen, daß, wenn in der Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

x als Funktion von u aufgefaßt wird, diese Funktion eine für jeden Wert von u eindeutige ist. Man bezeichnet diese Funktion nach Jacobi als

$$x = \operatorname{sinam} u$$

und sagt, sie gehöre zum Modul k, was man auch in der Bezeichnung hervortreten lassen kann, indem man

$$x = \operatorname{sinam}(u;\ \operatorname{mod} k)$$

schreibt. Wir finden also

$$x = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{sinam}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\,;\ \operatorname{mod}\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

und hieraus für φ den expliziten Ausdruck

$$\varphi = 2\arcsin\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sinam}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\,;\ \operatorname{mod}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

der uns φ als Funktion der unabhängigen Variabeln t, des Anfangswertes v_0 (mit dem α durch die Gleichung (19) verknüpft ist) und endlich des in den Koeffizienten der Differentialgleichung auftretenden Parameters l (der Pendellänge) charakterisiert.

Wir können aus diesem Beispiele aber noch eine Einsicht gewinnen, die für die ganze Richtung unserer weiteren Studien von entscheidendem Einflusse sein wird. Die Geschichte der Wissenschaft lehrt, daß eine vollständige Erkenntnis der Eigenschaften der Funktion sinam u nur dadurch erlangt werden konnte, daß man diese Funktion für komplexe Werte der Veränderlichen u studierte. In der Tat besitzt diese Funktion, wie

Abel und Jacobi gezeigt haben, für reelle Werte von α stets eine reelle und eine imaginäre Periode, und nur auf Grund dieser Eigenschaft (der sogenannten doppelten Periodizität) gelang es Jacobi, eine Darstellung jener Funktion in der Form des Quotienten zweier beständig konvergenter Reihen zu finden, die für die Wertberechnung in hervorragender Weise geeignet ist. Was nun für die einfache Differentialgleichung (16) gilt, wird auch für kompliziertere Differentialgleichungen gültig bleiben; man wird eine tiefere Einsicht in die Natur der Integralfunktion nur dann gewinnen und für die Wertberechnung brauchbare Darstellungen dieser Funktion nur dann geben können, wenn man die Veränderlichen nicht auf reelle Werte beschränkt. Wir werden darum im folgenden die durch Differentialgleichungen verknüpften Veränderlichen als komplexe Veränderliche auffassen und von diesem Standpunkte aus zunächst in eine systematische Entwicklung der Eigenschaften der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (10) Nr. 3 (S. 6) definierten Funktionen eintreten.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Untersuchung der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

7. Differentialgleichungen erster Ordnung für komplexe Werte der Veränderlichen. Aufstellung einer Potenzreihe, die der Differentialgleichung formal genügt.

In der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

werde x als komplexe Variable aufgefaßt. Dann genügt es nicht, wie in dem Falle eines reellen x, die Funktion $f(x, y)$ als stetige und beschränkte Funktion von x und y aufzufassen, wir werden vielmehr annehmen müssen, daß $f(x, y)$ eine monogene (analytische) Funktion der beiden komplexen Veränderlichen x, y sei.

Es möge (x_0, y_0) ein Wertepaar der komplexen Variabeln x, y bedeuten, in dessen Umgebung $f(x, y)$ eindeutig, endlich und stetig, oder wie wir (dem Sprachgebrauche der französischen Analysten folgend) sagen wollen, holomorph ist; dann ist $f(x, y)$ in dieser Umgebung, d. h. für

$$|x - x_0| \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b,$$

nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ entwickelbar:

$$f(x, y) = A_{00} + A_{10}(x - x_0) + A_{01}(y - y_0) + A_{20}(x - x_0)^2$$
$$+ A_{11}(x - x_0)(y - y_0) + A_{02}(y - y_0)^2 + \cdots,$$

und die Koeffizienten dieser Reihe sind nach dem Taylorschen Satze durch die Gleichungen

$$A_{00} = f(x_0, y_0),\ A_{10} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0},\ A_{01} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0},\ A_{20} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0}, \ldots$$

bestimmt.

Es entsteht nun die Frage, ob es eine Lösung der Differentialgleichung (1) gibt, die für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt, und die in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph, d. h. nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar ist. Wir setzen

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

in die Differentialgleichung ein und versuchen zunächst, ob sich die Koeffizienten dieser Reihe so bestimmen lassen, daß sie der Differentialgleichung formal Genüge leistet.

Der Einfachheit wegen setzen wir

$$x - x_0 = \xi, \quad y - y_0 = \eta,$$

dann wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

$$f(x, y) = f(\xi + x_0, \eta + y_0) = \varphi(\xi, \eta),$$

und $\varphi(\xi, \eta)$ ist in der durch die Ungleichungen

$$|\xi| \leqq a, \quad |\eta| \leqq b$$

definierten Umgebung der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ in der Form

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k} \xi^{\lambda} \eta^{k}$$

darstellbar. Die Differentialgleichung (1) verwandelt sich in

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta), \tag{2}$$

und wir haben die Koeffizienten der Reihe

$$\eta = c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + \cdots$$

so zu bestimmen, daß sie die Differentialgleichung (2) formal befriedigt.

Wir bilden, indem wir gliedweise differentiieren,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = c_1 + 2\, c_2 \xi + 3\, c_3 \xi^2 + \cdots,$$

dann muß

$$c_1 + 2\, c_2 \xi + 3\, c_3 \xi^2 + \cdots = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k} \xi^{\lambda} (c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \cdots)^k \tag{3}$$

sein. Denken wir uns die auf der rechten Seite stehende Reihe nach Potenzen von ξ geordnet:

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_0 + \varphi_1 \xi + \varphi_2 \xi^2 + \cdots,$$

so sind die Koeffizienten φ_ν aus den $A_{\lambda k}$ und den c_k allein durch die Operationen der Addition und Multiplikation zusammengesetzt, und zwar ist offenbar φ_0 von den c_k ganz unabhängig, während φ_1 nur von c_1, φ_2 nur von c_1, c_2, allgemein φ_ν nur von den

$$c_1, c_2, \ldots, c_\nu$$

abhängt. Wir setzen darum der Deutlichkeit wegen

$$\varphi_\nu = \varphi_\nu(c_1, c_2, \ldots, c_\nu).$$

Aus (3) folgt dann

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} c_1 = \varphi_0 = A_{00}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\,\varphi_1(c_1), \quad c_3 = \frac{1}{3}\,\varphi_2(c_1, c_2), \ldots, \\ \qquad c_{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1}\,\varphi_\nu(c_1, c_2, \ldots, c_\nu), \ldots, \end{array}\right.$$

so daß also jedes c_k durch die vorhergehenden in eindeutiger Weise bestimmt ist. Die mit diesen c_k gebildete Reihe

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\xi^k$$

befriedigt formal die Differentialgleichung (2); es handelt sich nun noch um die Frage ihrer Konvergenz.

Das hier eingeschlagene Verfahren, die Koeffizienten einer Reihe so zu bestimmen, daß diese Reihe einer vorgelegten Differentialgleichung genügt, wurde schon von den Analysten des achtzehnten Jahrhunderts vielfach angewandt und als die Methode der unbestimmten Koeffizienten bezeichnet. Nur hielten jene Analysten dadurch das Problem der Integration für erledigt, indem sie nicht bezweifelten, daß ein wohlbestimmter analytischer Ausdruck auch stets einen Sinn habe.

Nun werden wir in den nächsten Nummern beweisen, daß die formal hergestellte Reihe (5) stets in einer gewissen Umgebung von $\xi = 0$ konvergiert, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, die Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$ holomorph ist. Es ist aber keineswegs überflüssig, die Frage der Konvergenz zu erörtern, weil es vorkommen kann, daß eine Differentialgleichung formal durch eine nach positiven ganzen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreitende Reihe befriedigt wird, und daß diese Reihe trotzdem für keinen von Null verschiedenen Wert dieser Veränderlichen konvergiert. Wir zeigen dies an dem auch historisch bemerkenswerten Beispiel der Differentialgleichung

$$(\mathrm{I})\qquad x^2\,\frac{dy}{dx} + y - x = 0.$$

Hier ist $f(x, y) = \frac{1}{x^2}\,(x - y)$ in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ nicht holomorph; es läßt sich aber trotzdem eine Reihe von der Form

$$y = c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots$$

formal so bestimmen, daß sie die Differentialgleichung (I) befriedigt. In der Tat findet man nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten ohne weiteres

$$c_1 = 1, \; c_1 + c_2 = 0, \; 2\,c_2 + c_3 = 0, \; 3\,c_3 + c_4 = 0, \ldots$$

also

$$c_1 = 1, \; c_2 = -1, \; c_3 = 2!, \; c_4 = -3!, \ldots$$

und somit für y die Reihe

$$y = x - x^2 + 2!\, x^3 - 3!\, x^4 + \cdots,$$

die offenbar für jeden von Null verschiedenen Wert von x divergiert [1]). — Die Frage, welche Bedeutung man solchen divergenten Reihen beilegen kann, wird uns später beschäftigen, vorerst wenden wir uns zur Untersuchung der Konvergenz unserer Reihe (5).

8. Konvergenz der aufgestellten Reihe. Calcul des limites.

Die Untersuchung der Konvergenz der Reihe (5) scheint auf den ersten Augenblick ziemlich kompliziert, da ihre Koeffizienten einem nicht leicht zu übersehenden Gesetze gehorchen. Es ist aber Cauchy, der diese Art der Fragestellung systematisch eingeführt hat, gelungen, diese Untersuchung in äußerst einfacher Weise zu erledigen, indem er sich einer Methode bedient, die er als calcul des limites (Rechnung mit Grenzen) bezeichnet, und die seitdem in allen Zweigen der Analysis, wo es sich um Konvergenzbeweise für Ausdrücke, die nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten hergestellt sind, handelt, mit großem Erfolge angewandt wird.

Das Wesen der Cauchyschen Methode besteht im folgenden:

Wir denken uns an die Stelle der die Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ darstellenden Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k}\, \xi^{\lambda}\, \eta^{k}$$

eine andere Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{\lambda k}\, \xi^{\lambda}\, \eta^{k} = \psi(\xi, \eta)$$

gesetzt, die ebenso wie die ursprüngliche für

$$|\, \xi\, | \leqq a, \quad |\, \eta\, | \leqq b$$

konvergiert, und deren Koeffizienten $B_{\lambda k}$ positive, reelle Größen von der Beschaffenheit sind, daß

$$B_{\lambda k} \geqq |\, A_{\lambda k}\, |. \qquad (\lambda, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nach Poincaré bezeichnen wir diese Beziehung zwischen den beiden Reihen, oder zwischen den durch diese Reihen dargestellten Funktionszweigen $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ durch das Symbol

$$\varphi(\xi, \eta) \ll \psi(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta).$$

[1]) Siehe zu diesem Beispiel Euler, De seriebus divergentibus, Novi Comm. Acad. Petrop. 5, 1760, S. 205; Gauß, Werke X, 1 (1917), S. 382.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\xi} = \psi(\xi, \mathfrak{y}), \tag{6}$$

und setzen darin für $\mathfrak{y}$ die Reihe ein:

$$\mathfrak{y} = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \gamma_3 \xi^3 + \cdots. \tag{7}$$

Wir bestimmen die γ_ν so, daß diese Reihe der Differentialgleichung (6) formal Genüge leistet; dann setzen sich die γ_ν aus den $B_{\lambda k}$ offenbar in derselben Weise zusammen, wie die c_ν aus den $A_{\lambda k}$, und da die $B_{\lambda k}$ reell und positiv sind, werden die γ_ν ebenfalls reell und positiv ausfallen. Da überdies die $B_{\lambda k}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden $|A_{\lambda k}|$, so folgt ferner, daß auch

$$\gamma_\nu \geqq |c_\nu|. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Es ist also, wenn wir die Poincarésche Bezeichnung auch auf den Fall von Reihen, deren Konvergenz noch nicht feststeht, übertragen,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \xi^\nu \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \xi^\nu, \qquad (\xi).$$

Wenn nun bekannt wäre, daß die für $\mathfrak{y}$ aufgestellte Reihe in einer gewissen Umgebung von $\xi = 0$ konvergiert, so folgte hieraus, daß auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$$

in derselben Umgebung von $\xi = 0$ konvergent sei; und dies ist der Grundgedanke des calcul des limites.

Die Wahl der Funktion $\psi(x, y)$, der sogenannten Majorante, kann nun auf mannigfache Art erfolgen. Wir geben zuvörderst das klassische Verfahren von Cauchy [1]).

9. Konvergenzbeweis nach Cauchy.

Es sei allgemein

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k} \xi^\lambda \eta^k$$

eine im Gebiete $|\xi| \leqq a$, $|\eta| \leqq b$ unbedingt konvergente Reihe; dann ist $\varphi(\xi, \eta)$ in diesem Gebiete eine holomorphe Funktion der komplexen Veränderlichen ξ, η. Bedeutet M die obere Schranke der Werte, die

[1]) A. L. Cauchy, Oeuvres, I. Serie, T. VII. Vergl. Briot et Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, Cah. 36, S. 136ff.; ferner Picard, Traité d'Analyse, T. II, (1905), S. 258, 346; H. Poincaré, Mécanique céleste, T. I, S. 48, u. a. m.; vgl. die Literaturangaben, Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. II, A 4a. S. 201 ff.

$|\varphi(\xi, \eta)|$ für $|\xi| = a, |\eta| = b$ anzunehmen vermag, so ist nach einem elementaren Satz der Funktionentheorie [1])

$$(8) \qquad |A_{\lambda k}| < \frac{M}{a^\lambda b^k} \qquad (\lambda, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wenden wir diesen Satz auf die in den vorigen Nummern betrachtete Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ an, so ergibt sich also

$$\varphi(\xi, \eta) \ll M \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^\lambda}{a^\lambda} \frac{\eta^k}{b^k}, \qquad (\xi, \eta).$$

Die auf der rechten Seite stehende Doppelreihe konvergiert offenbar für

$$|\xi| < a, \; |\eta| < b$$

und stellt, da sie in das Produkt zweier geometrischer Reihen zerfällt, die Funktion

$$(9) \qquad \psi(\xi, \eta) = \frac{M}{\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)\left(1 - \frac{\eta}{b}\right)}$$

dar. Dies ist die Cauchysche Majorante.

Wir haben nun die Differentialgleichung zu betrachten:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\xi} = \psi(\xi, \mathfrak{y}) = \frac{M}{\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{y}}{b}\right)},$$

die wir in der Form

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{y}}{b}\right) d\mathfrak{y} = \frac{M \cdot d\xi}{1 - \frac{\xi}{a}}$$

schreiben. In dieser Form sind, wie man zu sagen pflegt, die Veränderlichen getrennt; wir können also auf beiden Seiten der Gleichung integrieren, und finden so

$$\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{y}^2}{2b} = -M\,a \log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right) + \text{const.}$$

als allgemeines Integral. Dasjenige partikuläre Integral, das für $\xi = 0$ verschwindet, ergibt sich in der expliziten Form

$$\mathfrak{y} = b - b\sqrt{1 + \frac{2\,M\,a}{b} \log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)},$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist, und dieses Integral ist offenbar in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorph, also durch eine Reihe von der Form

[1]) Cauchy beweist diesen Satz mit Hilfe seines Integrals. Weierstraß hat einen elementaren Beweis dafür gegeben. Siehe für eine Veränderliche z. B. bei Knopp, Funktionentheorie I, Sammlung Göschen, 1918, S. 84.

$$\mathfrak{y} = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \cdots$$

darstellbar, die in einer gewissen Umgebung von $\xi = 0$ konvergiert und mit der durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten erhaltenen Reihe (7) übereinstimmt. Um den Radius des Konvergenzkreises genau zu bestimmen, suchen wir denjenigen Wert ϱ von ξ auf, für den der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen

$$1 + \frac{2Ma}{b} \log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right) = 0$$

ist; wir finden

$$\varrho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right),$$

also ϱ positiv und kleiner als a. Da für $|\xi| < a$ der Logarithmus

$$\log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)$$

holomorph ist, konvergiert die Reihe für $\mathfrak{y}$ jedenfalls für

$$|\xi| < \varrho.$$

Nach dem Prinzipe des calcul des limites (Nr. 8, S. 31) konvergiert die der Differentialgleichung (2) (Nr. 7, S. 28) formal genügende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k$$

ebenfalls für Werte von ξ, die der Ungleichung

$$|\xi| < \varrho$$

Genüge leisten. Diese Grenze ist im allgemeinen keine genaue, d. h. die Reihe kann auch noch für Werte von ξ konvergieren, deren absoluter Betrag größer ist als ϱ; uns genügt es aber, nachgewiesen zu haben, daß die aufgestellte Reihe allemal innerhalb eines Kreises konvergent ist, dessen Radius eine stets positive nur von a, b und M abhängige Größe ist.

Für die der ursprünglichen Differentialgleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

genügende Reihe

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

haben wir demnach die Konvergenzbedingung

$$|x - x_0| < \varrho,$$

wobei noch hervorzuheben wäre, daß der Ausdruck ϱ und ebenso der wahre Radius des Konvergenzkreises im allgemeinen auch von den Anfangswerten x_0, y_0 abhängt, da ja M, a, b sich mit x_0, y_0 ändern.

Die für y aufgestellte Reihe ist der Art ihrer Herleitung nach als solche eindeutig bestimmt, sie stellt innerhalb ihres Konvergenzbereichs ein den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügendes, holomorphes

Integral der Differentialgleichung dar, und es kann auch kein von diesem verschiedenes in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphes Integral der Differentialgleichung geben, das für $x = x_0$ gleich y_0 wird, da ein solches jedenfalls nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar sein müßte, und demnach die Koeffizienten dieser Entwicklung mit den $c_1, c_2, \ldots$ übereinstimmen müßten.

Wir haben also den Satz, den man gewöhnlich als das Cauchysche Existenztheorem zu bezeichnen pflegt:

Für ein beliebig gewähltes System von Anfangswerten x_0, y_0, in dessen Umgebung der Differentialquotient von y nach x holomorph ist, gibt es stets eine und nur eine in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphe Integralfunktion y, die für $x = x_0$ gleich y_0 wird.

Eine Abänderung der Cauchyschen Majorante ergibt sich[1]), indem man an Stelle von M die obere Schranke G der $| A_{\lambda k}\, a^\lambda\, b^k |$ nimmt. Die Existenz einer solchen oberen Schranke folgt unmittelbar aus der unbedingten Konvergenz der Reihe $\Sigma\Sigma A_{\lambda k}\, \xi^\lambda\, \eta^k$ für $|\xi| = a, |\eta| = b$, die ja zur Folge hat, daß $\lim\limits_{\lambda+k\to\infty} A_{\lambda k}\, a^\lambda\, b^k = 0$ ist. Man kann nun direkt an Stelle des Cauchyschen Ausdrucks (9)

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)\left(1 - \frac{\eta}{b}\right)}$$

als Majorante wählen. Man kann aber auch statt mit $\psi_1(\xi, \eta)$ mit

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)^2\left(1 - \frac{\eta}{b}\right)}$$

arbeiten, was den Vorteil mit sich bringt, daß die entstehende Hilfsdifferentialgleichung

$$d\mathfrak{y}\left(1 - \frac{\mathfrak{y}}{b}\right) = \frac{G\, d\xi}{\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)^2}$$

die der Anfangsbedingung $\mathfrak{y} = 0$ für $\xi = 0$ genügende algebraische Lösung

$$\mathfrak{y} = b - \left(b^2 - 2Gb\, \frac{\xi}{1 - \frac{\xi}{a}}\right)^{1/2}$$

[1]) Vergl. für das Folgende: P. Stäckel, Jahresbericht der D. M.-V. 16 (1917), S. 219.

besitzt. Als Konvergenzgrenze findet man durch Nullsetzen des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen

$$|\xi| < \frac{ab}{b + 2aG},$$

eine Grenze, die im allgemeinen kleiner ist, als die sich bei Anwendung von $\psi_1(\xi, \eta)$ ergebende

$$|\xi| < a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ga}}\right)$$ [1].

Die Majorante $\psi_2(\xi, \eta)$ bietet aber andererseits den Vorteil, daß man bei ihrer Anwendung der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen ganz entraten kann, so daß der mit Hilfe von $\psi_2(\xi, \eta)$ geführte Konvergenzbeweis auch für analytische Funktionen $\varphi(\xi, \eta)$ der reellen Veränderlichen ξ, η anwendbar ist.

10. Singuläre Anfangswerte. Die Ableitung wird so unendlich, daß ihr reziproker Wert holomorph bleibt [2].

Wir wollen nun annehmen, daß die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ in unserer Differentialgleichung (1) in der Umgebung der Anfangswerte $x = x_1, y = y_1$ nicht mehr holomorph ist.

Es sei zunächst $f(x, y)$ für $x = x_1, y = y_1$ unendlich, aber so beschaffen, daß der reziproke Wert $\frac{1}{f(x, y)}$ in der Umgebung dieser Stelle holomorph, also in der Form

$$\frac{1}{f(x, y)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{\lambda k}(x - x_1)^{\lambda} (y - y_1)^k$$

entwickelbar ist. Wir setzen dann

$$\frac{1}{f(x, y)} = A_0(x) + A_1(x) \cdot (y - y_1) + A_2(x) \cdot (y - y_1)^2 + \cdots,$$

wo also $A_0(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x), \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_1$ fortschreitende Reihen bedeuten, und jedenfalls

$$A_0(x_1) = 0$$

[1]) Da $G \leqq M$ ist, ist diese Konvergenzgrenze unter Umständen größer als das durch die Cauchysche Majorante gelieferte ϱ.

[2]) Vergl. für diese und die folgende Nummer Briot et Bouquet a. a. O. S. 146; Picard, Traité II (1905), S. 367 ff.; Painlevé, Leçons sur la théorie anal. des équat. differ. (Paris 1897), S. 19—20; u. a. m.

ist. Es sind dann zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich in der Reihe der Koeffizienten

$$A_1(x),\ A_2(x),\ A_3(x),\ \ldots$$

einer zu finden ist, der für $x = x_1$ einen von Null verschiedenen Wert hat, oder nicht. Im letzteren Falle, wo alle Koeffizienten $A_k(x)$ eine Potenz von $x - x_1$ als Faktor enthalten, hat also $f(x, y)$ die Eigenschaft, für $x = x_1$ unabhängig von y unendlich zu werden; es ist dann etwa

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{(x - x_1)^k}$$

wo der reziproke Wert von $\varphi(x, y)$ in der Umgebung von $x = x_1$, $y = y_1$ holomorph ist. Der Punkt $x = x_1$ wird dann für jedes Integral der Differentialgleichung (1) als singulärer Punkt fungieren; wir lassen diesen Fall vorläufig beiseite.

Es sei also allgemein

$$(10) \qquad A_1(x_1) = 0,\ A_2(x_1) = 0, \ldots,\ A_{\lambda-1}(x_1) = 0,$$
$$A_\lambda(x_1) \neq 0,$$

oder, da ja

$$A_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{1}{f(x, y)}\right)\right]_{y=y_1}$$

ist, für $x = x_1$, $y = y_1$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\right), \ldots, \frac{\partial^{\lambda-1}}{\partial y^{\lambda-1}}\left(\frac{1}{f}\right)$$

gleich Null, aber

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial y^\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)$$

von Null verschieden.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$
$$= A_0(x) + A_1(x)\cdot(y - y_1) + A_2(x)\cdot(y - y_1)^2 + \cdots,$$

dann besitzt diese zufolge des Existenztheorems ein in der Umgebung von $y = y_1$ holomorphes Integral, das für $y = y_1$ den Wert $x = x_1$ annimmt, und dessen erste Ableitung

$$\frac{dx}{dy}$$

für $y = y_1$ jedenfalls verschwindet. Da ferner

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{f}\right) + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{f}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{f}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\right)\frac{d^2x}{dy^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist, so verschwinden für $y = y_1$, $x = x_1$ auch noch die höheren Ableitungen von x nach y bis zur λ-ten einschließlich, während

$$\frac{d^{\lambda+1}x}{dy^{\lambda+1}}$$

für $y = y_1$ einen von Null verschiedenen Wert c_1 besitzt. Nach dem Taylorschen Satze lautet also die Entwicklung des definierten Integrals in der Umgebung von $y = y_1$:

$$x = x_1 + c_1(y - y_1)^{\lambda+1} + c_2\,(y - y_1)^{\lambda+2} + \cdots, \quad c_1 \neq 0.$$

Hieraus folgt:

$$x - x_1 = (y - y_1)^{\lambda+1}\,(c_1 + c_2\,(y - y_1) + \cdots)$$

und, indem wir beiderseits die $(\lambda + 1)$-te Wurzel ausziehen,

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} = (y - y_1)\,(c_1 + c_2(y - y_1) + \cdots)^{\frac{1}{\lambda+1}}.$$

Nun ist der Ausdruck

$$(c_1 + c_2\,(y - y_1) + \cdots)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

in der Umgebung von $y = y_1$ holomorph, da ja $c_1 \neq 0$ ist, und folglich in der Form

$$\gamma_1 + \gamma_2(y - y_1) + \cdots, \quad \gamma_1 = c_1^{\frac{1}{\lambda+1}} \neq 0.$$

darstellbar; wir finden also

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} = \gamma_1(y - y_1) + \gamma_2(y - y_1)^2 + \cdots$$

Nach dem aus den Elementen der Funktionentheorie bekannten Satze über die Umkehrung einer Potenzreihe (Satz über die inverse Funktion) [1]) ergibt sich hieraus, daß $y - y_1$ nach positiven ganzen Potenzen der auf der linken Seite stehenden Größe

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

entwickelbar ist, wir haben also

[1]) Siehe z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I (1921) S. 190.

$$(11)\quad y - y_1 = \delta_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} + \delta_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \cdots, \quad \delta_1 = \frac{1}{\gamma_1} \neq 0,$$

und auf diese Weise $\lambda + 1$ Integrale der Differentialgleichung (1), die für $x = x_1$ den Wert y_1 annehmen. Bedeutet in der Formel (11)

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

den Hauptwert dieser $(\lambda + 1)$-wertigen Größe, d. h.

$$e^{\frac{1}{\lambda+1} \log (x - x_1)},$$

wo $\log (x - x_1)$ denjenigen Wert des Logarithmus darstellt, der für reell positives $x - x_1$ reell ist, so gehen die übrigen λ Integrale aus dem eindeutig bestimmten Integrale (11) hervor, indem man an die Stelle von

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

den Wert

$$\varepsilon^k (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

setzt, wo ε die komplexe $(\lambda + 1)$-te Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\lambda+1}}$$

bedeutet. D. h. mit anderen Worten, die gedachten $\lambda + 1$ Integrale entstehen aus einem von ihnen, indem man die Variable x λ-mal geschlossene Umläufe um den Punkt $x = x_1$ vollziehen läßt; dieser Punkt ist also für jene Integrale ein Verzweigungspunkt, und zwar in der von Riemann eingeführten Terminologie ein algebraischer Verzweigungspunkt λ-ter Ordnung.

Im allgemeinen wird es, wenn $x = x_1$ ein beliebiger Wert der unabhängigen Variabeln x ist, stets Werte y_1 von y geben, für die $f(x_1, y)$ so unendlich wird, daß der reziproke Wert

$$\frac{1}{f(x, y)}$$

in der Umgebung von $x = x_1, y = y_1$ holomorph bleibt; bedeutet z. B. $f(x, y)$ eine rationale Funktion von y, deren Nenner $h(x, y)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von y ist, so tritt dies für die n Wurzeln der Gleichung

$$h(x_1, y) = 0,$$

ein, vorausgesetzt, daß sich unter diesen Wurzeln keine befindet, für die bei $x = x_1$ auch der Zähler von $f(x, y)$ verschwindet. Es wird also im allgemeinen für ein beliebiges $x = x_1$ mindestens zwei Lösungen der Differentialgleichung geben, die in x_1 einen algebraischen Verzweigungspunkt besitzen.

Dagegen sind diejenigen x-Werte, für die $f(x, y)$ unabhängig von y unendlich wird, stets diskrete Punkte, die man bei Kenntnis der Funktion $f(x, y)$ von vornherein aussondern kann.

11. Untersuchung des Falles, wo die Integralfunktion selbst unendlich wird.

Wir fragen nunmehr nach einem Integral y, das für einen vorgeschriebenen Wert von x einen unendlich großen Wert erhält. Wir setzen dann in der Differentialgleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

an die Stelle von y

$$y = \frac{1}{z}$$

und erhalten auf diese Weise für z die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 f\left(x, \frac{1}{z}\right) = f_1(x, z). \tag{12}$$

Es möge dann $x = x_1$ ein Wert sein, von der Beschaffenheit, daß die Funktion $f_1(x, z)$ in der Umgebung von $x = x_1$, $z = 0$ entweder selbst holomorph ist, oder daß sie für dieses Wertepaar so unendlich wird, daß ihr reziproker Wert holomorph bleibt, während

$$\left[\frac{\partial^\lambda}{\partial z^\lambda}\left(\frac{1}{f_1(x, z)}\right)\right]_{\substack{x=x_1\\ z=0}} \neq 0 \tag{13}$$

ist. Wenn $f_1(x, z)$ für $x = x_1$, $z = 0$ selbst holomorph ist, so gibt es nach dem Existenztheoreme ein in der Umgebung von $x = x_1$ holomorphes und für $x = x_1$ verschwindendes Integral der Differentialgleichung (12):

$$z = c_1 (x - x_1) + c_2 (x - x_1)^2 + \cdots,$$

für das allerdings auch noch gewisse erste Koeffizienten

$$c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$$

verschwinden können, während c_k von Null verschieden ist. Dann ist in der Umgebung von $x = x_1$

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{z} &= \frac{1}{c_k (x - x_1)^k + c_{k+1} (x - x_1)^{k+1} + \cdots} \\ &= (x - x_1)^{-k} [\delta_0 + \delta_1 (x - x_1) + \cdots], \end{aligned}$$

d. h. das für $x = x_1$ unendlich werdende Integral der Differentialgleichung (1) wird mit $(x - x_1)^k$ multipliziert in $x = x_1$ holomorph, es besitzt also in diesem Punkte einen Pol (außerwesentlich singuläre Stelle) k-ter Ordnung.

Wenn $f_1(x, z)$ für $x = x_1$, $z = 0$ so unendlich wird, daß

$$\frac{1}{f_1(x, z)}$$

holomorph bleibt und λ die kleinste Zahl ist, für die (13) besteht, so ist. nach den Ergebnissen der vorigen Nummer, in der Umgebung von $x = x_1$.

$$z = \gamma_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} + \gamma_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \cdots, \quad \gamma_1 \neq 0,$$

wir haben also für das in $x = x_1$ unendlich werdende Integral von (1) die Entwicklung

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{z} &= \frac{1}{\gamma_1(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} + \gamma_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \cdots} \\ &= (x - x_1)^{-\frac{1}{\lambda+1}} (\delta_0 + \delta_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &\quad + \delta_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \cdots), \end{aligned}$$

d. h. $x = x_1$ ist für dieses Integral zugleich ein Verzweigungspunkt λ-ter Ordnung und eine Unendlichkeitsstelle; wir sagen in diesem Falle, y besitze in $x = x_1$ eine algebraische Unendlichkeitsstelle von der Ordnung $\frac{1}{\lambda + 1}$.

In allen bisher betrachteten Fällen ist das Integral in der Umgebung des betreffenden Wertes der unabhängigen Variabeln nach positiven und negativen ganzen oder gebrochenen Potenzen des Inkrements entwickelbar, negative Potenzen können aber stets nur in endlicher Anzahl auftreten. Wir sagen kurz, das Integral habe in diesen Fällen den Charakter einer algebraischen Funktion, oder kürzer, es verhalte sich algebroid [1]).

12. Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern. Unität.

Die Lösung y unserer Differentialgleichung (1) der Nr. 7

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

die in der Umgebung des Wertes x_0, wo sie den Wert y_0 annehmen soll. holomorph oder allgemeiner algebroid ist, hängt selbst noch von diesen

[1]) Die Rechtfertigung für diese Bezeichnung ergibt sich daraus, daß eine algebraische Funktion stets ein derartiges Verhalten zeigt.

Anfangswerten ab. Beim Übergange von (1) zu der Form (2) (Nr. 7, S. 28) wird

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta) = f(\xi + x_0, \eta + y_0),$$

so daß also x_0, y_0 in $\varphi(\xi, \eta)$ als Parameter auftreten. Wir fragen darum zunächst allgemein, wie die Lösung der Differentialgleichung (2) von gewissen Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots$ abhängt, wenn $\varphi(\xi, \eta)$ eine z. B. für kleine Werte der $\mu_1, \mu_2, \ldots$ holomorphe Funktion dieser Parameter ist. Es bedeutet keine erhebliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $\varphi(\xi, \eta)$ als von einem Parameter μ abhängig ansehen und uns auf Werte von μ beschränken, die in der Umgebung des Punktes $\mu = 0$ gelegen sind, also die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta, \mu) \tag{2*}$$

betrachten, wo φ eine für $|\xi| \leq a$, $|\eta| \leq b$, $|\mu| \leq r$ holomorphe Funktion der drei Veränderlichen ξ, η, μ bedeuten soll. Wir fragen, wie die in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphe Lösung

$$\eta = c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \cdots \tag{5*}$$

sich als Funktion von μ in der Umgebung von $\mu = 0$ verhält. Wie man sieht, handelt es sich hier um die Übertragung der in der Nr. 4 für das reelle Gebiet angestellten Untersuchungen auf das Gebiet der komplexen Veränderlichen.

Denken wir uns die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ mit Hilfe der Differentialgleichung berechnet:

$$c_1 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_0 = \varphi(0, 0, \mu), \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)_0 \varphi(0, 0, \mu),$$

. . . .

so ergeben sie sich als für $|\mu| < r$ holomorphe Funktionen von μ. Daraus kann man aber noch nicht schließen, daß sich die Reihe (5*) in eine nach positiven ganzen Potenzen von ξ und μ fortschreitende Reihe umordnen läßt, die für hinreichend kleine Werte von ξ und μ unbedingt konvergiert. Es läßt sich dies aber durch eine besondere Untersuchung [1]) feststellen, und zwar am einfachsten durch eine Erweiterung der Majorantenmethode.

Es sei für $|\xi| = a$, $|\eta| = b$, $|\mu| = r$ M die obere Schranke der Werte von $|\varphi(\xi, \eta, \mu)|$; wir nehmen dann als Majorante die Funktion

$$\psi(\xi, \eta, \mu) = \frac{M}{\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)\left(1 - \frac{\eta}{b}\right)\left(1 - \frac{\mu}{r}\right)}$$

mit der zugehörigen Hilfsdifferentialgleichung

[1]) Siehe Poincaré, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste I (1896), S. 48.

$$(9^*) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\left(1-\frac{\eta}{b}\right)} \cdot \frac{M}{1-\frac{\mu}{r}},$$

die sich also von der in der Nr. 9 betrachteten nur dadurch unterscheidet, daß $\frac{M}{1-\frac{\mu}{r}}$ an die Stelle von M getreten ist. Wir nehmen nun ein $r' < r$ und setzen

$$M' = \frac{M}{1-\frac{r'}{r}},$$

dann konvergiert die Reihe η, die ja die für $\xi = 0$ verschwindende Lösung der Hilfsdifferentialgleichung (9*) darstellt, für das Gebiet

$$(*) \qquad \begin{cases} |\xi| < \varrho' = a\left(1-e^{-\frac{b}{2M'a}}\right), \\ |\mu| < r'. \end{cases}$$

Diese Reihe hat, wenn man sie nach Potenzen von ξ und μ ordnet, lauter positive Koeffizienten und diese sind, wie man sofort übersieht, nicht kleiner als die absoluten Werte der entsprechenden Koeffizienten der Reihe, die aus (5*) durch Umordnen nach Potenzen von ξ und μ hervorgeht. Daraus folgt also die unbedingte Konvergenz der so umgeordneten Reihe (5*) für das Gebiet (*), d. h. die für $\xi = 0$ verschwindende Lösung η unserer Differentialgleichung (2*) ist auch als Funktion des Parameters μ für hinreichend kleine Werte von μ holomorph. Natürlich gilt der entsprechende Satz auch, wenn $\varphi(\xi, \eta)$ mehrere Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots$ enthält und für hinreichend kleine Werte dieser Parameter holomorph ist.

Wir betrachten nun zuvörderst den Fall **regulärer Anfangswerte**, d. h. x_0, y_0 sei ein Wertepaar, in dessen Umgebung $f(x, y)$ holomorph ist. Es möge X in der Umgebung von x_0, Y in der Umgebung von y_0 so angenommen werden, daß $f(x, y)$ auch noch in der Umgebung von $x = X$, $y = Y$ holomorph ist. Das Integral von (1), das in der Umgebung von $x = X$ holomorph ist und für $x = X$ den Wert $y = Y$ annimmt, bezeichnen wir mit

$$y = F(x; X, Y).$$

Setzt man jetzt

$$x = \xi + X, \; y = \eta + Y,$$

so genügt η der Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f(\xi + X, \eta + Y),$$

deren rechte Seite in der Umgebung von $\xi = 0$, $X = x_0$, $Y = y_0$ holomorph ist, und die Lösung η, die für $\xi = 0$ verschwindet,

$$\eta = F(\xi + X;\ X, Y),$$

ist als Funktion von ξ in der Umgebung von $\xi = 0$, und nach dem oben bewiesenen Satze als Funktion der Parameter X, Y in der Umgebung von $X = x_0$, $Y = y_0$ holomorph. Also ist η nach positiven ganzen Potenzen von $x - X$, $X - x_0$, $Y - y_0$ entwickelbar und demnach $y = F(x;\ X, Y)$ in der Umgebung von $x = X$, $X = x_0$, $Y = y_0$ holomorph. Wegen

$$x - X = x - x_0 - (X - x_0)$$

ergibt sich, daß das Integral $y = F(x;\ X, Y)$ als Funktion der drei Veränderlichen x, X, Y holomorph ist, wenn x und X in der Umgebung von x_0, Y in der Umgebung von y_0 gelegen ist.

Sind x_1, y_1 singuläre Anfangswerte, etwa so beschaffen, daß $f(x_1, y_1)$ unendlich wird, aber $\frac{1}{f(x, y)}$ in der Umgebung von $x = x_1, y = y_1$ holomorph bleibt, ohne für $x = x_1$ unabhängig von y zu verschwinden (vgl. Nr. 10), dann hat die Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

ein in der Umgebung von $y = y_1$ holomorphes Integral

$$x = G(y;\ y_1, x_1),$$

das für $y = y_1$ den Wert $x = x_1$ annimmt. Liegt dann X in der Umgebung von x_1, Y in der Umgebung von y_1, so daß $\frac{1}{f(x, y)}$ auch noch in der Umgebung von $x = X$, $y = Y$ holomorph ist, so wird das Integral

$$\text{(II)} \qquad x = G(y;\ Y, X)$$

von (I), das für $y = Y$ den Wert $x = X$ annimmt und in der Umgebung von $y = Y$ holomorph ist, eine in der Umgebung von $y = y_1$, $Y = y_1$, $X = x_1$ holomorphe Funktion der drei Veränderlichen y, X, Y sein. Daraus ergibt sich durch Inversion der Gleichung (II), daß y in der Umgebung von $x = x_1$, $X = x_1$, $Y = y_1$ algebroides Verhalten zeigt. Ein ähnlicher Schluß gilt auch für ein Integral, das in $x = x_1$ unendlich wird, in der Umgebung von $x = x_1$, $X = x_1$, $Y = \infty$.

Wir machen nun Gebrauch von diesen Ergebnissen, indem wir die folgende besonders in der Angewandten Mathematik wichtige Frage behandeln.

Für den Fall regulärer Anfangsbedingungen x_0, y_0 haben wir gesehen, daß es ein und nur ein in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphes Integral gibt, das für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt. Wird man etwa durch eine Aufgabe der Angewandten Mathematik auf eine Funktion geführt, die der Differentialgleichung genügen und für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annehmen soll, so wird man nicht von vornherein sagen können, daß die gesuchte Funktion in der Umgebung von $x = x_0$ gerade holomorph sein muß. Es könnten also Zweifel entstehen, ob die von uns angegebene Lösung $F(x; x_0, y_0)$ auch wirklich die gesuchte Funktion darstellt. Es fragt sich also: gibt es etwa neben dem holomorphen Integral $F(x; x_0, y_0)$ noch nichtholomorphe Lösungen der Differentialgleichung (1), die dieselben regulären Anfangsbedingungen erfüllen?

Um diese Frage zu entscheiden, betrachten wir [1]) jetzt wieder zwei von x unabhängige Veränderliche X, Y, so daß $|X - x_0|$ und $|Y - y_0|$ hinreichend klein sind. Das in der Umgebung von $x = X$ holomorphe Integral

$$y = F(x; X, Y) = Y + c_1(x - X) + c_2(x - X)^2 + \cdots,$$

das für $x = X$ den Wert Y annimmt, ist nach dem Vorhergehenden als Funktion von x, X, Y in der Umgebung von $x = X$, $X = x_0$, $Y = y_0$ holomorph. Bedeutet x einen Wert, der in der Umgebung von x_0 liegt, und y den entsprechenden Wert von $F(x; X, Y)$, so gibt es nur ein in der Umgebung von x holomorphes Integral der Differentialgleichung (1), das im Punkte x gleich y wird, nämlich $F(x; X, Y)$; wir können also sagen, daß das in der Umgebung von x holomorphe Integral, das im Punkte x gleich y wird, im Punkte X den Wert Y annehmen muß. D. h. aber, es ist identisch

$$Y = F(X; x, y),$$

wenn in dieser Gleichung $y = F(x; X, Y)$ gesetzt wird.

Durch die Gleichung

$$\text{(III)} \qquad z = F(X; x, y)$$

führen wir nun in die Differentialgleichung (1) an Stelle von y die neue Veränderliche z ein. Da nach dem Vorhergehenden aus dieser Gleichung auch umgekehrt

$$\text{(IV)} \qquad y = F(x; X, z)$$

folgt, so haben wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F(x; X, z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x; X, z)}{\partial z} \frac{dz}{dx};$$

die transformierte Differentialgleichung lautet also

$$\text{(1a)} \qquad \frac{dz}{dx} \frac{\partial F(x; X, z)}{\partial z} = -\frac{\partial F(x; X, z)}{\partial x} + f(x, F(x; X, z)).$$

Für $z = Y$ ist das durch (IV) dargestellte y eine Lösung der Differentialgleichung (1), also liefert $z = Y$ auch eine Lösung von (1a), und zwar ist für diese Lösung, da Y von x unabhängig sein soll, $\frac{dz}{dx} = 0$, und folglich

[1]) Siehe Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (1897), S. 395; vergl. Horn, Differentialgleichungen, Sammlung Schubert L (1905), S. 29.

$$0 = -\frac{\partial F(x; X, Y)}{\partial x} + f(x, F(x; X, Y)).$$

Diese Gleichung ist für alle Werte Y in einer gewissen Umgebung der Stelle y_0 identisch erfüllt; wir können sie also auch hinschreiben, indem wir den Buchstaben z an die Stelle von Y setzen. Es ist also für alle z in einer gewissen Umgebung von y_0

$$0 = \frac{\partial F(x; X, z)}{\partial x} - f(x, F(x; X, z)),$$

d. h. die Differentialgleichung (1a) vereinfacht sich zu

(1b) $$\frac{dz}{dx}\frac{\partial F(x; X, z)}{\partial z} = 0.$$

Nun ist aber

$$Y = F(X; X, Y),$$

also ist

$$\frac{\partial F(x; X, Y)}{\partial Y}$$

für $x = X$ gleich Eins; diese partielle Ableitung verschwindet demnach nicht identisch. Mit Änderung der Bezeichnung, z für Y, ist also

$$\frac{\partial F(x; X, z)}{\partial z}$$

nicht identisch Null und die Gleichung (1b) vereinfacht sich folglich zu

(1c) $$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für jedes durch (III) gegebene z, wenn für y eine Lösung der Differentialgleichung (1) gesetzt wird, d. h. wenn sich aus

$$z = F(X; x, y),$$

oder was dasselbe heißt, aus

$$y = F(x; X, z)$$

y als Lösung der Differentialgleichung (1) ergeben soll, so muß z der Gleichung (1c) genügen, also k o n s t a n t sein. Dabei müssen aber natürlich x in der Umgebung von X und y, z in der Umgebung von Y liegen. Ist nun $y = \varphi(x)$ i r g e n d eine Lösung von (1), die für $x = X$ den Wert $y = Y$ in der Weise annimmt, daß, wenn x in der Umgebung von X liegt, auch y in der Umgebung von Y verbleibt, so ist die entsprechende Lösung

$$z = F(X; x, \varphi(x))$$

von (1b) wohldefiniert und konstant. Da aber für $x = X$

$$\varphi(X) = Y \text{ und } F(X; X, Y) = Y$$

ist, so ist dieser konstante Wert von z gleich Y. Es ist also

$$Y = F(X; x, \varphi(x)),$$

oder

$$\varphi(x) = F(x; X, Y)$$

d. h. $\varphi(x)$ i s t m i t d e m h o l o m o r p h e n I n t e g r a l i d e n t i s c h.

Wenn die Lösung $y = \varphi(x)$ für $x = X$ sich dem Werte $y = Y$ zwar unbegrenzt annähert, aber nicht die Bedingung erfüllt, daß einem x-Werte der Umgebung von X stets auch ein y-Wert der Umgebung von Y entspricht, so kann $\varphi(x)$ von dem holomorphen Integral verschieden sein, wie das folgende auf Fuchs[1]) zurückgehende Beispiel zeigt. Wir nehmen $f(x, y) = -\frac{y^2}{x}$, also die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x};$$

die in der Umgebung von $x = X_0$, wo $X_0 \neq 0$ ist, holomorphe und für X_0 verschwindende Lösung ist $y = 0$. Schreiben wir die Differentialgleichung aber in der Form

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x},$$

so folgt durch Integration

$$y = \frac{1}{\log x + C},$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Die holomorphe Lösung $y = 0$ entspricht dem Werte $C = \infty$. Es kann aber auch für einen endlichen Wert von C der Wert von y, der dem $x = X$ entspricht, beliebig nahe an die Null herangebracht werden, indem man x hinreichend oft den Punkt $x = 0$ umkreisen läßt, wodurch ja $|\log x + C|$ größer gemacht werden kann als jede beliebige positive Größe. Diese Bemerkung ist für die Angewandte Mathematik nicht ohne Bedeutung, da man ja in den Anwendungen häufig nicht scharf zu unterscheiden imstande ist, ob eine Größe einen gewissen Wert wirklich annimmt oder ihm nur beliebig nahekommt.

13. Analytische Fortsetzung.

Wir denken uns das den regulären Anfangswerten $x = x_0$, $y = y_0$ entsprechende, in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphe Integral

$$y = F(x; x_0, y_0) = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

der Differentialgleichung (1) hergestellt. Die durch die Cauchysche Majorante gelieferte Konvergenzgrenze (Nr. 9, S. 33)

$$|x - x_0| < \varrho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right)$$

liefert — wie wir bemerkt haben — nicht den genauen Konvergenzkreis

[1]) Fuchs, (1886) Werke II, S. 410ff.; vgl. Picard, Traité d'Analyse II (1905), S. 360.

der Reihe $F(x; x_0, y_0)$. Um diesen zu finden, kann man auf das Verfahren von Cauchy-Lipschitz zurückgreifen. Betrachten wir nämlich den Kreis K mit dem Mittelpunkt x_0, dessen Halbmesser der kleinere der beiden Werte a und $\frac{b}{M}$ ist, und einen beliebigen Punkt x, der im Innern von K liegt, so kann man sich x mit x_0 durch eine stetige Kurve, z. B. einen Halbstrahl verbunden denken und, wenn Θ das Azimut dieses Halbstrahls bedeutet, durch die Gleichung

$$t = e^{-\Theta i}(x - x_0)$$

die neue Veränderliche t in die Differentialgleichung einführen, die dann offenbar reelle Werte annimmt, wenn x auf jenem Halbstrahl verbleibt. Man kann dann ohne weiteres auf die so umgeformte Differentialgleichung das in der Nr. 3 auseinandergesetzte Verfahren von Cauchy-Lipschitz anwenden, um ein Integral herzustellen, das für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt; das Eingehen komplexer Größen bereitet — solange die Veränderliche reell bleibt — keinerlei Schwierigkeiten. Man findet auf diese Weise[1]) für jeden Wert x innerhalb von K einen zugehörigen Integralwert y; und da nach den Ergebnissen der Nr. 4 auf dem Halbstrahl (x_0, x) nur eine Lösung der Differentialgleichung existiert, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, so kann der so gefundene Integralwert y von dem Werte des holomorphen Integrals $F(x; x_0, y_0)$ nicht verschieden sein. Der Kreis K, dessen Halbmesser der kleinere der Werte a, $\frac{b}{M}$ ist, hat also die Eigenschaft, daß in seinem Innern die Reihe $F(x; x_0, y_0)$ konvergiert[2]); auf seiner Peripherie kann dann entweder ein Wert x liegen, für den die Reihe $F(x; x_0, y_0)$ nicht mehr unbedingt konvergent ist, oder doch ein Wert x, dem ein solcher y-Wert entspricht, daß für dieses Wertepaar x, y die Funktion $f(x, y)$ aufhört, holomorph zu sein. Einen solchen x-Wert bezeichnen wir als einen singulären Punkt des Integrals $F(x; x_0, y_0)$ der Differentialgleichung (1).

Man kann natürlich auf jedem einzelnen der von x_0 ausgehenden Halbstrahlen die Cauchy-Lipschitzsche Methode bis zu dem nächstgelegenen singulären Punkte des Integrals, der auf diesem Halbstrahle liegt, ausdehnen und erhält auf diese Weise eine Darstellung der Lösung, die nicht nur in dem Kreise K, sondern in einem K enthaltenden Bereiche B konvergiert, der die folgende Beschaffenheit hat:

Man denke sich auf jedem von x_0 ausgehenden Halbstrahl den zu x_0 am nächsten gelegenen singulären Punkt markiert und betrachte den

[1]) Vergl. Picard, Traité d'Analyse II (1905), S. 353.

[2]) Man sieht sofort, daß dieser Halbmesser stets größer ist, als die durch die Cauchysche Majorante gelieferte Konvergenzgrenze ϱ.

zwischen diesem Punkte und dem Unendlichen gelegenen Teil des Halbstrahls als einen Schnitt. Den nach Aussonderung dieser Schnitte verbleibenden Teil der Ebene nennt Mittag-Leffler den zu dem Punkte x_0 gehörigen Stern. Dieser bildet den Bereich B, innerhalb dessen das Verfahren von Cauchy-Lipschitz die Darstellung der Lösung unserer Differentialgleichung liefert.

Vom Standpunkte der Funktionentheorie und auch von dem der Anwendungen aus erweisen sich die Entwicklungen einer Funktion in Potenzreihen als die wichtigsten und brauchbarsten. Diese Entwicklungen konvergieren nach Cauchy stets in einem Kreise, der bis zu dem nächstgelegenen singulären Punkte reicht. Das ist auch der tiefere Grund dafür, daß man in der Theorie der Differentialgleichungen der Einführung komplexer Veränderlichen nicht entraten kann. Denn hat man z. B. die einfache Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ und entwickelt sie nach Potenzen von x, so ist, solange man sich auf reelle Werte von x beschränkt, nicht einzusehen, weshalb diese Entwicklung nur für Werte von x zwischen -1 und $+1$ konvergiert. Erst die Betrachtung von x als komplexe Veränderliche zeigt, daß auf der Peripherie des Kreises $|x| = 1$ die singulären Stellen $x = \pm i$ unserer Funktion liegen, und damit hat man nach dem Satze von Cauchy den wahren Grund für die Beschränktheit des Konvergenzbereichs der nach Potenzen von x fortschreitenden Reihe gefunden.

Wir gehen nunmehr auf die in der Umgebung von $x = x_0$ konvergente Reihe $F(x; x_0, y_0)$ zurück und stellen uns die Aufgabe, die Natur der durch diese Potenzreihe definierten monogenen Funktion zu erforschen.

Zunächst folgt aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung[1]), daß die aus der Reihe $F(x; x_0, y_0)$ durch Fortsetzung entstehenden Reihen ebenfalls der Differentialgleichung (1) genügen, wenn man sich $f(x, y)$ als Funktion von x auf demselben Wege fortgesetzt denkt. Ist z. B. $f(x, y)$ eine eindeutige Funktion von x und y, etwa eine rationale Funktion von y, mit in x eindeutigen Koeffizienten, so genügt die gesamte aus $F(x; x_0, y_0)$ entspringende monogene Funktion der Differentialgleichung (1).

Daraus ersieht man, daß sich in diesem Falle vermöge der Differentialgleichung (1) die analytische Fortsetzung der Reihe $F(x; x_0, y_0)$ in folgender Weise vollziehen läßt:

Da eine aus $F(x; x_0, y_0)$ durch Fortsetzung entstandene Reihe $\mathfrak{P}(x - \bar{x})$ ebenfalls der Differentialgleichung genügt, so stellt diese Reihe, wenn in der Umgebung der Stelle $x = \bar{x}$, $y = \mathfrak{P}(0)$ die Funktion $f(x, y)$ holomorph ist, das eindeutig bestimmte in der Umgebung von $x = \bar{x}$

[1]) Vergl. etwa Osgood, Funktionentheorie. S. 450.

holomorphe Integral von (1) dar, das für $x = \bar{x}$ den Wert $\mathfrak{P}(0)$ annimmt; man kann sich also zur Herstellung von $\mathfrak{P}(x - \bar{x})$ dieser Eigenschaft bedienen, und hat demnach auf dem Wege der analytischen Fortsetzung nur den Wert $\bar{y} = \mathfrak{P}(0)$ zu ermitteln. Der Fall, daß in der Umgebung eines solchen, auf dem Wege der analytischen Fortsetzung sich ergebenden Wertepaares $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ die Funktion $f(x, y)$ holomorph bleibt, ist der allgemeine. Es kann nämlich, da das Integral in der Umgebung von $x = \bar{x}$ holomorph ist, die Ableitung von y nach x keinesfalls unendlich werden, dagegen kann es sich ereignen, daß $f(x, y)$ für $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ den Wert der Ableitung in unbestimmter Form $\left(\text{etwa } \frac{0}{0}\right)$ erscheinen läßt, daß aber trotzdem für ein solches Wertepaar das Integral, das für $x = \bar{x}$ gleich $\bar{y}$ wird, in der Umgebung von $\bar{x}$ holomorph bleibt.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}}$$

die in der Umgebung von $\bar{x}$ holomorphe Lösung

$$y = \bar{y} + c(x - \bar{x}),$$

wo c eine beliebige Konstante bedeutet, und die Lösung nimmt für $x = \bar{x}$ den Wert $\bar{y}$ an. Daß es hier unendlich viele holomorphe Integrale gibt, die die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen erfüllen, liegt daran, daß die Anfangswerte $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ keine regulären sind. Der Punkt $x = \bar{x}$ wird im Sinne unserer Definition (siehe oben S. 47) als singulärer Punkt des Integrals y der Differentialgleichung $(*)$ zu bezeichnen sein, obwohl er kein singulärer Punkt der Funktion y ist. Man spricht in diesem Falle von einem außerwesentlich singulären Punkt des Integrals (vgl. weiter unten, Nr. 38).

Die Fortsetzung der Reihe $F(x; x_0, y_0)$ mit Hilfe der Differentialgleichung (1) gibt also, soweit der Holomorphiebereich von $f(x, y)$ reicht, dieselben Ergebnisse, wie die nach den üblichen Methoden ausgeführte analytische Fortsetzung. Wir wollen nun dazu übergehen, die verschiedenen Fälle zu erörtern, die zu Singularitäten der aus der Reihe $F(x; x_0, y_0)$ entspringenden monogenen Funktion Veranlassung geben können.

14. Feste und verschiebbare singuläre Punkte. Der Satz von Painlevé.

Der einfachste Fall wäre der, wo die Reihe $F(x; x_0, y_0)$ beständig konvergiert, wo also im Endlichen überhaupt keine singuläre Stelle vorhanden ist. Lassen wir diesen beiseite, so haben wir für $F(x; x_0, y_0)$

und ebenso für jede aus dieser Reihe durch analytische Fortsetzung entstehende einen endlichen Konvergenzhalbmesser, der im allgemeinen einerseits von der Natur der Funktion $f(x, y)$, andererseits aber auch von den Anfangswerten x_0, y_0 abhängen wird.

Es kann dann vorkommen, daß auf dem Konvergenzkreise der Reihe $F(x; x_0, y_0)$ oder einer aus ihr durch analytische Fortsetzung entstandenen Reihe ein singulärer Punkt x liegt, für den die Funktion $f(x, y)$ selbst aufhört holomorph zu sein. Um die Vorstelllung zu fixieren, nehmen wir an, daß $f(x, y)$ eine rationale Funktion

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

von y sei, wo also $g(x, y)$, $h(x, y)$ ganze Funktionen von y ohne gemeinsamen Teiler bedeuten mögen,

$$g(x, y) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\, y + \cdots + \alpha_n(x)\, y^n,$$
$$h(x, y) = \beta_0(x) + \beta_1(x)\, y + \cdots + \beta_m(x)\, y^m;$$

die Koeffizienten $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$ mögen beliebige monogene Funktionen von x sein. Dann sind in Betracht zu ziehen:

1. diejenigen x-Werte, für die eine oder mehrere der Funktionen $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$ eine Singularität darbieten;
2. die x-Werte, für die die Nennerfunktion $h(x, y)$ unabhängig von y verschwindet;
3. die Wertepaare x, y, für die Zähler und Nenner von $f(x, y)$ gleichzeitig verschwinden,
$$g(x, y) = 0, \; h(x, y) = 0,$$
deren x-Werte also der durch Elimination von y zwischen diesen beiden Gleichungen hervorgehenden Resultantengleichung genügen müssen.

Um auch die Fälle mit zu umfassen, wo die Funktion y selbst unendlich wird, stellen wir der Differentialgleichung (1) sogleich die Differentialgleichung (12) (Nr. 11, S. 39)

$$(1^*) \qquad \frac{dz}{dx} = -z^2 f\left(x, \frac{1}{z}\right) = f_1(x, z)$$

an die Seite, die aus (1) durch die Transformation $z = \dfrac{1}{y}$ hervorgeht; $f_1(x, z)$ ist wieder eine rationale Funktion von z. Wir haben dann weiter als singuläre Punkte anzusehen:

4. Punkte, für die die Nennerfunktion von $f_1(x, z)$ unabhängig von z verschwindet, und
5. x-Werte, für die Zähler und Nenner von $f_1(x, 0)$ gleichzeitig verschwinden, falls solche vorhanden sind.

Diesen Punkten reiht sich unter Umständen noch der Punkt $x = \infty$ an; um festzustellen, wie sich $f(x, y)$ und $f_1(x, z)$ für $x = \infty$ verhalten, hat man in den Differentialgleichungen (1) und (1*) $t = \frac{1}{x}$ als neue unabhängige Veränderliche einzuführen und für die transformierten Gleichungen den Punkt $t = 0$ zu untersuchen.

Die Punkte der eben aufgezählten Arten — wir wollen sie generell mit ξ bezeichnen — sind im allgemeinen singuläre Stellen aller Integrale von (1); sie können aus der Form der Funktion $f(x, y)$ unmittelbar abgelesen werden und haben mit den Anfangswerten x_0, y_0 des gerade betrachteten Integrals nichts zu tun. Wir nennen sie die festen Singularitäten, oder die singulären Stellen der Differentialgleichung.

Hat man z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x - \xi)^2},$$

aus der sich

$$y = \text{const. } e^{-\frac{1}{x-\xi}}$$

ergibt, so ist der Punkt ξ eine solche feste Singularität der oben unter 2. beschriebenen Art. Das gleiche gilt für $x = 0$ in dem Beispiel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}\,y}{x},$$

dessen Lösung die Form hat:

$$y = \text{const. } x^{\sqrt{2}}.$$

Man sieht an diesen beiden Beispielen, daß die Lösung einer Differentialgleichung (1) in einem solchen festen singulären Punkte nicht algebroid zu sein braucht, sondern daselbst eine transzendente Singularität aufweisen kann.

Wir wollen der Einfachheit zuliebe alle verwickelteren Fälle, wie die, daß die festen singulären Punkte Linien oder Flächenstücke der x-Ebene überall dicht erfüllen, ausschließen und annehmen, daß diese Punkte isoliert liegen. Sie mögen dann durch kleine, sie umgebende Kurven aus der x-Ebene ausgeschnitten, und diese Kurven durch Querschnitte an den Punkt $x = \infty$ angeschlossen werden. Die so entstehende einfach zusammenhängende Fläche bezeichnen wir mit T. Wir fragen nun nach dem Verhalten der aus der Reihe $F(x; x_0, y_0)$ durch analytische Fortsetzung entspringenden Integralfunktion $\Phi(x; x_0, y_0)$ im Innern von T.

Wenn wir bei der Fortsetzung unserer Reihe $F(x; x_0, y_0)$ auf einem bestimmten Wege bei einem in der Fläche T gelegenen Wert $x = x_1$ anlangen, und es ergibt sich in diesem Punkte x_1 für die Integralfunktion $\Phi(x; x_0, y_0)$ ein bestimmter endlicher oder unendlich großer Grenzwert

$$\lim_{x \to x_1} \Phi(x; x_0, y_0) = y_1,$$

so ist wieder eine Reihe von Fällen zu unterscheiden:

1a. Bildet x_1, y_1 ein Wertepaar, in dessen Umgebung $f(x, y)$ holomorph ist, so gehört der Punkt x_1 dem Innern des Konvergenzkreises eines Elements der Funktion $\Phi(x; x_0, y_0)$ [1]) an, x_1 ist also ein Punkt des Holomorphiebereichs oder ein regulärer Punkt dieser Funktion.

2a. Ist $y_1 = \infty$ und verhält sich $f_1(x, z)$ in der Umgebung von $x = x_1$, $z = 0$ holomorph, so hat das Element der Funktion $\Phi(x; x_0, y_0)$, zu dem wir auf unserem Fortsetzungswege gelangt sind, nach den Ergebnissen der Nr. 11 in x_1 einen Pol.

3a. Ist y_1 ein endlicher Wert und wird $f(x, y)$ für das Wertepaar x_1, y_1 unendlich, so daß $\frac{1}{f(x, y)}$ holomorph bleibt und für $x = x_1$ nicht unabhängig von y verschwindet, dann hat unser Funktionselement in x_1 einen algebraischen Verzweigungspunkt.

4a. Ist $y_1 = \infty$ und wird $f_1(x, z)$ für $x = x_1$, $z = 0$ unendlich, so daß $\frac{1}{f_1(x, z)}$ holomorph bleibt, ohne für $x = x_1$ unabhängig von z zu verschwinden, dann hat unser Funktionselement in $x = x_1$ eine algebraische Unendlichkeitsstelle.

In allen diesen vier Fällen verhält sich das Integral $\Phi(x; x_0, y_0)$ in der Umgebung der Stelle x_1 von T algebroid, hat aber in den Fällen 2a, 3a, 4a in x_1 eine Singularität. Der singuläre Charakter einer solchen Stelle x_1 geht aber aus der Natur der Funktion $f(x, y)$ nicht ohne weiteres hervor; er wird vielmehr z. B. im Falle 3a dadurch bedingt, daß y_1 eine Wurzel der Gleichung

$$h(x_1, y) = 0$$

ist. Durch geeignete Abänderung der Anfangswerte x_0, y_0 ließe es sich erreichen, daß das entsprechende Integral in x_1 einen endlichen Wert y_1' erhält, der der Gleichung $h(x_1, y) = 0$ nicht mehr genügt; dieses Integral wäre also in der Umgebung von x_1 holomorph. Oder anders ausgedrückt: Bedeutet $\bar{x}$ einen beliebigen Punkt der Fläche T, so hat die Gleichung

$$h(\bar{x}, y) = 0$$

eine gewisse endliche Anzahl von einander verschiedener Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Die Integrale von (1), die die singulären Anfangsbedingungen $x = \bar{x}$, $y = \eta_k$ erfüllen, haben in $x = \bar{x}$ einen algebraischen Verzweigungspunkt; es kann also jeder beliebige Punkt $\bar{x}$ von T als

[1]) Unter einem Element der Funktion $\Phi(x; x_0, y_0)$ verstehen wir die Reihe $F(x; x_0, y_0)$ oder eine aus ihr durch analytische Fortsetzung entstandene.

algebraischer Verzweigungspunkt eines oder mehrerer Integrale von (1) fungieren. Man nennt darum einen solchen singulären Punkt nach Fuchs einen mit den Anfangswerten verschiebbaren.

Es wäre nun noch die Möglichkeit ins Auge zu fassen, daß man bei der Fortsetzung von $F(x; x_0, y_0)$ einem Punkte x_1 der Fläche T begegnet, in dem die Integralfunktion $\Phi(x; x_0, y_0)$ sich überhaupt keinem bestimmten Grenzwerte annähert. P. Painlevé hat aber gezeigt [1]), daß dies ausgeschlossen ist. Er schließt folgendermaßen:

Wir denken uns das Integral $F(x; x_0, y_0)$ auf einem ganz innerhalb T verlaufenden, von x_0 ausgehenden Wege L fortgesetzt, und es möge x_1 auf diesem Wege der erste Punkt sein, für den es zweifelhaft ist, ob in ihm das Integral $y = \Phi(x; x_0, y_0)$ sich einem Grenzwert nähert. Es seien $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $h(x_1, y) = 0$, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Es gibt ein positives δ von folgender Beschaffenheit: schließt man aus der y-Ebene jeden der Punkte $\eta_1, \ldots, \eta_n$ durch einen um ihn beschriebenen Kreis mit dem Halbmesser δ, und den Punkt $y = \infty$ durch den um $y = 0$ mit dem Halbmesser $\frac{1}{\delta}$ beschriebenen Kreis aus, wobei δ hinreichend klein zu nehmen ist, und nennt den so entstehenden Bereich B_δ, so möge das Integral $y = \Phi(x; x_0, y_0)$ in beliebiger Nähe von $x = x_1$ Werte annehmen, die in B_δ liegen.

2) Ein solches δ existiert nicht.

Im letzteren Falle läßt sich daher jedem positiven δ ein positives ε so zuordnen, daß für alle Punkte von L, die vor x_1 liegen und für die $|x - x_1| < \varepsilon$ ist, eine der Ungleichungen

$$|y - \eta_1| < \delta, \ |y - \eta_2| < \delta, \ldots, |y - \eta_m| < \delta, \ |y| > \frac{1}{\delta}$$

erfüllt ist. Und zwar gilt, da die Abbildung von L auf die y-Ebene durch eine stetige Funktion erfolgt, für alle in Betracht kommenden Punkte von L nur eine bestimmte dieser Ungleichungen. Es hätte also in diesem Falle $y = \Phi(x; x_0, y_0)$ für $x = x_1$ entweder einen der Werte $\eta_1, \ldots, \eta_m$ oder ∞ zum Grenzwerte.

Im Falle 1) dagegen läßt sich zeigen, daß $y = \Phi(x; x_0, y_0)$ im Punkte x_1 holomorph ist. Man grenze nämlich um $x = x_1$ eine Umgebung $|x - x_1| < \gamma$ so ab, daß, wenn x in dieser Umgebung liegt, alle Wurzeln der Gleichung $h(x, y) = 0$ den Bereichen

$$|y - \eta_1| < \frac{\delta}{2}, \ldots, |y - \eta_m| < \frac{\delta}{2}, \ |y| > \frac{2}{\delta}$$

[1]) Siehe Painlevé, Leçons etc. S. 23; vgl. Picard, Traité II (1905), S. 370. Im folgenden geben wir den Beweis von Picard in einer von stud. Pleßner herrührenden Fassung wieder.

angehören. Dann hat $|h(x, y)|$ in B_δ eine positive untere Schranke und folglich $|f(x, y)|$ ebenda eine obere Schranke M. Schreibt man nun für ein x, das auf L liegt, und dessen Abstand von x_1 kleiner ist als $\frac{\gamma}{2}$, als Anfangswert eines Integrals einen y-Wert vor, der dem Bereiche B_δ angehört, so wird z. B. der Cauchysche Konvergenzradius dieses Integrals oberhalb einer angebbaren, positiven Schranke μ liegen. Setzt man $\Phi(x; x_0, y_0)$ längs L analytisch fort und wählt einen Zwischenpunkt x, dessen Abstand von x_1 kleiner ist als die kleinere der Größen $\frac{1}{2}\gamma$ und μ, und für den der zugehörige Integralwert dem Bereiche B_δ angehört, so fällt x_1 in den zu diesem x-Werte gehörigen Cauchyschen Konvergenzkreis, das betreffende Integral ist also in x_1 holomorph. Solche x-Punkte existieren aber nach dem Vorhergehenden für unser Integral $\Phi(x; x_0, y_0)$ stets, und damit ist der Beweis für unsere Behauptung geliefert. Wir haben also den Satz von Painlevé:

Innerhalb der Fläche T verhält sich jedes Integral der Differentialgleichung (1) algebroid; die verschiebbaren singulären Stellen eines solchen Integrals können also nur Pole oder algebraische Verzweigungspunkte sein.

Den grundsätzlichen Unterschied zwischen festen und mit den Anfangswerten verschiebbaren singulären Punkten hat zuerst (1884) Fuchs hervorgehoben [1]), nachdem schon früher M. Hamburger [2]) das Auftreten von verschiebbaren Singularitäten an Beispielen gezeigt hatte. Ein einfaches Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0; \; g(x, y) = -x, \; h(x, y) = y,$$

deren allgemeines Integral der Gleichung

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

genügt. Soll für einen von Null verschiedenen Wert x_0 von x, $y = 0$ sein so wird

$$y = \sqrt{x_0^2 - x^2}.$$

Da für $y = 0$ die Nennerfunktion $h(x, y)$ verschwindet, hat man es hier mit dem in der Nr. 10 behandelten Falle zu tun, und in der Tat ergibt sich in der Umgebung von $x = x_0$ eine Entwicklung von der Form

$$y = (x - x_0)^{1/2} (\delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \cdots),$$

die nach gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ fortschreitet.

1) Fuchs, Werke II, S. 355.

2) M. Hamburger, Crelles Journal, Bd. 83 (1877), S. 186.

15. Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten. Riccatische Differentialgleichung.

Bei der analytischen Fortsetzung eines durch reguläre Anfangswerte $x = x_0$, $y = y_0$ bestimmten Integrals der Differentialgleichung (1) geben die innerhalb der Fläche T gelegenen verschiebbaren Verzweigungspunkte zu besonderen Schwierigkeiten Anlaß. Denken wir uns nämlich, es wäre das Verhalten der Integrale in der Umgebung der festen Singularitäten ξ bekannt, dann würde hierdurch, wenn innerhalb T keine singulären Stellen vorhanden wären, der analytische Charakter der Integrale in der ganzen x-Ebene bekannt sein. Die Wertänderungen, die ein Integral bei der Fortsetzung auf einem beliebigen Wege erfährt, wären auch in dem Falle durch das Verhalten in der Umgebung der ausgeschlossenen x-Werte vollkommen bestimmt, wenn die Integrale innerhalb T zwar noch Pole, aber keine Verzweigungspunkte besäßen, d. h. wenn die Integrale innerhalb T den Charakter rationaler Funktionen zeigten. Es wird also jedenfalls diejenige Klasse von Differentialgleichungen der Form (1) als die einfachste zu gelten haben, für die dieser Fall eintritt, deren Integrale also keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen.

Die Frage nach den Differentialgleichungen erster Ordnung von dieser Beschaffenheit hat Fuchs[1]) zuerst formuliert und erledigt, und zwar in dem allgemeinen Falle, wo $\frac{dy}{dx}$ nicht als rationale, sondern als implizite algebraische Funktion von y gegeben ist. Indem wir diese Frage zunächst in dem Falle einer Differentialgleichung von der Form (1), wo $f(x, y)$ eine rationale Funktion von y bedeuten möge, zu beantworten suchen, werden wir zu einer hervorragend wichtigen und interessanten Klasse von Differentialgleichungen geführt werden. Wir betrachten also wieder die Differentialgleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)},$$

und es sei x_0 ein beliebiger innerhalb T gelegener Punkt. Es seien ferner $b_1, b_2, \ldots, b_m$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$h(x_0, y) = 0, \tag{14}$$

dann werden diejenigen Integrale von (1), die für $x = x_0$ einen der Werte b_k annehmen, nach den Ergebnissen der Nr. 10 in x_0 einen Verzweigungspunkt besitzen.

Wenn wir also erreichen wollen, daß die Integrale der Differentialgleichung (1) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, so wird

[1]) Fuchs, 1884, Werke II, S. 355.

zunächst [1]) die Gleichung (14) für keinen Wert x_0 eine endliche Wurzel haben dürfen, d. h. es muß $h(x, y)$ von y unabhängig, also eine Funktion von x allein sein. Diese denken wir uns in die Koeffizienten von $g(x, y)$ einbezogen, die Differentialgleichung hat also notwendig die Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) = a_0(x) + a_1(x)\,y + \cdots + a_n(x)\,y^n.$$

Es kann nun noch ein willkürlicher Punkt x_0 der Fläche T als Verzweigungspunkt eines Integrals fungieren, wenn dieses Integral für $x = x_0$ unendlich wird. Setzen wir also wie in der Nr. 11

$$y = \frac{1}{z},$$

so wird auch in der Differentialgleichung für z

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} = -z^2 g\left(x, \frac{1}{z}\right) &= -a_0(x)\,z^2 - a_1(x)\,z - a_2(x)\\ &\quad - a_3(x)\frac{1}{z} - \cdots - a_n(x)\frac{1}{z^{n-2}}\end{aligned}$$

die rechte Seite eine ganze rationale Funktion von z sein müssen, d. h. es muß

$$a_3(x) = 0, \ldots, a_n(x) = 0$$

sein. Die Form der Differentialgleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)\,y + a_2(x)\,y^2 \tag{15}$$

ist also notwendig, aber offenbar zugleich hinreichend dafür, daß die Integrale keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen; man bezeichnet eine Differentialgleichung von der Form (15) gewöhnlich als Riccatische [2]).

Die singulären Stellen ξ dieser Differentialgleichung sind die singulären Punkte der drei Koeffizienten $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, denen sich im allgemeinen noch der Punkt $x = \infty$ hinzugesellt. Schließen wir diese aus und legen dann die Querschnitte nach dem unendlich fernen Punkte hin, so sind in der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T die Integrale eindeutig, können daselbst aber noch Pole besitzen, deren

[1]) Vergl. für das folgende nebst Fuchs a. a. O. noch Picard, Traité II (1905), S. 373; Painlevé, Leçons, S. 23.

[2]) Conte Jacopo di Riccati behandelt (Acta eruditorum. 1723, S. 502—514 und Supplementum VIII, 1724, S. 68—73) eine Differentialgleichung, die Daniel Bernoulli (ebenda, 1725, S. 473—475) auf die Form

$$\frac{dy}{dx} + a y^2 + b x^m = 0$$

reduziert (vergl. auch L. Euler, Instit. calc. integralis I, art. 436ff., Opera. ser. I, vol. 11, S. 276ff.), und die offenbar einen speziellen Fall von (15) darstellt.

Lage von der Wahl der Anfangswerte abhängt. Verlangen wir auch noch, daß solche verschiebbare Pole nicht vorhanden sein sollen, so darf für einen beliebigen Punkt x_0 von T kein Integral y von (1) vorhanden sein, das dort unendlich wird, also kein Integral z von

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 a_0(x) - z\, a_1(x) - a_2(x),$$

das in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph ist und für $x = x_0$ verschwindet, ohne identisch Null zu sein. Daraus folgt aber, daß $a_2(x)$ für jeden Punkt von T, also identisch verschwinden muß, und diese Bedingung ist offenbar auch hinreichend. Die Differentialgleichungen der Form (1), die überhaupt keine verschiebbaren singulären Stellen haben, lauten demnach

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + y\, a_1(x),$$

d. h. sie sind linear in y und $\frac{dy}{dx}$.

Für die allgemeine Riccatische Differentialgleichung kann man aus der Eigenschaft, daß ihre Lösungen innerhalb von T keine anderen Singularitäten als Pole besitzen können, auf die Art und Weise schließen, wie ein Integral dieser Differentialgleichung von seinen Anfangswerten abhängt.

Es sei nämlich x_0 ein beliebiger innerhalb T gelegener Punkt und y_0 ein willkürlicher endlicher Wert; denken wir uns das Integral $F(x; x_0, y_0)$, das für $x = x_0$ gleich y_0 wird, längs eines ganz innerhalb T verlaufenden Weges nach einem Punkte x fortgesetzt, so wird der sich für das Integral in diesem Punkte ergebende Wert y nur von x und von den Anfangswerten x_0, y_0 abhängen. Es sei x_0 fest, y_0 dagegen veränderlich, so ist also y eine Funktion von y_0, die auch noch von x abhängt. Nun ist nach Nr. 12 y eine monogene Funktion von y_0; es ist aber auch eine eindeutige Funktion von y_0. Denn bei festem x_0 ist der Wert der Integralfunktion im Punkte x, bei Fortsetzung innerhalb T, durch den Anfangswert y_0 eindeutig bestimmt, weil ja in T keine Verzweigungspunkte liegen. Dieser Integralwert ist überdies für jedes y_0 (auch $y_0 = \infty$) ein wohlbestimmter endlicher Wert oder unendlich groß, folglich kann diese eindeutige Funktion auch keine anderen singulären Stellen als Pole besitzen, sie ist also nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie [1]) eine rationale Funktion; d. h. y ist eine rationale Funktion von y_0, deren Koeffizienten natürlich noch von x abhängen.

Nun können wir aber (siehe Nr. 12, S. 44) die Gleichung

$$y = F(x; x_0, y_0)$$

auch in der Form

$$y_0 = F(x_0; x, y)$$

[1]) Siehe z. B. Osgood, a. a. O. S. 330, Knopp, a. a. O. S. 136.

schreiben. Was wir für y als Funktion von y_0 erschlossen haben, gilt also genau ebenso für y_0 als Funktion von y; d. h. es ist auch y_0 eine rationale Funktion von y.

Wenn aber zwischen zwei veränderlichen Größen eine solche Beziehung besteht, daß jede eine rationale Funktion der andern ist, so muß jede dieser Größen eine lineare gebrochene oder ganze Funktion der andern sein; es ist folglich

$$(16) \qquad y = \frac{Ay_0 + B}{Cy_0 + D}, \quad AD - BC \neq 0,$$

wo natürlich A, B, C, D noch von x abhängen [1]).

16. Form des allgemeinen Integrals.

Um die Beschaffenheit der in (16) auftretenden Koeffizienten A, B, C, D als Funktionen von x genauer festzustellen, kann man die folgende Erwägung anstellen.

Wir definieren durch ihre Anfangswerte $\eta_0, \zeta_0, \vartheta_0, y_0$ im Punkte $x = x_0$ vier Integrale $\eta, \zeta, \vartheta, y$ der *Riccati*schen Differentialgleichung. Dann ist

$$(17) \qquad \eta = \frac{A\eta_0 + B}{C\eta_0 + D}, \quad \zeta = \frac{A\zeta_0 + B}{C\zeta_0 + D}, \quad \vartheta = \frac{A\vartheta_0 + B}{C\vartheta_0 + D},$$
$$y = \frac{Ay_0 + B}{Cy_0 + D}.$$

Denken wir uns nun die beiden durch die Relation

$$t = \frac{A\tau + B}{C\tau + D}$$

verknüpften Variabeln t und τ in bekannter Weise durch die Punkte zweier geraden Linien repräsentiert, so statuiert diese Relation eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den Punkten jener Geraden, von der man in den Elementen der analytischen Geometrie zeigt, daß sie die allgemeinste projektive Beziehung darstellt. Diese Beziehung ist aber bekanntlich dadurch charakterisiert, daß das Doppelverhältnis von vier Punkten der einen Geraden gleich dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Punkte der anderen Geraden ist. Den vier Punkten

$$\tau = \eta_0, \zeta_0, \vartheta_0, y_0$$

der τ-Geraden entsprechen aber nach (17) die vier Punkte

$$t = \eta, \zeta, \vartheta, y$$

der t-Geraden; setzt man also wie üblich einen Wert des Doppelverhältnisses der vier Punkte $\eta, \zeta, \vartheta, y$, z. B.

[1]) Vergl. für diese Schlußweise Poincaré. Acta Mathematica, Bd. VII (1885), S. 9; ferner Picard. a. a. O. S. 374.

$$\frac{y-\eta}{y-\vartheta}:\frac{\zeta-\eta}{\zeta-\vartheta}=(y,\zeta,\eta,\vartheta),$$

so ist

$$(y,\zeta,\eta,\vartheta)=(y_0,\zeta_0,\eta_0,\vartheta_0),$$

d. h. der Wert dieses Doppelverhältnisses ist eine von x unabhängige Größe Γ. Aus der Gleichung

$$(y,\zeta,\eta,\vartheta)=\Gamma,$$

die übrigens auch durch Elimination der A, B, C, D aus den Gleichungen (17) direkt hervorgeht, ergibt sich nun für y der Ausdruck:

$$(18)\qquad y=\frac{\eta(\zeta-\vartheta)-\Gamma\,\vartheta(\zeta-\eta)}{\zeta-\vartheta-\Gamma\,(\zeta-\eta)},$$

und wenn man hierin Γ als willkürliche Konstante ansieht, so stellt dieser Ausdruck das allgemeine Integral der Riccatischen Differentialgleichung dar.

Dieses allgemeine Integral setzt sich also rational aus drei partikulären Integralen η, ϑ, ζ zusammen [1]).

Die Formel (18) ist natürlich mit der Formel (16) vollständig äquivalent, während hier Γ als willkürliche Konstante fungiert, so dort y_0; die Formel (18) läßt aber die Beschaffenheit der in (16) mit A, B, C, D bezeichneten Funktionen von x hervortreten.

Die durch (18) dargestellte Eigenschaft des allgemeinen Integrals der Riccatischen Differentialgleichung läßt sich auch direkt in die Eigenschaft dieser Differentialgleichung umsetzen, von der wir ausgegangen waren. In der Tat zeigt die Gleichung (18) unmittelbar, daß nur diejenigen Werte von x als Verzweigungspunkte des allgemeinen Integrals fungieren können, für die eine der Funktionen η, ζ, ϑ eine Verzweigung erfährt, diese sind aber natürlich mit Γ, oder was dasselbe ist, mit dem Anfangswerte y_0 von y nicht verschiebbar. Überhaupt hängt die Eigenschaft einer Differentialgleichung, nur feste Verzweigungspunkte zu besitzen, aufs engste damit zusammen, ob sich das allgemeine Integral als rationale Funktion gewisser partikulärer Integrale darstellen läßt. Ist das allgemeine Integral rational durch gewisse partikuläre Integrale darstellbar, so sind die Verzweigungspunkte nicht verschiebbar; ist es sogar ganz und rational durch eine Anzahl partikulärer Integrale darstellbar, so sind auch die Pole fest [2]). Unter den Differentialgleichungen von der Form (1) ist also die

[1]) Dieser Satz rührt von Eduard Weyr her, Abhandlungen der böhm. Gesellsch. d. Wissensch. (6), 8 (1875), S. 30; vergl. auch u. a. Königsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (Leipzig 1889), S. 322.

[2]) Vgl. hierzu Koenigsberger, a. a. O. S. 96ff. und Acta Mathematica, Bd. III (1883), S. 1ff.

Riccatische die einzige, deren allgemeines Integral durch gewisse partikuläre Integrale rational dargestellt werden kann [1]).

Für die lineare Differentialgleichung

$$(19)\qquad \frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y,$$

die auch keine verschiebbaren Pole besitzt, muß in dem Ausdruck (16) der Nenner $Cy_0 + D$ sich auf eine Konstante reduzieren, da ja sonst y_0 stets so bestimmt werden könnte, daß $Cy_0 + D$ für einen beliebigen in T gelegenen x-Punkt verschwindet. Das allgemeine Integral von (19) ist also eine ganze lineare Funktion der Integrationskonstanten y_0; das läßt sich in diesem einfachen Falle auch direkt zeigen, indem man das allgemeine Integral einer solchen „linearen Differentialgleichung erster Ordnung" durch Quadraturen darstellt [2]). Setzt man nämlich

$$y = u\, v,$$

so ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = a_0 + a_1\, u\, v.$$

Bestimmen wir nun v so, daß es der Differentialgleichung

$$(20)\qquad \frac{dv}{dx} = a_1 v$$

Genüge leistet, so ergibt sich (vgl. Nr. 4, S. 16) nach Division durch v und Integration

$$\log v = \int a_1\, dx + \log c,$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, also

$$v = c \,.\, e^{\int a_1 dx}.$$

Die Differentialgleichung (20) geht aus (19) hervor, indem man das von der unbekannten Funktion unabhängige Glied wegläßt; sie ist ebenfalls linear, aber zugleich homogen, weil sie eben kein Glied enthält, das nicht die unbekannte Funktion oder ihre Ableitung als Faktor besitzt. Man nennt (20) wohl auch die zur kompletten Gleichung (19) gehörige reduzierte Gleichung. Das allgemeine Integral v von (20) ist also durch eine Quadratur dargestellt.

Nehmen wir die Konstante $c = 1$, also

$$v = e^{\int a_1 dx},$$

[1]) Daß das Doppelverhältnis von vier Integralen der Riccatischen Differentialgleichung eine konstante Größe ist, läßt sich auch direkt aus der Differentialgleichung nachweisen, siehe z. B. Koenigsberger, a. a. O.; Picard, Traité I (1901), S. 436.

[2]) Vgl. Joh. Bernoulli (1697), Opera I (1742), S. 175.

so ergibt sich für u die Differentialgleichung

$$v \frac{du}{dx} = a_0,$$

oder

$$\frac{du}{dx} = a_0 e^{-\int a_1 dx},$$

woraus durch Integration

$$u = \int a_0 e^{-\int a_1 dx} dx + C$$

folgt, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Wir erhalten demnach das allgemeine Integral y von (19) in der Form

$$(21) \qquad y = u v = e^{\int a_1 dx}\left[C + \int a_0 e^{-\int a_1 dx} dx\right],$$

also als ganze lineare Funktion von C.

Wir bemerken, daß die allgemeinere Differentialgleichung

$$(22) \qquad f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y)\,\varphi(x) = \chi(x),$$

wo $f(y)$ eine beliebige Funktion von y, $f'(y)$ deren Ableitung bedeutet, durch die Substitution

$$z = f(y)$$

auf die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + z\,\varphi(x) = \chi(x)$$

zurückgeführt werden kann. Die sogenannte Bernoullische Differentialgleichung (vgl. das Zitat S. 60)

$$y^p \frac{dy}{dx} + \varphi(x)\,y^{p+1} = \psi(x)\,y^q$$

verwandelt sich nach Multiplikation mit

$$(p - q + 1)\,y^{-q}$$

in einen speziellen Fall der Differentialgleichung (22), wo nämlich

$$f(y) = y^{p-q+1}.$$

Diese ist also, ebenso wie die Gleichung (22) selbst, durch Quadraturen integrierbar.

Wenn es gelungen ist, die Integration einer vorgelegten Differentialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, so ist dadurch zur vollständigen Lösung des Integrationsproblems in dem von uns formulierten Sinne (Nr. 5, S. 20) nur ein erster Schritt getan. Denn wenn es im allgemeinen schon bedeutende Anstrengungen erfordert, die analytische Beschaffenheit der durch eine einfache Quadratur dargestellten Funktion zu ergründen, so ist die Untersuchung eines Ausdruckes, der aus mehreren Quadraturen zusammengesetzt ist, natürlich noch viel komplizierter. In der historischen

Entwicklung der Wissenschaft spielen solche Differentialgleichungen, deren Integration sich auf Quadraturen zurückführen läßt, insofern eine gewisse Rolle, als einerseits die Quadratur gewissermaßen die einfachste Quelle neuer Funktionsklassen bildet, und andererseits die für die angenäherte Berechnung einer Quadratur schon von Newton ab ausgebildeten verschiedenartigen Methoden für die Wertbestimmung des Integrals einer Differentialgleichung nutzbar gemacht werden konnten, wenn es gelang, dieses Integral durch Quadraturen darzustellen. Wir finden daher bei den älteren Analysten vielfach das Bestreben, eine zur Integration vorgelegte Differentialgleichung solchen Transformationen zu unterwerfen, daß dann die Darstellung des Integrals durch Quadraturen möglich wird. Nun gelingt es aber nur in den seltensten Fällen, eine solche Transformation ausfindig zu machen; das Problem der Integration wird also durch das Bestreben, derartige Transformationen aufzufinden, nicht nur verschoben, sondern außerordentlich beschränkt, in ähnlicher Weise etwa, wie wenn man sich in der Algebra die Aufgabe stellte, eine gegebene algebraische Gleichung durch bloße Anwendung von Wurzelzeichen aufzulösen. So interessant an sich die Aufgabe ist, diejenigen Differentialgleichungen aufzustellen, deren Integration sich auf Quadraturen zurückführen läßt, so muß doch dieser Aufgabe als einer ganz speziellen der ihr gebührende Platz in der systematischen Theorie angewiesen werden, keinesfalls darf sie als das einzige oder erstrebenswerteste Ziel in den Vordergrund der Theorie gerückt werden. In neuerer Zeit ist es Lie gelungen, durch die von ihm begründete Theorie der Transformationsgruppen (deren Anwendung in der Theorie der Differentialgleichungen allerdings viel weiter reicht) Methoden zu entwickeln, die zu einer Lösung der gedachten Aufgabe führen können [1]); wir begnügen uns damit, auf diese schöne und wichtige Theorie hingewiesen zu haben, und wollen uns jetzt wieder der Untersuchung der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung zuwenden.

17. Zusammenhang der Riccatischen Differentialgleichung mit linearen homogenen Differentialgleichungen.

Die allgemeine Riccatische Differentialgleichung (15)

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2,$$

wo $a_2 \neq 0$ ist, kann nicht durch Quadraturen integriert werden [2]); aber

[1]) Vgl. die von Scheffers herausgegebenen „Vorlesungen über Differentialgleichungen" (Leipzig 1891).

[2]) Ein direkter Beweis dieser Behauptung ergibt sich z. B. aus den Untersuchungen von E. Vessiot, Annales de l'École Normale (3) 9 (1892), S. 197ff.

ähnlich, wie im Falle $a_2 = 0$ eine Zurückführung auf die homogene lineare Differentialgleichung (20) und eine Quadratur möglich war, kann im Falle $a_2 \neq 0$ die Gleichung (15) auf ein System von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen von der Form

$$(23)\qquad \begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= u_1 a_{11} + u_2 a_{21}, \\ \frac{du_2}{dx} &= u_1 a_{12} + u_2 a_{22} \end{aligned}$$

zurückgeführt werden, wo die $a_{ik}\,(i, k = 1, 2)$ monogene Funktionen von x bedeuten. Dazu braucht man nur zu setzen

$$(24)\qquad y = \frac{u_2}{u_1},\quad a_0 = a_{12},\quad a_1 = -(a_{11} - a_{22}),\quad a_2 = -a_{21},$$

woraus sich, wenn wir die Ableitungen nach x durch Akzente bezeichnen,

$$y' = \frac{1}{u_1^2}(u_1 u_2' - u_2 u_1') = a_0 + a_1 \frac{u_2}{u_1} + a_2 \frac{u_2^2}{u_1^2},$$

$$(25)\qquad \begin{aligned} u_1 u_2' - u_2 u_1' &= a_0 u_1^2 + a_1 u_1 u_2 + a_2 u_2^2 \\ &= -(a_{11} u_1 + a_{21} u_2) u_2 + (a_{12} u_1 + a_{22} u_2) u_1 \end{aligned}$$

ergibt. Die der Substitution $y = \frac{u_2}{u_1}$ (siehe Gl. (24)) noch anhaftende Willkür gestattet nun, etwa für u_1 die erste der Gleichungen (23) anzunehmen, worauf dann aus (25) für u_2 die zweite der Gleichungen (23) folgt.

Hat man umgekehrt ein beliebig vorgelegtes System von der Form (23), so befriedigt der Ausdruck $y = \frac{u_2}{u_1}$ die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = a_{12} + (a_{22} - a_{11})\, y - a_{21} y^2.$$

Beim Übergang von der Riccatischen Gleichung (15) zu dem System (23) haben wir noch in der Gleichung

$$a_1 = -(a_{11} - a_{22})$$

des Gleichungssystems (24) eine Unbestimmtheit, die wir zur Vereinfachung des Systems (23) benutzen können. Nehmen wir $a_{11} = 0$, so ergibt sich

$$u_1' = -a_2 u_2,\quad u_2' = a_0 u_1 + a_1 u_2,$$

und indem wir die erste dieser Gleichungen noch einmal differentiieren und für u_2 und u_2' ihre Werte einsetzen,

$$(26)\qquad a_2 u_1'' - (a_2 a_1 + a_2') u_1' + a_0 a_2^2 u_1 = 0.$$

Es ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für u_1, und der Zusammenhang zwischen der Riccatischen Gleichung (15) und dieser Gleichung wird durch die Beziehung

$$(27) \qquad y = -\frac{1}{a_2}\frac{d\log u_1}{dx}$$

vermittelt. Man nennt (27) die Bernoullische Transformation.

Durch ihre Anwendung haben wir die Ordnung der Differentialgleichung erhöht, dies scheint äußerlich eine Erschwerung zu sein, ist aber in Wirklichkeit eine Erleichterung, da wir durch diese Transformation erreicht haben, daß die Integrale u der neuen Differentialgleichung nicht nur keine verschiebbaren Verzweigungspunkte, sondern auch keine verschiebbaren Pole besitzen.

Wir weisen dies zunächst direkt nach, indem wir aus (27) für u den Ausdruck

$$u = c\,e^{-\int a_2 \cdot y \cdot dx}$$

berechnen, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, und das Verhalten von u untersuchen, wenn y für $x = x_0$ einen verschiebbaren Pol besitzt. Machen wir in der Riccatischen Differentialgleichung die Substitution

$$y = \frac{1}{z},$$

wodurch für z die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = -(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)$$

hervorgeht, so ist für $x = x_0$ das betreffende $z = 0$, also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_0} = -a_2(x_0).$$

Wenn nun $a_2(x_0) \neq 0$ ist, so haben wir in der Umgebung von x_0 für z die Entwicklung

$$z = -a_2(x_0)\cdot(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

woraus sich

$$y = \frac{1}{z} = \frac{-1}{a_2(x_0)}\frac{1}{x - x_0}\,|1 + \varepsilon_1(x - x_0) + \cdots|$$

ergibt. Da für $x = x_0$ die Funktion $a_2(x)$ jedenfalls als holomorph vorausgesetzt werden muß (sonst wäre eben $x = x_0$ ein fester singulärer Punkt der Differentialgleichung), haben wir in der Umgebung von $x = x_0$:

$$a_2(x) = a_2(x_0) + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

also

$$\begin{aligned} -\int a_2(x)\cdot y \cdot dx &= \int\left(\frac{1}{x - x_0} + \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \cdots\right)dx \\ &= \log(x - x_0) + \mathfrak{P}(x - x_0), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}(x - x_0)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$ bedeutet. Hiernach ist in der Umgebung von $x = x_0$:

$$u = c(x - x_0)\,\mathfrak{P}(x - x_0), \quad \overline{\mathfrak{P}}(x - x_0) = e^{\mathfrak{P}(x-x_0)},$$

u ist also in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph.

Die Bedingung, daß $a_2(x)$ für $x = x_0$ einen von Null verschiedenen Wert habe, ist für dieses Resultat wesentlich.

Dividieren wir die Differentialgleichung (26) durch a_2, so erhält sie die Form

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\frac{a_2'}{a_2} + a_1\right)\frac{du}{dx} + a_0 a_2 u = 0; \tag{26a}$$

da u in der Umgebung einer Stelle, wo y selbst holomorph ist, offenbar ebenfalls holomorph bleibt, haben wir das wichtige Resultat:

Reduziert man in der homogenen linearen Differentialgleichung (26) den Koeffizienten der höchsten Ableitung auf Eins, so ist das allgemeine Integral dieser Gleichung holomorph in der Umgebung jeder Stelle x, für die die Koeffizienten der Differentialgleichung selbst holomorph sind. Die einzigen singulären Punkte der Integrale sind die singulären Stellen der Koeffizienten, diese sind also sämtlich fest; wir nennen sie die singulären Stellen der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (26) ist keine spezielle ihrer Art, denn die allgemeinste homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$p\frac{d^2 u}{dx^2} + q\frac{du}{dx} + ru = 0, \tag{28}$$

wo p, q, r Funktionen von x bedeuten, läßt sich in die Form (26a) beziehungsweise (26) umsetzen, wo

$$a_0 = \frac{r}{p^2}, \quad a_1 = -\frac{q + p'}{p}, \quad a_2 = p$$

ist, und wird demnach durch die Substitution

$$y = \frac{-1}{p}\frac{d\log u}{dx}$$

in eine Riccatische Differentialgleichung für y transformiert. Der ausgesprochene Satz gilt also für jede homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Er gilt aber auch für ein beliebiges System von der Form (23) und allgemeiner für jedes System homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_k}{dx} = y_1 a_{1k} + \cdots + y_n a_{nk}, \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

dessen Koeffizienten a_{ik} monogene Funktionen von x sind. Die Theorie dieser Systeme wird uns später eingehend beschäftigen, wir fügen an dieser Stelle nur noch einige Bemerkungen über die Riccatische Differentialgleichung hinzu.

Im Innern der Fläche T haben die Lösungen einer Riccatischen Differentialgleichung keine anderen Singularitäten als Pole, sie verhalten sich in T meromorph. Die Frage, wie sich diese Lösungen in der Umgebung der festen Singularitäten ξ verhalten, ist durch die vorhergehenden Erörterungen auf die analoge Frage für die linearen Systeme (23) oder die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (26) zurückgeführt. Am einfachsten gestaltet sich diese Frage, wenn die a_0, a_1, a_2 überhaupt keine singulären Punkte aufweisen, weder im Endlichen noch im Unendlichen, d. h. wenn sie Konstanten sind. In diesem Falle kann in einem endlichen x-Wert überhaupt kein Verzweigungspunkt der Integrale liegen. Denn die Differentialgleichung bleibt offenbar ungeändert, wenn man x durch $x +$ const. ersetzt; läge also etwa bei x_0 ein Verzweigungspunkt eines Integrals, so würde das gleiche bei $x_0 +$ const. zutreffen, man hätte also verschiebbare Verzweigungspunkte. Da somit das Auftreten von Verzweigungspunkten im Endlichen ausgeschlossen ist, kann auch $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt sein, d. h. y ist eine eindeutige Funktion von x. — Wir können diesen Schluß auch leicht bestätigen, da in diesem Falle die Integration der Riccatischen Differentialgleichung elementar durchführbar ist.

Schreibt man nämlich bei konstanten a_0, a_1, a_2 die Gleichung (15) in der separierten Form

$$\frac{dy}{a_0 + a_1 y + a_2 y^2} = dx$$

und bezeichnet mit ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 = 0,$$

so hat man für $\varrho_1 \neq \varrho_2$

$$\frac{dy}{a_2(\varrho_1 - \varrho_2)} \left\{ \frac{1}{y - \varrho_1} - \frac{1}{y - \varrho_2} \right\} = dx,$$

also

$$\frac{y - \varrho_1}{y - \varrho_2} = \text{const.}\ e^{a_2(\varrho_1 - \varrho_2)x} \tag{29}$$

und für $\varrho_1 = \varrho_2$

$$-\frac{1}{y - \varrho_1} = a_2 x + \text{const.} \tag{30}$$

Es ist also in diesem Falle y in der Tat eine allenthalben eindeutige Funktion von x.

Drittes Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung, wo die Ableitung als implizite Funktion der abhängigen Veränderlichen gegeben ist[1]).

18. Begriff der Integralfunktion[2]).

Wir haben uns bisher vornehmlich mit dem Falle einer Differentialgleichung erster Ordnung beschäftigt, in der die Ableitung der unbekannten Funktion y als rationale Funktion von y gegeben war. Der allgemeine Fall, wo die Ableitung eine implizite algebraische Funktion von y ist, wo also $\frac{dy}{dx}$ einer Gleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0 \tag{1}$$

genügt, in der F eine ganze rationale Funktion von $\frac{dy}{dx}$ und y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeutet, erfordert neue Methoden der Untersuchung, deren Darlegung wir uns jetzt zuwenden wollen.

---

[1]) In diesem und dem folgenden Kapitel werden die einfachsten Sätze aus der Lehre von den algebraischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen als bekannt vorausgesetzt. Man findet diese Sätze z. B. in den Werken: Appell und Goursat, Théorie des fonctions algébriques (Paris 1905), Landfried, Theorie der algebraischen Funktionen (Sammlung Schubert XXXI, 1902), H. Stahl, Abriß einer Theorie der algebraischen Funktionen (Leipzig 1911). Eine auf arithmetischer Grundlage fußende Darstellung dieser Theorie gibt das Werk: Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen (Leipzig 1902).

[2]) Quellen für diese und die folgenden Nummern sind: Briot und Bouquet, Journal de l'École Polyt. Cah. 36; W. Raschke, Inaug.-Dissertation, Heidelberg 1883, Acta Mathem. 14 (1890), S. 31; Fuchs, (1884) Werke II, S. 355; Hamburger, Crelles Journal, Bd. 112 (1893), S. 205ff.; Poincaré, Acta Mathematica, Bd. 7 (1885), S. 1ff.; vgl. hierzu Picard, Traité III (1908), S. 40, 62ff.; Painlevé, Leçons, S. 47ff.; Forsyth, Theory of differential equations. Vol. II, (Cambridge 1900), chapter VIII—X.

Setzen wir $\frac{dy}{dx} = s$, so ist durch die Gleichung (1) s als algebraische Funktion von y definiert. Wir schreiben (1) ausführlicher in der Form

$$A_0(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + A_1(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + A_m(y, x) = 0,$$

worin die $A_0, A_1, \ldots, A_m$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten, und setzen voraus, daß die Gleichung

$$(2) \qquad F(s, y, x) = 0,$$

aufgefaßt als algebraische Gleichung zwischen s, y, irreduzibel sei, daß also $F(s, y, x)$ nicht zerlegbar sei in Faktoren, die selbst ganze rationale Funktionen von s, y mit irgendwelchen von x abhängigen oder konstanten Koeffizienten sind.

Durch Elimination von s zwischen (2) und der Gleichung

$$\frac{\partial F(s, y, x)}{\partial s} = F'(s, y, x) = 0$$

bilden wir die Diskriminantengleichung

$$(3) \qquad D(y, x) = 0,$$

deren linke Seite eine ganze rationale Funktion von y mit von x abhängigen Koeffizienten ist.

Wir betrachten nun einen Wert $x = x_0$, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. In der Umgebung von $x = x_0$ seien die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen $A_k(y, x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ von y holomorph.
2. Es sei für $x = x_0$ die Funktion $A_0(y, x)$ nicht identisch, d. h. unabhängig von y, gleich Null.
3. Es möge für $x = x_0$ kein y-Wert vorhanden sein, für den sämtliche $A_k(y, x_0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ gleichzeitig verschwinden.

Für einen solchen Wert von x stellt dann die Gleichung (3) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Gleichung (2) eine mehrfache Wurzel s besitzt, und die Gleichung

$$(4) \qquad A_0(y, x) = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine oder mehrere der Wurzeln s von (2) unendlich groß werden.

Bedeutet also $x = x_0$, $y = y_0$ ein Wertepaar, für das weder die Gleichung (3) noch die Gleichung (4) erfüllt ist, so besitzt die Gleichung

$$(5) \qquad F(s, y_0, x_0) = 0$$

m voneinander verschiedene, endliche Wurzeln $s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \ldots, s_m^{(0)}$. Wir greifen eine bestimmte von ihnen heraus, etwa $s_k^{(0)}$, dann lautet die Gleichung (2) in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$, $s = s_k^{(0)}$

$$(6)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)(s - s_k^{(0)}) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x - x_0) + \cdots = 0,$$

wo die partiellen Ableitungen von F für $x = x_0$, $y = y_0$, $s = s_k^{(0)}$ zu nehmen sind, was hier (und ebenso im folgenden) durch das Einschließen in Klammern ( ) angedeutet wird. Der Koeffizient $\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)$ von $s - s_k^{(0)}$ ist von Null verschieden, da ja $s_k^{(0)}$ eine einfache Wurzel ist; wir können also nach dem Satze von der impliziten Funktion[1]) in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ die Funktion $s - s_k^{(0)}$ als gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$, $y - y_0$ ohne absolutes Glied

$$\mathfrak{P}_k(x - x_0, y - y_0)$$

darstellen. Wir setzen

$$s_k = s_k^{(0)} + \mathfrak{P}_k(x - x_0, y - y_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

und betrachten die m Differentialgleichungen

$$(7)\quad \frac{dy_k}{dx} = s_k^{(0)} + \mathfrak{P}_k(x - x_0, y - y_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Nach dem Existenzsatz der Nr. 9 besitzt jede dieser Differentialgleichungen ein und nur ein in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphes Integral y_k, das für $x = x_0$ den Anfangswert $y = y_0$ annimmt, und das offenbar auch der ursprünglichen Differentialgleichung Genüge leistet; wir haben also den Satz:

Die Differentialgleichung (1) besitzt, wenn x_0 keiner der ausgeschlossenen Werte und y_0 so beschaffen ist, daß

$$D(y_0, x_0) \neq 0, \quad A_0(y_0, x_0) \neq 0$$

sind, m in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphe Integrale, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmen und dadurch eindeutig charakterisiert sind, daß ihre Ableitungen für $x = x_0$ beziehungsweise gleich einer bestimmten Wurzel der Gleichung

$$F(s, y_0, x_0) = 0$$

werden.

Nach dem Unitätssatz der Nr. 12 (S. 45) gibt es außer diesen m holomorphen Integralen kein Integral der Differentialgleichungen (7), das für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Inwieweit dies auch für die Differentialgleichung (1) selbst gilt, werden wir alsbald zu erörtern haben; zur vorläufigen Orientierung mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

Wenn wir die Differentialgleichung (1) durch ein System von der Form (7) ersetzen wollen, so muß das Wertepaar x_0, y_0 der Bedingung genügen, daß

$$D(y_0, x_0) \neq 0$$

ist. Nun kann es sich ereignen, daß die Diskriminantengleichung (3) durch

[1]) Siehe z. B. Bieberbach, Funktionentheorie I (1921). S. 192.

eine Funktion $y = \varphi(x)$ von x identisch befriedigt wird, die zugleich eine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt, also die Gleichung

$$F\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}, \varphi(x), x\right) = 0$$

identisch erfüllt. Da nun für einen willkürlichen Wert x_0 von x und den zugehörigen Wert $\varphi(x_0)$ eines solchen Integrals die Ungleichung

$$D(\varphi(x_0), x_0) \neq 0$$

niemals erfüllt wird, so wird ein solches Integral der Differentialgleichung (1) im allgemeinen keiner Differentialgleichung von der Form (7) genügen, d. h. wenn wir uns ausschließlich auf die Betrachtung der Differentialgleichungen von der Form (7) beschränkten, so könnten uns die wie $\varphi(x)$ beschaffenen Lösungen der Differentialgleichung (1) entgehen [1]). — Allgemein gesprochen ist ein Punkt x_0 für ein Integral von (1), das in x_0 einen Wert y_0 annimmt, der im Vereine mit x_0 die Diskriminantengleichung

$$D(y_0, x_0) = 0$$

befriedigt, als singulärer Punkt jenes Integrals anzusehen; man nennt darum ein Integral von der Art wie $\varphi(x)$, das der Diskriminantengleichung für jeden Wert von x Genüge leistet, schlechthin ein **singuläres Integral**. Der Begriff des singulären Integrals erfordert aber noch eine schärfere Fassung; wir kommen auf diese weiter unten zurück, nachdem wir uns

[1]) Im Gebiete der reellen Veränderlichen kann es auch noch auf andere Weise vorkommen, daß Lösungen von (1) keiner der Differentialgleichungen (7) genügen. O. Perron gibt im Jahresbericht der D. M.-V. 22 (1914), S. 356 unter anderen das folgende lehrreiche Beispiel. Wir betrachten

$$(*) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - f(x)^2 = 0,$$

wo $f(0) = 0$, und für $x > 0$ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ sein möge; $f(x)$ ist also für alle endlichen, nichtnegativen Werte von x stetig. Außer den unmittelbar gegebenen Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$(**) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = -f(x),$$

die für $x = 0$ verschwinden, hat aber die Differentialgleichung $(*)$ noch unendlich viele für $x = 0$ verschwindende Lösungen, nämlich

$$y = \pm\varphi_0(x) \pm \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \ldots,$$

wenn

$$\frac{1}{g_n} = \left(\left[\frac{1}{x\pi}\right] + n\right)\pi; \ \varphi_0 = \int_{g_1}^{x} x \sin\frac{1}{x}\,dx; \ \varphi_n(x) = \int_{g_{n+1}}^{g_n} x \sin\frac{1}{x}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird, wo in üblicher Weise $[a]$ die in a enthaltene größte ganze Zahl bedeutet. Wie man sieht, befriedigt der Ausdruck y bei beliebiger Wahl der Vorzeichen für gewisse x-Werte die eine, und für die übrigen die andere der beiden Gleichungen $(**)$.

durch die zunächst folgenden Betrachtungen über die Natur der Singularitäten, die für die Lösungen einer Differentialgleichung von der Form (1) auftreten können, orientiert haben werden.

Es sei B ein einfach zusammenhängender Bereich der x-Ebene, der den Punkt x_0 enthält und innerhalb dessen die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) eindeutige Funktionen von x sind. Wir denken uns die

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

in der Umgebung von x_0 darstellenden Potenzreihen innerhalb B analytisch fortgesetzt; dann genügen die durch diese Fortsetzung entstehenden Potenzreihen (vgl. Nr. 13) ebenfalls der Differentialgleichung (1). Wenn also die Koeffizienten von (1) allenthalben eindeutige, z. B. rationale Funktionen von x sind, so befriedigen die aus den Reihen

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

entspringenden monogenen Funktionen in ihrem ganzen Existenzbereiche diese Differentialgleichung.

Als singuläre Punkte der Integralfunktion sind diejenigen x-Werte anzusehen, für die die Möglichkeit der Entwicklung nach positiven ganzen Potenzen des Inkrements aufhört. Wir werden mit Fuchs auch hier zwei Kategorien von solchen Punkten zu unterscheiden haben. Erstens feste Singularitäten, d. h. solche, die von der Wahl der Anfangswerte, durch die ein Integral bestimmt wird, unabhängig, also allen Integralen gemeinsam und darum aus den Koeffizienten der Differentialgleichung direkt zu entnehmen sind. Zu diesen gehören diejenigen x-Werte, die wir als die Bedingungen 1) bis 3) in bezug auf die algebraische Gleichung (2) zwischen y und s nicht befriedigend von vornherein ausgeschlossen haben, es werden aber noch andere solche feste singuläre Stellen im Laufe der weiteren Untersuchung hervortreten. Zweitens verschiebbare Singularitäten, die von der Wahl der Anfangswerte abhängen. Wir können uns auch sofort Rechenschaft darüber ablegen, auf welche Weise solche verschiebbare Singularitäten zu Tage treten können.

Wenn sich bei der analytischen Fortsetzung der Reihen

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

für einen Wert $\bar{x}$ ein Wert η der Integralfunktion ergibt von der Beschaffenheit, daß das Wertepaar $(\bar{x}, \eta)$ eine der Gleichungen

$$D(\eta, \bar{x}) = 0, \quad A_0(\eta, \bar{x}) = 0$$

befriedigt, so ist die Existenz von Integralfunktionen, die in der Umgebung von $x = \bar{x}$ holomorph sind und in diesem Punkte den Wert η annehmen, in Frage gestellt. Es wird also im allgemeinen ein solcher Wert $\bar{x}$ für dasjenige Integral oder diejenigen Integrale, die daselbst gleich η werden, ein singulärer Punkt sein. Wir werden zunächst das Verhalten der Integralfunktion in der Umgebung solcher x-Werte zu ergründen suchen und dabei unser Augenmerk besonders auf den Fall richten, wo ein derartiger Punkt x ein Verzweigungspunkt eines Integrals sein kann. Wenn wir scharf die Bedingungen aufstellen, unter denen ein solcher Fall eintreten kann, und dann die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) so einschränken, daß diese Bedingungen niemals erfüllt sind, so werden wir diejenige Form der Differentialgleichung (1) anzugeben imstande sein, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Integrale keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen. Wir machen die Ermittelung dieser Form der Differentialgleichung zu unserer ersten Aufgabe und werden demgemäß in der folgenden Untersuchung, die in allem wesentlichen nach der von Fuchs (1884) angegebenen Methode geführt werden soll, immer von Fall zu Fall, gleich den sich ergebenden Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe festhalten.

Was die Untersuchung der Integrale in der Umgebung der festen singulären Stellen anlangt, so hängen die dabei anzuwendenden Methoden naturgemäß von der Art und Weise ab, wie die unabhängige Veränderliche x in die Koeffizienten

$$A_0(y, x), \ldots, A_m(y, x)$$

der Differentialgleichung eingeht.

19. Untersuchung des Falles, wo der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung verschwindet.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Verhaltens der Integralfunktion in der Umgebung einer Stelle x, wo das Integral einen Wert η annimmt, für den

$$A_0(\eta, x) = 0$$

ist.

Die Gleichung

$$A_0(y, x) = 0$$

definiert y als Funktion von x. Wir betrachten einen Zweig

$$y = \eta(x)$$

dieser Funktion, und beschränken x auf ein Gebiet $\mathfrak{B}$ der x-Ebene, innerhalb dessen $\eta(x)$ holomorph ist. Überdies setzen wir voraus, daß die Funktion $\eta(x)$ nicht auch der Diskriminantengleichung Genüge leistet; es soll also für ein willkürliches, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegenes x

$$D(\eta(x), x) \neq 0$$

sein. Setzen wir in (2) $s = \dfrac{1}{\sigma}$, so erhalten wir für σ die Gleichung

$$(8) \qquad A_0(y, x) + A_1(y, x)\sigma + \cdots + A_m(y, x)\sigma^m = 0.$$

Diejenigen x-Werte, für die $A_m(y, x)$ identisch, d. h. unabhängig von y verschwindet, ferner die x-Werte, die eine der beiden Gleichungen

$$A_m(\eta(x), x) = 0, \quad D(\eta(x), x) = 0$$

befriedigen, schließen wir aus und zählen sie zu den festen singulären Punkten der Differentialgleichung (1). Dann hat die Gleichung (8) für $y = \eta(x)$ die einfache Wurzel $\sigma = 0$ und wird, wenn $|y - \eta(x)|$ hinreichend klein ist, durch eine Reihe von der Form

$$(9) \qquad \sigma = \varphi_0 \cdot (y - \eta) + \varphi_1 \cdot (y - \eta)^2 + \cdots$$

befriedigt, wo die $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ in der Umgebung aller nicht ausgeschlossenen x-Punkte von $\mathfrak{B}$ holomorph sind. Einzelne der $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ können aber identisch, d. h. für jeden Wert von x, verschwinden; es seien etwa

$$\varphi_0 = 0, \ldots, \varphi_{n-2} = 0,$$

jedoch

$$\varphi_{n-1} \mid 0 \qquad (n \geqq 1).$$

Dann haben wir also entsprechend der Lösung (9) von (8) eine Lösung s von (2), die für kleine Werte von $|y - \eta|$ in der Form

$$s = \frac{1}{\varphi_{n-1}} (y - \eta)^{-n} \{1 + \delta_1 (y - \eta) + \delta_2 (y - \eta)^2 + \cdots\}$$

darstellbar ist, wo auch $\delta_1, \delta_2, \ldots$ in der Umgebung der nicht ausgeschlossenen Punkte von $\mathfrak{B}$ holomorph sind. Wenn auch φ_{n-1} nicht identisch gleich Null ist, so kann diese Funktion gleichwohl für spezielle, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegene x-Werte verschwinden; sind solche x-Werte vorhanden, so schließen wir sie aus und zählen sie zu den festen Singularitäten. Es sei $x = c$ ein innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt, der nicht zu den ausgeschlossenen gehört, so ist also

$$\varphi_{n-1}(c) \mid 0,$$

und indem wir $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von s setzen, haben wir die Differentialgleichung für y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi_{n-1}} (y - \eta)^{-n} \{1 + \delta_1 (y - \eta) + \delta_2 (y - \eta)^2 + \cdots\}.$$

Führen wir hierin an Stelle von y die Differenz $y - \eta$ als abhängige Variable ein, so kommt

$$\frac{d(y - \eta)}{dx} = -\frac{d\eta}{dx}$$

$$+ \frac{1}{\varphi_{n-1}} (y - \eta)^{-n} \{1 + \delta_1 (y - \eta) + \delta_2 (y - \eta)^2 + \cdots\},$$

oder wenn wir ausmultiplizieren und

$$y - \eta = u$$

setzen:

$$(10) \quad \frac{du}{dx} = -\frac{d\eta}{dx} + \frac{u^{-n}}{\varphi_{n-1}} + \chi_1 u^{-n+1} + \cdots + \chi_n + \chi_{n+1} u + \cdots.$$

Innerhalb $\mathfrak{B}$ ist η, also auch $\frac{d\eta}{dx}$ holomorph, in der Umgebung von $x = c$ sind auch

$$\frac{1}{\varphi_{n-1}}, \chi_1, \ldots, \chi_n, \chi_{n+1}, \ldots$$

holomorphe Funktionen von x; indem wir $\frac{d\eta}{dx}$ mit χ_n vereinigen und auf beiden Seiten von (10) die reziproken Werte nehmen, erhalten wir also

$$\frac{dx}{du} = \varphi_{n-1} u^n \frac{1}{1 + \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 u^2 + \cdots},$$

wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ in der Umgebung von $x = c$ holomorphe Funktionen von x bedeuten. Wir finden demnach endlich

$$\frac{dx}{du} = u^n \{\vartheta_0(x) + \vartheta_1(x) u + \cdots\}, \quad \vartheta_0(c) = \varphi_{n-1}(c) \neq 0,$$

wo $\vartheta_0(x), \vartheta_1(x), \ldots$ in der Umgebung von $x = c$ konvergente gewöhnliche Potenzreihen von $x - c$ sind. Nach dem Cauchyschen Existenztheoreme der Nr. 9 besitzt diese Differentialgleichung ein und nur ein in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, das für $u = 0$ den Wert c annimmt, und für das wegen des Faktors u^n

$$\frac{dx}{du}, \frac{d^2 x}{du^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} x}{du^{n-1}}, \frac{d^n x}{du^n}$$

im Punkte $u = 0$ verschwinden, während

$$\frac{d^{n+1} x}{du^{n+1}}$$

in diesem Punkte einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Die Entwicklung dieses Integrals in der Umgebung von $u = 0$ lautet folglich:

$$x - c = \gamma_{n+1} u^{n+1} + \gamma_{n+2} u^{n+2} + \cdots, \quad \gamma_{n+1} \neq 0,$$

wo die $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ Konstanten bedeuten.

Nach dem Satze von der inversen Funktion folgt hieraus

$$u = \lambda_1 (x - c)^{\frac{1}{n+1}} + \lambda_2 (x - c)^{\frac{2}{n+1}} + \cdots, \quad \lambda_1 = \left(\frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \neq 0,$$

also, wenn wir auf y zurückgehen,

$$(11) \qquad y = \eta(x) + \lambda_1 (x - c)^{\frac{1}{n+1}} + \lambda_2 (x - c)^{\frac{2}{n+1}} + \cdots.$$

Bedeutet also $x = c$ einen willkürlichen, nicht ausgeschlossenen Wert von x innerhalb $\mathfrak{B}$, so sind diejenigen Integrale der Differentialgleichung (1), die für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen, wo

$$(12) \qquad A_0(\eta(c), c) = 0, \quad D(\eta(c), c) \neq 0$$

ist, in der Umgebung von $x = c$ in der Form (11) entwickelbar. Es gibt also $n + 1$ solche Integrale, und da $n \geq 1$ ist, besitzen diese Integrale in $x = c$ einen Verzweigungspunkt.

Wünschen wir also, daß ein willkürlicher Wert $x = c$ nicht Verzweigungspunkt von Integralen der Differentialgleichung werden kann, so müssen wir das Auftreten dieses Falles unmöglich machen. Es wird dann ein Wertepaar $x = c$, $y = \eta(c)$, für das die Bedingungen (12) erfüllt sind, nicht geben dürfen, d. h.

(A). Die Gleichung $A_0(y, x) = 0$ darf keine Lösung $y = \eta(x)$ besitzen, die nicht auch die Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ befriedigt.

20. Untersuchung des Falles, wo die Diskriminante verschwindet. Vorbereitendes.

Wir wenden uns dem Falle zu, wo für einen Wert x die Integralfunktion einen Wert η annimmt, der mit x zusammengenommen der Gleichung

$$D(\eta, x) = 0$$

genügt.

Wir wollen vorerst in der Gleichung (2) dem x einen festen Wert beilegen, der den Bedingungen 1, 2, 3 der Nr. 18 und überdies der folgenden Bedingung genügt:

4. Die Lösungen y der Gleichung $D(y, x) = 0$ seien in der Umgebung dieses Wertes holomorph, und diejenigen unter diesen Lösungen, die für ein willkürliches x von einander verschieden sind, mögen auch für den betrachteten festen x-Wert verschiedene Werte besitzen.

Die Tatsache, daß x diesen festen Wert bedeutet, bringen wir dadurch zum Ausdruck, daß wir bei F, D, A_k und η den Buchstaben x weglassen.

Wenn wir für y die Lösung η der Gleichung $D(\eta) = 0$ einsetzen, so besitzt die Gleichung $F(s, \eta) = 0$ mindestens eine mehrfache Wurzel s. Es sei $s = \zeta$ eine solche, etwa λ-fache Wurzel, so daß also für $y = \eta$, $s = \zeta$ auch noch

$$\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \ldots, \frac{\partial^{\lambda-1} F}{\partial s^{\lambda-1}}$$

verschwinden. Von den m im allgemeinen voneinander verschiedenen Funktionszweigen $s_1, \ldots, s_m$, die die Gleichung $F(s, y) = 0$ befriedigen, nehmen λ für $y = \eta$ den gemeinsamen Wert ζ an; es seien dies die Zweige $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$. Diese sondern sich in Zykeln von der Art, daß die zu einem Zyklus gehörigen Zweige sich bei Umläufen von y um den Punkt η

zyklisch permutieren[1]). Wenn $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$ einen α-gliedrigen Zyklus bilden ($\alpha \leqq \lambda$), so besteht für diese α Zweige für hinreichend kleine Werte von $|y-\eta|$ eine gemeinsame Darstellung von der Form

$$(13)\qquad s_\nu = \zeta + g_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + g_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

in dem Sinne, daß für die verschiedenen $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$ die α verschiedenen Werte von $(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$, also

$$e^{\frac{2q\pi i}{\alpha}}(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, \alpha-1)$$

zu nehmen sind. Der Punkt $y=\eta$ ist, wenn $\alpha > 1$ ist, ein Verzweigungspunkt $(\alpha-1)$-ter Ordnung für die den Zyklus bildenden Funktionszweige $s_1, \ldots, s_\alpha$. Ist die dem $y=\eta$ entsprechende mehrfache Wurzel der Gleichung $F(s,\eta)=0$ unendlich groß, $\zeta=\infty$, so hat man $s=\frac{1}{\sigma}$ zu setzen und erhält entsprechend der Darstellung

$$(14)\qquad \sigma_\nu = g_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + g_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots$$

der für $y=\eta$ verschwindenden Zweige der transformierten Gleichung

$$\sigma^n F\left(\frac{1}{\sigma}, y\right) = 0$$

eine Darstellung der s_ν, die nach positiven und negativen Potenzen von $(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, negative Potenzen aber nur in endlicher Anzahl enthält. Wenn in (14) z. B. $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$ gleich Null sind, aber g_k von Null verschieden ist, so hat man

$$s_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu} = \frac{1}{g_k}(y-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}} \frac{1}{1 + \frac{g_{k+1}}{g_k}(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots},$$

also für hinreichend kleine Werte von $|y-\eta|$

$$(14\text{a})\qquad s_\nu = \frac{1}{g_k}(y-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}}\left\{1 + \delta_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + \delta_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots\right\}.$$

Wir denken uns nun x wieder veränderlich mit der Einschränkung, daß für alle Werte, die x annehmen kann, jedenfalls die Bedingungen 1. bis 4. erfüllt sind. Die mehrfache Lösung s der Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

wird dann auch eine Funktion $\zeta(x)$ von x sein. Wir beschränken nun x

[1]) Die Verteilung in Zykeln und die Bestimmung der Ordnungszahlen der Zykeln erfolgt nach einem von Puiseux herrührenden Verfahren, vgl. z. B. Appell und Goursat, a. a. O. S. 184 ff.

auf ein Gebiet $\mathfrak{B}$, innerhalb dessen neben den Bedingungen 1. bis 4. auch noch die Bedingung erfüllt ist, daß $\zeta(x)$ holomorph bleibt.

Machen wir dann in (2) die Substitution

$$y - \eta(x) = \mathfrak{y}, \quad s - \zeta(x) = \mathfrak{z},$$

so verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}, x) = 0; \tag{15}$$

ihre Diskriminante bezeichnen wir mit $D_1(\mathfrak{y}, x)$. Solange x auf den Bereich $\mathfrak{B}$ beschränkt ist, bleibt (zufolge der Bedingung 4.) die Differenz zwischen $\eta(x)$ und einer anderen Lösung der Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ dem absoluten Betrage nach oberhalb einer angebbaren Schranke. Man kann also in der $\mathfrak{y}$-Ebene um $\mathfrak{y} = 0$ einen Kreis K mit von Null verschiedenem Halbmesser so beschreiben, daß solange x in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{y}$ in K bleibt, $D_1(\mathfrak{y}, x)$ nur im Mittelpunkte von K, dort aber für jeden Wert von x verschwindet. Wir haben dann für die dem Zyklus $s_1, \ldots, s_\alpha$ entsprechenden Lösungen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\alpha$ der Gleichung (15) die der Entwicklung (13) entsprechende Entwicklung

$$\mathfrak{z}_\nu = g_1 \mathfrak{y}^{\frac{1}{\alpha}} + g_2 \mathfrak{y}^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots, \tag{16}$$

wo die $g_1, g_2, \ldots$ jetzt monogene Funktionen von x sind. Diese Funktionen haben für jeden Punkt des Bereichs $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmte, endliche Werte, die sich mit x stetig ändern; sie sind folglich in der Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{B}$ holomorph. — Die gleichen Ergebnisse gelten in sinngemäßer Abänderung, wenn $\zeta(x) = \infty$ ist.

21. Der Fall, wo die Diskriminante verschwindet, der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung aber nicht.

Wir machen nun ausdrücklich die Annahme, daß der die Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ befriedigende Funktionszweig $y = \eta(x)$ nicht auch die Gleichung $A_0(y, x) = 0$ befriedigt. Es soll also innerhalb $\mathfrak{B}$ $A_0(\eta(x), x)$ nicht identisch verschwinden; spezielle x-Werte, für die

$$A_0(\eta(x), x) = 0$$

ist, schließen wir aus und zählen sie zu den festen Singularitäten. Die mehrfache Lösung $s = \zeta(x)$ der Gleichung $F(s, \eta(x), x) = 0$ ist dann sicher endlich und innerhalb $\mathfrak{B}$ holomorph. In der entsprechenden Entwicklung

$$s = \zeta(x) + g_1 (y - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} + g_2 (y - \eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots,$$

die für hinreichend kleine Werte von $|y - \eta|$ gilt, sind dann die $g_1, g_2, \ldots$

holomorphe Funktionen von x, von denen aber einzelne noch identisch verschwinden können. Es sei $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$ gleich Null, aber $g_k \neq 0$; sollte g_k für spezielle x-Werte verschwinden, so schließen wir diese aus und zählen sie zu den festen Singularitäten. Es ist dann

$$(13\text{a}) \qquad s = \zeta(x) + g_k(y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_{k+1}(y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots;$$

setzen wir hierin $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von s, so haben wir für y die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - \zeta = g_k(y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_{k+1}(y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots$$

oder für $y - \eta$ die Differentialgleichung:

$$(17) \qquad \frac{d(y-\eta)}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_k(y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_{k+1}(y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots$$

Es ist nun möglich, daß die Lösung $y = \eta(x)$ der Diskriminantengleichung auch der Differentialgleichung (1)

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

Genüge leistet. Dann muß also $s = \frac{d\eta}{dx}$ eine Lösung der Gleichung

$$(18) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0$$

sein. Es könnte sich ferner ereignen, daß $\frac{d\eta}{dx}$ gerade eine mehrfache Lösung dieser Gleichung, eventuell sogar die von uns betrachtete mehrfache Lösung $\zeta(x)$ ist. Diesen Fall behandeln wir nachher.

Wir setzen also jetzt voraus, daß $\frac{d\eta}{dx}$ nicht für jeden Wert von x mit $\zeta(x)$ übereinstimmt. Sollte für spezielle x-Werte

$$\frac{d\eta}{dx} - \zeta(x) = 0$$

sein, so schließen wir diese x-Werte aus.

Wir setzen

$$y - \eta = u^{\alpha},$$

dann genügt nach (17) u der Differentialgleichung

$$\frac{du^{\alpha}}{dx} = \alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_k u^k + g_{k+1}u^{k+1} + \cdots,$$

woraus für x als Funktion von u die Differentialgleichung

$$(19) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_k u^k + g_{k+1}u^{k+1} + \cdots}$$

folgt.

Es sei $x = c$ ein nicht ausgeschlossener, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt der x-Ebene, dann ist für $x = c$

$$\zeta - \frac{d\eta}{dx} \neq 0, \quad g_k \neq 0.$$

Bezeichnen wir den Wert von $\zeta - \frac{d\eta}{dx}$ im Punkte $x = c$ durch γ, so lautet die Gleichung (19) in der Umgebung von $x = c$, $u = 0$

$$\frac{dx}{du} = \alpha u^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\gamma} + \mathfrak{P}(x-c, u)\right),$$

wo $\mathfrak{P}(x-c, u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - c$ und u bedeutet. Nach dem Existenztheoreme von Cauchy (Nr. 9) besitzt diese Differentialgleichung ein und nur ein in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, das für $u = 0$ den Wert $x = c$ annimmt, und für dieses Integral ist im Punkte $u = 0$

$$\frac{dx}{du} = 0, \ldots, \quad \frac{d^{\alpha-1}x}{du^{\alpha-1}} = 0, \quad \frac{d^{\alpha}x}{du^{\alpha}} = \frac{\alpha!}{\gamma} \neq 0,$$

seine Entwicklung in der Umgebung von $u = 0$ lautet folglich

$$x - c = \frac{1}{\gamma} u^{\alpha} + \delta_1 u^{\alpha+1} + \delta_2 u^{\alpha+2} + \cdots,$$

wo die $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Konstanten bedeuten. Nach dem Satze von der inversen Funktion folgt hieraus

$$u = \gamma^{\frac{1}{\alpha}}(x-c)^{\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_1 (x-c)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots,$$

und hiernach ist in der Umgebung von $x = c$

$$y - \eta = u^{\alpha} = \gamma(x-c) + \mu_1 (x-c)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \mu_2 (x-c)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \cdots. \tag{20}$$

Bedeutet also $x = c$ einen beliebigen nicht ausgeschlossenen Wert von x, so sind diejenigen Integrale der Differentialgleichung (1), die für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ und deren Ableitungen für $x = c$ den Wert $\zeta(c)$ annehmen, wo

$$D(\eta(c), c) = 0, \quad A_0(\eta(c), c) \neq 0, \quad \left(\frac{d\eta}{dx} - \zeta(x)\right)_{x=c} \neq 0$$

ist, in der Umgebung von $x = c$ in der Form (20) entwickelbar. Es gibt stets α solche Integrale, und wenn $\alpha > 1$ ist, haben diese Integrale in $x = c$ einen Verzweigungspunkt.

Wenn wir wünschen, daß der willkürliche Punkt $x = c$ nicht als Verzweigungspunkt gewisser Integrale von (1) soll fungieren können, so muß dieser Fall unmöglich sein, d. h.

$(\mathrm{B})_1$. Wenn $\eta(x)$ eine Lösung der Diskriminantengleichung ist, die die Gleichung

$$A_0(y, x) = 0$$

nicht befriedigt, und einer mehrfachen Wurzel $\zeta(x)$ der Gleichung

$$(\alpha) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0$$

ein Zweig, der durch die Gleichung

$$(\beta) \qquad F(s, y, x) = 0$$

definierten algebraischen Funktion s von y entspricht, der sich für $y = \eta$ verzweigt $(a > 1)$, so muß $\zeta(x)$ mit der Ableitung von $\eta(x)$ übereinstimmen; $\eta(x)$ muß also jedenfalls ein Integral der Differentialgleichung (1) sein.

Nun könnte zu $y = \eta(x)$ noch eine von $\zeta(x)$ verschiedene mehrfache Wurzel $\vartheta(x)$ der Gleichung (α) gehören, der solche Zweige der durch (β) definierten algebraischen Funktion s von y entsprechen, die sich für $y = \eta(x)$ verzweigen. Dann wäre aber jedenfalls

$$\vartheta(x) \neq \frac{d\eta}{dx},$$

der willkürliche Punkt $x = c$ wäre also nach den Ergebnissen dieser Nummer ein Verzweigungspunkt für diejenigen Integrale von (1), die in $x = c$ den Wert $\eta(c)$ und deren Ableitungen in $x = c$ den Wert $\vartheta(c)$ annehmen. Um diese Möglichkeit auszuschließen, haben wir, wenn verschiebbare Verzweigungspunkte nicht auftreten sollen, als weitere Bedingung hinzuzufügen:

$(B)_2$. Es muß

$$s = \frac{d\eta}{dx}$$

die einzige mehrfache Lösung der Gleichung (α) sein, der solche Zweige, der durch (β) definierten algebraischen Funktion s von y entsprechen, die sich für $y = \eta$ verzweigen.

Ehe wir weiter gehen, deuten wir den in dieser Nummer abgehandelten Fall noch geometrisch.

Nach (20) ist für die a Integrale, die in $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen,

$$\left[\frac{d(y-\eta)}{dx}\right]_{x=c} = \gamma, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=c} = \gamma + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c},$$

also nach der Definition von γ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c} = \zeta(c).$$

Geometrisch können wir, indem wir x, y als Cartesische Koordinaten ansehen, jede Integralfunktion durch eine Kurve (Integralkurve) repräsentieren. Die durch (20) in der Umgebung von $x = c$ dargestellten Integrale werden also a Kurven geben, die einander im Punkte $x = c$, $y = \eta(c)$ berühren, da für sie in diesem Punkte $\frac{dy}{dx}$ den gemeinsamen Wert $\zeta(c)$

besitzt. Ferner werden diese α Kurven in diesem Punkte von der Kurve $y = \eta(x)$, die wir kurz die Diskriminantenkurve nennen wollen, geschnitten, aber nicht berührt, da ja

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c} \neq \zeta(c)$$

vorausgesetzt wurde. Der Punkt $x = c$, $y = \eta(c)$ ist für die α Kurven (20) ein sogenannter Rückkehrpunkt. Wir denken uns nun c nicht fest, sondern willkürlich, also als veränderlichen Parameter. Dann stellt die Gleichung (20) in der Umgebung von $x = c$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) dar, indem c als willkürliche Konstante fungiert. Geometrisch haben wir also dann nicht α Kurven, sondern α Scharen von unendlich vielen Kurven; diese α Kurvenscharen sind so beschaffen, daß die demselben c-Werte entsprechenden α Kurven sich stets im Punkte mit der Abszisse $x = c$ berühren, und daß sie in diesem Punkte, der stets ein Rückkehrpunkt ist, von der Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$ geschnitten werden. Es ist also $y = \eta(x)$ der geometrische Ort der Rückkehrpunkte der einander berührenden α Scharen von Integralkurven[1]).

22. Untersuchung der singulären Integrale.

Die Lösung $\eta(x)$ der Diskriminantengleichung möge nun ein Integral der Differentialgleichung (1) sein, und zwar so, daß

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \zeta(x) \tag{21}$$

eine mehrfache Lösung der Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

ist. Das Integral $\eta(x)$ befriedigt dann die beiden Gleichungen

$$F\left(\frac{d\eta}{dx}, \eta, x\right) = 0, \quad F'\left(\frac{d\eta}{dx}, \eta, x\right) = 0, \quad \left(F' = \frac{\partial F(s, y, x)}{\partial s}\right).$$

Differentiieren wir die erste Gleichung total nach x, so folgt mit Rücksicht auf die zweite, daß auch

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

sein muß. Damit also die Differentialgleichung (1) ein Integral von der für $\eta(x)$ angegebenen Beschaffenheit besitzt, ist notwendig, daß die drei Gleichungen

$$F(s, y, x) = 0, \quad F'(s, y, x) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}s + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

[1]) Vergl. G. Darboux. Bulletin des Sciences Mathématiques, T. 4 (1873), S. 158.

gleichzeitig befriedigt werden, indem man für s, y gewisse Funktionen von x setzt.

Wenn man die Differentialgleichung (1) beliebig wählt und die drei Gleichungen (22) ansetzt, so werden sich als gemeinsame Lösungen dieser Gleichungen im allgemeinen gewisse diskrete Wertetripel (s, y, x) ergeben. Eine Differentialgleichung (1) besitzt also „im allgemeinen" kein Integral von der für $\eta(x)$ geforderten Beschaffenheit; die Existenz eines solchen bedingt das Bestehen von gewissen Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung.

Unter Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (21) lautet (17) (S. 78) wie folgt:

$$\text{(17a)}\qquad \frac{d(y-\eta)}{dx} = g_k(y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_{k+1}(y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wenn wir also wieder

$$y - \eta = u^\alpha$$

setzen, so ist

$$\text{(17b)}\qquad \alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx} = g_k u^k + g_{k+1}u^{k+1} + \cdots,$$

$$\text{(23)}\qquad \frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-1-k}}{g_k + g_{k+1}u + g_{k+2}u^2 + \cdots}.$$

Bedeutet c einen willkürlichen, nicht ausgeschlossenen x-Wert innerhalb $\mathfrak{B}$, so ist g_k für $x = c$ von Null verschieden, die Differentialgleichung (23) hat also in der Umgebung von $u = 0$, $x = c$ die Form

$$\text{(24)}\qquad \frac{dx}{du} = u^{\alpha-1-k}\,\mathfrak{P}(x-c, u),$$

wo $\mathfrak{P}(x-c, u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - c$ und u bedeutet. Wir haben jetzt die beiden Fälle

$$\text{I)}\quad \alpha - 1 - k \geqq 0,$$
$$\text{II)}\quad \alpha - 1 - k < 0$$

zu unterscheiden und gesondert zu behandeln.

Im Falle I) haben wir, da k eine positive ganze Zahl ist, $\alpha - 1 \geqq k$, also

$$k < \alpha.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung (24) ist in der Umgebung von $u = 0$, $x = c$ holomorph, nach dem Existenztheorem gibt es demnach ein und nur ein in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, das für $u = 0$ den Wert c annimmt, und für dieses Integral ist die $(\alpha - k)$-te Ableitung die erste, die für $u = 0$ nicht verschwindet; es lautet also:

$$x - c = \gamma_1 u^{\alpha-k} + \gamma_2 u^{\alpha-k+1} + \cdots, \qquad (\gamma_1 \neq 0).$$

Nach dem Satze von der inversen Funktion folgt hieraus

$$u = \delta_1(x-c)^{\frac{1}{a-k}} + \delta_2(x-c)^{\frac{2}{a-k}} + \cdots, \qquad (\delta_1 \neq 0)$$

$$(25) \quad y - \eta = u^a = \varepsilon_1(x-c)^{\frac{a}{a-k}} + \varepsilon_2(x-c)^{\frac{a+1}{a-k}} + \cdots, \quad (\varepsilon_1 \neq 0).$$

In der Umgebung von $x = c$ stellt uns diese Reihe $a-k$ Integrale der Differentialgleichung (1) dar, die für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen und daselbst einen Verzweigungspunkt besitzen, wenn $a - k > 1$ ist.

Wenn wir dafür sorgen wollen, daß der willkürliche Punkt $x = c$ nicht als Verzweigungspunkt gewisser Integrale soll fungieren können, so haben wir also der Differentialgleichung die Bedingung aufzuerlegen, daß $a-k=1$ sei, d. h.

$(C)_1$. Wenn in der Entwicklung (17) (S. 78) die Zahl $a-1-k$ nicht negativ ist, so muß sie gleich Null sein.

Wir wollen nun die Bedeutung der Integrale (25) und ihre Beziehung zu dem Integrale $y = \eta(x)$ erörtern. Es ist im Punkte $x = c$ nicht nur der Wert der $a-k$ Integrale (25) gleich $\eta(c)$, sondern auch der Wert ihrer ersten Ableitungen stimmt für $x = c$ mit dem Werte von $\frac{d\eta}{dx}$ überein, da ja nach (25)

$$\left(\frac{d(y-\eta)}{dx}\right)_{x=c} = 0$$

ist. Betrachten wir wiederum, ähnlich wie in der vorigen Nummer, c als willkürliche Konstante oder als veränderlichen Parameter, so liefert (wie dort) die Gleichung (25) die Darstellung des allgemeinen Integrals von (1) in der Umgebung von $x = c$. Geometrisch gedeutet, stellt (25) $a-k$ Scharen von Integralkurven dar; die Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$, die jetzt selbst auch eine Integralkurve ist, hat die Eigenschaft, daß sie in jedem ihrer Punkte $x = c$, $y = \eta(c)$ von den $a-k$ zusammengehörigen und einander berührenden Individuen der Scharen (25) berührt wird, sie stellt also die Enveloppe dieser $a-k$ Scharen von Integralkurven dar. Der Unterschied gegenüber dem in der vorigen Nummer behandelten Falle besteht also darin, daß dort jeder Punkt $x = c$, $y = \eta(c)$ der Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$ ein Rückkehrpunkt, also ein singulärer Punkt gewisser Integralkurven war, während hier die Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$ selbst eine Integralkurve ist, die in jedem ihrer Punkte $x = c$, $y = \eta(c)$ gewisse $a-k$ Integralkurven berührt. Der Berührungspunkt ist aber im geometrischen Sinne nicht notwendig ein singulärer Punkt jener $a-k$ Integralkurven. In der Tat hat man z. B. für $a = 2$, für die Kurven (25) in der Umgebung von $x = c$ die Entwicklung

$$y = \eta(x) + \varepsilon_1(x-c)^2 + \varepsilon_2(x-c)^3 + \cdots.$$

Man nennt das Integral $y = \eta(x)$ in diesem Falle ein singuläres (vgl. Nr. 18, S. 70).

Die Bedeutung eines singulären Integrals ist also die, daß es als Enveloppe einer von einer willkürlichen Konstanten abhängigen Schar von Integralkurven erscheint.

Denkt man sich diese Schar von Integralkurven durch eine Gleichung von der Form

$$\Phi(y, x, c) = 0 \tag{26}$$

zwischen y, x und der willkürlichen Konstanten c dargestellt, so ergibt sich, wie aus den Elementen der Differentialrechnung bekannt ist, die Enveloppe durch Elimination von c zwischen (26) und der Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Eine Gleichung von der Form (26) nennt man eine allgemeine Integralgleichung der Differentialgleichung (1). Gibt man dem c einen speziellen konstanten Wert, so liefert die Gleichung (26) ein sogenanntes partikuläres Integral; das singuläre Integral, oder die Enveloppe unterscheidet sich von den partikulären Integralen dadurch, daß es im allgemeinen aus (26) nicht durch Spezialisierung der Konstanten c hervorgeht. In gewissen besonderen Fällen kann allerdings auch die Enveloppe durch die Gleichung (26) für einen speziellen konstanten Wert von c gegeben werden; in einem solchen Falle sagt man, daß $\eta(x)$ zugleich singuläres und partikuläres Integral von (1) sei. In bezug hierauf wird die Betrachtung des Falles II) lehrreich sein, der wir uns jetzt zuwenden.

Es sei also $\alpha - 1 - k < 0$, dann lautet die Differentialgleichung (17b)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} u^{k-\alpha+1}(g_k + g_{k+1} u + \cdots),$$

ihre rechte Seite ist also in der Umgebung von $x = c$, $u = 0$ holomorph. Es gibt folglich ein und nur ein in der Umgebung von $x = c$ holomorphes Integral u, das für $x = c$ verschwindet; dieses Integral ist aber offenbar $u = 0$ selbst. Die Differentialgleichung (17a) besitzt demnach als einziges Integral y, das für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annimmt und nach irgendwelchen Potenzen von $x - c$ entwickelbar ist, das Integral $y = \eta(x)$, das also hier nicht als Enveloppe einer Schar von Integralkurven, d. h. nicht als singuläres, sondern als partikuläres Integral auftritt. Es ist aber natürlich nicht ausgeschlossen, daß für einen andern, ebenfalls zur mehrfachen Wurzel $\zeta(x)$ der Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

gehörigen, β-gliedrigen Zyklus von Zweigen der algebraischen Funktion s von y die Entwicklung in der Umgebung von $y = \eta$ die Form

$$s - \zeta(x) = h_0(y-\eta)^{\frac{\lambda}{\beta}} + h_1(y-\eta)^{\frac{\lambda+1}{\beta}} + \cdots, \qquad (h_0 \neq 0)$$

hat, wo $\beta - 1 - \lambda \geq 0$ ist, so daß also diesem Zyklus entsprechend, $y = \eta(x)$ als Enveloppe einer $(\beta - \lambda)$-fachen Schar von Integralkurven auftritt. In einem solchen Falle fungiert also $\eta(x)$ wirklich zugleich als partikuläres und als singuläres Integral (vgl. oben S. 84).

Da in dem Falle II) $x = c$ kein Verzweigungspunkt sein kann, ist dieser Fall, wenn man zu erreichen sucht, daß die Integrale der Differentialgleichung (1) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen sollen, als zulässig zu betrachten; dem Satze $(C)_1$ ist also hinzuzufügen:

$(C)_2$. In der Entwicklung (13a) (S. 78) von s darf die Zahl $\alpha - 1 - k$ negativ sein,

oder indem wir $(C)_1$ mit $(C)_2$ vereinen:

(C). In der Entwicklung (13a) (S. 78) muß $k \geq \alpha - 1$ sein.

23. Untersuchung der Fälle, wo der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung zugleich mit der Diskriminante verschwindet, und wo das Integral selbst unendlich wird.

Es sei nun $y = \eta(x)$ eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen

$$A_0(y, x) = 0, \quad D(y, x) = 0,$$

dann besitzt die Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

die mehrfache Wurzel $s = \infty$. Dieser entsprechen gewisse Zykeln von Zweigen, der durch die Gleichung

$$F(s, y, x) = 0$$

definierten algebraischen Funktion s von y, die für $y = \eta(x)$ den gemeinsamen Wert $s = \infty$ annehmen, also in $y = \eta(x)$ algebraisch unendlich werden. Betrachten wir einen solchen α-gliedrigen Zyklus, so wird dieser in der Umgebung von $y = \eta(x)$ in der Form (14a) (S. 76), also in der Form

$$(27) \quad s = (y-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}}(g_0 + g_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + g_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots)$$

dargestellt, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet, die wir uns so gewählt denken, daß g_0 nicht identisch verschwindet. Bedeutet $\mathfrak{B}$ den Bereich der x-Ebene, innerhalb dessen die Funktion $\eta(x)$ holomorph ist, so sind die $g_0, g_1, \ldots$ ebenfalls innerhalb $\mathfrak{B}$ holomorphe Funktionen von x. Diejenigen x-Werte, für die g_0 gleich Null wird, denken wir uns ausgeschlossen.

Setzen wir $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von s, so folgt aus (27) die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = (y - \eta)^{-\frac{k}{a}}(g_0 + g_1(y - \eta)^{\frac{1}{a}} + \cdots),$$

und wenn wir wiederum

$$y - \eta = u^a$$

einführen:

$$au^{a-1}\frac{du}{dx} = -\frac{d\eta}{dx} + u^{-k}(g_0 + g_1 u + \cdots),$$

$$\frac{dx}{du} = au^{k+a-1}\frac{1}{-\frac{d\eta}{dx}u^k + g_0 + g_1 u + \cdots}$$

Ist nun $x = c$ ein beliebiger innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegener Wert, der nicht zu den ausgeschlossenen gehört, für den also g_0 nicht verschwindet, so ist in der Umgebung von $x = c$, $u = 0$

$$\frac{dx}{du} = au^{k+a-1}\mathfrak{P}(x - c, u),$$

wo $\mathfrak{P}(x - c, u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - c$ und u bedeutet. Da jedenfalls

$$k + a - 1 > 0$$

ist, so besitzt diese Differentialgleichung nach dem Existenztheorem der Nr. 9 ein wohlbestimmtes, in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, das für $u = 0$ den Wert c annimmt. Da die $(k + a)$-te Ableitung dieses Integrals die erste ist, die für $u = 0$ nicht verschwindet, so lautet seine Entwicklung in der Umgebung von $u = 0$:

$$x - c = \gamma_1 u^{k+a} + \gamma_2 u^{k+a+1} + \cdots, \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

also folgt nach dem Satze von der inversen Funktion

$$u = \delta_1(x - c)^{\frac{1}{k+a}} + \delta_2(x - c)^{\frac{2}{k+a}} + \cdots, \qquad (\delta_1 \neq 0)$$

woraus sich für y die in der Umgebung von $x = c$ gültige Entwicklung

$$y = \eta + \varepsilon_1(x - c)^{\frac{a}{k+a}} + \varepsilon_2(x - c)^{\frac{a+1}{k+a}} + \cdots$$

ergibt. Wir haben also $k + a$ Integrale, die für $x = c$ den Wert $y = \eta(c)$ annehmen, und diese Integrale besitzen, da $k + a > 1$ ist, in $x = c$ jedenfalls einen Verzweigungspunkt. Im übrigen ist dieser Fall dem in den Nummern 20, 21 behandelten ganz analog; da nämlich $\eta(x)$ in der Umgebung von $x = c$ holomorph ist, so ist $\frac{d\eta}{dx}$ für $x = c$ endlich, also von $s = \infty$, was hier dem $\zeta(x)$ der Nr. 21 entspricht, verschieden.

Soll das Auftreten von verschiebbaren Verzweigungspunkten ausgeschlossen sein, so darf der hier diskutierte Fall nicht auftreten, d. h.:

(D). Die Gleichung $A_0(y, x) = 0$ darf keine Lösung $y = \eta(x)$

besitzen, die auch die Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ befriedigt.

Damit ist das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung in allen denjenigen Fällen erledigt, wo x keinen der ausgeschlossenen Werte annimmt, und wo das Integral in dem betreffenden x-Punkte einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Um das Verhalten eines Integrals in der Umgebung eines solchen nicht ausgeschlossenen x-Punktes zu diskutieren, wo dieses Integral selbst unendlich wird, hat man nur

$$y = \frac{1}{z}$$

zu setzen und für die Differentialgleichung in z das Verhalten derjenigen Integrale zu untersuchen, die in dem betreffenden x-Punkte verschwinden. Da nach den Ergebnissen der eben abgeschlossenen Untersuchung z in der Umgebung eines jeden solchen x-Wertes nach ganzen oder gebrochenen positiven Potenzen des Inkrements entwickelbar ist, so ist ein solcher x-Wert für ein daselbst unendlich werdendes Integral y entweder ein einfacher Pol oder eine algebraische Unendlichkeitsstelle, je nachdem das in diesem Punkte verschwindende Integral z in der Umgebung desselben holomorph ist oder sich verzweigt.

Wenn wir für die Integrale von (1) das Auftreten verschiebbarer Verzweigungspunkte vermeiden wollen, so werden wir also dafür sorgen müssen, daß ein willkürlicher Punkt x (der nicht zu den ausgeschlossenen gehört) kein Verzweigungspunkt für das in diesem Punkte verschwindende Integral z sei. Wir werden also die Differentialgleichung für z den Bedingungen (A), (B), (C), (D) zu unterwerfen haben, d. h.:

(E). Setzt man in der Differentialgleichung (1) für y den Wert z^{-1} ein, so müssen die Bedingungen (A), (B), (C), (D) auch für die sich so ergebende Differentialgleichung erfüllt sein.

Wenn wir jetzt die Gesamtheit der Punkte x ins Auge fassen, die wir für die Differentialgleichung (1) als auszuschließende bezeichnet haben, und noch diejenigen Punkte hinzufügen, die für die Differentialgleichung in z aus ähnlichen Gründen auszuschließen sind, wenn wir ferner noch feststellen, ob der Punkt $x = \infty$ auszuschließen ist oder nicht, was durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

und Untersuchung des Punktes $\xi = 0$ für die transformierte Differentialgleichung geschehen kann, so erhalten wir eine gewisse Menge von x-Werten, die wir als die **festen singulären Punkte der Differentialgleichung** (1) bezeichnen werden. Wir wollen auch hier — wie in der Nr. 14 —

der Einfachheit wegen annehmen, daß die festen singulären Punkte isoliert liegen. Dies wird z. B. stets zutreffen, wenn in $F(y', y, x)$ die $A_k(y, x)$ auch ganze rationale Funktionen von x sind.

Umgeben wir dann jeden dieser Punkte mit einer unendlich kleinen Kurve und legen Querschnitte von diesen Kurven aus nach $x = \infty$ hin, so erhalten wir eine einfach zusammenhängende Fläche T. In der Umgebung jedes Punktes dieser Fläche kennen wir das Verhalten derjenigen Integrale, die in diesem Punkte einen bestimmten endlichen oder unendlich großen Wert annehmen; jedes solche Integral ist in dieser Umgebung in ähnlicher Weise entwickelbar wie eine algebraische Funktion von x, d. h. nach ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Potenzen des Inkrements, wo aber immer nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen auftreten kann, d. h. es verhält sich innerhalb T algebroid.

Die Möglichkeit, daß ein Integral der Differentialgleichung (1) für einen Punkt von T sich überhaupt keinem bestimmten endlichen oder unendlich großen Werte nähert, d. h. unbestimmt ist, kann ganz in derselben Weise abgewiesen werden, wie in der Nr. 14 in dem dort betrachteten Falle einer Differentialgleichung, die die Ableitung von y als rationale Funktion von y definiert [1]). Man hat zu diesem Zweck nur diejenigen Werte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda$ aufzusuchen, die so beschaffen sind, daß ein Integral y von (1), das für $x = x_1$ einen dieser Werte wirklich annimmt, in der Umgebung von $x = x_1$ einen Pol oder einen algebraischen Verzweigungspunkt besitzt, und weiter genau so zu schließen wie in der Nr. 14. Wir haben demnach den allgemeinen Satz:

Alle Integrale der Differentialgleichung (1) besitzen in der Umgebung eines Punktes der Fläche T den Charakter von algebraischen Funktionen der unabhängigen Variabeln.

Wir werden also zu der einfachsten Klasse von Differentialgleichungen geführt werden, wenn wir die Differentialgleichung (1) so einrichten, daß ihre Integrale innerhalb T den Charakter von rationalen Funktionen besitzen, d. h. so, daß innerhalb von T keine Verzweigungspunkte der Integrale auftreten. Für diese Klasse von Differentialgleichungen, die Fuchs zuerst charakterisiert hat, sind also alle Verzweigungspunkte der Integrale fest; wenn man das Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung der festen singulären Punkte der Differentialgleichung kennt, so kann man, wie für die Riccatische Differentialgleichung, den analytischen Charakter eines durch seine Anfangswerte bestimmten Integrals in der ganzen x-Ebene als bekannt ansehen. Wir kennen auch schon die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Differentialgleichung (1) zu unter-

[1]) Vergl. hierfür Painlevé. Leçons, S. 56ff.: Picard, Traité III (1908) S. 44; Forsyth, Theory etc., Vol. II, S. 266ff.

werfen ist, damit sie zu dieser Klasse gehöre. Sie ergeben sich aus den Bedingungen (A), (B), (C), (D), (E). Ehe wir auf eine Zusammenfassung dieser Bedingungen und auf die weitere Diskussion der Differentialgleichungen, die denselben genügen, eingehen, wollen wir noch einige Bemerkungen über die singulären Integrale zusammenstellen und ein Beispiel für das Auftreten dieser Integrale vorführen.

24. Über die Theorie der singulären Integrale.

Das Auftreten von singulären Integralen hat schon die Analysten des 18. Jahrhunderts beschäftigt, und hat bis in die neueste Zeit den Gegenstand vielfacher Erörterungen und Untersuchungen gebildet. Der erste, der die Existenz dieser Art von Integralen wahrgenommen hat, war Clairaut [1]). Er betrachtete die Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0, \tag{28}$$

für die

$$F(s, y, x) = s^2 - (x+1)s + y = 0,$$
$$F'(s, y, x) = 2s - (x+1) = 0,$$
$$D(y, x) = y - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 0$$

ist. Die Diskriminantengleichung besitzt als einzige Lösung

$$y = \eta(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2,$$

die Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = s^2 - (x+1)s + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 0$$

besitzt als mehrfache (doppelte) Wurzel

$$s = \zeta(x) = \frac{x+1}{2},$$

es ist also

$$\zeta(x) = \frac{d\eta(x)}{dx}.$$

Die Entwicklung (17a) (S. 82) ergibt sich unmittelbar in der Form

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = (\eta - y)^{\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

wir haben also $k = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha - 1 - k = 0$, es liegt somit der Fall I)

[1]) A. C. Clairaut, Histoire de l'Académie de Paris, 1734, S. 196 ff. Über hierher gehörige frühere Bemerkungen Taylors vergl. M. Cantor, Geschichte der Mathematik. Bd. III (1901), S. 460.

der Nr. 22 vor, d. h. $\eta(x)$ ist ein singuläres Integral. Aus (29) folgt durch Integration

$$x - c = -2(\eta - y)^{\frac{1}{2}},$$

wo c die willkürliche Konstante bedeutet; also haben wir (vgl. (25))

$$y - \eta = -\tfrac{1}{4}(x - c)^2,$$

woraus sich, wenn wir $c_1 = \frac{1}{2}(1 + c)$ setzen,

$$y = -c_1^2 + (x + 1)\, c_1 \tag{30}$$

als allgemeines Integral mit der willkürlichen Konstanten c_1 ergibt. Diese Gleichung stellt geometrisch eine Schar von geraden Linien dar, als deren Enveloppe sich in der Tat die durch das singuläre Integral

$$y = \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2$$

repräsentierte Parabel ergibt.

Wie man bemerkt, erhält man die allgemeine Integralgleichung (30) aus der Differentialgleichung (28), indem man $\frac{dy}{dx}$ durch die willkürliche Konstante c_1 ersetzt.

In ähnlicher Weise wird auch die allgemeine Gleichung

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{31}$$

wo f eine beliebige Funktion von $\frac{dy}{dx}$ mit konstanten Koeffizienten bedeutet, integriert. Man bezeichnet diese Gleichung gewöhnlich als Clairautsche Differentialgleichung. Man gelangt zu ihrem allgemeinen Integrale, indem man die Gleichung differentiiert. In der Tat ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2},$$

wo f' die Ableitung von f bedeutet; und hieraus folgt weiter

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0.$$

Die Gleichung

$$x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

liefert im Falle der Differentialgleichung (28) das singuläre Integral. Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

gibt zweimal integriert

$$y = c_1 x + c_2,$$

wo c_1, c_2 Integrationskonstanten bedeuten; setzt man diesen Wert von y in die Differentialgleichung (31) ein, so kommt

$$c_1 x + c_2 = x c_1 + f(c_1),$$

d. h. $c_2 = f(c_1)$, es ist also in der Tat

$$y = c_1 x + f(c_1)$$

das allgemeine Integral.

Wie wir in der Nr. 22 bemerkt haben, muß ein singuläres Integral $\eta(x)$ der Differentialgleichung (1) die Eigenschaft haben, daß die drei Gleichungen (22) (S. 81) befriedigt werden, wenn man

$$y = \eta(x), \quad s = \frac{d\eta(x)}{dx}$$

setzt. Daraus folgt (vgl. a. a. O.), daß eine Differentialgleichung (1) im allgemeinen kein singuläres Integral besitzt. Andererseits haben wir gesehen, daß sich, wenn die allgemeine Integralgleichung (26)

$$\Phi(y, x, c) = 0$$

bekannt ist, durch Elimination von c zwischen dieser Gleichung und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

das singuläre Integral ergibt. Da nun diese Elimination im allgemeinen möglich ist, schloß Lagrange[1]), der dieses Verfahren zur Auffindung des singulären Integrals zuerst angegeben hat, daß eine Differentialgleichung (1) im allgemeinen ein singuläres Integral besitzt. Dieser scheinbare Widerspruch galt lange Zeit hindurch als unlösbares Paradoxon. Hamburger, dem wir in bezug auf die Theorie der singulären Integrale in unseren Auseinandersetzungen gefolgt sind, hat aber gezeigt[2]), daß ein genaues Studium der allgemeinen Integralgleichung (26) zu ebendenselben Bedingungen für die Existenz eines singulären Integrals führt, wie das Studium der Differentialgleichung selbst. Diese zuerst von Hamburger aufgestellten Bedingungen lauten nach den Ergebnissen der Nummern 21, 22 zusammengefaßt wie folgt:

Wenn $y = \eta(x)$ eine Lösung der Diskriminantengleichung ist, so sind drei Fälle möglich:

1) $y = \eta(x)$ ist keine Lösung der Differentialgleichung (1); dann sind diejenigen partikulären Integrale y von (1), die in dem willkürlichen Punkte $x = c$, in dessen Umgebung $\eta(x)$ holomorph ist, den Wert $\eta(c)$ annehmen, in der Umgebung von $x = c$ in der Form

$$(\gamma) \qquad y - \eta = \mathfrak{P}(x - c)$$

entwickelbar, wo $\mathfrak{P}(x - c)$ eine nach positiven ganzen oder gebrochenen

[1]) 1774, J. L. Lagrange, Oeuvres, Bd. IV, S. 1ff.; vergl. ebenda S. 585ff.

[2]) M. Hamburger, Crelles Journal, Bd. 112 (1893), S. 205ff.

Potenzen von $x - c$ fortschreitende Reihe bedeutet, in der der Exponent des Anfangsgliedes nicht größer ist als Eins.

2) $y = \eta(x)$ ist ein singuläres Integral, d. h. Enveloppe einer Schar von Integralkurven; dann haben diese Integralkurven in der Umgebung von $x = c$ eine Entwicklung von der Form (γ), in der der Exponent des Anfangsgliedes (vgl. (25)) größer ist als Eins.

3) $y = \eta(x)$ ist ein partikuläres, eventuell zugleich ein singuläres Integral; dann ist für eine Gruppe von Integralen, die in $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen, $y - \eta(x) = 0$, und wenn für die übrigen dieser Integrale der Anfangsexponent der Entwicklung (γ) nicht größer als Eins ist, so ist $\eta(x)$ nur ein partikuläres, wenn dagegen für einige dieser Integrale der Anfangsexponent größer als Eins ist, so ist $\eta(x)$ zugleich partikuläres und singuläres Integral.

Auf eine Wiedergabe der an die allgemeine Integralgleichung anschließenden Untersuchungen von Hamburger können wir hier nicht eingehen, da das genaue Studium dieser Integralgleichung Hilfsmittel aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erfordert [1]).

[1]) Vergl. dafür Horn, Differentialgleichungen. Sammlung Schubert L (1905), S. 348 ff.

Viertes Kapitel.

Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten.

25. Zusammenfassung der Bedingungen für das Nichtauftreten verschiebbarer Verzweigungspunkte. Briot- und Bouquetsche Differentialgleichungen.

Wie schon am Schlusse der Nr. 23 bemerkt wurde, enthalten bereits die im vorigen Kapitel unter (A) bis (E) formulierten Bedingungen die notwendigen und hinreichenden Einschränkungen, denen die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$(1)\qquad F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = A_0(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + \cdots + A_m(y, x) = 0$$

zu unterwerfen sind, damit die Integrale innerhalb der in der Nr. 23 mit T bezeichneten Fläche den Charakter rationaler Funktionen haben, oder, wie wir mit Fuchs kurz sagen wollen, damit die Differentialgleichung (1) nur feste Verzweigungspunkte besitze.

Zunächst ergibt die Zusammenfassung der Bedingungen (A) (S. 75) und (D) (S. 86), daß die Gleichung $A_0(y, x) = 0$ überhaupt keine (endliche) Lösung y besitzen darf, d. h. die ganze Funktion $A_0(y, x)$ muß von y unabhängig, also eine bloße Funktion von x sein. Dann kann man aber mit dieser Funktion von x durchdividieren und erhält so als Koeffizienten der höchsten Potenz der Ableitung in (1), die Eins.

Setzen wir in (1), wo also jetzt $A_0(y, x) = 1$ vorausgesetzt wird,

$$y = \frac{1}{z},$$

so folgt für z die Differentialgleichung

$$(2)\qquad \left(-\frac{1}{z^2}\right)^m\left(\frac{dz}{dx}\right)^m + A_1\left(\frac{1}{z}, x\right)\left(\frac{-1}{z^2}\right)^{m-1}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + A_m\left(\frac{1}{z}, x\right) = 0.$$

Wenn wir hierin die Nenner durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von z entfernen, d. h. die Differentialgleichung so umformen, daß ihre Koeffizienten ganze rationale Funktionen von z sind, so müssen nach (E) (S. 87) auch für diese Differentialgleichung die Bedingungen (A) und (D) erfüllt, d. h. der Koeffizient der m-ten Potenz von $\frac{dz}{dx}$ muß von z unabhängig sein. Hieraus folgt aber, daß der Koeffizient $A_k(y, x)$ in (1), für $k = 1, 2, \ldots, m$, in y höchstens vom $2k$-ten Grade ist.

Was die Bedingungen (B) (S. 79, 80) und (C) (S. 85) anlangt, so ist zu bemerken, daß jeder von Null verschiedenen Lösung $y = \eta(x)$ der Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ von (1) eine Lösung $z = \frac{1}{\eta(x)}$ der Diskriminantengleichung $D_1(z, x) = 0$ der Differentialgleichung (2) in z entspricht. Soweit also solche Lösungen von $D_1(z, x) = 0$ in Frage kommen, sind die Bedingungen (B) und (C) für die Differentialgleichung (2) von selbst erfüllt, wenn sie für (1) gelten. Es kann aber vorkommen, daß die Diskriminante $D_1(z, x)$ von (2) noch eine Potenz von z als Faktor enthält; in diesem Falle müssen die Bedingungen (B) und (C) für die Lösung $z = 0$ ausdrücklich hinzugefügt werden [1]).

Wir erhalten so den folgenden, im wesentlichen von Fuchs herrührenden Satz [2]):

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Integrale der Differentialgleichung (1) nur feste Verzweigungspunkte besitzen, sind:

1) Die Differentialgleichung hat die Form

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^m + A_1(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + A_m(y, x) = 0,$$

wo $A_1(y, x), \ldots, A_m(y, x)$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten und $A_k(y, x)$ höchstens vom Grade $2k$ in y ist, für $k = 1, 2, \ldots, m$.

2) Ist $y = \eta(x)$ eine Lösung der Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ und $s = \zeta(x)$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung

$$(\alpha) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0,$$

der solche Zweige der durch

$$(\beta) \qquad F(s, y, x) = 0$$

definierten algebraischen Funktion s von y entsprechen,

---

[1]) Dies ist z. B. der Fall für die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d(y - f(x))}{dx}\right]^m = (y - f(x))^{m+r},$$

wo m und r teilerfremde positive ganze Zahlen sind. Dieses Beispiel rührt von Hill und Berry her (Proc. of the London Math. Soc. (2), 9, 1910, S. 231), die auf diese zuletzt genannte Bedingung ausdrücklich hingewiesen haben.

[2]) L. Fuchs, Berliner Sitzungsberichte 1884, S. 707; Werke II, S. 364.

die sich für $y = \eta(x)$ verzweigen, so muß $\zeta(x)$ mit $\frac{d\eta}{dx}$ übereinstimmen, also $\eta(x)$ jedenfalls eine Lösung der Differentialgleichung sein.

3) In der Entwickelung dieser Zweige nach Potenzen von $y - \eta(x)$

$$z - \frac{d\eta}{dx} = g_k(y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_{k+1}(y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots, \qquad (g_k \neq 0)$$

muß $k \geq \alpha - 1$ sein.

4) Die Bedingungen 2) und 3) müssen auch erfüllt sein für die Differentialgleichung, die aus der gegebenen durch die Transformation $z = \frac{1}{y}$ hervorgeht.

Die durch diese Bedingungen charakterisierte Klasse von Differentialgleichungen der Form (1) spielt also hier dieselbe Rolle, wie die Riccatische unter den Differentialgleichungen, in denen $\frac{dy}{dx}$ als rationale Funktion von y gegeben wird.

Ein interessanter und wichtiger Spezialfall von Differentialgleichungen der Form (1), die in diese Klasse gehören, d. h. keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, ergibt sich, wenn wir die Koeffizienten der Differentialgleichung, d. h. also die

$$A_1(y, x), \ldots, A_m(y, x)$$

als von x unabhängige, ganze rationale Funktionen von y (mit konstanten Koeffizienten) voraussetzen. In diesem Falle enthält also F die unabhängige Veränderliche überhaupt nicht explizite, wir können die Differentialgleichung demnach in der Form

$$(3) \qquad F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

schreiben.

Im Falle der Riccatischen Differentialgleichung (Nr. 17, S. 66) ließ sich der analoge Fall durch elementare Integration erledigen, das ist hier nicht möglich, wir können aber, ähnlich wie in der Nr. 17, folgendermaßen schließen:

Offenbar bleibt die Differentialgleichung (3) ungeändert, wenn wir $x + c$ an die Stelle von x setzen, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet; ist also

$$y = f(x)$$

eine Lösung von (3), so ist auch $f(x + c)$ eine Lösung, und zwar, da sie eine willkürliche Konstante enthält, die allgemeine Lösung.

Wäre nun z. B. der im Endlichen gelegene Punkt $x = x_0$ ein Verzweigungspunkt der Integrale von (3), so würde auch $x_0 + c$ für gewisse

Integrale als Verzweigungspunkt fungieren; dies ist aber nicht möglich, da die Verzweigungspunkte nicht verschiebbar sein sollten. Wäre ein solcher Punkt $x = x_0$ eine wesentlich singuläre Stelle der Integrale, so müßte auch $x_0 + c$ für gewisse Integrale eine solche Stelle sein, aber auch dies ist nicht möglich, da wir wissen, daß sich jedes Integral innerhalb der Fläche T algebroid verhält, es kann also nicht ein willkürlicher Punkt $x_0 + c$ als wesentlich singuläre Stelle fungieren. Die Integrale von (3) verhalten sich demnach für alle endlichen Werte von x wie rationale Funktionen. Es kann aber auch der unendlich ferne Punkt $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt sein, denn wäre dies der Fall, so müßte es geschlossene Wege in der x-Ebene geben, auf denen fortgesetzt die Integrale von (3) eine Wertänderung erfahren; da aber die Integrale in der Umgebung jedes Punktes, der innerhalb des von einer geschlossenen Kurve begrenzten endlichen Gebietes der x-Ebene liegt, sich wie rationale Funktionen verhalten, ist es nicht möglich, daß sie längs einer solchen Kurve fortgesetzt eine Wertänderung erfahren. Dagegen kann $x = \infty$ eine wesentlich singuläre Stelle sein, und überdies können die Integrale im Endlichen gelegene Pole haben. Wir haben also den Satz:

Wenn eine Differentialgleichung von der Form (1) die unabhängige Veränderliche nicht explizite enthält und ihre Integrale keine mit den Anfangswerten verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, oder mit anderen Worten, wenn in einer Differentialgleichung, die den Fuchsschen Bedingungen 1) bis 4) genügt, die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen

$$A_1(y, x), \ldots, A_m(y, x)$$

von y, Konstanten sind, so sind die Integrale dieser Differentialgleichung eindeutige Funktionen von x, die nur im Unendlichen einen wesentlich singulären Punkt besitzen können.

Die notwendige und hinreichende Form dieser Differentialgleichungen ergibt sich, wenn man die Koeffizienten einer Differentialgleichung von der Form (3) den Fuchsschen Bedingungen 1) bis 4) unterwirft. Die so entstehende Klasse von Differentialgleichungen haben Briot und Bouquet[1]) zuerst aufgestellt und untersucht, man nennt sie darum gewöhnlich die Briot- und Bouquetschen Differentialgleichungen. Ihre Eigenschaften werden sich als besondere Fälle der Eigenschaften der allgemeinen Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten ergeben, zu deren Darlegung wir jetzt übergehen.

[1]) Briot et Bouquet, Journal de l'École Polytéchnique. Cah. 36, S. 199 ff.

26. Rang einer algebraischen Gleichung. Rang Null, Eins und Zwei.

Bei allen Integrationsproblemen, die sich auf algebraische Funktionen einer Variabeln beziehen, spielt eine Klassifikation dieser Funktionen eine überaus wichtige Rolle, die zuerst Riemann in seiner Theorie der Abelschen Funktionen [1]) allgemein eingeführt hat.

Hat man nämlich eine durch die irreduzible Gleichung m-ten Grades in s

$$F(s, y) = 0 \tag{4}$$

definierte algebraische Funktion s von y, und handelt es sich darum, das Integral

$$\int s\, dy$$

auszurechnen, so zeigt sich, daß die Schwierigkeit dieses Problems nicht von dem Grade m der Gleichung (4), sondern von einer anderen Zahl abhängt, die Riemann durch p bezeichnet, und die von Clebsch das Geschlecht der durch (4) definierten algebraischen Kurve, von Weierstraß der Rang der Gleichung (4) oder der algebraischen Funktion s von y genannt worden ist. Diese positive ganze Zahl hat die merkwürdige Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man von der Gleichung (4) durch die Substitution

$$\begin{cases} s = \varphi(\sigma, \eta), \\ y = \psi(\sigma, \eta), \end{cases} \tag{5}$$

wo φ, ψ rationale Funktionen der beiden neuen Variabeln σ, η bedeuten, zu einer Gleichung zwischen σ und η

$$\Phi(\sigma, \eta) = 0 \tag{6}$$

übergeht, vorausgesetzt, daß sich aus den Gleichungen (4), (5) auch umgekehrt σ, η als rationale Funktionen, der durch die Gleichung (4) miteinander verknüpften Variabeln s, y

$$\begin{cases} \sigma = f(s, y), \\ \eta = g(s, y) \end{cases} \tag{7}$$

ausdrücken lassen. Man nennt eine solche Transformation (5) eine eindeutig umkehrbare rationale oder auch eine birationale Transformation.

Wenn z. B. in (4) der Grad $m = 2$ ist, so darf man ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß diese Gleichung die Form

$$s^2 = R(y) \tag{8}$$

[1]) 1857, B. Riemann, Werke, 1892, S. 88ff.; vergl. z. B. Appell und Goursat, a. a. O. S. 222ff.; Picard, Traité II (1905), S. 417ff.

besitzt, wo $R(y)$ eine ganze rationale Funktion von y bedeutet, die in lauter voneinander verschiedene lineare Faktoren zerlegt werden kann; es sei

$$(9) \qquad R(y) = (y - a_1)(y - a_2) \ldots (y - a_n),$$

wo also $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sämtlich voneinander verschieden sind. Man nennt eine Gleichung von der Form (8) allgemein eine hyperelliptische. Für eine solche bestimmt sich die Riemannsche Zahl p oder der Rang so, daß für ein ungerades n,

$$p = \frac{n-1}{2},$$

dagegen für ein gerades n

$$p = \frac{n-2}{2}$$

ist. Die Gleichung ist also für $n = 2p + 1$ und $n = 2p + 2$ vom Range p, d. h.

$$\begin{array}{llll} \text{für} & n = 1,\ 2 & \text{vom Range} & p = 0, \\ ,, & n = 3,\ 4 & ,, \quad ,, & p = 1, \\ ,, & n = 5,\ 6 & ,, \quad ,, & p = 2, \text{ usw.} \end{array}$$

Im Falle $p = 0$ kann man, wie aus den Elementen der Integralrechnung bekannt ist, das Integral

$$(10) \qquad \int P(s, y)\, dy,$$

wo P eine rationale Funktion der durch die Gleichung (8) verknüpften Variabeln s, y bedeutet, durch elementare Funktionen (algebraische Funktionen, Logarithmus, Arcustangens) in expliziter Form berechnen. Es gelingt dies dadurch, daß man in diesem Falle ($n = 1, 2$) in einfachster Weise eine rationale Funktion

$$t = \chi(s, y)$$

von s und y auffinden kann, durch die sich s und y rational so darstellen lassen,

$$s = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

daß diese beiden Ausdrücke in (8) eingesetzt die Gleichung identisch, d. h. für jeden Wert von t befriedigen. Führt man dann in (10) t als neue Variable ein, so erhält man

$$\int P(s, y)\, dy = \int P(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\, dt,$$

d. h. das Integral einer rationalen Funktion von t.

Im Falle $p = 1$, wo also $R(y)$ eine ganze Funktion dritten oder vierten Grades ist, gelingt die explizite Darstellung eines Integrals von der Form

$$\int P(s, y)\, dy$$

durch elementare Funktionen im allgemeinen nicht mehr; das Integral ist ein elliptisches. Ebensowenig ist eine explizite Berechnung dieses Integrals möglich, wenn s durch eine Gleichung von der Form (8) definiert ist, wo $p > 1$ ist, in welchem Falle das Integral ein hyperelliptisches heißt.

Die genaue Definition der Rangzahl p für eine beliebige algebraische Gleichung (4) erfordert tiefere Kenntnisse aus der Theorie der algebraischen Funktionen[1]). Wir brauchen aber für unsere Zwecke eine solche Definition nicht heranzuziehen; es genügt vielmehr, wenn wir die folgende Erklärung zu Grunde legen.

Eine durch die Gleichung (4)

$$F(s, y) = 0,$$

definierte algebraische Funktion s von y ist vom Range

$$p = 0, 1, 2,$$

wenn die Gleichung (4) durch birationale Transformation

$$\begin{array}{l|l} s = \varphi(\sigma, \eta) & \sigma = f(s, y) \\ y = \psi(\sigma, \eta) & \eta = g(s, y) \end{array}$$

in eine hyperelliptische Gleichung

$$\sigma^2 = R(\eta)$$

transformiert werden kann, die selbst vom Range 0, 1, 2 ist, wo also im Falle $p = 0$ der Grad der ganzen Funktion $R(\eta)$ gleich 1 oder 2, im Falle $p = 1$ gleich 3 oder 4, im Falle $p = 2$ gleich 5 oder 6 ist. In jedem anderen Falle ist der Rang der Gleichung (4) größer als 2. Die Koeffizienten der rationalen Funktionen

$$\varphi, \psi, f, g, R$$

bestimmen sich auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Gleichung (4).

Im Falle $p = 0$ sind σ und η durch einen Parameter t, der selbst rational in σ und η ist, rational darstellbar, in diesem Falle kann also die obige Definition auch durch die folgende ersetzt werden:

Die Gleichung (4) ist vom Range Null, wenn sich eine rationale Funktion t von s und y

$$t = h(s, y)$$

so angeben läßt, daß s, y als rationale Funktionen von t

$$s = \Phi(t), \; y = \Psi(t)$$

so darstellbar sind, daß diese Ausdrücke in (4) eingesetzt diese Gleichung identisch befriedigen.

[1]) Wir verweisen nebst der Abhandlung Riemanns namentlich auf die bereits S. 67 genannten Werke von Appell und Goursat, Hensel und Landsberg, Landfried.

In diesem Falle ist also ein Integral

$$\int P(s, y)\, dy,$$

wo P eine beliebige rationale Funktion von s, y bedeutet, durch Einführung von t als neuer Variabeln auf die Form

$$\int P(\Phi(t), \Psi(t))\Psi'(t)\, dt,$$

d. h. auf das Integral einer rationalen Funktion von t reduzierbar. Man sagt in diesem Falle auch nach Cayley, die Gleichung (4) stelle eine Unikursalkurve dar.

27. Gleichungen vom Range Null.

Die Bedeutung des Ranges p, der durch die Gleichung

$$F(s, y, x) = 0 \tag{11}$$

definierten algebraischen Funktion s von y für das Problem der Integration der Differentialgleichung (1)

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

hat in dem Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung, wo also die Koeffizienten von (1) von x unabhängig sind, zuerst Hermite [1]) zur Geltung gebracht. In seinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen von der Form (1) mit festen Verzweigungspunkten hat Fuchs gleichfalls die Klassifikation dieser Gleichungen nach dem Range der Gleichung (11) (in der, wie auch bisher immer, x die Rolle eines Parameters spielt) in Angriff genommen und die Fälle $p = 0, 1$ erledigt; die Fälle, wo $p \geq 2$ ist, hat dann Poincaré [2]) durch Anwendung einer von der Fuchsschen abweichenden, ganz eigenartigen Methode untersucht.

Nach dem Vorgange von Fuchs behandeln wir zunächst den Fall $p = 0$.

Wenn die durch (11) definierte algebraische Funktion s von y vom Range Null ist, so kann man eine rationale Funktion

$$t = h(s, y) \tag{12}$$

von s und y finden, durch die s und y rational:

$$s = \Phi(t), \quad y = \Psi(t) \tag{13}$$

darstellbar sind. Die Koeffizienten der rationalen Funktion h, Φ, Ψ hängen im allgemeinen noch von x ab, und zwar sind sie algebraisch aus den Koeffizienten der Gleichung (11) zusammengesetzt.

[1]) Ch. Hermite, Cours (lithographié) de l'École Polytechnique 1873; vgl. hierzu noch Fuchs, Comptes Rendus 1881, S. 1063, Werke II, S. 283 und W. Raschke, 1883, Acta Mathematica, Bd. 14 (1890), S. 31.

[2]) H. Poincaré, Acta Mathematica, Bd. 7 (1885), S. 1ff.

Differentiieren wir die zweite der Gleichungen (13) total nach x, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{dt}{dx},$$

und es sind offenbar

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

wieder rationale Funktionen von t. Beachten wir nun, daß

$$s = \frac{dy}{dx} = \Phi(t)$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{dt}{dx} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Phi(t) = 0, \tag{14}$$

die eine Differentialgleichung erster Ordnung für t als Funktion von x darstellt, u. z. eine solche, die $\frac{dt}{dx}$ als rationale Funktion von t bestimmt.

Wenn die Integrale von (1) keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, so hat auch die rationale Funktion t von y und $\frac{dy}{dx}$ keine verschiebbaren Verzweigungspunkte. Nach den Ergebnissen der Nr. 15 ist die Differentialgleichung (14) also eine Riccatische, d. h.

Die Differentialgleichungen (1) mit festen Verzweigungspunkten, in denen die zwischen $\frac{dy}{dx}$ und y bestehende algebraische Gleichung vom Range Null ist, sind durch eine rationale Substitution auf Riccatische Differentialgleichungen reduzierbar.

In dem besonderen Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung, wo die Koeffizienten von (1) und (11) von x unabhängig sind, werden auch die Koeffizienten der rationalen Funktionen $h(s, y)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ Konstanten sein, da sie sich ja aus den Koeffizienten der Gleichung (11) algebraisch zusammensetzen. In diesem Falle sind also auch die Koeffizienten der Riccatischen Differentialgleichung (14) von x unabhängig, diese Gleichung hat also die Form

$$\frac{dt}{dx} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2, \tag{15}$$

wo A_0, A_1, A_2 Konstanten bedeuten.

Wenn die Gleichung

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = 0 \tag{16}$$

die voneinander verschiedenen Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 hat, so folgt aus der in der

Nr. 17, Gleichung (29) für diesen Fall aufgestellten Form des allgemeinen Integrals der Riccatischen Differentialgleichung, daß das allgemeine Integral der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung lautet:

$$y = \psi(t) = \overline{\psi}(e^{A_2(\varrho_1-\varrho_2)x}),$$

wo ψ und $\overline{\psi}$ rationale Funktionen ihrer Argumente mit konstanten Koeffizienten bedeuten. In diesem Falle ist also y eine einfach periodische Funktion von x, die nur im Unendlichen einen wesentlich singulären Punkt besitzt.

Hat dagegen die Gleichung (16) die doppelte Wurzel $\varrho_1 = \varrho_2$, so folgt aus der für diesen Fall geltenden Form (30) der Nr. 17 des allgemeinen Integrals der Riccatischen Differentialgleichung, daß die allgemeine Lösung der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung eine rationale Funktion

$$y = \psi(t) = \overline{\psi}(x)$$

von t und folglich auch von x ist.

Wir wollen an zwei Beispielen zeigen, wie man in diesen beiden Fällen die Integration einer solchen Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung zu vollziehen hat.

Es sei

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}(y^2-4) + 4 - y^2 = 0;$$

wie man sich leicht überzeugt, genügt diese Differentialgleichung den Fuchsschen Bedingungen. Wir haben ferner

$$(17) \qquad F(s, y) = s^2 + s(y^2-4) + 4 - y^2 = 0;$$

dies ist die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung. Eine solche Kurve ist vom Geschlechte Null, wenn sie einen Doppelpunkt besitzt. Dies ist in der Tat der Fall, denn das Wertepaar

$$s = 2, \quad y = 0$$

befriedigt die Gleichungen

$$F(s, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

gleichzeitig. Um nun den Parameter t zu finden, durch den sich s und y rational darstellen lassen, hat man wie folgt zu verfahren. Man legt durch den Doppelpunkt $s = 2$, $y = 0$ ein Strahlbüschel

$$s - 2 = t\,y,$$

wo t einen willkürlichen Parameter bedeutet; dann schneidet jeder Strahl dieses Büschels die Kurve dritter Ordnung (17) in drei Punkten, von denen aber zwei in den Doppelpunkt fallen, so daß nur ein Schnittpunkt von t abhängt. Die Koordinaten dieses dritten Schnittpunktes ergeben sich leicht in der Form

$$y = -\frac{t^2+1}{t}, \quad s = 1 - t^2,$$

und da dieser Schnittpunkt bei veränderlichem t die ganze Kurve beschreibt, haben wir damit die Darstellung der Koordinaten als rationale Funktionen von

$$t = \frac{s-2}{y}$$

gefunden. Die Riccatische Differentialgleichung für t lautet

$$\frac{dt}{dx} = t^2,$$

also ihr allgemeines Integral ($\varrho_1 = \varrho_2 = 0$)

$$t = -\frac{1}{x-c},$$

wir haben folglich

$$y = -\frac{t^2+1}{t} = \frac{1}{x-c} + x - c,$$

d. h. y ist in der Tat eine rationale Funktion.

Wir betrachten ferner die Gleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0,$$

die ebenfalls den Fuchsschen Bedingungen genügt. Wir haben

$$(18) \qquad F(s, y) = s^3 - 3s^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0;$$

setzen wir hierin

$$y^2 = z,$$

so stellt die Gleichung

$$s^3 - 3s^2 - 9z^2 - 12z = 0$$

wieder eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlechte Null dar, denn

$$s = 2, \quad z = -\frac{2}{3}$$

ist ein Doppelpunkt. Durch diesen legen wir das Strahlbüschel

$$3z + 2 = t(s-2),$$

dann ergeben sich die Koordinaten des mit t veränderlichen Schnittpunktes in der Form

$$s = t^2 - 1,$$
$$3z = t^3 - 3t - 2,$$

wir finden also zwischen y und t die Gleichung

$$3y^2 = t^3 - 3t - 2,$$

die, wenn man y, t als Koordinaten auffaßt, wieder eine Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte $y = 0$, $t = -1$ darstellt. Legen wir durch diesen Doppelpunkt das Strahlbüschel

$$y = (t + 1)\tau,$$

so lauten die Koordinaten des mit dem Parameter τ veränderlichen Schnittpunktes

$$t = 3\tau^2 + 2, \quad y = 3\tau(\tau^2 + 1),$$

wir finden also für die Koordinaten der Kurve vierter Ordnung (18) die rationale Darstellung durch den Parameter

$$\tau = \frac{y}{t+1} = \frac{y}{\dfrac{3z+2}{s-2}+1} = \frac{y(s-2)}{3y^2+s}$$

in der Form

$$y = 3\tau(\tau^2 + 1), \quad s = t^2 - 1 = 3(\tau^2 + 1)(3\tau^2 + 1).$$

Die Riccatische Differentialgleichung für τ lautet jetzt

$$\frac{d\tau}{dx} = 1 + \tau^2,$$

ihr allgemeines Integral ist also

$$\tau = \operatorname{tg}(x + c),$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet. Wir finden demnach

$$y = 3\operatorname{tg}^3(x + c) + 3\operatorname{tg}(x + c),$$

d. h. y ist eine einfach periodische Funktion von x. In beiden Beispielen sehen wir übrigens, daß die Pole des allgemeinen Integrals von der willkürlichen Konstanten c abhängen, also mit den Anfangswerten verschiebbar sind [1].

28. Gleichungen vom Range Eins.

Es sei nun die durch die Gleichung (11)

$$F(s, y, x) = 0$$

definierte algebraische Funktion s von y vom Range Eins. Dann kann man zwei durch die Gleichung

$$\sigma^2 = (\eta - g_1)(\eta - g_2)(\eta - g_3)(\eta - g_4) = R(\eta) \tag{19}$$

verknüpfte rationale Funktionen

$$\sigma = f(s, y), \quad \eta = g(s, y) \tag{20}$$

von s, y finden, durch die s und y in der Form

$$s = \varphi(\sigma, \eta), \quad y = \psi(\sigma, \eta), \tag{21}$$

wo φ, ψ rationale Funktionen von σ, η bedeuten, darstellbar sind. Dabei hängen

$$g_1, g_2, g_3, g_4$$

ebenso wie die Koeffizienten von f, g, φ, ψ im allgemeinen noch von x

[1]) Die Beispiele rühren von Hermite (a. a. O.) her.

ab und setzen sich aus den Koeffizienten der Gleichung (11) auf algebraische Weise zusammen.

Da σ^2 ganz und rational in η ist, so ist jede gerade Potenz von σ als ganze rationale Funktion von η, jede ungerade Potenz von σ als das Produkt von σ in eine ganze rationale Funktion von η darstellbar. Man kann folglich φ, ψ in die Form setzen:

$$s = \varphi(\sigma, \eta) = \frac{\varphi_1(\eta) + \psi_1(\eta)\sqrt{R(\eta)}}{\varphi_0(\eta)},$$

$$y = \psi(\sigma, \eta) = \frac{\varphi_2(\eta) + \psi_2(\eta)\sqrt{R(\eta)}}{\varphi_0(\eta)},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten.

Bilden wir nun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{d\eta}{dx}$$

und setzen diesen Ausdruck gleich s, also gleich $\varphi(\sigma, \eta)$, so ergibt sich für η die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{d\eta}{dx} = \varphi(\sigma, \eta).$$

Denken wir uns aus dieser Gleichung $\frac{d\eta}{dx}$ ausgerechnet, so erhalten wir für $\frac{d\eta}{dx}$ eine rationale Funktion von σ und η, die wir in der Form

$$(22) \qquad \frac{d\eta}{dx} = \frac{A + B\sqrt{R(\eta)}}{C}$$

schreiben können, wo A, B, C ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten. Hieraus folgt, daß η der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(23) \qquad C^2\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - 2AC\left(\frac{d\eta}{dx}\right) + A^2 - B^2R(\eta) = 0$$

Genüge leistet, deren Koeffizienten jetzt ganze rationale Funktionen von η sind.

Wenn nun y keine mit den Anfangswerten verschiebbare Verzweigungspunkte besitzt, so gilt das gleiche von s und folglich nach (20) auch für σ, η. Umgekehrt, wenn die Verzweigungspunkte von σ und η fest sind, so sind zufolge von (21) auch die Verzweigungspunkte von y fest.

Es muß also erstens die Differentialgleichung (23) den Fuchsschen Bedingungen genügen, und zweitens dürfen die Verzweigungspunkte von σ nicht von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals η der Differentialgleichung (23) abhängen. Die erste der Fuchsschen

Bedingungen 1) (S. 94) ergibt, daß C gleich Eins, A höchstens vom zweiten und

$$A^2 - B^2 R(\eta)$$

höchstens vom vierten Grade in η sein muß. Da alsdann A^2 höchstens vom vierten Grade und $R(\eta)$ genau vom vierten Grade in η ist, so muß B von η unabhängig, also eine bloße Funktion von x

$$B = \lambda(x)$$

sein; es sei

$$A = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2,$$

wo A_0, A_1, A_2 bloße Funktionen von x sind, so hat also (23) die Form

$$\text{(23a)} \qquad \frac{d\eta}{dx} = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \lambda(x)\sqrt{R(\eta)}.$$

Um die übrigen Fuchsschen Bedingungen in möglichst einfacher Weise befriedigen zu können, wenden wir auf η eine Transformation an, die von Poincaré[1]) angegeben worden ist.

Wir setzen nämlich

$$\eta = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch zu bestimmende Funktionen von x bedeuten, die der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Genüge leisten, und bestimmen diese Funktionen derart, daß

$$\text{für } \eta = g_k, \quad t = a_k \text{ sei}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

wo die a_1, a_2, a_3 von x unabhängig, also Konstanten sind. Wir haben dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} g_k &= \frac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}, \\ a_k(\alpha - g_k\gamma) + \beta - g_k\delta &= 0, \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, 3)$$

aus denen sich die Verhältnisse der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in eindeutiger Weise bestimmen, wenn wir die a_1, a_2, a_3 als voneinander verschieden voraussetzen.

Setzen wir

$$(\alpha - g_1\gamma)(\alpha - g_2\gamma)(\alpha - g_3\gamma)(\alpha - g_4\gamma) = h(x),$$
$$\frac{\beta - g_4\delta}{g_4\gamma - \alpha} = \mu(x),$$

so nimmt σ^2 die Form an:

$$\sigma^2 = R(\eta) = \frac{h(x)}{(\gamma t + \delta)^4}\,(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x)).$$

Ferner wird

$$A = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 = \frac{\nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 t^2}{(\gamma t + \delta)^2},$$

[1]) H. Poincaré. Acta Mathematica, Bd. 7, S. 1ff.; vgl. hierzu auch Painlevé, Leçons. S. 60ff.

wo ν_0, ν_1, ν_2 Funktionen von x bedeuten, und

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{(\gamma t + \delta)^2}\frac{dt}{dx}$$
$$+ \frac{t^2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + t[\alpha'\delta - \alpha\delta' + \beta'\gamma - \beta\gamma'] + \beta'\delta - \beta\delta'}{(\gamma t + \delta)^2},$$

wo $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die Ableitungen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach x darstellen. Setzen wir diese Werte in die Gleichung (23a) ein, so ergibt sich für t die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \tag{24}$$
$$+ P(x)\sqrt{(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x))},$$

wo $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, P(x)$ wohlbestimmte Funktionen von x bedeuten.

Es sind dann t und

$$u = \sqrt{(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x))}$$

rational durch s und y darstellbar, und umgekehrt ist auch

$$s = \frac{\Phi_1 + \Psi_1 \cdot u}{\Phi_0}, \quad y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2 \cdot u}{\Phi_0}, \tag{25}$$

wo $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ ganze rationale Funktionen von t bedeuten deren Koeffizienten noch von x abhängen und sich ebenso wie $\mu(x)$ aus den Koeffizienten der Gleichung (11) auf algebraische Weise zusammensetzen. Es muß nun die Differentialgleichung (24) feste Verzweigungspunkte besitzen, und die Verzweigungspunkte von u müssen von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals t von (24) unabhängig sein.

Für die Differentialgleichung (24) ist die erste der Fuchsschen Bedingungen erfüllt, da sie bereits für (23a) erfüllt war. Um die übrigen Bedingungen [2), 3), 4), S. 94, 95] formulieren zu können, beachten wir, daß in unserem Falle die Diskriminantengleichung nichts anderes ist als

$$u^2 = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x)) = 0.$$

Die gedachten Bedingungen reduzieren sich also einfach darauf, daß

$$a_1, a_2, a_3, \mu(x)$$

Integrale von (24) sein müssen. Da a_1, a_2, a_3 Konstanten sind, muß also zunächst

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_k + \lambda_2 a_k^2 = 0 \qquad (k=1,2,3)$$

sein. Da aber a_1, a_2, a_3 voneinander verschieden sind, so folgt hieraus

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Setzen wir nun in (24) $\mu(x)$ an die Stelle von t, so folgt

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 0,$$

d. h. $\mu(x)$ ist von x unabhängig, also eine Konstante; wir bezeichnen diese durch a_4,

$$\mu(x) = a_4.$$

Dann lautet die Differentialgleichung (24)

$$(26)\qquad \frac{dt}{dx} = P(x)\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)},$$

in dieser Gleichung sind also die Veränderlichen getrennt. Führen wir die Trennung der Veränderlichen wirklich durch und integrieren, so kommt

$$(27)\qquad \int \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}} = \int P(x)\,dx + \text{const.}$$

Um diese Form der Integralgleichung von (26) noch weiter zu entwickeln, betrachten wir vorerst noch den speziellen Fall der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung.

29. Briot- und Bouquetsche Gleichung vom Range Eins.

Wenn die Koeffizienten der in der vorigen Nummer betrachteten Differentialgleichung (1) von x unabhängig, (1) also eine Briot- und Bouquetsche Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

vom Range Eins ist, so sind auch die g_1, g_2, g_3, g_4, ebenso wie die Koeffizienten der in den Gleichungen (20), (21), (25) auftretenden rationalen Funktionen, von x unabhängig, und auch $P(x)$ ist eine Konstante, die wir durch c bezeichnen wollen. Die Gleichungen (26), (27) lauten folglich in diesem Falle:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = c\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}} = cx + c_1, \end{cases}$$

wo c_1 eine willkürliche Konstante bedeutet und die untere Grenze t_0 des Integrals auf der linken Seite der zweiten Gleichung beliebig, aber fest gedacht werden soll.

Da das allgemeine Integral einer Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung eine allenthalben eindeutige Funktion ist, die nur im Unendlichen einen wesentlich singulären Punkt besitzen kann, so folgt, daß die durch die Gleichungen (28) definierte Funktion t von x diese Beschaffenheit hat. Das Integral

$$(29)\qquad \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}}$$

ist ein elliptisches Integral erster Gattung; wir haben also als speziellen Fall unserer allgemeinen Theoreme den schon in der Nr. 6 erwähnten wichtigen Satz:

Die obere Grenze eines elliptischen Integrals erster Gattung aufgefaßt als Funktion des Integralwertes $(cx + c_1)$ ist eine allenthalben eindeutige Funktion, die nur im Unendlichen einen wesentlich singulären Punkt besitzt.

Man nennt diese Funktion eine elliptische.

Die konstanten Größen a_1, a_2, a_3 waren bis jetzt willkürlich; um das elliptische Integral (29) gleich in der Normalform zu erhalten, wählen wir speziell

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty.$$

Wir haben dann zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \delta, \beta, \gamma$, der in der Nr. 28 (S. 106) angegebenen linearen Funktion

$$\eta = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

die Gleichungen

$$\begin{gathered}\beta - g_1\delta = 0,\\ \alpha - g_2\gamma + \beta - g_2\delta = 0,\\ \alpha - g_3\gamma = 0,\end{gathered}$$

und wenn wir noch

$$a_4 = \frac{1}{k^2}$$

setzen, so können wir die Gleichung (26) allgemein in der Form

$$\frac{dt}{dx} = P(x)\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}, \tag{26a}$$

also im Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung die Gleichungen (28) in der Form

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dt}{dx} = c\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)},\\ &\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = cx + c_1\end{aligned}\right. \tag{28a}$$

schreiben, wo wir noch $t_0 = 0$ gewählt haben.

Setzen wir im Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung

$$cx + c_1 = u,$$

und führen in dem elliptischen Integrale erster Gattung durch die Gleichung

$$t = z^2$$

eine neue Integrationsvariable ein, so ergibt sich

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Nach dem eben bewiesenen allgemeinen Satze ist durch diese Gleichung z als eindeutige Funktion von u definiert; man bezeichnet diese Funktion nach Jacobi durch

$$z = \sin \operatorname{am} u$$

(vgl. Nr. 6, S. 25) und setzt

$$\sqrt{1-z^2} = \cos \operatorname{am} u,$$
$$\sqrt{1-k^2z^2} = \Delta \operatorname{am} u.$$

Wir haben also in diesen Zeichen

$$t = \sin^2 \operatorname{am} u, \quad 1-t = \cos^2 \operatorname{am} u, \quad 1-k^2t = \Delta^2 \operatorname{am} u.$$

Das allgemeine Integral y der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung vom Range Eins, das nach (25) in der Form

$$y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}{\Phi_0}$$

darstellbar ist, wo Φ_0, Φ_2, Ψ_2 ganze rationale Funktionen von t mit konstanten Koeffizienten bedeuten, lautet also

$$y = R(\sin \operatorname{am}(cx+c_1),\ \cos \operatorname{am}(cx+c_1),\ \Delta \operatorname{am}(cx+c_1)),$$

wo R eine rationale Funktion andeutet.

Wir erläutern auch in diesem Falle das allgemeine Resultat durch ein Beispiel. Es sei

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^6 - 4 = 0;$$

man überzeugt sich, daß die Fuchsschen Bedingungen für diese Differentialgleichung erfüllt sind. Es ist

$$(30) \qquad F(s, y) = s^3 + 3s^2 + y^6 - 4 = 0;$$

setzen wir $y^3 = \zeta$, so haben wir die Gleichung

$$s^3 + 3s^2 + \zeta^2 - 4 = 0,$$

die eine Kurve dritter Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten s, ζ darstellt. Der Punkt

$$s = -2, \quad \zeta = 0$$

ist ein Doppelpunkt. Legen wir durch ihn das Strahlbüschel

$$\zeta = (s+2)\tau,$$

so sind die Koordinaten des mit τ veränderlichen Schnittpunkts

$$s = 1-\tau^2, \quad \zeta = 3\tau - \tau^3,$$

für s, y ergibt sich also die Darstellung:

$$s = 1-\tau^2, \quad y^3 = 3\tau - \tau^3.$$

Die Gleichung zwischen y und τ stellt in den rechtwinkligen Koordinaten

y, τ wieder eine Kurve dritter Ordnung dar, die aber keinen Doppelpunkt besitzt. Legen wir gleichwohl durch

$$y = 0, \quad \tau = 0$$

ein Strahlbüschel $y = \tau \cdot \eta$, so schneidet jeder Strahl dieses Büschels die Kurve in noch zwei mit dem Parameter η veränderlichen Punkten. Die Koordinaten dieser Punkte lauten

$$\tau = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\eta^3}}, \quad y = \eta \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\eta^3}},$$

wo in beiden Ausdrücken die Wurzel $\sqrt{1+\eta^3}$ mit demselben Vorzeichen zu nehmen ist.

Setzen wir also

$$\sigma = \sqrt{1+\eta^3},$$

so haben wir für s, y die Darstellung

$$s = 1 - \frac{3}{1+\eta^3}, \quad y = \frac{\eta\sqrt{3}}{\sigma},$$

die Gleichung (30) ist also, gemäß der Definition (S. 99), vom Range Eins. Um nun die Differentialgleichung herzustellen, der η als Funktion von x genügt, bilden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2-\eta^3}{\sigma^3} \frac{d\eta}{dx}$$

und setzen dies dem Ausdrucke für s gleich; wir finden auf diese Weise

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\eta^3},$$

woraus sich

$$(31) \qquad -\frac{2}{\sqrt{3}}x + c_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}}$$

ergibt. Es handelt sich nunmehr noch um den Übergang zur Normalform.

Bezeichnen wir eine der komplexen Wurzeln der Gleichung

$$1 + \eta^3 = 0$$

durch α, z. B.

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

so ist

$$1 + \eta^3 = (\eta + 1)(\eta - \alpha)(\eta + \alpha^2);$$

die Substitution

$$\eta + 1 = (1 - \alpha^2) z^2$$

verwandelt dann das elliptische Integral (31) direkt in

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}} = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (k^2 = 1 - \alpha).$$

Wir finden somit

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{3}}x + C = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo C eine willkürliche Konstante

$$C = \frac{c_1}{2}\sqrt{1+a}$$

bedeutet, und

$$y = \frac{\eta\sqrt{3}}{\sigma} = \frac{\sqrt{3}\,[(1-a^2)z^2-1]}{k^2(1+a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{z^2(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

also schließlich, wenn wir

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{3}}x + C = \xi$$

setzen,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{k^2(1+a)^{\frac{3}{2}}}\frac{(1-a^2)\sin^2 \operatorname{am}\xi - 1}{\sin \operatorname{am}\xi \cos \operatorname{am}\xi\,\Delta \operatorname{am}\xi}$$

als das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung[1]).

30. Integration der Differentialgleichung vom Range Eins mit festen Verzweigungspunkten.

Wir kehren nun zu der allgemeinen Differentialgleichung mit festen Verzweigungspunkten zurück, für die die durch die Gleichung (11)

$$F(s, y, x) = 0$$

definierte algebraische Funktion s von y vom Range Eins ist, und wollen uns auch hier die konstanten Größen a_1, a_2, a_3 so gewählt denken, daß

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty$$

ist. Die vierte Wurzel der Gleichung $u^2 = 0$ ist dann, wie in der Nr. 28 gezeigt wurde, ebenfalls von x unabhängig; wir setzen, wie im Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung, diese vierte Wurzel

$$a_4 = \frac{1}{k^2}.$$

Es ist dann nach (25) s, y in der Form

$$\left\{\begin{aligned} s &= \frac{\Phi_1 + \Psi_1\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}{\Phi_0}, \\ y &= \frac{\Phi_2 + \Psi_2\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}{\Phi_0} \end{aligned}\right.$$

darstellbar, wo $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ ganze rationale Funktionen von t

[1]) Dieses Beispiel stammt von Briot und Bouquet, a. a. O.

$$\text{(37a)} \quad \begin{cases} \sqrt{1-y} = \dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-t} - \sqrt{x(1-k^2x)}\sqrt{t(1-k^2t)}}{1-k^2xt}, \\ \sqrt{1-k^2y} = \dfrac{\sqrt{1-k^2x}\sqrt{1-k^2t} - k^2\sqrt{x(1-x)}\sqrt{t(1-t)}}{1-k^2xt} \end{cases}$$

ergibt, die neue abhängige Variable t in die Differentialgleichung (35) einführen. Eine etwas weitläufige, aber keineswegs schwierige Rechnung, die im wesentlichen auf die Methode hinauskommt, nach der zuerst Euler und nach ihm Lagrange die Lösung der Differentialgleichung (35) in algebraischer Form dargestellt haben [1]), ergibt für t die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

wir haben also in der Tat ein Beispiel für den zuletzt behandelten Fall. Da die Koeffizienten von (35) algebraische Funktionen von x sind, ist das allgemeine Integral y selbst algebraisch; wir erhalten es, indem wir in (37) für t die willkürliche Konstante

$$t = \xi$$

einsetzen in der Form

$$\text{(38)} \quad \sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-\xi)(1-k^2\xi)} + \sqrt{\xi}\sqrt{(1-x)(1-k^2x)}}{1-k^2x\xi},$$

und es ist dies gleich dasjenige Integral von (35), das für $x = 0$ den Wert $y = \xi$ annimmt. Da dieses Integral aber durch seine Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist, folgt hieraus, daß die Gleichungen (36) und (38) völlig äquivalent sind.

Die Tatsache, daß das allgemeine Integral der Differentialgleichung (35) algebraisch ist, hat Euler (a. a. O.) entdeckt. Die fundamentale Wichtigkeit dieses Satzes wird am deutlichsten hervortreten, wenn wir in (38) für y, x, ξ ihre Ausdrücke als elliptische Funktionen, wie sie durch die Formeln (36a) gegeben sind, einführen. Die Gleichung (38) lautet dann:

$$\sin \operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \,\Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

und analog ergeben die Gleichungen (37a)

$$\cos \operatorname{am}(u+v) = \frac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \,\Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

$$\Delta \operatorname{am}(u+v) = \frac{\Delta \operatorname{am} u \,\Delta \operatorname{am} v - k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

[1]) Euler 1761, siehe Inst. calc. integralis I (1768), Sect. 2, Cap. 6, Opera, Ser. I, vol. 11, S. 391ff; Lagrange 1768, siehe Théorie des fonctions analytiques, nouv. éd. 1813, chapitre XI; vgl. z. B. H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, 5. Aufl. 1908, S. 44.

Es sind dies die sogenannten Additionstheoreme der elliptischen Funktionen

$$\sin \operatorname{am}, \quad \cos \operatorname{am}, \quad \Delta \operatorname{am}$$

in der Form, wie sie Jacobi[1]) aufgestellt hat.

Es kam uns hier darauf an zu zeigen, wie die für die Entwicklung der neueren Analysis so bedeutungsvolle Entdeckung Eulers, daß die Differentialgleichung (35) in algebraischer Form integriert werden kann, sich in die Lehre von den Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten einordnen läßt.

32. Gleichungen vom Range Zwei. Zusammenfassung der Resultate.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo die Gleichung (11)

$$F(s, y, x) = 0$$

zwischen s und y vom Range $p = 2$ ist[2]). Man kann dann (Nr. 26, S. 99) zwei rationale Funktionen σ, η von s, y:

$$\sigma = f(s, y), \quad \eta = g(s, y) \tag{39}$$

finden, zwischen denen die hyperelliptische Gleichung vom Range Zwei:

$$\sigma^2 = R(\eta) = (\eta - g_1)(\eta - g_2)(\eta - g_3)(\eta - g_4)(\eta - g_5)(\eta - g_6) \tag{40}$$

besteht und durch die sich s, y ebenfalls rational:

$$s = \varphi(\sigma, \eta), \quad y = \psi(\sigma, \eta)$$

darstellen lassen. Die Koeffizienten von f, g, φ, ψ hängen ebenso wie die $g_1, g_2, \ldots, g_6$ im allgemeinen noch von x ab, und setzen sich aus den Koeffizienten der Gleichung (11) auf algebraische Weise zusammen.

Indem man an Stelle von η die lineare Funktion

$$\eta = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

einführt, kann man ebenso wie im Falle $p = 1$ (Nr. 28, S. 106) erreichen, daß drei der Größen g_k konstante Werte annehmen; es sei also von vornherein

$$g_1 = a_1, \quad g_2 = a_2, \quad g_3 = a_3$$

vorausgesetzt, wo a_1, a_2, a_3 von x unabhängig sind.

Die rationalen Funktionen φ, ψ kann man (wie im Falle $p = 1$) in die Form setzen:

$$s = \frac{\Phi_1 + \Psi_1 \cdot \sigma}{\Phi_0}, \quad y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2 \cdot \sigma}{\Phi_0}, \tag{41}$$

wo $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ ganze rationale Funktionen von η mit von x

[1]) C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829), art. 18, Werke I, S. 83.

[2]) Vgl. für das folgende Painlevé, a. a. O.

abhängigen Koeffizienten bedeuten. Differentiiert man diesen Ausdruck für y nach x und vergleicht ihn mit dem Ausdrucke für s, so ergibt sich für η eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{A + B \cdot \sigma}{C}, \tag{42}$$

oder indem wir mit Hilfe von (40) σ eliminieren,

$$C^2\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - 2AC\frac{d\eta}{dx} + A^2 - B^2 R(\eta) = 0, \tag{42a}$$

wo A, B, C ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten.

Damit die Differentialgleichung (1) feste Verzweigungspunkte besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß erstens die Differentialgleichung (42a) feste Verzweigungspunkte hat, und daß zweitens auch die Verzweigungspunkte von σ von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals η der Differentialgleichung (42a) unabhängig sind.

Die Anwendung der ersten Fuchsschen Bedingung auf (42a) ergibt, daß $C = 1$, A höchstens vom zweiten, $A^2 - B^2 R(\eta)$ höchstens vom vierten Grade in η sein muß. Es ist also A von der Form

$$A = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2,$$

wo A_0, A_1, A_2 Funktionen von x bedeuten, und da $R(\eta)$ vom sechsten Grade in η ist, muß notwendig

$$B = 0$$

sein. Die Gleichung (42) lautet also

$$\frac{d\eta}{dx} = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2; \tag{43}$$

dies ist eine Riccatische Gleichung, die Verzweigungspunkte von η sind also bereits festgelegt.

Es sei η_1 dasjenige Integral von (43), das für den nicht singulären Punkt $x = x_0$ den Wert a_1 annimmt und in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph ist; dann haben wir in dieser Umgebung die Entwicklung

$$\eta_1 = a_1 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

$$\delta_1 = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \eta = a_1}}.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für σ ein, so ergibt sich

$$\sigma = [\delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)^2 + \cdots]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\prod_{k=2}^{6}[a_1 - g_k + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)^2 + \cdots]^{\frac{1}{2}},$$

der Punkt $x = x_0$ wird also zufolge des ersten Faktors ein Verzweigungspunkt von σ sein, wenn δ_1 einen von Null verschiedenen Wert hat. Ist dagegen δ_1 gleich Null, so ist x_0 im allgemeinen, d. h. wenn g_4, g_5, g_6 in der

Umgebung von x_0 holomorph und für $x = x_0$ von a_1 verschieden sind, kein Verzweigungspunkt von σ. Soll also der willkürliche Punkt x_0 kein Verzweigungspunkt von σ sein, so muß δ_1 verschwinden, d. h. es muß

$$A_0 + A_1 a_1 + A_2 a_1^2 = 0$$

sein für $x = x_0$, also für ein willkürliches x. Ebenso folgt, daß auch

$$A_0 + A_1 a_2 + A_2 a_2^2 = 0\,,$$
$$A_0 + A_1 a_3 + A_2 a_3^2 = 0$$

sein müssen; wir haben folglich

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0\,,$$

also nach (43)

$$\frac{d\eta}{dx} = 0\,,$$

d. h. η ist eine willkürliche Konstante $\eta = C$, und

$$\sigma = \sqrt{(C-a_1)(C-a_2)(C-a_3)(C-g_4)(C-g_5)(C-g_6)}.$$

Wären nun g_4, g_5, g_6 noch von x abhängig, so hingen die Lösungen der Gleichungen

$$C - g_4 = 0,\ \ C - g_5 = 0,\ \ C - g_6 = 0$$

von C ab, diese Lösungen liefern aber allgemein gesprochen Verzweigungspunkte von σ. Da aber σ keine von C abhängigen Verzweigungspunkte besitzen darf, so müssen die g_4, g_5, g_6 ebenfalls Konstanten,

$$g_4 = a_4,\ g_5 = a_5,\ g_6 = a_6$$

sein.

Wenn also die Differentialgleichung (1) feste Verzweigungspunkte besitzt und $p = 2$ ist, so hat ihr allgemeines Integral nach (41) die Form

$$y = \frac{\Phi_2(C) + \Psi_2(C)\sqrt{(C-a_1)(C-a_2)\ldots(C-a_6)}}{\Phi_0(C)};$$

und da sich die Koeffizienten der ganzen Funktionen Φ_0, Φ_2, Ψ_2 auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Gleichung (11) zusammensetzen, so setzt sich also y selbst auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1) zusammen. Sind die Koeffizienten von (1) insbesondere algebraische Funktionen von x, so ist das allgemeine Integral y selbst eine algebraische Funktion von x.

Wären die Koeffizienten von (1) von x unabhängig, also (1) eine Briot- und Bouquetsche Differentialgleichung, so wäre y konstant, also (1) von der Form

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h. es gibt keine Briot- und Bouquetschen Differentialgleichungen vom Range Zwei.

bedeuten, deren Koeffizienten von x abhängen und sich algebraisch aus den Koeffizienten der Gleichung (11) zusammensetzen; die Größen

$$t,\ \sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}$$

sind selbst rational in s, y. Die Differentialgleichung, der t als Funktion von x genügt, hat, wie schon in der vorigen Nummer bemerkt wurde, die Form (26a)

$$\frac{dt}{dx} = P(x)\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)};$$

es ergibt sich also, wenn wir

$$P(x)\,dx = du$$

setzen:

$$u + C = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}, \tag{32}$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, und folglich

$$t = \sin^2 \operatorname{am}(u + C),$$

$$\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)} = 2 \sin \operatorname{am}(u + C) \cos \operatorname{am}(u + C)\, \Delta \operatorname{am}(u + C),$$

worin u gleich einem bestimmten Werte des Integrals

$$\int P(x)\,dx \tag{33}$$

zu nehmen ist. Wir finden also endlich für das allgemeine Integral y der Differentialgleichung mit festen Verzweigungspunkten den Ausdruck

$$y = R[\sin \operatorname{am}(\textstyle\int P(x)dx + C),\ \cos \operatorname{am}(\int P(x)dx + C),$$
$$\Delta \operatorname{am}(\textstyle\int P(x)dx + C)],$$

wo R den Algorithmus einer rationalen Funktion bedeutet, deren Koeffizienten sich algebraisch aus den Koeffizienten der Differentialgleichung zusammensetzen. Diese Form des allgemeinen Integrals setzt auch die Eigenschaft desselben, keine verschiebbaren Verzweigungspunkte zu besitzen, in Evidenz; in der Tat kann die Konstante C zwar die Lage der Pole, nicht aber die der Verzweigungspunkte von y beeinflussen.

Von besonderem Interesse ist noch die folgende Bemerkung. Die Größe k^2, der sogenannte Modul des elliptischen Integrals (32), und der aus der Umkehrung dieses Integrals entspringenden elliptischen Funktion sin am, ist eine Konstante. Dies ist nicht von vornherein evident; denn wie man leicht einsieht, ist k^2 nichts anderes als der Wert:

$$\frac{g_4 - g_3}{g_4 - g_1} : \frac{g_2 - g_3}{g_2 - g_1}$$

des Doppelverhältnisses (vgl. Nr. 16, S. 59) der vier Größen g_1, g_2, g_3, g_4, die, wie aus ihrer Definition (Nr. 28, S. 104) hervorgeht, im allgemeinen Funktionen von x sind. Die Eigenschaft der Differentialgleichung (1), feste Verzweigungspunkte zu besitzen, bewirkt es, daß dieses Doppelverhältnis einen von x unabhängigen Wert hat.

Wir müssen es uns versagen, die weiteren Konsequenzen aus diesem von Poincaré entdeckten Satze zu ziehen, da wir hierzu noch tiefer in die Theorie der algebraischen Funktionen eindringen müßten; wir verweisen auf die bereits zitierte Abhandlung von Poincaré selbst und auf eine Arbeit von G. Wallenberg[1]), wo gezeigt ist, wie man diesen Satz bei der Ausführung des Integrationsgeschäftes verwerten kann.

Eines besonderen Falles müssen wir aber noch gedenken, der bei den Erörterungen der Nr. 28 stillschweigend ausgeschlossen worden war, des Falles nämlich, wo die durch die Gleichung (22) eingeführte Größe B, von der gezeigt wurde, daß sie eine bloße Funktion von x ist, identisch verschwindet[2]). Der Gang der Rechnung, durch die wir von der Differentialgleichung (23a) zu der Differentialgleichung (24) übergegangen sind, zeigt sofort, daß dann auch die Funktion $P(x)$ identisch gleich Null ist; die Gleichung (24) lautet also jetzt

$$(34) \qquad \frac{dt}{dx} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2,$$

und die weiteren Schlüsse der Nr. 28 verlieren ihre Gültigkeit.

Da t jetzt der Riccatischen Differentialgleichung (34) genügt, sind die Verzweigungspunkte von t jedenfalls fest; aber das genügt noch nicht, damit auch die Verzweigungspunkte von y selbst fest seien. Hierzu ist vielmehr noch erforderlich, daß auch die Verzweigungspunkte von

$$u = \sqrt{(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x))}$$

von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals t der Differentialgleichung (34) unabhängig seien (vgl. S. 107). Um dies zu erreichen, verfahren wir wie folgt.

Es sei x_0 ein beliebiger, nicht singulärer Punkt der Riccatischen Differentialgleichung (34), in dessen Umgebung dasjenige Integral t_1 von (34), das für $x = x_0$ den Wert a_1 annimmt, holomorph ist. Dann ist also in dieser Umgebung

$$t_1 - a_1 = \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \cdots.$$

Setzen wir diese Entwicklung in den Ausdruck für u ein, so erhalten wir

$$u = \left[\left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}}\left[a_1 - a_2 + \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\left[a_1 - a_3 + \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}}\left[a_1 - \mu(x) + \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Von diesen vier Faktoren geben der zweite, dritte und vierte im allgemeinen (d. h. wenn $\mu(x)$ in der Umgebung von x_0 holomorph und für

---

[1]) G. Wallenberg, Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 35 (1890), S. 193 ff.

[2]) Vergl. hierfür Painlevé, Leçons, S. 67 ff.

$x = x_0$ von a_1 verschieden ist) nicht zu einer Verzweigung von u Veranlassung. Dagegen tritt zufolge des ersten Faktors für $x = x_0$ unbedingt eine Verzweigung von u ein, wenn

$$\left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} \neq 0$$

ist. Soll also der willkürliche Punkt x_0 nicht Verzweigungspunkt von u sein können, so muß

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{\substack{x=x_0\\ t=a_1}} = 0,$$

d. h. also, da x_0 ein willkürlicher x Wert ist,

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1^2 = 0$$

sein, und ebenso folgt, daß auch

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2^2 = 0\,,$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 a_3 + \lambda_2 a_3^2 = 0$$

sein müssen. Hiernach ist also notwendig

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

die Gleichung (34) ergibt folglich $t = C$, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Dann hat aber u die Form

$$u = \sqrt{(C - a_1)(C - a_2)(C - a_3)(C - \mu(x))}\,;$$

jede Wurzel der Gleichung

$$C - \mu(x) = 0$$

gibt im allgemeinen zu einem Verzweigungspunkte von u Veranlassung, und da diese Wurzeln von C abhängen, so hätten wir also für u verschiebbare Verzweigungspunkte, wenn nicht $\mu(x)$ konstant ist. Umgekehrt ist die Bedingung

$$\mu(x) = a_4 = \text{const.}$$

offenbar auch hinreichend. Das allgemeine Integral y von (1) lautet dann nach (25):

$$y = \frac{\Phi_2(C) + \Psi_2(C)\sqrt{(C - a_1)(C - a_2)(C - a_3)(C - a_4)}}{\Phi_0(C)},$$

wo die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen Φ_2, Ψ_2, Φ_0, im allgemeinen von x abhängen, sich aber in algebraischer Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1) zusammensetzen.

In diesem Falle ist also y durch algebraische Operationen aus den Koeffizienten der Differentialgleichung zusammengesetzt; wenn diese Koeffizienten z. B. selbst algebraische Funktionen von x sind, so ist y ebenfalls eine algebraische Funktion von x.

31. Additionstheorem der elliptischen Funktionen.

Wir wollen ein interessantes Beispiel für den zuletzt betrachteten Fall vorführen. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} = 0\,, \tag{35}$$

wo k^2 eine Konstante bedeutet. Die Gleichung zwischen s und y ist offenbar vom Range Eins; ferner ergibt sich sofort durch Integration

$$\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} + \text{const.}$$

Bestimmen wir dasjenige Integral y, das für $x = 0$ den Wert $y = \xi$ annimmt, so muß

$$\int\limits_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = \text{const.}$$

sein, wir haben also für das betreffende Integral y

$$\begin{aligned}(36)\qquad &\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} \\ &= \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} + \int\limits_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}}\,,\end{aligned}$$

wo jetzt ξ auch als willkürliche Konstante gelten kann. Setzen wir

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} = u, \quad \int\limits_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = v\,,$$

so ist

$$\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = u + v\,,$$

und wir haben

$$\left\{\begin{array}{l} y = \sin^2 \operatorname{am}(u+v), \\ x = \sin^2 \operatorname{am} u, \quad \xi = \sin^2 \operatorname{am} v. \end{array}\right. \tag{36a}$$

Hieraus folgt ohne weiteres, daß die Verzweigungspunkte der Funktion y von ξ unabhängig sind, was übrigens durch Anwendung der Fuchsschen Kriterien auch direkt aus der Differentialgleichung abgelesen werden kann.

Eigentlich scheint hier die Einführung von t in die Differentialgleichung überflüssig zu sein; wir wollen aber gleichwohl durch die Gleichung

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-t)(1-k^2t)} + \sqrt{t}\sqrt{(1-x)(1-k^2x)}}{1-k^2xt}\,, \tag{37}$$

aus der sich leicht

wo es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten, also im wesentlichen um eine Riccatische Differentialgleichung handelt, und zwar werden wir in den folgenden Kapiteln die Grundzüge der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickeln, auf die ja eine Riccatische Differentialgleichung zurückgeführt worden ist (Nr. 17).

2. Man kann nach den Differentialgleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten, deren Lösungen also in der Fläche T meromorph und mithin eindeutig sind, diejenigen Differentialgleichungen untersuchen, deren Lösungen innerhalb T von endlicher Vieldeutigkeit sind.

In dieser Richtung hat besonders Painlevé eingehende Untersuchungen angestellt [1]). Hier läßt sich auch die Frage einordnen nach den Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeines Integral eine algebraische Funktion der unabhängigen Veränderlichen ist. Sie ist trotz der darauf gerichteten Bemühungen von Darboux, Poincaré und Autonne [2]) von einer Lösung noch weit entfernt.

II. Für die Differentialgleichungen höherer Ordnung oder Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung kommen in Frage:

1. die linearen Differentialgleichungen, von denen, wie schon bemerkt, in den folgenden Kapiteln die Rede sein wird;
2. die Frage nach den Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung, deren Lösungen keine anderen verschiebbaren Singularitäten als Pole besitzen.

Painlevé hat (von 1900 an) nach einer ihm eigentümlichen Methode die Bedingungen dafür angegeben, daß eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die genannte Eigenschaft besitzt, und hat dadurch u. a. einen Typus von Differentialgleichungen entdeckt, deren allgemeine Lösung eine neue eindeutige Transzendente ist [3]). Später (1905) hat Schlesinger gefunden, daß die Theorie der linearen Differentialgleichungen zu einer Klasse von Differentialgleichungen bezw. von Systemen von Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung führt, deren Integrale nur verschiebbare Pole haben. Wir werden über diese Untersuchungen im neunten Kapitel berichten und dort auch die neuere Literatur über diesen Gegenstand zusammenstellen.

[1]) Siehe Painlevé, Leçons etc., S. 92 ff., und Note zu dem in der Fußnote [2]) S. 124 genannten Buche von Boutroux; vergl. ferner J. Malmquist, Acta Mathematica 36 (1910), S. 297, 42 (1920), S. 317.

[2]) Siehe Literaturangaben in dem oben genannten Enzyklopädieartikel von Hilb.

[3]) Eine Behandlung dieser Painlevéschen Transzendenten gibt Horn, a. a. O. S. 379, wo auch Literaturangaben zu finden sind.

Fünftes Kapitel.

Singuläre Stellen linearer Differentialgleichungen.

34. Die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung.

Zur Einführung in die Methoden, die über das Verhalten der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Stellen Aufschluß geben, erscheint es zweckmäßig, mit dem einfachsten Falle der Differentialgleichung (vgl. (20) der Nr. 16)

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} = y \cdot a(x)$$

zu beginnen. Wir haben schon gezeigt, daß alle Singularitäten dieser Differentialgleichung feste sind; es geht dies aber auch unmittelbar daraus hervor, daß, wenn y_1 ein partikuläres und y das allgemeine Integral von (1) bedeutet,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = 0,$$

also

$$\text{(I)} \qquad y = \text{const.}\, y_1$$

ist. Singuläre Stellen eines Integrals von (1) können also nur solche x-Werte sein, wo die Funktion $a(x)$ selbst aufhört holomorph zu sein.

Es sei nun $x = a$ eine isolierte singuläre Stelle von $a(x)$, in deren Umgebung $a(x)$ eindeutig ist, d. h. daß ein geschlossener Weg U, der diesen und keinen anderen singulären Punkt von $a_1(x)$ einmal im positiven Sinne umschließt, die Funktion zu ihrem Ausgangswerte zurückführt.

Das Integral y möge sich, auf dem Wege U fortgesetzt, in $\bar{y}$ verwandelt haben, dann ist $\bar{y}$ ebenfalls ein Integral von (1). Da aber das allgemeine Integral der Gleichung (1) in der Form cy darstellbar ist, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, so haben wir jedenfalls

$$\text{(II)} \qquad \bar{y} = \omega y,$$

wo ω eine bestimmte Konstante darstellt. Es ist nun leicht eine einfache Funktion herzustellen, die sich mit der Konstanten ω multipliziert, wenn x den Weg U beschreibt. Setzen wir

$$r = \frac{\log \omega}{2\pi i},$$

so ist, wenn wir dem $\log \omega$ seine Vieldeutigkeit belassen, r nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt; jedenfalls multipliziert sich aber der Ausdruck

$$\mathfrak{y} = (x - a)^r,$$

wenn x den Weg U beschreibt mit

$$e^{2\pi i r} = \omega.$$

Der Quotient

$$\varphi(x) = \frac{y}{(x-a)^r}$$

ist also in der Umgebung von $x = a$ eindeutig und hat in a eine isolierte Singularität. Wir bemerken noch, daß die Hilfsfunktion $\mathfrak{y}$ selbst einer Differentialgleichung von der Form (1) genügt, nämlich der Gleichung

$$\text{(III)} \qquad \frac{d\mathfrak{y}}{dx} = \mathfrak{y} \cdot \frac{r}{x-a}.$$

Nun ist eine in der Umgebung eines isolierten singulären Punktes $x = a$ eindeutige Funktion, ohne Rücksicht auf die Art ihres Verhaltens in diesem Punkte selbst, in einer gewissen Umgebung von $x = a$ nach dem Laurentschen Satze [1]) nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelbar; wir haben also für den Koeffizienten $\alpha(x)$ eine Entwicklung von der Form

$$\alpha(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (x-a)^k$$

und für $\varphi(x)$ eine ähnliche Entwicklung

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k (x-a)^k.$$

Das Integral y wird also in der Umgebung von $x = a$ die Gestalt haben:

$$\text{(IV)} \qquad y = (x-a)^r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k (x-a)^k;$$

der Umstand, daß der Exponent r nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt ist, kommt bei dieser Darstellung nicht in Betracht, da, wenn die Reihe unendlich viele positive und unendlich viele negative Potenzen von $(x - a)$ enthält, die Änderung von r um eine ganze Zahl nur eine Verschiebung der Glieder innerhalb der Reihe nach sich zieht.

Dadurch ist das Verhalten der Lösung y in der Umgebung der singulären Stelle $x = a$ qualitativ bestimmt. Um nun noch die Darstellung der Lösung in dieser Umgebung quantitativ angeben zu können, muß man suchen, r und die Koeffizienten γ_k wirklich zu berechnen, wenn die Koeffizienten c_k der Entwicklung von $\alpha(x)$ bekannt sind. Diese Aufgabe ist, wie man sich durch Einsetzen der Reihen in die Differentialgleichung sofort überzeugt, durch Anwendung der Methode der unbestimmten Koef-

[1]) Siehe z. B. Knopp, Funktionentheorie (1918), S. 119.

fizienten auf elementare Weise nicht lösbar, wenn die Reihe für y sowohl nach der Seite der positiven als auch nach der Seite der negativen Exponenten hin ins Unendliche geht. Es wird also eine Einschränkung in bezug auf die Natur der singulären Stelle $x = a$ Platz greifen müssen; um diese deutlich zu machen, führen wir die folgende auf Fuchs[1]) zurückgehende Bezeichnung ein.

Wenn eine monogene Funktion $f(x)$ im Punkte $x = a$ eine isolierte singuläre Stelle hat, und es eine Potenz $(x - a)^\varrho$ mit endlichem Exponenten ϱ gibt, so daß das Produkt $f(x) \cdot (x - a)^\varrho$ in der Umgebung von $x = a$ dem absoluten Betrage nach beschränkt ist, d. h. daß $|f(x) \cdot (x - a)^\varrho|$ für alle x, die einer Ungleichung $|x - a| < \delta$ genügen, kleiner bleibt als eine angebbare positive Größe M, so sagen wir, die Funktion $f(x)$ sei im Punkte $x = a$ nicht unbestimmt. Dagegen nennen wir $x = a$ einen Punkt der Unbestimmtheit für die Funktion $f(x)$, wenn eine solche Potenz $(x - a)^\varrho$ nicht existiert. Eine nicht isolierte singuläre Stelle soll stets als Punkt der Unbestimmtheit angesehen werden. Im Sinne dieser Definition ist also eine isolierte wesentlich singuläre Stelle einer eindeutigen Funktion ein Punkt der Unbestimmtheit; dagegen wird z. B. eine Funktion $\varphi(x)$, die in $x = a$ einen Pol von endlicher Ordnung besitzt, und ebenso das Produkt einer solchen Funktion mit einer Potenz $(x - a)^r$ oder mit $\log(x - a)$ in $x = a$ nicht unbestimmt. Eine Laurentsche Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k (x - a)^k$ hat die Stelle $x = a$ zum Punkte der Unbestimmtheit dann und nur dann, wenn die Anzahl der Potenzen mit negativen Exponenten unendlich groß ist. Wie diese Bezeichnung auf das Verhalten einer Funktion für $x = \infty$ anzuwenden ist, bedarf wohl keiner besonderen Erörterung.

Es sei nun vorausgesetzt, daß y in $x = a$ nicht unbestimmt ist. Dann kann man die in der Entwicklung von y in endlicher Anzahl auftretenden Potenzen mit negativen Exponenten durch Abänderung von r zum Wegfall bringen, also diese Entwicklung von y in die Form setzen:

$$\text{(IVa)} \qquad y = (x - a)^r (\gamma_0 + \gamma_1 (x - a) + \cdots),$$

wo

$$\gamma_0 \neq 0$$

ist und r jetzt eine völlig bestimmte Größe bedeutet. Wir sagen dann, die Funktion y gehöre für $x = a$ zum Exponenten r.

Um die Form von $\alpha(x)$ festzustellen, bemerken wir, daß

$$\alpha(x) = \frac{d \log y}{dx} = \frac{1}{x - a} \cdot \frac{r\gamma_0 + \cdots}{\gamma_0 + \gamma_1 (x - a) + \cdots}$$

ist; also haben wir, da der mit $(x - a)^{-1}$ multiplizierte Bruch in der Umgebung von $x = a$ holomorph ist,

[1]) L. Fuchs, 1886, Werke II, S. 394.

Den hier für $p = 2$ abgeleiteten Satz hat Poincaré allgemein für $p > 1$ bewiesen. Den einen Grundgedanken des von Poincaré gegebenen Beweises[1]) haben wir schon im Falle der Riccatischen Differentialgleichung (Nr. 15, S. 57) benützt; er besteht darin, daß das Fehlen von verschiebbaren Verzweigungspunkten ausgenutzt wird, um die Art der Abhängigkeit des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung von den Anfangswerten genauer zu ergründen. Betrachten wir nämlich diejenige Lösung y von (1), die für einen innerhalb der Fläche T gelegenen festen Wert $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt, und deren Ableitung y' für $x = x_0$ gleich einer bestimmten einfachen Wurzel y_0' der Gleichung

$$F(s, y_0, x_0) = 0$$

wird[2]), so daß also

$$(1_0) \qquad F(y_0', y_0, x_0) = 0$$

ist, dann sind y und y' jedenfalls monogene Funktionen von y_0. Wir denken uns nun das Integral y von x_0 aus auf einem ganz innerhalb T verlaufenden Wege nach einem Punkte x hin fortgesetzt, dann sind, da innerhalb T keine Verzweigungspunkte der Funktion y liegen, die Werte von y und y' in x durch die in x_0 vorgeschriebenen Anfangswerte y_0, y_0' eindeutig festgelegt. Zwischen dem durch die Gleichung (1_0) verknüpften Wertepaar (y_0, y_0') und dem durch die Gleichung

$$(1) \qquad F(y', y, x) = 0$$

verknüpften Wertepaar (y, y') besteht also eine eindeutige Beziehung, und zwar ist diese Beziehung gegenseitig eindeutig, da ja dieselbe Überlegung auch gültig bleibt, wenn wir das im Punkte x durch die Anfangswerte y, y' bestimmte Integral auf einem in T verlaufenden Wege nach dem Punkte x_0 hin fortsetzen. Es ist also

$$(44) \qquad \begin{aligned} y &= \Phi(y_0', y_0) \quad & y_0 &= \Phi_0(y', y) \\ y' &= \Psi(y_0', y_0) \quad & y_0' &= \Psi_0(y', y), \end{aligned}$$

wo die Φ, Ψ, Φ_0, Ψ_0 monogene eindeutige Funktionen ihrer Argumente bedeuten, die natürlich noch x_0 und x als Parameter enthalten, und durch die Beziehungen (44) werden die Gleichungen (1_0) und (1) (in denen x_0 und x als Parameter anzusehen sind) ineinander transformiert. Ein genaueres Eingehen auf den analytischen Charakter der zwischen (y', y) und (y_0', y_0) bestehenden Abhängigkeit führt, ähnlich wie in der Nr. 15, zu dem Schlusse, daß die eindeutigen Funktionen $\Phi, \Psi, \Phi_0, \Psi_0$ rationale Funktionen von y_0', y_0 bzw. y', y sind; man kann aber hier dasselbe aus einem Satze von Picard[3]) erschließen, der besagt, daß eine gegenseitig

[1]) Poincaré, a. a. O., vgl. für das folgende Picard. Traité d'Analyse III (1908), S. 82ff.; Painlevé, a. a. O. S. 70ff.

[2]) Werte y_0, für die alle Wurzeln dieser Gleichung mehrfache sind, gibt es nur in endlicher Anzahl; diese üben auf die folgende Überlegung keinen Einfluß aus.

[3]) Siehe Picard. Traité d'Analyse III (1908), S. 63.

eindeutige Transformation zweier algebraischer Kurven ineinander notwendig eine **birationale Transformation** (vgl. Nr. 26) sein muß, wenn feststeht, daß diese Transformation nur **isolierte** wesentlich singuläre Stellen haben kann.

Der zweite Grundgedanke des **Poincaré**schen Beweises besteht in der Heranziehung des folgenden Satzes aus der Theorie der algebraischen Funktionen [1]):

Der Rang der algebraischen Gleichung (1) zwischen y' und y stimmt (vgl. Nr. 26) mit dem der Gleichung (1_0) zwischen y'_0 und y_0 überein. Ist dieser Rang größer als Eins, so kann es nur eine **endliche** Anzahl birationaler Transformationen geben, die diese Gleichungen ineinander überführen, und diese Transformationen lassen sich aus den Koeffizienten der Gleichungen (1), (1_0) durch rein algebraische Operationen herstellen.

Aus diesem Satze folgt nun ohne weiteres, daß die Gleichung

$$y = \Phi(y'_0, y_0)\,,$$

in der Φ eine rationale Funktion von y'_0, y_0 mit von x und x_0 abhängigen Koeffizienten bedeutet, durch algebraische Operationen aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1) hergestellt werden kann; das allgemeine Integral y von (1) ergibt sich also **algebraisch**. Wenn insbesondere die Koeffizienten von (1) algebraisch von x abhängen, so ist y eine algebraische Funktion von x, und das ist der Satz von **Poincaré**.

Wir können mit Benutzung dieses Resultates die Ergebnisse des gegenwärtigen Kapitels wie folgt zusammenfassen:

Wenn für eine Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0,$$

wo F eine ganze rationale Funktion von $\frac{dy}{dx}$ und y bedeutet, die Verzweigungspunkte des allgemeinen Integrals fest sind, so hat man zunächst den Rang p, der durch diese Gleichung bestimmten algebraischen Funktion $\frac{dy}{dx}$ von y festzustellen. Ist $p = 0$, so läßt sich die Differentialgleichung durch eine rationale Transformation auf eine **Riccati**sche Differentialgleichung zurückführen. Ist $p = 1$, so hängt das allgemeine Integral im allgemeinen von einer elliptischen Funktion ab, deren Modul konstant ist und durch die Koeffizienten der Differentialgleichung bestimmt wird, und erfordert überdies noch die Ausführung einer Quadratur ((33), S. 113). Ist $p > 1$, so bestimmt sich das allgemeine Integral auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung.

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung die unabhängige Variable x nicht explizite enthalten (**Briot**- und **Bouquet**sche Gleichung),

[1]) Siehe z. B. **Picard**, Traité d'Analyse II (1905), S. 479ff., III (1908), S. 83.

so ist das allgemeine Integral im Falle $p = 0$ entweder eine rationale oder eine einfach-periodische Funktion, die nur im Unendlichen einen wesentlich singulären Punkt besitzt, im Falle $p = 1$ dagegen eine rationale Funktion von

$$\sin \operatorname{am} u, \quad \cos \operatorname{am} u, \quad \Delta \operatorname{am} u,$$

wo u eine lineare Funktion von x, und der Modul dieser elliptischen Funktionen durch die Koeffizienten der Differentialgleichung bestimmt ist. Der Fall $p > 1$ kann hier nicht auftreten.

33. Geschichtliches. Weitere Fragestellungen [1].

Die Wurzeln der in den Kapiteln 2 bis 4 auseinandergesetzten Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten liegen in der von Gauss (von 1797 ab), Abel und Jacobi (1827) begründeten Lehre von den elliptischen Funktionen, die ja die Integration der Differentialgleichung (28) lieferte. Cauchy und sein Schüler Liouville haben durch die funktionentheoretische Betrachtung der allgemeinen doppeltperiodischen Funktionen der Theorie der elliptischen Funktionen neue fruchtbare Gedanken zugeführt [2]) und Méray, ein Schüler Liouvilles, hat den für die Lehre von den Differentialgleichungen wichtigen Satz aufgestellt, daß eine eindeutige doppeltperiodische Funktion, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, stets einer Differentialgleichung von der Form (3) (S. 95) genügt. Briot und Bouquet haben dann (1855/56) das Studium der jetzt nach ihnen benannten Differentialgleichungen (3), deren allgemeines Integral eine eindeutige Funktion von x ist, aufgenommen und durchgeführt; der bedeutsame Gedanke, den Rang der algebraischen Gleichung zwischen y' und y ins Spiel zu bringen, geht auf Hermite (1873) zurück. Fuchs gab (1884) dem Problem die entscheidende Wendung, indem er die Differentialgleichungen von der allgemeinen Form (1), wo also die abhängige Veränderliche x eingeht, betrachtete und in den Differentialgleichungen, die keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, die Verallgemeinerung der Briot- und Bouquetschen Gleichungen erkannte. Es ist zu bemerken, daß die Methoden, nach denen Raschke (1883) die Briot- und Bouquetschen Differentialgleichungen behandelte, eine wertvolle Vorarbeit für die Untersuchungen von Fuchs bildeten. Poincaré gab unmittelbar nach dem Erscheinen der Fuchsschen Abhandlung seinen am Schluß der vorigen

[1]) Vgl. hierzu den Artikel II B 6 von E. Hilb in der Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. II 2 (1921), S. 563 ff.

[2]) Siehe z. B. Liouville, Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847. Crelles Journal 88 (1880), S. 277.

Nummer ausgesprochenen Satz, durch den gezeigt war, daß die Differentialgleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten keine bis dahin unbekannten Transzendenten, insbesondere keine neuen eindeutigen Funktionen definieren. — Painlevé gab (1887) durch seine genauere Untersuchung der Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten und durch den Beweis des nach ihm benannten Satzes (Nr. 14, S. 53) den Arbeiten von Fuchs und Poincaré ein sicheres Fundament. — Es ist aber außerordentlich bemerkenswert, daß der Painlevésche Satz nur für Differentialgleichungen erster Ordnung gilt. Für Differentialgleichungen höherer Ordnung oder für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung kann es sehr wohl vorkommen, daß sich an den mit den Anfangswerten verschiebbaren singulären Punkten die Integrale nicht mehr algebroid verhalten [1]). So hat die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left[y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2+4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0\,,$$

wie man sofort bestätigt, die allgemeine Lösung

$$y=C_1e^{\frac{1}{x-c_2}}\,,$$

wo C_1, c_2 willkürliche Konstanten bedeuten; die verschiebbare Stelle $x=c_2$ ist aber eine wesentliche Singularität. Für Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung können die verschiebbaren singulären Stellen sogar Linien erfüllen, was — wie Painlevé gezeigt hat — für Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht eintreten kann.

Wir geben nun noch eine Übersicht über die verschiedenen Fragestellungen, die an die im vorhergehenden dargelegten Untersuchungen angeknüpft worden sind.

I. Was die Differentialgleichungen erster Ordnung anlangt, so haben wir

1. die Frage nach dem Verhalten der Integrale in der Umgebung der festen singulären Stellen.

Dafür liegen die ersten Untersuchungen in der klassischen Abhandlung von Briot und Bouquet (1855/56) vor. Neuere Arbeiten in dieser Richtung stammen von Picard, Poincaré, Horn, Boutroux und Malmquist [2]). Wir werden dieser Frage nur in dem Falle näher treten,

[1]) Siehe Picard, Comptes Rendus 1887 I, S. 42; vgl. Painlevé, Leçons etc., S. 394, 413.

[2]) Siehe die Darstellung einiger Ergebnisse dieser Arbeiten bei J. Horn Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Schubert L (1905), S. 319 ff., wo auch Literaturangaben zu finden sind, und bei P. Boutroux, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, Paris 1908; J. Malmquist Archiv för Matem. Astr. och Fysik 15, Nr. 3 (1920), Nr. 27 (1921).

$$a(x) = \frac{1}{x-a}\left\{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots\right\}, \quad c_0 = r.$$

Damit y, und dadurch auch das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), im singulären Punkte a nicht unbestimmt sei, ist also notwendig und hinreichend, daß $\alpha(x)$ in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzt. Die Bestimmung der Größen r und γ_k erfolgt nun durch Einsetzen in die Differentialgleichung nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Man erhält

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(k+r)(x-a)^{k+r-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(x-a)^{k+r} \cdot \frac{1}{x-a} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

also, indem man beiderseits mit $x - a$ multipliziert und die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x - a$ einander gleichsetzt:

$$(2) \quad \gamma_\nu(\nu + r) = c_0\gamma_\nu + c_1\gamma_{\nu-1} + \cdots + c_\nu\gamma_0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

was eine Rekursionsformel für die $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ liefert. Insbesondere ergibt sich für $\nu = 0$

$$\gamma_0 r = c_0\gamma_0,$$

es bleibt also das von Null verschieden vorausgesetzte γ_0 willkürlich, und der Exponent r bestimmt sich zu c_0, d. h. er ist gleich dem Koeffizienten von $(x-a)^{-1}$ in der Entwicklung von $\alpha(x)$ oder dem Cauchyschen schen Residuum von $\alpha(x)$,

$$r = \operatorname{Res}_{x=a} \alpha(x).$$

Wir haben also in diesem Falle die quantitative Bestimmung der Entwicklung des Integrals geleistet.

Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir statt uns wie bisher auf die Umgebung einer einzelnen singulären Stelle zu beschränken, das Verhalten in der ganzen Ebene studieren. Wir wollen zuvörderst $\alpha(x)$ als allenthalben eindeutige Funktion von x voraussetzen und dann die Forderung aufstellen, daß y für keinen Punkt der x-Ebene unbestimmt sein möge. Dann darf $\alpha(x)$ in der ganzen x-Ebene (den Punkt $x = \infty$ eingeschlossen) keine anderen Singularitäten als einfache Pole besitzen, und hieraus folgt [1]), daß $\alpha(x)$ eine rationale Funktion sein muß.

Es seien die im Endlichen gelegenen einfachen Pole von $\alpha(x)$

$$a_1, a_2, \ldots, a_\sigma,$$

so hat also $\alpha(x)$ die Gestalt

$$\alpha(x) = \frac{h(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\sigma)},$$

wo $h(x)$ eine ganze rationale Funktion von x bedeutet. Um noch die Bedingung dafür zu finden, daß auch $x = \infty$ keine Unbestimmtheitsstelle von y ist, führen wir in die Differentialgleichung (1)

[1]) Siehe z. B. Knopp, a. a. O., S. 136.

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{h(x)}{(x - a_1) \ldots (x - a_\sigma)}$$

durch die Transformation

$$x = \frac{1}{\xi}$$

die neue unabhängige Veränderliche ξ ein. Dann muß für die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{dy}{d\xi} = y \cdot \frac{-1}{\xi^2} \frac{h\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\left(\frac{1}{\xi} - a_1\right) \cdots \left(\frac{1}{\xi} - a_\sigma\right)}$$

die Bedingung erfüllt sein, daß y in $\xi = 0$ nicht unbestimmt ist, d. h. es muß der Koeffizient in $\xi = 0$ einen Pol erster Ordnung haben. Daraus folgt aber, daß der Grad von $h(x)$ nicht größer als $\sigma - 1$ sein darf.

Denkt man sich dann $\alpha(x)$ in Partialbrüche zerlegt:

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{r_k}{x - a_k},$$

so ergibt sich das allgemeine Integral von (1) in der Form

$$y = \text{const.} \prod_{k=1}^{\sigma} (x - a_k)^{r_k} \tag{3}$$

in Übereinstimmung mit dem oben für die Exponenten r gefundenen Ergebnis.

Dagegen würde, wenn der Grad m von $h(x)$ größer als $\sigma - 1$ wäre, bei der Partialbruchzerlegung von $\alpha(x)$ noch ein ganzer rationaler Teil $g(x)$ vom Grade $m - \sigma$ auftreten,

$$\alpha(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{r_k}{x - a_k},$$

und das allgemeine Integral von (1)

$$y = e^{\int g(x)dx} \prod_{k=1}^{\sigma} (x - a_k)^{r_k}$$

hätte in diesem Falle in $x = \infty$ einen Punkt der Unbestimmtheit.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{r_k}{x - a_k} \tag{V}$$

ist trotz ihres elementaren Charakters als einfachstes Paradigma einer wichtigen Klasse von Differentialgleichungen für uns von besonderer Bedeutung. Wir bezeichnen sie als zum Fuchsschen Typus gehörig, weil ihre Integrale nirgends unbestimmt sind. Für $\sigma = 1$ reduziert sie sich auf die Differentialgleichung (III), die wir als Cauchysche bezeichnen wollen.

Es mögen nun noch einige Bemerkungen über die Mehrdeutigkeit der Funktion y in der ganzen Ebene gemacht werden. Wir brauchen uns dabei nicht auf die Differentialgleichung (V) zu beschränken, wir können vielmehr den allgemeinen Fall ins Auge fassen, wo der Koeffizient $a(x)$ eine eindeutige Funktion ist, die im Endlichen nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ besitzt.

Wir scheiden die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ durch kleine Kurven aus der Ebene aus und verbinden diese durch Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ mit dem Unendlichen (Fig. 2). Diese Schnitte mögen — das sei ein für allemal verabredet — längs analytischer Kurven, die einander nicht durchsetzen, gelegt werden. In der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T ist das Integral y, das für $x = x_0$ den Anfangswert $y = y_0$ annimmt, allenthalben holomorph, also eindeutig bestimmt. Es fragt sich nun, was mit y geschieht, wenn wir nicht innerhalb T verbleiben, sondern auf einem Wege u fortsetzen, der gewisse der Querschnitte l_ν überschreitet. Wenn dann y in $\bar{y}$ übergegangen ist, so genügt auch $\bar{y}$ der Differentialgleichung (1), es ist also $\bar{y} = c_u y$, wo c_u eine für den Weg u charakteristische Konstante bedeutet.

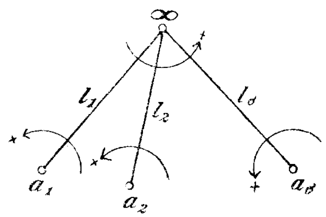

Fig. 2.

Für die Wirkung des Weges u auf die Wertänderung der Funktion ist aber nur maßgebend, in welcher Reihenfolge und in welchem Sinne dieser Weg die einzelnen Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ durchquert. Wir nennen einen **einfachen Schleifenweg** s_ν einen solchen, der nur einen Schnitt l_ν überschreitet, und sagen, die Überschreitung erfolge im **positiven** Sinne, wenn der Übergang in derjenigen Richtung erfolgt, die der Bewegung eines im Punkte a_ν befestigt gedachten Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Analytisch kann dieser Sinn also dadurch definiert werden, daß das Argument von $x - a_\nu$ in diesem Sinne wächst, oder daß sich $\log(x - a_\nu)$ bei Überschreitung von l_ν in diesem Sinne um $2\pi i$ vermehrt. Der Weg u läßt sich dann in seiner Wirkung auf y durch die Aufeinanderfolge solcher teils im positiven, teils im negativen Sinne durchlaufenen Schleifenwege s_ν ersetzen. Multipliziert sich y bei der Fortsetzung längs des im positiven Sinne durchlaufenen Schleifenweges s_ν, d. h. also nach einmaliger Umkreisung des Punktes a_ν im positiven Sinne, mit ω_ν, und durchquert u der Reihe nach g_α-mal den Schnitt l_α, dann g_β-mal den Schnitt $l_\beta, \ldots$, wo $g_\alpha, g_\beta, \ldots$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, je nachdem die Überschreitung im positiven oder negativen Sinne $|g_\alpha|$-mal erfolgt, so ist

$$\text{(VI)} \qquad c_u = \omega_\alpha^{g_\alpha} \cdot \omega_\beta^{g_\beta} \cdot \ldots$$

Man sieht, daß auf diese Weise die Mehrdeutigkeit der Funktion y vollkommen beherrscht wird, wenn man die zu den einzelnen Schleifenwegen s_ν gehörigen Multiplikatoren ω_ν kennt.

Die quantitative Bestimmung dieser ω_ν ist im Falle der Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus sofort gegeben, indem nämlich

$$\omega_\nu = e^{2\pi i r_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ist. Ferner kommt es hier, d. h. für die eine Differentialgleichung (1), nur darauf an, wie oft der Weg u im ganzen die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschritten hat, wobei Überschreitungen desselben Schnitts im positiven und negativen Sinne sich in ihrer Wirkung aufheben, weil ja in dem Ausdruck (VI) der Wert des Produktes von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist. Diese hier trivial erscheinende Bemerkung wird später Bedeutung gewinnen, wenn wir die analogen Betrachtungen für lineare Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung oder für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung durchführen werden.

35. Systeme von zwei linearen Differentialgleichungen. Matrizenkalkül.

Die in der vorigen Nummer gegebenen Entwicklungen beziehen sich auf den besonderen Fall der Riccatischen Differentialgleichung (15) der Nr. 15, wo $a_0 = 0$, $a_2 = 0$ ist. Im allgemeinen Falle hatten wir ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung oder eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung als der Riccatischen Differentialgleichung gleichwertig gefunden. Wir wollen nunmehr die Theorie der Systeme von der Form

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 a_{11} + y_2 a_{21}\,, \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 a_{12} + y_2 a_{22} \end{cases}$$

entwickeln und werden dabei schrittweise die Analogie zu verfolgen suchen zu den in der Nr. 34 für die eine Differentialgleichung (1) gefundenen Ergebnissen. Die einzelnen Schritte sind durch die mit den römischen Ziffern (I) bis (VI) bezeichneten Gleichungen angedeutet.

Ein Existenzbeweis für die Integrale des Systems ist bisher nur für reelle Werte der Veränderlichen x erbracht; um den Beweis für das komplexe Gebiet bequem auseinandersetzen zu können, sollen einige formale Entwicklungen vorausgeschickt werden, bei denen man vorerst, wenn von Integralen die Rede ist, an die im reellen Gebiete definierten denken mag.

Es seien zwei partikuläre Lösungssysteme von (A) y_{11}, y_{12} und y_{21}, y_{22} durch ihre Anfangswerte für $x = x_0$ gegeben:

$$(4) \qquad \begin{aligned} y_{11} &= y_{11}^{(0)}, \quad y_{12} = y_{12}^{(0)}, \\ y_{21} &= y_{21}^{(0)}, \quad y_{22} = y_{22}^{(0)}; \end{aligned}$$

dann bestehen also die vier Gleichungen

$$(A') \qquad \frac{dy_{ik}}{dx} = y_{i1} a_{1k} + y_{i2} a_{2k}. \qquad (i, k = 1, 2)$$

Bedeuten nun y_1, y_2 das allgemeine Lösungssystem, so setzen wir

$$(5) \qquad y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{21}, \quad y_2 = c_1 y_{12} + c_2 y_{22}$$

und stellen uns die Aufgabe, die Natur der Größen c_1, c_2 zu erforschen. Die Berechnung der Größen c_1, c_2 aus den Gleichungen (5) ist sicher möglich, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Wir nehmen darum an, daß die Anfangswerte (4) so gewählt seien, daß

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} y_{11}^{(0)} & y_{12}^{(0)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(0)} \end{vmatrix} \neq 0$$

sei. Dann ergeben sich die c_1, c_2 aus (5) als differentiierbare Funktionen von x. Wir wollen nun die Gleichungen (5) differentiieren und für die Ableitungen y'_{ik} ihre Werte aus (A′), für die y'_k ihre Werte aus (A) einsetzen; dann kommt

$$y_1 a_{1k} + y_2 a_{2k} = c_1(y_{11} a_{1k} + y_{12} a_{2k}) + c_2(y_{21} a_{1k} + y_{22} a_{2k}) + c'_1 y_{1k} + c'_2 y_{2k} \qquad (k = 1, 2)$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (5)

$$(6) \qquad c'_1 y_{1k} + c'_2 y_{2k} = 0. \qquad (k = 1, 2)$$

Da aber die Determinante Δ nicht identisch verschwindet, so folgt aus den beiden Gleichungen (6), $c'_1 = 0$, $c'_2 = 0$, d. h. die c_1, c_2 sind Konstanten. Das ist in gewissem Sinne das Analogon der Gleichung (I).

Diese Analogie kann aber noch sinnfälliger gemacht werden, wenn man neben den y_{ik} ein zweites Paar von partikulären Lösungen u_{11}, u_{12} und u_{21}, u_{22} betrachtet, für das auch die Determinante

$$E = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Man hat dann entsprechend den Gleichungen (5) die Beziehungen

$$(7) \qquad u_{ik} = c_{i1} y_{1k} + c_{i2} y_{2k} \qquad (i, k = 1, 2)$$

mit konstanten c_{ik}, und da nach dem Multiplikationssatz der Determinanten

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$$

ist, so hat die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Wert. Man kann nun nach einem in den verschiedensten Teilen der Mathematik üblichen Verfahren die vier Gleichungen (7) in eine symbolische Form zusammenfassen, indem man ein System von vier Größen, wie z. B. y_{ik} $(i, k = 1, 2)$, als Größensymbol

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = Y,$$

als eine sogenannte Matrix [1]) ansieht und für diese Matrizen Rechnungsregeln aufstellt. Die wichtigste unter diesen Regeln ist die Komposition oder Multiplikation, die so erklärt wird, daß man

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

setzt, wenn die u_{ik} durch die Gleichungen (7) gegeben sind. Man sagt dann, U sei die aus C und Y (in dieser Reihenfolge!) komponierte oder zusammengesetzte Matrix, oder U entstehe aus Y durch Linkskomposition mit C oder aus C durch Rechtskomposition mit Y. Im allgemeinen ist CY von YC verschieden; die Komposition ist im allgemeinen nicht kommutativ, es gilt aber allemal (Gl. (8)):

$$|CY| = |YC| = |C| \cdot |Y|.$$

Wenn insbesondere

$$CY = YC$$

ist, so heißen C und Y vertauschbare Matrizen.

Definiert man die Addition zweier Matrizen durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

so ist diese Operation ersichtlich kommutativ; ferner gilt das distributive Gesetz

$$C(A + B) = CA + CB$$

und für Addition und Komposition das assoziative Gesetz

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$
$$(AB)\,C = A\,(BC) = ABC.$$

[1]) Die Matrix, deren Elemente durch kleine Buchstaben mit Doppelindex dargestellt sind, bezeichnen wir im folgenden stets durch den entsprechenden großen Buchstaben. Dieser große Buchstabe zwischen vertikalen Strichen soll den Wert der Determinante der Matrix bedeuten, also z. B. $|Y| = \Delta$.

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Einheitsmatrix**, wir bezeichnen sie mit I und ihre Elemente mit $\delta_{ik}(i, k = 1, 2)$, so daß also $\delta_{11} = \delta_{22} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ist. Jede Matrix bleibt ungeändert, wenn man sie von rechts oder von links mit I komponiert.

Die Kompositionsgleichungen (7) kann man, da $|C| = \Gamma$ von Null verschieden ist, nach den y_{ik} auflösen und findet

$$\text{(7a)} \qquad y_{ik} = c'_{i1} u_{1k} + c'_{i2} u_{2k}, \qquad (i, k = 1, 2)$$

$$\text{(10)} \quad c'_{11} = \frac{c_{22}}{|C|}, \quad c'_{12} = \frac{-c_{12}}{|C|}, \quad c'_{21} = \frac{-c_{21}}{|C|}, \quad c'_{22} = \frac{c_{11}}{|C|}.$$

Die Matrix C' heißt die zu C **inverse** und man schreibt

$$\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix} = C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^{-1} = C^{-1};$$

offenbar ist dann auch C die inverse Matrix von C' und man hat

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} CC' &= C'C = I \\ |C|\,|C'| &= 1. \end{aligned}$$

Aus

$$\text{(9a)} \qquad U = CY$$

folgt

$$\text{(12)} \qquad U^{-1} = Y^{-1}C^{-1},$$

denn es ist

$$UY^{-1}C^{-1} = CYY^{-1}C^{-1} = CIC^{-1} = CC^{-1} = I.$$

Sind die Elemente y_{ik} der Matrix Y differentiierbare Funktionen von x, so schreiben wir

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx} \\ \frac{dy_{21}}{dx} & \frac{dy_{22}}{dx} \end{pmatrix} = \frac{dY}{dx}.$$

Mit dieser Bezeichnungsweise kann das System der Gleichungen (A′) in die symbolische Gleichung

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \frac{dY}{dx} = YA$$

zusammengefaßt werden. Da $|Y| \neq 0$ ist, können wir statt dessen auch schreiben

$$\text{(13)} \qquad Y^{-1}\frac{dY}{dx} = A;$$

wir sehen, daß die Koeffizienten des Differentialsystems (A) in einfacher Weise durch die Elemente der Matrix Y dargestellt werden können, so daß also durch die Matrix Y der gesamte Inhalt des Differentialsystems (A) erschöpft wird. Wir nennen Y eine **Integralmatrix** des Differentialsystems (A) oder (A′).

Es treten hier zwei wohl zu unterscheidende Formen des Differentialsystems (A) auf. Einmal die ursprüngliche Form (A), für die die **allgemeine** Lösung y_1, y_2 in der Form (5) durch die Elemente y_{ik} der Integralmatrix Y dargestellt wird. Dann aber die Form (A′), wo die Elemente einer Integralmatrix selbst vorkommen. Der Übergang von der Integralmatrix Y zu der Integralmatrix U wird durch die Gleichung (9) oder

$$U = CY \tag{9}$$

vermittelt, wo C eine **konstante** Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Umgekehrt stellt

$$Z = \Gamma Y \tag{14}$$

stets eine Integralmatrix von (A) dar, wenn Γ **irgendeine** konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. In der Tat ist nach den Kompositionsgleichungen (7)

$$z_{ik} = \gamma_{i1} y_{1k} + \gamma_{i2} y_{2k},$$

also

$$\frac{dZ}{dx} = \Gamma \frac{dY}{dx},$$

folglich nach (12)

$$Z^{-1} \frac{dZ}{dx} = Y^{-1} \Gamma^{-1} \Gamma \frac{dY}{dx} = Y^{-1} \frac{dY}{dx} = A\,. \tag{15}$$

Wie zu der Form (A) die allgemeine Lösung y_1, y_2 gehört, so gehört also zu der Form (A′) die **allgemeine Integralmatrix** ΓY, die aus einer partikulären Integralmatrix Y durch Linkskomposition mit einer **willkürlichen** konstanten Matrix Γ von nicht verschwindender Determinante hervorgeht. Die Gleichung (14) bildet das vollkommene Analogon zu der Gleichung (I) der Nr. 34, so wie die Form (A′) als die direkte Verallgemeinerung der Differentialgleichung (1) anzusehen ist.

Die Matrix $Y^{-1} \frac{dY}{dx}$ entspricht der logarithmischen Ableitung $y^{-1} \frac{dy}{dx}$ einer Funktion, wir schreiben

$$Y^{-1} \frac{dY}{dx} = D_x Y \tag{16}$$

und lesen dies „**derivierte Matrix von** Y“; dieses Derivationssymbol ist auf jede Matrix differentiierbarer Funktionen y_{ik}, deren Determinante nicht verschwindet, anwendbar. Wir können das System (A′) jetzt in der Form

$$D_x Y = A \tag{A′}$$

schreiben, in der es der Form

$$\frac{d \log y}{dx} = a$$

der Differentialgleichung (1) entspricht.

36. Existenzbeweise im reellen und komplexen Gebiet.

Die Zweckmäßigkeit der in der vorigen Nummer eingeführten Symbolik wird sich sofort kundgeben, wenn wir nun dazu übergehen, die Existenzbeweise für die Lösungen des Systems (A) zu liefern.

Zunächst wollen wir das in der Nr. 5 für Systeme von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung dargelegte Cauchy-Lipschitzsche Verfahren der Matrizenauffassung anzupassen suchen. Für das Differentialsystem (A), wo jetzt die a_{ik} als beschränkte und stetige Funktionen vorausgesetzt werden, schreiben wir im Punkte $x = x_0$ zwei Systeme von Anfangswerten, also eine Anfangsmatrix

$$\begin{pmatrix} y_{11}^{(0)} & y_{12}^{(0)} \\ y_{21}^{(0)} & y_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = Y^{(0)}$$

mit nicht verschwindender Determinante vor. Entsprechend den Gleichungen (II) der Nr. 5 bekommen wir dann

$$\begin{aligned} y_{ik}^{(1)} - y_{ik}^{(0)} &= (x_1 - x_0) \sum_{\lambda=1,2} y_{i\lambda}^{(0)} a_{\lambda k}(x_0), \\ y_{ik}^{(2)} - y_{ik}^{(1)} &= (x_2 - x_1) \sum_{\lambda=1,2} y_{i\lambda}^{(1)} a_{\lambda k}(x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} y_{ik}^{(1)} &= \sum_{\lambda=1,2} y_{i\lambda}^{(0)} (a_{\lambda k}(x_0)(x_1 - x_0) + \delta_{\lambda k}), \\ y_{ik}^{(2)} &= \sum_{\lambda=1,2} y_{i\lambda}^{(1)} (a_{\lambda k}(x_1)(x_2 - x_1) + \delta_{\lambda k}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder endlich in Matrizenform

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= Y^{(0)}(A(x_0)(x_1 - x_0) + I), \\ Y^{(2)} &= Y^{(1)}(A(x_1)(x_2 - x_1) + I), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{17}$$ [1]).

[1]) Multipliziert man alle Elemente a_{ik} der Matrix A mit einer Größe x, so kommt das auf die Komposition von A mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 0 \ldots 0 \\ 0 & x \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots x \end{pmatrix}$$

In dieser Form tritt die Analogie mit den Gleichungen (b), die in der Nr. 4 für die eine Differentialgleichung (a) aufgestellt wurden, klarer hervor als in den Gleichungen (II) der Nr. 5.

Man kann nun mit den Gleichungen (17) ganz ähnlich verfahren, wie in der Nr. 4 mit den Gleichungen (b), wenn man an die Stelle der dort angewandten Multiplikation die Komposition der Matrizen treten läßt. Teilt man das Intervall $(x_0 \ldots x)$ durch die $m-1$ Teilpunkte $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = x$, so daß jedes Teilintervall kleiner als ε ist, so folgt aus den Gleichungen (17)

$$Y^{(k)} = Y^{(k-1)}(A(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + I) \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

durch Komposition

$$Y^{(m)} = Y^{(0)} \prod_{k=1,2,\ldots,m} (A(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + I),$$

wo das Zeichen Π die Komposition der Matrizen und zwar in der am Fuße angedeuteten Reihenfolge anzeigt. In der Nr. 5 wurde nachgewiesen, daß die $y_{ik}^{(m)}$ sich den zu den Anfangswerten $y_{ik}^{(0)}$ gehörigen Lösungen y_{ik} des Differentialsystems (A) als Grenzwerten nähern, wenn $\varepsilon \to 0$ geht. Es ist also

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = Y = Y^{(0)} \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{k=1,2,\ldots,m} (A(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + I),$$

und wenn wir, wie in der Nr. 4, wieder das Produktintegralzeichen

$$(18) \qquad \widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I) = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{k=1,2,\ldots,m} (A(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + I)$$

einführen, so können wir in der Form

$$Y = Y^{(0)} \widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I)$$

die Integralmatrix des Systems (A) oder (A′) darstellen, die für $x = x_0$ die Anfangswerte $Y^{(0)}$ annimmt. Die Integralmatrix

$$\widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I)$$

selbst reduziert sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix I.

heraus, die offenbar mit jeder Matrix vertauschbar ist. Man deutet diese Multiplikation deshalb durch die einfache Schreibweise xA oder Ax an und nennt x im Gegensatz zu der Matrix A eine **skalare** Größe. In diesem Sinne ist im Texte die Schreibweise $A(x_0)(x_1 - x_0)$ zu verstehen, wo $A(x_0)$ die Matrix der $a_{ik}(x_0)$ bedeutet.

Die Symbole D_x und $\widehat{\int}$ stehen einander reziprok gegenüber, ebenso wie das Differentiations- und Integrationszeichen der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung. Es ist offenbar

$$(19)\qquad \begin{aligned} D_x \widehat{\int_{x_0}^{x}} (A dx + I) &= A\,, \\ \widehat{\int_{x_0}^{x}} (D_x Y dx + I) &= Y\,. \end{aligned}$$

Wir haben es also hier mit einem richtigen Infinitesimalkalkül der Matrizen zu tun, der als eine Weiterbildung des in der Algebra seit langer Zeit üblichen algebraischen Matrizenkalküls anzusehen ist. Übrigens ist sofort zu übersehen, daß unser Kalkül nicht auf Matrizen von vier Elementen beschränkt ist, sondern ohne weiteres auf Matrizen von n^2 Elementen $a_{ik} (i, k = 1, 2, \cdots, n)$ übertragen werden kann. Wir beschränken uns aber vorerst der Deutlichkeit halber auf $n = 2$, und werden später mit wenigen Worten die Verallgemeinerung auf ein beliebiges n vornehmen. Wir folgen darin dem Begründer dieses Infinitesimalkalküls der Matrizen, Vito Volterra [1]), der freilich einen etwas anderen Ausgangspunkt genommen und auch im einzelnen andere Methoden angewandt hat. [2])

Wir wenden uns nunmehr zum komplexen Gebiete und setzen demgemäß voraus, daß die a_{ik} in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$

$$|x - x_0| \leqq r$$

holomorph, also in der Form

$$(20)\qquad a_{ik} = a_{ik}^{(0)} + a_{ik}^{(1)}(x - x_0) + \cdots \qquad (i, k = 1, 2)$$

darstellbar seien. Nehmen wir für die Elemente y_{ik} der durch die Anfangswerte $Y^{(0)}$ zu bestimmenden Integralmatrix Y die Entwicklungen an

$$(21)\qquad y_{ik} = y_{ik}^{(0)} + y_{ik}^{(1)}(x - x_0) + y_{ik}^{(2)}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

so ergeben sich die Koeffizienten dieser Entwicklungen zunächst formal

1) V. Volterra, Memoria della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), t. VI (1887) und XII (1899).

2) Für die hier gegebene Darstellung vgl. Schlesinger, Crelles Journal 128 (1906), S. 263 und Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig 1908. Die Definition des Produktintegrals kann auch erfolgen, wenn man die Funktionen a_{ik} nicht als stetig, sondern nur als integrierbar (im Sinne von Riemann) voraussetzt. Natürlich befriedigen die so definierten Funktionen y_{ik} das Differentialsystem (A) nur an den Stellen x, wo alle a_{ik} stetig sind.

durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (A'). In Matrizenform haben wir

$$\frac{dY}{dx} = YA,$$
$$A = A^{(0)} + A^{(1)}(x - x_0) + \cdots$$
$$Y = Y^{(0)} + Y^{(1)}(x - x_0) + \cdots,$$

also eingesetzt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu + 1) Y^{(\nu+1)}(x - x_0)^{\nu} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} Y^{(\nu)}(x - x_0)^{\nu}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} A^{(\nu)}(x - x_0)^{\nu}\right);$$

durch Vergleichen der Koeffizienten gleichhoher Potenzen von $(x - x_0)$ auf beiden Seiten finden wir so die Rekursionsformel

$$(22)\quad (\nu + 1) Y^{(\nu+1)} = Y^{(0)} A^{(\nu)} + Y^{(1)} A^{(\nu-1)} + \cdots + Y^{(\nu)} A^{(0)}. \qquad {\scriptstyle (\nu=0,1,2,\ldots)}$$

Um nach dem calcul des limites abschätzen zu können, merken wir den folgenden einfachen Satz über Matrizen von vier Elementen an: Sind

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = B$$

zwei Matrizen und hat man die Ungleichungen

$$|\alpha_{ik}| \leqq M, \quad |\beta_{ik}| \leqq N, \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2)}$$

so gilt nach der Kompositionsformel

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{pmatrix}$$

für jedes Element der komponierten Matrix die Ungleichung

$$(*)\qquad |\alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k}| < 2MN.$$

Ist also $a^{(\nu)}$ eine positive Größe, die gleich dem Doppelten des größten unter den absoluten Beträgen der $a_{ik}^{(\nu)}$, und $y^{(0)}$ eine positive Größe, die gleich dem größten unter den absoluten Beträgen der $y_{ik}^{(0)}$ ist, so ist nach $(*)$

$$y^{(1)} = y^{(0)} a^{(0)}$$

keinesfalls kleiner als der größte unter den absoluten Beträgen der Elemente der Matrix

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} A^{(0)},$$

und wenn wir allgemein

$$(23)\quad (\nu + 1) y^{(\nu+1)} = y^{(0)} a^{(\nu)} + y^{(1)} a^{(\nu-1)} + \cdots + y^{(\nu)} a^{(0)} \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots)}$$

setzen, so folgt ebenso aus der Rekursionsformel (22), daß $y^{(\nu+1)}$ nicht kleiner ist, als der größte unter den absoluten Beträgen der Elemente der Matrix $Y^{(\nu+1)}$, d. h.

$$(24)\qquad y^{(\nu+1)} \geqq \left| y_{ik}^{(\nu+1)} \right|. \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2)}$$

Nun folgt aus den einfachsten Sätzen über Potenzreihen, daß die Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)}(x - x_0) + \cdots$$

sicher in dem Kreise $|x - x_0| < r$ konvergiert, wenn die Reihen (20) für $|x - x_0| \leqq r$ konvergent sind. Bilden wir aber die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = \mathfrak{y}\,(a^{(0)} + a^{(1)}(x - x_0) + \cdots),$$

so wird diese offenbar durch die Reihe

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}^{(0)}\, e^{\int_{x_0}^{x} [a^{(0)} + a^{(1)}(x - x_0) + \cdots]\, dx} = \mathfrak{y}^{(0)} + \mathfrak{y}^{(1)}(x - x_0) + \mathfrak{y}^{(2)}(x - x_0)^2 + \cdots$$

befriedigt; diese Reihe konvergiert folglich für $|x - x_0| < r$. Nach dem Prinzip des calcul des limites gilt also zufolge der Ungleichungen (24) dasselbe für die Reihen (21), wodurch der Beweis für die Integralexistenz des Differentialsystems (A) erbracht ist. Zugleich ist gezeigt, daß der Konvergenzbereich der Integralreihen (21) sicher bis zu dem x_0 am nächsten gelegenen singulären Punkte der Koeffizienten a_{ik} reicht, d. h. daß die Lösungen des Differentialsystems (A) keine anderen singulären Stellen haben können als die Koeffizienten a_{ik}.

Nach der in der Nr. 13 angegebenen Methode kann nun weiter geschlossen werden, daß das zu Beginn dieser Nummer im reellen Gebiete auseinandergesetzte Cauchy-Lipschitzsche Verfahren anwendbar bleibt, wenn man es auf einem von x_0 ausgehenden nach x hinführenden geraden oder krummlinigen Wege zur Anwendung bringt, vorausgesetzt, daß dieser Weg keine der singulären Stellen der a_{ik} passiert. Auf diese Weise hat man die Möglichkeit, das Produktintegral

$$\widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I) \tag{25}$$

erstreckt auf einem beliebigen solchen Wege zu definieren, und kann nun mit diesem genau so operieren wie mit dem gewöhnlichen Integral im komplexen Gebiet.

Legt man von den singulären Punkten der a_{ik} aus Schnitte l nach dem Unendlichen, so erhält man eine Fläche T, innerhalb deren das Produktintegral einen vom Wege unabhängigen, eindeutig bestimmten Wert besitzt. Auf die Wertänderungen, die es erfährt, wenn der Integrationsweg die Schnitte l überschreitet, kommen wir gleich nachher zurück.

Wir fügen hier noch eine Abschätzungsformel für die Elemente der durch das Produktintegral gegebenen Integralmatrix hinzu, die als das Analogon des Mittelwertsatzes der gewöhnlichen Integralrechnung gelten kann. Aus der Fläche T sondern wir einen abgeschlossenen Bereich T aus, innerhalb dessen die $|a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2)$ beschränkt sind. Es möge dann $g(x)$ die Funktion von x bedeuten, die an jeder Stelle von $\bar{T}$ gleich dem größten der vier Werte $|a_{ik}(x)|$ ist. Diese Funktion ist natürlich nicht monogen, aber sie ist, wie die $|a_{ik}(x)|$ selbst, längs jeder stetigen Kurve von endlicher Bogenlänge, die ganz innerhalb T verläuft, stetig und infolgedessen integrierbar. Aus den Differentialgleichungen (A′) folgt dann

$$\left|\frac{dy_{ik}}{dx}\right| \leqq g(x)(|y_{i1}| + |y_{i2}|). \qquad (i, k = 1, 2) \tag{26}$$

Nun ist für eine monogene Funktion $f(x)$ der komplexen Veränderlichen x offenbar stets

$$|f(x) - f(x')| \geqq ||f(x)| - |f(x')||,$$

man hat also

$$\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \geqq \left|\frac{d|f(x)|}{dx}\right|, \tag{27}$$

dabei ist

$$\left|\frac{d|f(x)|}{dx}\right| = \lim_{x' \to x} \left|\frac{|f(x)| - |f(x')|}{x - x'}\right|$$

zu nehmen, wo die Annäherung von x' an x in einer bestimmten, von x ausgehenden Richtung erfolgt.

Aus (26) folgt durch Addition

$$\left|\frac{dy_{i1}}{dx}\right| + \left|\frac{dy_{i2}}{dx}\right| \leqq 2g(x)\{|y_{i1}| + |y_{i2}|\},$$

also mit Rücksicht auf (27)

$$\left|\frac{d}{dx}\{|y_{i1}| + |y_{i2}|\}\right| \leqq 2g(x)\{|y_{i1}| + |y_{i2}|\}$$

Integriert man hier auf beiden Seiten auf einem innerhalb T zwischen x_0 und x verlaufenden Wege W mit stetiger Tangente, so ergibt sich

$$|y_{i1}| + |y_{i2}| \leqq e^{2\int_{x_0}^{x} g(x)|dx|}\left(|y_{i1}^{(0)}| + |y_{i2}^{(0)}|\right),$$

wenn $y_{ik}^{(0)}$ die Anfangswerte der y_{ik} in $x = x_0$ bezeichnen. Läßt man also insbesondere y_{ik} die Elemente des auf dem Wege W erstreckten Produktintegrals (25) bedeuten, so ist $y_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$, also

$$|y_{i1}| + |y_{i2}| \leqq e^{2\int_{x_0}^{x} g(x)|dx|}$$

und a potiori

$$|y_{ik}| \leqq e^{2\int_{x_0}^{x} g(x)|dx|}, \tag{28}$$

wo das Integral $\int_{x_0}^{x} g(x)\,|dx|$ auch auf dem Wege W zu erstrecken ist. Diese Formel (28) stellt den gedachten Mittelwertsatz dar [1]).

37. Methode der sukzessiven Approximationen. Mehrdeutigkeit.

Das Produktintegral oder, was dasselbe ist, das Cauchy-Lipschitzsche Verfahren gibt uns zwar eine Darstellung der Integralmatrix in der Fläche T, d. h. im Holomorphiebereich (z. B. im Mittag-Lefflerschen Stern) der Koeffizienten, und man kann von dieser Darstellung auch zu einer Reihenentwicklung übergehen. Gleichwohl wird es zweckmäßig sein, eine andere, äußerst wichtige Reihenentwicklung anzugeben, die im ganzen Holomorphiebereich gültig ist, und die nach der sogenannten Methode der sukzessiven Approximationen hergestellt wird.

Wir bezeichnen wieder mit Y die durch das Produktintegral gegebene Integralmatrix von (A) und betrachten die Matrix ihrer Anfangswerte I selbst als erste Annäherung von Y. Man bilde nun die Folge weiterer Näherungsmatrizen $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \frac{dU^{(1)}}{dx} &= IA = A, \\ \frac{dU^{(2)}}{dx} &= U^{(1)}A, \\ \frac{dU^{(3)}}{dx} &= U^{(2)}A, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{29}$$

Wenn wir dann die aus den Elementen $\int_{x_0}^{x} a_{ik}\,dx$ gebildete Matrix kurz durch $\int_{x_0}^{x} A\,dx$ bezeichnen, so ergibt sich aus der Folge der Gleichungen (29) durch Integration längs eines in T verlaufenden Weges W

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \int_{x_0}^{x} A\,dx, \\ U^{(2)} &= \int_{x_0}^{x} U^{(1)} A\,dx, \\ U^{(3)} &= \int_{x_0}^{x} U^{(2)} A\,dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{29a}$$

[1]) Die Formel rührt von H. Fuhr her; vgl. Jahresbericht der D. M.-V. 28 (1919), S. 168, wo sie für das reelle Gebiet entwickelt ist.

Wir zeigen nun, daß die Reihe

(30) $$I + U^{(1)} + U^{(2)} + \cdots \text{ in inf.}$$

in dem ganzen Bereich T (siehe die vorige Nr.) unbedingt und gleichmäßig konvergiert und daselbst die Integralmatrix Y darstellt.

Es sei innerhalb T

$$|a_{ik}| \leq M .$$

Hat unser Integrationsweg W die endliche Länge s, so ist zunächst

$$|u_{ik}^{(1)}| \leq Ms .$$

Durch Anwendung der Formel (*) (S. 140) auf die komponierte Matrix $U^{(1)}A$ ergibt sich dann aus der zweiten der Gleichungen (29a)

$$|u_{ik}^{(2)}| \leq \int_{x_0}^{x} 2MsM\,|dx| \leq 2M^2\frac{s^2}{2},$$

dann weiter aus der dritten

$$|u_{ik}^{(3)}| \leq \int_{x_0}^{x} 4M^2\frac{s^2}{2}M\,|dx| \leq 2^2M^3\frac{s^3}{3!}$$

und allgemein

(31) $$|u_{ik}^{(\nu)}| \leq 2^{\nu-1}M^\nu\frac{s^\nu}{\nu!}.$$

Die Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_{ik}^{(\nu)}$, wo $u_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$ ist, konvergieren also wie eine Exponentialreihe. Verbindet man x_0 mit den Randpunkten des Bereichs $\overline{T}$ auf den kürzesten in T verlaufenden Wegen, so bleiben die Längen dieser Wege unterhalb einer endlichen Schranke σ. Ersetzt man in (31) s durch dieses σ, so gelten diese Ungleichungen a potiori für jeden im Innern und auf dem Rande von $\overline{T}$ gelegenen Punkt x. Die Reihen

(32) $$\delta_{ik} + u_{ik}^{(1)} + u_{ik}^{(2)} + \cdots \text{ in inf.}$$

konvergieren also in der Tat unbedingt und gleichmäßig innerhalb des Bereiches $\overline{T}$; sie konvergieren aber auch, wenn der Integrationsweg über die Begrenzung von $\overline{T}$ hinausgeht, vorausgesetzt, daß er eine endliche Länge hat, und daß die a_{ik} auf ihm beschränkt bleiben.

Wir zeigen nun, daß die Reihen (32) das Differentialsystem (A′) befriedigen. Dazu ist vor allem nötig nachzuweisen, daß sie gliedweise differentiierbar sind. Es ist

$$\frac{dU^{(\nu)}}{dx} = U^{(\nu-1)}A,$$

also zunächst rein formal

(33) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{dU^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty}U^{(\nu-1)}A ,$$

oder wenn wir die letzte Gleichung für die Elemente der Matrizen schreiben,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{du_{ik}^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(u_{i1}^{(\nu-1)} a_{1k} + u_{i2}^{(\nu-1)} a_{2k}\right). \tag{34}$$

Da nun die Reihen (32) innerhalb T unbedingt und gleichmäßig konvergieren, so gilt das gleiche von den auf der rechten Seite von (34) stehenden, und somit auch für die aus (32) durch gliedweise Differentiation entstandenen Reihen. Die Reihen (34) sind also gliedweise integrierbar und stellen daher die Ableitungen der Reihen (32) dar. Daß die Reihen (32) das Differentialsystem befriedigen, ergibt sich jetzt sofort, wenn wir (33) beachten; man hat dann nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{dU^{(\nu)}}{dx} - \sum_{\nu=0}^{\infty} U^{(\nu)} A = \sum_{\nu=1}^{\infty} U^{(\nu-1)} A - \sum_{\nu=0}^{\infty} U^{(\nu)} A = 0,$$

wo 0 als Matrizensymbol eine Matrix bedeutet, deren sämtliche Elemente verschwinden.

Die Reihenentwicklung (32) ist auch für die numerische Rechnung gut geeignet, weil sie nach Art der Exponentialreihe konvergiert und dadurch leicht eine Abschätzung des Fehlers gestattet, den man begeht, wenn man nur eine gewisse Anzahl von Gliedern berücksichtigt. Statt mit den Anfangswerten δ_{ik} kann man auch mit irgendwelchen Funktionen als „ersten Näherungswerten" beginnen.

Besonders wichtig ist eine Folgerung, die sich aus der Entwicklung (32) ergibt, wenn die a_{ik} von einem Parameter μ abhängen. Wenn z. B. die a_{ik} ganze rationale Funktionen des Parameters μ sind, so gilt das gleiche auch für alle $u_{ik}^{(\nu)}$. Die $|\, a_{ik} \,|$ bleiben, wenn μ beschränkt ist, unterhalb einer angebbaren endlichen Schranke M, also konvergieren die Reihen $\Sigma\, u_{ik}^{(\nu)}$, solange μ beschränkt ist, unbedingt und gleichmäßig und können daher nach Potenzen von μ geordnet werden. Die durch diese Reihen dargestellten Lösungen des Differentialsystems (A) sind also ganze transzendente Funktionen von μ. Dieser Satz stammt von Poincaré[1]).

Die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen auf lineare Differentialgleichungen geht auf Cauchy zurück[2]). Später haben Caqué (1864), Fuchs (1870), Peano (1888), der letztere mit Anwendung des Matrizenkalküls, die Methode weiter entwickelt. Für beliebige nichtlineare Differentialsysteme hat sich besonders Picard[3]) sehr eingehend mit dieser Methode beschäftigt.

[1]) Oeuvres II, S. 310; vgl. P. Günther, Crelles Journal 107 (1889), S. 312.

[2]) Siehe A. Cauchy, Leçons etc. red. par l'Abbé Moigno, II (1844), S. 702, wo die Methode für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung auseinandergesetzt wird.

[3]) Vgl. E. Picard, Traité d'Analyse II (1905), S. 340, 351.

38. Wertänderungen der Integralmatrix bei Umläufen. Kanonische Integralmatrix.

Wir nehmen nunmehr die Frage auf, wie sich die Werte der Elemente y_{ik} unserer Integralmatrix ändern, wenn x einen Weg W beschreibt, der die von den singulären Punkten der a_{ik} nach dem Unendlichen gelegten Querschnitte l überschreitet. Die a_{ik} seien allenthalben eindeutige Funktionen, dann genügen auch die aus den y_{ik} durch Fortsetzung längs W entstehenden Funktionen $\bar{y}_{ik}$ dem Differentialsystem (A) bzw. (A'). Man hat folglich, wenn der Weg W ein geschlossener ist, nach Gl. (7) der Nr. 35

$$\bar{y}_{ik} = c_{i1} y_{1k} + c_{i2} y_{2k} ,$$

wo die c_{ik} Konstanten bedeuten, oder in Matrizenform

$$\bar{Y} = CY . \tag{35}$$

Man kann jetzt zwar direkt schließen, daß die Determinante der y_{ik} nicht identisch verschwinden kann, und daß folglich die Determinante der c_{ik} von Null verschieden sein muß. Es ist aber nützlich dies durch eine Formel, die auch sonst von Wichtigkeit ist, zur unmittelbaren Anschauung zu bringen.

Betrachten wir nämlich die Determinante $|Y|$ der Integralmatrix Y, die sich für $x = x_0$ auf die Anfangsmatrix $Y^{(0)}$ reduziert, so ist

$$\frac{d\,|Y|}{dx} = \begin{vmatrix} y'_{11} & y_{12} \\ y'_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y'_{12} \\ y_{21} & y'_{22} \end{vmatrix},$$

also mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen (A')

$$\frac{d\,|Y|}{dx} = \begin{vmatrix} y_{11}\,a_{11} + y_{12}\,a_{21} & y_{12} \\ y_{21}\,a_{11} + y_{22}\,a_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{11}\,a_{12} + y_{12}\,a_{22} \\ y_{21} & y_{21}\,a_{12} + y_{22}\,a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{22})\,|Y|\,,$$

woraus sich

$$|Y| = |Y^{(0)}|\, e^{\int_{x_0}^{x} (a_{11}+a_{22})\,dx} \tag{36}$$

ergibt, wo das Integral von x_0 bis x auf einem innerhalb der Fläche T verlaufenden Wege zu erstrecken ist. Wir sehen aus dieser von Jacobi herrührenden Formel, daß die Determinante $|Y|$ einer Integralmatrix nur in singulären Punkten der a_{11}, a_{22} verschwinden kann.

Lassen wir nun in der Gleichung (36) x den geschlossenen Weg W beschreiben, so erhalten wir

$$|\bar{Y}| = |Y^{(0)}|\, e^{\int_{x_0}^{x} (a_{11}+a_{22})\,dx}\; e^{W\!\int_{x}^{x} (a_{11}+a_{22})\,dx} . \tag{37}$$

wo $W\int_x^x$ das über den Weg W erstreckte Integral bedeutet. Diese Gleichung läßt sich aber wegen (36) auch so schreiben:

$$|\overline{Y}| = |Y|\, e^{W\int_x^x (a_{11}+a_{22})\,dx} \tag{38}$$

und da nach (35) $|\overline{Y}| = |C|\,|Y|$ ist, so ergibt sich

$$|C| = e^{W\int_x^x (a_{11}+a_{22})\,dx}; \tag{39}$$

damit ist in Evidenz gesetzt, daß die Determinante der Matrix C von Null verschieden ist. Wir haben also den Satz:

Eine Integralmatrix wird, wenn x einen geschlossenen Weg beschreibt, von links her mit einer konstanten Matrix nicht verschwindender Determinante komponiert.

Statt dessen sagt man von der Gleichung (35) auch kürzer, Y habe die Substitution C erfahren, oder $\overline{Y}$ gehe aus Y durch Anwendung der Substitution C hervor.

Ehe wir weitergehen, knüpfen wir an die Gleichung (36) noch die folgende Bemerkung. Aus der Darstellung der Koeffizientenmatrix durch eine Integralmatrix, wie sie durch (A′) unmittelbar in der Form

$$A = D_x Y = Y^{-1}\frac{dY}{dx} \tag{40}$$

gegeben wird, folgt, daß für diejenigen Punkte, wo die y_{ik} holomorph sind und die Determinante $|Y|$ nicht verschwindet, auch die Koeffizienten a_{ik} holomorph sein müssen. Dagegen wird ein Punkt $x = a$, in dessen Umgebung die y_{ik} holomorph sind, in dem aber $|Y| = 0$ ist, notwendig ein singulärer Punkt der Koeffizienten a_{ik} sein. In der Umgebung einer solchen Stelle ist $|Y|$ jedenfalls holomorph, also von der Form

$$|Y| = \delta_\nu (x-a)^\nu + \delta_{\nu+1}(x-a)^{\nu+1} + \cdots, \qquad (\delta_\nu \neq 0)$$

wo $\nu \geqq 1$ ist. Die Darstellung (40) zeigt dann, daß die a_{ik} in $x = a$ einen Pol haben; wir haben es hier, nach der in der Nr. 13 (S. 49) eingeführten Bezeichnung, mit einem außerwesentlich singulären Punkte der Differentialgleichung (A) zu tun.

Wir kehren nunmehr zu der Gleichung (35) zurück, die die Wertänderung einer Integralmatrix kennen lehrt, die dem geschlossenen Weg oder Umlauf W entspricht. Für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung multipliziert sich jedes Integral y bei einem solchen Umlauf mit einer und derselben bestimmten Konstanten, die also für diesen Umlauf charakteristisch ist. Hier tritt an die Stelle der Multiplikation mit einer Konstanten die Linkskomposition mit einer konstanten Matrix;

wir fragen: Wie ändert sich diese konstante Matrix, wenn wir statt Y eine andere Integralmatrix Z zugrunde legen?

Es besteht die Beziehung (Gl. (9) Nr. 35)

$$Z = \Gamma Y, \quad Y = \Gamma^{-1} Z, \tag{41}$$

wo Γ eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Wenn also Z durch den Umlauf W in $\bar{Z}$ übergeht, so ist

$$\bar{Z} = \Gamma \bar{Y} = \Gamma C Y = \Gamma C \Gamma^{-1} Z;$$

d. h. die konstante Matrix, mit der Z durch den Umlauf W komponiert wird, ist

$$D = \Gamma C \Gamma^{-1}. \tag{42}$$

Wir sagen von dieser Matrix, sie sei mit C ähnlich und sie gehe aus C durch Transformation mit Γ hervor. Wir haben also hier nicht eine für den Umlauf W charakteristische Matrix, sondern die Gesamtheit aller zu C ähnlichen Matrizen (42), wo Γ eine willkürliche, konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet, ist hier das für W Charakteristische. Dabei ist klar, daß die Gesamtheit (42) in keiner Weise von der zufälligen Wahl der Integralmatrix Y und damit der Matrix C abhängt, daß vielmehr, wenn C' irgendeine Matrix von der Form (42) bedeutet, diese Gesamtheit auch in der Form $\Gamma C' \Gamma^{-1}$ geschrieben werden kann, wo Γ wieder eine willkürliche, konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante ist. Es entsteht so die Frage nach dem, was für die Zugehörigkeit einer Matrix zu der Gesamtheit (42) charakteristisch ist, d. h. nach den charakteristischen Invarianten eines Systems ähnlicher Matrizen. Diese Invarianten werden für den Weg W selbst charakteristisch sein, während die einzelne Matrix von der zufälligen Wahl der Ausgangsmatrix Y abhängt.

Die hier aufgeworfene Frage erweist sich für unsere ganze Theorie von fundamentaler Bedeutung. Wir werden zu ihrer Beantwortung kommen, wenn wir uns bemühen, aus der Gesamtheit der ähnlichen Matrizen (42) die in gewissem Sinne einfachste auszuwählen; d. h. mit anderen Worten, wir wollen eine Integralmatrix auswählen, deren Wertänderung bei dem Umlauf W sich in möglichst einfacher Form darstellt.

Da liegt es nahe zu versuchen, ob es nicht Lösungen des Differentialsystems (A) gibt, die sich bei dem Umlauf W so verhalten, wie die Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, d. h. Lösungen, die sich bei dem Umlauf W mit konstanten Faktoren multiplizieren. Es soll also versucht werden, das Lösungssystem

$$\begin{aligned} \eta_1 &= p_1 y_{11} + p_2 y_{21}, \\ \eta_2 &= p_1 y_{12} + p_2 y_{22}, \end{aligned} \tag{43}$$

wo p_1, p_2 zu bestimmende Konstanten bedeuten, so einzurichten, daß

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1 &= p_1\bar{y}_{11} + p_2\bar{y}_{21} = \omega\eta_1, \\ \bar{\eta}_2 &= p_1\bar{y}_{12} + p_2\bar{y}_{22} = \omega\eta_2\end{aligned} \tag{44}$$

wird, wo ω eine Konstante ist.

Setzen wir in (44) für die $\bar{y}_{ik}$ ihre sich aus der Gleichung (35) ergebenden Werte

$$\bar{y}_{ik} = c_{i1}y_{1k} + c_{i2}y_{2k}$$

und für η_1, η_2 ihre Ausdrücke (43) ein, so werden die Gleichungen (44) erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}p_1 c_{11} + p_2 c_{21} &= \omega p_1, \\ p_1 c_{12} + p_2 c_{22} &= \omega p_2\end{aligned} \tag{45}$$

ist. Sollen also die p_1, p_2 nicht beide verschwinden, was selbstverständlich gefordert werden muß, so muß in den beiden linearen homogenen Gleichungen (45) die Determinante der Koeffizienten

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} - \omega \end{vmatrix} = 0 \tag{46}$$

sein. Diese Gleichung zweiten Grades für ω heißt die charakteristische Gleichung oder Fundamentalgleichung der Matrix C. Sie hat jedenfalls von Null verschiedene Wurzeln, da $|C| \neq 0$ ist. Ist ω_1 eine Wurzel, so besitzt das Gleichungssystem (45) für $\omega = \omega_1$ Lösungen

$$p_1 = p_{11}, \quad p_2 = p_{12},$$

die nicht beide verschwinden, und die nur abgesehen von einem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor bestimmt sind. Diese Lösungen, in (43) eingesetzt, geben ein Lösungssystem

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= p_{11}y_{11} + p_{12}y_{21}, \\ \eta_{12} &= p_{11}y_{12} + p_{12}y_{22}\end{aligned} \tag{47}$$

von (A), das sich beim Umlauf W tatsächlich nur mit dem konstanten Faktor ω_1 multipliziert. — Hat die Fundamentalgleichung (46) zwei verschiedene Wurzeln ω_1, ω_2, so finden wir der anderen Wurzel ω_2 entsprechend ein zweites Lösungssystem

$$\begin{aligned}\eta_{21} &= p_{21}y_{11} + p_{22}y_{21}, \\ \eta_{22} &= p_{21}y_{12} + p_{22}y_{22}\end{aligned} \tag{48}$$

von (A), das sich bei dem Umlauf W mit ω_2 multipliziert. Die η_{ik} bilden eine Integralmatrix, denn es ist

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$$

und die Determinante $|P|$ ist von Null verschieden, da die Verhältnisse $p_{11} : p_{12}$ und $p_{21} : p_{22}$ nicht einander gleich sein können, wenn $\omega_1 \neq \omega_2$ ist. Ehe wir den Fall erörtern, wo die Fundamentalgleichung (46) zwei gleiche Wurzeln hat, zeigen wir, daß diese Gleichung insofern nicht von der Wahl der Matrix C abhängt, als sie für alle ähnlichen Matrizen (42) dieselbe ist.

In der Tat ist die linke Seite von (46) die Determinante der Matrix $C - I\omega$. Bilden wir nun aus D die analoge Matrix $D - I\omega$, so ist nach (42)

$$D - I\omega = \Gamma C \Gamma^{-1} - I\omega = \Gamma C \Gamma^{-1} - \Gamma(I\omega)\Gamma^{-1} = \Gamma(C - I\omega)\Gamma^{-1};$$

wir haben also

$$|D - I\omega| = |\Gamma| \, |C - I\omega| \, |\Gamma^{-1}| = |C - I\omega|,$$

d. h. für ähnliche Matrizen stimmen nicht nur die Fundamentalgleichungen, sondern sogar die linken Seiten dieser Gleichungen überein. Damit haben wir also in der Tat Invarianten für das System aller ähnlichen Matrizen gefunden, nämlich die Koeffizienten der Fundamentalgleichung. Es fragt sich nun noch, ob diese auch charakteristisch sind, d. h. ob zwei Matrizen, für die diese Invarianten übereinstimmen, auch stets ähnlich sind.

In dem Falle, wo $\omega_1 \neq \omega_2$ ist, hat die Integralmatrix

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} \eta_{12} \\ \eta_{21} \eta_{22} \end{pmatrix} = H = PY$$

die Eigenschaft, daß

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} H$$

ist. Wir haben also in diesem Falle (vgl. (41) und (42))

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = PCP^{-1}$$

oder

$$C = P^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} P.$$

Gehen wir statt von Y von der Integralmatrix Z aus, so ist

$$H = PY = P\Gamma^{-1}Z,$$

also

$$D = \Gamma P^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} P \Gamma^{-1}.$$

Es lassen sich also alle miteinander ähnlichen Matrizen (42) durch Transformation in die Form

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

überführen; wir bezeichnen für den Fall verschiedener Wurzeln der Fundamentalgleichung (49) als die kanonische Form dieses Systems ähnlicher Matrizen.

Weiß man umgekehrt von einer Matrix D, daß sie durch Transformation in die kanonische Form (49) übergeführt werden kann, d. h. daß eine Matrix Q existiert, so daß

$$D = Q^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ 0 & \omega_2\end{pmatrix} Q$$

ist, so hat man

$$D = Q^{-1} P C P^{-1} Q\,,$$

d. h. D geht aus C durch Transformation mit der Matrix $Q^{-1}P$ hervor, ist also mit C ähnlich. Die kanonische Form liefert also in der Tat — zunächst in dem Falle $\omega_1 \neq \omega_2$ — auch die charakteristischen Invarianten des Systems ähnlicher Matrizen.

Wenn nun $\omega_1 = \omega_2$ ist, d. h. wenn die Fundamentalgleichung (46) eine doppelte Wurzel hat, so haben wir zu dieser gehörig das in (47) dargestellte Lösungssystem η_{11}, η_{12} von (A), das sich beim Umlauf W mit ω_1 multipliziert. Um dieses zu einer Integralmatrix zu ergänzen, nehmen wir zwei beliebige Konstanten p_{21}, p_{22} von der Art, daß sie mit den durch die Gleichungen (45) für $\omega = \omega_1$ bestimmten p_{11}, p_{12} eine von Null verschiedene Determinante

$$p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \neq 0$$

bilden. Setzen wir dann

$$\eta_{2k} = p_{21} y_{1k} + p_{22} y_{2k}, \qquad (k=1,2)$$

so wird die Integralmatrix

$$\begin{pmatrix}\eta_{11} & \eta_{12}\\ \eta_{21} & \eta_{22}\end{pmatrix} = \boldsymbol{H} = PY$$

beim Umlauf W mit einer konstanten Matrix von der Form

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

komponiert, deren Fundamentalgleichung

$$(\omega_1 - \omega)(\delta - \omega) = 0$$

mit (46) übereinstimmen, also die doppelte Wurzel ω_1 haben muß. Es ist folglich $\delta = \omega_1$, während γ noch unbestimmt bleibt. Die Matrix $\boldsymbol{H}$ verwandelt sich also durch den Umlauf W in

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ \gamma & \omega_1\end{pmatrix}\boldsymbol{H}$$

und wir haben noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem

a) $\gamma \neq 0$, b) $\gamma = 0$ ist.

Im ersten Falle $\gamma \neq 0$ kann diese Größe γ vermöge der bei der Auswahl von p_{21}, p_{22} noch vorhandenen Willkür jeden beliebigen von Null verschiedenen Wert erhalten, wir können es z. B. stets so einrichten, daß $\gamma = 1$ wird. Wir bezeichnen dann

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ 1 & \omega_1\end{pmatrix} \tag{50}$$

als die kanonische Form des Systems ähnlicher Matrizen (42).

Im zweiten Fall $\gamma = 0$ hat auch das Lösungssystem η_{21}, η_{22} die Eigenschaft, sich beim Umlauf W mit der Konstanten ω_1 zu multiplizieren, die p_{21}, p_{22} müssen also denselben Gleichungen (45)

$$(45_1) \qquad \begin{aligned} p_1 c_{11} + p_2 c_{21} &= \omega_1 p_1, \\ p_1 c_{12} + p_2 c_{22} &= \omega_1 p_2 \end{aligned}$$

genügen, wie die p_{11}, p_{12}. Nun sollte aber die Determinante $|P| \neq 0$ sein; die Verhältnisse $p_{11} : p_{12}$ und $p_{21} : p_{22}$ dürfen also nicht übereinstimmen. Das ist nur möglich, wenn die Gleichungen (45_1) sich auf Identitäten reduzieren, d. h. wenn alle ihre Koeffizienten gleich Null sind. In diesem Falle ist also

$$c_{11} = \omega_1, \quad c_{22} = \omega_1, \quad c_{12} = c_{21} = 0,$$

so daß sich also jede Integralmatrix Y beim Umlauf W mit der Matrix

$$(51) \qquad \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{pmatrix}$$

komponiert.

Zusammenfassend können wir also sagen: Die Matrix C kann durch Transformation stets in eine der drei kanonischen Formen (49), (50), (51) übergeführt werden. Die erste Form entspricht dem Falle, wo die Fundamentalgleichung $|C - I\omega| = 0$ zwei verschiedene Wurzeln hat, die zweite dem, wo diese Gleichung eine doppelte Wurzel ω_1 hat, ohne daß alle vier Elemente der Determinante $|C - I\omega_1|$ verschwinden, die dritte dem, wo das letztere eintritt. Alle ähnlichen Matrizen haben dieselbe kanonische Form und offenbar sind — wie im Falle $\omega_1 \neq \omega_2$, so auch allgemein — zwei Matrizen, die dieselbe kanonische Form haben, auch stets ähnlich.

In dieser rein algebraischen Form bildet der ausgesprochene Satz, wie wir sehen werden, das algebraische Gerippe der ganzen analytischen Theorie des Differentialsystems (A). Auf unser Ausgangsproblem, das Verhalten der Integralmatrix Y beim Umlauf W, übertragen, haben wir das Ergebnis:

Zu einem Umlauf W gehört eine ganz bestimmte Fundamentalgleichung (46) und eine Integralmatrix H, deren Wertänderung bei diesem Umlauf ein besonders einfaches Verhalten zeigt. Wir nennen H die zu W gehörige kanonische Integralmatrix.

39. Darstellung der Integralmatrix in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle. Cauchysche Differentialsysteme.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des besonderen Falles, wo der Umlauf W einen einzigen singulären Punkt $x = a$ im positiven Sinne umkreist, in dessen Umgebung die a_{ik} eindeutig, also in der Form Laurentscher Reihen

$$a_{ik} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{ik}^{(\nu)} (x-a)^\nu$$

entwickelbar sind. Die Integralmatrix Y verwandelt sich dann durch den Umlauf in

$$\bar{Y} = CY.$$

Wir werden nun nach Analogie der bei einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Nr. 34 angestellten Überlegungen fragen, ob wir eine Matrix $\mathfrak{Y}$ leicht angebbarer Funktionen $\mathfrak{y}_{ik}$ finden können, die bei dem Umlauf W in

$$\bar{\mathfrak{Y}} = C\mathfrak{Y}$$

übergeht? Wir wollen mit einer in der Algebra der linearen Transformationen üblichen Bezeichnung von zwei Matrizen, die, wie hier Y und $\mathfrak{Y}$, bei einem Umlauf W mit derselben konstanten Matrix komponiert werden, sagen, sie seien in bezug auf den Umlauf W kogredient.

In der Nr. 34 lieferte die Cauchysche Differentialgleichung (III) die gesuchte Funktion $\mathfrak{y}$. Wir versuchen dementsprechend auch hier ein Cauchysches Differentialsystem zu bilden, d. h. ein Differentialsystem

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\mathfrak{y}_k}{dx} = \mathfrak{y}_1 \frac{r_{1k}}{x-a} + \mathfrak{y}_2 \frac{r_{2k}}{x-a}, \qquad (k=1,2)$$

wo die r_{ik} Konstanten bedeuten, und fragen, ob sich diese r_{ik} so bestimmen lassen, daß eine Integralmatrix $\mathfrak{Y}$ von (B) mit unserer Integralmatrix Y in bezug auf W kogredient sei?

Was zunächst die Integration des Systems (B) anlangt, so bemerken wir, daß durch Einführung von

$$t = \log(x-a)$$

als neuer unabhängiger Veränderlicher, (B) in das System mit konstanten Koeffizienten

$$\text{(C)} \qquad \frac{d\mathfrak{y}_k}{dt} = \mathfrak{y}_1 r_{1k} + \mathfrak{y}_2 r_{2k} \qquad (k=1,2)$$

übergeht. Die eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{y} \cdot r$$

wird durch $\mathfrak{y} = \text{const.}\, e^{rt}$ gelöst. Man kann nun ganz analog zu der allgemeinen Lösung des Systems (C) gelangen, wenn man in naheliegender Verallgemeinerung eine Exponentialfunktion der Matrix R bildet.

Was man unter einer positiven ganzzahligen Potenz einer Matrix R zu verstehen hat, liegt auf der Hand; es ist

$$R^2 = R \cdot R\,, \quad R^3 = R^2 R = R R^2\,, \text{ usw.}$$

Danach kann man ganze rationale Funktionen einer Matrix mit skalaren, d. h. Zahlkoeffizienten herstellen, z. B.

$$a_0 + a_1 R + a_2 R^2\,,$$

wo die a_0, a_1, a_2 reelle oder komplexe Größen bedeuten. Man kann aber auch weitergehen und unendliche Potenzreihen einer Matrix untersuchen [1]).

Hat man eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, \tag{52}$$

die für $|t| < \varrho$ konvergiert, so kann man für t die Matrix R einsetzen und fragen, wann die Elemente der Matrix

$$a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots \tag{53}$$

konvergent sein werden? Denkt man sich R in die kanonische Form transformiert:

$$R = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ \gamma & r_2 \end{pmatrix} P^{-1}\,,$$

wo γ nur dann von Null verschieden sein kann, wenn $r_1 = r_2$ ist, so ist offenbar für jedes positive ganzzahlige ν

$$R^\nu = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ \gamma & r_2 \end{pmatrix}^\nu P^{-1} = P \begin{pmatrix} r_1^\nu & 0 \\ \nu\gamma r_1^{\nu-1} & r_2^\nu \end{pmatrix} P^{-1}$$

und man kann folglich die Matrix (53) in der Form

$$P\left(a_0 + a_1 \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ \gamma & r_2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 \\ 2\gamma r_1 & r_2^2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} r_1^3 & 0 \\ 3\gamma r_1^2 & r_2^3 \end{pmatrix} + \cdots \right) P^{-1}$$

schreiben. Da die derivierte Reihe $a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots$ von (52) ebenfalls für $|t| < \varrho$ konvergiert, so ist also für die Konvergenz der Matrix (53) notwendig und hinreichend, daß die Wurzeln r_1, r_2 der zu R gehörigen Fundamentalgleichung dem Konvergenzkreise der Reihe (52) angehören.

Nimmt man für (52) die beständig konvergente Exponentialreihe, so erhält man die Exponentialfunktion der Matrix R

$$e^R = I + \frac{R}{1!} + \frac{R^2}{2!} + \cdots, \tag{54}$$

die demnach für jede Matrix R konvergiert. Bedeuten R, S zwei vertauschbare Matrizen, so daß also $RS = SR$ ist, dann ist auch jede Potenz von R mit jeder Potenz von S und folglich auch e^R mit e^S vertauschbar; man findet also durch Komposition:

[1]) Es kommt das auf dasselbe hinaus, wie wenn man Potenzreihen von höheren komplexen Größen, die aus mehreren Haupteinheiten gebildet sind, betrachtet. In dieser Form hat Ed. Weyr im Bulletin des Sciences Mathém. (2) XI (1887), S. 205 das Problem behandelt und das im folgenden wiedergegebene Konvergenzkriterium aufgestellt.

$$e^S \cdot e^R = e^R \cdot e^S = e^{R+S}\,.$$

Diese Gleichung gilt insbesondere, wenn S eine skalare Größe, z. B. eine Funktion $f(t)$ ist. Ferner gelten für (54) die Gleichungen

$$e^{-R} = (e^R)^{-1}\,, \tag{55}$$

$$e^{QRQ^{-1}} = Qe^R Q^{-1}\,, \tag{56}$$

deren Beweis auf der Hand liegt.

Wir bilden nun für eine z. B. als monogen vorauszusetzende Funktion $f(t)$

$$\frac{d}{dt}(e^{Rf(t)}) = R \cdot f'(t) \cdot e^{Rf(t)}$$

und weiter

$$D_t e^{Rf(t)} = e^{-Rf(t)} Rf'(t)\, e^{Rf(t)}\,,$$

was aber wegen der Vertauschbarkeit von R mit $e^{Rf(t)}$

$$D_t e^{Rf(t)} = Rf'(t)$$

ergibt. Also ist $e^{Rf(t)}$ eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$\frac{d\mathfrak{y}_k}{dt} = (\mathfrak{y}_1 r_{1k} + \mathfrak{y}_2 r_{2k})\, f'(t)\,.$$

Für $f(t) = t$ erhalten wir eine Integralmatrix

$$\mathfrak{Y} = e^{Rt} \tag{57}$$

des Systems (C), und zwar reduziert sich diese Integralmatrix für $t = 0$ auf die Einheitsmatrix I. Die allgemeinste Integralmatrix von (C) hat also die Form

$$Pe^{Rt}\,,$$

wo P eine willkürliche konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet.

Für das Cauchysche System (B) haben wir demgemäß die Integralmatrix

$$\mathfrak{Y} = e^{R\log(x-a)}\,, \tag{58}$$

die wir nach Analogie der „skalaren" Formel $(x-a)^r = e^{r\log(x-a)}$ auch in der bequemeren Gestalt

$$\mathfrak{Y} = (x-a)^R \tag{58a}$$

schreiben können. Wenn x den geschlossenen Umlauf W vollzieht, der den Punkt a im positiven Sinne umkreist, so verwandelt sich $\mathfrak{Y}$ in

$$\mathfrak{Y} = e^{R(\log(x-a)+2\pi i)} = e^{R2\pi i}\mathfrak{Y}\,.$$

Wir fragen nunmehr, ob sich die Matrix R stets so bestimmen läßt, daß $\mathfrak{Y}$ mit der Integralmatrix Y von (A) in bezug auf den Umlauf W kogredient sei, d. h., daß

$$e^{R\cdot 2\pi i} = C \tag{59}$$

wird? Es handelt sich hier also um die Inversion der Matrizenfunktion $e^{R\cdot 2\pi i}$, d. h. gewissermaßen um das Analogon des Logarithmus einer skalaren Größe (vgl. die Formel $r = \frac{\log \omega}{2\pi i}$ der Nr. 34, S. 126). Wir können diese Inversion hier in folgender Weise vornehmen. Es sei

$$C = P^{-1} \Omega P, \tag{60}$$

wo Ω die kanonische Form von C bedeutet, also eine der drei Formen

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \gamma & \omega_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{pmatrix}; \tag{61}$$

wir nehmen $\gamma = 2\pi i\, \omega_1$. Wir bilden dann

$$r_1 = \frac{\log \omega_1}{2\pi i}, \quad r_2 = \frac{\log \omega_2}{2\pi i}, \tag{62}$$

wo den Logarithmen ihre volle Mehrdeutigkeit belassen werde, so daß also die r_1, r_2 nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt sind; nur im Falle der zweiten Form (61), wo $\omega_1 = \omega_2$ ist, nehmen wir $r_1 = r_2$, dagegen können sich im Falle der dritten Form r_1 und r_2 um eine ganze Zahl g unterscheiden. Entsprechend derjenigen der drei Formen (61), die Ω besitzt, bezeichnen wir dann mit Σ die entsprechende der drei Matrizen

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 1 & r_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_1 + g \end{pmatrix} \tag{63}$$

und setzen

$$R = P^{-1} \Sigma P;$$

dann ist

$$e^{R \cdot 2\pi i} = C,$$

und man sieht auch leicht, daß die mit der angegebenen Willkürlichkeit in den r_1, r_2 behaftete Matrix R die allgemeinste ist, die diese Gleichung befriedigt. Die mit diesem R gebildete Matrix $\mathfrak{Y} = (x - a)^R$ ist mit Y in bezug auf W kogredient.

Die Analogie mit den Betrachtungen der Nr. 34 führt nun ohne weiteres zur qualitativen Darstellung der y_{ik} in der Umgebung von $x = a$. Da

$$\overline{Y} = CY, \quad \overline{\mathfrak{Y}} = C\mathfrak{Y}$$

ist, so ist

$$\overline{\mathfrak{Y}}^{-1} \overline{Y} = \mathfrak{Y}^{-1} C^{-1} C Y = \mathfrak{Y}^{-1} Y;$$

die Elemente der Matrix

$$\Phi = \mathfrak{Y}^{-1} Y$$

sind folglich in der Umgebung von $x = a$ eindeutig. Sie haben ferner, da $|\mathfrak{Y}|$ außer im Punkte a nirgends verschwinden kann, in $x = a$ eine isolierte singuläre Stelle, und sind demnach in der Umgebung von $x = a$ in Laurentsche Reihen

$$\varphi_{ik} = \sum_{\lambda = -\infty}^{+\infty} \varphi_{ik}^{(\lambda)} (x - a)^\lambda \tag{64}$$

entwickelbar. Wir erhalten somit für die Integralmatrix die der Darstellung (IV) der Nr. 34 ganz analoge Entwicklung

$$(65) \qquad Y = \mathfrak{Y}\Phi = (x-a)^R \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Phi^{(\lambda)}(x-a)^\lambda ;$$

eine Änderung der r_1, r_2 um additive ganze Zahlen bringt auch hier nur eine Verschiebung der Glieder der Laurentschen Reihen mit sich.

Wir geben neben diesen symbolischen Formeln, deren Bedeutung wesentlich auf der suggestiven Kraft der Analogie mit dem Falle der linearen Differentialgleichung erster Ordnung beruht, noch die explizite Darstellung der zu dem Umlaufe W gehörigen kanonischen Integralmatrix $\boldsymbol{H}$. Für diese hatten wir (Nr. 38)

$$\bar{H} = \Omega H ;$$

es wird also an die Stelle von $\mathfrak{Y}$ jetzt einfach $(x-a)^\Sigma$ treten. Je nachdem welche der drei Formen (63) nun Σ hat, erhalten wir für $(x-a)^\Sigma$ die drei Typen

$$(x-a)^{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}\log(x-a)} = \begin{pmatrix} (x-a)^{r_1} & 0 \\ 0 & (x-a)^{r_2} \end{pmatrix},$$

$$(x-a)^{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 1 & r_1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 1 & r_1 \end{pmatrix}\log(x-a)} = \begin{pmatrix} (x-a)^{r_1} & 0 \\ (x-a)^{r_1}\log(x-a) & (x-a)^{r_1} \end{pmatrix},$$

$$(x-a)^{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_1+g \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_1+g \end{pmatrix}\log(x-a)} = \begin{pmatrix} (x-a)^{r_1} & 0 \\ 0 & (x-a)^{r_1+g} \end{pmatrix}$$

und damit für die η_{ik} die Darstellungen:

$$\eta_{11} = (x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \qquad \eta_{12} = (x-a)^{r_1}\varphi_{12},$$
$$\eta_{21} = (x-a)^{r_2}\varphi_{21}, \qquad \eta_{22} = (x-a)^{r_2}\varphi_{22};$$

$$\eta_{11} = (x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \qquad \eta_{12} = (x-a)^{r_1}\varphi_{12},$$
$$\eta_{21} = (x-a)^{r_1}(\varphi_{21} + \varphi_{11}\log(x-a)),$$
$$\eta_{22} = (x-a)^{r_1}(\varphi_{22} + \varphi_{12}\log(x-a));$$

$$\eta_{11} = (x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \qquad \eta_{12} = (x-a)^{r_1}\varphi_{12},$$
$$\eta_{21} = (x-a)^{r_1+g}\varphi_{21}, \quad \eta_{22} = (x-a)^{r_1+g}\varphi_{22}.$$

Zur quantitativen Bestimmung der r_{ik} und der Koeffizienten $\varphi_{ik}^{(\lambda)}$ in den Reihen φ_{ik} hat man die in (65) dargestellte Lösung Y in das Differentialsystem (A′) einzusetzen und die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x-a$ zu vergleichen. Um diese Rechnung einfach ausführen zu können, bemerken wir, daß für zwei Matrizen differentiierbarer Funktionen Y und P, deren Determinanten nicht identisch verschwinden, die Derivationsformel gilt:

$$(\mathrm{D}) \qquad D_x(YP) = P^{-1}D_xY \cdot P + D_xP ,$$

deren Beweis unmittelbar aus der Definition des Symbols D_x (Nr. 35) folgt. Wir haben also für $Y = \mathfrak{Y}\Phi$:

$$D_x Y = \Phi^{-1} D_x \mathfrak{Y} \cdot \Phi + D_x \Phi = A, \tag{66}$$

und da $\mathfrak{Y}$ eine Lösung des Cauchyschen Systems (B), d. h.

$$D_x \mathfrak{Y} = \frac{R}{x - a}$$

ist, so erhalten wir aus (66), indem wir mit Φ von links her komponieren und mit $x - a$ durchmultiplizieren,

$$R\Phi + (x - a)\frac{d}{dx}\Phi = \Phi A \cdot (x - a);$$

darin ist

$$\Phi = \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} \Phi^{(\nu)}(x - a)^{\nu}, \quad A = \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} A^{(\nu)}(x - a)^{\nu}$$

zu setzen. Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich dann

$$(R + \nu)\Phi^{(\nu)} = \sum_{\lambda + \mu = \nu - 1} \Phi^{(\lambda)} A^{(\mu)}, \qquad (\nu = -\infty, \ldots, +\infty) \tag{67}$$

Diese Matrizengleichung liefert für die $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, das im allgemeinsten Falle nur durch transzendente Methoden gelöst werden kann. Eine besonders elegante Lösung hat Helge von Koch mit Hilfe von Determinanten unendlich hoher Ordnung gegeben [1]). Wir wollen uns aber auf die Betrachtung der Fälle beschränken, wo die Lösung jenes Systems linearer Gleichungen durch elementare algebraische Methoden erfolgen kann, es ist das der Fall, wo in den Laurentschen Reihen Φ nur eine endliche Anzahl negativer Exponenten vorkommt, also der Fall, wo die Lösungen Y in dem Punkte $x = a$ nicht unbestimmt werden. Wir bezeichnen diesen Fall kürzer als den der Bestimmtheit. Es ist das bleibende Verdienst von Fuchs, diese Klasse von Singularitäten hervorgehoben und sie eingehend untersucht zu haben [2]). Durch diese Beschränkung erst, ist die Entwicklung der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen ermöglicht worden.

[1]) H. v. Koch, Acta mathem. 15 (1891), S. 53; 16 (1892), S. 217; 18 (1894), S. 337; vgl. die Darstellung bei Horn, a. a. O. S. 212 ff. und bei F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913, S. 156. An diesen Stellen werden vorwiegend statt der Systeme lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt.

[2]) L. Fuchs, 1865, Werke I. S. 111 ff.

Sechstes Kapitel.

Untersuchung der singulären Stellen, wo die Integrale nicht unbestimmt werden.

40. Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Gestalt der Koeffizienten in der Umgebung einer singulären Stelle der Bestimmtheit.

Die erste Aufgabe, die wir zu behandeln haben, besteht darin, die Form der Koeffizienten a_{ik} in der Umgebung einer singulären Stelle anzugeben, an der die Lösungen unseres Differentialsystems nicht unbestimmt werden. Es zeigt sich, daß eine einfache notwendige und hinreichende Form für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, nicht aber für ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung angegeben werden kann. Wir geben darum zuvörderst ein Verfahren, das die Lösung des Systems (A) auf die einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen lehrt.

Differentiiert man die Gleichungen des Systems (A)

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = y_1 a_{1k} + y_2 a_{2k} \,. \qquad (k=1,2)$$

so kommt

$$y_k'' = y_1' a_{1k} + y_2' a_{2k} + y_1 a_{1k}' + y_2 a_{2k}' \,, \qquad (k=1,2)$$

und indem man z. B. in der ersten dieser Gleichungen für y_2' seinen Wert aus (A) einsetzt, erhält man

$$y_1'' = y_1' a_{11} + y_1(a_{12} a_{21} + a_{11}') + y_2(a_{22} a_{21} + a_{21}') \,.$$

Wenn nun $a_{21} \neq 0$ ist, so gibt die erste der Gleichungen (A)

$$(1) \qquad y_2 = \frac{1}{a_{21}}(y_1' - y_1 a_{11}) \,;$$

wir finden also

$$(2) \quad y_1'' = y_1'\left(a_{11} + a_{22} + \frac{a_{21}'}{a_{21}}\right) + y_1\left(a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} + a_{11}' - \frac{a_{11} a_{21}'}{a_{21}}\right),$$

d. h. eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für y_1. Wäre $a_{21} = 0$, aber $a_{12} \neq 0$, so könnte in derselben Weise eine ebensolche Differentialgleichung für y_2 hergestellt werden. Sollten beide Koeffizienten a_{12} und a_{21} identisch verschwinden, so zerfiele das System (A) in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für y_1 und y_2 allein; diesen Fall können wir also beiseite lassen, d. h. wir können annehmen, daß wenigstens einer der beiden Koeffizienten a_{12}, a_{21} nicht identisch verschwindet. Es sei dies für a_{21} der Fall, dann gilt also für y_1 die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2), und wenn diese gelöst ist, so wird y_2 durch (1) unmittelbar gegeben.

Wir sehen, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung (2) und ebenso die der Relation (1) sich rational zusammensetzen aus den a_{ik} und ihren Ableitungen, sie gehören, wie man sagt, demselben Rationalitätsbereiche an, wie die Koeffizienten des Systems (A); wenn z. B. die a_{ik} rationale Funktionen von x sind, so sind es auch die Koeffizienten in (2) und (1).

Hat man umgekehrt eine lineare Differentialgleichung von der Form (2)

$$u'' + pu' + qu = 0\,, \tag{3}$$

so kann man durch die Substitution

$$u = z_1\,, \quad u' = z_2$$

sofort zu dem System

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \qquad\quad z_2, \\ \frac{dz_2}{dx} &= -qz_1 - pz_2 \end{aligned} \tag{4}$$

übergehen. Sind z_{ik} die Elemente einer Integralmatrix von (4), also

$$z_1 = c_1 z_{11} + c_2 z_{21}\,, \quad z_2 = c_1 z_{12} + c_2 z_{22}$$

mit willkürlichen Konstanten c_1, c_2 das allgemeine Lösungssystem dieses Systems, so stellen

$$z_{11} = u_1\,, \quad z_{21} = u_2$$

zwei partikuläre Lösungen von (3) dar, für die nach der ersten der Gleichungen (4)

$$z_{12} = u_1'\,, \quad z_{22} = u_2'$$

ist. Ferner liefert

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \tag{5}$$

die allgemeine Lösung von (3). Man sieht, daß in diesem Falle die Betrachtung der u_1, u_2, d. h. der z_{11}, z_{21} vollkommen ausreicht, die z_{12}, z_{22} können beiseite bleiben. Die Bedingung, daß die z_{ik} eine Integralmatrix bilden, war

$$|Z| \neq 0\,;$$

in unserem Falle ist also

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' = u_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \neq 0\,, \tag{6}$$

d. h. es ist der Quotient $\frac{u_2}{u_1}$ nicht konstant. Zwei partikuläre Lösungen von (3), die diese Eigenschaft haben, nennt man nach Fuchs [1]) ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (3). Durch ein solches System läßt sich das allgemeine Integral von (3) in der Form (5) darstellen. Die Bedingung dafür, daß u_1, u_2 ein Fundamentalsystem bilden, ist das Bestehen der Ungleichung (6), d. h. das Nichtverschwinden der sogenannten Wronskischen Determinante $u_1 u_2' - u_2 u_1'$. Aus der Jacobischen Gleichung (36) der Nr. 38 folgt für unseren Fall, wo

$$(7) \qquad a_{11} = 0\,, \quad a_{21} = 1\,, \quad a_{12} = -q\,, \quad a_{22} = -p$$

ist, die sogenannte Abelsche Gleichung

$$(8) \qquad u_1 u_2' - u_2 u_1' = \text{const.}\, e^{-\int p\,dx},$$

aus der ersichtlich ist, daß die Wronskische Determinante eines Fundamentalsystems nur in den singulären Punkten des Koeffizienten p verschwinden kann.

Wir sehen, daß (abgesehen von dem Falle $a_{12} = a_{21} = 0$) die Theorie der Systeme (A) und die der Differentialgleichung (3) vollkommen aufeinander zurückgeführt werden können.

Damit die Lösungen von (A) in dem singulären Punkte $x = a$ der Koeffizienten nicht unbestimmt werden, genügt es, daß diese Eigenschaft für die Elemente einer Integralmatrix Y besteht. Es werden also in diesem Falle in der Darstellung Nr. 39, Gleichung (65)

$$Y = \mathfrak{Y}\Phi$$

die Entwicklungen der φ_{ik} in der Umgebung von $x = a$ nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Dann enthält auch die Entwicklung der Determinante $|\Phi|$ nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen, und da

$$|Y| = |\mathfrak{Y}|\,|\Phi|$$

ist, so wird auch jedes Element der Matrix

$$Y^{-1} = \Phi^{-1}\mathfrak{Y}^{-1}$$

in $x = a$ nicht unbestimmt sein. Da

$$A = D_x Y = Y^{-1}\frac{dY}{dx}$$

ist, so sind auch die a_{ik} im Punkte $x = a$ nicht unbestimmt, und da sie in der Umgebung von $x = a$ eindeutig sein sollten, so haben sie daselbst einen Pol. Das gleiche gilt dann auch von den Koeffizienten der Differentialgleichung (2) und überträgt sich damit ohne weiteres auf die beliebige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (3).

[1]) L. Fuchs 1865. Werke I. S. 117.

Wir untersuchen nun zuvörderst die Differentialgleichung (3). Wenn die Lösungen von (3) in $x = a$ nicht unbestimmt sind, so hat das Fundamentalsystem, das der zu $x = a$ gehörigen kanonischen Integralmatrix des Systems (4) entspricht, und das wir als das **kanonische Fundamentalsystem** bezeichnen wollen, in der Umgebung von $x = a$ die Form

$$\begin{aligned} v_1 &= (x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \\ v_2 &= (x-a)^{r_2}[\varphi_{21} + k\varphi_{11}\log(x-a)], \end{aligned}$$

wo die φ_{11}, φ_{21} nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten und k gleich 0 oder 1, aber allemal gleich Null ist, wenn r_1 von r_2 verschieden ist.

Wir ziehen dann die höchste negative Potenz $(x-a)^{-g}$ aus φ_{11} heraus, vereinigen sie mit $(x-a)^{r_1}$ und erhalten auf diese Weise für v_1 die Darstellung

$$v_1 = (x-a)^{r_1-g}\varphi_1(x-a),$$

wo jetzt $r_1 - g$ vollkommen bestimmt und $\varphi_1(x-a)$ in der Umgebung von $x = a$ holomorph, und für $x = a$ von Null verschieden ist. Dann ziehen wir aus φ_{21} und $k\varphi_{11}$ die höchste negative Potenz $(x-a)^{-h}$ heraus, so daß v_2 die Form erhält:

$$v_2 = (x-a)^{r_2-h}(\varphi_2(x-a) + k\psi_2(x-a)\log(x-a)),$$

wo $\varphi_2(x-a)$, $k\psi_2(x-a)$ in der Umgebung von $x = a$ holomorph, und in $x = a$ nicht beide gleichzeitig gleich Null sind. Dadurch ist auch $r_2 - h$ vollkommen festgelegt. Wir bezeichnen nun diese eindeutig festgelegten Exponenten $r_1 - g$, $r_2 - h$ wieder mit r_1, r_2 und schreiben also das kanonische Fundamentalsystem in der Form

$$\begin{aligned} v_1 &= (x-a)^{r_1}\varphi_1, \\ v_2 &= (x-a)^{r_2}(\varphi_2 + k\psi_2\log(x-a)). \end{aligned} \tag{9}$$

Die Produkte

$$(x-a)^{-r_1}v_1, \quad (x-a)^{-r_2}v_2,$$

sind dann falls $k = 0$ ist, für $x = a$ beide endlich und von Null verschieden, dagegen wird, wenn $k \neq 0$ ist, das zweite für $x = a$ so unendlich, wie der Ausdruck

$$\varphi_2(0) + k\cdot\psi_2(0)\log(x-a).$$

Wir sagen dann, v_1, v_2 gehören für $x = a$ zu den Exponenten r_1, r_2.

Wie wir schon bemerkt haben, ist k jedenfalls gleich Null, wenn die beiden Wurzeln der zu a gehörigen Fundamentalgleichung voneinander verschieden sind, d. h. k ist jedenfalls gleich Null, wenn die Differenz der Exponenten r_1, r_2 **keine ganze** Zahl ist.

Auch die folgende Bemerkung ist oft von Nutzen.

Nehmen wir an, es sei bekannt, daß die Differentialgleichung (3) **ein** in $x = a$ nicht unbestimmtes Integral besitzt; dann kann dieses nach den allgemeinen Ergebnissen in der Umgebung von $x = a$ jedenfalls in der Form

$$v_2 = (x - a)^{r_2} \{\varphi_2(x - a) + k \cdot \psi_2(x - a) \log(x - a)\} .$$

dargestellt werden, wo φ_2, ψ_2 gewöhnliche Potenzreihen bedeuten. Lassen wir dann x um den Punkt a den positiven Umlauf U beschreiben, so multipliziert sich

$$(x - a)^{r_2} \text{ mit } e^{2\pi i r_2}$$

und $\log(x - a)$ vermehrt sich um $2\pi i$; also verwandelt sich v_2 in

$$\bar{v}_2 = e^{2\pi i r_2} v_2 + e^{2\pi i r_2}(x - a)^{r_2} \psi_2(x - a) \cdot 2\pi i \cdot k ,$$

und $\bar{v}_2$ ist ebenfalls ein Integral. Dann ist aber auch

$$\frac{e^{-2\pi i r_2}}{2\pi i} [\bar{v}_2 - e^{2\pi i r_2} v_2] = k \cdot (x - a)^{r_2} \psi_2(x - a)$$

ein Integral, d. h. wenn ein Integral v_2 vorhanden ist, das in $x = a$ nicht unbestimmt wird, so ist der mit dem $\log(x - a)$ multiplizierte Ausdruck selbst ein Integral, es gibt also dann stets auch ein in Reihenform darstellbares Integral, das im Punkte a nicht unbestimmt ist.

Wir suchen nun das Verhalten der Koeffizienten der Differentialgleichung (3) in der Umgebung von $x = a$ festzustellen, unter der Voraussetzung, daß die Integrale in diesem Punkte nicht unbestimmt werden, daß also das kanonische Fundamentalsystem die Form (9) besitzt.

Setzen wir in der Differentialgleichung

$$u = v_1 \int v dx ,$$

woraus

$$u' = v_1 v + v_1' \int v dx ,$$
$$u'' = v_1 v' + 2v_1' v + v_1'' \int v dx ,$$

so ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß v_1 der Differentialgleichung (3) genügt, für v die Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{2v_1'}{v_1} + p\right) = 0 . \tag{10}$$

Setzen wir das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$v = e^{-\int \left(\frac{2v_1'}{v_1} + p\right) dx}$$

in den Ausdruck

$$u = v_1 \int v dx$$

für v ein, so genügt u der Differentialgleichung (3), und umgekehrt befriedigt

$$v = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v_1}\right)$$

der Differentialgleichung (10), wenn u irgendeine Lösung von (3) bedeutet. Also genügt auch

$$v = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

der Differentialgleichung (10). In der Umgebung von $x = a$ ist

$$\frac{v_2}{v_1} = (x-a)^{r_2 - r_1}\left\{\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + k\,\frac{\psi_2}{\varphi_1}\log(x-a)\right\},$$

also ist dieser Quotient im Punkte $x = a$ keinesfalls unbestimmt und ebensowenig sein Differentialquotient v. Nach den Ergebnissen der Nr. 34 (S. 129) folgt aber daraus, daß das Integral von (10) im Punkte a nicht unbestimmt ist, daß der Koeffizient dieser Differentialgleichung in $x = a$ einen Pol erster Ordnung besitzt; wir haben also in der Umgebung von $x = a$

$$\frac{2v_1'}{v_1} + p = \frac{\mathfrak{P}(x-a)}{x-a},$$

wo $\mathfrak{P}(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ bedeutet. Nun ist aber ferner

$$\frac{2v_1'}{v_1} = 2\,\frac{r_1}{x-a} + 2\,\frac{\varphi_1'(x-a)}{\varphi_1(x-a)} = 2\,\frac{r_1}{x-a} + \mathfrak{P}(x-a),$$

wo auch $\mathfrak{P}(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe darstellt, also ergibt sich

$$p = \frac{\mathfrak{P}(x-a)}{x-a} - 2\,\frac{r_1}{x-a} - \mathfrak{P}(x-a) = \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a},$$

wo $\mathfrak{P}_1(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ bedeutet, d. h. p verhält sich in der Umgebung von $x = a$ wie eine rationale Funktion und hat in diesem Punkte einen *Pol erster Ordnung*.

Aus der identischen Gleichung

$$v_1'' + p\cdot v_1' + q\cdot v_1 = 0$$

berechnen wir

$$q = -\frac{v_1''}{v_1} - p\,\frac{v_1'}{v_1}.$$

Aus der Darstellung von v_1 in der Umgebung von $x = a$ folgt mit Rücksicht darauf, daß $\varphi_1(0)$ von Null verschieden ist:

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{1}{x-a}\,\mathfrak{P}_3(x-a), \quad \frac{v_1''}{v_1} = \frac{1}{(x-a)^2}\,\mathfrak{P}_4(x-a),$$

wo $\mathfrak{P}_3(x-a)$, $\mathfrak{P}_4(x-a)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ bedeuten; also haben wir

$$q = -\frac{1}{(x-a)^2}\{\mathfrak{P}_4(x-a) + \mathfrak{P}_1(x-a)\cdot\mathfrak{P}_3(x-a)\},$$
$$= \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2},$$

wo auch $\mathfrak{P}_2(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ darstellt; d. h. q verhält sich in der Umgebung von $x = a$ ebenfalls wie eine rationale Funktion und besitzt daselbst einen *Pol zweiter Ordnung*.

Wenn also die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) in der Umgebung des Punktes $x = a$ eindeutig, und in diesem Punkte die Integrale nicht unbestimmt sind, so hat die Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ die Form:

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\frac{du}{dx} + \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2}\, u = 0\,.$$

Es entsteht nun die Frage, ob die Form (B) der Differentialgleichung auch umgekehrt die Eigenschaft der Integrale, im Punkte a nicht unbestimmt zu sein, nach sich zieht. Die Antwort auf diese Frage wird bejahend ausfallen, bedarf aber etwas weitgehender Untersuchungen, denen wir uns jetzt zuzuwenden haben.

41. Übergang zum Differentialsystem. Die gefundene Form ist auch hinreichend.

Geht man von dem Differentialsystem (A) aus, dessen Koeffizienten a_{ik} in $x = a$ höchstens einen Pol haben, und wo $a_{21} \neq 0$ ist, so befriedigt y_1 die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2). Wir identifizieren nun diese Differentialgleichung mit (3), d. h. wir setzen

$$y_1 = u\,, \quad -p = a_{11} + a_{22} + \frac{a_{12}'}{a_{21}}\,, \quad -q = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{11}' - \frac{a_{11}a_{21}'}{a_{21}}$$

und nehmen an, daß p und q von der in der vorigen Nummer gefundenen Form sind. Von (3) gehen wir dann durch die Transformation

$$\text{(11)} \qquad z_1 = u, \quad z_2 = (x-a)\,u'$$

zu einem linearen Differentialsystem für z_1, z_2 über. Es ist

$$\text{(12)} \qquad u' = z_1' = \frac{z_2}{x-a}\,,$$

$$\text{(13)} \qquad z_2' = u''(x-a) + u'\,,$$

also folgt aus (13), wenn wir für u'' seinen aus (B) berechneten Wert einsetzen,

$$\text{(14)} \qquad z_2' = \frac{1-\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\, z_2 - \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{x-a}\, z_1\,.$$

Die Gleichungen (12) und (14) zeigen, daß z_1, z_2 einem linearen Differentialsystem genügen, dessen Koeffizienten im Punkte $x = a$ einen Pol erster Ordnung haben.

Zwischen dem Differentialsystem (A) und dem gefundenen Differentialsystem für z_1, z_2 besteht nun die folgende Beziehung. Es war $y_1 = u$, also nach (1)

$$y_2 = -\frac{1}{a_{21}}(ua_{11} - u'),$$

d. h. wir finden

$$(15) \qquad \begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= -\frac{1}{a_{21}}\left(z_1 a_{11} - \frac{z_2}{x-a}\right). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (15) haben die Form:

$$(16) \qquad \begin{aligned} y_1 &= z_1 s_{11} + z_2 s_{21}, \\ y_2 &= z_1 s_{12} + z_2 s_{22}, \end{aligned}$$

wo die s_{ik} sich in $x = a$ wie rationale Funktionen verhalten, d. h. dort höchstens einen Pol haben, und $|S| \neq 0$ ist; wir können also das bisher erzielte Ergebnis auch so aussprechen:

Damit die Lösungen des Differentialsystems (A), dessen Koeffizienten in der Umgebung der isolierten singulären Stelle $x = a$ eindeutig sind, in diesem Punkt nicht unbestimmt werden, muß es möglich sein, durch eine Transformation von der Form (16) zu einem ebensolchen Differentialsystem überzugehen, dessen Koeffizienten im Punkte $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung haben.

Man kann die Differentialsysteme für z_1, z_2 und y_1, y_2, die durch eine Transformation von der Form (16) auseinander hervorgehen, in bezug auf einen Umlauf W, der den singulären Punkt a umschließt, kogredient nennen. Bedeutet nämlich Z eine Integralmatrix des Differentialsystems für z_1, z_2, so ist

$$Y = Z \cdot S$$

offenbar eine Integralmatrix des Systems für y_1, y_2 und Y, Z sind im Sinne der Definition der Nr. 39 (S. 153) in bezug auf den Umlauf W kogredient, da die Elemente s_{ik} von S in der Umgebung von a eindeutig sind. Aber hier haben die s_{ik} noch die besondere Eigenschaft, sich im Punkte $x = a$ wie rationale Funktionen zu verhalten; wir bringen dies dadurch zum Ausdruck, daß wir von den Integralmatrizen Y, Z und ebenso von den zugehörigen Differentialsystemen sagen, sie seien in bezug auf den Umlauf um a von derselben Art. Nennt man dann noch ein Differentialsystem, dessen Koeffizienten in dem Punkte $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung haben, ein für diesen Punkt kanonisches, so kann man unser Ergebnis kurz so aussprechen:

Wenn die Lösungen eines Differentialsystems (A) mit in der Umgebung von $x = a$ eindeutigen Koeffizienten in a nicht unbestimmt sind, so muß (A) mit einem für den Punkt a kanonischen Differentialsystem in bezug auf einen Umlauf um diesen Punkt von derselben Art sein.

Wir legen jetzt ein beliebiges für $x = a$ kanonisches Differentialsystem zugrunde, also

$$(C)\qquad \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_1 \frac{\mathfrak{p}_{11}(x-a)}{x-a} + z_2 \frac{\mathfrak{p}_{21}(x-a)}{x-a}, \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_1 \frac{\mathfrak{p}_{12}(x-a)}{x-a} + z_2 \frac{\mathfrak{p}_{22}(x-a)}{x-a}, \end{aligned}$$

und wollen zeigen, daß die Lösungen eines solchen Systems im Punkte $x=a$ nicht unbestimmt sind. Die $\mathfrak{p}_{ik}(x-a)$ seien innerhalb des um $x=a$ beschriebenen Kreises K holomorph und es sei im Innern von K

$$|\mathfrak{p}_{ik}(x-a)| < M .$$

Wir wenden dann den am Schluß der Nr. 36 abgeleiteten Mittelwertsatz an. Für die dort mit $g(x)$ bezeichnete Funktion gilt

$$g(x) \leqq \frac{M}{|x-a|}.$$

Wir wählen den Integrationsweg W als eine zwei Punkte x_0, x_1 des Innern von K verbindende und innerhalb K verbleibende Kurve C von endlicher Bogenlänge, von der wir noch folgendes voraussetzen wollen. Wenn in Polarkoordinaten

$$x-a = \varrho e^{\varphi i}, \quad x_0 - a = \varrho_0 e^{\varphi_0 i}, \quad x_1 - a = \varrho_1 e^{\varphi_1 i}$$

gesetzt wird, und x sich auf C von x_0 nach x_1 hin bewegt, so sollen ϱ und φ niemals vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergehen (monoton bleiben), und die Gesamtänderung von φ soll kleiner als 2π sein. Es seien dann z_{ik} die Elemente der durch das Produktintegral

$$\widehat{\int_{x_0}^{x_1}} \left(\frac{\mathfrak{P}}{(x-a)}\, dx + I\right)$$

definierten Integralmatrix von (C), wo die Integration längs C zu erstrecken ist. Dann ist

$$|dx| \leqq |d\varrho| + \varrho\,|d\varphi|, \quad |x-a| = \varrho,$$

und wir haben folglich

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)|dx| \leqq \int_{x_0}^{x_1} \frac{M\,|dx|}{|x-a|} \leqq M \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{|d\varrho|}{\varrho} + M \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |d\varphi| \leqq M \left|\log \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right| + 2\pi M .$$

Der gedachte Mittelwertsatz liefert also für $\varrho_1 < \varrho_0$ die Ungleichung

$$|z_{ik}| \leqq \left(\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right)^{2M} e^{4\pi M},$$

d. h. aber, daß $z_{ik}(x-a)^{2M}$ beschränkt ist; nach der in der Nr. 34 (S. 128) gegebenen Definition heißt das aber, daß z_{ik} in $x=a$ nicht unbestimmt ist[1]). Wir haben also den von Sauvage[2]) gefundenen Satz:

[1]) Der vorstehende Beweis ist eine von H. Fuhr herrührende Vereinfachung des von Schlesinger, Crelles Journal 132 (1907) S. 247 gegebenen Beweises; vergl. auch G. D. Birkhoff, Transactions of Am. Math. Soc. 11 (1910), S. 199.

[2]) L. Sauvage, Annales de l'École Norm. (3) III (1886); vgl. Poincaré 1884, Oeuvres II, S. 312, 313.

Wenn in einem linearen Differentialsystem die Koeffizienten in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung haben, so sind die Lösungen in diesem Punkte nicht unbestimmt.

Da mit den Lösungen des durch die Gleichungen (12), (14) dargestellten Differentialsystems für z_1, z_2 auch die Lösungen der Differentialgleichung (3) an der Stelle $x = a$ nicht unbestimmt sind, so haben wir den Satz von Fuchs [1]).

Die Form (B) einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Umgebung der singulären Stelle $x = a$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Lösungen für $x = a$ nicht unbestimmt werden.

Endlich ist klar, daß zugleich mit z_1, z_2 auch die durch die Gleichungen (16) gegebenen y_1, y_2, wo die s_{ik} in $x = a$ sich wie rationale Funktionen verhalten und $|S| \neq 0$ ist, in $x = a$ nicht unbestimmt werden; mit Rücksicht auf das oben ausgesprochene Ergebnis haben wir also den Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösungen eines linearen Differentialsystems (A), dessen Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ eindeutig sind, in diesem Punkte nicht unbestimmt werden, ist, daß dieses System mit einem für $x = a$ kanonischen Differentialsystem in bezug auf einen Umlauf um a von derselben Art ist.

Man erkennt hier auch den Grund dafür, daß für ein System keine notwendige Form der Koeffizienten von gleicher Einfachheit vorhanden ist, wie sie der Fuchssche Satz für die Differentialgleichung zweiter Ordnung gibt; es liegt das nämlich daran, daß die Koeffizienten des Systems vermöge der Transformationen (16) Pole beliebig hoher Ordnung erhalten können, während eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (B) durch die analoge Transformation

$$w = s_1 u + s_2 u' , \tag{16a}$$

wo s_1, s_2 in $x = a$ das Verhalten rationaler Funktionen zeigen, immer wieder in eine Gleichung für w von derselben Form verwandelt wird.

42. Berechnung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir wollen nun die quantitative Berechnung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit vornehmen und beginnen mit dem Falle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, wo sich die Rechnungen sehr einfach gestalten [2]).

[1]) L. Fuchs, 1865, Werke I. S. 135, 212, 222.

[2]) Vgl. hierzu nebst Fuchs a. a. O. noch G. Frobenius, Crelles Journal

Wir bringen die Differentialgleichung (B) durch Multiplikation mit $(x-a)^2$ auf die Form

$$(17)\quad D(u) = (x-a)^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (x-a)\cdot \mathfrak{P}_1(x-a)\frac{du}{dx} + \mathfrak{P}_2(x-a)u = 0,$$

die man nach Frobenius die Normalform nennt. Die linke Seite der Differentialgleichung haben wir kurz mit $D(u)$ bezeichnet; D ist hierbei als Operationssymbol aufzufassen, und gehorcht als solches offenbar dem distributiven Gesetze

$$D(u_1+u_2) = D(u_1) + D(u_2):$$

ebenso ist für ein konstantes c

$$D(cu) = cD(u).$$

Wenn die Integrale von (17) in $x=a$ nicht unbestimmt sind, so gibt es nach der in der Nr. 40 (S. 162, 163) gemachten Bemerkung jedenfalls auch ein Integral, das in der Umgebung von $x=a$ in der Form

$$(18)\qquad = (x-a)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

darstellbar ist. Die Konvergenz dieser Reihe in derjenigen Umgebung von $x=a$, für die die Reihen $\mathfrak{P}_1(x-a)$, $\mathfrak{P}_2(x-a)$ konvergent sind, ist nach dem Vorhergehenden als gesichert anzusehen.

Setzen wir die Reihe (18) in die linke Seite der Differentialgleichung (17) ein, so ergibt sich:

$$D(u) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{r+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D((x-a)^{r+k}).$$

Wir werden also veranlaßt, den Ausdruck

$$D((x-a)^\varrho) = (x-a)^2 \varrho(\varrho-1)(x-a)^{\varrho-2}$$
$$+ (x-a)\cdot\mathfrak{P}_1(x-a)\cdot\varrho(x-a)^{\varrho-1} + \mathfrak{P}_2(x-a)\cdot(x-a)^\varrho$$

zu untersuchen, wo ϱ eine beliebige konstante Größe bedeutet; man nennt diesen Ausdruck nach Frobenius die charakteristische Funktion der Differentialgleichung.

Wir setzen diese in die Form

$$(19)\qquad D((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho f(x,\varrho),$$

wo also

$$f(x,\varrho) = \varrho(\varrho-1) + \mathfrak{P}_1(x-a)\cdot\varrho + \mathfrak{P}_2(x-a)$$

eine in der Umgebung von $x=a$ holomorphe Funktion bedeutet. Es sei nach Potenzen von $x-a$ entwickelt:

$$(20)\qquad f(x,\varrho) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\varrho)(x-a)^\lambda,$$

Bd. 76, (1873), S. 214 ff., Bd. 80, (1875), S. 317 ff. und L. Heffter, Einleitung in die Theorie der lin. Differentialgleichungen (1893); siehe auch L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen Bd. I, 1895, S. 154 ff.

dann ist nach dem Taylorschen Satze:

$$\begin{aligned} f_0(\varrho) &= \varrho(\varrho-1) + \varrho\mathfrak{P}_1(0) + \mathfrak{P}_2(0)\,, \\ f_1(\varrho) &= \qquad\qquad \varrho\mathfrak{P}_1'(0) + \mathfrak{P}_2'(0)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir finden hiernach

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^{r+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^{r+k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(r+k)(x-a)^\lambda\,,$$

und indem wir, nach Potenzen von $(x-a)$ ordnend, $k+\lambda=\nu$ setzen und den ganzen Ausdruck mit Null vergleichen,

$$(x-a)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-a)^\nu \{c_0 f_\nu(r) + c_1 f_{\nu-1}(r+1) + \cdots + c_\nu f_0(r+\nu)\} = 0\,.$$

Es muß nun jeder einzelne Koeffizient dieser Reihe verschwinden, wenn die Reihe (18) der Differentialgleichung genügen soll, d. h.

$$(21)\qquad c_0 f_\nu(r) + c_1 f_{\nu-1}(r+1) + \cdots + c_\nu f_0(r+\nu) = 0\,, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Für $\nu = 0$ ergibt sich

$$c_0 f_0(r) = 0\,;$$

c_0 kann als von Null verschieden vorausgesetzt werden, da die Reihe (18) sonst nicht zum Exponenten r, sondern zu einem höheren Exponenten gehören würde; wir finden also zuvörderst, daß der Exponent r eine Wurzel der Gleichung

$$(22)\qquad f_0(\varrho) = \varrho(\varrho-1) + \varrho\mathfrak{P}_1(0) + \mathfrak{P}_2(0) = 0$$

sein muß. Im allgemeinen Falle wurde r durch die Fundamentalgleichung (46) der Nr. 38, abgesehen von additiven ganzen Zahlen, bestimmt; hier bestimmt sich r vollkommen als Wurzel der Gleichung (22); man nennt diese Gleichung darum nach Fuchs die zu $x=a$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung. Es ist besonders bemerkenswert, daß diese Gleichung aus den Koeffizienten der Differentialgleichung direkt gebildet werden kann, was für die Fundamentalgleichung nicht der Fall war.

Nachdem r als Wurzel der Gleichung (22) bestimmt ist, liefert die Gleichung (21) für $\nu = 1$

$$c_0 f_1(r) + c_1 f_0(r+1) = 0$$

das Verhältnis von c_1 zu c_0, also, wenn c_0 willkürlich angenommen wird, den Wert von c_1, vorausgesetzt, daß $f_0(r+1)$ nicht verschwindet. Gleichermaßen liefert die Gleichung (21) für $\nu = 2$

$$c_0 f_2(r) + c_1 f_1(r+1) + c_2 f_0(r+2) = 0$$

den Wert von c_2 usw. Allgemein erhalten wir aus den Gleichungen (21) jedes c_ν ausgedrückt durch

$$c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}\,,$$

diese Gleichungen stellen also eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe (18) dar. Eine Schwierigkeit kann nur dadurch eintreten, daß für ein gewisses ν

$$f_0(r+\nu)=0$$

wird. Um dieser vorläufig aus dem Wege zu gehen, wählen wir r als diejenige Wurzel r_1 der determinierenden Fundamentalgleichung, deren reeller Teil nicht kleiner ist, als der der anderen Wurzel; dann ist offenbar für jedes positive ν

$$f_0(r_1+\nu)\neq 0,$$

die sukzessive Berechnung der c_ν also stets möglich. Wir haben somit das zum Exponenten r_1 gehörige Integral

$$u_1=(x-a)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

der Differentialgleichung (B), worin c_0 eine beliebige von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Für die andere Wurzel r_2 der Gleichung (22) würde alles unverändert bestehen bleiben, wenn der Ausdruck

$$f_0(r_2+\nu)$$

für kein positives ganzzahliges ν verschwindet. Nun kann aber

$$f_0(r_2+g)=0$$

nur dann bestehen, wenn

$$r_2+g=r_1,$$

die Schwierigkeit, daß $f_0(r_2+\nu)$ verschwindet, wird also dann und nur dann eintreten, wenn die Differenz r_1-r_2 der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung eine positive ganze Zahl ist.

Diesen Fall, sowie auch denjenigen, wo die beiden Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung einander gleich sind, lassen wir vorläufig beiseite; dann finden wir also entsprechend der Wahl $r=r_2$ das zum Exponenten r_2 gehörige Integral

$$u_2=(x-a)^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{c}_k(x-a)^k,$$

wo $\bar{c}_0$ willkürlich, aber von Null verschieden ist und die übrigen $\bar{c}_k$ durch die Rekursionsformel (21) für $r=r_2$ geliefert werden. Da r_2-r_1 weder eine ganze Zahl noch Null ist, kann der Quotient

$$\frac{u_2}{u_1}=(x-a)^{r_2-r_1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\bar{c}_k(x-a)^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k}$$

nicht konstant sein; u_1, u_2 bilden also ein Fundamentalsystem.

Die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung stehen hiernach, wenn ihre Differenz weder Null noch eine ganze Zahl ist, mit den Wurzeln ω_1, ω_2 der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung in der Beziehung

$$r_1 = \frac{\log \omega_1}{2\pi i}, \quad r_2 = \frac{\log \omega_2}{2\pi i},$$

und wir sehen zugleich den Grund, weshalb der Fall, wo die Differenz der Wurzeln r_1, r_2 eine ganze Zahl oder Null ist, Schwierigkeiten bereitet; in diesem Falle wäre nämlich

$$\omega_1 = \omega_2,$$

so daß es allgemein zu reden, ein Fundamentalsystem von der Form u_1, u_2 gar nicht gibt, indem das eine der kanonischen Integrale einen Logarithmus enthalten kann. Wir wenden uns jetzt zur Erledigung dieses bisher ausgeschlossenen Falles.

Wir schicken die Behandlung eines einfachen und interessanten Spezialfalles voraus [1]).

Wenn in (B) die Reihe $\mathfrak{P}_1(x - a)$ kein konstantes Glied enthält und $\mathfrak{P}_2(x - a)$ mit $(x - a)^2$ beginnt, d. h. wenn

$$\mathfrak{P}_1(0) = 0, \quad \mathfrak{P}_2(0) = 0, \quad \mathfrak{P}_2'(0) = 0$$

ist, so sind die Koeffizienten dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ holomorph. Also ist auch das allgemeine Integral holomorph; wir wollen nun zusehen, in welcher Form sich die Darstellung des allgemeinen Integrals in der Umgebung von $x = a$ ergibt.

Die determinierende Fundamentalgleichung (22) hat jetzt die Gestalt

$$\varrho(\varrho - 1) = 0,$$

die Differenz ihrer Wurzeln 0, 1 ist also eine ganze Zahl, d. h. wir haben unseren Ausnahmefall. Gleichwohl tritt hier keine Schwierigkeit auf, denn

$$f_1(\varrho) = \varrho \mathfrak{P}_1'(0) + \mathfrak{P}_2'(0)$$

reduziert sich für $\varrho = 0$ auf Null, so daß die Rekursionsformel (21) für $r = 0$ sowohl bei $\nu = 0$ als auch bei $\nu = 1$ keine Bestimmung der c_0, c_1 ergibt, dagegen für $\nu > 1$, die $c_2, c_3, \ldots$ durch die willkürlich gewählten c_0, c_1 eindeutig determiniert. Die Entwicklung (18) lautet also in diesem Falle

$$u = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots \text{ in inf.},$$

wo die c_0, c_1 willkürliche Konstanten bedeuten, sie stellt also das allgemeine Integral in der Umgebung der Stelle $x = a$ dar. Um ein partikuläres Integral zu bestimmen, hat man über c_0, c_1 zu verfügen, d. h. man hat für $x = a$ die Werte

$$c_0 = \lim_{x \to a} u, \quad c_1 = \lim_{x \to a} \frac{du}{dx}$$

vorzuschreiben. Für eine Stelle, in deren Umgebung die Koeffizienten der Differentialgleichung (3) (S. 160) holomorph

[1]) Vgl. L. Heffter, Einleitung u. s. w. S. 32.

sind, wird also ein partikuläres Integral bestimmt, indem man seinen eigenen Wert und den Wert seiner ersten Ableitung in diesem Punkte willkürlich festsetzt.

Dies befindet sich in Übereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen der Nr. 36.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo allgemein die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung gleich Null oder einer ganzen Zahl ist. Wenn r_1 die oben (S. 171) festgelegte Bedeutung behält, so möge also

$$r_1 - r_2 = g$$

eine positive ganze Zahl oder Null sein.

Machen wir mit dem zum Exponenten r_1 gehörigen Integrale

$$u_1 = (x-a)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

in der Differentialgleichung (B) die Substitution

$$u = u_1 \int v\,dx\,, \tag{23}$$

so genügt v der linearen Differentialgleichung erster Ordnung (vgl. Nr. 40, S. 163, Gl. (10))

$$\frac{dv}{dx} + v\left(2\frac{u_1'}{u_1} + \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\right) = 0\,,$$

die wir, da in der Umgebung von $x = a$

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{r_1}{x-a} + \delta_0 + \delta_1(x-a) + \cdots$$

ist, in der Form

$$\frac{dv}{dx} + v\left\{\frac{\mathfrak{P}_1(0) + 2r_1}{x-a} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x-a) + \cdots\right\} = 0\,,$$

oder endlich, da nach (22)

$$r_1 + r_2 = -(\mathfrak{P}_1(0) - 1)$$

ist, in der Form

$$\frac{dv}{dx} + v\left\{\frac{1 + r_1 - r_2}{x-a} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x-a) + \cdots\right\} = 0 \tag{24}$$

schreiben können. Aus den Ergebnissen der Nr. 34 folgt, daß das Integral dieser Differentialgleichung für $x = a$ nicht unbestimmt ist und zum Exponenten

$$-(1 + r_1 - r_2)$$

gehört; in der Tat finden wir auch unmittelbar, indem wir die Gleichung (24) integrieren,

$$v = (x-a)^{-(1+r_1-r_2)}(\gamma_0 + \gamma_1(x-a) + \cdots)\,, \qquad (\gamma_0 \neq 0)$$

und wenn wir jetzt dies in (23) einsetzen, so ergibt sich ein zweites Integral von (B) in der Form:

$$u_2 = u_1 \int (x-a)^{-(1+r_1-r_2)}(\gamma_0 + \gamma_1(x-a) + \cdots)\,dx\,.$$

Beachten wir nun, daß $r_1 - r_2$ gleich der nichtnegativen ganzen Zahl g sein sollte, so folgt bei Ausführung des mit u_1 multiplizierten Integrals:

$$u_2 = u_1 \left\{ \frac{\gamma_0}{-g}(x-a)^{-g} + \cdots + \frac{\gamma_{g-1}}{-1}(x-a)^{-1} \right.$$
$$\left. + \gamma_g \log(x-a) + \tau_0 + \tau_1(x-a) + \cdots \right\},$$

und wenn wir für u_1 seine Entwicklung einsetzen und beachten, daß

$$r_1 - g = r_2$$

ist, so finden wir für u_2 eine Darstellung von der Form

$$u_2 = (x-a)^{r_2} \{ \varphi_2(x-a) + \gamma_g \psi_2(x-a) \cdot \log(x-a) \},$$

wo $\varphi_2(x-a)$, $\psi_2(x-a)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ bedeuten, und die Konstante γ_g jedenfalls von Null verschieden ist, wenn $g = 0$ ist; dagegen kann γ_g für ein wesentlich positives g verschwinden. Der Ausdruck

$$\gamma_g (x-a)^{r_2} \psi_2(x-a),$$

der den Faktor von $\log(x-a)$ bildet, unterscheidet sich von u_1 nur durch einen konstanten Faktor. Wir sehen, daß auch in dem Falle eines ganzzahligen Wertes von $r_1 - r_2$ die Größen

$$e^{2\pi i r_1}, \quad e^{2\pi i r_2}$$

die Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung sind. Wenn $\gamma_g = 0$ ist, wird auch das zweite Integral u_2 logarithmenfrei sein. Ein Beispiel dafür bildet der oben behandelte Fall, wo die Koeffizienten von (B) in der Umgebung von $x = a$ holomorph sind; in diesem Falle ist $r_1 = 1$, $r_2 = 0$. Ein weiterer interessanter Sonderfall tritt ein, wenn r_1, r_2 überhaupt voneinander verschiedene ganzzahlige Werte haben und γ_g verschwindet. Ist dann wenigstens eines der r_1, r_2 negativ, so hat das allgemeine Integral in $x = a$ einen Pol, sind r_1, r_2 nichtnegativ, so ist das allgemeine Integral in der Umgebung von $x = a$ holomorph. Ist aber nicht $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, so hat wenigstens einer der Koeffizienten der Differentialgleichung (B) in $x = a$ wirklich einen Pol und wir haben es mit einem außerwesentlich singulären Punkte zu tun (vgl. Nr. 13, S. 49). Für einen solchen Punkt muß dann nach Nr. 38 (S. 147) die Wronskische Determinante (8) (Nr. 40) von u_1, u_2 verschwinden.

Wir sehen, daß in dem Falle der Differentialgleichung (B) die quantitative Berechnung des kanonischen Fundamentalsystems durch algebraische Operationen möglich ist. Wir heben noch besonders hervor, daß dasjenige Integral, das zu der Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung gehört, deren reeller Teil nicht kleiner ist, als der der anderen, stets in Reihenform darstellbar ist; das zu der anderen Wurzel gehörige Integral kann, wenn die Differenz der Wurzeln der determinierenden

Fundamentalgleichung eine ganze Zahl ist, einen Logarithmus enthalten, es enthält diesen Logarithmus unbedingt, wenn die beiden Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung zusammenfallen.

Da die Herstellung der Reihenentwicklungen für die Integrale in den Anwendungen von besonderer Wichtigkeit ist, geben wir in der folgenden Nummer einige den Anwendungen entnommene Beispiele.

43. Beispiele. Verhalten der Integrale im Unendlichen.

1. Die Cauchysche Differentialgleichung[1]) lautet

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{A}{x-a}\frac{du}{dx} + \frac{B}{(x-a)^2}u = 0, \tag{25}$$

wo A, B Konstanten sind; sie kann durch die Substitution (4) in ein Cauchysches Differentialsystem verwandelt werden; wir können die Integration aber auch leicht direkt vollziehen. Die determinierende Fundamentalgleichung für $x = a$ lautet

$$\varrho(\varrho - 1) + A\varrho + B = 0. \tag{26}$$

Hat diese zwei verschiedene Wurzeln r_1, r_2, so ergeben sich die Lösungen

$$u_1 = (x-a)^{r_1}, \quad u_2 = (x-a)^{r_2}, \tag{27}$$

während für $r_1 = r_2$

$$u_1 = (x-a)^{r_1}, \quad u_2 = (x-a)^{r_1}\log(x-a) \tag{28}$$

ist, in Übereinstimmung mit den für das Cauchysche Differentialsystem gefundenen Lösungen. Führt man in (25) durch die Substitution

$$t = \log(x-a); \quad x - a = e^t \tag{29}$$

t als unabhängige Veränderliche ein, so verwandelt sich (25) in die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (A-1)\frac{du}{dt} + Bu = 0; \tag{30}$$

die Gleichung (26) oder

$$\varrho^2 + (A-1)\varrho + B = 0 \tag{26a}$$

heißt hier die charakteristische Gleichung. Entsprechend (27) und (28) haben wir das Fundamentalsystem

$$u_1 = e^{r_1 t}, \quad u_2 = e^{r_2 t}. \qquad (r_1 \neq r_2) \tag{27a}$$

$$u_1 = e^{r_1 t}, \quad u_2 = t\,e^{r_1 t}. \qquad (r_1 = r_2) \tag{28a}$$

Studiert man z. B. die Bewegung des mathematischen Pendels für unendlich kleine Amplituden, so kann man in der Differentialgleichung (16) der Nr. 6 φ an die Stelle von $\sin\varphi$ setzen und erhält

[1]) A. L. Cauchy, Exercices d'Analyse etc. I (1840), S. 262.

(31) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung (26a) lautet jetzt

$$\varrho^2 + \frac{g}{l} = 0\,;$$

sie hat die beiden voneinander verschiedenen Wurzeln

$$r_1 = i\sqrt{\frac{g}{l}}\,,\quad r_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

also bilden

$$e^{ti\sqrt{\frac{g}{l}}}\,,\quad e^{-ti\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

ein Fundamentalsystem. Statt dessen kann man auch das in reeller Form erscheinende Fundamentalsystem

$$\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}\,,\quad \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

nehmen. Man hat also das allgemeine Integral

(32) $$\varphi = c_1 \sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + c_2 \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

und das partikuläre Integral, das für $t = 0$ verschwindet und dessen Ableitung für $t = 0$ gleich v_0 ist, lautet:

$$\varphi = v_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Die Form der Differentialgleichung (30) tritt überhaupt bei allen Bewegungsvorgängen auf, die in kleinen Schwingungen eines Punktes von der Masse 1 um eine Ruhelage bestehen. Erfolgt die Bewegung auf der u-Achse, und hat der Punkt zur Zeit t die Abszisse u, wirkt auf ihn ferner die Kraft $-k^2u$, wo k eine reelle Konstante ist, und noch ein der Geschwindigkeit $\frac{du}{dt}$ proportionaler dämpfender Widerstand $-\varepsilon\frac{du}{dt}$, wo $\varepsilon > 0$ ist, so lautet die Differentialgleichung der Bewegung [1])

(33) $$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon\frac{du}{dt} + k^2u = 0\,,$$

und ihre charakteristische Gleichung wird

(34) $$\varrho^2 + \varepsilon\varrho + k^2 = 0\,.$$

Setzt man

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\,,$$

so sind drei Fälle zu unterscheiden:

[1]) Vgl. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen. S. 107.

I. $\varepsilon < 2k$, dann hat die Gleichung (34) die konjugiert komplexen Wurzeln

$$r_1 = -\frac{\varepsilon}{2} + \mu i, \quad r_2 = -\frac{\varepsilon}{2} - \mu i$$

und die allgemeine Lösung lautet nach (27a)

$$u = c_1 e^{\left(-\frac{\varepsilon}{2}+\mu i\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{\varepsilon}{2}-\mu i\right)t},$$

wo c_1, c_2 willkürliche Konstanten bedeuten, oder wenn man

$$c_1 + c_2 = a \sin\lambda, \qquad (c_1 - c_2)\, i = a\cos\lambda$$

setzt,

$$u = a e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \sin(\mu t + \lambda).$$

Für $\varepsilon = 0$, d. h. für den Fall ungedämpfter Schwingungen, hat man, wie beim Pendel, eine einfach periodische Bewegung mit der Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{k}$. Ist dagegen $0 < \varepsilon < 2k$, so hat man

$$\frac{du}{dt} = a' e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \sin(\mu t + \lambda'),$$

wo

$$a\left(\mu\cos\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\sin\lambda\right) = a'\sin\lambda',$$

$$-a\left(\mu\sin\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\cos\lambda\right) = a'\cos\lambda'$$

gesetzt wurde. Die Werte von t, für die eine Extremlage des schwingenden Punktes eintritt, also $\frac{du}{dt} = 0$ ist, bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\frac{\pi}{\mu}$; der Zeitunterschied zwischen dem Eintreten zweier aufeinander folgender Maxima oder Minima ist konstant gleich $\frac{2\pi}{\mu}$, er kann auch wieder als Schwingungsdauer bezeichnet werden. Die Abstände der Extremlagen des schwingenden Punktes vom Punkte $u = 0$ bilden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $e^{-\frac{\varepsilon\pi}{\mu}}$; man nennt $\frac{\varepsilon\pi}{\mu}$ das logarithmische Dekrement.

II. $\varepsilon = 2k$; dann ist $r_1 = r_2$ und (siehe (28a))

$$u = e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}(c_1 + c_2 t)$$

die allgemeine Lösung.

III. $\varepsilon > 2k$, dann sind r_1, r_2 reell negativ und die allgemeine Lösung lautet

$$u = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

In den Fällen II und III ist $\lim\limits_{t \to +\infty} u = 0$; wir haben es hier mit einer aperiodischen Bewegung zu tun.

2. Die Aufgabe, den Spannungs- und Deformationszustand einer dünnen, aus einem homogenen und isotropen Stoff bestehenden Ringflächenschale konstanter Wandstärke unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes zu bestimmen, führt [1]) auf die Differentialgleichung

$$(35) \qquad (\lambda + x)^2 (1 - x^2) u'' + (\lambda + x)(1 - \lambda x - 2x^2) u' \\ - [1 - ik\lambda x + (ik - 1) x^2]\, u = 0 ,$$

wo λ, k reelle Konstanten bedeuten. Es kommt dabei wesentlich auf die Entwicklung der Lösungen in der Umgebung der singulären Stellen $x = +1$, $x = -1$ an. Man sieht, daß nach Division mit dem Koeffizienten von u'', die Differentialgleichung in der Umgebung dieser beiden Stellen und ebenso auch in der Umgebung der singulären Stelle $x = -\lambda$ die Form (B) hat. Die Lösungen verhalten sich also an diesen Stellen bestimmt. Für $x = 1$ z. B. kann man

$$(x-1)^2\, \mathfrak{P}_0(x-1) u'' + (x-1)\,\mathfrak{P}_1(x-1)\, u' + \mathfrak{P}_2(x-1)\, u = D(u)$$

als die Normalform der linken Seite von (35) ansehen, wo

$$\mathfrak{P}_0(x-1) = (1 + x)(\lambda + x)^2 ,$$
$$\mathfrak{P}_1(x-1) = -(\lambda + x)(1 - \lambda x - 2x^2) ,$$
$$\mathfrak{P}_2(x-1) = (x-1)[1 - ik\lambda x + (ik - 1)\, x^2]$$

gesetzt wurde; es bietet das den Vorteil, daß diese Potenzreihen abbrechen, wodurch sich die weitere Rechnung erheblich vereinfacht. Die charakteristische Funktion (Nr. 42, Gl. (19)) lautet dann

$$f(x, \varrho) = \mathfrak{P}_0(x-1)\varrho(\varrho - 1) + \mathfrak{P}_1(x-1)\varrho + \mathfrak{P}_2(x-1) \\ = f_0(\varrho) + f_1(\varrho)(x-1) + f_2(\varrho)(x-1)^2 + f_3(\varrho)(x-1)^3 .$$

und die determinierende Gleichung ist

$$f_0(\varrho) = 2(1 + \lambda)^2 \varrho(\varrho - 1) + (\lambda + 1)^2 \varrho = 2(1 + \lambda)^2[\varrho(\varrho - 1) + \tfrac{1}{2}\varrho] = 0$$

mit den Wurzeln $r_1 = 0$, $r_2 = 1/2$. Die expliziten Ausdrücke für $f_1(\varrho)$, $f_2(\varrho)$, $f_3(\varrho)$ sind auch leicht herzustellen. Wir haben also ein in der Umgebung von $x = 1$ holomorphes Integral

$$u_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-1)^\nu ,$$

in dem c_0 willkürlich bleibt, während die übrigen Koeffizienten c_ν sich durch die Rekursionsformel

$$c_\nu f_0(\varrho + \nu) + c_{\nu-1} f_1(\varrho + \nu - 1) + c_{\nu-2} f_2(\varrho + \nu - 2) + c_{\nu-3} f_3(\varrho + \nu - 3) = 0$$

bestimmen. Die Berechnung des zweiten Integrals

[1]) H. Wissler, Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen. Dissertation Techn. Hochschule Zürich, 1916.

$$u_2 = (x-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c'_\nu (x-1)^\nu$$

gestaltet sich am einfachsten, wenn man die Differentialgleichung (35) durch die Substitution

$$u = \sqrt{1-x^2}\, v$$

in eine Differentialgleichung für v transformiert, die dann für $x = 1$ als Wurzeln der determinierenden Gleichung $r'_1 = 0$, $r'_2 = -\frac{1}{2}$ besitzt. Das der Wurzel $r'_1 = 0$ entsprechende Integral v_1 ist in der Umgebung von $x = 1$ wieder holomorph und verwandelt sich durch Multiplikation mit $\sqrt{1-x^2}$ in u_2, was auch wieder mit einem willkürlichen konstanten Faktor (dem Anfangskoeffizienten der Potenzreihe v_1) behaftet erscheint. Das allgemeine Integral von (35) hat also die Form

$$u = u_1 + \sqrt{1-x^2}\, v_1 \, .$$

Für reelle Werte von x hat man dann als Konvergenzbereich,

wenn $\lambda \geqq 1$ ist, $\quad -1 < x < 3$,

wenn $\lambda < 1$ ist, $\quad -\lambda < x < \lambda + 2$.

Behandelt man noch den Punkt $x = -1$ in ähnlicher Weise, so hat man für alle in der Praxis vorkommenden Fälle brauchbare Entwicklungen des allgemeinen Integrals.

3. Die Aufgabe, alle analytischen Verbiegungen der Kugel vom Halbmesser 1 zu finden, führt [1]) auf die Differentialgleichung

$$(36) \quad x^2(1-x^4)u'' + x(1+8x^2-x^4)u' - k^2(1-x^4)u = 0 \, ,$$

in der k eine positive ganze Zahl bedeutet. Darin ist $x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, wo φ die geographische Breite auf der Kugel bedeutet. Im Endlichen hat die Differentialgleichung die singulären Punkte 0, 1, -1, i, $-i$; an jedem dieser Punkte zeigen die Integrale bestimmtes Verhalten. Für $x = 0$ lautet die determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho - k^2 = 0 \, .$$

Zu ihren Wurzeln $+k$, $-k$ gehören Integrale von der Form

$$u_1 = x^k(c_0 + c_1 x + \cdots) \, , \quad u_2 = x^{-k}(c'_0 + c'_1 x + \cdots) \, .$$

Für $x = 1$ und $x = -1$ hat die determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) - 2\varrho = 0$$

die Wurzeln 0 und 3. Zu der Wurzel 3, als der größeren, gehört sicher ein in Reihenform darstellbares Integral, aber auch der Ansatz

$$u = c_0 + c_1(x \pm 1) + c_2(x \pm 1)^2 + \cdots$$

führt zu einer Bestimmung der Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ durch Rekursionsformeln; es gehört also auch zu der Wurzel 0 ein in Reihenform

[1]) H. Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen usw., Sitzungsberichte der Bayr. Akademie d. Wiss. 1920, S. 21, insbesondere S. 37.

darstellbares Integral, d. h. das allgemeine Integral von (36) ist in der Umgebung von $x = 1$, $x = -1$ holomorph. Wir haben es hier mit außerwesentlich singulären Punkten zu tun.

Für $x = \pm i$ hat die determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + 2\varrho = 0$$

die Wurzeln 0 und -1; zu 0 als der größeren gehört ein holomorphes Integral, aber der Reihenansatz zeigt, daß auch bei dem zu dem Exponenten -1 gehörigen Integral kein Logarithmus auftritt. Die allgemeine Lösung von (36) hat also in $x = i$ und $x = -i$ je einen Pol erster Ordnung. Damit ist das Verhalten der Integrale im Endlichen vollkommen geklärt, die allgemeine Lösung ist in der ganzen Ebene meromorph. Wenn k keine ganze Zahl wäre, so wäre $x = 0$ ein Verzweigungspunkt, aber die Produkte $x^{-k} u_1$, $x^k u_2$ wären in der ganzen Ebene meromorph. Die einzigen Pole dieser Produkte sind $x = \pm i$, diese können durch Multiplikation mit $(x^2 + 1)$ beseitigt werden. Also sind $x^{-k}(x^2 + 1)u_1, x^k(x^2 + 1)u_2$ in der ganzen Ebene holomorph, und wir wollen nun noch prüfen, wie sich diese Funktionen für $x = \infty$ verhalten. Das bietet keinerlei Schwierigkeit, wenn wir in der Differentialgleichung (36)

$$\xi = \frac{1}{x}$$

als neue unabhängige Veränderliche einführen und dann die Untersuchung der Lösungen für $\xi = 0$ vornehmen.

Hat man allgemein die Differentialgleichung (3)

$$u'' + pu' + qu = 0\,,$$

wo p und q in der Umgebung von $x = \infty$ eindeutig sind, und führt $\xi = \frac{1}{x}$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so ist

$$\frac{du}{dx} = -\frac{du}{d\xi}\xi^2\,; \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}\xi^4 + 2\frac{du}{d\xi}\xi^3\,,$$

die Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln ξ lautet demnach

$$(37) \qquad \xi^4 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[2\xi^3 - \xi^2 p\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]\frac{du}{d\xi} + q\left(\frac{1}{\xi}\right)u = 0\,,$$

und es sind nun die Koeffizienten dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $\xi = 0$ eindeutig. Damit die Integrale in $\xi = 0$ nicht unbestimmt werden, ist nach den Ergebnissen der Nummern 40, 41 notwendig und hinreichend, daß in der Umgebung von $\xi = 0$

$$\frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\,p\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\mathfrak{P}_1(\xi)}{\xi}\,, \quad \frac{1}{\xi^4}\,q\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\mathfrak{P}_2(\xi)}{\xi^2}$$

sei, wo $\mathfrak{P}_1(\xi)$. $\mathfrak{P}_2(\xi)$ gewöhnliche Potenzreihen von ξ bedeuten. Setzen wir

$$2 - \bar{\mathfrak{P}}_1(\xi) = \mathfrak{P}_1(\xi)\,,$$

so lautet also die Form der Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$

$$p(x) = \frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad q(x) = \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right), \tag{38}$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen von x^{-1} sind. Diese Form ist also notwendig und hinreichend dafür, daß die Integrale von (3) im Punkte $x = \infty$ nicht unbestimmt werden.

Die determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (37) für $\xi = 0$ lautet

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho[2 - \mathfrak{P}_1(0)] + \mathfrak{P}_2(0) = 0\,,$$

oder

$$\varrho(\varrho + 1) - \mathfrak{P}_1(0)\varrho + \mathfrak{P}_2(0) = 0\,,$$

sie gilt auch als determinierende Fundamentalgleichung von (3) für $x = \infty$; ihre Wurzeln geben die Exponenten (von x^{-1}), zu denen die Elemente des kanonischen Fundamentalsystems für $x = \infty$ gehören.

Für unsere Gleichung (36) [1]) ergibt sich, daß die Lösungen in $\xi = 0$ nicht unbestimmt werden, und daß die determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho + 1) - \varrho - k^2 = 0$$

die Wurzeln $\pm k$ besitzt. Wir schließen daraus, daß die Produkte

$$x^{-k}(x^2 + 1)u_1, \quad x^k(x^2 + 1)u_2$$

in $x = \infty$ je einen Pol zweiter Ordnung besitzen, also ganze rationale Funktionen zweiten Grades sind. Man findet aus den Rekursionsformeln die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen und damit für u_1, u_2 die expliziten Darstellungen

$$u_1 = x^k\frac{1 + k + (1 - k)x^2}{1 + x^2}, \quad u_2 = x^{-k}\frac{1 - k + (1 + k)x^2}{1 + x^2}.$$

44. Direkte Behandlung der Differentialsysteme.

Aus theoretischen Gründen wollen wir die für Differentialgleichungen zweiter Ordnung dargelegten Methoden auf Systeme zu übertragen suchen. Wenn für das System (A)

$$\frac{dy_k}{dx} = y_1 a_{1k} + y_2 a_{2k} \qquad (k = 1, 2)$$

die Elemente einer Integralmatrix Y und folglich die allgemeinen Lösungen in dem singulären Punkte a nicht unbestimmt sind, und es bedeutet $\mathfrak{Y}$ die zu Y für einen Umlauf um a kogrediente Cauchysche Matrix, so treten in den Laurentschen Reihen, die die Elemente der Matrix

[1]) die übrigens durch die Transformation $\xi = \frac{1}{x}$ in sich selbst übergeht.

$$\Phi = \mathfrak{Y}^{-1} Y$$

bilden, negative Potenzen nur in endlicher Anzahl auf. Die Matrizen Y und $\mathfrak{Y}$ sind also hier in bezug auf einen Umlauf um a von derselben Art. Für die kanonische Integralmatrix

$$H = (x - a)^{\Sigma} \Phi\,,$$

wo also Σ eine der drei Formen (63) der Nr. 39 (S. 156) hat, können wir dann die in den r_1, r_2 noch willkürlichen ganzen Zahlen so einrichten, daß

1. die Elemente von Φ in der Umgebung von $x = a$ holomorph sind,

2. diese Elemente nicht alle für $x = a$ verschwinden.

Es seien r_1, r_2 schon von vornherein so gewählt; dann sagen wir, daß die kanonische Matrix H zu der Exponentenmatrix Σ gehöre, und nennen Σ die zu $x = a$ gehörige determinierende Matrix, die Gleichung

$$(39) \qquad |\Sigma - Ir| = 0$$

die zu $x = a$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung. Nach dem Jacobischen Satz (Nr. 38) ist

$$(40) \qquad |H| = \text{const.}\; e^{\int (a_{11} + a_{22})\,dx}\,.$$

Da die a_{ik} in $x = a$ nur einen Pol haben können, ist in der Umgebung von $x = a$

$$a_{11} + a_{22} = \frac{\alpha_k}{(x - a)^k} + \cdots + \frac{\alpha_1}{(x - a)} + \beta_0 + \beta_1(x - a) + \cdots,$$

also

$$|H| = \text{const.}\; (x - a)^{\alpha_1} e^{\frac{\alpha_k}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_2}{-1}\frac{1}{x-a}} \cdot \varphi(x)\,,$$

wo $\varphi(x)$ in der Umgebung von $x = a$ holomorph und $\varphi(a) \neq 0$ ist. Da $x = a$ für $|H|$ keine Unbestimmtheitsstelle sein kann, so muß $k \leqq 1$ sein, d. h. $a_{11} + a_{22}$ hat in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung. Wir finden also

$$(41) \qquad |H| = \text{const.}\; (x - a)^{\alpha_1} \varphi(x)\,, \quad \varphi(a) \neq 0\,,$$

wo

$$\alpha_1 = \operatorname{Res}_a (a_{11} + a_{22})$$

ist. Für die Cauchysche Matrix $(x - a)^{\Sigma}$ ergibt der Jacobische Satz

$$|(x - a)^{\Sigma}| = \text{const.}\; (x - a)^{r_1 + r_2}\,,$$

endlich haben wir

$$|\Phi| = (x - a)^r \psi(x)\,,$$

wo $r \geqq 0$ und $\psi(x)$ in der Umgebung von $x = a$ holomorph und $\psi(a) \neq 0$ ist. Da aber

$$|H| = |(x - a)^{\Sigma}|\,|\Phi|$$

ist, so finden wir

$$r = \operatorname{Res}_a (a_{11} + a_{22}) - (r_1 + r_2) \geqq 0\,.$$

Wenn $r > 0$ ist, so verschwindet die Determinante der Anfangskoeffizienten [1]) der φ_{ik}. D. h. wenn in der Umgebung von $x = a$

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ik}^{(0)} + \varphi_{ik}^{(1)}(x - a) + \cdots$$

gesetzt wird, ist

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}^{(0)} & \varphi_{12}^{(0)} \\ \varphi_{21}^{(0)} & \varphi_{22}^{(0)} \end{vmatrix} = 0\,,$$

aber nach der Voraussetzung 2. sind nicht alle vier Elemente $\varphi_{ik}^{(0)}$ gleich Null. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß etwa $\varphi_{11}^{(0)} \neq 0$ und insbesondere $\varphi_{11}^{(0)} = 1$ ist. Wir ziehen dann aus $\varphi_{12}, \varphi_{22}$ die höchste Potenz von $x - a$, die in beiden enthalten ist, heraus, es sei diese $(x - a)^g$, dann kommt das darauf hinaus, daß wir Φ in die Form setzen:

$$\Phi = \bar{\Phi} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x - a)^g \end{pmatrix},$$

und in der Matrix $\bar{\Phi}$ sind die Elemente der ersten Spalte dieselben wie in Φ, während in der zweiten Spalte sicher nicht die Anfangsglieder beider Elemente verschwinden. Ist $\bar{\varphi}_{12}(a) = 0$, so hat die Determinante der Anfangskoeffizienten für $\bar{\Phi}$ den von Null verschiedenen Wert $1 \cdot \bar{\varphi}_{22}(a)$. Ist $\bar{\varphi}_{12}(a) \neq 0$, so bilden wir

$$\bar{\Phi}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\varphi}_{12}(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{\bar{\Phi}}\,;$$

dadurch wird die erste Spalte nicht geändert und in der zweiten Spalte ist $\bar{\bar{\varphi}}_{12}(a) = 0$. Ist $\bar{\bar{\varphi}}_{22}(a) \neq 0$, so hat die Determinante der Anfangskoeffizienten in $\bar{\bar{\Phi}}$ einen von Null verschiedenen Wert, ist $\bar{\bar{\varphi}}_{22}(a) = 0$, so kann wie bei Φ die höchste in $\bar{\bar{\varphi}}_{12}$ und $\bar{\bar{\varphi}}_{22}$ auftretende Potenz von $x - a$ herausgezogen werden. Setzen wir dieses Verfahren fort, so kann der Fall, daß die Elemente der zweiten Spalte gleichzeitig verschwinden, nur eine endliche Anzahl von Malen auftreten, da ja in $|\Phi|$ keine höhere Potenz von $x - a$ als die r-te steckt. Wir kommen also schließlich zu einer Darstellung von der Form

$$\Phi = \Psi \cdot G\,,$$

wo die Determinante der Anfangskoeffizienten von Ψ nicht verschwindet, und G aus Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{const.} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (x - a)^g \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt ist. Die Determinante $|G|$ ist eine Potenz von $x - a$. Gehen wir dann von (A) durch die Transformation

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 g_{11} + z_2 g_{21}\,, \\ y_2 &= z_1 g_{12} + z_2 g_{22} \end{aligned} \tag{42}$$

[1]) d. h. der von $(x - a)$ freien Glieder.

zu dem Differentialsystem von derselben Art

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{dz_k}{dx} = z_1 b_{1k} + z_2 b_{2k}$$

über, so hat dieses die kanonische Integralmatrix

$$Z = HG^{-1} = (x-a)^{\Sigma}\Psi,$$

und in Ψ ist die Determinante der Anfangskoeffizienten von Null verschieden.

Wir können also, wenn $r > 0$ ist, durch eine Transformation von der Form (42) stets zu einem Differentialsystem (A') von derselben Art übergehen, für das die dem r entsprechende Zahl gleich Null ist.

Bilden wir die derivierte Matrix von Z, so ist nach der Derivationsformel (D) der Nr. 39

$$(43) \qquad D_x Z = B = \Psi^{-1}\frac{\Sigma}{x-a}\Psi + D_x\Psi;$$

die Elemente von Ψ sind holomorph, und da $|\Psi|$ im Punkte a von Null verschieden ist, sind auch die Elemente von Ψ^{-1}, und folglich die von $D_x\Psi$ holomorph. Wir sehen also, daß die Koeffizienten b_{ik} des Differentialsystems (A') in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung haben, also ist (A') ein für $x = a$ kanonisches System.

Es sei in der Umgebung von $x = a$

$$b_{ik} = \frac{s_{ik}}{x-a} + b_{ik}^{(0)} + b_{ik}^{(1)}(x-a) + \cdots,$$

$$\psi_{ik} = \psi_{ik}^{(0)} + \psi_{ik}^{(1)}(x-a) + \cdots,$$

dann liefert die Gleichung (43) oder

$$\Psi B(x-a) = \Sigma\Psi + (x-a)\frac{d\Psi}{dx},$$

indem wir beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x-a$ vergleichen, durch die absoluten Glieder

$$(44) \qquad \Psi^{(0)}S = \Sigma\Psi^{(0)}$$

und durch die Koeffizienten von $(x-a)^{\nu+1}$

$$(45) \qquad \begin{aligned}\Psi^{(\nu+1)}S + \Psi^{(0)}B^{(\nu)} + \Psi^{(1)}B^{(\nu-1)} + \cdots + \Psi^{(\nu)}B^{(0)} \\ = \Sigma\Psi^{(\nu+1)} + (\nu+1)\Psi^{(\nu+1)}.\end{aligned} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aus (44) ergibt sich

$$S = \Psi^{(0)-1}\cdot\Sigma\cdot\Psi^{(0)},$$

d. h. die determinierende Matrix Σ ist mit der Residuenmatrix S der Koeffizienten b_{ik} ähnlich und zwar ist Σ einfach die kanonische Form der Matrix S. Insbesondere ist $|S - Ir| = 0$ die determinierende Fundamentalgleichung. Hat man Σ auf diese Weise bestimmt, so liefert (45) eine Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizientenmatrix $\Psi^{(\nu+1)}$ aus $\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \ldots, \Psi^{(\nu)}$. Diese Berechnung stößt auf keinerlei Schwierigkeit, wenn die Determinante der Koeffizienten $\psi_{ik}^{(\nu+1)}$ von Null verschieden ist. Es erübrigt sich, hier eine vollständige algebraische Diskussion dieser Rekursionsformel zu geben, da wir ja von den Reihen ψ_{ik} ausgegangen sind; man findet eine solche — in noch allgemeineren Fällen — bei Horn[1]). Wir begnügen uns mit der Feststellung, daß in dem hier betrachteten Falle die Berechnung der determinierenden Matrix Σ und der Koeffizienten der Reihenentwicklungen ψ_{ik} aus den Entwicklungskoeffizienten der b_{ik} auf algebraische Weise möglich ist.

Nicht für jedes im Punkte $x = a$ kanonische System ist die Bedingung erfüllt, daß die Determinante der Anfangsglieder in der Matrix ψ von Null verschieden ist. Aber man kann dies durch eine Transformation von der Form (42) stets erreichen. Wir sagen, wenn dies der Fall ist, das System (A′) habe in $x = a$ die Normalform. In diesem Falle lautet also die Entwicklung einer beliebigen Integralmatrix in der Umgebung von $x = a$

$$\Gamma(x-a)^{S}(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}(x-a) + \cdots)\,, \tag{46}$$

wo Γ eine beliebige konstante Matrix, S die Residuenmatrix der b_{ik} und $\psi^{(0)}$ eine Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Wir sehen hier das vollständige Analogon zu der Entwicklung (IVa) der Nr. 34 (S. 128).

Wir bemerken, daß die Erörterungen dieser Nummer vorwiegend theoretische Bedeutung haben, indem sie von der Entwicklung der Lösungen ausgehend die Transformation auf die Normalform zeigen. Wenn ein vorgelegtes Differentialsystem daraufhin untersucht werden soll, ob seine Lösungen sich in einem singulären Punkte $x = a$ bestimmt verhalten, so ist es am bequemsten, die Transformation auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auszuführen. Ergibt sich für diese die Form (B), so stellt man nach den Methoden der Nr. 42 das kanonische Fundamentalsystem her; dieses bildet dann mit seinen Ableitungen eine Integralmatrix, auf die man die Methode dieser Nummer anwenden und auf diese Weise zu einem System von der Normalform gelangen kann.

45. Riccatische Differentialgleichung und beliebige Differentialgleichung erster Ordnung[2]).

Die in den Nrn. 40, 42 für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung abgeleiteten Resultate sollen nunmehr zunächst auf die Riccatische Differentialgleichung übertragen werden.

[1]) J. Horn, Mathematische Annalen 39 (1891), S. 391 ff.

[2]) Vgl. für diese Nummer: Fuchs, Berliner Sitzungsberichte 1885, S. 279 ff., Werke II, S. 391; Briot et Bouquet, Journal de l'École Polyt. Cah. 36. (1856), S. 161 ff.; Poincaré, ebenda. Cah. 45. (1878). S. 13 ff.; Koenigsberger, Lehrbuch etc., S. 373 ff.

Machen wir in der Differentialgleichung (B) (S. 165) die Substitution

$$(47) \qquad y = (x-a)\frac{d \log u}{dx}, \quad u = e^{\int \frac{y}{x-a} dx},$$

so ergibt sich

$$\frac{du}{dx} = \frac{y}{x-a} e^{\int \frac{y}{x-a} dx},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \left\{ \frac{y^2}{(x-a)^2} + \frac{1}{x-a}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{(x-a)^2} \right\} e^{\int \frac{y}{x-a} dx},$$

und somit für y die Riccatische Differentialgleichung

$$(48) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + [\mathfrak{P}_1(x-a) - 1]\, y + \mathfrak{P}_2(x-a)}{x-a}.$$

Bedeuten u_1, u_2 irgendein Fundamentalsystem von (B), γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten, so ist

$$y = (x-a)\frac{d \log (\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2)}{dx} = (x-a)\frac{\gamma_1 u_1' + \gamma_2 u_2'}{\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2}$$

das allgemeine Integral von (48). Der Punkt $x=a$ ist also auch für die Integrale der Riccatischen Gleichung (48) kein Punkt der Unbestimmtheit.

Die Form (48) ordnet sich dem Falle unter, wo in einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die Funktion $f(x, y)$ unabhängig von y unendlich wird, während ihr reziproker Wert im allgemeinen holomorph bleibt, ein Fall, der in der Nr. 10 ausgeschlossen worden war, weil er zu einer festen Singularität führt. Wir können nunmehr die Beschaffenheit der Integrale von (48) in der Umgebung von $x = a$ vollkommen angeben.

Es seien u_1, u_2 die beiden Elemente des zu $x = a$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems, wie sie in der Nr. 42 aufgestellt worden sind. Dann ist, falls beide Integrale in Reihenform darstellbar sind, das allgemeine Integral y von (48) in der Umgebung von $x = a$ in der Form

$$y = (x-a)\frac{(x-a)^{r_2-1}\psi_2 + c\cdot(x-a)^{r_1-1}\psi_1}{(x-a)^{r_2}\varphi_2 + c\cdot(x-a)^{r_1}\varphi_1} = \frac{\psi_2 + c(x-a)^{r_1-r_2}\psi_1}{\varphi_2 + c(x-a)^{r_1-r_2}\varphi_1}$$

darstellbar, wo $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ sind, die für $x = a$ nicht verschwinden, und $c = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ die willkürliche Konstante bedeutet. Das allgemeine Integral ist also in der Umgebung von $x = a$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ und

$$(x-a)^{r_1-r_2}$$

entwickelbar. Besonders bemerkenswert sind die beiden Integrale

$$y_1 = (x-a)\frac{d \log u_1}{dx}, \quad y_2 = (x-a)\frac{d \log u_2}{dx},$$

die in der Umgebung von $x = a$ die Form:

$$y_1 = r_1 + \delta_1(x-a) + \delta_2(x-a)^2 + \cdots,$$
$$y_2 = r_2 + \varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(x-a)^2 + \cdots$$

haben, also daselbst holomorph sind und in $x = a$ beziehungsweise die Werte r_1, r_2 annehmen.

Für die Wertepaare $x = a$, $y = r_1$ und $x = a$, $y = r_2$ fällt in der Entwicklung des Zählers der rechten Seite der Gleichung (48) nach Potenzen von

$$x - a, \quad y - r_1 \quad \text{beziehungsweise} \quad x - a, \quad y - r_2$$

das konstante Glied weg, da ja r_1, r_2 die Wurzeln der Gleichung (22)

$$\varrho(\varrho - 1) + \mathfrak{P}_1(0)\,\varrho + \mathfrak{P}_2(0) = 0$$

sind; der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint also für diese Wertepaare in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, ein Fall, der bei den allgemeinen Untersuchungen des zweiten Kapitels ebenfalls ausgeschlossen war. Wir sehen hier zugleich wieder ein Beispiel für die in der Nr. 13 (S. 49) erwähnte Möglichkeit, daß ein gewisses Integral, das für $x = \bar{x}$ den Wert $y = \bar{y}$ annimmt, in der Umgebung von $x = \bar{x}$ holomorph bleiben kann, obwohl für dieses Wertesystem der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ in unbestimmter Form erscheint.

Wenn die Entwicklung des Integrals u_2 in der Umgebung von $x = a$ einen Logarithmus enthält, so ist $r_1 - r_2 = g$ Null oder eine positive ganze Zahl; in diesem Falle lautet die Darstellung des allgemeinen Integrals in der Umgebung von $x = a$:

$$y = (x-a)\frac{c(x-a)^{r_1-1}\psi_1 + (x-a)^{r_1-g-1}[\chi_1 + \chi_2\cdot(x-a)\log(x-a)]}{c(x-a)^{r_1}\varphi_1 + (x-a)^{r_1-g}[\varphi_2 + \psi_2\log(x-a)]},$$

$$= \frac{\chi_1 + \chi_2\cdot(x-a)\log(x-a) + c\,(x-a)^g\psi_1}{\varphi_2 + \psi_2\log(x-a) + c\,(x-a)^g\varphi_1},$$

wo $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ gewöhnliche Potenzreihen von $(x-a)$ bedeuten, von denen φ_1, ψ_1 für $x = a$ von Null verschiedene Werte haben, während χ_1, χ_2 und φ_2, ψ_2 für $x = a$ nicht gleichzeitig verschwinden. In diesem Falle ist also y nach positiven ganzen Potenzen von $x - a$ und $\log(x-a)$ entwickelbar. Dem Integrale u_1 entsprechend, gibt es ein in der Umgebung von $x = a$ holomorphes Integral

$$y = (x-a)\frac{d\log u_1}{dx} = r_1 + \delta_1(x-a) + \delta_2(x-a)^2 + \cdots,$$

das für $x = a$ den Wert r_1 annimmt.

Wir wollen den Fall, wo $r_1 - r_2$ weder eine ganze Zahl noch Null ist, als den **allgemeinen** etwas näher ins Auge fassen.

Setzt man

$$(49) \qquad x - a = \xi, \quad y - r_\lambda = \eta,$$

wo λ eine der Zahlen 1, 2 bedeutet, so ist in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$

$$y^2 + [\mathfrak{P}_1(x-a) - 1]\, y + \mathfrak{P}_2(x-a) = -\alpha\xi - \beta\eta - [\xi, \eta]_2,$$

woselbst

$$-\alpha = \mathfrak{P}_1'(0)\, r_\lambda + \mathfrak{P}_2'(0),$$
$$-\beta = 2r_\lambda + \mathfrak{P}_1(0) - 1 = 2r_\lambda - (r_1 + r_2)$$

ist und $[\xi, \eta]_2$ die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Dimension in ξ, η bedeutet. Die Differentialgleichung

$$(50) \qquad \xi \frac{d\eta}{d\xi} = \alpha\xi + \beta\eta + [\xi, \eta]_2$$

besitzt demnach ein und nur ein in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral

$$\eta_1 = \delta_1\xi + \delta_2\xi^2 + \cdots,$$

das für $\xi = 0$ verschwindet. Die Voraussetzung, daß $r_1 - r_2$ weder gleich Null noch gleich einer ganzen Zahl sei, bedingt für β, daß diese Größe keine ganze Zahl sein kann. Wenn β eine **negative** ganze Zahl oder Null ist, so gibt es, wie wir gesehen haben, noch immer ein in der Umgebung von $x = a$ holomorphes Integral der Differentialgleichung (48), das für $x = a$ den Wert r_λ annimmt, denn dann ist r_λ eben diejenige Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung (22), deren reeller Teil nicht kleiner ist als der der anderen Wurzel. Ist β keine positive ganze Zahl und der reelle Teil von β positiv, so ist das allgemeine Integral von (50) nach positiven ganzen Potenzen von ξ und ξ^β entwickelbar. Wir haben also den Satz:

Die Differentialgleichung (50), die aus (48) durch die Substitution (49) hervorgegangen ist, besitzt, wenn β keine positive ganze Zahl ist, ein und nur ein mit ξ zugleich verschwindendes und in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral.

Der besondere Charakter der Differentialgleichung (50) als Riccatischer Gleichung gibt sich darin kund, daß das Aggregat $[\xi, \eta]_2$ nur die erste und zweite Potenz von η enthalten kann. Der eben ausgesprochene Satz gilt aber unabhängig von diesem Umstande, d. h.:

Wenn in der Differentialgleichung (50) die rechte Seite eine beliebige in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe ohne konstantes Glied bedeutet, worin der Koeffizient β der ersten Potenz von η keine posi-

tive ganze Zahl ist, so besitzt diese Differentialgleichung ein und nur ein mit ξ gleichzeitig verschwindendes und in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral.

Der Beweis dieses von Briot und Bouquet herrührenden Satzes ist äußerst einfach.

Setzen wir nämlich

$$\eta_1 = \delta_1 \xi + \delta_2 \xi^2 + \cdots$$

in die Differentialgleichung (50) ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k \xi^k = \alpha\xi + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi^k + [\xi, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi^k]_2 .$$

Die Vergleichung der Koeffizienten der gleichhohen Potenzen von ξ auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert für $k = 1$:

$$\delta_1 = \alpha + \beta\delta_1 , \quad \delta_1 = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

und allgemein

$$k\delta_k = \beta\delta_k + \varphi_k(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}) ,$$

wo φ_k eine ganze rationale Funktion der $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}$ bedeutet, deren Koeffizienten sich aus α, β und den Koeffizienten von $[\xi, \eta]_2$ ganz und rational zusammensetzen.

Die Rekursionsformel

$$\delta_k = \frac{\varphi_k(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1})}{k - \beta} \qquad (k=1, 2, \ldots ; \delta_0 = 0)$$

liefert stets endliche bestimmte Werte für die δ_k, da zufolge unserer Voraussetzung β keine positive ganze Zahl, also

$$k - \beta \neq 0$$

ist. Um die Konvergenz der so formal hergestellten und die Differentialgleichung (50) befriedigenden Reihe zu erweisen, vergleichen wir die δ_k mit den durch die Rekursionsformel

$$n\gamma_k = \beta\gamma_k + \varphi_k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}) \qquad (k=1, 2, \ldots ; \gamma_0 = 0)$$

definierten Größen γ_k.

Diese γ_k sind, wie man sofort übersieht, nichts anderes als die Koeffizienten der nach positiven ganzen Potenzen von ξ fortschreitenden Entwicklung derjenigen Lösung der Gleichung

$$nz = \alpha\xi + \beta z + [\xi, z]_2 ,$$

die für $\xi = 0$ verschwindet. Nach dem Satze von der impliziten Funktion besitzt nämlich eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{P}(\xi, z) = 0 ,$$

wo $\mathfrak{P}(\xi, z)$ eine in der Umgebung von $\xi = 0, z = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die kein konstantes Glied enthält, **stets eine** und nur eine Lösung z, die in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorph ist und für $\xi = 0$ verschwindet, vorausgesetzt, daß der Koeffizient der ersten Potenz von z in $\mathfrak{P}(\xi, z)$, d. h.

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ z \to 0}} \frac{\partial \mathfrak{P}(\xi, z)}{\partial z}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat. Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi^k$$

in der Umgebung von $\xi = 0$ jedenfalls, wenn

$$n - \beta \neq 0$$

ist.

Wenn nun der reelle Teil von β negativ ist, so nehmen wir $n = 1$; ist dagegen der reelle Teil von β positiv, so wählen wir n als diejenige bestimmte positive ganze Zahl, für die der reelle Teil von $n - \beta$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Es sei β in seinen reellen und imaginären Bestandteil zerlegt:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 i\,;$$

dann ist für ein positives ganzzahliges λ

$$|n \pm \lambda - \beta|^2 = (n - \beta_1)^2 \pm 2\lambda(n - \beta_1) + \lambda^2 + \beta_2^2,$$

also, da

$$\lambda \geqq 1, \quad |n - \beta_1| < \tfrac{1}{2}$$

ist,

$$\lambda^2 \pm 2\lambda(n - \beta_1) > 0\,,$$

und folglich

$$|n \pm \lambda - \beta| > |n - \beta|\,. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

Wir haben also für $k \lesssim n$

$$|\delta_k| < \left| \frac{\varphi_k(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1})}{n - \beta} \right|$$

d. h. $|\delta_k| < |\gamma_k|$, und somit ist die Konvergenz der Reihe

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi^k$$

erwiesen. Es erübrigt noch, den Beweis der Unität zu liefern.

Nehmen wir an, die Differentialgleichung (50) besäße noch ein zweites für $\xi = 0$ verschwindendes und in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \xi^k\,,$$

dann folgte für die Differenz

$$\eta_1 - \zeta = z$$

aus

$$\xi \frac{d\eta_1}{d\xi} = \alpha\xi + \beta\eta_1 + [\xi, \eta_1]_2 ,$$
$$\xi \frac{d\zeta}{d\xi} = \alpha\xi + \beta\zeta + [\xi, \zeta]_2$$

die Differentialgleichung

$$\xi \frac{dz}{d\xi} = \beta z + z(\tau_1\xi + \tau_2\xi^2 + \cdots) .$$

Nun läßt sich z in der Umgebung von $x = a$ jedenfalls in der Form

$$z = c_m\xi^m + c_{m+1}\xi^{m+1} + \cdots$$

darstellen, wo m eine positive ganze Zahl $m \geq 1$ bedeutet; dies in die Differentialgleichung für z eingesetzt, gäbe

$$mc_m\xi^m + (m+1)c_{m+1}\xi^{m+1} + \cdots = \beta c_m\xi^m + \cdots ,$$

es müßte folglich

$$\beta = m ,$$

d. h. β eine positive ganze Zahl sein, wider die Voraussetzung.

Wie Poincaré gezeigt hat [1]), gilt für die allgemeine Differentialgleichung (50) auch der Satz, daß ihr allgemeines Integral in der Umgebung von $\xi = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von ξ und ξ^β entwickelt werden kann, wenn β keine positive ganze Zahl und der reelle Teil von β positiv ist; wir geben den Beweis dieses Satzes hier nicht wieder, da es uns nur darauf ankam, zu zeigen, wie die Methoden, die für die Untersuchung des Verhaltens der Integrale der Riccatischen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Stellen entwickelt worden sind, auf die Untersuchung der Integrale beliebiger Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung der festen singulären Stellen übertragen werden können. Während aber, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, für die Riccatische Gleichung aus dem Verhalten der Integrale in der Umgebung der (festen) singulären Stellen, auf deren Verlauf in der ganzen Ebene der unabhängigen Variabeln geschlossen werden kann, ist dies für die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung mit beweglichen Verzweigungspunkten nicht in derselben Weise möglich.

46. Der Fuchssche Typus.

Wir wollen nun, ähnlich wie in der Nr. 34 für eine Differentialgleichung erster Ordnung, den Fall betrachten, wo die Lösungen des Systems (A) bez. einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in der ganzen Ebene, den unendlich fernen Punkt mit eingeschlossen, keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, und beginnen mit der Untersuchung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (3) (S. 160).

[1]) H. Poincaré, Journal de l'École polyt., Cah. 45, S. 13.

Es seien $p(x)$, $q(x)$ allenthalben eindeutige Funktionen von x. Dann müssen $p(x)$, $q(x)$ in der Umgebung eines jeden im endlichen gelegenen singulären Punktes a die Form

$$p(x) = \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}, \quad q(x) = \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2},$$

in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Form (38) (S. 181) haben. Daraus folgt (vgl. den analogen Schluß in der Nr. 34), daß $p(x)$, $q(x)$ rationale Funktionen von x sein müssen, und daß die im endlichen gelegenen singulären Punkte (deren Anzahl σ natürlicherweise eine endliche ist) $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ Pole erster Ordnung von $p(x)$ und Pole zweiter Ordnung von $q(x)$ sind. Aus der für $x = \infty$ geltenden Form (38) ergibt sich ferner, daß der Zähler von $p(x)$ höchstens vom Grade $\sigma - 1$, der Zähler von $q(x)$ höchstens vom Grade $2\sigma - 2$ sein darf; wir erhalten also für die Koeffizienten von (3) die Form:

$$(51) \qquad p(x) = \frac{g(x)}{\prod_{k=1}^{\sigma}(x-a_k)}, \quad q(x) = \frac{h(x)}{\prod_{k=1}^{\sigma}(x-a_k)^2},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ sämtlich voneinander verschieden, $g(x)$, $h(x)$ ganze rationale Funktionen, die erste höchstens vom $(\sigma-1)$ten, die zweite höchstens vom $(2\sigma-2)$ten Grade sind.

Von einer Differentialgleichung (3), deren Koeffizienten rationale Funktionen von der Form (51) sind, oder was dasselbe heißt, deren Integrale keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, sagen wir, daß sie zum Fuchsschen Typus gehöre. Dieser Typus linearer Differentialgleichungen wurde nämlich zuerst von Fuchs in seiner im 66. Bande des Crelleschen Journals veröffentlichten grundlegenden Abhandlung[1]) charakterisiert und hat seitdem den Gegenstand der Untersuchungen von Fuchs selbst und vieler anderer Mathematiker gebildet. Die durch diese Untersuchungen begründeten Methoden haben zahlreiche wichtige Eigenschaften der Lösungen von Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus enthüllt, wir werden im folgenden einige derselben an dem Falle der Differentialgleichungen zweiter Ordnung und an einigen speziellen Fällen solcher Differentialgleichungen darlegen. Man bemerkt, daß die in der Nr. 43 behandelten Beispiele 2. und 3. dem Fuchsschen Typus angehören.

Wir beginnen mit der Aufstellung einer Beziehung, die zwischen den Wurzeln der zu allen singulären Punkten der Differentialgleichung

$$(52) \qquad \begin{gathered} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{g(x)}{\psi(x)}\frac{du}{dx} + \frac{h(x)}{\psi(x)^2}u = 0, \\ \psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\sigma), \end{gathered}$$

gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen besteht.

[1]) L. Fuchs, 1865. Werke I, S. 159ff.

Um die zu dem Punkte $x = a_k$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung aufzustellen, setzen wir die Differentialgleichung (52) in der Umgebung von $x = a_k$ in die Form (B) (S. 165), wir schreiben also

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x - a_k} \cdot \frac{g(x)}{\psi(x)}(x - a_k) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{(x - a_k)^2} \cdot \frac{h(x)}{\psi(x)^2}(x - a_k)^2 \cdot u = 0\,,$$

indem offenbar

$$\frac{g(x)}{\psi(x)}(x - a_k)\,, \quad \frac{h(x)}{\psi(x)^2}(x - a_k)^2$$

in der Umgebung von $x = a_k$ holomorphe Funktionen sind. Wir haben dann die Werte dieser holomorphen Funktionen für $x = a_k$ zu bestimmen (entsprechend den Größen $\mathfrak{P}_1(0)$, $\mathfrak{P}_2(0)$ in der Nr. 42); sie ergeben sich sofort in der Form

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to a_k} \frac{g(x)}{\psi(x)}(x - a_k) &= \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} \\ \lim_{x \to a_k} \frac{h(x)}{\psi(x)^2}(x - a_k)^2 &= \frac{h(a_k)}{\psi'(a_k)^2} \end{aligned}\right\}\ \psi'(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}\,.$$

Die der Gleichung (22) (S. 170) entsprechende Gleichung lautet demnach

$$\varrho(\varrho - 1) + \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)}\varrho + \frac{h(a_k)}{\psi'(a_k)^2} = 0\,,$$

und wenn wir ihre Wurzeln durch r_{k1}, r_{k2} bezeichnen, ist

$$r_{k1} + r_{k2} = -\frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} + 1\,. \tag{53}$$

Wir bringen ferner die Koeffizienten von (52) in der Umgebung von $x = \infty$ auf die Form (38)

$$\frac{g(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{1-\sigma} g(x)}{x^{-\sigma}\psi(x)}\,, \quad \frac{h(x)}{\psi(x)^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{2-2\sigma} h(x)}{x^{-2\sigma}\psi(x)^2}$$

und setzen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{1-\sigma} g(x)}{x^{-\sigma}\psi(x)} = \alpha\,, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2-2\sigma} h(x)}{x^{-2\sigma}\psi(x)^2} = \beta\,,$$

dann lautet die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho + 1) - \alpha\varrho + \beta = 0\,.$$

Bezeichnen wir ihre Wurzeln durch $r_{\infty 1}, r_{\infty 2}$, so ist also

$$r_{\infty 1} + r_{\infty 2} = \alpha - 1. \tag{54}$$

Nun ist in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{g(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} \cdot \frac{1}{x - a_k}\,,$$

und folglich

$$a = \lim_{x \to \infty} x \frac{g(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} ;$$

addieren wir also die Gleichungen (53) für $k = 1, 2, \ldots, \sigma$ zu (54), so kommt

$$\sum_{k=1}^{\sigma} (r_{k1} + r_{k2}) + r_{\infty 1} + r_{\infty 2} = \sigma - 1 ,$$

und dies ist die gedachte Beziehung, die man als die Fuchssche Relation zu bezeichnen pflegt.

Für Differentialsysteme (A) müssen wir uns damit begnügen, eine hinreichende Form dafür anzugeben, daß ein solches System dem Fuchsschen Typus angehört. Wir erhalten diese, indem wir annehmen, daß das System (A) in der Umgebung jeder der im Endlichen gelegenen singulären Stellen $a_1, \ldots, a_\sigma$ und in der Umgebung von $x = \infty$ die kanonische Form habe. Um die letztere Bedingung in Evidenz zu setzen, machen wir in (A) die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, wodurch dieses System in

$$\text{(A'')} \qquad \frac{dy_k}{d\xi} = -(y_1 a_{1k} + y_2 a_{2k}) \frac{1}{\xi^2} \qquad (k=1,2)$$

übergeht. Für dieses System ist $\xi = 0$ ein regulärer Punkt, wenn die Produkte $a_{ik} \xi^{-2}$ in seiner Umgebung holomorph sind, und das System hat in $\xi = 0$ die kanonische Form, wenn die Produkte $a_{ik} \xi^{-2}$ in $\xi = 0$ einen Pol erster Ordnung haben. Auf $x = \infty$ übertragen finden wir also:

1) Der unendlich ferne Punkt ist ein regulärer Punkt des Systems (A), wenn die Entwicklungen der a_{ik} in der Umgebung von $x = \infty$ die Form haben

$$\text{(55)} \qquad a_{ik} = \frac{a_{ik}^{(1)}}{x^2} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^3} + \cdots \text{ in inf.}$$

2) Das Differentialsystem (A) hat im Punkte $x = \infty$ die kanonische Form, wenn in der Umgebung dieses Punktes

$$\text{(56)} \qquad a_{ik} = -\frac{r_{ik}^{(\sigma+1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x^2} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^3} + \cdots \text{ in inf.}$$

ist.

Wenn im letzteren Falle (A) überdies für $x = \infty$ die Normalform hat, d. h. wenn dies für (A'') bei $\xi = 0$ gilt, so hat eine Integralmatrix von (A) in der Umgebung von $x = \infty$ die Gestalt

$$\text{(57)} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{R^{(\sigma+1)}} \Phi_{\sigma+1} ,$$

wo die Elemente von $\Phi_{\sigma+1}$ in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph sind und $|\Phi_{\sigma+1}|$ für $x = \infty$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Nehmen wir nunmehr noch die Bedingungen hinzu, daß (A) für die im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ die kanonische Form haben soll, so lautet also (A)

$$\frac{dy_k}{dx} = y_1 \frac{g_{1k}(x)}{\psi(x)} + y_2 \frac{g_{2k}(x)}{\psi(x)}, \qquad (k=1,2) \tag{58}$$

wo die g_{ik} vermöge der für die a_{ik} geforderten Form (56) ganze rationale Funktionen von x bedeuten, deren Grad höchstens gleich $\sigma - 1$ ist. Wir nennen ein solches System ein schlechthin kanonisches. Der besondere Fall $\sigma = 1$ ist uns schon als Cauchysches Differentialsystem begegnet.

Denken wir uns die Koeffizienten von (58) in Partialbrüche zerlegt:

$$a_{ik} = \frac{g_{ik}(x)}{\psi(x)} = \frac{r_{ik}^{(1)}}{x - a_1} + \cdots + \frac{r_{ik}^{(\sigma)}}{x - a_\sigma} \tag{59}$$

und nehmen wir weiter an, daß unser System nicht nur für $x = \infty$, sondern auch für jeden der im Endlichen gelegenen singulären Punkte die Normalform habe, dann sind (siehe Nr. 44) die zu den Punkten $x = a_\nu$ gehörigen Residuenmatrizen $R^{(\nu)}$ mit den determinierenden Matrizen ähnlich, wir haben also für eine Integralmatrix in der Umgebung von $x = a_\nu$ die Darstellung

$$(x - a_\nu)^{R^{(\nu)}} \Phi_\nu, \tag{60}$$

wo die Elemente von Φ_ν in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph sind und $|\Phi_\nu|$ für $x = a_\nu$ nicht verschwindet.

Bedeuten nun $r_1^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)}$ die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung

$$|R^{(\nu)} - Ir| = 0$$

für $x = a_\nu$, wo wir der Einheitlichkeit zuliebe den unendlich fernen Punkt mit $a_{\sigma+1}$ bezeichnen, so ist

$$r_1^{(\nu)} + r_2^{(\nu)} = r_{11}^{(\nu)} + r_{22}^{(\nu)},$$

und da sich durch Vergleichung von (56) mit (59)

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma+1} (r_{11}^{(\nu)} + r_{22}^{(\nu)}) = 0$$

ergibt, so haben wir für die Wurzeln aller determinierenden Fundamentalgleichungen die Relation

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma+1} (r_1^{(\nu)} + r_2^{(\nu)}) = 0,$$

die als Übertragung der Fuchsschen Relation auf Systeme anzusehen ist.

Das schlechthin kanonische System

$$\text{(58a)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = y_1 \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_{1k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} + y_2 \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_{2k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (k = 1, 2)$$

erscheint als unmittelbare Verallgemeinerung der Differentialgleichung (V) der Nr. 34.

47. Das Integrationsproblem. Fundamentalsubstitutionen.

Für ein Differentialsystem bezw. eine Differentialgleichung zweiter Ordnung des Fuchsschen Typus sind wir in der Lage, in der Umgebung jeder singulären Stelle die Entwicklungen einer Integralmatrix herzustellen; wir haben die Rechnung für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in allen Einzelheiten durchgeführt, für kanonische Differentialsysteme wenigstens ihre Durchführbarkeit gezeigt. Es fragt sich nun, was damit für das Integrationsproblem gewonnen ist.

Die Aufgabe, ein Differentialsystem (A) des Fuchsschen Typus mit den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ zu integrieren, wird als gelöst zu betrachten sein, wenn wir etwa die durch ihre Anfangswerte δ_{ik} in dem regulären Punkte $x = x_0$ charakterisierte Integralmatrix

$$Y = \overbrace{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I)$$

in einem beliebigen x-Punkte zu bestimmen vermögen, sofern noch der Weg angegeben wird, auf dem die Fortsetzung von x_0 nach x hin erfolgen soll.

Denken wir uns wie in Nr. 34 (vgl. Fig. 2, S. 131) durch Legen der Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ die einfachzusammenhängende Fläche T hergestellt, so ist ein von x_0 nach x hingelegter Weg in seiner Wirkung auf die Wertbestimmung der Integralmatrix Y nur abhängig von der Reihenfolge und dem Sinne, in denen dieser Weg die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet. Bezeichnen wir mit Y_T die auf einem in T verlaufenden Wege s erstreckte Integralmatrix:

$$Y_T = (s) \overbrace{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I)\,^{1)},$$

so sind ihre Elemente in jedem Punkte von T eindeutig bestimmt. Lassen wir nun x einen Umlauf w_ν um a_ν vollziehen, der den Schnitt l_ν einmal im positiven Sinne (Nr. 34) überschreitet, so verwandelt sich Y_T in

$$\Omega_\nu Y_T,$$

[1]) Wenn es der Deutlichkeit wegen erforderlich ist, wird der Integrationsweg dem Produktintegralzeichen in Klammern vorgesetzt.

wo Ω_ν [1]) eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet, die wir als die zu l_ν gehörige Fundamentalsubstitution der Integralmatrix Y bezeichnen. Ein g-maliges Vollziehen des Umlaufs w_ν liefert $\Omega_\nu^g Y_T$, und wenn w_ν einmal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird, geht Y_T in $\Omega_\nu^{-1} Y_T$ über. Es sei nun S ein beliebiger Weg, von dem wir wissen, daß er sich zusammensetzen läßt aus dem in T verlaufenden Wege von x_0 nach x und dann der Reihe nach aus den Umläufen w_α, g_α-mal, w_β, g_β-mal, ..., w_λ, g_λ mal, wo $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \sigma$ und $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\lambda$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten in dem Sinne, daß der Umlauf w_α als $-|g_\alpha|$-mal beschrieben gilt, wenn er $|g_\alpha|$-mal im negativen Sinne vollzogen wird. Dann ist das auf unserem Wege S erstreckte Produktintegral

$$(61) \qquad (S)\widehat{\int_{x_0}^{x}}(A\,dx + I) = \Omega_\alpha^{g_\alpha}\Omega_\beta^{g_\beta}\ldots\Omega_\lambda^{g_\lambda} Y_T\,,$$

wobei aber jetzt die Reihenfolge der $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ im allgemeinen wesentlich ist, so daß also in der Zahlenfolge $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sehr wohl zwei nicht unmittelbar benachbarte Zahlen einander gleich sein können, ohne daß es gestattet wäre, die bezüglichen Potenzen des betreffenden Ω_k miteinander zu vereinigen. Nur in dem ganz speziellen Falle, wo die Ω_ν miteinander vertauschbar sind, ist die Reihenfolge gleichgültig, wie das z. B. für eine Differentialgleichung erster Ordnung (Nr. 34) der Fall war.

Wir denken uns nun einmal Y_T in der Umgebung von $x = x_0$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt:

$$(62) \qquad Y_T = Y^{(0)} + Y^{(1)}(x - x_0) + Y^{(2)}(x - x_0)^2 + \cdots = \Phi\,;$$

diese Entwicklung, deren Herstellung vermöge der Rekursionsformel sehr einfach ist, konvergiert gewiß bis zu dem x_0 am nächsten gelegenen singulären Punkte, es sei dieser a_k. Wir stellen uns dann die in der Umgebung von a_k gültige Entwicklung einer Integralmatrix H_k nach dem in der Nr. 42 für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in der Nr. 44 für Systeme in der Normalform gelehrten Verfahren her, wobei zu bemerken ist, daß wir für Differentialgleichungen zweiter Ordnung als Integralmatrix die Elemente eines Fundamentalsystems u_1, u_2 und ihre Ableitungen u_1', u_2', also

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix}$$

aufzufassen haben. Als H_k hätten wir also in diesem Falle das zu a_k gehörige kanonische Fundamentalsystem und seine Ableitungen zu wählen. Die gedachte Entwicklung hat dann die Form

[1]) Wir schreiben Ω_ν statt $\Omega^{(\nu)}$; die Elemente dieser Matrix sollen mit $\omega_{ik}^{(\nu)}$ bezeichnet werden.

(63) $$H_k = (x - a_k)^{R_k} \Phi_k ,$$

wo R_k [1]) im Falle des Differentialsystems von der Normalform einfach die zu $x = a_k$ gehörige Residuenmatrix bedeutet, und die Elemente von Φ_k holomorph sind in einem Kreise mit dem Mittelpunkt a_k, der bis zu dem a_k am nächsten gelegenen singulären Punkte a_λ hin reicht; den in $(x - a_k)^{R_k}$ enthaltenen mehrdeutigen Potenzen und Logarithmen von $x - a_k$ legen wir innerhalb T ihre Hauptwerte (siehe Nr. 10) bei. Der Konvergenzkreis der Matrix Φ_k hat mit dem Konvergenzkreise der Matrix Φ sicher ein Gebiet γ gemein. In diesem Gebiete gilt die Relation

(64) $$\Phi = B_k (x - a_k)^{R_k} \Phi_k ,$$

wo B_k eine konstante Matrix nicht verschwindender Determinante bedeutet. Die Elemente von B_k kann man berechnen, indem man in (64) für x irgendeinen Wert x_1 des gemeinsamen Konvergenzgebietes γ wählt. Wenn die Reihen Φ noch im Punkte a_k selbst konvergieren, so ist es am bequemsten [2]), diesen Punkt selbst als x_1 zu wählen, weil sich dann die Elemente von Φ_k auf ihre Anfangsglieder reduzieren [3]).

Danach können die B_k als bekannt angesehen werden und wir haben demnach (vgl. Nr. 38)

(65) $$\Omega_k = B_k e^{2\pi i R_k} B_k^{-1} .$$

Wir betrachten nunmehr die zu a_λ gehörige Integralmatrix

$$H_\lambda = (x - a_\lambda)^{R_\lambda} \Phi_\lambda ;$$

der Konvergenzkreis der Elemente von Φ_λ reicht wieder bis zu dem a_λ am nächsten gelegenen singulären Punkt a_μ und hat mit dem Konvergenz-

[1]) Auch hier wird R_k statt $R^{(k)}$ geschrieben.

[2]) Fuchs, Crelles Journal Bd. 75 (1873), S. 177. Werke I. S. 361.

[3]) In bezug auf die Konvergenz der Reihen Φ auf der Peripherie des Konvergenzkreises gilt der folgende Satz von L. W. Thomé: Es mögen die singulären Stellen $a_k, a_\lambda, \ldots$ auf dem Konvergenzkreise liegen, dann findet Konvergenz in jedem nicht singulären Punkte des Konvergenzkreises statt, wenn die reellen Teile der zu $a_k, a_\lambda, \ldots$ gehörigen Exponenten (Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung) größer sind als -1: im singulären Punkte a_k selbst konvergieren die Reihen, wenn die reellen Teile der zu a_k gehörigen Exponenten positiv sind. Siehe Thomé, Crelles Journal, Bd. 100 (1887), S. 167; Schlesinger, Handbuch der Theorie d. lin. Diffgl. I (1895), S. 228. Auf Grund des Fejérschen Satzes über die Summierbarkeit der Fourierreihe einer stetigen Funktion durch die Cesàroschen arithmetischen Mittel (L. Fejér, Math. Annalen 58 [1904], S. 51, siehe z. B. G. Kowalewski, Differential- und Integralrechnung, 1909, S. 284) kann man weiter zeigen, daß die Reihen Φ für jeden regulären Punkt des Konvergenzkreises durch die arithmetischen Mittel der Partialsummen summierbar sind, wenn die reellen Teile der zu den $a_k, a_\lambda, \ldots$ gehörigen Exponenten größer sind als -2, ebenso durch die zweiten arithmetischen Mittel, wenn diese reellen Teile größer sind als -3 usw.

kreise von Φ_k sicher ein Gebiet γ' gemein. Es ist dann in diesem Gebiete

$$(x - a_k)^{R_k}\Phi_k = B_{k\lambda}(x - a_\lambda)^{R_\lambda}\Phi_\lambda \tag{66}$$

und wir können die Elemente der konstanten Matrix $B_{k\lambda}$ (der sogenannten Übergangssubstitution) wieder bestimmen, indem wir in (66) für x einen Punkt x_2 von γ' einsetzen. Konvergieren die Elemente von Φ_k noch in a_λ, so ist es wieder am bequemsten $x_2 = a_\lambda$ zu nehmen. Die Gleichungen (64) und (66) vermitteln die analytische Fortsetzung von $Y_T = \Phi$ in das Innere des Konvergenzkreises von Φ_λ; wir erhalten

$$Y_T = B_k \cdot B_{k\lambda}(x - a_\lambda)^{R_\lambda}\Phi_\lambda\,,$$

und daraus ergibt sich

$$\Omega_\lambda = B_k\, B_{k\lambda}\, e^{2\pi i R_\lambda} B_{k\lambda}^{-1}\, B_k^{-1}\,.$$

Man setzt dieses Verfahren fort, indem man nunmehr zu einem der singulären Punkte übergeht, die auf dem Konvergenzkreise von Φ_λ liegen usw. Dann kann es vorkommen, daß man auf diese Weise zu allen im Endlichen gelegenen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ gelangt. Tritt dieser Fall ein, so hat man nur noch die in der Umgebung von $x = \infty$ gültigen Entwicklungen

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{R_{\sigma+1}}\Phi_{\sigma+1}$$

heranzuziehen. Die Elemente von $\Phi_{\sigma+1}$ konvergieren außerhalb eines Kreises, der alle $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ im Innern oder auf dem Rande enthält; liegt etwa a_ν auf der Peripherie, so erhält man durch Vermittlung dieses Punktes eine Darstellung von Y_T in der Form

$$Y_T = B_{\sigma+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{R_{\sigma+1}}\Phi_{\sigma+1}\,,$$

wo $B_{\sigma+1}$ eine konstante Matrix bedeutet, und bei einem positiven Umlauf um $x = \infty$ wird Y_T mit der Matrix

$$\Omega_{\sigma+1} = B_{\sigma+1}\, e^{2\pi i R_{\sigma+1}}\, B_{\sigma+1}^{-1}$$

von links her komponiert. Der Umlauf $W_{\sigma+1}$ durchquert alle Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ und zwar im negativen Sinne; denken wir uns diese Querschnitte so gelegt (vgl. Fig. 2, S. 131), daß sie von $W_{\sigma+1}$ in der angegebenen Reihenfolge getroffen werden, dann ist also

$$\Omega_{\sigma+1} = \Omega_1^{-1}\,\Omega_2^{-1} \ldots \Omega_\sigma^{-1}\,, \tag{67}$$

und diese Beziehung erleichtert die Berechnung von $B_{\sigma+1}$.

Man hat auf diese Weise einerseits die Fortsetzung der durch die Reihen Φ in der Umgebung von $x = x_0$ definierten Integralmatrix Y_T über die ganze Fläche T hin durchgeführt und andererseits die Fundamentalsubstitutionen $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma$ hergestellt, so daß das Integrationsproblem als gelöst angesehen werden kann.

Es könnte aber vorkommen, daß bei besonderer Lagerung der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ durch das geschilderte Verfahren nicht alle diese Punkte erreicht werden. Dann muß der Zusammenhang zwischen den erreichbaren und den nicht erreichbaren Punkten durch Zwischenschaltung eines oder mehrerer nicht singulärer Hilfspunkte hergestellt werden. Wir werden in der Nr. 55 das hier entwickelte Verfahren an dem einfachen Beispiele, wo im Endlichen zwei singuläre Punkte vorhanden sind, wirklich durchführen.

48. Monodromiegruppe. Der Artbegriff. Fundamentallemma.

Die Kenntnis der Fundamentalsubstitutionen $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma$ ermöglicht die Wertbestimmung der Integralmatrix Y_T bei Fortsetzung auf einem beliebigen Wege S, wenn bekannt ist, in welcher Reihenfolge und in welchem Sinne S die Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ überschreitet. Die Gesamtheit aller konstanten Matrizen, mit denen sich Y_T von links her komponiert, wenn man alle verschiedenen Wege S in Betracht zieht, entsteht, indem man die $\Omega_1, \ldots \Omega_\sigma$ und ihre Inversen in allen denkbaren Kombinationen mit beliebiger Wiederholung komponiert. Diese Gesamtheit bildet eine Gruppe, da die Komposition irgend zweier Matrizen der Gesamtheit wieder zu einer Matrix dieser Gesamtheit führt. Diese Gruppe heißt die Monodromiegruppe Ω der Integralmatrix Y_T, man sagt, sie sei aus den $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen komponiert. Es ist nun leicht einzusehen, daß die Matrizen der Monodromiegruppe Ω eine abzählbare Menge bilden. In der Tat ist jede Matrix von Ω in der Form

$$\Omega_\alpha^{g_\alpha} \Omega_\beta^{g_\beta} \ldots \Omega_\nu^{g_\nu} \tag{68}$$

(siehe (61)) darstellbar. Wir ordnen dann die Matrizen Ω zunächst so, daß wir alle diejenigen, für die $|g_\alpha| + |g_\beta| + \cdots + |g_\nu|$ einen und denselben Wert hat, in eine Klasse zusammenfassen. In jeder Klasse befindet sich dann nur eine endliche Anzahl von Matrizen. Durch Anordnung der Klassen nach den wachsenden Werten der Summe $|g_\alpha| + |g_\beta| + \cdots + |g_\nu|$ und Anordnen der Matrizen innerhalb einer jeden Klasse bekommen wir aber eine Anordnung aller Matrizen von Ω.

Geht man von der Integralmatrix Y_T zu einer anderen Integralmatrix Y über, so ist

$$Y = C \cdot Y_T\,,$$

wo C eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Die zu Y gehörigen Fundamentalsubstitutionen sind dann

$$\Omega_\nu = C\Omega_\nu C^{-1}\,, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

und wenn überhaupt Ω_0 die Matrix ist, mit der sich Y_T bei irgendeinem Umlauf W_0 von x von links her komponiert, so lautet die entsprechende Matrix für Y:

$$\bar{\Omega}_0 = C\Omega_0 C^{-1};$$

wir können also sagen, daß die zu Y gehörige Monodromiegruppe $\bar{\Omega}$ aus der zu Y_T gehörigen, Ω, durch Transformation mit der Matrix C entsteht. Für das Differentialsystem bzw. die Differentialgleichung zweiter Ordnung ist also die Monodromiegruppe nur abgesehen von einer willkürlichen transformierenden Matrix bestimmt.

Es liegt nun nahe, den für die Umgebung eines einzelnen singulären Punktes (im Kleinen) eingeführten Begriff der Kogredienz und Art auf die ganze Ebene (ins Große) zu übertragen. Wir sagen, eine Matrix Z sei mit unserer Integralmatrix Y schlechthin kogredient, wenn beide Matrizen bei jedem Umlauf von x mit derselben konstanten Matrix von links her komponiert werden. Setzt man

$$Y^{-1}Z = G,$$

so sind die Elemente von G in der ganzen Ebene eindeutige Funktionen und aus der Derivationsformel (D) der Nr. 39 ergibt sich

$$D_x Z = G^{-1} D_x Y G + D_x G,$$

also, da Y eine Integralmatrix von (A), d. h.

$$D_x Y = A$$

ist, haben wir

$$D_x Z = B, \tag{69}$$

wo B durch die Gleichung

$$B = G^{-1} A G + D_x G \tag{70}$$

bestimmt ist. Wir sagen auch von den Differentialsystemen (A) und

$$\frac{dz_k}{dx} = z_1 b_{1k} + z_2 b_{2k}, \qquad (k=1,2) \tag{B}$$

daß sie kogredient seien. Wenn nun insbesondere auch die Elemente der Matrix Z keine Unbestimmtheitsstelle haben, so haben auch die eindeutigen Funktionen g_{ik} diese Eigenschaft und sind folglich rationale Funktionen von x. Das Differentialsystem (B), dem die z_{ik} genügen, gehört dann auch zum Fuchsschen Typus, wir sagen, es sei mit (A) schlechthin von derselben Art[1]) und übertragen diese Ausdrucksweise auch auf die Matrizen Z und Y selbst. Wir erhalten umgekehrt auch stets eine mit Y zu derselben Art gehörige Matrix, wenn wir YG bilden, wo G irgendeine Matrix rationaler Funktionen bedeutet. Im folgenden wollen wir uns aber stets die Voraussetzung hinzudenken,

[1]) Dieser Artbegriff (espèce) geht auf Poincaré zurück, siehe Acta math. 5, 1884, S. 209, Oeuvres II, S. 402, insbesondere S. 405.

daß die Determinante $|G|$ nicht identisch verschwindet, dann sind die Beziehungen

$$Z = YG\,, \quad Y = ZG^{-1}$$

vollkommen gleichberechtigt und die Artbeziehung wird zu einer gegenseitigen.

Offenbar haben zwei Differentialsysteme (A), (B) des Fuchsschen Typus, die zu derselben Art gehören, diejenigen singulären Stellen miteinander gemein, in denen sich die Lösungen verzweigen (wir nennen sie kurz „Verzweigungspunkte"). Dagegen können die singulären Stellen, wo die Lösungen den Charakter rationaler Funktionen haben, verschieden sein. Es sind dies also einmal die außerwesentlich singulären Stellen, (in denen die Lösungen holomorph sind) und andererseits diejenigen Singularitäten, wo die Integrale Pole haben (wir nennen sie kurz „Pole").

Von zwei Differentialsystemen derselben Art, die nicht nur dieselben Verzweigungspunkte, sondern auch dieselben Pole haben, sagen wir nach Riemann[1]), daß sie zu derselben Klasse gehören. Differentialsysteme derselben Klasse können also nur noch verschiedene außerwesentlich singuläre Punkte besitzen. Die verschiedenen Klassen einer Art unterscheiden sich durch die ihnen eigentümlichen Pole.

Wenn das Differentialsystem (A) Pole besitzt, so kann man diese durch Multiplikation von y_1, y_2 mit einer geeigneten ganzen rationalen Funktion beseitigen; wir nennen die Klasse einer Art, die keine Pole aufweist, die Hauptklasse. Man kann aber auch etwa auftretende außerwesentlich singuläre Stellen beseitigen, indem man die Elemente der rationalen Matrix G, mit der von rechts her komponiert wird, so einrichtet, daß $|G|$ an den außerwesentlich singulären Stellen von so hoher Ordnung unendlich wird, wie die Determinante der Integralmatrix an diesen Stellen verschwindet. Weiter kann durch ein Verfahren, das dem in der Nr. **44** für die Umgebung einer Stelle dargelegten analog ist, erreicht werden[2]), daß das von Polen und außerwesentlich singulären Stellen befreite Differentialsystem an jedem Verzweigungspunkte die Normalform besitzt. Man kann also von einem beliebigen Differentialsystem (A) des Fuchsschen Typus zu einem Differentialsystem (B) derselben Art übergehen, das

1. keine polaren Singularitäten besitzt, also zur Hauptklasse gehört,
2. auch keine außerwesentlich singulären Stellen aufweist und
3. in jedem Verzweigungspunkte die Normalform hat.

---

[1]) B. Riemann, Werke (2. Aufl.) S. 379, Nr. XXI.

[2]) Riemann, a. a. O., J. Plemelj, Monatshefte für Math. u. Phys., 19 (1908), S. 211.

Wenn das Differentialsystem (B) diese Eigenschaften hat, so verwandelt es sich durch die Transformation

$$V = ZC\,,$$

wo C eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet, in ein Differentialsystem für V, das dieselben Eigenschaften besitzt. Man kann diese Matrix C dazu benutzen, um zu erreichen, daß die mit Z kogrediente Integralmatrix V in einem beliebig vorgeschriebenen regulären Punkte x_0 sich auf die Einheitsmatrix I reduziert. Es sei dann

$$\text{(C)} \qquad \frac{dv_k}{dx} = v_1 \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_{1k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} + v_2 \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_{2k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (k = 1, 2)$$

das Differentialsystem, dem die Matrix V genügt, also

$$V = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{R^{(\nu)}}{x - a_\nu}\, dx + I \right);$$

wir behaupten, daß dieses System durch Angabe seiner determinierenden Matrizen eindeutig bestimmt ist.

In der Tat sei das Differentialsystem

$$(\bar{\text{C}}) \qquad \frac{d\bar{v}_k}{dx} = \bar{v}_1 \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{r}_{1k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} + \bar{v}_2 \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{r}_{2k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (k = 1, 2)$$

so beschaffen,

1. daß es mit (C) zu derselben Klasse gehört,
2. daß die Integralmatrix $\bar{V}$, die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix reduziert, mit V kogredient sei,
3. daß für jeden der Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ die determinierenden Matrizen von (C) und $(\bar{\text{C}})$, d. h. also die kanonischen Formen der Residuenmatrizen $R^{(\nu)}, \bar{R}^{(\nu)} (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1)$ übereinstimmen, also die $\bar{R}^{(\nu)}$ mit den $R^{(\nu)}$ ähnlich sind.

Dann ist jedenfalls

$$\bar{V} = VG\,,$$

wo G eine Matrix rationaler Funktionen bedeutet. Für jeden Punkt $x = a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1)$ [1] lautet die zugehörige Integralmatrix von (C) bzw. $(\bar{\text{C}})$

$$(x - a_\nu)^{R^{(\nu)}} \Phi_\nu \;\text{ bzw. }\; (x - a_\nu)^{\bar{R}^{(\nu)}} \bar{\Phi}_\nu\,,$$

wo die Elemente von Φ_ν und $\bar{\Phi}_\nu$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph, $|\Phi_\nu|$, $|\bar{\Phi}_\nu|$ in $x = a_\nu$ von Null verschieden sind, und wo ferner nach 3.

[1]) Für $a_{\sigma+1} = \infty$ ist in üblicher Weise $x - a_{\sigma+1}$ als $\frac{1}{x}$ zu deuten.

konstante Matrizen $\Gamma^{(\nu)}$ mit nicht verschwindender Determinante existieren, für die

$$(71) \qquad R^{(\nu)} = \Gamma^{(\nu)} R^{(\nu)} \Gamma^{(\nu)^{-1}}$$

ist. Man hat dann

$$V = B_\nu (x - a_\nu)^{R^{(\nu)}} \Phi_\nu , \quad V = B_\nu (x - a_\nu)^{R^{(\nu)}} \Phi_\nu ,$$

wo B_ν und $\bar{B}_\nu$ konstante Matrizen mit nicht verschwindender Determinante bedeuten. Da nun V und V kogredient sein sollten, ist

$$B_\nu e^{2\pi i \bar{R}^{(\nu)}} B_\nu^{-1} = B_\nu e^{2\pi i R^{(\nu)}} B_\nu^{-1} ,$$

also nach (71)

$$(72) \qquad B_\nu \Gamma^{(\nu)} e^{2\pi i R^{(\nu)}} \Gamma^{(\nu)-1} B_\nu^{-1} = B_\nu e^{2\pi i R^{(\nu)}} B_\nu^{-1} .$$

Es ergibt sich also

$$G = V^{-1} V = \Phi_\nu^{-1} (x - a_\nu)^{-R^{(\nu)}} B_\nu^{-1} \bar{B}_\nu \Gamma^{(\nu)} (x - a_\nu)^{R^{(\nu)}} \Gamma^{(\nu)-1} \Phi_\nu ,$$

und da nach (72) die Matrix $B_\nu^{-1} B_\nu \Gamma^{(\nu)}$ mit $e^{2\pi i R^{(\nu)}}$, also auch mit $(x - a)^{R^{(\nu)}}$ vertauschbar ist, so haben wir

$$G = \Phi_\nu^{-1} B_\nu^{-1} B_\nu \Phi_\nu .$$

Da $| \Phi_\nu |$ für $x = a_\nu$ nicht verschwindet, sind die Elemente von Φ_ν^{-1} in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph; das gleiche gilt also für die Elemente von G. Also sind die Elemente von G in der Umgebung aller Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ holomorph. Die rationalen Funktionen g_{ik} können aber auch an keiner regulären Stelle x des Differentialsystems einen Pol haben, denn an einer solchen Stelle ist die Determinante $| V |$ von Null verschieden, also sind die Elemente von V^{-1} holomorph, also auch die Elemente von $G = V^{-1} V$. Rationale Funktionen, die allenthalben holomorph sind, können aber nur Konstanten sein. Also ist G eine konstante Matrix, und da für $x = x_0$ sowohl V als auch V sich auf I reduzieren, ist $G = I$, d. h. V ist mit V identisch. Wir haben also den folgenden Satz, den wir als das Fundamentallemma bezeichnen wollen:

Das schlechthin kanonische Differentialsystem (C), das keinen außerwesentlich singulären Punkt besitzt und für jede singuläre Stelle die Normalform hat, für das sich überdies diejenige Integralmatrix V, die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix I reduziert, an den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ mit den Fundamentalsubstitutionen $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma$ komponiert, ist durch Angabe der zu den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Matrizen eindeutig bestimmt.

49. Konstantenzählungen. Riemannsche Differentialsysteme.

Auf Grund des Fundamentallemmas können wir die Koeffizienten des Differentialsystems (C), d. h. genauer die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ und die Residuenmatrizen $R^{(\nu)}$ als charakteristische Invarianten der Art auffassen, die durch jenes Differentialsystem bestimmt ist. Und zwar lassen sich diese Invarianten aus den Koeffizienten irgendeines Differentialsystems der Art algebraisch herstellen. Demgegenüber haben wir in der Monodromiegruppe oder in dem System der Fundamentalsubstitutionen $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma$ Invarianten der Art, die, allgemein zu reden, von den Koeffizienten eines Differentialsystems der Art in transzendenter Weise abhängen. Wir werden später die Natur dieser Abhängigkeit im allgemeinsten Falle noch genauer zu ergründen suchen, vorerst wollen wir einen wichtigen und einfachen Spezialfall behandeln, in dem die Herstellung der Monodromiegruppe mit Hilfe von elementaren Transzendenten gelingt.

Die Fundamentalsubstitution Ω_ν stellt sich (Nr. 47) für die Integralmatrix V in der Form dar:

$$\Omega_\nu = B_\nu e^{2\pi i R^{(\nu)}} B_\nu^{-1}, \tag{73}$$

wenn in der Umgebung von $x = a_\nu$

$$V = B_\nu (x - a_\nu)^{R^{(\nu)}} \Phi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ist, wo B_ν eine konstante, Φ_ν eine in dieser Umgebung holomorphe Matrix bedeutet. Es ist also $e^{2\pi i R^{(\nu)}}$ die kanonische Form der Fundamentalsubstitution Ω_ν und diese kann demnach aus der Residuenmatrix $R^{(\nu)}$ mit Hilfe von elementaren Transzendenten gewonnen werden. Zu den Formeln (73) tritt noch für $x = \infty$

$$\Omega_{\sigma+1} = B_{\sigma+1} e^{2\pi i R^{(\sigma+1)}} B_{\sigma+1}^{-1},$$

wo zwischen den $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma, \Omega_{\sigma+1}$ die Beziehung (67) (Nr. 47) und zwischen den $R^{(1)}, \ldots, R^{(\sigma)}, R^{(\sigma+1)}$ die Beziehung

$$-R^{(\sigma+1)} = R^{(1)} + \cdots + R^{(\sigma)} \tag{74}$$

besteht. Nun enthalten die $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma, \Omega_{\sigma+1}$ im ganzen $4(\sigma + 1)$ Elemente, zwischen denen aber vermöge (67) vier Gleichungen bestehen, so daß noch 4σ Größen übrig bleiben. Durch Übergang zu einer anderen Integralmatrix

$$\bar{V} = CV$$

verwandelt sich (siehe Nr. 48) jedes Ω_ν in $C\Omega_\nu C^{-1}$; man kann die konstante Matrix C nun dazu benutzen, um über drei von jenen 4σ Größen nach Belieben zu verfügen. Es bleiben also $4\sigma - 3$ wesentliche Konstanten in den $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma$. Die kanonische Form einer Matrix Ω_ν enthält zwei Größen; durch die kanonischen Formen der $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma, \Omega_{\sigma+1}$ kennen wir also $2(\sigma+1)$ Größen, zwischen denen aber vermöge (67) oder (74) noch eine Relation besteht, so daß $2\sigma+1$ bekannte Größen übrig bleiben. Die beiden Zahlen $4\sigma-3$ und $2\sigma+1$ stimmen für $\sigma=2$ überein, wir werden also vermuten können, daß für den Fall von zwei im Endlichen gelegenen singulären Punkten a_1, a_2 die Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen durch die kanonischen Formen von $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ möglich sein wird. Diese Bestimmung würde also dann durch elementare Transzendenten aus den Koeffizienten der Differentialgleichung, nämlich den determinierenden Matrizen erfolgen.

Wir werden so dazu geführt, den Fall $\sigma=2$ genauer zu untersuchen und betrachten also das Differentialsystem

$$(\mathrm{E})\qquad \frac{dy_k}{dx}=y_1\left(\frac{r_{1k}^{(1)}}{x-a_1}+\frac{r_{1k}^{(2)}}{x-a_2}\right)+y_2\left(\frac{r_{2k}^{(1)}}{x-a_1}+\frac{r_{2k}^{(2)}}{x-a_2}\right),\qquad (k=1,2)$$

das wir als Riemannsches bezeichnen wollen. Es enthält außer den a_1, a_2, die wir als fest ansehen wollen, noch die acht konstanten Parameter $r_{ik}^{(1)}, r_{ik}^{(2)}$. Es sei Y eine Integralmatrix von (E) und C eine konstante Matrix mit nichtverschwindender Determinante. Setzen wir

$$(75)\qquad Z=YC^{-1},$$

so ist nach der Derivationsformel (D) der Nr. 39 (S. 157)

$$D_xZ=C\cdot D_xY\cdot C^{-1},$$

also befriedigt Z, wenn

$$(76)\qquad CR^{(1)}C^{-1}=S^{(1)},\quad CR^{(2)}C^{-1}=S^{(2)}$$

gesetzt wird, das Differentialsystem

$$(\mathrm{E}')\qquad \frac{dz_k}{dx}=z_1\left(\frac{s_{1k}^{(1)}}{x-a_1}+\frac{s_{1k}^{(2)}}{x-a_2}\right)+z_2\left(\frac{s_{2k}^{(1)}}{x-a_1}+\frac{s_{2k}^{(2)}}{x-a_2}\right).\qquad (k=1,2)$$

Aus (76) folgt, daß die determinierenden Matrizen bei den singulären Punkten a_1, a_2, ∞ für die beiden Systeme (E), (E′) übereinstimmen und nach (75) sind die beiden Matrizen Y und Z kogredient. Wir können nun C so einrichten, daß (E′) eine möglichst einfache Gestalt annimmt, d. h. daß die Anzahl der konstanten Parameter nach Möglichkeit verringert wird. Es ist

$$s_{12}^{(1)}=\sum_\lambda\sum_\mu c_{1\lambda}r_{\lambda\mu}^{(1)}c'_{\mu 2},\quad s_{21}^{(2)}=\sum_\lambda\sum_\mu c_{2\lambda}r_{\lambda\mu}^{(2)}c'_{\mu 1},$$

wo die Summen über die Werte $\lambda, \mu=1, 2$ zu nehmen sind und c'_{ik} die Elemente von C^{-1} bedeuten, also

$$c'_{11}=\frac{c_{22}}{\Delta},\quad c'_{12}=\frac{-c_{12}}{\Delta},\quad c'_{21}=\frac{-c_{21}}{\Delta},\quad c'_{22}=\frac{c_{11}}{\Delta};\quad \Delta=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}.$$

Wir bestimmen nun die c_{ik} so, daß

$$(77)\qquad s_{12}^{(1)}=0,\quad s_{21}^{(2)}=0$$

ist, was je eine quadratische Gleichung für die Verhältnisse $\frac{c_{12}}{c_{11}}, \frac{c_{21}}{c_{22}}$ liefert. Da

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{c_{11}} \\ \frac{c_{21}}{c_{22}} & 1 \end{pmatrix}$$

ist, so haben wir jetzt noch c_{11}, c_{22} zur Verfügung, d. h. wir können noch z_1 mit dem Faktor c_{11} und z_2 mit dem Faktor c_{22} multiplizieren. Dadurch verwandelt sich $s_{12}^{(2)}$ in $s_{12}^{(2)} \frac{c_{22}}{c_{11}}$ und $s_{21}^{(1)}$ in $s_{21}^{(1)} \frac{c_{11}}{c_{22}}$, wir sehen also, daß nur das Produkt $s_{12}^{(2)} \cdot s_{21}^{(1)}$ dieser beiden Größen als wesentlicher Parameter anzusehen ist. Bezeichnen wir mit $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2$ die Wurzeln der zu a_1, a_2 gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen der Systeme (E) und (E′), so ist wegen (77)

$$s_{11}^{(1)} = \lambda_1, \quad s_{22}^{(1)} = \mu_1, \quad s_{11}^{(2)} = \lambda_2, \quad s_{22}^{(2)} = \mu_2.$$

Setzen wir noch $s_{12}^{(2)} = \nu_1, s_{21}^{(1)} = \nu_2$, so lautet das System (E′) in seiner vereinfachten Form:

$$(\mathrm{E}') \qquad \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_1\left(\frac{\lambda_1}{x-a_1} + \frac{\lambda_2}{x-a_2}\right) + z_2 \frac{\nu_2}{x-a_1}, \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_1 \frac{\nu_1}{x-a_2} + z_2\left(\frac{\mu_1}{x-a_1} + \frac{\mu_2}{x-a_2}\right), \end{aligned}$$

und die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung heißt

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + r)(\mu_1 + \mu_2 + r) - \nu_1\nu_2 = 0,$$

ihre Wurzeln λ_3, μ_3 genügen also den Gleichungen

$$(78) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \lambda_3 + \mu_3 = 0,$$

$$(79) \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - \nu_1\nu_2 = \lambda_3\mu_3,$$

deren erste die Fuchssche Relation ist. Durch die zweite Gleichung bestimmt sich $\nu_1 \cdot \nu_2$; da, wie oben bemerkt wurde, nur dieses Produkt als wesentliche Konstante zu gelten hat, so enthält (E′) nur noch fünf Parameter, und wir können sagen, daß die Koeffizienten des Differentialsystems (E′) durch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \lambda_3, \mu_3$, zwischen denen noch die Fuchssche Relation (78) besteht, vollkommen festgelegt sind. Jedes Riemannsche Differentialsystem (E), dessen determinierende Fundamentalgleichungen die Wurzeln $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \lambda_3, \mu_3$ haben, geht durch eine Transformation von der Form $Y = ZC$, also

$$(80) \qquad \begin{aligned} y_1 &= z_1 c_{11} + z_2 c_{21}, \\ y_2 &= z_1 c_{12} + z_2 c_{22} \end{aligned}$$

aus (E′) hervor. Ein Riemannsches System ist also, abgesehen von einer linearen Transformation der Form (80), durch Angabe der singulären Punkte a_1, a_2, ∞ und der zugehörigen Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen vollkommen bestimmt[1]). Da für alle diese Differentialsysteme die Monodromiegruppe dieselbe ist, so ist auch diese, d. h. es sind die Fundamentalsubstitutionen $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ durch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bestimmt. Wir werden die wirkliche Berechnung der $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ im nächsten Kapitel durchführen. Man erkennt übrigens aus dieser Bemerkung, wie der oben ausgesprochene Satz sich dem Fundamentallemma unterordnet.

50. Vereinfachung des Riemannschen Differentialsystems. Gaußsche Differentialgleichung.

Wir führen durch die Gleichungen

$$(81)\qquad \begin{aligned} z_1 &= u_1(x-a_1)^{\mu_1}(x-a_2)^{\lambda_2}, \\ z_2 &= u_2(x-a_1)^{\mu_1}(x-a_2)^{\lambda_2} \end{aligned}$$

in (E′) neue Unbekannte ein; dann verwandelt sich (E′) in

$$(\mathrm{E}'')\qquad \begin{cases} (x-a_1)\dfrac{du_1}{dx} = \varrho_1 u_1 + \nu_2 u_2\,, \\ (x-a_2)\dfrac{du_2}{dx} = \nu_1 u_1 + \varrho_2 u_2\,, \end{cases}$$

wo $\varrho_1 = \lambda_1 - \mu_1$, $\varrho_2 = \mu_2 - \lambda_2$ gesetzt wurde. Für (E″) sind die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen: $0, \varrho_1$ für $x = a_1$; $0, \varrho_2$ für $x = a_2$ und die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung lautet

$$r^2 + (\varrho_1 + \varrho_2)r + \varrho_1\varrho_2 - \nu_1\nu_2 = 0\,.$$

Wir bezeichnen ihre Wurzeln mit α, β, so daß also

$$(82)\qquad \begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 + \alpha + \beta = 0\,, \\ \varrho_1\varrho_2 - \nu_1\nu_2 = \alpha\beta \end{cases}$$

ist. Wir erinnern daran, daß in (E″) nur die drei wesentlichen Konstanten ϱ_1, ϱ_2 und $\nu_1 \cdot \nu_2$ vorkommen. Indem man in (E″) an Stelle von x die neue unabhängige Veränderliche $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}$ einführt, kann man a_1 nach 0 und a_2 nach 1 verlegen; das so entstehende System

$$(\mathrm{F})\qquad \begin{aligned} x\frac{du_1}{dx} &= \varrho_1 u_1 + \nu_2 u_2\,, \\ (x-1)\frac{du_2}{dx} &= \nu_1 u_1 + \varrho_2 u_2 \end{aligned}$$

[1]) Riemann, 1857. Werke (2. Aufl. 1892), S. 67 ff.

nennen wir ein Gaußsches. Um Anschluß an die geschichtlich außerordentlich wichtigen Untersuchungen von Gauß[1]) und Riemann[2]) zu gewinnen, vollziehen wir nunmehr den Übergang zu den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen u_1, u_2 genügen.

Indem man die Gleichungen (F) nach x differentiiert und dann u_1 bzw. u_2 eliminiert, erhält man die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(83)\quad x(x-1)\,u_1'' = [(\varrho_1+\varrho_2-1)\,x-\varrho_1+1]\,u_1' + (\nu_1\nu_2-\varrho_1\varrho_2)\,u_1\,,$$

$$(84)\quad x(x-1)\,u_2'' = [(\varrho_1+\varrho_2-1)\,x-\varrho_1]\,u_2' + (\nu_1\nu_2-\varrho_1\varrho_2)\,u_2\,,$$

die beide von der Form

$$(\mathrm{G})\qquad x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x)\frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0$$

sind, wo sich α, β durch (82) bestimmen, während für (83) $\gamma = 1-\varrho_1$ und für (84) $\gamma = -\varrho_1$ zu nehmen ist. Man nennt diese berühmte Differentialgleichung gemeinhin die Gaußsche, sie ist aber schon von Euler[3]) aufgestellt und untersucht worden.

An diese Differentialgleichung knüpfen wir unsere weiteren Betrachtungen.

[1]) C. F. Gauß, Disquisitiones circa seriem inf. etc. 1812. Werke III, S. 123.

[2]) a. a. O.

[3]) L. Euler, Specimen transformationis singularis serierum (Nr. 710 des Eneströmschen Index). Nova Acta Petropolitana XII (1801), datiert vom 3. 9. 1778; vgl. auch Inst. calc. integralis II. Sect. I, cap. VIII. probl. 123. Opera. Series I. vol. XII. S. 182. Weitere Literaturangaben folgen in der nächsten Nummer.

Siebentes Kapitel.

Die Gaußsche Differentialgleichung.

51. Aufstellung des kanonischen Fundamentalsystems für den Nullpunkt.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Gaußsche Differentialgleichung (G) im Sinne der Nr. 47 zu integrieren, und beginnen damit, daß wir zunächst das zu $x = 0$ gehörige kanonische Fundamentalsystem aufstellen.

Um die Differentialgleichung auf die Normalform zu bringen, hätten wir die linke Seite mit x zu multiplizieren und durch $1 - x$ zu dividieren; das letztere wollen wir aber, ähnlich wie wir es schon in dem Beispiel 2. der Nr. 43 getan haben, unterlassen, da sich dadurch die Rechnung komplizieren würde; wir setzen also

$$(1)\quad D(u) = x^2(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + x\left[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right]\frac{du}{dx} - \alpha\beta x u = 0\,,$$

dann lautet die charakteristische Funktion

$$D(x^\varrho) = x^\varrho\left[(1-x)\varrho(\varrho-1) + \varrho(\gamma-(\alpha+\beta+1)x) - \alpha\beta x\right] = x^\varrho f(x,\varrho)\,.$$

Ordnen wir $f(x,\varrho)$ nach Potenzen von x,

$$f(x,\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\varrho)\, x^\nu$$
$$= \varrho(\varrho-1) + \varrho\gamma + x\left[-\varrho(\varrho-1) - \varrho(\alpha+\beta+1) - \alpha\beta\right],$$

so ist

$$\begin{aligned} f_0(\varrho) &= \varrho(\varrho-1) + \gamma\varrho\,,\\ f_1(\varrho) &= -\varrho(\varrho-1) - \varrho(\alpha+\beta+1) - \alpha\beta\,,\\ f_\nu(\varrho) &= 0\,. \qquad\qquad (\nu = 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

Die determinierende Fundamentalgleichung lautet

$$\varrho(\varrho-1) + \gamma\varrho = 0\,,$$

ihre beiden Wurzeln sind also

$$0,\quad 1-\gamma\,.$$

Es sei r eine dieser Wurzeln, dann lautet die Rekursionsformel für die Koeffizienten der der Differentialgleichung genügenden Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{r+\nu}, \quad c_0 \neq 0,$$

nach den Formeln der Nr. 42 und mit Rücksicht auf die gefundenen Ausdrücke für die $f_\nu(\varrho)$ einfach

$$c_{\nu-1} f_1(r+\nu-1) + c_\nu f_0(r+\nu) = 0. \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

Hieraus folgt

$$\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} = \frac{(r+\nu-1)(r+\nu-2)+(r+\nu-1)(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(r+\nu)(r+\nu-1)+(r+\nu)\gamma},$$

$$= \frac{(r+\nu-1+\alpha)(r+\nu-1+\beta)}{(r+\nu)(r+\nu-1+\gamma)},$$

also ergibt sich, da

$$\frac{c_\nu}{c_0} = \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} \cdot \frac{c_{\nu-1}}{c_{\nu-2}} \cdots \frac{c_1}{c_0},$$

$$(2) \quad c_\nu = \frac{(r+\alpha+\nu-1)(r+\alpha+\nu-2)\cdots(r+\alpha)(r+\beta+\nu-1)(r+\beta+\nu-2)\cdots(r+\beta)}{(r+\nu)(r+\nu-1)\cdots(r+1)(r+\gamma+\nu-1)(r+\gamma+\nu-2)\cdots(r+\gamma)}\, c_0,$$

wo c_0 eine noch willkürliche, aber von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Wir setzen vorläufig voraus, daß die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung, also $1-\gamma$, weder Null noch eine ganze Zahl sei.

Nehmen wir dann zuvörderst $r=0$ und wählen $c_0=1$, so ist

$$(2\text{a}) \quad c_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\nu-1)\cdot 1\cdot 2\cdots \nu},$$

das zum Exponenten 0 gehörige Integral lautet also in der Umgebung von $x=0$:

$$u_{01} = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots.$$

Man bezeichnet nach Gauß diese Reihe durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

und nennt sie die Gaußsche oder hypergeometrische Reihe. Sie findet sich schon bei Euler[1]) und Joh. Friedr. Pfaff[2]) u. z. als Lösung der Differentialgleichung (G); Gauß hat sie in einer 1812 veröffentlichten Abhandlung[3]) losgelöst von der Differentialgleichung untersucht, namentlich ihre Konvergenz geprüft und auch die Art ihrer Abhängigkeit von den α, β, γ, die er das erste, zweite, dritte Element der Reihe nennt[4]), in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen. Nach Gauß hat sich

[1]) a. a. O.

[2]) J. Fr. Pfaff, Disquisitiones analyticae, Helmstadii 1797.

[3]) C. F. Gauß, Werke Bd. III (1866), S. 123ff.

[4]) x wird als das vierte Element bezeichnet.

Kummer[1]) mit der gedachten Reihe beschäftigt, indem er die Differentialgleichung (G) zum Ausgangspunkte nahm. Auf die Differentialgleichung ist Gauß in einer erst aus seinem Nachlasse herausgegebenen Fortsetzung[2]) seiner erwähnten Abhandlung eingegangen. Von neueren Bearbeitungen der Gaußschen Differentialgleichung sind außer der bereits genannten Abhandlung Riemanns und der Fuchsschen Abhandlung im 66. Bande von Crelles Journal, wo die daselbst entwickelten Prinzipien der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die Differentialgleichung (G) als Beispiel angewandt werden, zu nennen eine ausführliche Monographie von Goursat[3]) und die Darstellungen bei Camille Jordan[4]), Picard[5]), Koenigsberger[6]), ferner sei auf die einschlägigen Abschnitte des „Handbuchs der Theorie der linearen Differentialgleichungen" verwiesen, wo auch die übrige Literatur angegeben ist.

Um das zweite Element des zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems aufzustellen, nehmen wir $r = 1 - \gamma$ und wieder $c_0 = 1$. Es ergibt sich dann

$$c_\nu = \frac{(\alpha - \gamma + 1)(\alpha - \gamma + 2)\cdots(\alpha - \gamma + \nu)(\beta - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 2)\cdots(\beta - \gamma + \nu)}{(2 - \gamma)(3 - \gamma)\cdots(\nu + 1 - \gamma)\, 1 \cdot 2 \cdots \nu},$$

wir sehen, daß dieser Ausdruck aus dem vorhin für $r = 0$ gefundenen dadurch hervorgeht, daß an Stelle von

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha - \gamma + 1, & \beta - \gamma + 1, & 2 - \gamma \end{matrix}$$

gesetzt werden. Das gesuchte zweite Element hat also in der Umgebung von $x = 0$ die Form

$$u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma, x).$$

Wir wenden uns nun zur Erledigung der Ausnahmefälle, wo $1 - \gamma$ gleich Null oder einer ganzen Zahl ist.

52. Erledigung der Ausnahmefälle.

Es sei zunächst $1 - \gamma$ eine negative ganze Zahl:

$$1 - \gamma = -g, \quad g > 0,$$

[1]) E. E. Kummer, Programm, Liegnitz 1834; Crelles Journal Bd. 15 (1836), S. 39 ff.

[2]) C. F. Gauß, Werke Bd. III, S. 207.

[3]) E. Goursat, Pariser Thèse (1882), Annales de l'École Normale, Serie II, Bd. 10, Suppl.

[4]) C. Jordan, Cours d'Analyse (2. éd.) III (1896), S. 220.

[5]) E. Picard, Traité d'Analyse III (1896), S. 291.

[6]) L. Koenigsberger, Lehrbuch etc., S. 479.

dann ist $r = 0$ diejenige Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung, deren reeller Teil größer ist als der der anderen, so daß also das zu $r = 0$ gehörige Integral

$$u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bestehen bleibt. Das zweite Integral wird allgemein zu reden einen Logarithmus enthalten, dieser kann aber auch fehlen. Nehmen wir in (2)

$$r = 1 - \gamma = -g\,,$$

so enthält der Nenner von c_ν für $\nu \geqq g$ den verschwindenden Faktor $r + g$; dieser Faktor hebt sich aber weg, wenn α oder β gleich einer der Zahlen

$$1, 2, \ldots, g$$

ist. Das Integral u_{02} behält also für

$$1 - \gamma = -g\,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, g$$

einen Sinn, wenn wir übereinkommen, in jedem Koeffizienten der Reihe

$$F(\alpha - \gamma + 1\,, \;\; \beta - \gamma + 1\,, \;\; 2 - \gamma, x)$$

im Zähler und Nenner die verschwindenden Terme wegzulassen. Damit ist der Fall erledigt, wo für $1 - \gamma = -g$ auch das zweite Integral von Logarithmen frei ist.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung des zweiten Integrals in dem Falle, wo g eine positive ganze Zahl oder Null ist und keine der Größen α, β mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots, g$ übereinstimmt [1]).

Die Größe c_ν, wie sie durch die Gleichung (2) gegeben ist, befriedigt die Rekursionsformel

$$(3) \qquad c_{\nu-1} f_1(r + \nu - 1) + c_\nu f_0(r + \nu) = 0\,; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

wir nehmen vorläufig c_0 willkürlich und r unbestimmt, um dies hervortreten zu lassen, bezeichnen wir den Ausdruck (2) statt durch c_ν durch $c_\nu(r)$ und setzen die mit diesen Ausdrücken als Koeffizienten gebildete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(r)\, x^{r+\nu} = u(x, r)$$

ganz formal in die linke Seite der Differentialgleichung ein:

$$D(u(x, r)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(r)\, D(x^{r+\nu}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(r) x^{\nu+r}[f_0(r + \nu) + x f_1(r + \nu)]$$

$$= c_0(r) x^r f_0(r) + \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu+r}[c_\nu(r) f_0(r + \nu) + c_{\nu-1}(r) f_1(r + \nu - 1)]\,,$$

also ist, da zufolge der Gleichung (3) die Summe auf der rechten Seite verschwindet:

$$(4) \qquad D(u(x, r)) = c_0(r) x^r f_0(r)\,.$$

Wir wenden nun auf diese Identität ein Verfahren an, das auf d'Alembert zurückgeht, der es für die lineare Differentialgleichung mit

[1]) Vgl. G. Frobenius, Crelles Journal Bd. 76 (1873), S. 214 ff.; L. Heffter, Einleitung etc., S. 227 ff.; E. Goursat, a. a. O.

konstanten Koeffizienten angegeben hat [1]), indem wir gleich bemerken, daß die im folgenden rein formal auszuführenden Differentiations- und Substitutionsprozesse zu Ausdrücken führen werden, deren Konvergenz aus unseren allgemeinen Sätzen a posteriori folgt.

Wir wählen das noch willkürliche $c_0(r)$ in folgender Weise:

$$c_0(r) = \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+2g)}{(r+\alpha)\cdots(r+\alpha+g-1)(r+\beta)\cdots(r+\beta+g-1)}$$

und setzen

$$\mathfrak{c}_\nu(r) = \frac{(r+\alpha)\cdots(r+\alpha+\nu-1)(r+\beta)\cdots(r+\beta+\nu-1)}{(r+1)\cdots(r+\nu)(r+g+1)\cdots(r+g+\nu)}, \quad (\nu=1,2,\ldots)$$

$$\mathfrak{c}_0(r) = 1,$$

dann ist offenbar

$$c_{g+\nu}(r) = \mathfrak{c}_{g+\nu}(r)c_0(r) = \mathfrak{c}_\nu(r+g) \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

und folglich

$$u(x,r) = c_0(r)x^r\sum_{\nu=0}^{g}\mathfrak{c}_\nu(r)x^\nu + \sum_{\nu=g+1}^{\infty}c_\nu(r)x^{r+\nu}$$
$$= c_0(r)x^r\sum_{\nu=0}^{g}\mathfrak{c}_\nu(r)x^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{c}_\nu(r+g)x^{r+\nu+g}.$$

Nun ist

$$f_0(r) = r(r-1)+\gamma r = r(r+g),$$

die rechte Seite der Identität (4) enthält demnach, wenn wir für $c_0(r)$ den angegebenen Ausdruck einsetzen, den Faktor $(r+g)^2$; es verschwindet folglich für $r=-g$ nicht nur diese rechte Seite selbst, sondern auch ihre partielle Ableitung nach r, d. h. es ist rein formal

$$D\left[\frac{\partial u(x,r)}{\partial r}\right]_{r=-g} = 0.$$

Nun ergibt sich durch gliedweise Differentiation nach r

$$\frac{\partial u(x,r)}{\partial r} = u(x,r)\log x + x^r c_0(r)\sum_{\nu=0}^{g}\mathfrak{c}'_\nu(r)x^\nu$$
$$+ x^r c'_0(r)\sum_{\nu=0}^{g}\mathfrak{c}_\nu(r)x^\nu + x^r\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{c}'_\nu(r+g)x^{\nu+g},$$

wo die Akzente Ableitungen nach r bedeuten. Für $r=-g$, wofür zufolge der getroffenen Dispositionen alles endlich bleibt, ist aber

$$u(x,-g) = \sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(-g)x^{-g+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\mathfrak{c}_\nu(0)x^\nu = F(\alpha,\beta,\gamma,x);$$

setzen wir ferner

$$c'_0(-g)\{x^{1-\gamma}+\mathfrak{c}_1(-g)x^{2-\gamma}+\cdots+\mathfrak{c}_{\gamma-2}(-g)x^{-1}+\mathfrak{c}_{\gamma-1}(-g)\}$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\mathfrak{c}'_\nu(0)x^\nu = F_1(\alpha,\beta,\gamma,x),$$

[1]) J. d'Alembert, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1748, S. 283ff.

so folgt

$$\left[\frac{\partial u(x, r)}{\partial r}\right]_{r=-g} = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x)\log x\,,$$

und dies ist die explizite Form des zweiten Integrals u_{02}. Die Konvergenz der Reihe $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist nach den allgemeinen Erörterungen der Nr. 42 als gesichert anzusehen. Die Koeffizienten von $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ lauten:

$$c_0'(-g) = \lim_{r\to -g}(r+g)^{-1}c_0(r)$$

$$= (-1)^{\gamma}\frac{(\gamma-1)!(\gamma-2)!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-\gamma+1)(\beta-1)\cdots(\beta-\gamma+1)}\,,$$

$$c_\nu'(0) = c_\nu(0)\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha+\nu-1}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+1}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\beta+\nu-1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma+1}-\cdots-\frac{1}{\gamma+\nu-1}\right].$$

Für $g=0$ ist $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe.

Es bleibt nunmehr noch der Fall, wo $1-\gamma$ eine positive ganze Zahl:

$$1-\gamma = h$$

ist. Dieser Fall läßt sich auf den eben behandelten zurückführen, indem man in die Differentialgleichung

$$u = x^{1-\gamma}v$$

einsetzt. v genügt dann einer Gaußschen Differentialgleichung, worin an die Stelle von

$$\begin{matrix} \alpha & , & \beta & , & \gamma \\ \alpha+1-\gamma, & & \beta+1-\gamma, & & 2-\gamma \end{matrix}$$

getreten sind. Die Differenz der Wurzeln der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung ist jetzt $\gamma-1=-h$, also eine negative ganze Zahl. Wenden wir die vorhin erlangten Resultate auf die Differentialgleichung für v an und übertragen sie dann auf u, so ergibt sich:

Wenn $\alpha+1-\gamma$ oder $\beta+1-\gamma$ mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots, h$, also α oder β mit einer der Zahlen

$$1-h,\ 2-h, \ldots,\ 0$$

übereinstimmt, so bleiben die beiden Integrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),\quad x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma, x)$$

bestehen, falls man übereinkommt, im Zähler und Nenner jedes Koeffizienten von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die verschwindenden Terme wegzulassen. In jedem anderen Falle bleibt das Integral

$$u_{02} = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma, x)$$

bestehen und an die Stelle von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ tritt:

$$\begin{aligned} u_{01} = x^{1-\gamma}[&F_1(\alpha + 1 - \gamma, \ \beta + 1 - \gamma, \ 2 - \gamma, x) \\ &+ F(\alpha + 1 - \gamma, \ \beta + 1 - \gamma, \ 2 - \gamma, x) \log x]. \end{aligned}$$

Damit ist für $x = 0$ das kanonische Fundamentalsystem in jedem Falle aufgestellt; wir fassen die Resultate in dem folgenden Schema zusammen:

1) $1 - \gamma$ weder gleich Null noch einer ganzen Zahl:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \ \beta + 1 - \gamma, \ 2 - \gamma, x). \end{cases}$$

2) $1 - \gamma = -g$, g gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl:

a) eine der Größen α, β gleich einer der Zahlen $1, 2, \ldots, g$, $g > 0$; die Reihen (I) behalten ihren Sinn, wenn man die verschwindenden Terme im Zähler und Nenner der Koeffizienten wegläßt;

b) $\alpha, \beta \neq 1, 2, \ldots, g$, $\quad g \geqq 0$:

$$\begin{aligned} u_{01} &= F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ u_{02} &= F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x. \end{aligned}$$

3) $1 - \gamma = h$, h gleich einer positiven ganzen Zahl:

a) eine der Größen α, β gleich einer der Zahlen $1 - h, 2 - h, \ldots, 0$; die Reihen (I) behalten ihren Sinn unter der für 2a) getroffenen Festsetzung;

b) $\alpha, \beta \neq 1 - h, 2 - h, \ldots, 0$:

$$\begin{aligned} u_{01} &= x^{1-\gamma}[F_1(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ &\qquad + F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \log x], \\ u_{02} &= x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x). \end{aligned}$$

53. Kanonische Fundamentalsysteme für $x = 1$, $x = \infty$.

Die Behandlung der singulären Punkte $x = 1$, $x = \infty$ läßt sich in einfacher Weise auf die bereits erledigte des Punktes $x = 0$ zurückführen

Setzen wir zunächst bei $x = 1$

$$\xi = 1 - x$$

und führen in (G) ξ als neue unabhängige Variable ein, so verwandelt sich (G) in eine Gaußsche Differentialgleichung mit der unabhängigen Veränderlichen ξ, wo an Stelle von

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \alpha + \beta + 1 - \gamma \end{matrix}$$

treten. Wir erhalten folglich für $\xi = 0$ oder $x = 1$ das kanonische Fundamentalsystem u_{11}, u_{12}, wenn $\gamma - \alpha - \beta$ weder Null noch eine ganze Zahl ist, in der Form:

$$u_{11} = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$
$$u_{12} = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x).$$

Die Modifikationen, die für den Fall, wo $\gamma - \alpha - \beta$ gleich Null oder einer ganzen Zahl ist, eintreten, können aus dem für $x = 0$ aufgestellten Schema ebenso einfach abgelesen werden.

Bei $x = \infty$ setzen wir

$$x = \frac{1}{t},$$

dann wird u als Funktion von t keiner Gaußschen Differentialgleichung genügen. Um zu einer Gaußschen Differentialgleichung zu gelangen, setzen wir

$$w = t^{-\alpha} u,$$

dann befriedigt w eine Gaußsche Differentialgleichung mit der unabhängigen Veränderlichen t, worin an Stelle von

$$\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & 1 + \alpha - \gamma, & 1 + \alpha - \beta \end{array}$$

treten. Wir haben folglich, wenn $\beta - \alpha$ weder gleich Null noch gleich einer ganzen Zahl ist, für $t = 0$ das Fundamentalsystem:

$$w_{01} = F(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta, t),$$
$$w_{02} = t^{\beta - \alpha} F(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha, t)$$

und somit für die ursprüngliche Differentialgleichung das zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem:

$$u_{\infty 1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} F\left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{x}\right),$$
$$u_{\infty 2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{x}\right).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Darstellungen in den Ausnahmefällen, wo $\beta - \alpha$ eine ganze Zahl oder Null ist.

54. Konvergenzbereiche der aufgestellten Reihenentwicklungen.

Aus der allgemeinen Theorie folgt, daß jede Funktion, die der Differentialgleichung (G) genügt, keine anderen singulären Stellen besitzt als $0, 1, \infty$. Das Integral u_{01} ist überdies in der Umgebung von $x = 0$ holomorph (vorausgesetzt, daß $1 - \gamma$ keine positive ganze Zahl ist), die für dieses Integral gefundene Reihenentwicklung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

konvergiert folglich innerhalb eines um $x = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, der sich bis zum nächsten singulären Punkte, d. h. bis zu $x = 1$ hin erstreckt.

Die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist also für Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins, konvergent.

Das läßt sich auch direkt aus der expliziten Form der Koeffizienten erschließen. Nach Gleichung (2a) (S. 211) ist nämlich der Quotient des $(\nu + 1)$ten Gliedes der Gaußschen Reihe durch das ν-te Glied gleich

$$\frac{(\alpha + \nu)(\beta + \nu)}{(\nu + 1)(\gamma + \nu)} x .$$

Dieser Quotient nähert sich für ins Unendliche wachsendes ν bei willkürlichen Werten der α, β, γ dem Grenzwerte x; nach dem d'Alembertschen Konvergenzkriterium ist die Reihe daher konvergent, wenn $|x| < 1$, divergent, wenn $|x| > 1$.

Die Frage der Konvergenz der Gaußschen Reihe auf der Peripherie des Konvergenzkreises hat Gauß in der ersten (von ihm selbst veröffentlichten) Abhandlung über diese Reihe für reelle Werte der α, β, γ untersucht. Weierstraß[1]) hat die Gaußsche Methode auf den Fall komplexer Werte der α, β, γ ausgedehnt. Es ergibt sich in Übereinstimmung mit dem in der Nr. 47 angeführten Satze von Thomé, daß

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

für Werte von x, deren absoluter Betrag gleich Eins ist, ausgenommen den Wert $x = 1$, konvergent ist, falls der reelle Teil von $\gamma - \alpha - \beta$ größer ist als -1; wenn der reelle Teil von $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist, so konvergiert die Reihe auch noch für $x = 1$.

Da für unbestimmte α, β, γ (wo also keiner der „Ausnahmefälle" eintritt) die für $u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ aufgestellten Reihenentwicklungen sämtlich durch den Algorithmus der Gaußschen Reihe gegeben werden, folgen nun unmittelbar die Konvergenzbezirke dieser Reihen. Will man auch die Ausnahmefälle mit umfassen, so bedient man sich am einfachsten des Satzes, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe bis zu dem dem Mittelpunkte am nächsten gelegenen singulären Punkte reicht. Man erkennt unmittelbar, daß die im folgenden zusammengestellten Konvergenzbereiche vorhanden sind:

$$\begin{array}{lll} u_{01}, u_{02} & \text{konvergieren für} & |x| < 1, \\ u_{11}, u_{12} & \quad\text{,,} \qquad\text{,,} & |1 - x| < 1, \\ u_{\infty 1}, u_{\infty 2} & \quad\text{,,} \qquad\text{,,} & |x| > 1. \end{array}$$

Da diese Konvergenzbereiche zusammengenommen die ganze x-Ebene, zum Teil auch mehrfach, überdecken, sind wir für die Gaußsche Differentialgleichung in der glücklichen Lage, für jeden x-Wert wenigstens ein Fundamentalsystem durch unsere Reihenentwicklungen dargestellt zu haben. Um die Integration in dem in der Nr. 47 präzisierten Sinne als

[1]) K. Weierstraß, Crelles Journal, Bd. 51 (1856), S. 1; Werke I, 1894, S. 173.

vollständig erledigt betrachten zu können, bedarf es nur noch der Kenntnis der einem beliebigen Fundamentalsysteme u_1, u_2 zugehörigen Fundamentalsubstitutionen.

55. Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen.

Wir setzen, um die Vorstellung zu fixieren, voraus, daß das Fundamentalsystem u_1, u_2 durch seine Anfangswerte in einem Punkte der x-Ebene gegeben sei, der dem Konvergenzbereiche der Reihen $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ angehört, also außerhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius Eins beschriebenen Kreises liegt. Dann sind also die Ausdrücke der (u_1, u_2) durch $(u_{\infty 1}, u_{\infty 2})$ als bekannt anzusehen und es handelt sich um die Aufstellung der Fundamentalsubstitutionen für dieses letztere Fundamentalsystem. Dabei ist zu beachten, daß für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{\infty 1} & u'_{\infty 1} \\ u_{\infty 2} & u'_{\infty 2} \end{pmatrix}$$

als Integralmatrix zu gelten hat. Wird diese Matrix von links her mit der konstanten Matrix C komponiert, so verwandeln sich $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ in

$$c_{11} u_{\infty 1} + c_{12} u_{\infty 2}, \quad c_{21} u_{\infty 1} + c_{22} u_{\infty 2};$$

wir sagen dann kurz, daß $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ die lineare Substitution C erfahren haben. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall unbestimmter α, β, γ, schließen also das Auftreten der Ausnahmefälle aus.

Wir denken uns, wie allgemein vorgesehen, die Punkte $x = 0, 1, \infty$ durch kleine Kurven ausgeschlossen und $0, 1$ mit ∞ durch die beiden Querschnitte l_0, l_1 verbunden, die wir z. B. so legen können, daß l_0 von 0 nach $-\infty$ längs der negativen reellen Achse, l_1 von 1 nach $+\infty$ längs der positiven reellen Achse verläuft. In der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T sind die durch analytische Fortsetzung der

$$u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$$

innerhalb T entstehenden Funktionszweige eindeutig und endlich, wir bezeichnen sie mit denselben Buchstaben wie die Reihen, aus denen sie entsprungen sind, und wollen ebenso unter $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ nicht allein die für $|x| < 1$ konvergierende Reihe, sondern auch den aus dieser Reihe durch analytische Fortsetzung innerhalb T entspringenden und daselbst eindeutigen Funktionszweig verstehen. Die mehrdeutigen Faktoren, die in der Darstellung der sechs kanonischen Integrale auftreten, fixieren wir durch die Festsetzung, daß bei Fortsetzung innerhalb T

$$\lim_{x \to 1} x^{1-\gamma} = \lim_{x \to 0} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} = \lim_{x \to 1} x^{-\alpha} = \lim_{x \to 1} x^{-\beta} = 1$$

sei.

Es handelt sich nun um die Herstellung der Substitutionen, die $(u_{\infty 1}, u_{\infty 2})$ erfährt, wenn x die Querschnitte l_0, l_1 im positiven Sinne überschreitet; wir bezeichnen diese mit

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(0)} & \beta_{12}^{(0)} \\ \beta_{21}^{(0)} & \beta_{22}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

so daß also $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ beim Überschreiten von l_0 im positiven Sinne in

$$\beta_{11}^{(0)} u_{\infty 1} + \beta_{12}^{(0)} u_{\infty 2}, \quad \beta_{21}^{(0)} u_{\infty 1} + \beta_{22}^{(0)} u_{\infty 2}$$

und beim Überschreiten von l_1 im positiven Sinne in

$$\beta_{11}^{(1)} u_{\infty 1} + \beta_{12}^{(1)} u_{\infty 2}, \quad \beta_{21}^{(1)} u_{\infty 1} + \beta_{22}^{(1)} u_{\infty 2}$$

übergehen. Ein positiver Umlauf um $x = \infty$, bei dem zuerst der Querschnitt l_0, dann der Querschnitt l_1, beide im negativen Sinne überschritten werden, verwandelt $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ in

$$e^{2\pi i\alpha} u_{\infty 1}, \quad e^{2\pi i\beta} u_{\infty 2};$$

bezeichnen wir also diese Substitution durch

$$\Omega_\infty = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix},$$

so ist (vgl. Nr. 47, Gleichung (67), S. 199)

$$(5) \qquad \Omega_\infty = \Omega_0^{-1} \Omega_1^{-1}.$$

Die inverse Matrix von Ω_∞ läßt sich offenbar so zusammensetzen:

$$(6) \qquad \Omega_\infty^{-1} = \Omega_1 \Omega_0;$$

komponieren wir hier beiderseits mit Ω_0^{-1} von rechts her, so ergibt sich

$$(7) \qquad \Omega_1 = \Omega_\infty^{-1} \Omega_0^{-1};$$

von dieser Darstellung von Ω_1 werden wir sogleich Gebrauch zu machen haben.

Wir schreiben die zwischen ∞ und 0 einerseits, ∞ und 1 andererseits vermittelnden Übergangssubstitutionen wie folgt:[1])

$$(8) \qquad \begin{cases} u_{\infty 1} = a_0 u_{01} + b_0 u_{02}, \\ u_{\infty 2} = c_0 u_{01} + \partial_0 u_{02}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} u_{\infty 1} = a_1 u_{11} + b_1 u_{12}, \\ u_{\infty 2} = c_1 u_{11} + \partial_1 u_{12}. \end{array}$$

Wenn dann x den Querschnitt l_1 einmal im positiven Sinne überschreitet, so verwandeln sich u_{11}, u_{12} in

$$u_{11}, \; e^{2\pi i(\gamma - \alpha - \beta)} u_{12},$$

also $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ in

$$(9) \qquad \begin{cases} a_1 u_{11} + b_1 e^{2\pi i(\gamma - \alpha - \beta)} u_{12}, \\ c_1 u_{11} + \partial_1 e^{2\pi i(\gamma - \alpha - \beta)} u_{12}. \end{cases}$$

[1]) Vgl. für das Folgende: Riemann, Werke (2. Aufl.) S. 78ff.; Picard, Traité III (1908) S. 315ff.

Nach Gleichung (7) ist diese einmalige Überschreitung von l_1 im positiven Sinne gleichwertig einem Wege, der erst einen Umlauf um $x = \infty$ im negativen Sinne vollzieht und dann l_0 ebenfalls im negativen Sinne durchquert. Bei dem Umlauf um $x = \infty$ im negativen Sinne multiplizieren sich $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ beziehungsweise mit

$$e^{-2\pi i \alpha}, \quad e^{-2\pi i \beta},$$

bei Durchquerung von l_0 im negativen Sinne multiplizieren sich ferner u_{01}, u_{02} beziehungsweise mit

$$1, \; e^{-2i\pi(1-\gamma)} = e^{2\pi i \gamma},$$

durch Anwendung der ersten der Übergangssubstitutionen (8) erhalten wir folglich die Werte, in die $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ auf dem geschilderten Wege übergeführt werden, in der Form

$$(10) \qquad \begin{cases} e^{-2\pi i \alpha}(a_0 u_{01} + b_0 e^{2i\pi\gamma} u_{02}), \\ e^{-2\pi i \beta}(c_0 u_{01} + \partial_0 e^{2\pi i\gamma} u_{02}). \end{cases}$$

Diese müssen aber mit den Werten (9) übereinstimmen, wir haben also die Gleichungen

$$(11) \qquad a_1 u_{11} + b_1 e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} u_{12} = e^{-2\pi i \alpha}(a_0 u_{01} + b_0 e^{2\pi i\gamma} u_{02}),$$

$$(12) \qquad c_1 u_{11} + \partial_1 e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} u_{12} = e^{-2\pi i \beta}(c_0 u_{01} + \partial_0 e^{2\pi i\gamma} u_{02}),$$

denen wir noch die aus (8) folgenden Gleichungen

$$(13) \qquad a_1 u_{11} + b_1 u_{12} = a_0 u_{01} + b_0 u_{02},$$

$$(14) \qquad c_1 u_{11} + \partial_1 u_{12} = c_0 u_{01} + \partial_0 u_{02}$$

an die Seite stellen. Eliminieren wir zwischen den Gleichungen (11), (13) einerseits und (12), (14) andererseits erst u_{11}, dann u_{12} und vergleichen die so sich ergebenden Ausdrücke jeder dieser beiden Größen miteinander, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = u_{01}[a_0\partial_1(e^{-2\pi i\alpha} - 1) - c_0 b_1(e^{-2\pi i\beta} - 1)] \\ + u_{02}[b_0\partial_1(e^{2\pi i(\gamma-\alpha)} - 1) - \partial_0 b_1(e^{2\pi i(\gamma-\beta)} - 1)], \\ 0 = u_{01}[a_0 c_1(e^{-2\pi i(\gamma-\beta)} - 1) - c_0 a_1(e^{-2\pi i(\gamma-\alpha)} - 1)] \\ + u_{02}[b_0 c_1(e^{2\pi i\beta} - 1) - \partial_0 a_1(e^{2\pi i\alpha} - 1)]. \end{aligned}$$

Dies sind homogene lineare Relationen mit konstanten Koeffizienten zwischen u_{01}, u_{02}, da aber u_{01}, u_{02} ein Fundamentalsystem bilden, sind solche Relationen nur möglich, wenn die einzelnen Koeffizienten verschwinden. Wir erhalten also vier Gleichungen, die wir mit Rücksicht darauf, daß

$$e^{-2\pi i\alpha} - 1 = e^{-\pi i\alpha}(e^{-\pi i\alpha} - e^{\pi i\alpha}) = -2i \cdot e^{-\pi i\alpha}\sin\pi\alpha$$

usw. ist, in der Form schreiben können:

$$(15) \qquad \frac{a_0}{c_0} = \frac{b_1\, e^{-\pi i\beta}\sin\pi\beta}{\partial_1\, e^{-\pi i\alpha}\sin\pi\alpha} = \frac{a_1\, e^{-\pi i\beta}\sin(\gamma-\alpha)\pi}{c_1\, e^{-\pi i\alpha}\sin(\gamma-\beta)\pi},$$

$$(16) \qquad \frac{b_0}{\partial_0} = \frac{b_1\, e^{-\pi i\beta}\sin(\gamma-\beta)\pi}{\partial_1\, e^{-\pi i\alpha}\sin(\gamma-\alpha)\pi} = \frac{a_1\, e^{-\pi i\beta}\sin\pi\beta}{c_1\, e^{-\pi i\alpha}\sin\pi\alpha}.$$

Nun ist (vgl. Nr. 47, Gleichung (65), S. 198)

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & \partial_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & \partial_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

und da, wenn wir

$$a_1\partial_1 - b_1 c_1 = \delta$$

setzen,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & \partial_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial_1}{\delta} & -\frac{b_1}{\delta} \\ -\frac{c_1}{\delta} & \frac{a_1}{\delta} \end{vmatrix}$$

ist, so ergibt sich

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} \frac{a_1\partial_1}{\delta} - e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\frac{c_1 b_1}{\delta} & \frac{a_1 b_1}{\delta}\left(e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} - 1\right) \\ \frac{c_1\partial_1}{\delta}\left(1 - e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right) & -\frac{b_1 c_1}{\delta} + e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\frac{a_1\partial_1}{\delta} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir nun

$$\frac{a_1}{c_1} = \lambda_1, \quad \frac{b_1}{\partial_1} = \lambda_2,$$

so ist

$$\frac{a_1\partial_1}{\delta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{c_1 b_1}{\delta} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{a_1 b_1}{\delta} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{c_1\partial_1}{\delta} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

d. h. die Koeffizienten der Substitution Ω_1 hängen nur von λ_1, λ_2 und bekannten Größen ab. Nun ist aber z. B. vermöge der Gleichung (15)

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sin(\gamma - \alpha)\pi \cdot \sin \pi\alpha}{\sin(\gamma - \beta)\pi \cdot \sin \pi\beta},$$

es handelt sich also nur noch um die Bestimmung der Größe λ_1.

Zu diesem Ende setzen wir in der zweiten der Übergangssubstitutionen (8) für x den Wert 1 ein. Dann ist

$$\lim_{x\to 1} u_{11} = 1,$$

und wenn wir voraussetzen, daß der reelle Teil des Exponenten $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist,

$$\lim_{x\to 1} u_{12} = 0;$$

ferner ist

$$\lim_{x\to 1} u_{\infty 1} = F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1),$$
$$\lim_{x\to 1} u_{\infty 2} = F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1),$$

bezeichnen wir also den Wert, den der durch die Gaußsche Reihe

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ determinierte, innerhalb T' eindeutige Funktionszweig im Punkte $x = 1$ annimmt [1]), mit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = f(\alpha, \beta, \gamma),$$

so folgt durch Einsetzen von $x = 0$ in die gedachte Übergangssubstitution

$$a_1 = f(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1),$$
$$c_1 = f(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1),$$

wodurch also λ_1 auf die Funktion $f(\alpha, \beta, \gamma)$ zurückgeführt ist. Mit dieser Funktion hat sich Gauß (a. a. O.) beschäftigt und gezeigt, daß sie sich durch die sogenannten Eulerschen Integrale ausdrücken läßt; wir kommen auf diese Darstellung nachher zurück. Sehen wir jene Funktion vorläufig als bekannt an, so ist also λ_1 bekannt, und somit auch die Fundamentalsubstitution Ω_1 bekannt.

Durch Ω_1 und Ω_∞ läßt sich aber die Fundamentalsubstitution Ω_0 sofort darstellen, es folgt nämlich aus (6)

$$\Omega_0 = \Omega_1^{-1}\,\Omega_\infty^{-1}.$$

Damit ist das Integrationsproblem für die Gaußsche Differentialgleichung im Falle unbestimmter α, β, γ als gelöst anzusehen [2]). Genauer gesprochen ist es auf die Bestimmung von $f(\alpha, \beta, \gamma)$ zurückgeführt.

56. Multiplikator. Adjungierte Differentialgleichung. Identität von Lagrange.

Die Bestimmung von $f(\alpha, \beta, \gamma)$ gelingt am einfachsten, wenn man sich einer Darstellung der Lösungen der Gaußschen Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral bedient, die zuerst von Euler angegeben worden ist. Um zu dieser Darstellung zu gelangen, müssen wir einige Betrachtungen vorausschicken, die sich auf beliebige lineare Differentialgleichungen beziehen, und die auch für andere Fragen von Wichtigkeit sind.

Wir nehmen die Differentialgleichung in der Form

$$\text{(I)} \qquad P_x(u) = p\,\frac{d^2u}{dx^2} + q\,\frac{du}{dx} + ru = 0;$$

der Charakteristik, die die linke Seite dieser Gleichung bezeichnet, haben wir den Index x angehängt, um auch die unabhängige Variable der Differentialgleichung hervortreten zu lassen.

[1]) Vgl. z. B. L. W. Thomé, Crelles Journal, Bd. 87 (1879), S. 222.

[2]) In bezug auf andere Formeln und für die einschlägige Literatur werde auf Bd. I des Handbuches von L. Schlesinger verwiesen.

Lagrange[1]) hat zuerst die Frage behandelt, wie man eine Funktion v von x bestimmen kann, mit der die linke Seite $P_x(u)$ der Differentialgleichung (I) multipliziert, die Ableitung eines homogenen linearen Differentialausdrucks erster Ordnung wird, also

$$(\mathrm{II}) \qquad vP_x(u) = \frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du}{dx} + \beta(x)\,u\right).$$

Die Wichtigkeit einer solchen Funktion, die man einen Multiplikator von (I) nennt, liegt auf der Hand. Denn ist ein solcher Multiplikator gefunden, so können wir an Stelle von (I) die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du}{dx} + \beta(x)u\right) = 0\,,$$

oder integriert

$$\alpha(x)\frac{du}{dx} + \beta(x)u = \text{const.}$$

betrachten; diese letztere Gleichung ist aber, wie in der Nr. 16 gezeigt wurde, stets durch Quadraturen zu integrieren. Die Kenntnis eines Multiplikators ermöglicht also die Integration der Differentialgleichung (I) durch Quadraturen.

Um v zu bestimmen, integrieren wir die Gleichung (II) nach x:

$$\int vP_x(u)\,dx = \alpha(x)\frac{du}{dx} + \beta(x)\,u\,,$$

und untersuchen nun das linkerhand stehende Integral

$$\int vP_x(u)dx = \int v(pu'' + qu' + ru)dx$$

unter der Annahme, daß v und u beliebige Funktionen von x sind. (Die Akzente bedeuten Ableitungen nach x.)

Bedeutet ω eine Funktion von x, so folgt durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration

$$\int \omega u''\,dx = \omega u' - \int u'\omega'\,dx = \omega u' - \omega' u + \int u\omega''\,dx\,.$$

Wenden wir diese Formel und die partielle Integration auf das obige Integral an, so wird

$$\int vP_x(u)dx = \int(vp)\,u''\,dx + \int(vq)\,u'\,dx + \int(vr)\,udx$$

$$= p(vu' - uv') + uv(q - p') + \int u\left\{\frac{d^2(vp)}{dx^2} - \frac{d(vq)}{dx} + vr\right\}dx\,.$$

Der im dritten Gliede unter dem Integralzeichen auftretende Klammerausdruck ist ein homogener linearer Differentialausdruck zweiter

[1]) Miscell. Taurin. III, (1762/66), S. 179; vgl. für das Folgende: Fuchs, Crelles Journal, Bd. 76 (1874), S. 177, Werke I, S. 415; Frobenius, Crelles Journal, Bd. 76 (1873), 77 (1874), 80 (1875), 85 (1878); siehe auch L. Schlesinger, Handbuch I, S. 53, wo weitere Literaturangaben zu finden sind.

Ordnung für v, dessen Koeffizienten sich in einfacher Weise aus den Koeffizienten von $P_x(u)$ bilden lassen; wir setzen

$$\overline{P}_x(v) = \frac{d^2(vp)}{dx^2} - \frac{d(vq)}{dx} + vr = pv'' + (2p' - q)v' + (p'' - q' + r)v$$

und

$$p(vu' - uv') + (q - p')uv = P_x(u, v) ,$$

dann lautet die obige Gleichung

$$\int vP_x(u)dx = P_x(u, v) + \int u\overline{P}_x(v)dx ,$$

oder differentiiert

$$vP_x(u) - u\overline{P}_x(v) = \frac{d}{dx} P_x(u, v) ;$$

diese Gleichung nennt man die Identität von Lagrange.

Der Ausdruck $P_x(u, v)$ ist in bezug auf u ein homogener linearer Differentialausdruck erster Ordnung; v wird also ein Multiplikator von (I) sein, wenn

$$\overline{P}_x(v) = 0$$

ist. Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für v, die man nach Fuchs die adjungierte von (I) nennt. Auch heißt $\overline{P}_x(v)$ der zu $P_x(u)$ adjungierte Differentialausdruck, und $P_x(u, v)$, das sowohl in bezug auf u als auch in bezug auf v homogen, linear und von der ersten Ordnung ist, wird der begleitende bilineare Differentialausdruck genannt (Frobenius).

Also ist v ein Multiplikator von (I)

$$P_x(u) = 0 ,$$

wenn v eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung ist; umgekehrt zeigt die Lagrangesche Identität sofort, daß u ein Multiplikator von

$$\overline{P}_x(v) = 0$$

ist, wenn u der Differentialgleichung (I) genügt. Die Beziehung zwischen einer Differentialgleichung und ihrer adjungierten ist also eine gegenseitige, was ja übrigens schon aus der Symmetrie der Lagrangeschen Identität erhellt.

Das Vorstehende genügt für die Zwecke, die wir augenblicklich verfolgen; an späterer Stelle (Nr. 75) kommen wir auf diese Betrachtungen noch einmal zurück.

57. Integration der Gaußschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale. Vertauschung von Parameter und Argument. Eulersche Transformierte.

Wie bereits bemerkt, hat Euler[1]) die Lösungen einer Gaußschen Differentialgleichung in der Form von bestimmten Integralen dargestellt, die zwischen konstanten Grenzen erstreckt die unabhängige Variable x als Parameter enthalten. Wenn wir diese Darstellung im Gebiete der komplexen Variabeln verwerten wollen, so müssen wir ein solches Integral statt zwischen festen Grenzen, längs einer geschlossenen Kurve erstrecken; dann haben die hier in Betracht kommenden Integrale die Gestalt:

$$\int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}\,dz,$$

wo $w(z)$ eine geeignet zu wählende Funktion von z, ξ eine Konstante, L einen geeignet gewählten geschlossenen Weg in der z-Ebene bedeutet.

Diese Art von Integralen bietet eine in die Augen fallende Analogie mit denjenigen dar, durch die man in der Potentialtheorie Lösungen der sogenannten Laplaceschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0$$

darzustellen pflegt. Hat man z. B. eine über einen gewissen Raum C verteilte Masse, die nach dem Newtonschen Gesetze auf einen außerhalb dieses Raumes gelegenen Massenpunkt mit der Masse 1 und den Koordinaten ξ, η, ζ wirkt, so wird das Potential jener Masse auf diesen Punkt durch das Integral

$$\iiint\limits_{(C)} \frac{w(x,y,z)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}\,dx\,dy\,dz$$

dargestellt, wo dann $w(x, y, z)$ die Dichtigkeit der Masse im Punkte (x, y, z) des Raumes C bedeutet. Wir haben also auch hier eine Funktion w des Ortes, auf den sich die Integration bezieht, multipliziert mit einer Potenz (der (-1)ten) des Abstandes jenes Ortes von dem „Aufpunkte" (ξ, η, ζ), genau so wie in dem oben angegebenen Integrale. Wir werden darum auch in dem letzteren die Funktion $w(z)$ die Dichtigkeitsfunktion nennen und jetzt die Aufgabe behandeln, diese Funktion und den Integrationsweg L so zu bestimmen, daß jenes Integral der Gaußschen Differentialgleichung Genüge leistet.

[1]) L. Euler, Institutiones calculi integralis II (1769), Cap. XI, Opera, ser. I, vol. 12, S. 246ff.; vgl. für das Folgende: L. Schlesinger, Handbuch, Bd. II, 1, XII. Abschnitt, wo auch die einschlägige Literatur zusammengestellt ist.

Wir bezeichnen die linke Seite der Gaußschen Differentialgleichung mit

$$D_x(u) = x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{du}{dx} - \alpha\beta u$$

und setzen nun hierin

(17) $$u = \int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}dz\,.$$

Indem wir die Differentiationen von u nach x unter dem Integralzeichen vollziehen, finden wir

(18) $$D_x\Big(\int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}dz\Big) = \int_L w(z)D_x((z-x)^{\xi-1})\,dz\,.$$

Wir formen zunächst den Ausdruck

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = x(1-x)(\xi-1)(\xi-2)(z-x)^{\xi-3}$$
$$-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x](\xi-1)(z-x)^{\xi-2} - \alpha\beta(z-x)^{\xi-1}$$

um, indem wir seine von x abhängigen Koeffizienten nach Potenzen von $z-x$ entwickeln. Es ist:

$$x(1-x) = z(1-z) - (1-2z)(z-x) - (z-x)^2\,,$$
$$\gamma - (\alpha+\beta+1)x = \gamma - (\alpha+\beta+1)z + (\alpha+\beta+1)(z-x)\,;$$

dies eingesetzt und nach Potenzen von $(z-x)$ geordnet gibt

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = (\xi-1)(\xi-2)(z-x)^{\xi-3}(z-z^2)$$
$$+(\xi-1)(z-x)^{\xi-2}[-(\xi-2)(1-2z) - \gamma + (\alpha+\beta+1)z]$$
$$+(z-x)^{\xi-1}[-(\xi-1)(\xi-2) - (\xi-1)(\alpha+\beta+1) - \alpha\beta]\,.$$

Nun ist:

$$(\xi-1)(\xi-2)(z-x)^{\xi-3} = \frac{d^2(z-x)^{\xi-1}}{dz^2}\,,$$
$$(\xi-1)(z-x)^{\xi-2} = \frac{d(z-x)^{\xi-1}}{dz}\,,$$

setzen wir also

(19) $$\Delta_z(v) = z(1-z)\frac{d^2v}{dz^2}$$
$$+[-(\xi-2)(1-2z) - \gamma + (\alpha+\beta+1)z]\frac{dv}{dz}$$
$$-[(\xi-1)(\xi-2) + (\xi-1)(\alpha+\beta+1) + \alpha\beta]v\,,$$

so besteht die identische Gleichung

(20) $$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \Delta_z((z-x)^{\xi-1})\,.$$

Der Ausdruck $\Delta_z(v)$ ist selbst ein homogener linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung für v als Funktion von z mit in z rationalen Koeffizienten; die Differentialgleichung

(21) $$\Delta_z(v) = 0$$

ist zwar keine Gaußsche, aber sie gehört zum Fuchsschen Typus und ihre singulären Punkte sind $0, 1, \infty$. Die Identität (20) nennen wir den

Satz von der Vertauschung des Parameters mit dem Argumente, auf der linken Seite ist nämlich z der Parameter und x das Argument, auf der rechten Seite dagegen x der Parameter und z das Argument.

Nach Anwendung des Vertauschungssatzes auf die rechte Seite der Gleichung (18) lautet diese Gleichung:

$$(22)\qquad D_x\Big(\int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}dz\Big)=\int_L w(z)\,\varDelta_z((z-x)^{\xi-1})\,dz\,,$$

und nun liegt es nahe, zur Umformung der rechten Seite die Lagrangesche Identität heranzuziehen.

Bezeichnen wir mit $\overline{\varDelta}_z(w)$ den adjungierten Differentialausdruck von $\varDelta_z(v)$ und mit $\varDelta_z(v, w)$ den begleitenden bilinearen Ausdruck, so ist

$$w\varDelta_z(v)-v\overline{\varDelta}_z(w)=\frac{d}{dz}\varDelta_z(v,w)\,.$$

Nehmen wir hierin

$$v=(z-x)^{\xi-1}\,,$$

so können wir (22) in der Form schreiben:

$$D_x\Big(\int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}dz\Big)=\int_L (z-x)^{\xi-1}\overline{\varDelta}_z(w)\,dz+\int_L \frac{d\varDelta_z((z-x)^{\xi-1},w)}{dz}\,dz\,.$$

Wir wollten das Integral (17) so einrichten, daß es der Gaußschen Differentialgleichung

$$D_x(u)=0$$

genügt; wir werden also $w(z)$ so wählen, daß

$$(23)\qquad \overline{\varDelta}_z(w)=0\,,$$

und L so, daß

$$(24)\qquad \int_L \frac{d\varDelta_z((z-x)^{\xi-1},w)}{dz}\,dz=0$$

ist. Die Gleichung (23) ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für w, und zwar die adjungierte von (21); um (24) zu erfüllen, muß L so gewählt werden, daß der Ausdruck

$$\varphi(z)=\varDelta_z((z-x)^{\xi-1},w)$$

auf dem Wege L fortgesetzt zu seinem Ausgangswerte zurückkehrt.

Die Gleichung (23), die die Dichtigkeitsfunktion $w(z)$ bestimmt, nennen wir die Eulersche Transformierte der Gaußschen Differentialgleichung.

58. Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion und des Integrationsweges.

Um die Dichtigkeitsfunktion $w(z)$ in möglichst einfacher Weise erhalten zu können, disponieren wir über die Konstante ξ derart, daß in der Differentialgleichung (21) der Koeffizient von v verschwindet. Wir erhalten nach (19) durch diese Forderung für ξ die Gleichung

$$(\xi - 1)(\xi - 2 + \alpha + \beta + 1) + \alpha\beta = 0,$$

deren Lösungen

$$1 - \alpha, \quad 1 - \beta$$

sind. Da α, β in der Gaußschen Differentialgleichung ganz symmetrisch auftreten, ist es gleichgültig, welche dieser beiden Lösungen wir wählen; es sei

$$\xi = 1 - \alpha.$$

Dann lautet der Ausdruck (19)

$$\Delta_z(v) = z(1 - z)\frac{d^2v}{dz^2} + [\alpha + 1 - \gamma + z(\beta - \alpha - 1)]\frac{dv}{dz}$$

und nach den Formeln der Nr. 56 ergeben sich für den adjungierten und den begleitenden bilinearen Differentialausdruck die Werte

$$\begin{aligned}\Delta_z(w) &= z(1 - z)\frac{d^2w}{dz^2} + [1 - 2z - \alpha + \gamma - (\beta - \alpha + 1)z]\frac{dw}{dz} \\ &\quad - (\beta - \alpha + 1)w \\ &= \frac{d}{dz}\left\{z(1 - z)\frac{dw}{dz} - [\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z]w\right\}\end{aligned}$$

und

$$\Delta_z(v, w) = z(1 - z)\left(w\frac{dv}{dz} - v\frac{dw}{dz}\right) + [\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z]vw.$$

Die linke Seite $\Delta_z(w)$ der Eulerschen Transformierten ist jetzt ein vollständiger Differentialquotient; da es uns nur auf eine partikuläre Lösung ankommt, wählen wir die nach der ersten Integration auftretende willkürliche Konstante gleich Null, bestimmen also $w(z)$ aus der Gleichung

$$z(1 - z)\frac{dw}{dz} - [\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z]w = 0,$$

woraus sich

$$\frac{d\log w}{dz} = \frac{\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z}{z(1 - z)}$$

und weiter

$$w = e^{\int \frac{\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z}{z(1 - z)}dz}$$

ergibt. Das im Exponenten auftretende Integral läßt sich nach elementaren Regeln ausführen:

$$\int \frac{\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z}{z(1 - z)}dz = \log z^{\alpha - \gamma}(z - 1)^{\gamma - \beta - 1} + \log \text{const.},$$

wählen wir die Integrationskonstante gleich Eins, so ist also

$$w = z^{\alpha - \gamma}(z - 1)^{\gamma - \beta - 1}$$

die Dichtigkeitsfunktion.

Für die Funktion $\varphi(z)$, deren wir zur Fixierung des Integrationsweges L bedürfen, ergibt sich nach Einsetzen der Werte von ξ und ω durch einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}&\Delta_z((z-x)^{-\alpha}, \; z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1})\\ &= \alpha z^{\alpha-\gamma+1}(z-1)^{\gamma-\beta}(z-x)^{-\alpha-1} = \varphi(z)\,,\end{aligned}$$

endlich nimmt das Integral (17) selbst die Form an:

$$(17\text{a}) \qquad u = \int_L z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}\,dz\,.$$

Wir wenden uns nun zur Bestimmung des Integrationsweges L.

Schließen wir aus der z-Ebene die Punkte

$$z = 0,\ 1,\ x,\ \infty$$

durch unendlich kleine Kurven aus und legen von $0, 1, x$ aus nach dem Unendlichen hin die Querschnitte l_0, l_1, l, so ist in der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche $\bar{T}$ sowohl $\varphi(z)$ als auch die unter dem Integralzeichen stehende Funktion

$$\psi(z) = z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}$$

eindeutig und endlich. Der Integrationsweg L ist so zu wählen, daß auf diesem Wege fortgesetzt $\varphi(z)$ zu seinem Ausgangswerte zurückkehrt; dies würde jedenfalls erfolgen, wenn wir L als einen ganz innerhalb $\bar{T}$ verlaufenden geschlossenen Weg annähmen; dann würde aber

$$\int_L \psi(z)\,dz = 0$$

sein, so daß ein solcher Weg unbrauchbar ist.

Wir verfahren daher folgendermaßen. Es sei $z = \zeta$ ein beliebiger von

$$0,\ 1,\ x,\ \infty$$

verschiedener Punkt der z-Ebene; wir gehen von $z = \zeta$ aus, innerhalb $\bar{T}$ bis dicht an einen der Punkte $0, 1, x, \infty$ heran, umkreisen dann den betreffenden Punkt im positiven Sinne (entgegengesetzt der Richtung eines in dem Punkte befestigt gedachten Uhrzeigers) und kehren wieder innerhalb $\bar{T}$ (etwa auf demselben Wege, auf dem wir gekommen sind) nach ζ zurück. Einen solchen Weg nennt man eine von ζ aus nach dem betreffenden der Punkte $0, 1, x, \infty$ hin gelegte Schleife (siehe die Fig. 3). Wir bezeichnen diese Schleifen der Reihe nach durch

$$s_0,\ s_1,\ s_x,\ s_\infty\,,$$

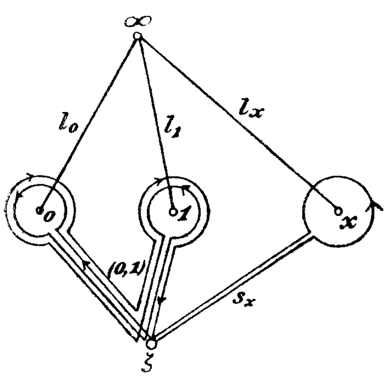

Fig. 3.

und, wenn sie im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden, durch

$$s_0^{-1},\ s_1^{-1},\ s_x^{-1},\ s_\infty^{-1},$$

dann überschreitet also s_0 den Querschnitt l_0, s_1 den Querschnitt l_1, s_x den Querschnitt l im positiven Sinne, während s_∞ die drei Querschnitte l_0, l_1, l in einer von der Lage des Punktes x abhängenden Reihenfolge nacheinander im negativen Sinne durchquert.

Längs s_0 fortgesetzt multipliziert sich $\varphi(z)$ sowohl wie $\psi(z)$ mit dem Faktor

$$e^{2\pi i(\alpha-\gamma)},$$

längs s_1 fortgesetzt multipliziert sich jede dieser beiden Funktionen mit

$$e^{2\pi i(\gamma-\beta)},$$

längs s_x fortgesetzt mit

$$e^{-2\pi i\alpha},$$

endlich längs s_∞ fortgesetzt, da in der Umgebung von $z=\infty$ z. B.

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= a\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}\cdot\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\beta}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-\alpha-1}\\ &= a\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}\cdot\left(1+\varepsilon_1\frac{1}{z}+\varepsilon_2\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

ist, mit

$$e^{2\pi i\beta}.$$

Beschreiben wir nun z. B. erst s_0, dann s_1, dann s_0^{-1}, dann s_1^{-1}, so kehrt $\varphi(z)$, auf diesem Wege (siehe die Fig. 3)

$$(0,\ 1)=s_0 s_1 s_0^{-1} s_1^{-1}$$

fortgesetzt, zu seinem Ausgangswerte zurück, da es nacheinander die Faktoren

$$e^{2\pi i(\alpha-\gamma)},\quad e^{2\pi i(\gamma-\beta)},\quad e^{-2\pi i(\alpha-\gamma)},\quad e^{-2\pi i(\gamma-\beta)}$$

angenommen hat, dieser Weg liefert also im allgemeinen einen brauchbaren Integrationsweg L.

Gleichermaßen stellt [1]) allgemein gesprochen

$$(i,k)=s_i s_k s_i^{-1} s_k^{-1} \qquad (i,k=0,1,x,\infty;\ i\neq k)$$

einen brauchbaren Integrationsweg dar, man nennt einen solchen Weg eine um die Punkte i, k herumgelegte Doppelschleife; es gibt deren offenbar

$$\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6,$$

voneinander verschiedene, und indem wir für L der Reihe nach diese sechs Doppelschleifen wählen, erhalten wir sechs Integrale der Gauß-

[1]) C. Jordan, Cours d'Analyse III (1887), (1896) S. 242 und L. Pochhammer, Mathematische Annalen Bd. 35 (1890), S. 470.

schen Differentialgleichung. Wir werden sehen, daß diese sechs Integrale, abgesehen von konstanten Faktoren, mit

$$u_{01},\ u_{02},\ u_{11},\ u_{12},\ u_{\infty 1},\ u_{\infty 2}$$

übereinstimmen.

59. Darstellung der Gaußschen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral.

Wir nehmen zuvörderst das über die Doppelschleife $(1, \infty)$ erstreckte Integral

$$u_1 = \int\limits_{(1,\infty)} z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}\,dz$$
$$= \int\limits_{(1,\infty)} z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}z^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-\alpha}dz\,.$$

Führen wir durch die Gleichungen

$$z = \frac{1}{t}, \quad dz = \frac{-1}{t^2}\,dt$$

t als neue Integrationsvariable ein, so entspricht der Doppelschleife $(1, \infty)$ der z-Ebene, die um die Punkte $1, 0$ der t-Ebene gelegte Doppelschleife $(1, 0)$, wir erhalten also

$$u_1 = -\int\limits_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt\,.$$

Indem wir die Doppelschleife $(1, 0)$ möglichst enge an die Punkte $0, 1$ heranziehen und überdies x dem absoluten Betrage nach hinreichend klein nehmen, können wir erreichen, daß längs des ganzen Integrationsweges

$$|xt| < 1$$

sei. Dann ist aber nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1-xt)^{-\alpha} = 1 + \alpha xt + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}x^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\delta_k x^k t^k\,,$$

$$\delta_0 = 1\,,\quad \delta_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{1\cdot 2\cdots k}\,, \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

und dies in das Integral eingesetzt ergibt, indem man gliedweise integriert,

$$u_1 = -\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k x^k \int\limits_{(1,0)} t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt\,.$$

Wir sehen also, daß u_1 in der Umgebung von $x = 0$ holomorph ist. Daraus folgt schon a priori, daß sich u_1 von u_{01} nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden kann. Denn jedenfalls ist (für unbestimmte α, β, γ) u_1 in der Form

$$u_1 = c_1 u_{01} + c_2 u_{02}$$

darstellbar, wo c_1, c_2 Konstanten bedeuten; nun ist in der Umgebung von $x = 0$ sowohl u_1 wie u_{01} holomorph, u_{02} dagegen wegen des Faktors $x^{1-\gamma}$ mehrdeutig; folglich muß c_2 gleich Null sein, und es ist

(25) $$u_1 = c_1 u_{01}\,.$$

Um c_1 zu bestimmen, setzen wir $x = 0$, dann ist

$$\lim_{x\to 0} u_1 = -\int_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt\,,$$
$$\lim_{x\to 0} u_{01} = 1\,,$$

wir finden also:

(26) $$c_1 = -\int_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt\,.$$

Wir betrachten allgemein ein Integral von der Form

(27) $$\int_{(1,0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\,,$$

wo p, q beliebige Konstanten bedeuten. Wir können uns die Doppelschleife $(1, 0)$ ganz dicht an das die Punkte $t = 0$ und $t = 1$ verbindende Stück der reellen t-Achse herangezogen denken, dann besteht diese Doppelschleife, wenn wir ihren Ausgangspunkt dicht beim Punkte $t = 0$ nehmen, aus folgenden Teilen. Dem geradlinigen Wege von 0 nach 1, einer kleinen, den Punkt 1 im positiven Sinne umschließenden Kurve C_1, dem geradlinigen Wege von 1 nach 0, einer kleinen, den Punkt 0 im positiven Sinne umschließenden Kurve C_0, abermals dem geradlinigen Wege von 0 nach 1, der im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Kurve C_1, dem geradlinigen Wege von 1 nach 0 zurück und endlich der im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Kurve C_0.

Die Bildung des geradlinigen Integrals von 0 nach 1 stößt auf Schwierigkeiten, wenn das Integral

$$\int t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

für $t = 0$ oder $t = 1$ unendlich wird. Um dem vorzubeugen, müssen wir voraussetzen, daß die reellen Teile von p und q wesentlich positiv seien, dann wird nämlich die zu integrierende Funktion selbst für $t = 0$, $t = 1$ von niedrigerer als der erster Ordnung unendlich, das Integral bleibt infolge dessen endlich. Dann nähern sich aber auch die über die Kurven C_1, C_0 erstreckten Integrale der Null, wenn wir die Dimensionen dieser Kurven ins Unendliche abnehmen lassen; wählen wir z. B. C_0 als Kreis mit dem Radius r, so ist, wenn

$$t = re^{\varphi i}$$

gesetzt wird,

$$\int_{(C_0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int_0^{2\pi} r^p e^{p\varphi i}(1-re^{\varphi i})^{q-1}\,i\,d\varphi\,,$$

also in der Tat, da der reelle Teil von p positiv ist, für unendlich kleines r:

$$\lim_{r\to 0}\int_{(C_0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \lim_{r\to 0} r^p\int_0^{2\pi} e^{p\varphi i}(1-re^{\varphi i})^{q-1}\,i\,d\varphi = 0\,.$$

Wir haben also, mit Rücksicht auf die multiplikativen Faktoren, die zu

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

beim Durchlaufen der Kurven C_1, C_0 im positiven beziehungsweise negativen Sinne hinzutreten:

$$\int\limits_{(1,0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt + e^{2\pi i q}\int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$
$$+ e^{2\pi i(p+q)}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt + e^{2\pi i p}\int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$
$$= (1-e^{2\pi i p})(1-e^{2\pi i q})\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\,.$$

Man setzt gewöhnlich

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = B(p,q)$$

und nennt diesen Ausdruck ein Eulersches Integral erster Gattung oder eine Betafunktion. Durch diese Gleichung ist also die Betafunktion definiert, wenn die reellen Teile von p, q wesentlich positiv sind; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so definieren wir die Betafunktion durch die Gleichung

$$(1-e^{2\pi i p})(1-e^{2\pi i q})B(p,q) = \int\limits_{(1,0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\,.$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnung lautet die Gleichung (26) jetzt

$$c_1 = -(1-e^{2\pi i\beta})(1-e^{2\pi i(\gamma-\beta)})B(\beta,\gamma-\beta)\,,$$

und wenn wir nun unter

$$u_{01} = F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

die aus der Gaußschen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch analytische Fortsetzung entspringende monogene Funktion verstehen, so ist nach (25)

$$-u_1 = \int\limits_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt$$
$$= (1-e^{2\pi i\beta})(1-e^{2\pi i(\gamma-\beta)})B(\beta,\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,.$$

Damit ist also für das Integral $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ der Gaußschen Differentialgleichung eine für alle endlichen Werte von x (mit Ausnahme von 0 und 1) gültige einheitliche Darstellung gefunden.

Wenn die reellen Teile von β und $\gamma-\beta$ wesentlich positiv sind, kann man das u_1 definierende, über die Doppelschleife (1, 0) erstreckte Integral in ähnlicher Weise umformen, wie wir es mit dem Integrale (27) getan haben. Es ergibt sich

$$\int\limits_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt$$
$$= (1-e^{2\pi i\beta})(1-e^{2\pi i(\gamma-\beta)})\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt\,,$$

und folglich haben wir unter der angegebenen Voraussetzung

$$\text{(B)}\quad \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt = B(\beta,\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,;$$

dies ist die von Euler gegebene Darstellung der Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral.

Setzen wir in dieser Gleichung an die Stelle von $(1 - xt)^{-\alpha}$ die bereits oben aufgestellte Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{1\cdot 2\cdots k} x^k t^k,$$

die jetzt, da t zwischen 0 und 1 liegt, für $|x| < 1$ konvergiert, so folgt:

$$(28)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{1\cdot 2\cdots k} x^k \int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt = B(\beta, \gamma-\beta) F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Beachten wir nun, daß

$$\int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt = B(\beta+k, \gamma-\beta)$$

ist, und vergleichen, indem wir uns für $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Gaußsche Reihe gesetzt denken, in (28) beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x, so ergibt sich:

$$B(\beta+k, \gamma-\beta) = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)} B(\beta, \gamma-\beta)$$

oder indem wir $\beta = p$, $\gamma - \beta = q$ setzen:

$$(29)\quad B(p+k, q) = \frac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k-1)} B(p, q); \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

dies ist eine oft gebrauchte Eigenschaft der Betafunktion. Setzen wir noch $p = 1$, so ist

$$B(1, q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}\,dt = \frac{1}{q},$$

wir haben also die interessante Gleichung:

$$B(k+1, q) = \frac{1\cdot 2\cdots k}{q(q+1)\cdots(q+k)}.$$

Mit Hilfe der Gleichung (B) können wir jetzt auch den Wert von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ durch Betafunktionen darstellen; setzen wir nämlich $x = 1$, so ist, vorausgesetzt, daß die reellen Teile von β und $\gamma - \alpha - \beta$ wesentlich positiv sind,

$$\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dt = B(\beta, \gamma-\beta) f(\alpha, \beta, \gamma)$$

oder indem wir das Integral auf der linken Seite durch die betreffende Betafunktion ersetzen:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{B(\beta, \gamma-\alpha-\beta)}{B(\beta, \gamma-\beta)},$$

dies ist die in der Nr. 55 (S. 223) erwähnte Darstellung. Aus funktionentheoretischen Gründen erhellt, daß die Gültigkeit dieser Gleichung von der gemachten Voraussetzung über β und $\gamma - \alpha - \beta$ unabhängig ist.

In bezug auf die Betafunktion bemerken wir noch, daß sich aus (29) für $k = 1$ die Gleichung

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$$

ergibt; vergleicht man diese mit der aus der Taylorschen Entwicklung folgenden

$$B(p+1, q) = B(p, q) + \frac{dB(p, q)}{dp} + \frac{1}{2!}\frac{d^2B(p, q)}{dp^2} + \cdots \text{ in inf.},$$

so erkennt man, daß die Betafunktion der Gleichung

$$qU + (p+q)\left\{\frac{dU}{dp} + \frac{1}{2!}\frac{d^2U}{dp^2} + \cdots \text{ in inf.}\right\} = 0$$

Genüge leistet. Es ist dies eine lineare homogene Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung. Die Theorie solcher Differentialgleichungen ist in neuerer Zeit erheblich gefördert worden [1]), sie stehen in engem Zusammenhang mit den Volterraschen Integralgleichungen. Geschichtlich interessant ist, daß sich schon Euler [2]) mit ihnen befaßt hat.

60. Darstellung des zweiten zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Integrals. Differentialgleichung für die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung.

Wir betrachten nun das über die Doppelschleife $(0, x)$ erstreckte Integral

$$\int\limits_{(0,x)} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}dz\,.$$

Unter der Voraussetzung, daß die reellen Teile von $\alpha - \gamma + 1$ und $1 - \alpha$ wesentlich positiv sind, formen wir dieses Integral gleich in ähnlicher Weise um, wie oben das Integral (27) umgeformt wurde, indem wir die Doppelschleife $(0, x)$ dicht an die geradlinige Verbindungslinie von 0 mit x heranziehen. Es ergibt sich so

$$\int\limits_{(0,x)} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}dz$$
$$= -(1-e^{2\pi i(\alpha-\gamma)})(1-e^{-2\pi i\alpha})\int\limits_0^x z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}dz\,.$$

[1]) Siehe z. B. C. Bourlet, Annales de l'École Normale (3) 14, 1897, S. 133; T. Lalesco, Liouvilles Journal (6) 4, 1908, S. 127; E. Hilb, Mathem. Annalen Bd. 82, 1921, S. 1, Bd. 84, 1921, S. 16 und 43.

[2]) L. Euler, Inst. calc. integralis t. II (1769), art. 1195—1224, Opera, ser. I, vol. 12, S. 360 ff.

Wenn $|x| < 1$, so ist innerhalb der Grenzen der Integration auch $|z| < 1$. Wir können also nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln:

$$(1-z)^{\gamma-\beta-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\gamma-\beta-1)(\gamma-\beta-2)\cdots(\gamma-\beta-k)}{1\cdot 2\cdots k} z^k .$$

Dies in das Integral auf der rechten Seite eingesetzt und gliedweise integriert gibt:

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}\,dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\gamma-\beta-1)\cdots(\gamma-\beta-k)}{1\cdot 2\cdots k}\int_0^x z^{\alpha-\gamma+k}(x-z)^{-\alpha}\,dz .$$

In dem unter dem Summenzeichen auftretenden Integrale setzen wir

$$z = xt\,, \quad dz = xdt\,,$$

dann wird

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma+k}(x-z)^{-\alpha}\,dz = \int_0^1 x^{\alpha-\gamma+k}t^{\alpha-\gamma+k}(x-xt)^{-\alpha}\,xdt\,,$$

$$= x^{1-\gamma+k}B(\alpha-\gamma+1+k, 1-\alpha)\,,$$

oder indem wir die in der vorigen Nummer entwickelte Gleichung für $B(p+k, q)$ benutzen:

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma+k}(x-z)^{-\alpha}\,dz$$

$$= \frac{(\alpha-\gamma+1)\cdots(\alpha-\gamma+k)}{(2-\gamma)(2-\gamma+1)\cdots(2-\gamma+k-1)}x^{1-\gamma+k}B(\alpha-\gamma+1, 1-\alpha).$$

Wir finden also mit Rücksicht auf die Form der Koeffizienten der Gaußschen Reihe

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}\,dz$$

$$= B(\alpha-\gamma+1, 1-\alpha)\,x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

und diese, zunächst für $|x| < 1$ abgeleitete Gleichung bleibt natürlich für alle x-Werte bestehen. Wir haben also auf diese Weise auch für u_{02} eine allenthalben gültige Darstellung durch ein bestimmtes Integral.

In ähnlicher Weise kann man die Identität der übrigen Doppelschleifenintegrale mit den Elementen der zu $x = 1$, $x = \infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme nachweisen. Wir gehen hierauf nicht weiter ein, bemerken aber, daß die Darstellung der Lösungen der Gaußschen Differentialgleichung in der Form von bestimmten Integralen sehr geeignet ist zur Aufstellung der diesen Lösungen entsprechenden Fundamentalsubstitutionen. Dieselbe Methode, durch die wir hier die Integration der Gaußschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale geleistet haben, bleibt auch für eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten anwendbar. Wir verweisen in bezug auf diese Fragen auf Bd. II, 1 von L. Schlesingers Handbuch, wo auch die einschlägige Literatur zu finden ist.

Nur noch eines interessanten Spezialfalles wollen wir Erwähnung tun, des Falles nämlich, wo

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1.$$

Hier ist $1 - \gamma = 0$, das zweite zu $x = 0$ gehörige kanonische Integral wird also einen Logarithmus enthalten. Das Integral (17a) (S. 230) lautet jetzt

$$\int\limits_L z^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}(z-x)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-x)}},$$

und die Funktion $\varphi(z)$ ist (S. 230)

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2}\, z^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{2}}(z-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da sich diese Funktion beim Überschreiten eines jeden der Querschnitte l_0, l_1, l mit dem Faktor -1 multipliziert, erhalten wir in diesem Falle brauchbare Integrationswege L, indem wir einfach geschlossene Wege nehmen, die je zwei der Punkte

$$z = 0,\ 1,\ x,\ \infty$$

einschließen. Bezeichnen wir einen geschlossenen Weg, der die beiden Punkte i, k im positiven Sinne einschließt, durch

$$[i, k], \qquad (i, k = 0, 1, x, \infty,\ i \neq k)$$

so stellen z. B. die Integrale

$$2K = -\int\limits_{[\infty, 1]} \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-x)}}, \quad 2K'i = -\int\limits_{[\infty, x]} \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-x)}}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\text{(C)} \qquad x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (1-2x)\frac{du}{dx} - \frac{1}{4}u = 0$$

dar, die aus der Gaußschen Differentialgleichung für die angegebenen Werte der α, β, γ hervorgeht.

Das unbestimmte Integral

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-x)}}$$

ist ein elliptisches Integral erster Gattung; durch die Substitution

$$z = \frac{1}{t^2}, \quad dz = -2t^{-3}\,dt$$

verwandelt es sich in die Legendre-Jacobische Normalform (vgl. Nr. 6, S. 25 und Nr. 29, S. 109)

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}$$

mit dem Modul

$$k = \sqrt{x}\,.$$

Die Größen $4K$ und $2K'i$ sind nichts anderes, als die sogenannten Periodizitätsmoduln dieses elliptischen Integrals; als Funktionen von $x = k^2$ aufgefaßt, befriedigen diese also die Differentialgleichung (C), die zuerst von Legendre [1]) aufgestellt worden ist.

Setzt man

$$\tau = \frac{K'i}{K},$$

so hat diese Größe (der Quotient der Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (C)), wie man in der Theorie der elliptischen Funktionen zeigt, die Eigenschaft, daß ihr Koeffizient von i stets, d. h. für jeden von

$$0,\ 1,\ \infty$$

verschiedenen Wert von x wesentlich positiv ist. Der absolute Betrag von

$$q = e^{\tau\pi i}$$

ist folglich stets kleiner als Eins, und dieser Umstand bewirkt die Konvergenz der von Jacobi in die Theorie der elliptischen Funktionen eingeführten Thetareihen [2]). Mit Hilfe dieser Reihen hat Jacobi [3]) die folgende Darstellung des Moduls k durch den Quotienten τ gegeben:

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{k} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots};$$

sie lehrt, daß $\sqrt{k}$ und folglich auch x eine eindeutige, nur für Werte von τ, deren Koeffizient von i positiv ist, definierte Funktion von τ ist. Diese Funktion, die sogenannte elliptische Modulfunktion, entsteht also durch Inversion des Quotienten der Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (C) [4]). Sie bildet aber nur das erste Glied in der Reihe viel allgemeinerer eindeutiger Funktionen, die durch Inversion des Quotienten der Elemente eines Fundamentalsystems gewisser linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung des Fuchsschen Typus entstehen, und die, nachdem Fuchs zuerst auf dieselben hingewiesen hatte,

[1]) A. M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques I (1825), S. 62ff.

[2]) C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829), Werke I, (1881), S. 231. Gln. (1), (2).

[3]) ebenda, S. 236, Gln. (10).

[4]) Über das Auftreten der Modulfunktion in den nachgelassenen Schriften von C. F. Gauß vergleiche man die im Bd. X, 1 (1917) der Gaußschen Werke S. 173ff. abgedruckten Fragmente „Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels" und die zugehörigen Bemerkungen von L. Schlesinger, ebenda, S. 251ff.

von Poincaré und Klein zum Gegenstande einer ausgedehnten Theorie, der Theorie der automorphen Funktionen, gemacht worden sind [1]).

Wir geben hier nur noch die Entwicklungen der Elemente des zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (C):

$$u_{01} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x)\,,$$
$$u_{02} = F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) + F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x)\log x\,,$$

woselbst

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2\nu-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}\right\}^2 x^\nu\,,$$

$$F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) = 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2\nu-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}\right\}^2 \sum_{\lambda=1}^{2\nu}\frac{(-1)^{\lambda-1}}{\lambda}\, x^\nu\,.$$

61. Die Klassenbeziehung.

Durch die am Anfang der Nr. 50 angegebene Transformation (81) der abhängigen, und eine lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen hatten wir das Riemannsche Differentialsystem (E) auf das Gaußsche (F) zurückgeführt; das letztere erwies sich wieder als mit der Gaußschen Differentialgleichung (G) äquivalent. Wir können also durch die vollzogene Integration der Gaußschen Differentialgleichung auch die Integration des allgemeinen Riemannschen Differentialsystems als vollzogen ansehen. Dasselbe gilt dann weiter von der allgemeinsten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung des Fuchsschen Typus mit zwei im Endlichen gelegenen singulären Punkten, die wir uns gleich nach 0 und 1 verlegt denken können,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ax+b}{x(x-1)}\frac{dy}{dx} + \frac{cx^2+ex+f}{x^2(x-1)^2}\,y = 0\,; \tag{30}$$

diese Differentialgleichung kann übrigens durch eine einfache Transformation unmittelbar in eine Gaußsche übergeführt werden. Wenn nämlich die zu $x = 0$ und $x = 1$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen beide die Wurzel 0 haben, so muß $cx^2 + ex + f$ für $x = 0$ und für $x = 1$ verschwinden, dann hat also (30) schon die Form

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (ax+b)\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{30a}$$

einer Gaußschen Differentialgleichung. Ist dies nicht der Fall, so sei λ_1

[1]) Siehe den II. Band der „Oeuvres“ von H. Poincaré (Paris 1917); vgl. L. Schlesinger, Handbuch, Bd. II, 2, wo auch die einschlägige Literatur angegeben ist, und Fricke und Klein, Theorie der automorphen Funktionen I, 1897; II, 1912.

eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen, λ_2 eine Wurzel der zu $x = 1$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung, so zwar, daß, wenn eine dieser beiden Gleichungen die Wurzel 0 hat, das betreffende λ gleich 0 genommen werden soll. Setzen wir dann

$$y = x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2} z\,,$$

so genügt z wieder einer Differentialgleichung von der Form (30), in der aber jetzt die beiden zu $x = 0$ und $x = 1$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen die Wurzel 0 haben, die also die Form (30a) der Gaußschen Differentialgleichung annehmen muß [1]).

Wir betrachten nun eine Funktionsmatrix

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix},$$

deren Elemente nirgends unbestimmt und nur für $x = 0, 1, \infty$ singulär sind, und die beim Überschreiten der Querschnitte l_0, l_1 (siehe Nr. 55) im positiven Sinne mit den Matrizen Ω_0, Ω_1 von links her komponiert wird. Schreiben wir dann der Einfachheit wegen u_1, u_2 für $u_{\chi 1}, u_{\chi 2}$, so wird also V mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix}$$

zu derselben Klasse (im Sinne der Nr. 48) gehören. Es ist folglich

$$V = \begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix} G\,,$$

wo G eine Matrix rationaler Funktionen bedeutet. Aus der Gleichung

$$G = \begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix}^{-1} V$$

folgt weiter, daß die Elemente von G keine anderen singulären Punkte haben können als $0, 1, \infty$; die Determinante $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ verschwindet nämlich (Nr. 40) für keinen von $0, 1, \infty$ verschiedenen Wert von x, folglich sind die Elemente der Matrix $\begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix}^{-1}$ in der Umgebung eines jeden von diesen drei Punkten verschiedenen x-Punktes holomorph. Umgekehrt ist klar, daß V mit $\begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix}$ zu derselben Klasse gehört, wenn G eine Matrix irgendwelcher rationaler Funktionen, deren Nenner höchstens in $x = 0, 1$ verschwindet, mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Wir

[1]) Durch die analoge Transformation wird eine Differentialgleichung zweiter Ordnung des Fuchsschen Typus mit den σ singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ in die Form

$$(x-a_1)\cdots(x-a_\sigma)\frac{d^2z}{dx^2} + g(x)\frac{dz}{dx} + h(x)\,z = 0$$

übergeführt, wo $g(x), h(x)$ ganze rationale Funktionen von den Graden $\sigma - 1$ bzw. $\sigma - 2$ bedeuten; vgl. L. Heffter, Dissertation, Berlin 1886, S. 5.

sagen nun von den Funktionssystemen v_{11}, v_{21} und v_{12}, v_{22} selbst, daß sie mit u_1, u_2 zu derselben Klasse gehören; allgemein gehört v_1, v_2 mit u_1, u_2 zu derselben Klasse, wenn

$$(31) \qquad \begin{aligned} v_1 &= u_1 g + u_1' h\,, \\ v_2 &= u_2 g + u_2' h \end{aligned}$$

ist, und g, h rationale Funktionen bedeuten, die an keiner von $0, 1, \infty$ verschiedenen Stelle unendlich werden. Aus (31) folgt dann durch Differentiation und indem man u_1'', u_2'' vermöge der Differentialgleichung (G) durch u_1, u_1' bzw. u_2, u_2' ausdrückt:

$$(32) \qquad \begin{aligned} v_1' &= u_1 g_1 + u_1' h_1\,, \\ v_2' &= u_2 g_1 + u_2' h_1\,, \end{aligned}$$

wo auch g_1, h_1 rationale Funktionen der bezeichneten Art sind, so daß also

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g_1 \\ h & h_1 \end{pmatrix}$$

wird. Damit ist der Klassenbegriff für Funktionssysteme auf den für Matrizen zurückgeführt. Durch nochmalige Differentiation von (32) folgt, daß auch

$$\begin{aligned} v_1'' &= u_1 g_2 + u_1' h_2\,, \\ v_2'' &= u_2 g_2 + u_2' h_2 \end{aligned}$$

mit rationalen g_2, h_2 ist, und daraus schließt man weiter, daß v_1, v_2 ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} v & g & h \\ v' & g_1 & h_1 \\ v'' & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0$$

bilden, die offenbar vom Fuchsschen Typus ist, und von der wir sagen wollen, daß sie mit (G) zu derselben Klasse gehört. Die Klassenbeziehung zwischen den Differentialgleichungen (G) und (33) wird durch die Gleichung

$$v = ug + u'h$$

gegeben. Die Differentialgleichung (33) ist, wenn die Determinante $gh_1 - hg_1$ nicht identisch verschwindet, wirklich von der zweiten Ordnung; dies ist im allgemeinen der Fall. Wäre nämlich identisch $gh_1 - hg_1 = 0$, und setzte man

$$\frac{g_1}{g} = \frac{h_1}{h} = \lambda\,,$$

so wäre

$$ug_1 + u'h_1 = \lambda(ug + u'h)\,,$$

d. h. ein Integral von (G) würde dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalen Koeffizienten Genüge leisten. Das hätte zur Folge, daß die Fundamentalsubstitutionen Ω_0, Ω_1 die besondere Gestalt annehmen müßten, wonach sich jenes Integral von (G) bei den

Umläufen um 0 und 1 nur mit einem konstanten Faktor multipliziert, und dies ist nur für ganz spezielle Werte der α, β, γ möglich.

In diesem Falle sagt man von der Differentialgleichung (G), daß sie reduzibel sei[1]).

Unter gewissen Bedingungen kann (33) wieder eine Gaußsche Differentialgleichung sein; wenn dies der Fall ist und die den Größen α, β, γ entsprechenden Größen in dieser Gaußschen Differentialgleichung die Werte α', β', γ' haben, so muß jedenfalls

$$e^{-2\pi i\gamma} = e^{-2\pi i\gamma'}, \quad e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} = e^{2\pi i(\gamma'-\alpha'-\beta')},$$
$$e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i\alpha'}, \quad e^{2\pi i\beta} = e^{2\pi i\beta'}$$

sein. Hieraus folgt aber, daß die Differenzen

$$\alpha - \alpha', \quad \beta - \beta', \quad \gamma - \gamma'$$

ganze Zahlen sind. Die Gleichungen (32) stellen dann Beziehungen dar, die sich in Relationen zwischen gewissen Gaußschen Reihen umsetzen lassen. Spezielle Fälle solcher Relationen hat Gauß in seiner zitierten Abhandlung von 1812 als „relationes inter functiones contiguas“ aufgestellt.

62. Behandlung eines speziellen Falles.

Wir betrachten nun den besonderen Fall, wo

$$v_1 = u_1^{(n-1)}, \quad v_2 = u_2^{(n-1)}$$

ist. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (33) wirklich eine Gaußsche. Um dies einzusehen, bemerken wir, daß (33) durch

$$(34) \qquad \begin{cases} u_{01}^{(n-1)}, & u_{02}^{(n-1)} \\ u_{11}^{(n-1)}, & u_{12}^{(n-1)} \\ u_{\infty 1}^{(n-1)}, & u_{\infty 2}^{(n-1)} \end{cases}$$

befriedigt wird, und daß diese Integralpaare, zufolge der allgemeinen Theorie, die zu den singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (33) darstellen. Im allgemeinen kann die Differentialgleichung (33) außer den singulären Punkten 0, 1, ∞ noch andere singuläre Punkte besitzen, diejenigen Punkte nämlich, für die der Zähler der rationalen Funktion

$$gh_1 - hg_1,$$

die in (33) den Koeffizienten von v'' bildet, verschwindet. Da aber in

[1]) Der Reduzibilitätsbegriff wurde von Frobenius, Crelles Journal Bd. 76 (1873), S. 236 ff. in die Theorie der linearen Differentialgleichungen eingeführt. Auf Systeme wurde er von Koenigsberger (Lehrbuch, 1889, S. 155) und Schlesinger (vgl. Vorlesungen, 1908, S. 105) übertragen. Neuere wichtige Untersuchungen über diesen Gegenstand hat A. Loewy angestellt.

der Umgebung solcher singulärer Punkte die Integrale v_1, v_2 und folglich alle Integrale von (33) holomorph sind, können es nur außerwesentlich singuläre Punkte sein. Sind solche vorhanden, so ist zufolge der Fuchsschen Relation (Nr. 46, S. 194) die Summe der Wurzeln der zu den Punkten 0, 1, ∞ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen nicht wie bei der Gaußschen Differentialgleichung gleich Eins, sondern gleich einer anderen ganzen Zahl.

Nun gehört aber das erste Paar der Integrale (34) zu den Exponenten
$$0,\ 1-\gamma-(n-1),$$
das zweite Paar zu den Exponenten
$$0,\ \gamma-\alpha-\beta-(n-1),$$
das dritte Paar zu den Exponenten
$$\alpha+n-1,\ \beta+n-1;$$
die Summe dieser sechs Größen ist gleich Eins, so daß also für die Differentialgleichung, der
$$u_1^{(n-1)},\quad u_2^{(n-1)}$$
Genüge leisten, das Auftreten von außerwesentlich singulären Stellen ausgeschlossen ist. Zugleich lehrt die angegebene Form der Exponenten, daß jene Differentialgleichung wirklich eine Gaußsche ist, in der an Stelle der
$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha+n-1, & \beta+n-1, & \gamma+n-1 \end{array}$$
zu setzen sind. Die Differentialgleichung, der die $u_1^{(n-1)}$, $u_2^{(n-1)}$ und überhaupt die $(n-1)$ten Ableitungen der Lösungen unserer ursprünglichen Gaußschen Differentialgleichung (1) genügen, lautet folglich
$$x(1-x)\frac{d^2u^{(n-1)}}{dx^2}+[\gamma+n-1-(\alpha+\beta+2n-1)x]\frac{du^{(n-1)}}{dx}$$
$$-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)u^{(n-1)}=0,$$
worin wir die abhängige Variable gleich als $(n-1)$te Ableitung von u durch $u^{(n-1)}$ bezeichnet haben.

Multiplizieren wir nun [1]) diese Gleichung mit
$$x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1},$$
so können wir sie in der Form
$$\frac{d}{dx}\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n}u^{(n)}\}$$
$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}u^{(n-1)}$$
schreiben. Differentiieren wir diese Gleichung $(n-1)$mal, so kommt

[1]) C. Jordan, Cours d'Analyse III (1896), S. 230; vgl. für das Folgende: Jacobi, Crelles Journal Bd. 15 (1836), Werke VI, S. 86ff.

$$\frac{d^n}{dx^n}\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n}u^{(n)}\}$$
$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}u^{(n-1)}\}.$$

Setzen wir hierin der Reihe nach

$$n=1,2,\ldots,k$$

und multiplizieren die so entstehenden Gleichungen miteinander, so erhalten wir

$$\frac{d^k}{dx^k}\{x^{\gamma+k-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+k}u^{(k)}\}$$
$$=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)\,x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}u.$$

Von dieser interessanten Gleichung werden wir jetzt in einem besonderen Falle eine wichtige Anwendung zu machen haben.

63. Legendresche Polynome.

Setzen wir in der Gaußschen Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-1)}{1\cdot2\cdots\nu\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\nu-1)}x^\nu$$

an die Stelle von β eine negative ganze Zahl $-k$, so bricht die Reihe mit dem $(k+1)$ten Gliede ab, sie stellt also eine ganze rationale Funktion k-ten Grades von x dar [1]).

Offenbar ist alsdann:

$$\frac{d^k}{dx^k}F(\alpha,-k,\gamma,x)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)k!}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}(-1)^k.$$

Setzen wir also in die am Schlusse der vorigen Nummer abgeleitete Gleichung für u diese abbrechende Gaußsche Reihe ein, so erhalten wir nach gehöriger Reduktion

$$F(\alpha,-k,\gamma,x)$$
$$=\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma-k}}\frac{d^k}{dx^k}(x^{\gamma+k-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}),$$

und indem wir $\alpha+k$ an die Stelle von α setzen,

$$F(\alpha+k,-k,\gamma,x)$$
$$=\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}\frac{d^k}{dx^k}\{x^{\gamma+k-1}(1-x)^{\alpha+k-\gamma}\}.$$

Nehmen wir hierin $\alpha=1$, $\gamma=1$, so ergibt sich

$$F(k+1,-k,1,x)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}[x^k(1-x)^k].$$

[1]) Wir sehen hier einen Fall, wo die Konvergenz der Reihe über den Bereich $|x|<1$ hinausreicht.

Diese spezielle ganze rationale Funktion k-ten Grades genügt einer Gaußschen Differentialgleichung, in der

$$\alpha = k + 1, \quad \beta = -k, \quad \gamma = 1$$

ist, die also die Form hat:

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (1-2x)\frac{du}{dx} + k(k+1)\,u = 0\,.$$

Setzen wir hierin

$$x = \frac{1-t}{2}, \quad t = 1-2x\,,$$

so ist

$$\frac{du}{dx} = -2\frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 4\frac{d^2u}{dt^2}$$

und allgemein

$$\frac{d^nu}{dx^n} = (-2)^n\frac{d^nu}{dt^n},$$

die Differentialgleichung nimmt also die Form an:

$$(1-t^2)\frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt} + k(k+1)u = 0\,,$$

und ihr ganzes rationales Integral lautet:

$$F\left(k+1, -k, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{k!}(-2)^k\frac{d^k}{dt^k}\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^k\left(\frac{1+t}{2}\right)^k\right\}$$
$$= \frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k\,.$$

Man bezeichnet diese ganze Funktion k-ten Grades von t gewöhnlich durch X_k und nennt sie ein Legendresches Polynom oder auch eine Kugelfunktion k-ter Ordnung [1]).

Die Kugelfunktionen sind in der Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit; von ihren zahlreichen interessanten Eigenschaften wollen wir nur eine hervorheben, die aus der gegebenen Darstellung unmittelbar folgt.

Bedeutet $g(t)$ eine ganze rationale Funktion von t, und sind die sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$g(t) = 0$$

reell und zwischen den Grenzen a, b gelegen, so gilt, wie man durch Anwendung des Rolleschen Satzes sofort einsieht, das gleiche von den Wurzeln der Gleichung

$$g'(t) = 0$$

und ebenso von allen folgenden abgeleiteten Gleichungen. Wendet man diese Bemerkung auf

[1]) Vgl. für die Theorie dieser Funktionen: E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I. (2. Aufl. 1878), wo auch Literaturangaben zu finden sind.

$$g(t) = (t^2 - 1)^k$$

an, so folgt, daß die sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$X_k = \frac{1}{k!\,2^k} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k = 0$$

reell und zwischen -1 und $+1$ gelegen sind.

Auf diese Eigenschaft der Legendreschen Polynome gründet sich eine wichtige Anwendung derselben in der Lehre von der angenäherten Berechnung bestimmter Integrale, wofür man Gauß' Abhandlung „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" vergleichen mag [1]).

[1]) 1814, C. F. Gauß' Werke III, S. 163.

Achtes Kapitel.

Untersuchung der Integrale in der Umgebung eines Punktes der Unbestimmtheit.

64. Differentialsysteme vom Range Eins. Normalreihen.

Wir haben uns bisher vorwiegend mit dem Falle beschäftigt, wo die Integrale einer Differentialgleichung oder eines Differentialsystems entweder in der ganzen Ebene keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, oder doch in einem singulären Punkte, auf dessen Umgebung sich dann die Untersuchung beschränkte, nicht unbestimmt werden. Die entwickelten Methoden haben uns über das Verhalten eines Integrals in der ganzen Umgebung eines solchen singulären Punktes erschöpfenden Aufschluß gegeben und uns zugleich analytische Ausdrücke geliefert, die zur Wertberechnung für Punkte dieser Umgebung geeignet waren. Wenn wir uns jetzt dem Falle zuwenden, wo die Integrale einer Differentialgleichung in einem singulären Punkte unbestimmt sind, so müssen wir vorweg bemerken, daß bei dem gegenwärtigen Stande der analytischen Forschung eine gleich befriedigende Behandlung dieses Falles nicht möglich ist. Neben der bereits erwähnten Methode der unendlichen Determinanten spielt hier die Betrachtung gewisser divergenter Reihen, die dem Differentialsystem formal Genüge leisten, eine hervorragende Rolle, namentlich seitdem Poincaré nachgewiesen hat, daß solchen Reihen eine analytische Bedeutung als asymptotischen Darstellungen zukommt. Da diese Darstellungen besonders auch in der angewandten Mathematik von Wichtigkeit sind, wollen wir uns mit ihnen in diesem Kapitel beschäftigen, indem wir sie für einige klassische Beispiele erörtern.

Wir nehmen an, daß die zu betrachtende Unbestimmtheitsstelle des linearen Differentialsystems

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = y_1 a_{1k} + y_2 a_{2k} \qquad (k = 1, 2)$$

der unendlich ferne Punkt sei. Der Fall einer im Endlichen gelegenen Stelle $x = a$ kann ja stets durch die Substitution

$$x = a + \frac{1}{t}$$

auf diesen zurückgeführt werden.

In der Nr. 46 wurde gezeigt, daß die Lösungen von (A) im Punkte $x = \infty$ sicher nicht unbestimmt sind, wenn in der Umgebung dieses Punktes die Entwicklungen gelten:

$$a_{ik} = \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^2} + \cdots.$$

Der nächsteinfache Fall wäre der, wo die Entwicklungen der a_{ik} noch ein konstantes Glied haben, also

$$(1) \qquad a_{ik} = a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^2} + \cdots;$$

man sagt dann, das System (A) sei für $x = \infty$ vom Range Eins.

Für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = y\left(a^{(0)} + \frac{a^{(1)}}{x} + \frac{a^{(2)}}{x^2} + \cdots\right)$$

ergäbe sich die Lösung

$$y = e^{a^{(0)}x} x^{a_1}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right),$$

und zwar wäre die Reihe $\Sigma \frac{c_k}{x^k}$ in derselben Umgebung von $x = \infty$ konvergent, wo die Reihe $\Sigma \frac{a_k}{x^k}$ konvergiert. Wir versuchen nun das System (A) durch die analog gebildeten Ausdrücke

$$(2) \qquad y_{ik} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{ik}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{ik}^{(1)}}{x} + \cdots\right)$$

zu befriedigen. Setzen wir

$$(3) \qquad u_{ik} = x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{ik}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{ik}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

so ergibt sich, wenn wir die Ausdrücke (2) in (A) einsetzen, nach Division mit $e^{\alpha_i x}$:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{du_{i1}}{dx} &= u_1(a_{11} - \alpha_i) + u_2 a_{21}, \\ \frac{du_{i2}}{dx} &= u_1 a_{12} + u_2(a_{22} - \alpha_i). \end{aligned}$$

Wir wählen nun α_1, α_2 als Wurzeln der sogenannten charakteristischen Gleichung

$$(5) \qquad |A^{(0)} - I\alpha| = 0$$

und versuchen, das System (4) durch Ausdrücke von der Form (3) zu befriedigen. Um die Berechnung der ϱ_i, $\varepsilon_{ik}^{(\nu)}$ möglichst einfach zu gestalten, wenden wir die folgende Transformation an.

Berechnen wir aus den Gleichungen

$$(6)\qquad p_{i1}(a_{1k}^{(0)} - \delta_{1k} a_i) + p_{i2}(a_{2k}^{(0)} - \delta_{2k} a_i) = 0 \qquad (i,k=1,2)$$

die vier Größen p_{ik}, so ist ihre Determinante $|P|$ von Null verschieden, wenn wir voraussetzen, daß die charakteristische Gleichung (5) zwei verschiedene Wurzeln a_1, a_2 hat. Es ist dann

$$(7)\qquad PA^{(0)}P^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

In (A) setzen wir nun

$$(8)\qquad y_k = z_1 p_{1k} + z_2 p_{2k}\,,$$

dann befriedigen (gemäß der Derivationsformel (D) der Nr. 39) z_1, z_2 ein Differentialsystem mit der Koeffizientenmatrix PAP^{-1}. Setzen wir also

$$PA^{(\nu)}P^{-1} = B^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

und beachten (7), so lautet das Differentialsystem für z_1, z_2:

$$(\text{A}')\qquad \frac{dz_k}{dx} = a_k z_k + z_1\left(\frac{b_{1k}^{(1)}}{x} + \cdots\right) + z_2\left(\frac{b_{2k}^{(1)}}{x} + \cdots\right). \qquad (k=1,2)$$

Hierin machen wir nun (2) und (3) entsprechend den Ansatz

$$z_{ik} = e^{a_i x} v_{ik}\,, \quad v_{ik} = x^{\varrho_i}\left(c_{ik}^{(0)} + \frac{c_{ik}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

wo dann gemäß den Transformationsformeln (8)

$$(9)\qquad Y = ZP\,, \quad U = VP\,, \quad E^{(\nu)} = C^{(\nu)}P$$

ist. Für die v_{ik} ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{dv_{ik}}{dx} = v_{ik}(a_k - a_i) + v_{i1}\left(\frac{b_{1k}^{(1)}}{x} + \cdots\right) + v_{i2}\left(\frac{b_{2k}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

aus denen nach Einsetzen der Ausdrücke für die v_{ik} und Division mit x^{ϱ_i}

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varrho_i - \nu)\, c_{ik}^{(\nu)} x^{-\nu-1} = (a_k - a_i)\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{ik}^{(\nu)} x^{-\nu} + \sum_{\lambda=1,2}\ \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{i\lambda}^{(\mu)}}{x^{\mu}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{\lambda k}^{(\nu)}}{x^{\nu}}$$

folgt. Die Vergleichung der absoluten Glieder liefert dann

$$(a_k - a_i)\, c_{ik}^{(0)} = 0\,,$$

also $c_{ik}^{(0)} = 0$ für $i \neq k$, während natürlich $c_{11}^{(0)}$, $c_{22}^{(0)}$ von Null verschieden sein müssen. Die Vergleichung der Koeffizienten von x^{-1} ergibt weiter

$$\varrho_i c_{ik}^{(0)} = (a_k - a_i)\, c_{ik}^{(1)} + c_{i1}^{(0)} b_{1k}^{(1)} + c_{i2}^{(0)} b_{2k}^{(1)}\,,$$

also für $k = i$

$$\varrho_i = b_{ii}^{(1)}\,.$$

Die $c_{11}^{(0)}$, $c_{22}^{(0)}$ bleiben willkürlich, wir können sie z. B. gleich 1 wählen. Für $i \neq k$ finden wir insbesondere

$$c_{ik}^{(1)} = \frac{b_{ik}^{(1)}}{a_i - a_k}.$$

Die Vergleichung der höheren Potenzen von x^{-1} liefert dann Rekursionsformeln für die übrigen $c_{ik}^{(\nu)}$.

Auf diese Weise sind dann die z_{ik} und damit gemäß (9) auch die y_{ik} so bestimmt, daß die Ansätze (2) dem Differentialsystem (A) formal Genüge leisten. Aber diese formelle Analogie zu dem Falle der Differentialgleichung erster Ordnung (*) versagt nach der quantitativen Seite hin. Es zeigt sich nämlich, daß die gefundenen, nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ik}^{(\nu)}}{x^\nu}$ im allgemeinen für keinen endlichen Wert von x konvergieren.

Um das einzusehen, betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung[1])

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\beta_0}{x^2}\, y = 0\,, \tag{10}$$

die dem System

$$\frac{dy_1}{dx} = \qquad y_2\,,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{\beta_0}{x^2}\, y_1 - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x}\right) y_2$$

äquivalent ist. Setzen wir in (10)

$$y = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{x} + \frac{\varepsilon_2}{x^2} + \cdots, \tag{11}$$

so finden wir die Rekursionsformel

$$\varepsilon_\nu(\nu(\nu+1) - \nu\alpha_2 + \beta_0) - (\nu+1)\,\alpha_1\varepsilon_{\nu+1} = 0\,, \qquad (\nu = 0, 1 \ldots)$$

der Gliederquotient der Reihe (11) lautet also

$$\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{\varepsilon_\nu}\frac{1}{x} = \left(\frac{\nu}{\alpha_1} - \frac{\nu}{\nu+1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\beta_0}{\alpha_1}\frac{1}{\nu+1}\right)\frac{1}{x}\,,$$

er wächst für jeden endlichen Wert von x mit ν ins Unendliche, die Reihe (11) ist also beständig divergent.

Analoge Entwicklungen, wie wir sie für den Rang Eins, d. h. für die Form (1) der Koeffizienten a_{ik} gefunden haben, gelten auch, wenn die a_{ik} in der Umgebung von $x = \infty$ die allgemeine Form

$$a_{ik} = a_{ik}^{(-p)} x^p + \cdots + a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.} \tag{12}$$

besitzen. Man sagt dann nach Poincaré, das System (A) sei für $x = \infty$ vom Range $p+1$. Läßt man sich wieder von den für eine Differentialgleichung erster Ordnung

[1]) Vgl. Picard, Traité III (1896), S. 280.

$$\frac{dy}{dx} = y\left(a^{(-p)}x^p + \cdots + a^{(0)} + \frac{a^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

sich unmittelbar darbietenden Ergebnissen leiten, so kommt man zu dem Ansatz

$$(13)\quad y_{ik} = e^{a_i^{(p+1)}\frac{x^{p+1}}{p+1} + \cdots + a_i^{(1)}x}\, x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{ik}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{ik}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Man findet zunächst, daß $a_1^{(p+1)}$, $a_2^{(p+1)}$ der charakteristischen Gleichung

$$(13\text{a})\qquad |A^{(-p)} - Ia| = 0$$

genügen müssen, und wenn diese Gleichung verschiedene Wurzeln hat, so ergibt sich eine vollkommene Bestimmung der übrigen in (13) auftretenden Größen durch die Forderung, daß die Ausdrücke (13) dem System (A) formell genügen sollen. Aber auch hier sind die Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ik}^{(\nu)}}{x^\nu}$ im allgemeinen divergent. Man nennt die Ausdrücke (13) nach L. W. Thomé[1]) **Normalreihen**, und in den besonderen Fällen, wo sie konvergieren, **Normalintegrale** vom Range $p+1$. Wenn die charakteristische Gleichung eine doppelte Wurzel hat, so treten an die Stelle von (13) Ausdrücke anderer Art, indem nämlich im Exponenten von e statt der ganzen, gebrochene Potenzen von x, und an Stelle der nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen, ganze rationale Funktionen von $\log x$ auftreten, deren Koeffizienten nach fallenden Potenzen von x fortschreiten. Man spricht dann nach Fabry[2]) von **anormalen Reihen** bzw. von **logarithmischen Normalreihen**.

65. Differentialgleichung zweiter Ordnung. Riccatische Differentialgleichung.

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten sich im Punkte $x = \infty$ wie rationale Funktionen verhalten, hat die Form

$$(14)\qquad D(u) = x^2u'' + xp_1u' + p_2u = 0,$$

wo in der Umgebung von $x = \infty$

$$(15)\quad \begin{aligned} p_1 &= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{x} + \frac{\alpha_{-2}}{x^2} + \cdots, \\ p_2 &= \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{x} + \frac{\beta_{-2}}{x^2} + \cdots \end{aligned}$$

ist. Für $m = n = 0$ haben die Integrale in $x = \infty$ keinen Punkt der Unbestimmtheit. Der nächsteinfache Fall wäre der, wo ein partikuläres

[1]) Thomé, Crelles Journal Bd. 83 (1877), S. 89.
[2]) C. Fabry, Thèses. Paris 1885.

Integral vorhanden ist, das in $x = \infty$ nicht unbestimmt wird. Dieses müßte dann in der Form

$$(16) \qquad u = x^r \sum_{k=-\infty}^{0} c_k x^k$$

darstellbar sein, und man kann durch Einsetzen dieser Entwicklung in die Differentialgleichung leicht die Bedingungen dafür aufstellen, daß eine solche, der Differentialgleichung formal genügende Entwicklung existiert. Bildet man nämlich wie in der Nr. 42 die charakteristische Funktion

$$D(x^\varrho) = x^\varrho \Sigma f_\lambda(\varrho) x^\lambda ,$$

so erhält man die Rekursionsformel

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{-\lambda} f_{\nu+\lambda}(r-\lambda) = 0 ,$$

wo ν alle Werte von $-\infty$ bis zu der größeren der beiden Zahlen m, n durchläuft. Für diesen größten Wert von ν ergibt sich, da $c_0 \neq 0$ vorauszusetzen ist,

$$\text{wenn } m > n \text{ ist, } f_m(r) = \beta_m = 0 ,$$
$$\text{und wenn } n \geqq m \text{ ist, } f_n(r) = r\alpha_n + \beta_n = 0 ;$$

soll also eine Entwicklung der Form (16) vorhanden sein, so muß $m \leqq n$ sein, und in diesem Falle stößt die Berechnung der Koeffizienten c_ν auf keine weiteren Schwierigkeiten. Aber die so formal hergestellte Reihe (16) ist nicht notwendig konvergent; das zeigt das Beispiel (10) der Nr. 64. Die Aufstellung der Bedingungen für die Konvergenz ist recht umständlich[1]), wir gehen nicht darauf ein und wenden uns zu dem Falle $m > n$.

Man kann dann[2])

$$n = p + 1 , \quad m = 2p + 2$$

setzen, wo p eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet, und erhält für (14) die Form

$$(17) \qquad u'' + (\varphi_p(x) + q_1) u' + (\varphi_{2p}(x) + q_2) u = 0 ,$$

wo $\varphi_p(x)$, $\varphi_{2p}(x)$ ganze rationale Funktionen vom p-ten bzw. $2p$-ten Grade in x, q_1, q_2 in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph sind und für $x = \infty$ verschwinden.

Setzt man

$$(18) \qquad y_1 = u , \quad y_2 = x^{-p} u' ,$$

so ergibt sich das Differentialsystem:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= x^p y_2 , \\ \frac{dy_2}{dx} &= -\left(\varphi_p + \frac{p}{x} + q_1\right) y_2 - x^{-p}(\varphi_{2p} + q_2) y_1 , \end{aligned}$$

1) Von neueren Untersuchungen über diese Frage nennen wir O. Perron, Mathem. Annalen 70, 1911, S. 1; E. Hilb, ebenda 82, 1921, S. 40.

2) Vgl. Poincaré, Amer. Journal of Math. VII (1885), S. 203 ff.

das für $x = \infty$ vom Range $p + 1$ ist. Wir sagen dann auch von der Differentialgleichung (17), sie sei für $x = \infty$ vom Range $p + 1$.

Von dieser Differentialgleichung gehen wir[1]) durch die Substitution:

$$(20) \qquad y = x^{-p} \frac{d \log u}{dx}, \quad u = e^{\int x^p y\, dx}$$

in bekannter Weise zu einer Riccatischen Differentialgleichung für y über. Diese lautet nach Division durch x^{2p}

$$x^{-p} \frac{dy}{dx} + y^2 + \left\{ \frac{1}{x^p} \varphi_p(x) + \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{q_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p} \right\} y + \frac{1}{x^{2p}} \left[\varphi_{2p}(x) + q_2\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0,$$

wir schreiben sie in der Form

$$(21) \qquad x^{-p} \frac{dy}{dx} + y^2 + y\left(\delta_0 + \delta_1 \frac{1}{x} + \delta_2 \frac{1}{x^2} + \cdots\right) + \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{1}{x} + \varepsilon_2 \frac{1}{x^2} + \cdots\right) = 0,$$

wo also δ_0, ε_0 die Koeffizienten der höchsten x-Potenzen in $\varphi_p(x)$, $\varphi_{2p}(x)$ sind und die in Klammern stehenden Reihen in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergieren. Um auch die analoge Form der Riccatischen Gleichung in der Umgebung eines im Endlichen gelegenen singulären Punktes a vor Augen zu haben, setzen wir

$$x = \frac{1}{\xi - a},$$

dann lautet die Differentialgleichung für y als Funktion von ξ in der Umgebung von $\xi = a$:

$$(22) \qquad (\xi - a)^{p+2} \frac{dy}{d\xi} = y^2 + y[\delta_0 + \delta_1(\xi - a) + \cdots] + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\xi - a) + \cdots.$$

Wir sehen hier den Unterschied gegen den in der Nr. 45 (S. 186) behandelten Fall der Riccatischen Gleichung in dem Exponenten der mit der Ableitung der unbekannten Funktion multiplizierten Potenz von $\xi - a$; dort war dieser Exponent gleich Eins, hier ist er, da $p \geq 0$ ist, mindestens gleich Zwei; dort waren die Integrale im singulären Punkte $\xi = a$ nicht unbestimmt, hier ist dagegen $\xi = a$ stets eine Stelle der Unbestimmtheit für die Integrale, da $x = \infty$ eine solche Stelle für alle Integrale von (17) ist.

In dem in der Nr. 45 behandelten Falle (der aus (22) für $p = -1$ hervorgeht) fanden wir im allgemeinen (d. h. wenn die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung keine ganze Zahl war) zwei in der Umgebung von $\xi = a$ holomorphe Integrale. — Sehen

[1]) Poincaré a. a. O.; Horn, Crelles Journal, Bd. 118 (1897), S. 257 ff.

wir zu, ob wir im Falle $p \geqq 0$ die Differentialgleichung (22) auch durch eine nach positiven ganzen Potenzen von $\xi - a$, also die Differentialgleichung (21), auf die wir wieder zurückgehen wollen, durch eine nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitende Reihe

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{x} + \gamma_2 \frac{1}{x^2} + \cdots$$

formal befriedigen können.

Setzen wir diese Reihe in (21) ein, so kommt

$$x^{-p}\left(-\gamma_1 \frac{1}{x^2} - 2\gamma_2 \frac{1}{x^3} - \cdots\right) + \left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{x} + \cdots\right)^2$$
$$+ \left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{x} + \cdots\right)\left(\delta_0 + \delta_1 \frac{1}{x} + \cdots\right) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{1}{x} + \cdots = 0\,.$$

Denken wir uns nach Potenzen von x geordnet und die einzelnen Koeffizienten gleich Null gesetzt, so finden wir als erstes Glied der zur Bestimmung der γ_k dienenden Rekursionsformel:

$$\gamma_0^2 + \gamma_0\delta_0 + \varepsilon_0 = 0\,.$$

Es muß also γ_0 eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 + \delta_0\varrho + \varepsilon_0 = 0 \tag{23}$$

sein, die, wie man sofort erkennt, mit der charakteristischen Gleichung (13a) für das Differentialsystem (19) übereinstimmt, und deren Wurzeln wir durch c_1, c_2 bezeichnen wollen. Als zweites Glied der Rekursionsformel ergibt sich

$$2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\delta_1 + \gamma_1\delta_0 + \varepsilon_1 = 0\,,$$

woraus

$$\gamma_1 = -\frac{\gamma_0\delta_1 + \varepsilon_1}{2\gamma_0 + \delta_0} \tag{24}$$

folgt, wenn

$$2\gamma_0 + \delta_0 \neq 0$$

ist. Das letztere ist stets der Fall, wenn $c_1 \neq c_2$ ist; wir setzen auch hier voraus, daß dies eintritt, d. h. daß die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung voneinander verschieden sind.

Unter dieser Voraussetzung ist auch die Berechnung der folgenden γ_k ohne Schwierigkeit möglich; wir erhalten also, entsprechend den beiden Wurzeln c_1, c_2, zwei Reihen

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + \gamma_{11} \dfrac{1}{x} + \gamma_{12} \dfrac{1}{x^2} + \cdots, \\ y_2 = c_2 + \gamma_{21} \dfrac{1}{x} + \gamma_{22} \dfrac{1}{x^2} + \cdots, \end{cases} \tag{25}$$

die der Riccatischen Differentialgleichung (21) formal Genüge leisten.

Diese beiden Reihen sind aber im allgemeinen divergent.

Wir bemerken, daß analoge Betrachtungen auch für eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$(\xi - a)^{p+2}\frac{dy}{d\xi} = f(\xi, y) \qquad (p > 0)$$

angestellt werden können, wo $f(\xi, y)$ eine rationale Funktion von y bedeutet, deren Koeffizienten in der Umgebung von $\xi = a$ holomorphe Funktionen sind. Da die Prinzipien, die bei der Behandlung dieser allgemeinen Differentialgleichung zur Anwendung kommen, im wesentlichen dieselben sind, wie bei der Untersuchung der Riccatischen Differentialgleichung (22), so werden wir uns darauf beschränken, diese Prinzipien an dem Falle der Riccatischen Differentialgleichung zu erläutern und verweisen für die allgemeine Frage auf die Arbeiten von Briot und Bouquet [1]), Poincaré [2]), Fuchs [3]) und Horn [4]).

Von den Reihen (25) können wir durch die Substitution (20) zu Ausdrücken übergehen, die der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (17) formal Genüge leisten.

In der Tat erhalten wir durch formale Ausführung der durch die Gleichungen

$$u_\lambda = e^{\int x^p y_\lambda dx} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

angedeuteten Rechnungsoperationen die beiden Ausdrücke

$$(26) \qquad u_\lambda = e^{\frac{c_\lambda}{p+1}x^{p+1} + \cdots + \gamma_{\lambda p}x}\, x^{\gamma_{\lambda, p+1}}\left(L_{\lambda 0} + L_{\lambda 1}\frac{1}{x} + L_{\lambda 2}\frac{1}{x^2} + \cdots\right), \qquad (\lambda = 1, 2)$$

die in (17) für u eingesetzt diese Differentialgleichung befriedigen, aber im allgemeinen sind die formal hergestellten Reihen

$$(27) \qquad L_{\lambda 0} + L_{\lambda 1}\frac{1}{x} + L_{\lambda 2}\frac{1}{x^2} + \cdots$$

für keinen endlichen Wert von x konvergent, sie entsprechen den für das System vom Range $p + 1$ aufgestellten Normalreihen (13) der Nr. 64.

[1]) Briot et Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, Cah. 36 (1856).

[2]) H. Poincaré, ebenda, Cah. 45 (1878).

[3]) L. Fuchs, Berliner Sitzungsberichte 1886, Werke II, S. 391.

[4]) J. Horn, Crelles Journal, Bd. 119 (1898), S. 196, 267.

66. Begriff der asymptotischen Darstellung. Differentialgleichungen vom Range Eins. Angenäherte Differentialgleichungen.

Wie bereits bemerkt, hat Poincaré[1]) gezeigt, daß den divergenten Reihen, die einer Differentialgleichung formal Genüge leisten, obwohl sie im gewöhnlichen Sinne keine Integrale definieren, doch eine analytische und praktische Bedeutung zukommt. Diese Bedeutung beruht auf dem folgenden Begriffe.

Es sei

$$a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

eine divergente Reihe, $f(x)$ eine in der Umgebung von $x = \infty$ wohldefinierte Funktion, für die der Punkt $x = \infty$ eine Unbestimmtheitsstelle ist.

Wir setzen

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n};$$

dann möge für jedes positive ganzzahlige n

$$\lim \gamma_n = 0$$

sein, wobei das lim-Zeichen (wie auch stets im folgenden) so zu verstehen ist, daß x als reelle positive Größe dem Unendlichen zustrebt. Man sagt dann nach Poincaré, daß jene divergente Reihe die Funktion $f(x)$ asymptotisch darstellt, und schreibt dies:

$$f(x) \sim a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots .$$

Es bestehen dann die unendlich vielen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\lim (f(x) - a_0) = 0, \\
&\lim x\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lim x^n\left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \cdots - \frac{a_n}{x^n}\right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

die zeigen, in welchem Sinne die Partialsummen der divergenten Reihe zur angenäherten Berechnung von $f(x)$ für große positive Werte von x benutzt werden können.

[1]) H. Poincaré, American Journal, Bd. VII (1885), Acta Mathematica, Bd. VIII (1886); diese beiden Abhandlungen, sowie die Arbeiten von J. Horn, Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), S. 453, Bd. 50 (1898), S. 525 bilden die Grundlage der folgenden Untersuchungen (bis Nr. 71 einschließlich).

Eine derartige analytische Deutung gewisser divergenter Reihen findet sich auch schon in älteren Untersuchungen. Z. B. tritt im Art. 29 der oft erwähnten Gaußschen Abhandlung über die nach ihm benannte Reihe[1]), eine solche divergente Reihe auf, deren Koeffizienten die sogenannten Bernoullischen Zahlen sind, und die mit der von Gauß durch $\Pi(z)$ bezeichneten Funktion (von der weiter unten noch die Rede sein wird) in Beziehung gesetzt wird. Gauß sagt daselbst über die Anwendung solcher divergenter Reihen: „Ceterum negari nequit, theoriam talium serierum divergentium adhuc quibusdam difficultatibus premi, de quibus forsan alia occasione pluribus commentabimur." Gauß ist auf diese Frage weder in den von ihm veröffentlichten, noch in seinen nachgelassenen Arbeiten zurückgekommen; die oben wiedergegebene Poincaré-sche Definition der asymptotischen Darstellung dürfte aber wohl die von Gauß gefühlten Schwierigkeiten in der Theorie jener divergenten Reihen beseitigt haben.

In bezug auf die Reihen (25) ergibt sich nun aus den Untersuchungen von Poincaré das folgende Resultat:

Wenn x in einer bestimmten Richtung ins Unendliche geht, so gibt es stets ein Integral der Riccatischen Differentialgleichung (21), das durch eine dieser Reihen asymptotisch dargestellt wird. Ändert man jene Richtung, so stellt die betreffende Reihe im allgemeinen immer ein anderes Integral asymptotisch dar. In ähnlicher Weise stellen die Reihen (27) gewisse, durch die Ausdrücke

$$e^{\frac{c_\lambda}{p+1} x^{p+1} + \cdots + \gamma_{\lambda p} x} \, x^{\gamma_{\lambda, p+1}}$$

dividierte Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (17) asymptotisch dar, wenn x in einer bestimmten Richtung ins Unendliche einrückt[2]).

Wir werden diesen Satz nicht allgemein, sondern nur an einem Beispiele beweisen; der Gang der Untersuchung wird aber an diesem Beispiele derselbe sein wie der, den Poincaré im allgemeinen Falle befolgt hat.

Um zu diesem Beispiele zu gelangen, nehmen wir zunächst die Zahl $p = 0$, also den Rang der Gleichung (17) gleich Eins; dann reduzieren sich die ganzen Funktionen $\varphi_p(x)$, $\varphi_{2p}(x)$ auf Konstanten, und die Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$(28) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\delta_0 + \delta_1 \frac{1}{x} + \cdots\right)\frac{du}{dx} + \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{1}{x} + \cdots\right) u = 0 .$$

[1]) Gauß' Werke Bd. III, S. 152.

[2]) In bezug auf die Bedeutung der formalen Ausdrücke (26) selbst vgl. die Abhandlung von L. W. Thomé, Crelles Journal, Bd. 124 (1902), S. 152.

Die formalen Ausdrücke (26) lauten jetzt

(26a) $$e^{c_\lambda x} x^{\gamma_{\lambda 1}}\left(L_{\lambda 0} + L_{\lambda 1}\frac{1}{x} + \cdots\right), \qquad (\lambda = 1, 2)$$

und nach (24) ist

(24a) $$\gamma_{\lambda 1} = -\frac{c_\lambda \delta_1 + \varepsilon_1}{2c_\lambda + \delta_0}. \qquad (\lambda = 1, 2)$$

Die Bedeutung des Poincaréschen Satzes für die Anwendungen läßt sich an diesem Beispiele deutlich machen. Würde man durch eine physikalische Aufgabe auf die Gleichung (28) geführt werden und handelte es sich um die Bestimmung der Lösungen dieser Gleichung für sehr große Werte von x, so würde der Physiker, nachdem er erkannt hat, daß ihm die exakte Integration dieser Differentialgleichung wesentliche Schwierigkeiten bereitet, etwa folgendermaßen schließen. Wenn x sehr groß ist, so ist $\frac{1}{x}$, und um so mehr eine höhere Potenz von $\frac{1}{x}$ sehr klein, man kann also die mit Potenzen dieser Größe multiplizierten Glieder vernachlässigen und erhält dadurch die „angenäherte Differentialgleichung"

(29) $$\frac{d^2u}{dx^2} + \delta_0 \frac{du}{dx} + \varepsilon_0 u = 0;$$

diese hat konstante Koeffizienten, ihre „charakteristische Gleichung"

$$\varrho^2 + \varrho\delta_0 + \varepsilon_0 = 0$$

hat die Wurzeln c_1, c_2, also lautet das allgemeine Integral

$$\gamma_1 e^{c_1 x} + \gamma_2 e^{c_2 x},$$

wo γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten bedeuten. Die Lösungen $e^{c_1 x}$, $e^{c_2 x}$ der angenäherten Differentialgleichung sind also hier die Exponentialfaktoren in den formalen Ausdrücken (26a), die der ursprünglichen Gleichung (28) genügen. Nun ist man daran gewöhnt, ohne weiteres anzunehmen, daß eine Lösung einer angenäherten Differentialgleichung, die man aus einer gegebenen Differentialgleichung durch Vernachlässigen gewisser höherer Potenzen des Inkrements in deren Koeffizienten erhalten hat, auch eine Annäherung an die durch dieselben Anfangswerte bestimmte Lösung jener gegebenen Differentialgleichung darstellt. Dies ist auch in der Tat der Fall, wenn die Lösungen der gegebenen Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes, auf den sich das Inkrement bezieht, in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind, also stets, wenn dieser Punkt kein singulärer oder wenn er eine Singularität ist, wo die Integrale nicht unbestimmt werden[1]). Ganz anders liegt die Sache aber in dem Falle, wo der betreffende Punkt, wie in dem hier betrachteten Beispiele der Punkt $x = \infty$, ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale ist. Dann können allerdings die Lösungen der ange-

[1]) Vgl. für reelle Werte der Veränderlichen die Nummern 3 und 5.

näherten Differentialgleichung nach dem Poincaréschen Satze auch angenäherte Werte der Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung liefern, aber angenäherte Werte anderer und anderer solcher Lösungen, je nach der Richtung, in der die unabhängige Variable in den betreffenden Punkt einrückt.

67. Laplacesche Differentialgleichung. Integration durch bestimmte Integrale.

In die Klasse der Differentialgleichungen vom Range Eins gehört die Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2} + (a_1 + b_1\xi)\frac{du}{d\xi} + (a_0 + b_0\xi)\, u = 0\,,$$

wo $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ Konstanten bedeuten, und die die Laplacesche Gleichung genannt wird [1]). Um sie direkt als speziellen Fall der Gleichung (28) erscheinen zu lassen, setzen wir

$$a_2 + b_2\xi = x\,,$$

wodurch die Laplacesche Differentialgleichung die Form

$$D_x(u) = x\frac{d^2u}{dx^2} + (\delta_0 x + \delta_1)\frac{du}{dx} + (\varepsilon_0 x + \varepsilon_1)\, u = 0\,,$$

oder nach Division durch x die Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{x}\right)\frac{du}{dx} + \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{x}\right) u = 0 \tag{30}$$

annimmt, wo $\delta_0, \delta_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ Konstanten bedeuten. Es ist dies also gleichsam der einfachste Fall der Gleichung (28) nächst dem Falle der Differentialgleichung (29) mit konstanten Koeffizienten. An diese Gleichung (30) wollen wir unsere weiteren Betrachtungen anknüpfen.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (30) sind $x = 0$ und $x = \infty$. In der Umgebung von $x = 0$ schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\delta_0 x + \delta_1}{x}\frac{du}{dx} + \frac{x(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1)}{x^2}\, u = 0\,,$$

die Gestalt der Koeffizienten lehrt also, daß $x = 0$ kein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale ist. Die determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho\delta_1 = 0$$

[1]) Laplace, Théorie analytique des probabilités (1812), Livre I, première partie; vgl. Jordan, Cours III (1887), S. 253ff.; Schlesinger, Handbuch I. S. 409ff.

hat die Wurzeln 0 und $1-\delta_1$. Es sei $1-\delta_1$ keine ganze Zahl; dann haben die zu $x=0$ gehörigen kanonischen Integrale die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$x^{1-\delta_1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots).$$

Diese Reihen konvergieren nach der allgemeinen Theorie (Nr. 36) innerhalb einer sich bis zum nächsten singulären Punkte hin erstreckenden Umgebung von $x=0$; dieser nächste Punkt ist aber $x=\infty$, die Reihen konvergieren also beständig, d. h. für jeden endlichen Wert von x. Das eine Integral ist demnach eine ganze transzendente Funktion von x, das andere eine ebensolche Funktion, multipliziert mit einer Potenz von x. Die Koeffizienten dieser Reihen sind mit Hilfe der allgemein aufgestellten Rekursionsformel leicht zu ermitteln, die Integration der Differentialgleichung (30) kann also als vollzogen angesehen werden.

Aber abgesehen davon, daß uns diese Differentialgleichung als Paradigma für die Untersuchung der Integrale in der Nähe von $x=\infty$ dienen soll, sprechen auch noch praktische Gründe dafür, bei der erlangten Darstellung eines Fundamentalsystems nicht stehen zu bleiben. Differentialgleichungen von der Form (30) kommen in den Anwendungen sehr häufig vor und in der Regel handelt es sich um die Untersuchung ihrer Lösungen für sehr große Werte von x. Für solche Werte konvergieren die aufgestellten Reihen aber sehr schlecht, d. h. man muß sehr viele Glieder nehmen, um einen einigermaßen angenäherten Wert zu erhalten. Darum hat schon Laplace selbst eine Darstellung der Lösungen der nach ihm benannten Differentialgleichung durch bestimmte Integrale von der Form

$$\int_L w(z)\, e^{zx}\, dz \tag{31}$$

gegeben und wir wollen jetzt zu dieser Darstellung zu gelangen suchen durch Anwendung einer Methode, die der in den Nummern 57—60 für die Gaußsche Differentialgleichung entwickelten analog ist, und gleich dieser auf beliebige lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten übertragen werden kann.

Wir setzen das Integral (31), wo $w(z)$ eine noch zu bestimmende Funktion von z (Dichtigkeitsfunktion), L einen ebenfalls geeignet zu bestimmenden geschlossenen Integrationsweg in der z-Ebene bedeutet [1]), in die linke Seite $D_x(u)$ der Laplaceschen Differentialgleichung ein, dann ist

$$D_x\Big(\int_L w(z)\, e^{zx}\, dz\Big) = \int_L w(z)\, D_x(e^{zx})\, dz\,. \tag{32}$$

[1]) Wir bemerken übrigens, daß das Integral (31) durch einen einfachen Grenzübergang aus dem Integrale (17) der Nr. 57 (S. 227) erhalten werden kann.

Der Ausdruck

$$D_x(e^{zx}) = xz^2 e^{zx} + (\delta_0 x + \delta_1) z e^{zx} + (\varepsilon_0 x + \varepsilon_1) e^{zx}$$

kann in folgender Weise umgeformt werden:

$$D_x(e^{zx}) = (\delta_1 z + \varepsilon_1) e^{zx} + (z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) x e^{zx}$$
$$= (\delta_1 z + \varepsilon_1) e^{zx} + (z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) \frac{de^{zx}}{dz} .$$

Setzen wir nun den homogenen linearen Differentialausdruck erster Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z

$$(z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) \frac{dv}{dz} + (\delta_1 z + \varepsilon_1) v = \varDelta_z(v) ,$$

so haben wir die der Gleichung (20) der Nr. 57 (S. 227) analoge Gleichung

$$D_x(e^{zx}) = \varDelta_z(e^{zx}) ,$$

wodurch (32) in

$$(33) \qquad D_x(\int_L w(z)\, e^{zx} dz) = \int_L w(z)\, \varDelta_z(e^{zx})\, dz$$

übergeht.

Wir fassen nun $\varDelta_z(v)$ als homogenen linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung auf, in dem der Koeffizient der zweiten Ableitung gleich Null ist. Dann lautet nach den Regeln der Nr. 56 der zu $\varDelta_z(v)$ adjungierte Differentialausdruck:

$$\overline{\varDelta}_z(w) = -\frac{d(qw)}{dz} + rw ,$$

wo

$$q = z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0, \quad r = \delta_1 z + \varepsilon_1$$

zu nehmen ist, und der begleitende bilineare Differentialausdruck ist einfach

$$\varDelta_z(v, w) = qvw .$$

Durch Anwendung der Lagrangeschen Identität

$$w\varDelta_z(v) = v\overline{\varDelta}_z(w) + \frac{d}{dz}(qvw) , \quad v = e^{zx} ,$$

auf den auf der rechten Seite der Gleichung (33) unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck, verwandelt sich diese Gleichung in

$$D_x(\int_L w(z)\, e^{zx} dz) = \int_L e^{zx} \overline{\varDelta}_z(w)\, dz + \int_L \frac{d}{dz}(qe^{zx} w)\, dz .$$

Das Integral (31) wird folglich eine Lösung der Differentialgleichung (30) oder

$$D_x(u) = 0$$

darstellen, wenn $w(z)$ als Lösung der Gleichung

$$(34) \qquad \overline{\varDelta}_z(w) = 0$$

und L so gewählt wird, daß

$$(35) \qquad \int\limits_L \frac{d}{dz}\left(q e^{zx} w\right) dz = 0 .$$

68. Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion und des Integrationsweges.

Die Integration der Differentialgleichung (34), die Poincaré die Laplacesche Transformierte von (30) nennt, läßt sich ohne Schwierigkeit vollziehen. Diese Gleichung lautet nämlich

$$\frac{d(qw)}{dz} = rw ,$$

woraus sich

$$\frac{d \log (qw)}{dz} = \frac{r}{q},$$

also durch Integration

$$w = \text{const.} \frac{1}{q} e^{\int \frac{r}{q} dz}$$

ergibt. Die singulären Punkte der Differentialgleichung (34) sind die Wurzeln c_1, c_2 der Gleichung

$$q = z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0 = 0;$$

wir setzen wie im allgemeinen Falle voraus, daß $c_1 \neq c_2$ sei. Denken wir uns

$$\frac{r}{q} = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 z}{(z - c_1)(z - c_2)}$$

in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{r}{q} = \frac{\alpha_1}{z - c_1} + \frac{\alpha_2}{z - c_2},$$

so ist

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_1}{c_1 - c_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_2}{c_2 - c_1},$$

oder, da

$$c_1 + c_2 = -\delta_0 , \quad c_1 - c_2 = -\delta_0 - 2c_2 , \quad c_2 - c_1 = -\delta_0 - 2c_1$$

ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (24a) (S. 259)

$$(36) \qquad \alpha_1 = -\gamma_{11} , \quad \alpha_2 = -\gamma_{21} .$$

Wir haben also bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten

$$w = \frac{1}{q}(z - c_1)^{\alpha_1}(z - c_2)^{\alpha_2} = (z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}$$

und folglich

$$A_z(e^{zx}, w) = e^{zx} q w = e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1}(z - c_2)^{\alpha_2} .$$

Das der Differentialgleichung (30) genügende bestimmte Integral lautet demnach

$$(37)\qquad \int_L e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}dz\,,$$

und der Integrationsweg L ist so zu wählen, daß

$$(35\text{a})\qquad \int_L \frac{d}{dz}\left[e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1}(z-c_2)^{\alpha_2}\right]dz = 0$$

sei.

Wir können zunächst für L eine um die Punkte c_1, c_2 herumgelegte Doppelschleife (c_1, c_2) nehmen (vgl. Nr. 58, S. 231). Das so gebildete Integral

$$u_3 = \int_{(c_1,c_2)} e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}dz$$

läßt sich, wenn wir für e^{zx} seine Entwicklung

$$e^{zx} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{x^k}{k!}\,,$$

die für jedes endliche z und jedes endliche x konvergiert, einsetzen, in der Form

$$u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\int_{(c_1,c_2)} z^k(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}dz$$

darstellen; es ist also eine ganze transzendente Funktion und kann sich folglich von dem oben gefundenen Integrale

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Die Koeffizienten der für u_3 gefundenen Reihenentwicklung sind im wesentlichen Gaußsche Reihen mit konstantem viertem Element.

Um weitere brauchbare Integrationswege L zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

Der Bedingung (35a) wird offenbar genügt, wenn wir L so wählen, daß im Anfangs- und Endpunkte dieses Weges der Ausdruck

$$e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1}(z-c_2)^{\alpha_2}$$

verschwindet. Nun ist

$$\lim_{z\to\infty} e^{xz} = 0\,,$$

wenn z so ins Unendliche rückt, daß für die letzten Wegelemente der reelle Teil von zx negativ ist. Denken wir uns also L so gewählt, daß z in den ersten Wegelementen von L so aus dem Unendlichen kommt, daß der reelle Teil von zx negativ ist, daß dann L einen im Endlichen gelegenen z-Wert im positiven Sinne umschließt und in derselben Weise, wie es aus dem Unendlichen gekommen ist, auch wieder dahin zurückkehrt, so wird dieses L einen brauchbaren Integrationsweg liefern, da bekanntlich e^{zx}, wenn der Exponent zx so unendlich wird, daß sein reeller Teil negativ bleibt, auch noch mit einer beliebigen Potenz von z multipliziert, für $z = \infty$ verschwindet. Würde nun innerhalb des so gewählten Weges L keiner der Punkte c_1, c_2 liegen, so wäre in dem von L umschlossenen Teile der z-Ebene die unter dem Integralzeichen (37) stehende Funktion

$$e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}$$

eindeutig, endlich und stetig, das Integral wäre also nach dem Cauchyschen Integralsatze gleich Null. Um dies zu vermeiden, werden wir L so wählen müssen, daß dieser Weg entweder den Punkt c_1 oder den Punkt c_2 umschließt. Wir erhalten auf diese Weise zwei Wege, die wir durch l_1, l_2 bezeichnen wollen, und die wir als einfache, vom Unendlichen aus um c_1 beziehungsweise c_2 herumgelegte Schleifen ansehen können, die der Bedingung zu genügen haben, daß in ihren unendlich fernen Wegelementen der reelle Teil von zx negativ sei. Die so entstehenden Lösungen

$$u_1 = \int_{l_1} e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}dz\,,$$

$$u_2 = \int_{l_2} e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}dz$$

der Differentialgleichung (30) stellen offenbar mehrdeutige Funktionen von x dar; da nämlich die Richtung der unendlich fernen Wegelemente von l_1, l_2 wesentlich von dem Argumente φ der Größe

$$x = re^{\varphi i}\,, \quad r = |\,x\,|\,,$$

abhängt, so modifizieren sich die Integrationswege l_1, l_2, wenn x einen geschlossenen Umlauf um den Punkt $x = 0$ vollzieht, die Integrale u_1, u_2 erleiden also im allgemeinen eine Wertänderung.

Wir haben jetzt im ganzen drei Lösungen der Differentialgleichung (30) gefunden, es ergibt sich aber sofort die lineare Beziehung, die diese drei Integrale

$$u_1\,,\; u_2\,,\; u_3$$

miteinander verknüpft. Zunächst ist nämlich klar, daß wir zur Herstellung der Doppelschleife (c_1, c_2) die einfachen Schleifen l_1, l_2 benutzen dürfen. Wenn wir in gewohnter Weise die im entgegengesetzten Sinne durchlaufene Schleife l_λ durch l_λ^{-1} bezeichnen, wo also l_λ^{-1} den Punkt c_λ für $\lambda = 1, 2$ im negativen Sinne umschließt, so ist

$$(c_1, c_2) = l_1 l_2 l_1^{-1} l_2^{-1}\,.$$

Beachten wir ferner, daß

$$(z - c_\lambda)^{\alpha_\lambda - 1}\,,$$

auf dem Wege l_λ beziehungsweise l_λ^{-1} fortgesetzt, den Faktor

$$e^{2\pi i \alpha_\lambda} \text{ beziehungsweise } e^{-2\pi i \alpha_\lambda}$$

annimmt, so folgt

$$\int_{(c_1, c_2)} = \int_{l_1} + e^{2\pi i a_1} \int_{l_2} + e^{2\pi i (a_1 + a_2)} \int_{l_1^{-1}} + e^{2\pi i a_2} \int_{l_2^{-1}},$$

wo wir der kürzeren Schreibweise wegen das unter den Integralzeichen auftretende

$$e^{zx}(z-c_1)^{a_1-1}(z-c_2)^{a_2-1}dz$$

weggelassen haben. Nun ist aber offenbar das Resultat der Integration auf den hintereinander durchlaufenen Wegen l_λ, l_λ^{-1} gleich Null; wir haben also

$$\int_{l_1} + e^{2\pi i a_1} \int_{l_1^{-1}} = 0,$$

$$\int_{l_2} + e^{2\pi i a_2} \int_{l_2^{-1}} = 0$$

und folglich

$$\int_{(c_1, c_2)} = (1 - e^{2\pi i a_2}) \int_{l_1} - (1 - e^{2\pi i a_1}) \int_{l_2}$$

oder

$$u_3 = (1 - e^{2\pi i a_2}) u_1 - (1 - e^{2\pi i a_1}) u_2 . \tag{38}$$

69. Reellpositive Werte der unabhängigen Veränderlichen. Reihenentwicklung der Integrale. Gammafunktion.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, und auch um zu Formeln zu gelangen, die für die Anwendungen unmittelbar brauchbar sind, setzen wir uns vor, das Verhalten der Integrale u_1, u_2 für sehr große reelle positive Werte der unabhängigen Veränderlichen x zu erforschen [1]).

Der Bedingung, daß der reelle Teil von xz negativ sei, wird genügt, wenn wir die Integrationsschleifen l_1, l_2 so wählen, daß sie parallel mit der reellen negativen z-Achse aus dem Unendlichen kommen, bis dicht an die Punkte c_1 respektive c_2 herangehen, diese etwa in der Form von kleinen Kreisen im positiven Sinne umschließen und dann wieder parallel mit der negativen Richtung der reellen z-Achse sich ins Unendliche entfernen. Wir betrachten dann zuvörderst das längs des so fixierten Weges l_1 genommene Integral

$$u_1 = \int_{l_1} e^{zx}(z-c_1)^{a_1-1}(z-c_2)^{a_2-1}dz$$

und setzen hierin

$$z - c_1 = t, \quad \gamma = c_1 - c_2 .$$

[1]) Daß die folgenden Untersuchungen auch über das Verhalten in der ganzen Umgebung von $x = \infty$ Aufschluß geben können, hat Horn a. a. O. und Acta Mathem. 23 (1899), S. 171 und auf anderem Wege W. Jacobsthal in seiner Inauguraldissertation (Straßburg 1899) und Mathem. Annalen 56 (1902), S. 129 gezeigt. Vgl. auch G. D. Birkhoff, Am. Transact. 10 (1909), S. 436.

Der der Schleife l_1 entsprechende Integrationsweg k_1 der t-Ebene kommt längs des negativen Teiles der reellen t-Achse aus dem Unendlichen bis dicht an den Punkt $t = 0$ heran, umschließt diesen in Form eines kleinen Kreises im positiven Sinne und kehrt wieder längs der negativen reellen t-Achse nach dem Unendlichen zurück. Wir erhalten für u_1 die Darstellung

$$u_1 = \int\limits_{k_1} e^{x(c_1+t)}\, t^{a_1-1}(t+\gamma)^{a_2-1}\,dt\,.$$

Wenn $|t| < |\gamma|$ ist, so gilt die Entwicklung:

$$(t+\gamma)^{a_2-1} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k\,,$$

$$(39) \qquad f_k = \gamma^{a_2-1-k}\frac{(a_2-1)(a_2-2)\ldots(a_2-k)}{k!};$$

nun ist aber die Bedingung $|t| < |\gamma|$ offenbar nicht längs des ganzen Integrationsweges k_1 erfüllt, wir dürfen also die angegebene Entwicklung nicht in das Integral u_1 einsetzen. Wir nehmen darum nur die $(n+1)$ ersten Glieder derselben und fügen ein Restglied hinzu:

$$(40) \qquad (t+\gamma)^{a_2-1} = f_0 + f_1 t + \cdots + f_n t^n + R_n(t)\,,$$

von dem dann

$$\lim_{n\to\infty} R_n(t) = 0 \qquad (|t| < |\gamma|)$$

gilt. Dies eingesetzt gibt

$$u_1 = e^{c_1 x}\sum_{k=0}^{n} f_k \int\limits_{k_1} e^{xt}\, t^{a_1+k-1}\,dt + e^{c_1 x}\int\limits_{k_1} e^{xt}\, t^{a_1-1} R_n(t)\,dt\,;$$

wir formen zunächst das unter dem Summenzeichen auftretende Integral um.

Führen wir darin durch die Gleichung

$$xt = -\tau$$

die neue Integrationsvariable τ ein, so entspricht der Schleife k_1 eine Schleife λ in der τ-Ebene, die (da x reell positiv ist) längs der positiven reellen τ-Achse aus dem Unendlichen herankommt, den Punkt $\tau = 0$ im positiven Sinne umkreist und sich wieder längs der positiven reellen τ-Achse nach dem Unendlichen entfernt. Es wird

$$\int\limits_{k_1} e^{xt}\, t^{a_1+k-1}\,dt = \int\limits_{\lambda} e^{-\tau}\left(\frac{-\tau}{x}\right)^{a_1+k-1}\frac{-d\tau}{x}\,,$$

$$\int\limits_{k_1} e^{xt}\, t^{a_1+k-1}\,dt = (-1)^{a_1+k} x^{-a_1-k}\int\limits_{\lambda} e^{-\tau}\,\tau^{a_1+k-1}\,d\tau\,,$$

also

$$(41) \qquad \begin{aligned} u_1 = {} & e^{c_1 x} x^{-a_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{a_1+k} f_k x^{-k}\int\limits_{\lambda} e^{-\tau}\,\tau^{a_1+k-1}\,d\tau \\ & + e^{c_1 x}\int\limits_{k_1} e^{xt}\, t^{a_1-1} R_n(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Setzen wir in dem über die Schleife λ erstreckten Integrale p an die Stelle von $\alpha_1 + k$, so sehen wir, daß das Integral

$$\int_\lambda e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau \tag{42}$$

hier eine ähnliche Rolle spielt, wie bei den analogen Betrachtungen in der Theorie der Gaußschen Differentialgleichung (Nr. 59) das Eulersche Integral erster Gattung. Unter der Voraussetzung, daß der reelle Teil von p wesentlich positiv ist, bleibt das Integral für $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ endlich, wir können es also, indem wir den den Punkt $\tau = 0$ umgebenden Teil der Schleife λ unendlich klein werden lassen und beachten, daß τ^{p-1} bei positiver Umkreisung des Nullpunktes den Faktor

$$e^{2\pi i p}$$

annimmt, in der Form

$$\begin{aligned}\int_\lambda e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau &= \int_\infty^0 e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau + e^{2\pi i p}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau\\ &= (e^{2\pi i p}-1)\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau\end{aligned}$$

schreiben. Man setzt gewöhnlich

$$\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau = \Gamma(p)$$

und nennt dies das Eulersche Integral zweiter Gattung oder die Gammafunktion; Gauß bezeichnet diese Funktion abweichend durch die Charakteristik Π, es ist nach Gauß:

$$\Gamma(p) = \Pi(p-1)\,.$$

Für Werte von p, deren reeller Teil nicht positiv ist, gilt als Definition der Gammafunktion die Gleichung

$$\int_\lambda e^{-\tau}\tau^{p-1}\,d\tau = (e^{2\pi i p}-1)\,\Gamma(p)\,,$$

für negative ganzzahlige Werte von p ist $\Gamma(p)$ unendlich. Wir bedürfen einiger einfacher Eigenschaften dieser Funktion, die wir hier ableiten wollen.

Setzen wir

$$\tau = (g+1)\sigma\,,$$

so wird

$$\begin{aligned}\Gamma(p) &= \int_0^\infty e^{-(g+1)\sigma}(g+1)^p\sigma^{p-1}\,d\sigma\\ &= (g+1)^p\int_0^\infty e^{-(g+1)\sigma}\sigma^{p-1}\,d\sigma\,,\end{aligned}$$

oder

$$(1+g)^{-p}\,\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-(g+1)\sigma}\sigma^{p-1}\,d\sigma\,.$$

Wenn $|g| < 1$ ist, kann $(1+g)^{-p}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt werden; entwickelt man ferner rechter Hand $e^{-g\sigma}$ nach Potenzen von $g\sigma$, so kommt

$$\sum_{k=0}^{\infty} g^k(-1)^k \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{1.2\dots k} \Gamma(p)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{g^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-\sigma} \sigma^{k+p-1} d\sigma,$$

und indem man nun beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von g vergleicht,

$$(43) \qquad p(p+1)\dots(p+k-1)\,\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma} \sigma^{k+p-1} d\sigma = \Gamma(p+k),$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir $p = 1$ und beachten, daß

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = 1$$

ist, so folgt aus (43)

$$\Gamma(k+1) = k!.$$

Diese Gleichung kann als Definition der Gammafunktion für positive ganzzahlige Werte von k dienen; einige ältere Analysten waren bestrebt, aus dieser Definition auch die Wertbestimmung der Gammafunktion für beliebige Werte von k abzuleiten; über diese Art von Untersuchungen vergleiche man die Einleitung zu Weierstraß' Abhandlung über die Theorie der analytischen Fakultäten [1]).

Auf Grund der Gleichung (43) ist nun

$$\int_{\lambda} e^{-\tau} \tau^{\alpha_1+k-1} d\tau = (e^{2\pi i\alpha_1} - 1)\,\Gamma(\alpha_1 + k)$$
$$= (e^{2\pi i\alpha_1} - 1)\,\alpha_1(\alpha_1+1)\dots(\alpha_1+k-1)\,\Gamma(\alpha_1),$$

dies in (41) eingesetzt gibt:

$$u_1 = e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (e^{2\pi i\alpha_1} - 1)\,\Gamma(\alpha_1)(-1)^{\alpha_1}.$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k \alpha_1(\alpha_1+1)\dots(\alpha_1+k-1) x^{-k} + e^{c_1 x} \int_{l_1} e^{xt} t^{\alpha_1-1} R_n(t)\, dt.$$

Wenn wir hier n ins Unendliche wachsen lassen und $R_n(t)$ vernachlässigen, so erhalten wir auf der rechten Seite eine (im allgemeinen) divergente Reihe, die mit Rücksicht darauf, daß nach (36) (S. 263)

$$\alpha_1 = -\gamma_{11}$$

ist, mit der ersten der Normalreihen (26a) (S. 259) der Form nach vollkommen übereinstimmt. In ähnlicher Beziehung steht u_2 zu der anderen dieser Normalreihen, wie man durch analog geführte Rechnung sofort erkennt.

[1]) K. Weierstraß. Crelles Journal, 51 (1856), Werke I, S. 153.

Wir werden nun beweisen, daß, wenn x als positive reelle Größe ins Unendliche rückt, für jeden Wert von n

$$(44)\qquad \lim_{x\to+\infty} x^n \Big\{ u_1 e^{-c_1 x} x^{\alpha_1} - (-1)^{\alpha_1}(e^{2\pi i\alpha_1}-1)\,\Gamma(\alpha_1)\cdot \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k\,\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+k-1)\,x^{-k}\Big\} = 0$$

ist, damit wird im Sinne der Poincaréschen Definition (Nr. 66) gezeigt sein, daß die divergente Reihe

$$(-1)^{\alpha_1}(e^{2\pi i\alpha_1}-1)\,\Gamma(\alpha_1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f_k\,\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+k-1)\,x^{-k}$$

die Funktion

$$u_1 e^{-c_1 x} x^{\alpha_1}$$

asymptotisch darstellt, falls x als positive reelle Größe ins Unendliche rückt.

70. Beweis der asymptotischen Darstellung durch Untersuchung des Restgliedes.

Mit Rücksicht auf die gefundene Darstellung von u_1 können wir die zu beweisende Gleichung (44) auch so schreiben:

$$\lim x^{n+\alpha_1}\int_{k_1} e^{xt}\,t^{\alpha_1-1}R_n(t)\,dt = 0\ ^{1)}.$$

Die Schleife k_1 denken wir uns folgendermaßen. Von $t = -\infty$ ausgehend läuft sie längs der negativen reellen t-Achse bis zum Punkte $t = -p$, wo p einen positiven reellen Wert bedeutet, dann in einem um $t = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius p beschriebenen Kreise C im positiven Sinne um $t = 0$ herum, dann von $t = -p$ wieder längs der negativen reellen Achse nach $t = -\infty$ zurück. Es ist dann

$$(45)\qquad x^{n+\alpha_1}\int_{k_1} e^{xt}\,t^{\alpha_1-1}R_n(t)\,dt = x^{n+\alpha_1}\Big\{\int_{-\infty}^{-p} + \int_C + e^{2\pi i\alpha_1}\int_{-p}^{-\infty} e^{xt}\,t^{\alpha_1-1}R_n(t)\,dt\Big\},$$

wo der Integrand in den beiden ersten Integralen rechter Hand derselbe ist, wie in dem Integrale auf der linken Seite, und in dem Integranden des dritten Integrals auf der rechten Seite $R_n(t)$ den Wert bedeutet, den $R(t)$ annimmt, nachdem t die Kurve C durchlaufen hat.

Wir beginnen mit der Untersuchung des über die Kurve C hin erstreckten Integrals

[1]) Das lim-Zeichen ist hier und im folgenden wieder so zu verstehen, daß x als reelle positive Größe nach Unendlich strebt.

$$(46) \qquad x^{\alpha_1+n}\int_C e^{xt}\,t^{\alpha_1-1}R_n(t)\,dt\,,$$

worin w' durch

$$xt = -\tau$$

τ als neue Integrationsvariable einführen. Dem Kreise C der t-Ebene entspricht der um $\tau = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius px beschriebene Kreis K der τ-Ebene. Unser Integral (46) lautet dann

$$(-1)^{\alpha_1}x^n\int_K e^{-\tau}\,\tau^{\alpha_1-1}R_n\left(\frac{-\tau}{x}\right)d\tau\,.$$

$R_n(t)$ ist als Restglied der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ durch die Gleichung (40) (S. 267) definiert. Wenn diese Reihe konvergiert, so gibt es bekanntlich stets zwei positive Größen M und a von der Beschaffenheit, daß

$$|f_k| < \frac{M}{a^k}\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty)$$

also ist in diesem Falle für $|t| < a$

$$|R_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k t^k\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k t^k| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{Mt^k}{a^k}\right|,$$

$$\leqq M\left|\frac{t}{a}\right|^{n+1}\frac{1}{1-\left|\frac{t}{a}\right|}\,.$$

Wir finden demnach für den absoluten Betrag unseres Integrals die Ungleichung

$$\left|x^{\alpha_1+n}\int_C e^{xt}R_n(t)\,t^{\alpha_1-1}dt\right| < x^n\int_K M\left|\frac{t}{a}\right|^{n+1}\frac{1}{1-\left|\frac{t}{a}\right|}\,|\tau^{\alpha_1-1}e^{-\tau}d\tau|\,,$$

$$< x^n\frac{M}{a^{n+1}}\int_K\left|\frac{\tau}{x}\right|^{n+1}\frac{1}{1-\left|\frac{\tau}{ax}\right|}\,|\tau^{\alpha_1-1}e^{-\tau}d\tau|\,.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Ungleichung $|t| < a$ auf der Peripherie des Kreises C besteht, d. h. daß $p < a$ sei. Wenn t innerhalb oder auf der Peripherie von C liegt, d. h. wenn $|t| \leqq p$ ist, hat man $|\tau| \leqq px$, also

$$\frac{1}{1-\left|\frac{\tau}{ax}\right|} \leqq \frac{1}{1-\frac{p}{a}}$$

und folglich

$$\left|x^{\alpha_1+n}\int_C e^{tx}R_n(t)\,t^{\alpha_1-1}dt\right| < \frac{1}{x}\,\frac{M}{a^{n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{p}{a}}\int_K|\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}d\tau|\,.$$

Die Integration in der τ-Ebene kann, ohne den Wert des Integrals zu ändern, statt über den Kreis K über irgendeine vom Punkte $\tau = px$ ausgehende und den Punkt $\tau = 0$ einschließende geschlossene Kurve erstreckt werden, da ja die unter dem Integralzeichen stehende Funktion $e^{-\tau}\tau^{\alpha_1-1}R_n\left(-\frac{\tau}{x}\right)$ im Innern von K nur den einzigen singulären Punkt $\tau = 0$ besitzt. Wir ersetzen also K durch eine von $\tau = px$ ausgehende um $\tau = 0$ herumgelegte Schleife k, die von $\tau = px$ längs der reellen positiven τ-Achse bis dicht an $\tau = 0$ herangeht, diesen Punkt in einem unendlich kleinen Kreise im positiven Sinne umschließt und wieder längs der reellen τ-Achse nach px zurückkehrt. Die durchgeführten Abschätzungen bleiben auch für diesen Integrationsweg k gültig. Nehmen wir n so groß, daß der reelle Teil von

$$\alpha_1 + n + 1$$

positiv ist, so bleibt das Integral

$$\int |\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}\,d\tau|$$

im Punkte $\tau = 0$ endlich und verschwindet demnach, wenn man es über den unendlich kleinen Kreis um $\tau = 0$ erstreckt; wir haben folglich

$$\int\limits_k |\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}\,d\tau| = 2\int_0^{px}\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}\,d\tau\,,$$

also lautet unsere Ungleichung

$$\left|x^{\alpha_1+n}\int\limits_C e^{tx}R_n(t)\,t^{\alpha_1-1}\,dt\right| < \frac{1}{x}\,\frac{M}{a^{n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{p}{a}}\,2\int_0^{px}\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}\,d\tau\,.$$

Wir untersuchen nun den Grenzwert der rechten Seite, wenn x als positive reelle Größe ins Unendliche geht. Zunächst ist

$$\lim\int_0^{px}\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}\,d\tau = \int_0^{\infty}\tau^{\alpha_1+n}e^{-\tau}\,d\tau = \Gamma(\alpha_1+n+1)$$

(wir sehen, beiläufig bemerkt, daß die Beschränkung, die wir der Zahl n auferlegt haben, unwesentlich ist, sie wurde nur gemacht, um den Grenzübergang bequemer vollziehen zu können); die übrigen konstanten Faktoren der rechten Seite sind endlich, x^{-1} verschwindet, also ist der Grenzwert gleich Null, d. h. wir haben als erstes Resultat

$$\lim x^{\alpha_1+n}\int\limits_C e^{tx}R_n(t)\,t^{\alpha_1-1}\,dt = 0\,. \tag{47}$$

Es folgt nun die Untersuchung der auf die geradlinigen Teile von k_1 bezüglichen Integrale auf der rechten Seite von (45). Für diese gilt die Ungleichung $|t| < a$ nicht, wir müssen folglich $R_n(t)$ direkt durch

$$R_n(t) = (t+\gamma)^{\alpha_2-1} - \sum_{k=0}^{n} f_k t^k$$

definieren. Wenn γ innerhalb des Kreises C liegt, so ergibt sich (vgl. S. 270)

$$R_n(t) = e^{2\pi i\alpha_2}(t+\gamma)^{\alpha_2-1} - \sum_{k=0}^{n} f_k t^k ,$$

wir haben also, abgesehen von konstanten Faktoren, die beiden Integrale

$$(\mathrm{I}) = x^{\alpha_1+n}\int_{-p}^{-\infty} e^{tx}(t+\gamma)^{\alpha_2-1}t^{\alpha_1-1}\,dt ,$$

$$(\mathrm{II}) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^{\alpha_1+n}\int_{-p}^{-\infty} t^{\alpha_1+k-1}e^{tx}\,dt$$

zu untersuchen. Wir beginnen mit (I).

Für hinreichend große Werte von t ist offenbar

$$|\log t| < |t| , \quad |\log(t+\gamma)| < |t| ,$$

man kann folglich eine positive Größe h stets so angeben, daß

$$|\log t^{\alpha_1-1}(t+\gamma)^{\alpha_2-1}| < h\,|t| ,$$

also

$$|t^{\alpha_1-1}(t+\gamma)^{\alpha_2-1}| < e^{h|t|}$$

ist. In dem Integrale (I) ist t während des Verlaufs der Integration reell negativ, also

$$|t^{\alpha_1-1}(t+\gamma)^{\alpha_2-1}| < e^{-ht}$$

und folglich

$$|(\mathrm{I})| < x^{\alpha_1+n}\int_{-p}^{-\infty} e^{t(x-h)}\,dt$$

$$< x^{\alpha_1+n}\left\{\left[\frac{e^{t(x-h)}}{x-h}\right]_{t=-\infty} - \frac{e^{-p(x-h)}}{x-h}\right\}.$$

Für ein hinreichend großes positiv reelles x ist $x-h$ positiv, also

$$\lim_{t\to-\infty} e^{t(x-h)} = 0 ,$$

ebenso ist

$$\lim x^{\alpha_1+n}\frac{e^{-p(x-h)}}{x-h} = 0$$

und folglich

$$(48) \qquad \lim(\mathrm{I}) = 0 .$$

Bei der Untersuchung von (II) nehmen wir das unter dem Summenzeichen stehende Integral

$$x^{\alpha_1+n}\int_{-p}^{-\infty} t^{\alpha_1+k-1}e^{tx}\,dt , \qquad (k \leqq n)$$

und führen darin wieder

$$-\tau = tx$$

als neue Integrationsvariable ein. Das Integral wird dann gleich

$$x^{n-k}(-1)^{\alpha_1+k}\int_{px}^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{\alpha_1+k-1}\,d\tau ;$$

rückt x als positive Größe ins Unendliche, so fällt die untere Grenze px mit der oberen $+\infty$ zusammen, das Integral reduziert sich also auf den Grenzwert seines Elementes für $t = px$, $x = +\infty$, und wir erhalten:

$$\lim x^{\alpha_1+n} \int_p^{-\infty} t^{\alpha_1+k-1} e^{tx}\, dt$$

$$= \lim \left(x^{n-k} e^{-px} (px)^{\alpha_1+k-1} (-1)^{\alpha_1+k}\right) = 0\,,$$

daraus folgt aber, daß auch

(49) $$\lim\,(\mathrm{II}) = 0$$

ist.

Die Gleichungen (47), (48), (49) ergeben nunmehr, daß auch die linke Seite der Gleichung (45) der Grenze Null zustrebt, wenn x als positive Größe ins Unendliche rückt, und damit ist die Richtigkeit der Gleichung (44) bewiesen. Wir schreiben diese Gleichung und die analoge für u_2 geltende unter Benutzung des in der Nr. 66 (S. 257) eingeführten Zeichens in der Form

$$e^{-c_1 x} x^{\alpha_1} u_1 \sim (-1)^{\alpha_1} (e^{2\pi i \alpha_1} - 1)\, \Gamma(\alpha_1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k\, \alpha_1 (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_1 + k - 1)\, x^{-k},$$

$$e^{-c_2 x} x^{\alpha_2} u_2 \sim (-1)^{\alpha_2} (e^{2\pi i \alpha_2} - 1)\, \Gamma(\alpha_2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k\, \alpha_2 (\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_2 + k - 1)\, x^{-k},$$

wo die g_k die Koeffizienten der Entwicklung von

$$(t + c_2 - c_1)^{\alpha_1 - 1}$$

nach positiven ganzen Potenzen von t bedeuten (vgl. die Definition der f_k, Gleichung (39), S. 267).

71. Die Besselsche Differentialgleichung[1]).

Wir wollen nun auf Grund der Resultate der vorhergehenden Nummern die Theorie einer berühmten und für die Anwendungen besonders wichtigen Differentialgleichung entwickeln, die gewöhnlich die Besselsche genannt wird und die folgende Form hat:

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J = 0\;;$$

hierin möge n eine beliebige konstante Größe bedeuten, für die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, daß ihr reeller Teil nicht negativ ist.

[1]) L. Euler, Novi commentarii Acad. Petropolit. Bd. X (1764) 1766, S. 243; J. Fourier, Théorie de la chaleur (1822), S. 369; Fr. W. Bessel, Abhandl. der Berl. Akademie 1824. Vgl. nebst den S. 257 zitierten Autoren auch C. Jordan, Cours III (1887), S. 255 ff.

Setzen wir

$$J = x^n u\,,$$

so ergibt sich für u die Differentialgleichung

$$(50)\qquad x\frac{d^2u}{dx^2} + (2n+1)\frac{du}{dx} + xu = 0\,,$$

die aus der Differentialgleichung (30) (S. 260) hervorgeht, indem man daselbst

$$\varepsilon_0 = 1\,,\quad \varepsilon_1 = 0\,,\quad \delta_0 = 0\,,\quad \delta_1 = 2n+1$$

nimmt. Die Differentialgleichung (50) besitzt ein ganzes transzendentes Integral, und eines, das eine ganze transzendente Funktion, multipliziert mit

$$x^{1-\delta_1} = x^{-2n}\,,$$

ist. Die charakteristische Gleichung lautet jetzt

$$\varrho^2 + 1 = 0\,,$$

wir haben also

$$c_1 = i\,,\quad c_2 = -i\,,$$

und

$$\alpha_1 = \frac{2n+1}{2}\,,\quad \alpha_2 = \frac{2n+1}{2}\,.$$

Die Integrale u_1, u_2 haben demnach die Form (vgl. S. 265):

$$u_1 = \int\limits_{l_1} e^{zx}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}\,dz\,,$$

$$u_2 = \int\limits_{l_2} e^{zx}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}\,dz\,.$$

Die Koeffizienten f_k ergeben sich durch Aufstellung der Entwicklung von

$$(t+\gamma)^{\alpha_1-1} = (t+2i)^{\frac{2n-1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{2n-1}{2}\left(\frac{2n-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}-k+1\right)}{1\,.\,2\ldots k}(2i)^{\frac{2n-1}{2}-k}t^k\,,$$

$$f_k = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}{2^k\,.\,k\,!}(2i)^{\frac{2n-1}{2}-k}\,,$$

die g_k unterscheiden sich von den f_k nur durch das Vorzeichen von i. Indem wir noch beachten, daß

$$e^{2\pi i\alpha_1} - 1 = e^{\pi i(2n+1)} - 1 = -(1+e^{2\pi i n})\,,$$

$$-1 = e^{\pi i}\,,\quad i = e^{\frac{\pi i}{2}}\,,$$

ist, finden wir die asymptotische Darstellung

$$x^{\frac{2n+1}{2}}e^{-xi}u_1 \sim e^{-\frac{\pi i}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+e^{2\pi i n})\,2^{n-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4n^2-1}{4}\cdot\frac{4n^2-9}{4}\cdots\frac{4n^2-(2k-1)^2}{4}\cdot\frac{(2ix)^{-k}}{1\,.\,2\ldots k}\,,$$

und analog:

$$x^{\frac{2n+1}{2}} e^{xi} u_2 \sim e^{\frac{\pi i}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+e^{2\pi i n})\,2^{n-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4n^2-1}{4}\cdot\frac{4n^2-9}{4}\cdots\frac{4n^2-(2k-1)^2}{4}\cdot\frac{(-2ix)^{-k}}{1\,.\,2\ldots k}\,.$$

Da der reelle Teil von n nicht negativ, also der reelle Teil von $-\frac{2n+1}{2}$ jedenfalls wesentlich negativ ist, so haben wir

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\pm xi}\, x^{-\frac{2n+1}{2}} = 0$$

und können folglich die beiden vorstehenden asymptotischen Ausdrücke im Sinne der Definition der asymptotischen Darstellung (Nr. 66, S. 257) auch in der Form schreiben:

$$u_1 \sim x^{-\frac{2n+1}{2}} e^{xi} e^{-\frac{\pi i}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+e^{2\pi i n})\,2^{n-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4n^2-1}{4}\cdot\frac{4n^2-9}{4}\cdots\frac{4n^2-(2k-1)^2}{4}\cdot\frac{(2ix)^{-k}}{1\,.\,2\ldots k}\,,$$

$$u_2 \sim x^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-xi} e^{\frac{\pi i}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+e^{2\pi i n})\,2^{n-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4n^2-1}{4}\cdot\frac{4n^2-9}{4}\cdots\frac{4n^2-(2k-1)^2}{4}\cdot\frac{(-2ix)^{-k}}{1\,.\,2\ldots k}\,.$$

Wenn n die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, so brechen die hier auftretenden Reihen ab; die im allgemeinen divergenten Ausdrücke stellen also in diesem Falle wirkliche Lösungen der Differentialgleichung (50) dar.

Nun ergibt sich, nach Gleichung (38) (S. 266), das ganze transzendente Integral u_3 in der Form

$$(51)\qquad u_3 = \left(1-e^{2\pi i\frac{2n+1}{2}}\right)(u_1-u_2) = (1+e^{2\pi i n})(u_1-u_2)\,,$$

so daß sich aus den asymptotischen Darstellungen von u_1, u_2 sofort auch die asymptotische Darstellung von u_3 für positive reelle sehr große Werte von x angeben läßt. Wir stellen vorerst noch die beständig konvergente Entwicklung von u_3 nach positiven ganzen Potenzen von x auf.

Wir haben (vgl. S. 264)

$$u_3 = \int_{(i,-i)} e^{zx}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_{(i,-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz\,.$$

Bezeichnen wir durch (i), $(-i)$ einfache von einem beliebigen nicht singulären Punkte aus um die Punkte i, $-i$ herumgelegte Schleifen, so ist (vgl. z. B. die analoge Umformung S. 265, 266)

$$\int_{(i,-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz = (1+e^{2\pi i n})\left\{\int_{(i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz - \int_{(-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz\right\}.$$

Setzt man in dem längs $(-i)$ erstreckten Integrale $-z$ an die Stelle von z, so ist für ein gerades k

$$\int_{(-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz = -\int_{(i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz,$$

und für ein ungerades k

$$\int_{(-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz = \int_{(i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz.$$

Es bleiben also in dem Ausdrucke für u_3 nur die den geraden Werten von k entsprechenden Glieder stehen, d. h. wir erhalten

$$u_3 = (1+e^{2\pi i n})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,2\int_{(i)} z^{2k}(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz.$$

Machen wir in dem unter dem Summenzeichen auftretenden Integrale die Substitution

$$z = i\tau^{\frac{1}{2}},$$

so wird

$$2\int_{(i)} z^{2k}(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}dz = (-1)^k\, i\int_{(1)} \tau^{k-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{n-\frac{1}{2}}d\tau,$$

wo (1) eine um den Punkt $\tau = 1$ herumgelegte einfache Schleife bedeutet. Nehmen wir zum Ausgangspunkte dieser Schleife den Punkt $\tau = 0$ und setzen voraus, daß der reelle Teil von $n+\frac{1}{2}$ wesentlich positiv ist, so können wir das über die Schleife (1) erstreckte Integral in bekannter Weise umformen:

$$\begin{aligned}
\int_{(1)} \tau^{k-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{n-\frac{1}{2}}d\tau &= \int_0^1 + e^{2\pi i(n-\frac{1}{2})}\int_1^0 \\
&= (1+e^{2\pi i n})\int_0^1 \tau^{k-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{n-\frac{1}{2}}d\tau \\
&= (1+e^{2\pi i n})\,B(k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) \\
&= (1+e^{2\pi i n})\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}B(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Wir benutzen nun eine Formel, die die Betafunktion durch Gammafunktionen auszudrücken lehrt und deren Beweis man in jedem Lehrbuche der Integralrechnung findet:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Hiernach ist:

$$B(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)},$$

oder, da nach einer bekannten Formel[1] $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist,

[1] Vgl. Gauß a. a. O., Werke III, S. 148.

$$B(\tfrac{1}{2}, n + \tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n + \tfrac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}.$$

Beachten wir ferner, daß

$$\Gamma(n + 1) \cdot (n + 1)(n + 2) \ldots (n + k) = \Gamma(n + k + 1), \quad \Gamma(k + 1) = k!$$

ist, so erhalten wir endlich für u_3 die Reihendarstellung:

$$u_3 = (1 + e^{2\pi i n})^2\, i \sqrt{\pi}\, \Gamma(n + \tfrac{1}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(k + 1)\,\Gamma(n + k + 1)}.$$

Um an die in der Literatur gebräuchlichen Formeln anknüpfen zu können, setzen wir:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(k + 1)\,\Gamma(n + k + 1)},$$

dann ist nach (51)

$$U = \frac{u_1 - u_2}{(1 + e^{2\pi i n})\, i \sqrt{\pi}\, \Gamma(n + \tfrac{1}{2})}$$

und wir können also die asymptotische Darstellung von U für große positive reelle Werte von x ohne weiteres angeben. Man findet nach einigen einfachen Umformungen

$$U \sim \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, x^{-n-\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\frac{2n + 1}{4}\pi - x\right) P + \sin\left(\frac{2n + 1}{4}\pi - x\right) Q\right],$$

wo P, Q die divergenten Reihen

$$P = 1 - \frac{[(\tfrac{1}{2})^2 - n^2][(\tfrac{3}{2})^2 - n^2]}{2!\,(2x)^2} + \cdots,$$

$$Q = -\frac{(\tfrac{1}{2})^2 - n^2}{2x} + \cdots$$

bedeuten.

Durch Multiplikation von U mit x^n erhalten wir eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung. Man bezeichnet den Ausdruck

$$J_n(x) = \frac{U \cdot x^n}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k + 1)\,\Gamma(k + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

der für ein positives ganzzahliges n eine ganze transzendente Funktion von x darstellt, als Besselsche oder Zylinder-Funktion n-ter Ordnung. Ihre asymptotische Darstellung lautet:

$$(52) \qquad J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(\frac{2n + 1}{4}\pi - x\right) P + \sin\left(\frac{2n + 1}{4}\pi - x\right) Q\right]$$

und, wenn wir uns auf die erste Annäherung beschränken, d. h. $P = 1$, $Q = 0$ nehmen,

$$(53) \qquad J_n(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right],$$

eine Formel, die in den Anwendungen oft benutzt wird.

Für die Besselsche Funktion erster Ordnung ($n = 1$) gibt die Darstellung (52)

$$J_1(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1 + \frac{15}{128 x^2} - \cdots\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{3}{8x} - \frac{105}{1024 x^3} + \cdots\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right];$$

man kann daraus eine asymptotische Beziehung für die Nullstellen von $J_1(x)$ gewinnen. Aus $J_1(\lambda) = 0$ folgt nämlich

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4} - \lambda\right) = \operatorname{tg}(\lambda - (k + \tfrac{1}{4})\pi) \backsim -\frac{3}{8\lambda} + \frac{75}{512\lambda^3} - \cdots,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Danach ist

$$(k + \tfrac{1}{4})\pi - \lambda \backsim \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{8\lambda} - \frac{75}{512\lambda^3} + \cdots\right) \backsim \frac{3}{8\lambda} - \frac{21}{128\lambda^3} + \cdots,$$

also

$$\lambda \backsim \pi(k + \tfrac{1}{4}) - \frac{3}{8\lambda} + \frac{21}{128\lambda^3} - \cdots.$$

Diese Formel ist von P. A. Hansen 1843 veröffentlicht worden [1]); sie findet sich aber schon im „Tagebuch" von Gauß mit dem Datum des 16. Oktober 1797 [2]), woraus sich schließen läßt, daß Gauß zu dieser Zeit die asymptotische Darstellung von $J_1(x)$ gekannt hat. Zum ersten Male bekanntgemacht hat die asymptotische Darstellung für $J_1(x)$ wohl Hansen a. a. O., für $J_0(x)$ findet sie sich 1823 bei S. D. Poisson [3]).

Für $x = \infty$ reduziert sich die Differentialgleichung (50) auf

$$(54) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + u = 0,$$

deren allgemeines Integral durch $c_1 \sin(x + c_2)$ mit den willkürlichen Konstanten c_1, c_2 gegeben wird. Wir sehen aus den abgeleiteten asymptotischen Darstellungen von u_1, u_2, daß im Sinne der Auseinandersetzungen am Schluß der Nr. 66 die Lösungen von (50) in der Tat für große Werte von x asymptotisch durch die Lösungen von (54) dargestellt werden. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1913 hat P. Boutroux [4]) aus diesem asymptotischen Verhalten der Besselschen Funktion tiefgehende Fol-

[1]) P. A. Hansen, Ermittlung der absoluten Störungen etc., Gotha 1843, S. 115, 116.

[2]) C. F. Gauß, Werke, Bd. X_1 (1917), S. 525, vgl. ebenda die Anmerkungen S. 388, 389.

[3]) S. D. Poisson, Journal de l'École Polyt. 19 (1823), S. 249.

[4]) P. Boutroux, Annales de l'École Normale supérieure, 30, S. 255 ff.

gerungen gezogen, die um so bemerkenswerter sind, als sie sich auf allgemeinere Funktionsklassen erweitern lassen. Wir kommen auf diese Fragestellungen im folgenden Kapitel (Nr. 80) zurück.

In bezug auf die Besselsche Differentialgleichung bemerken wir noch, daß, da diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn man $-n$ an die Stelle von n setzt, auch $J_{-n}(x)$ eine Lösung von ihr darstellt. Wenn n keine ganze Zahl ist, so bilden

$$J_n(x), \quad J_{-n}(x)$$

ein Fundamentalsystem; dagegen unterscheiden sich diese beiden Integrale im Falle eines ganzzahligen n nur durch den konstanten Faktor $(-1)^n$. Die Wurzeln der zu $x=0$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung der Besselschen Differentialgleichung sind n und $-n$, der Fall, wo n eine ganze Zahl ist, zeigt also nach der allgemeinen Theorie an, daß nur zu dem Exponenten $|n|$ ein in Reihenform darstellbares Integral, nämlich $J_{|n|}(x)$ gehört, während das zweite Element des kanonischen Fundamentalsystems einen Logarithmus enthält. Man vergleiche Näheres über dieses zweite Integral z. B. bei E. Heine [1]), C. Neumann [2]) und N. Nielsen [3]).

72. Darstellung der Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung durch Fakultätenreihen.

Für die Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung (30), Nr. 67 haben wir mit Hilfe ihrer Ausdrücke durch die Laplaceschen Integrale die nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden, divergenten Entwicklungen hergestellt und nachgewiesen, daß diese Entwicklungen eine asymptotische Darstellung jener Lösungen liefern. Es ist aber möglich, wie Horn [4]) allgemein gezeigt hat, an die Stelle der divergenten Potenzreihen, die linearen Differentialgleichungen genügen, konvergente, sogenannte Fakultätenreihen treten zu lassen, d. h. Reihen von der Form

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x(x+1)} + \frac{a_3}{x(x+1)(x+2)} + \cdots \text{in inf.},$$

wo die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ konstante Koeffizienten bedeuten. Eine solche Reihe hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie, wenn sie für $x = x_0$ konvergiert, auch für jedes x konvergiert, dessen reeller Teil größer ist als der reelle Teil von x_0, d. h. daß ihr Konvergenzgebiet stets eine Halb-

[1]) E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I (1878), S. 190ff.

[2]) C. Neumann, Theorie der Besselschen Funktionen (1869).

[3]) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904.

[4]) J. Horn, Mathem. Annalen Bd. 71 (1911), S. 510; vgl. Watson, Rendiconti del Circ. mat. di Palermo 34 (1912), S. 41.

ebene ist, die rechts von einer zur reellen Achse senkrechten Geraden liegt. Wir werden im folgenden [1]) nichts aus der Theorie der Fakultätenreihen als bekannt voraussetzen, knüpfen vielmehr unmittelbar an die Integraldarstellung

$$(55) \qquad u_1 = \int_{l_1} e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}\,dz$$

der Lösung u_1 der Differentialgleichung (30) an, wie sie in der Nr. 68 gegeben worden ist.

Wir stellen uns die Aufgabe, für die Funktion

$$w(z) = (z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}$$

eine Reihenentwicklung zu finden, die für den ganzen Integrationsweg l_1 konvergiert. Dabei denken wir uns l_1 jetzt in folgender Weise gelegt. Von dem Punkte c_1 der z-Ebene aus sei ein Halbstrahl s nach dem Unendlichen gelegt, der mit der positiven reellen Achse den Winkel θ bildet, und der nicht durch c_2 hindurchgeht. Der Weg l_1 durchläuft dann vom Unendlichen kommend den Halbstrahl s bis dicht vor c_1, umkreist c_1 im positiven Sinne und kehrt längs s wieder nach dem Unendlichen zurück. Das Integral (55) hat dann (siehe Nr. 68, S. 265) einen Sinn und stellt eine Lösung der Differentialgleichung (30) dar, wenn für hinreichend große Werte von z $\Re(zx) < 0$ [2]) ist, d. h. also wenn

$$(56) \qquad \Re(e^{i\theta} x) < 0 .$$

Wir denken uns nun um den Halbstrahl s und seine Verlängerung als Mittellinie einen Parallelstreifen gelegt, der den Punkt c_2 nicht enthält (Fig. 4); dies wird erreicht, wenn die halbe Breite dieses Streifens — die wir γ nennen wollen — kleiner gewählt wird als $\Im((c_2 - c_1)\,e^{-i\theta})$. Durch die Funktion

$$z - c_1 = k \log t\,, \quad k = -\frac{\gamma}{\pi}\,e^{\theta i}\,,$$

wird unser Parallelstreifen auf die längs der negativen reellen t-Achse aufgeschnittene t-Ebene abgebildet; dem Punkte $z = c_1$ entspricht $t = 1$,

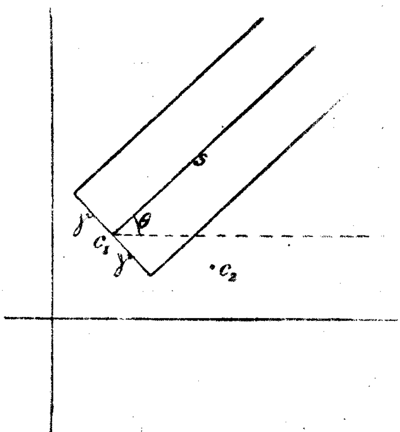

Fig. 4

[1]) Die folgende Darstellung schließt sich an Horn, Math. Zeitschrift 8 (1920), S. 100 ff. und F. Nevanlinna, Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen, Dissertation, Helsingfors 1918 an; vgl. auch die z. Z. im Druck befindliche Arbeit von J. Horn, Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen, Math. Zeitschrift 13 (1922).

[2]) $\Re(a)$ bedeutet den reellen Teil, $\Im(a)$ den Koeffizienten von i der komplexen Größe a.

$z = \infty$ entspricht $t = 0$, dem Halbstrahl s entspricht also das Stück $(0 \ldots 1)$ der reellen t-Achse. Dem um $t = 1$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreise K der t-Ebene entspricht folglich ein Gebiet G der z-Ebene, das s ganz in seinem Innern enthält. Die Funktion

$$\varphi(t) = w(k \log t + c_1) = (k \log t)^{\alpha_1 - 1}(k \log t + c_1 - c_2)^{\alpha_2 - 1}$$

hat in K die singulären Stellen $t = 0$, $t = 1$; durch Multiplikation mit $(1 - t)^{1-\alpha_1}$ wird die Singularität bei $t = 1$ beseitigt, und man erhält die innerhalb des Kreises K konvergente Entwicklung

$$(57) \qquad \varphi(t)\,(1 - t)^{1-\alpha_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (1 - t)^\nu .$$

Im Punkte $t = 0$ verhält sich $\varphi(t)$ wie die $(\alpha_1 + \alpha_2 - 2)$-te Potenz von $\log t$; multipliziert man also $\varphi(t)\,(1 - t)^{1-\alpha_1}$ mit t^ε, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so bleibt dieses Produkt in $t = 0$ und damit im Innern und auf der Peripherie des Kreises K beschränkt. Das gleiche gilt für den Ausdruck

$$(57\text{a}) \quad \frac{d}{dt}\left[\varphi(t)\,(1 - t)^{1-\alpha_1}\right] = -\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)\, b_{\nu+1}\,(1 - t)^\nu ,$$

wenn man ihn mit $t^{\varepsilon+1}$ multipliziert; d. h. es gibt für jedes vorgeschriebene positive ε eine positive Zahl δ, so daß im Innern und auf der Peripherie von K

$$\left| \frac{d}{dt}\left[\varphi(t)\,(1 - t)^{1-\alpha_1}\right] t^{\varepsilon+1} \right| < \delta$$

ist. Um eine Abschätzung für die Koeffizienten b_ν der Entwicklung (57) vornehmen zu können, bilden wir den Ausdruck

$$\psi(t) = \frac{d}{dt}\left[\varphi(t)\,(1 - t)^{1-\alpha_1}\right] t^{2\varepsilon},$$

dann ist innerhalb und auf dem Rande von K

$$(58) \qquad |\,\psi(t)\,| < \delta\,|\,t\,|^{\varepsilon-1}$$

und man hat innerhalb K eine Entwicklung von der Form

$$(59) \qquad \psi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu (1 - t)^\nu .$$

Da nun

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(t)\,(1 - t)^{1-\alpha_1}\right] = t^{-2\varepsilon}\,\psi(t) = (1 - (1 - t))^{-2\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu (1 - t)^\nu$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{2\varepsilon + \mu - 1}{\mu} p_{\nu-\mu}\,(1 - t)^\nu$$

ist, so zeigt die Vergleichung dieser Entwicklung mit (57a), daß

$$(60) \qquad -(\nu + 1)\, b_{\nu+1} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{2\varepsilon + \mu - 1}{\mu} p_{\nu-\mu}$$

ist. Aus (59) folgt aber nach der Cauchyschen Integralformel

$$p_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(1 + e^{i\tau})\, e^{-i\nu\tau}\, d\tau\,,$$

also, da nach (58)

$$|\varphi(1+e^{i\tau})| \leqq \delta\, |1 + e^{i\tau}|^{\varepsilon-1} = \delta \left| 2\cos\frac{\tau}{2}\right|^{\varepsilon-1}$$

ist,

$$|p_\nu| \leqq \frac{\delta}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left| 2\cos\frac{\tau}{2}\right|^{\varepsilon-1} d\tau,$$

und nach (60)

$$(\nu+1)\,|b_{\nu+1}| \leqq \frac{\delta}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left| 2\cos\frac{\tau}{2}\right|^{\varepsilon-1} d\tau \sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{2\varepsilon+\mu-1}{\mu}.$$

Setzen wir

$$\frac{\delta}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left| 2\cos\frac{\tau}{2}\right|^{\varepsilon-1} d\tau = p$$

und beachten, daß

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{2\varepsilon+\mu-1}{\mu} = \binom{2\varepsilon+\nu}{\nu} = \frac{\Gamma(2\varepsilon+\nu+1)}{\nu!\,\Gamma(2\varepsilon+1)}$$

ist, so haben wir also

$$(\nu+1)\,|b_{\nu+1}| \leqq \frac{p\,\Gamma(2\varepsilon+\nu+1)}{\nu!\,\Gamma(2\varepsilon+1)}$$

und damit für b_ν die Abschätzung

$$(61)\qquad |b_\nu| \leqq \frac{p\,\Gamma(2\varepsilon+\nu)}{\nu!\,\Gamma(2\varepsilon+1)}.$$

Führt man in dem Integral (55) durch die Gleichung

$$z - c_1 = k\log t$$

die neue Integrationsveränderliche t ein, und bezeichnet mit λ den dem Wege l_1 in der z-Ebene entsprechenden Weg in der t-Ebene, so erhält man

$$(55\text{a})\qquad u_1 = k e^{c_1 x}\int_\lambda t^{kx-1}\varphi(t)\,dt\,,$$

dabei geht λ vom Punkte $t = 0$ aus, läuft längs der reellen t-Achse bis kurz vor den Punkt $t = 1$, umkreist diesen im positiven Sinne und kehrt wieder längs der reellen t-Achse nach $t = 0$ zurück. Wir können also in (55a) für $\varphi(t)$ seine Entwicklung (57) einsetzen und finden

$$(62)\qquad u_1 = k e^{c_1 x}\int_\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt\,.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Reihe konvergiert gleichmäßig, wenn $|t-1| < 1$ ist, also auf der reellen t-Achse für $0 < t < 2$, oder wenn η eine beliebig kleine positive Zahl ist, für $\eta \leqq t < 2$. Wenn wir also den Integrationsweg, statt im Punkte $t=0$, im Punkte $t=\eta$ ansetzen und endigen lassen, kann die Integration gliedweise ausgeführt werden. Den so abgeänderten Integrationsweg bezeichnen wir mit λ_η, dann ist also

$$(63)\qquad \int\limits_{\lambda_\eta} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \int\limits_{\lambda_\eta} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt\,.$$

Nun hatten wir vorausgesetzt (Gl. (56)), daß $\Re(e^{i\vartheta} x) < 0$ ist; daraus folgt $\Re(kx) > 0$. Wir können ferner n so groß wählen, daß $\Re(\alpha_1+n) > 0$ ist, dann wird (vgl. Nr. 59, S. 234) für $\nu \geqq n$

$$(64)\qquad \int\limits_{\lambda_\eta} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt = (1-e^{2\pi i\alpha_1}) \int\limits_{\eta}^{1} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt\,.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\eta}^{1} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt\right| &\leqq \int\limits_{\eta}^{1} (1-t)^{\Re(\alpha_1+\nu)-1} t^{\Re(kx)-1}\,dt \\ &\leqq \int\limits_{0}^{1} (1-t)^{\Re(\alpha_1+\nu)-1} t^{\Re(kx)-1}\,dt \\ &\leqq B(\Re(\alpha_1+\nu), \Re(kx))\,,\end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (61) und (64)

$$\left| b_\nu \int\limits_{\lambda_\eta} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt \right| \leqq \frac{C p\, \Gamma(2\varepsilon+\nu)}{\nu!\, \Gamma(2\varepsilon+1)} B(\Re(\alpha_1+\nu), \Re(kx))\,,$$

wo C eine Konstante bedeutet, für die $|1-e^{2\pi i\alpha_1}| \leqq C$, und wenn wir die Betafunktion durch Gammafunktionen darstellen (Nr. 71, S. 277),

$$(65)\qquad \left| b_\nu \int\limits_{\lambda_\eta} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt \right| < \frac{C p\, \Gamma(2\varepsilon+\nu)}{\nu!\, \Gamma(2\varepsilon+1)} \frac{\Gamma(\Re(kx))\, \Gamma(\Re(\alpha_1+\nu))}{\Gamma(\Re(kx)+\Re(\alpha_1)+\nu)}$$

Nun ist nach einer bekannten Formel [1])

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (43) (S. 269)

$$\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!\, n^z} = 1+\zeta\,, \quad \lim_{n\to\infty} \zeta = 0\,;$$

wir können also die rechte Seite der Ungleichung (65) ersetzen durch

$$\frac{C p\, \Gamma(\Re(kx))}{\Gamma(2\varepsilon+1)} \nu^{2\varepsilon-\Re(kx)-1} (1+\zeta)\,, \quad \lim_{\nu\to\infty} \zeta = 0$$

Daraus folgt, daß die Reihe

$$(66)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \int\limits_{\lambda_\eta} (1-t)^{\alpha_1+\nu-1} t^{kx-1}\,dt$$

[1]) Vgl. Gauß, a. a. O., Werke III, S. 145.

unbedingt und gleichmäßig konvergiert für alle Werte von η, die dem Intervall $0 \leqq \eta < 1$ angehören, wenn

$$2\varepsilon - \Re(kx) < 0$$

ist. Die letztere Bedingung ist aber, da ε beliebig klein sein sollte, wegen $\Re(kx) > 0$ sicher erfüllt. Die Reihe (66) stellt demnach eine in dem Intervall $0 \leqq \eta < 1$ stetige Funktion von η dar, die Gleichung (63) gilt folglich auch noch für $\eta = 0$, d. h. wenn die Integrale über den Weg λ erstreckt werden. Wir können also in (62) gliedweise integrieren und erhalten dann, nach oft angewandten Umformungen, für u_1 die Reihe

$$u_1 = (1 - e^{2\pi i \alpha_1})\, k e^{c_1 x}\, \Gamma(kx) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu \Gamma(\alpha_1 + \nu)}{\Gamma(\alpha_1 + \nu + kx)}$$

oder

$$u_1 = \text{const.}\, e^{c_1 x} \frac{\Gamma(kx)}{\Gamma(kx + \alpha_1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu \alpha_1(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_1 + \nu - 1)}{(kx + \alpha_1)(kx + \alpha_1 + 1) \ldots (kx + \alpha_1 + \nu - 1)},$$

also eine Fakultätenreihe, von der feststeht, daß sie für $\Re(e^{i\theta} x) < 0$ unbedingt konvergiert.

Eine analoge Darstellung kann natürlich auch für u_2 angegeben werden.

Neuntes Kapitel.

Verallgemeinerungen. Parametrale Probleme.

73. Differentialsysteme für n Unbekannte. Integrodifferentialgleichungen.

Die Betrachtungen, die wir im fünften und sechsten Kapitel für Systeme von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen mit Hilfe des Matrizenkalküls angestellt haben, lassen eine Verallgemeinerung auf den Fall eines linearen Differentialsystems mit beliebig vielen Unbekannten zu. Hat man ein solches System für n unbekannte Funktionen

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

so wird sein Inhalt durch eine Integralmatrix

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

vollständig erschöpft, deren Elemente den Gleichungen

$$\text{(A')} \qquad \frac{dy_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} a_{\lambda k} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

genügen. Man hat also, um die gedachte Verallgemeinerung vorzunehmen, nur den Begriff der Matrix dahin zu erweitern, daß eine Matrix als Zusammenfassung nicht von vier, sondern von n^2 Elementen gelten soll, und dann für solche Matrizen die Operationen der Addition und Komposition zu erklären. In sinngemäßer Übertragung der für $n=2$ benutzten Bezeichnungen wird also $A+B$ die Matrix bezeichnen, deren Elemente

$$a_{ik} + b_{ik} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

sind, und AB die Matrix, deren Elemente durch die Kompositionsformeln

$$(1) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda k} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

gegeben werden. Wenn δ_{ik} Null oder Eins bedeutet, je nachdem $i \neq k$

oder $i = k$ ist, heißt die Matrix mit den Elementen δ_{ik} die Einheitsmatrix I, und die zu A inverse Matrix A^{-1} wird, wenn die Determinante $|A|$ von A von Null verschieden ist, durch die Bedingungen

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

eindeutig definiert. Die Einführung des Derivationssymbols $D_x Y$ und des Produktionsintegrals erfolgt dann ebenso wie in den Nrn. 35, 36, und es können auch die Beweise der Integralexistenz im reellen und komplexen Gebiete ohne Schwierigkeiten auf den Fall $n > 2$ übertragen werden. Man hat nur den Abschätzungssatz für die Elemente der komponierten Matrix (Nr. 36, S. 140) den Kompositionsformeln (1) entsprechend dahin zu fassen, daß die Elemente von AB und ebenso die von BA dem absoluten Betrage nach kleiner sind als nMN, wenn die Ungleichungen $|a_{ik}| < M$, $|b_{ik}| < N$ für $i, k = 1, 2, \ldots, n$ gelten. Dann ist die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (Nr. 36, Schluß) und des Verfahrens der sukzessiven Approximationen (Nr. 37) auch ohne weiteres gegeben. Der Jacobische Satz (Nr. 38) lautet

$$|Y| = |Y(0)|\, e^{\int_{c_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}\, dx},$$

und für die Übertragung der Untersuchungen über das qualitative Verhalten einer Integralmatrix in der Umgebung eines isolierten singulären Punktes $x = a$, wo die Koeffizienten a_{ik} eindeutig sind, bedarf es nur noch einiger Bemerkungen über die kanonische Form einer Matrix von n^2 Elementen.

Wenn die zu der Matrix C gehörige Fundamentalgleichung

$$|C - I\omega| = 0 \tag{2}$$

(vgl. Nr. 38) n verschiedene Wurzeln $\omega_1, \ldots, \omega_n$ besitzt, kann C ohne Schwierigkeit in die Form

$$C = P^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix} P$$

gesetzt werden, die kanonische Form enthält also in diesem Falle außerhalb der „Diagonale" lauter Nullen. Dagegen erweist sich die Untersuchung der Fälle, wo mehrfache Wurzeln der Fundamentalgleichung auftreten, als recht umständlich. Man hat dann die von Weierstraß begründete Theorie der Elementarteiler heranzuziehen, deren Darlegung uns aber hier zu weit führen würde [1]). Es genüge zu bemerken, daß beim Auftreten mehrfacher Wurzeln in der kanonischen Form auch die Elemente, die unmittelbar unterhalb der Diagonalglieder stehen, von Null verschieden sein können, wie es ja auch für $n = 2$ vorkommt. Wir können

[1]) Siehe z. B. Horn, Gewöhnl. Differentialgleichungen (1905), S. 68 ff.

hier um so eher auf die ausführliche Entwicklung der Elementarteilertheorie verzichten, als die Integration des Cauchyschen Systems (vgl Nr. 39)

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\mathfrak{y}_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{y}_\lambda \frac{r_{\lambda k}}{x-a} \qquad (k=1,\ldots,n)$$

auch für ein beliebiges n ganz allgemein durch das Symbol

$$\mathfrak{Y} = (x-a)^R$$

gegeben wird, und die kanonische Form einer Matrix C nur in Betracht kommt, wenn es sich darum handelt, R so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$e^{2\pi i R} = C$$

erfüllt wird. Wir können diese Bestimmung ohne weiteres durchführen, wenn die Gleichung (2) lauter verschiedene Wurzeln hat, wir haben für $n=2$ auch die Unterschiede vor Augen, die das Auftreten mehrfacher Wurzeln mit sich bringt, und begnügen uns im allgemeinen Falle mit der Angabe, daß die Inversion der Matrizenfunktion $e^{2\pi i R}$ stets möglich ist.

Dann verläuft alles Weitere ebenso wie für $n=2$, auch die Untersuchung der Stellen der Bestimmtheit, der kanonischen Systeme, endlich die des Fuchsschen Typus und der schlechthin kanonischen Systeme erfordert keine weiteren Erläuterungen. Nur in bezug auf die Form der Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung in der Umgebung einer Stelle $x=a$, wo die Integrale nicht unbestimmt werden, wollen wir bemerken, daß sich durch vollständige Induktion (Schluß von n auf $n+1$) ergibt, daß die notwendige und hinreichende Form allgemein so lautet [1]):

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{\mathfrak{P}_n(x-a)}{(x-a)^n}\, u = 0\,,$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ in der Umgebung von $x=a$ holomorphe Funktionen bedeuten.

Man kann die eben angedeutete Verallgemeinerung noch weiterführen, indem man nicht bei einem endlichen n stehenbleibt, sondern den Grenzübergang $n \to \infty$ ausführt. Das kann nun in zwiefacher Weise geschehen. Einmal indem man n als ganze Zahl ins Unendliche wachsen läßt, dann kommt man zu dem Problem eines Systems

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda a_{\lambda k} \qquad (k=1,2,\ldots,\infty)$$

von abzählbar unendlich vielen linearen Differentialgleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, einem Problem, das besonders H. v. Koch [2]) behandelt hat. Andererseits kann man den Grenzübergang in der Weise

[1]) Fuchs, 1868, Werke, I, S. 212.

[2]) H. v. Koch, Öfversigt. Stockholm 56, 1899, S. 395.

ausführen, wie es Volterra und Fredholm getan haben, um von den Systemen linearer Gleichungen mit n Unbekannten zu den sogenannten Integralgleichungen zu gelangen. Man kommt so von dem linearen Differentialsystem zu einer Integrodifferentialgleichung und zwar von der Form (A) ausgehend zu der Streckengleichung

$$\frac{dy(x|k)}{dx} = \int_0^1 y(x|\lambda)\, a(x|\lambda, k)\, d\lambda\,,$$

von der Form (A′) ausgehend zu der Feldgleichung

$$\frac{dy(x|i, k)}{dx} = a(x|i, k) + \int_0^1 y(x|i, \lambda)\, a(x|\lambda, k)\, d\lambda\,;$$

dabei bedeutet x eine komplexe Veränderliche, dagegen sind i, k, λ reelle Veränderliche, die alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen und hier die Stelle der Indizes vertreten, während an die Stelle der von 1 bis n erstreckten Summen die von 0 bis 1 erstreckten Integrale getreten sind. Die Theorie dieser Integrodifferentialgleichungen [1]) erweist sich als wichtig bei den Problemen der mathematischen Physik, die mit Vererbungseigenschaften (wie magnetische Hysteresis, elastische Nachwirkung) verknüpft sind [2]); wir werden in der Nr. 76 ein einfaches Beispiel solcher Gleichungen behandeln und bei dieser Gelegenheit den auszuführenden Grenzübergang näher erläutern. Im übrigen begnügen wir uns damit, hier auf diese aussichtsvolle Theorie hingewiesen zu haben, deren Bedeutung sich auch darin kundtut, daß sie offenbar die Theorie der linearen Differentialsysteme sowohl für eine endliche als auch für eine abzählbar unendliche Anzahl von unbekannten Funktionen als Sonderfälle umfaßt.

74. Die Artbeziehung. Adjungierte Systeme.

Dagegen wollen wir eine andere Verallgemeinerung des Differentialsystems (A′) besprechen, zu der man geführt wird, wenn man an den Begriff der Art bzw. der Klasse (Nr. 48) anknüpft. Es sei Y eine Integralmatrix des Systems (A), von dem wir voraussetzen wollen, daß es zum Fuchsschen Typus gehört, und es bedeute Z eine mit Y zu derselben Art gehörige Matrix, so daß also

$$(3) \qquad Z = YG$$

[1]) Siehe V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris 1913, XIII, Kap. S. 189 ff. und Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der math. Physik, Leipzig und Berlin 1914, 3. Vorl., S. 166 ff.; L. Schlesinger, Jahresbericht der D. M.-V. 24 (1915), S. 84; E. Hilb, Mathem. Annalen 77, 1916, S. 514; T. H. Hildebrandt, Transactions of the Am. Math. Soc. 18 (1917), S. 73 und 19 (1918), S. 97.

[2]) Siehe Volterra, a. a. O.

ist, wo G eine Matrix rationaler Funktionen darstellt. Z ist dann eine Integralmatrix des Systems

(B) $$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda k}, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

wo, da nach der Derivationsformel (D) der Nr. 39, S. 157

$$D_x Z = G^{-1} \cdot D_x Y \cdot G + D_x G$$

ist,

(4) $$B = G^{-1} A G + D_x G$$

gefunden wird.

Hat man umgekehrt zwei Systeme (A), (B) des Fuchsschen Typus und sucht die Bedingungen dafür, daß diese beiden Systeme zu derselben Art gehören sollen, so muß eine rationale Matrix

$$G = Y^{-1} Z$$

vorhanden sein, die der Gleichung (4) genügt. Diese Gleichung schreibt sich, wenn man beiderseits von links her mit G komponiert,

(4a) $$\frac{dG}{dx} = GB - AG$$

oder in nichtsymbolischer Form

(5) $$\frac{dg_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} g_{i\lambda} b_{\lambda k} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} g_{\lambda k}, \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

also als ein System von n^2 linearen Differentialgleichungen für die n^2 Funktionen g_{ik}, und die Bedingung, daß (A) und (B) zu derselben Art gehören, besteht nun darin, daß das System (5) ein partikuläres Lösungssystem besitzt, dessen Elemente rationale Funktionen von x sind.

Das System (5) stellt offenbar eine Verallgemeinerung der Systeme von der Form (A′) dar; es spielt in der Theorie der linearen Differentialsysteme eine überaus wichtige Rolle, wir wollen uns darum etwas eingehender mit dieser Art von Differentialsystemen beschäftigen.

Setzt man

(6) $$g_{ik} = \eta_i z_k,$$

so verwandelt sich (5) in das System

$$\frac{d\eta_i}{dx} z_k + \eta_i \frac{dz_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\eta_i z_\lambda b_{\lambda k} - a_{i\lambda} \eta_\lambda z_k), \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

das offenbar erfüllt wird, wenn die z_k den Gleichungen (B) und die η_i den Gleichungen

(7) $$\frac{d\eta_i}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} \eta_\lambda$$

Genüge leisten. Um die Beziehung herzustellen, die zwischen dem System (7) und dem System (A) besteht, betrachten wir eine Integralmatrix Y von (A) und setzen

$$(8) \qquad Y^{-1} = H\,.$$

Dann folgt, wenn wir auf beiden Seiten der Identität

$$HY = I$$

die derivierte Matrix bilden,

$$Y^{-1}\cdot D_x H \cdot Y + D_x Y = 0\,,$$

wo 0 eine Matrix bedeutet, deren sämtliche Elemente verschwinden, oder mit Rücksicht auf (8)

$$\frac{dH}{dx} H^{-1} = - A\,.$$

Komponieren wir diese Gleichung von rechts her mit H, so kommt

$$\frac{dH}{dx} = - AH$$

oder

$$(9) \qquad \frac{d\eta_{ik}}{dx} = - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}\,\eta_{\lambda k}\,,$$

d. h. die Funktionen η_{ik} genügen dem System (7). Setzen wir nun, um die gewohnten Bezeichnungen zu erhalten,

$$\eta_{ik} = \mathfrak{y}_{ki}\,, \quad a_{ik} = - \mathfrak{a}_{ki}\,,$$

so verwandelt sich (9) in

$$(\mathfrak{A}') \qquad \frac{d\mathfrak{y}_{ki}}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{y}_{k\lambda}\,\mathfrak{a}_{\lambda i}\,,$$

die Matrix $\mathfrak{Y}$ ist folglich eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{d\mathfrak{y}_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{y}_\lambda\,\mathfrak{a}_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Man nennt dieses System das zu dem System (A) **adjungierte**; da die Beziehung $a_{ik} = - \mathfrak{a}_{ki}$, die die Koeffizienten der Systeme (A) und ($\mathfrak{A}$) miteinander verknüpft, offenbar eine gegenseitige ist, so ist auch umgekehrt (A) das zu dem System ($\mathfrak{A}$) adjungierte. Zwischen je zwei Integralmatrizen eines Systems (A) und seines adjungierten ($\mathfrak{A}$) besteht nach dem Vorhergehenden die folgende Beziehung: Ist Y eine Integralmatrix von (A) und macht man in Y^{-1} die Zeilen zu Spalten und die Spalten zu Zeilen, so ist die so entstehende Matrix $\mathfrak{Y}$ eine Integralmatrix des adjungierten Systems ($\mathfrak{A}$).

Wir können nun ohne Schwierigkeit die allgemeine Lösung des Differentialsystems (5) angeben. Bedeutet H eine Integralmatrix von (7) und Z eine Integralmatrix von (B), so genügen die n^2 Funktionen

$$g_{(\alpha,\beta),(ik)} = \eta_{i\alpha}\, z_{\beta k}$$

dem System (5). Ebenso bilden aber die Elemente der Matrix

$$(10) \qquad G = HTZ\,,$$

wo T eine beliebige konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet, ein Lösungssystem von (5), da die g_{ik} sich linear und homogen mit konstanten Koeffizienten aus den Produkten $\eta_{i\alpha} z_{\beta k}$ zusammensetzen. Wir behaupten aber, daß in der Form (10) das allgemeinste Lösungssystem von (5) enthalten ist. Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, daß die g_{ik} irgendein Lösungssystem von (5) bedeuten, und setzen die Gleichung (10) an. Wir müssen dann zeigen, daß die so definierten γ_{ik} Konstanten sind. In der Tat folgt durch Differentiation von (10)

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dH}{dx} \Gamma Z + H \frac{d\Gamma}{dx} Z + H \Gamma \frac{dZ}{dx}. \tag{11}$$

Da aber

$$\frac{dH}{dx} = - AH, \quad \frac{dZ}{dx} = ZB$$

ist, so folgt aus (11)

$$\frac{dG}{dx} = - AH\Gamma Z + H \frac{d\Gamma}{dx} Z + H\Gamma ZB.$$

Setzen wir diesen Ausdruck und den Ausdruck (10) von G in (4a) ein, so erhalten wir

$$H \frac{d\Gamma}{dx} Z = 0$$

und hieraus folgt, da $|H| \neq 0$, $|Z| \neq 0$ sind,

$$\frac{d\Gamma}{dx} = 0,$$

was zu beweisen war.

75. Theorie der adjungierten Systeme. Integration des vollständigen linearen Differentialsystems.

Daß die in der vorigen Nummer gegebene Definition der adjungierten Systeme die der adjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung, wie sie in der Nr. 56 eingeführt wurde, in sich begreift, sieht man sofort, wenn man für das der linearen Differentialgleichung

$$u'' + qu' + ru = 0 \tag{12}$$

äquivalente System

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = - ry_1 - qy_2$$

das adjungierte System

$$\frac{d\mathfrak{y}_1}{dx} = r\mathfrak{y}_2,$$
$$\frac{d\mathfrak{y}_2}{dx} = - \mathfrak{y}_1 + q\mathfrak{y}_2$$

bildet. Es ergibt sich dann für $\mathfrak{y}_2$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\mathfrak{y}_2}{dx^2} = -r\mathfrak{y}_2 - \frac{d(q\mathfrak{y}_2)}{dx},$$

die nichts anderes ist als die adjungierte von (12) im Sinne der Nr. 56.

Es soll nun gezeigt werden, daß man auch durch ähnliche Gedankengänge, wie die in der Nr. 56 befolgten, zu den adjungierten Systemen gelangen kann. Wir schreiben dazu das System (A) in der Form

$$\text{(A)} \qquad dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

und fragen nach dem Vorgange von Lagrange und Jacobi[1]), ob sich ein System von Funktionen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ so angeben läßt, daß der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right)$$

das vollständige Differential einer Funktion z der unabhängigen Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ wird. Falls solche Funktionen μ_k vorhanden sind, werden wir sie als Multiplikatoren des Systems (A) zu bezeichnen haben.

Wenn man in der identischen Gleichung

$$d \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k = \sum_{k=1}^{n} (\mu_k dy_k + y_k d\mu_k)$$

rechter Hand den Ausdruck $dx \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \mu_k y_\lambda a_{\lambda k}$ addiert und subtrahiert, so erhält man die Gleichung

$$d \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right) + \sum_{k=1}^{n} y_k\, d\mu_k + dx \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \mu_k y_\lambda a_{\lambda k}$$

oder, indem man in der letzten Doppelsumme die Indizes k, λ miteinander vertauscht,

$$\text{(13)} \quad \sum_{k=1}^{n} \left[\mu_k \left(dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right) + y_k \left(d\mu_k + dx \sum_{\lambda=1}^{n} a_{k\lambda} \mu_\lambda\right)\right] = d \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k,$$

die wir als Identität von Lagrange bezeichnen wollen. Wählen wir die μ_k so, daß

$$\text{(14)} \qquad d\mu_k + dx \sum_{\lambda=1}^{n} a_{k\lambda} \mu_\lambda = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

ist, dann ergibt (13)

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right) = d \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k;$$

die so gewählten $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sind also Multiplikatoren und befriedigen, wie die Gleichungen (14) zeigen, das adjungierte Differentialsystem ($\mathfrak{A}$).

[1]) C. G. J. Jacobi, Werke IV, S. 236, 319 ff.

Der in bezug auf die y_k und μ_k völlig symmetrische Bau der Lagrangeschen Identiät (13) läßt auch sofort erkennen, daß die Beziehung zwischen einem System (A) und seinem adjungierten ($\mathfrak{A}$) eine gegenseitige ist.

Das System (A) ist mit seinem adjungierten ($\mathfrak{A}$) dann und nur dann identisch, wenn $a_{ik} = -a_{ki}$ ist, d. h. wenn die Koeffizientenmatrix A eine schiefsymmetrische ist. Solche sich selbst adjungierte Systeme spielen in der Variationsrechnung eine Rolle.

Es sei Y eine Integralmatrix von (A) und $Y^{-1} = H$, dann ist, wie wir Nr. 74 gesehen haben, die „transponierte Matrix" $\mathfrak{Y}$ von H, d. h. also die Matrix der

$$\mathfrak{y}_{ik} = \eta_{ki}$$

eine Integralmatrix von ($\mathfrak{A}$). Ebenso ist, wenn $\mathfrak{Y}$ eine beliebige Integralmatrix von ($\mathfrak{A}$) bedeutet, die transponierte Matrix von $\mathfrak{Y}^{-1}$ eine Integralmatrix von (A). Man bezeichnet Y und $\mathfrak{Y}$ als adjungierte Integralmatrizen; zwischen ihren Elementen bestehen die Beziehungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}\,\mathfrak{y}_{k\lambda} = \delta_{ik},$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{y}_{\lambda i}\,y_{\lambda k} = \delta_{ik},$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} y_{\lambda i}\,\mathfrak{y}_{\lambda k} = \delta_{ik}.$$

Setzen wir in der Identität von Lagrange $\mathfrak{y}_{ik}$ an die Stelle von μ_k, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{y}_{ik}\left(dy_k - dx\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right) = d\sum_{k=1}^{n} y_k\,\mathfrak{y}_{ik},$$

also durch Integration

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\,\mathfrak{y}_{ik} = \int \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{y}_{ik}\left(dy_k - dx\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right).$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $y_{i\nu}$ und summieren in bezug auf $i = 1, 2, \ldots, n$, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k y_{i\nu}\,\mathfrak{y}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu}\int \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{y}_{ik}\left(dy_k - dx\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right)$$

und, da mit Rücksicht auf (b) die linke Seite gleich $\sum_{k=1}^{n} y_k \delta_{\nu k}$, also gleich y_ν ist,

$$(15) \qquad y_\nu = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu}\int \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{y}_{ik}\left(dy_k - dx\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}\right). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Diese Gleichungen sind Identitäten, indem sie für jedes beliebige Funktionssystem $y_1, \ldots, y_n$ gültig bleiben.

Wir machen nun eine Anwendung dieser Identitäten auf die Integration des **vollständigen** (kompletten) Differentialsystems

$$(16) \qquad \frac{du_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda a_{\lambda k} + f_k(x), \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

wo die $f_k(x)$ gegebene monogene Funktionen von x bedeuten mögen. Setzen wir in (15) für $y_1, \ldots, y_n$ das allgemeine Lösungssystem $u_1, \ldots, u_n$ des Systems (16) ein, so ergibt sich für dieses Lösungssystem die Darstellung

$$(17) \qquad u_\nu = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu} \int \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{y}_{ik} f_k(x)\, dx; \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

das allgemeine Lösungssystem des vollständigen Systems (16) kann also durch „Quadraturen" erhalten werden, wenn eine Integralmatrix Y des „verkürzten Systems" (A) bekannt ist. Erstrecken wir die Integrale in (17) alle von einem und demselben regulären Punkte x_0 aus, so erhalten wir diejenige Lösung des vollständigen Systems (16), deren sämtliche Elemente für $x = x_0$ verschwinden; man bezeichnet sie als die zu $x = x_0$ gehörige **Hauptlösung**. Wenn wir der Deutlichkeit wegen die Integrationsveränderliche mit ξ bezeichnen, so haben wir für die Hauptlösung den Ausdruck

$$(17\text{a}) \qquad u_\nu = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} y_{i\nu}(x)\, \mathfrak{y}_{ik}(\xi) f_k(\xi)\, d\xi$$

und die allgemeine Lösung des Systems (16) wird durch die Hauptlösung in der Form

$$u_\nu + \sum_{i=1}^{n} c_i y_{i\nu}$$

dargestellt, wo die $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche Konstanten bedeuten.

76. Beispiel einer linearen Integrodifferentialgleichung.

Als Beispiel für die Integration des kompletten Systems wählen wir

$$(18) \qquad \frac{du_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \frac{a_{\lambda k}}{x} + g_k(x), \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

wo die $a_{\lambda k}$ Konstanten, die $g_k(x)$ monogene Funktionen von x bedeuten.

Das verkürzte System

$$(19) \qquad \frac{dz_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \frac{a_{\lambda k}}{x}$$

ist ein **Cauchysches**, es besitzt die Integralmatrix

$$(20) \qquad Z = x^A,$$

und wenn wir $a_{ik} = -\mathfrak{a}_{ki}$ setzen, so ist die adjungierte Integralmatrix

$$\mathfrak{Z} = x^{\mathfrak{A}}.$$

Die zu $x = x_0$ gehörige Hauptlösung des vollständigen Systems lautet demnach

$$u_\nu = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} z_{i\nu}(x)\,\mathfrak{z}_{ik}(\xi)\,g_k(\xi)\,d\xi\,.$$

Nun ist aber $\mathfrak{z}_{ik} = \zeta_{ki}$, wenn ζ_{ik} die Elemente von Z^{-1} bedeuten; es sind folglich

$$w_{k\nu} = \sum_{i=1}^{n} z_{i\nu}(x)\,\mathfrak{z}_{ik}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(\xi)\,z_{i\nu}(x)$$

die Elemente der Matrix

$$W = Z(\xi)^{-1} Z(x) = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{A}. \tag{21}$$

und wir finden

$$u_\nu = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} w_{k\nu}\,g_k(\xi)\,d\xi\,. \tag{22}$$

Wir machen nun, indem wir n ins Unendliche wachsen lassen, den Übergang von dem Differentialsystem (18) zu einer Integrodifferentialgleichung. Dies geschieht in folgender Weise. Die Indizes i, k, die die ganzzahligen Werte von 1 bis n annehmen, werden durch stetige, reelle Veränderliche i, k ersetzt, die alle Werte des Intervalls von 0 bis 1 annehmen können. In einer Matrix A ist jedem ganzzahligen Wertepaar ($i, k = 1, 2, \ldots, n$), also jedem Punkte eines quadratischen Zahlengitters, eine Größe a_{ik} zugeordnet, die noch eine Funktion von x sein kann; entsprechend verstehen wir unter einem Felde $\boldsymbol{A}$ die Zuordnung einer Größe $a(i, k)$, die noch eine Funktion von x sein kann, zu jedem Punkte des Quadrates $0 \leqq i \leqq 1$, $0 \leqq k \leqq 1$. Wird nur die eine Veränderliche i betrachtet, also jedem Werte des Intervalls $0 \leqq i \leqq 1$ eine Größe $y(i)$ zugeordnet, so sprechen wir von einer Strecke. Die Elemente eines Feldes oder einer Strecke denken wir uns immer als stetige Funktionen der Veränderlichen i, k. Ist $a(i, k)$ ein Feld, so haben wir nach der Definition des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 a(i, k)\,di = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a\left(\frac{i}{n}, k\right)\cdot\frac{1}{n}, \qquad (0 \leqq k \leqq 1)$$

in diesem Sinne treten an die Stelle der Summen über die ganzzahligen Werte $1, 2, \ldots, n$ eines Index Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1.

Bedeutet $a(i, k)$ ein konstantes[1] Feld, und setzt man

$$\frac{1}{n} a\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) = a_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

so geht für $n \to \infty$ das Differentialsystem (18) über in

[1] d. h. von x unabhängiges.

(18a) $$\frac{du(x|k)}{dx} = \int_0^1 u(x|\lambda)\frac{a(\lambda,k)}{x}\,d\lambda + g(x|k)\,, \qquad (0 < k < 1)$$

also in eine Streckengleichung (vgl. oben S. 289) und entsprechend das verkürzte Differentialsystem (19) in die verkürzte oder homogene Streckengleichung

(19a) $$\frac{dz(x|k)}{dx} = \int_0^1 z(x|\lambda)\frac{a(\lambda,k)}{x}\,d\lambda\,. \qquad (0 < k < 1)$$

Die Elemente der Integralmatrix Z von (19) bezeichnen wir, um den Grenzübergang vornehmen zu können, mit

(24) $$z_{ik} = \frac{1}{n}\,y_{ik} + \delta_{ik}\,, \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

so daß also die y_{ik} dem Differentialsystem

(25) $$\frac{dy_{ik}}{dx} = \frac{na_{ik}}{x} + \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}\frac{a_{\lambda k}}{x} \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

genügen, das für $n\to\infty$ in die Feldgleichung

(19b) $$\frac{dy(x|i,k)}{dx} = \frac{a(i,k)}{x} + \int_0^1 y(x|i,\lambda)\frac{a(\lambda,k)}{x}\,d\lambda \qquad \binom{0<i<1}{0<k<1}$$

übergeht. Um ein Lösungsfeld (entsprechend der Integralmatrix) für diese Gleichung herzustellen, beachten wir, daß sich aus (20) und (24) für die Matrix Y die Darstellung

$$Y = \frac{nA\log x}{1!} + \frac{1}{n}\,\frac{(nA)^2(\log x)^2}{2!} + \frac{1}{n^2}\,\frac{(nA)^3(\log x)^3}{3!} + \cdots$$

ergibt. Beim Grenzübergang verwandelt sich die Matrix nA nach (23) in das Feld $\boldsymbol{A}$ der $a(i,k)$. Ferner sind nach der Kompositionsgleichung (1) die Elemente der Matrix $(nA)^2$ durch

$$\sum_{\lambda=1}^{n} na_{i\lambda}\,na_{\lambda k}$$

dargestellt, also gibt $\frac{1}{n}(nA)^2$ beim Grenzübergang das Feld

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{n}\,a\left(\frac{i}{n},\frac{\lambda}{n}\right)a\left(\frac{\lambda}{n},\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 a(i,\lambda)\,a(\lambda,k)\,d\lambda\,,$$

das wir mit $\boldsymbol{A}^2$ bezeichnen; weiter wird $\frac{1}{n^2}(nA)^3$ zu dem Felde

$$\boldsymbol{A}^3 = \int_0^1\!\!\int_0^1 a(i,\lambda)\,a(\lambda,\mu)\,a(\mu,k)\,d\lambda d\mu$$

usw. — Wir erhalten also für das Lösungsfeld $\boldsymbol{Y}$ der Feldgleichung (19b) die Darstellung

$$\boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{A}\log x}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^2(\log x)^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3(\log x)^3}{3!} + \cdots$$

Das Feld

$$\boldsymbol{V}(t|a(i,k)) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{t^\nu \boldsymbol{A}^\nu}{\nu!}$$

nennen wir die Volterrasche Transzendente [1]); sie spielt in der Theorie der Integrodifferentialgleichungen die analoge Rolle wie die Exponentialfunktion, oder genauer wie die Funktion $e^t - 1$ in der gewöhnlichen Analysis. In dieser Bezeichnung ist also

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}(\log x | a(i,k));$$

durch den analogen Grenzübergang erhalten wir aus der durch die Gleichung (21) definierten Matrix W das Feld

$$\boldsymbol{V}\left(\log \frac{x}{\xi} \,\Big|\, a(i,k)\right)$$

und somit aus (22) als Hauptlösung der vollständigen Streckengleichung (18a) die Lösungsstrecke

$$(26) \quad u(x|k) = \int_{x_0}^{x} \left[g(\xi|k) + \int_0^1 g(\xi|\lambda)\, \boldsymbol{V}\left(\log \frac{x}{\xi} \,\Big|\, a(\lambda,k)\right) d\lambda \right] d\xi,$$

von der man sich durch Einsetzen überzeugt, daß sie die Integrodifferentialgleichung (18a) tatsächlich befriedigt.

Das Problem des Gleichgewichts einer isotropen elastischen Kugel unter Berücksichtigung der Vererbung (Hereditât) führt, wie Volterra [2]) gezeigt hat, auf die Integrodifferentialgleichung

$$(27) \quad \frac{d v(x|k)}{dx} = -\frac{c}{x} v(x|k) + \int_0^1 v(x|\lambda) \frac{a(\lambda,k)}{x} d\lambda + f(x|k),$$

wo c ebenso wie $a(i,k)$ von x unabhängig ist, eine Gleichung, die sich von (18a) nur durch das Zusatzglied $-\frac{c}{x}$ unterscheidet. Setzt man, um (27) auf (18a) zurückzuführen,

$$v(x|k) = \varphi(x)\, u(x|k), \quad g(x|k) = \frac{f(x|k)}{\varphi(x)}$$

und läßt $u(x|k)$ der Gleichung (18a) genügen, so ergibt sich für $\varphi(x)$ die Gleichung

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{c}{x}\varphi(x),$$

also $\varphi(x) = x^{-c}$, $g(x|k) = x^c f(x|k)$ und die Lösung von (27) erscheint in der Form

[1]) Siehe z. B. V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes. Paris 1913. S. 198.

[2]) V. Volterra, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1910 I. S. 107 ff.

$$\varphi(x|k) = \frac{1}{x^c} \int_{x_0}^{x} \xi^c \left[f(x|k) + \int_0^1 f(x|\lambda)\, \boldsymbol{F}\left(\log \frac{x}{\xi} \,\middle|\, a(\lambda, k)\right) d\lambda \right] d\xi,$$

in der sie auch von Volterra angegeben worden ist.

77. Die Fundamentalsubstitutionen in ihrer Abhängigkeit von den in den Koeffizienten des Differentialsystems enthaltenen Parametern. Das Riemannsche Problem.

Was wir in den Nrn. 47, 48 über die Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen eines Differentialsystems vom Fuchsschen Typus ausgeführt haben, bezog sich vorwiegend auf die numerische Berechnung ihrer Elemente, wenn man sich die Koeffizienten des Differentialsystems numerisch gegeben denkt. Betrachtet man dagegen die in diesen Koeffizienten enthaltenen Konstanten als veränderliche Parameter, so kann man fragen, wie die Elemente der Fundamentalsubstitutionen von diesen Parametern analytisch abhängen. Wir wollen im folgenden ein schlechthin kanonisches Differentialsystem für n unbekannte Funktionen zugrunde legen, dessen sämtliche singuläre Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ Verzweigungspunkte sind, und das für jeden dieser Punkte die Normalform hat; wir schreiben es

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo

$$(28) \qquad a_{ik} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{r_{ik}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, und bezeichnen mit $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ die Fundamentalsubstitutionen, mit denen die Integralmatrix

$$Y = \int_{x_0}^{x} (A\,dx + I)$$

sich von links her komponiert, wenn x die Querschnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet. Die Parameter, von denen die Koeffizienten a_{ik} abhängen, sind

1) die $n^2\sigma$ Residuen $r_{ik}^{(\nu)}$,

2) die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$.

Von den ersteren hängen die Koeffizienten a_{ik} ganz und rational ab; daraus folgt, wie wir schon in der Nr. 37 angemerkt haben, daß die y_{ik} ganze transzendente Funktionen, also beständig konvergente Potenzreihen der $r_{ik}^{(\nu)}$ sind. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind natürlich Funktionen von $x, a_1, \ldots, a_\sigma$; in bezug auf diese gilt das Folgende [1]). Man denke sich

[1]) H. Poincaré. 1884. Œuvres II, S. 312.

die y_{ik} durch das Verfahren der sukzessiven Approximationen (Nr. 37, S. 143) dargestellt, also

$$Y = I + U^{(1)} + U^{(2)} + \cdots \text{in inf.},$$

$$(29) \qquad U^{(1)} = \int\limits_{x_0}^{x} A\,dx, \quad U^{(2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x} A\,dx\right) A\,dx, \ \ldots,$$

dann setzen sich die Koeffizienten der nach Potenzen der $r_{ik}^{(\nu)}$ fortschreitenden Reihen additiv zusammen aus Ausdrücken von der Form

$$(30) \qquad \begin{aligned} &\Lambda(x; a_1) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x - a_1}, \quad \Lambda(x; a_1, a_2) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Lambda(x; a_1)}{x - a_2}\,dx, \ \ldots, \\ &\Lambda(x; a_1, a_2, \ldots, a_q) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Lambda(x; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})}{x - a_q}\,dx, \end{aligned}$$

wo die $a_1, a_2, \ldots, a_q$ aus der Reihe der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ in unbeschränkter Anzahl und beliebiger Reihenfolge bei unbeschränkter Wiederholung entnommen sind. Dabei sind die Integrationen von x_0 nach x auf demselben Wege zu erstrecken, wie das Produktintegral Y.

Nun können die $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ selbst als Produktintegrale geschrieben werden. Bezeichnen wir nämlich das Produktintegral erstreckt auf einem innerhalb der Fläche T verlaufenden Wege wieder (wie in der Nr. 47) mit Y_T und betrachten dann dieses Produktintegral erstreckt auf einem Wege L_ν, der den Schritt l_ν einmal im positiven Sinne überschreitet, so ist

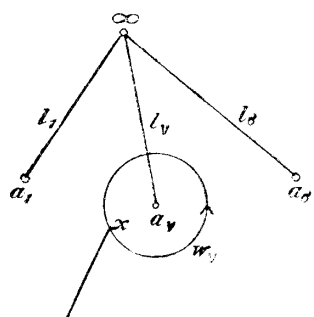

Fig. 5.

$$(31) \qquad (L_\nu)\widehat{\int\limits_{x_0}^{x}}(A\,dx + I) = \Omega^{(\nu)} Y_T.$$

Aber L_ν setzt sich zusammen aus dem in T verlaufenden Wege von x_0 nach x und aus einem von x ausgehenden Umlauf w_ν um den Punkt a_ν (Fig. 5). Aus der Definition des Produktintegrals folgt allgemein, daß, wenn x_0, x_1, x_2 drei aufeinanderfolgende Punkte auf einer Kurve bedeuten, für die längs dieser Kurve erstreckten Produktintegrale die Gleichungen gelten:

$$\widehat{\int\limits_{x_0}^{x_2}}(A\,dx + I) = \widehat{\int\limits_{x_0}^{x_1}}(A\,dx + I) \cdot \widehat{\int\limits_{x_1}^{x_2}}(A\,dx + I),$$

$$\widehat{\int\limits_{x_0}^{x_1}}(A\,dx + I) = \Big(\widehat{\int\limits_{x_1}^{x_0}}(A\,dx + I)\Big)^{-1}.$$

Wir erhalten also

$$(L_\nu)\widehat{\int\limits_{x_0}^{x}}(A\,dx + I) = Y_T \widehat{\int\limits_{(w_\nu)}}(A\,dx + I) = Y_T \widehat{\int\limits_{(w_\nu)}}(A\,dx + I) \cdot Y_T^{-1} \cdot Y_T.$$

Es ist aber

$$Y_T \overset{\frown}{\int_{(w_\nu)}} (A\,dx + I) \cdot Y_T^{-1} = \overset{\frown}{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I)\,,$$

wo s_ν ein von x_0 ausgehender einfacher Schleifenweg, d. h. ein geschlossener Weg ist, der den Schnitt l_ν einmal im positiven Sinne durchquert; wir finden demnach

$$(L_\nu) \overset{\frown}{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I) = \overset{\frown}{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I) \,.\, Y_T$$

und folglich mit Rücksicht auf (31)

$$\Omega^{(\nu)} = \overset{\frown}{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I)\,.$$

Die Fundamentalsubstitutionen der Integralmatrix Y sind demnach die über die von x_0 ausgehenden einfachen Schleifenwege s_ν erstreckten Produktintegrale. Wenn wir also in (29) die Integrationen über diese Schleifenwege s_ν ausführen, so erhalten wir die Darstellungen der Elemente der $\Omega^{(\nu)}$ als beständig konvergente Potenzreihen der $r_{ik}^{(\nu)}$, deren Koeffizienten nur von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ abhängen, und zwar setzen sich diese Koeffizienten additiv zusammen aus den Ausdrücken (30), in denen die Integrationen auch über die Schleifenwege s_ν zu erstrecken sind. Die $\omega_{ik}^{(\nu)}$ sind demnach ganze transzendente Funktionen

(32) $$\omega_{ik}^{(\nu)} = e_{ik}^{(\nu)}(r_{11}^{(1)}, \ldots, r_{nn}^{(\sigma)})$$

der $r_{ik}^{(\nu)}$, und die Formeln (29) zeigen, daß die in den $r_{ik}^{(\nu)}$ linearen Glieder der $e_{ik}^{(\nu)}$ die Form haben:

$$U^{(1)} = \int_{(s_\nu)} A\,dx = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} R^{(\lambda)} \int_{(s_\nu)} \frac{dx}{x - a_\lambda}\,.$$

Nun ist aber

$$\int_{(s_\nu)} \frac{dx}{x - a_\lambda} = \begin{cases} 0, \text{ für } \lambda \neq \nu, \\ 2\pi\sqrt{-1}, \text{ für } \lambda = \nu, \end{cases}$$

folglich lauten die Entwicklungen (32)

(32a) $$\omega_{ik}^{(\nu)} = \delta_{ik} + 2\pi\sqrt{-1}\, r_{ik}^{(\nu)} + \cdots, \qquad \binom{i,\,k = 1, 2, \ldots, n}{\nu = 1, 2, \ldots, \sigma}$$

wo die durch Punkte angedeuteten Glieder in den $r_{ik}^{(\nu)}$ vom zweiten und höheren Grade sind.

Bilden wir also die Funktionaldeterminante Δ der $n^2\sigma$ ganzen transzendenten Funktionen $e_{ik}^{(\nu)}$ nach den $n^2\sigma$ Residuen $r_{ik}^{(\nu)}$, so hat Δ für die Stelle

(33) $$r_{11}^{(1)} = 0\,, \ldots\ r_{nn}^{(\sigma)} = 0$$

den Wert

$$\Delta_0 = (2\pi\sqrt{-1})^{n^2\sigma}\,,$$

Δ ist also jedenfalls nicht identisch gleich Null.

Daraus können wir schließen, daß in der Umgebung der Stelle (33) die Umkehrung der $n^2\sigma$ ganzen transzendenten Funktionen $e_{ik}^{(\nu)}$ d. h. die Auflösung der Gleichungen (32) nach den $r_{ik}^{(\nu)}$ möglich ist. Für die Stelle (33) sind die $\omega_{ik}^{(\nu)} = \delta_{ik}$, die Gleichungen (32) können also sicher nach den $r_{ik}^{(\nu)}$ aufgelöst werden, wenn die $\omega_{ik}^{(\nu)}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung der δ_{ik}, oder, wie man sagen kann, wenn die $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ in hinreichender Nähe der Einheitsmatrix I liegen. Dabei sind die $a_1, \ldots, a_\sigma$ als fest anzusehen. Man bezeichnet die Aufgabe, bei festgegebenen $a_1, \ldots, a_\sigma$ und beliebig vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ die $r_{ik}^{(\nu)}$, also das Differentialsystem (A) zu bestimmen, als das Riemannsche Problem [1]). Wie wir sehen, ist dieses Problem stets lösbar, wenn die $\Omega^{(\nu)}$ in der Nähe von I liegen. Wenn die $\Omega^{(\nu)}$ beliebig, aber so beschaffen sind, daß die Wurzeln der Fundamentalgleichungen, die zu den $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ und zu $\Omega^{(\sigma+1)}$ gehören, dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind, kann die Lösbarkeit des Riemannschen Problems mit Hilfe der Poincaréschen „séries zétafuchsiennes" erwiesen werden [2]); wenn diese Beschränkung nicht besteht, so sind diese Poincaréschen Reihen nicht unbedingt konvergent, aber die Lösbarkeit des Riemannschen Problems kann dann auf Grund anderer Überlegungen als gesichert angesehen werden [3]). Die Schwierigkeit bei der Umkehrung der ganzen transzendenten Funktionen $e_{ik}^{(\nu)}$ liegt darin, daß a priori die Möglichkeit besteht, daß diese Funktionen Wertsysteme auslassen, die in der komplexen Mannigfaltigkeit von $n^2\sigma$ Dimensionen Gebiete derselben Dimensionenzahl erfüllen. Für ganze transzendente Funktionen von einer Veränderlichen ist diese Möglichkeit durch den Casorati-Weierstraßschen Satz ausgeschlossen, der besagt, daß eine ganze transzendente Funktion jedem beliebigen komplexen Werte beliebig nahekommen kann. — Im allgemeinen sind bei fest gedachten $a_1, \ldots, a_\sigma$ die $r_{ik}^{(\nu)}$ durch die Gleichungen (32) als unendlich vieldeutige Funktionen der $\omega_{ik}^{(\nu)}$ definiert. Um ein eindeutig bestimmtes Zweigsystem dieser Funktionen zu isolieren, genügt es nach dem Fundamentallemma (Nr. 48), die Wurzeln der zu $a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen festzulegen. Hat man zwei verschiedene Zweigsysteme $r_{ik}^{(\nu)}, r_{ik}^{(\nu)}$ dieser Funktionen, so bestimmen diese zwei verschiedene

1) Siehe B. Riemann, Fragment, Werke (1892), S. 379.

2) L. Schlesinger, Comptes Rendus, 126, 1898, S. 723.

3) L. Schlesinger, Math. Annalen 63, 1906, S. 273, 277; D. Hilbert, Göttinger Nachr. 1905, S. 308; J. Plemelj, Monatshefte für Math. u. Physik, 19 (1908), S. 211; G. D. Birkhoff, Proc. of the American Academy of Art and Sc., 49 (1913), S. 521.

schlechthin kanonische Differentialsysteme (A). (A), die zu derselben Klasse gehören und für die die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen sich um ganze Zahlen voneinander unterscheiden.

78. Das Fuchssche Problem. Aufstellung eines Differentialsystems zweiten Grades.

Für ein gegebenes Differentialsystem (A), in dem man sich die $a_1, \ldots, a_\sigma$ einerseits und die $r_{ik}^{(\nu)}$ andererseits als willkürlich vorgeschriebene feste Größen vorstellen kann, werden die $\omega_{ik}^{(\nu)}$ im allgemeinen sowohl von den $r_{ik}^{(\nu)}$ als auch von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ abhängen. Geht man dagegen von dem Riemannschen Probleme aus, d. h. denkt man sich einerseits die $a_1, \ldots, a_\sigma$ und andererseits die Fundamentalsubstitutionen $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ beliebig vorgeschrieben, so kommt man zu Differentialsystemen (A), für die die Fundamentalsubstitutionen von den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig sind. Fuchs [1]) hat allgemein nach den Bedingungen gefragt, die erfüllt sein müssen, damit die Fundamentalsubstitutionen eines Differentialsystems oder einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig seien. Wir wollen insbesondere die Bedingungen dafür aufzustellen suchen, daß die Fundamentalsubstitutionen $\Omega^{(\nu)}$ des Systems (A) von einem der singulären Punkte a_λ unabhängig werden [2]).

Wir bezeichnen den singulären Punkt a_λ mit t und betrachten t als unabhängig veränderliche Größe, die übrigen singulären Punkte $a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$ seien von t unabhängig. Die Darstellung der Integralmatrix Y durch die Methode der sukzessiven Approximationen zeigt, daß ihre Elemente y_{ik} monogene Funktionen von t sind; wir bilden nunmehr

$$D_t Y = Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial t} = P .$$

Da die y_{ik} als Funktionen von x keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, so gilt das gleiche von den $\frac{\partial y_{ik}}{\partial t}$ und folglich auch von den p_{ik}; ferner ist deutlich, daß die p_{ik} als Funktionen von x keine anderen singulären Stellen haben können als die y_{ik}.

Wir nehmen nun an, daß die zu Y gehörigen Fundamentalsubstitutionen $\Omega^{(1)}, \ldots \Omega^{(\sigma)}$ von t unabhängig seien; dann ist

[1]) L. Fuchs, 1888, siehe Werke III, S. 117 ff.

[2]) Vgl. für das Folgende L. Schlesinger, Crelles Journal 129 (1905), S. 287. Vorlesungen 1908, S. 312. Crelles Journal 141 (1912), S. 96 ff.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Omega^{(\nu)} Y) = \Omega^{(\nu)} \frac{\partial Y}{\partial t}$$

und folglich

$$(\Omega^{(\nu)} Y)^{-1} \frac{\partial(\Omega^{(\nu)} Y)}{\partial t} = Y^{-1}\, \Omega^{(\nu)-1}\, \Omega^{(\nu)} \frac{\partial Y}{\partial t} = Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial t} = P,$$

d. h. die p_{ik} ändern sich nicht, wenn x irgendeinen der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet, sie sind folglich allenthalben eindeutige Funktionen von x und, da sie nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen der Bestimmtheit haben können, rationale Funktionen von x.

Es sei nun in der Umgebung von $x = a_\nu$, $\nu \neq \lambda$

$$Y = C^{(\nu)} (x - a_\nu)^{\Sigma^{(\nu)}} \Phi^{(\nu)},$$

wo $C^{(\nu)}$ eine von x unabhängige, $\Phi^{(\nu)}$ eine in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Matrix, $\Sigma^{(\nu)}$ die zu $x = a_\nu$ gehörige determinierende Matrix, also die kanonische Form von $R^{(\nu)}$ bedeutet und die Determinante $|\Phi^{(\nu)}|$ für $x = a_\nu$ nicht verschwindet. Da

$$e^{2\pi i \Sigma^{(\nu)}}$$

die kanonische Form der Matrix $\Omega^{(\nu)}$, und $\Omega^{(\nu)}$ von A unabhängig ist, wird auch $\Sigma^{(\nu)}$ von t unabhängig sein, und da ferner

$$\Omega^{(\nu)} = C^{(\nu)}\, e^{2\pi i \Sigma^{(\nu)}} C^{(\nu)-1}$$

ist, kann auch $C^{(\nu)}$ von t unabhängig gewählt werden [1]). Wir haben dann

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = C^{(\nu)} (x - a_\nu)^{\Sigma^{(\nu)}} \frac{\partial \Phi^{(\nu)}}{\partial t}$$

und folglich

$$Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial t} = \Phi^{(\nu)-1} \frac{\partial \Phi^{(\nu)}}{\partial t} = P.$$

Da wegen $|\Phi^{(\nu)}(a_\nu)| \neq 0$ auch die Elemente von $\Phi^{(\nu)-1}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph sind, gilt das gleiche für die Elemente von P. Diese sind also in der Umgebung der von t unabhängigen singulären Stellen $a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$, und ebenso in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph. Bei dem Beweise dieses Satzes wurden in bezug auf t nur die Eigenschaften benutzt, daß die y_{ik} monogene Funktionen von t und die $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ von t unabhängig sind. Der Satz gilt also für jeden in den Koeffizienten von (A) auftretenden Parameter, für den diese Eigenschaften bestehen.

Für die Untersuchung der p_{ik} in der Umgebung von $x = t = a_\lambda$ setzen wir [2])

[1]) Bei der Darstellung $Y = B^{(\nu)} (x - a)^{R^{(\nu)}} \Phi^{(\nu)}$ könnte man natürlich nicht schließen, daß $R^{(\nu)}$ und $B^{(\nu)}$ von t unabhängig sind, deshalb mußten wir hier die determinierende Matrix $\Sigma^{(\nu)}$ selbst zur Darstellung von Y benutzen.

[2]) Nach R. Garnier, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 43 (1919), S. 155 ff.

$$t = \tau, \quad x = \tau + \xi,$$

dann wird

$$y_{ik} = y_{ik}(x, t) = y_{ik}(\xi + \tau, \tau),$$

also haben wir

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial \xi} = \frac{\partial y_{ik}}{\partial x}, \quad \frac{\partial y_{ik}}{\partial \tau} = \frac{\partial y_{ik}}{\partial x} + \frac{\partial y_{ik}}{\partial t}$$

und folglich

$$(34) \qquad Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial \xi} = A,$$

$$(35) \qquad Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial \tau} = A + P.$$

Für das Differentialsystem (34) hängt die dem $x = a_\lambda = t$ entsprechende singuläre Stelle $\xi = 0$ nicht von dem in den Koeffizienten von (34) auftretenden Parameter τ ab; nach dem vorhin Bewiesenen ist folglich $A + P$ in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorph als Funktion von ξ. Spalten wir von a_{ik} den zu $\xi = 0$, d. h. $x = a_\lambda$, gehörigen Partialbruch $\frac{r_{ik}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda}$ ab, so muß demnach p_{ik} in der Umgebung von $x = a_\lambda$ die Form haben:

$$(36) \qquad p_{ik} = -\frac{r_{ik}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda} + \gamma_{ik},$$

wo γ_{ik} in der Umgebung von $\xi = 0$, also von $x = a_\lambda$, holomorph ist. Nach dem Vorhergehenden ist aber γ_{ik} auch in der Umgebung eines jeden anderen x-Wertes (∞ eingeschlossen) holomorph, γ_{ik} **ist folglich von x unabhängig.**

Man kann nun durch eine einfache Transformation die γ_{ik} zum Wegfall bringen. Setzen wir nämlich

$$(37) \qquad Y = Z \cdot C,$$

wo die Elemente von C von x unabhängig sind, so ist

$$(38) \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = ZCAC^{-1},$$

$$(39) \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial t}C^{-1} + Y\frac{\partial C^{-1}}{\partial t} = YPC^{-1} + Y\frac{\partial C^{-1}}{\partial t}.$$

Nun folgt aus $CC^{-1} = I$ durch Differentiation nach t

$$\frac{\partial C}{\partial t}C^{-1} + C\frac{\partial C^{-1}}{\partial t} = 0;$$

wir können also (39) in der Form schreiben:

$$(39\text{a}) \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = YPC^{-1} - YC^{-1}\frac{\partial C}{\partial t}C^{-1}.$$

Setzen wir nunmehr

$$C' = CPC^{-1} - \frac{\partial C}{\partial t}\, C^{-1},$$

so folgt aus (39a) und (37)

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = ZC'. \tag{39b}$$

Durch die Transformation (37) verwandelt sich aber die Matrix Γ in

$$C\Gamma C^{-1} - \frac{\partial C}{\partial t}\, C^{-1}$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wenn wir C so wählen, daß

$$\frac{\partial C}{\partial t} = C\Gamma. \tag{40}$$

Wir können also in der Tat durch die Transformation (37) die γ_{ik} zum Verschwinden bringen, wenn wir C als Integralmatrix des Systems (40) wählen; daß durch diese Transformation die Unabhängigkeit der $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\sigma)}$ von t nicht gestört wird, liegt auf der Hand, da ja die Rechtskomposition von Y mit einer von x unabhängigen Matrix die Fundamentalsubstitutionen überhaupt nicht berührt. Dagegen geht durch die Transformation (37) die Eigenschaft der Integralmatrix, sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix I zu reduzieren, verloren.

Wir denken uns nun diese Transformation von vornherein ausgeführt und schreiben wieder y_{ik} an Stelle von z_{ik}; dann genügen die y_{ik} den beiden simultanen Differentialsystemen

$$\text{(A)} \qquad Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial x} = A, \quad A = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{R^{(\nu)}}{x - a_\nu}, \qquad (a_\lambda = t)$$

$$\text{(P)} \qquad Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial t} = P, \quad P = \frac{-R^{(\lambda)}}{x - t}.$$

Berechnen wir aus dem System (A) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t\, \partial x}$ und aus dem System (P) $\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial t}$, so finden wir

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial t} A + Y \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} P + Y \frac{\partial P}{\partial x}; \tag{42}$$

sollen die beiden Systeme (A) und (P) miteinander verträglich sein, so müssen die beiden Ausdrücke (42) übereinstimmen, und man kann zeigen [1], daß die sich so ergebenden, sogenannten **Integrabilitätsbedingungen** auch für die Verträglichkeit von (A) und (P) hinreichend sind. Man erhält auf diese Weise, wenn man noch für $\frac{\partial Y}{\partial t}$ und $\frac{\partial Y}{\partial x}$ ihre Werte aus (P) und (A) einsetzt und dann die allerseits links komponierende Matrix Y unterdrückt, die Integrabilitätsbedingung

[1] Vgl. z. B. L. Schlesinger, Vorlesungen 1908, S. 54 ff.

$$PA + \frac{\partial A}{\partial t} = AP + \frac{\partial P}{\partial x}$$

oder ausführlicher

$$(43)\qquad \frac{-R^{(\lambda)}}{x-t}\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{R^{(\nu)}}{x-a_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{x-a_\nu}\frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial t}$$
$$+\frac{1}{(x-t)^2}R^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{R^{(\nu)}}{x-a_\nu}\cdot\frac{-R^{(\lambda)}}{x-t} + \frac{R^{(\lambda)}}{(x-t)^2}.$$

Hierin heben sich nun, da $a_\lambda = t$ ist, die Glieder mit $\frac{1}{(x-t)^2}$ weg, und wenn man noch

$$\frac{1}{(x-a_\nu)(x-t)} = \frac{1}{t-a_\nu}\cdot\frac{1}{x-t} + \frac{1}{a_\nu - t}\cdot\frac{1}{x-a_\nu}$$

schreibt, so findet man durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x-a_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$ auf beiden Seiten der Gleichung (43) die von L. Schlesinger (1905) aufgestellten Gleichungen

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial t} &= \frac{R^{(\lambda)}R^{(\nu)} - R^{(\nu)}R^{(\lambda)}}{a_\nu - t}, \qquad (\nu \neq \lambda)\\ \frac{\partial R^{(\lambda)}}{\partial t} &= \sum_{\nu\neq\lambda}\frac{R^{(\lambda)}R^{(\nu)} - R^{(\nu)}R^{(\lambda)}}{t-a_\nu}, \end{aligned}$$

die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür darstellen, daß die Fundamentalsubstitutionen — oder, wie wir sagen können, die Monodromiegruppe — einer Integralmatrix des Differentialsystems (A) von dem singulären Punkte $a_\lambda = t$ unabhängig seien. Es ist dies, wie wir sehen, ein System von Differentialgleichungen zweiten Grades für die $n^2\sigma$ Residuen $r_{ik}^{(\nu)}$ als Funktionen von $a_\lambda = t$.

79. Algebraische Integralgleichungen des Differentialsystems (R). Besondere Fälle.

Eine Anzahl algebraischer Integralgleichungen des Differentialsystems (R) läßt sich sofort angeben.

Zunächst findet man durch Addition der Gleichungen (R)

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial t} = 0,$$

also

$$(44)\qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} R^{(\nu)} = C,$$

wo C eine konstante (von t unabhängige) Matrix bedeutet. Nun ist aber $\sum_{\nu=1}^{\sigma} R^{(\nu)} = -R^{(\sigma+1)}$ die zum Punkte $x = \infty$ gehörige Residuenmatrix des

Differentialsystems (A). Die Gleichungen (44) besagen also, daß diese von t unabhängig ist. In der Tat wird dies gerade durch die Transformation (37) bewirkt; eine einfache Rechnung zeigt nämlich, daß der Erfolg der Transformation (37), die γ_{ik} zum Verschwinden zu bringen, geradezu darauf beruht, C so einzurichten, daß in CAC^{-1} die zu $x = \infty$ gehörige Residuenmatrix von t unabhängig wird. Man kann mit Hilfe von (44) das Differentialsystem (R) einfacher so schreiben:

$$(\mathrm{R}') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial t} &= \frac{R^{(\lambda)} R^{(\nu)} - R^{(\nu)} R^{(\lambda)}}{a_\nu - t}, \qquad (\nu \neq \lambda) \\ R^{(\lambda)} &= -\sum_{\nu \neq \lambda} R^{(\nu)} - R^{(\sigma+1)}, \end{aligned}$$

in dieser Form treten nur noch $n^2(\sigma - 1)$ Unbekannte auf, dafür enthält die $R^{(\lambda)}$ bestimmende letzte Gleichung die n^2 Elemente von $R^{(\sigma+1)}$ als Integrationskonstanten.

Weitere Integralgleichungen ergeben sich, wenn wir die $R^{(\lambda)}$ für einen Augenblick als bekannt ansehen; dann stellt nämlich

$$\frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial t} = R^{(\nu)} \frac{R^{(\lambda)}}{t - a_\nu} - \frac{R^{(\lambda)}}{t - a_\nu} R^{(\nu)}$$

ein lineares Differentialsystem von der Form (5) der Nr. 74 für die Elemente von $R^{(\nu)}$ dar. Die entsprechenden Systeme (B) und (A) lauten hier übereinstimmend

$$\frac{d\vartheta_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i \frac{r_{ik}^{(\lambda)}}{t - a_\nu};$$

bezeichnen wir eine Integralmatrix dieses Systems mit Θ, so wird also (siehe Gl. (10) der Nr. 74)

$$R^{(\nu)} = \Theta^{-1} \Sigma \Theta,$$

wo Σ eine konstante (von t unabhängige) Matrix bedeutet. $R^{(\nu)}$ ist also mit einer konstanten Matrix Σ ähnlich, d. h. die kanonische Form von $R^{(\nu)}$ ist konstant. Denselben Schluß können wir aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial R^{(\lambda)}}{\partial t} = R^{(\lambda)} \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{R^{(\nu)}}{t - a_\nu} - \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{R^{(\nu)}}{t - a_\nu} R^{(\lambda)}$$

des Systems (R) in bezug auf $R^{(\lambda)}$ ziehen. Natürlich hätten wir dieses Ergebnis auch aus der Tatsache erschließen können, daß die Fundamentalsubstitutionen $\Omega^{(\nu)}$ von t unabhängig sind, es ist aber nicht unwichtig, dies direkt aus der Form des Differentialsystems (R) abgeleitet zu haben.

Wir haben auf diese Weise für jedes $\nu = 1, 2, \ldots, \sigma$ weitere n, im ganzen also $n\sigma$ neue algebraische Integralgleichungen gefunden. Man kennt somit $n^2 + n\sigma$ algebraische Integralgleichungen des Systems (R), wodurch es möglich wird, dieses auf ein System von $n^2\sigma - (n^2 + n\sigma)$ Differentialgleichungen erster Ordnung für ebenso viele unbekannte Funktionen zu reduzieren. Für den Fall $n = 2$, $\sigma = 2$ des Riemannschen Differentialsystems wird diese Zahl gleich Null; in der Tat wissen wir, daß für dieses System oder, was ja dasselbe heißt, für die Gaußsche Differentialgleichung die Fundamentalsubstitutionen stets von den singulären Punkten unabhängig sind.

Beim nächsteinfachen Falle $n = 2$, $\sigma = 3$ haben wir 12 Residuen und 10 algebraische Integralgleichungen, das System (R) wird sich also in diesem Falle auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung oder auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren lassen. Für $n = 2$ und ein beliebiges σ würde (R) auf ein System von $2\sigma - 4$ Differentialgleichungen erster Ordnung oder $\sigma - 2$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückgeführt werden können. Diese Zurückführung läßt sich in folgender Weise bewirken.

Wir gehen von dem schlechthin kanonischen System für zwei Unbekannte (vgl. Gl. (58), Nr. 46) aus:

$$\frac{dy_k}{dx} = y_1 \frac{g_{1k}}{\psi(x)} + y_2 \frac{g_{2k}}{\psi(x)}, \qquad (k=1,2) \tag{45}$$

wo die g_{ik} ganze rationale Funktionen vom höchstens $(\sigma - 1)$-ten Grade bedeuten und

$$\psi(x) = (x - a_1) \dots (x - a_\sigma)$$

ist, und wollen uns die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hergestellt denken, der

$$z = y_1 h_1 + y_2 h_2 \tag{46}$$

bei konstanten h_1, h_2 genügt. Es seien y_{ik} die Elemente einer Integralmatrix von (45), dann bilden

$$z_i = y_{i1} h_1 + y_{i2} h_2 \qquad (i=1,2)$$

ein Fundamentalsystem jener Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für die Wronskische Determinante des Fundamentalsystems z_1, z_2 ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1' \\ z_2 & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_1 & \frac{g_{11}}{\psi} h_1 + \frac{g_{12}}{\psi} h_2 \\ h_2 & \frac{g_{21}}{\psi} h_1 + \frac{g_{22}}{\psi} h_2 \end{vmatrix}$$

und mit Benutzung der Jacobischen Formel (Nr. 38, Gl. (36))

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = c e^{\int \frac{g_{11}+g_{22}}{\psi} dx} (h_1^2 g_{21} + h_1 h_2 (g_{22} - g_{11}) - h_2^2 g_{12}) \frac{1}{\psi}.$$

Wir sehen daraus, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung für z außer den singulären Punkten $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$ des Systems (45) noch außerwesentlich singuläre Punkte besitzt, an den Stellen nämlich, wo

$$h_1^2 g_{21} + h_1 h_2 (g_{22} - g_{11}) - h_2^2 g_{12} = 0$$

ist. Durch passende Wahl von h_1, h_2 kann man erreichen, daß in dieser Gleichung, die im allgemeinen vom Grade $\sigma - 1$ ist, der Koeffizient von $x^{\sigma-1}$ verschwindet, so daß wir dann noch $\sigma - 2$ außerwesentlich singuläre Punkte $b_1, \ldots, b_{\sigma-2}$ für unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung erhalten. Diese sind wohlbestimmte algebraische Funktionen der Residuen $r_{ik}^{(\nu)}$ des Systems (45), und wenn man nun die Differentialgleichungen (R), denen die $r_{ik}^{(\nu)}$ als Funktionen von $a_\lambda = t$ genügen, in Differentialgleichungen für diese $b_1, \ldots, b_{\sigma-2}$ umrechnet, so erhält man das oben erwähnte System von $\sigma - 2$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das dem System (R) äquivalent ist. Garnier[1]) hat dieses System aufgestellt, indem er direkt die Bedingungen suchte, die bewirken, daß die Monodromiegruppe einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung des Fuchsschen Typus mit σ wesentlichen und $\sigma - 2$ außerwesentlich singulären Punkten von dem singulären Punkte $a_\lambda = t$ unabhängig sei. Es zeigt sich, daß sich dann alle in dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung noch auftretenden Parameter durch die $b_1, \ldots, b_{\sigma-2}$ und ihre Derivierten nach t rational ausdrücken lassen.

In dem Falle $\sigma = 3$, wo also nur ein außerwesentlich singulärer Punkt $b_1 = u$ vorhanden ist, während man zwei der wesentlich singulären Punkte, etwa a_1, a_2, durch lineare Transformation

$$\xi = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

nach 0 und 1 verlegen kann, ergibt sich für u als Funktion von $a_3 = t$ die folgende von R. Fuchs[2]) aufgestellte Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(47)\quad \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\right)\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{u(u-1)(u-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{\delta_\infty - \delta_0\frac{t}{u^2} + \delta_1\frac{t-1}{(u-1)^2} - (\delta_t - 1)\frac{t(t-1)}{(u-t)^2}\right\},$$

wo δ_∞, δ_0, δ_1, δ_t die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen sind, die zu den singulären Punkten ∞, 0, 1, t der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für ξ gehören.

Es hat sich nun das überraschende Ergebnis herausgestellt[3]), daß diese Differentialgleichung (47) in gewissem Sinne die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$(48)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = R\left(\frac{du}{dt}, u, t\right)$$

[1]) R. Garnier, Thèses, Paris 1911, S. 85.

[2]) R. Fuchs, Comptes Rendus 141 (1905), Mathem. Annalen 63 (1906), S. 301.

[3]) Vgl. R. Garnier, a. a. O.

ist, die keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen aufweist, oder wie man kürzer sagt, die nur feste kritische Punkte besitzt. Darin bedeutet R eine rationale Funktion von $\frac{du}{dt}$ und u mit in t monogenen Koeffizienten. Wir finden uns auf diese Weise wieder in den Gedankenkreis des zweiten und dritten Kapitels zurückversetzt. In der folgenden Nummer werden wir die analogen Fragen für das allgemeine System (R) eingehender besprechen; hier sollen nur noch gewisse besondere Fälle der Differentialgleichung (47) hervorgehoben werden, denen wir noch einige geschichtliche Bemerkungen voranstellen.

Die Frage nach den Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten, von der Form (48) hat Painlevé[1]) in Angriff genommen. Er zeigte zunächst, daß die Differentialgleichung (48), wenn sie keine verschiebbaren Verzweigungspunkte enthalten soll, von der Form

$$(49) \qquad u'' = L(t, u)u'^2 + M(t, u)u' + N(t, u)$$

sein muß, wo die L, M, N rational in u und monogen in t sind. Um dann weiter die Bedingungen dafür zu erhalten, daß auch keine verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen auftreten, setzt Painlevé in (49)

$$(50) \qquad t = t_0 + \alpha\xi$$

und läßt α gegen Null konvergieren. Er erhält auf diese Weise die sogenannte vereinfachte Gleichung (équation simplifiée)

$$(51) \qquad u'' = L(t_0, u)u'^2 = l(u)u'^2,$$

die die unabhängige Veränderliche t nicht mehr explizite enthält, und deren allgemeine Lösung folglich eine eindeutige Funktion von t sein muß. Die Differentialgleichungen der Form (50), die diese Eigenschaft haben, lassen sich unschwer angeben, und indem man dann die in $l(u)$ auftretenden Konstanten durch Funktionen von t ersetzt, erhält man die möglichen Formen für $L(t, u)$. Durch ähnliche Gedankengänge werden dann[2]) die möglichen Formen für M und N bestimmt und auf diese Weise eine Tabelle von Differentialgleichungen gewonnen, aus denen jede Differentialgleichung der Form (48) mit festen kritischen Punkten durch eine Transformation der Form

$$(52) \qquad t = \varphi(\xi), \quad u = \frac{l(\xi)\eta + m(\xi)}{p(\xi)\eta + q(\xi)}$$

[1]) P. Painlevé, Bulletin de la Soc. Mathém. de France 28 (1900). S. 201; Acta mathem. 25 (1902), S. 1 ff. Vgl. für das Folgende den Enzyklopädieartikel II B 6 von E. Hilb.

[2]) Siehe B. Gambier, Acta mathem. 33 (1909), S. 1 und P. Boutroux, Annales de l'École Norm. sup. (3) 31. (1914). S. 109.

hervorgehen muß, wo φ, l, m, p, q monogene Funktionen bedeuten. Nach Ausschluß der Differentialgleichungen, die sich auf lineare oder auf solche Differentialgleichungen zurückführen lassen, die durch Quadraturen, elliptische Funktionen u. dgl. integrierbar sind, fand Painlevé eine Anzahl möglicher Formen von Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten. Die einfachste dieser Formen lautet

$$(53) \qquad u'' = 6u^2 + t\,,$$

ihr allgemeines Integral ist eine in der ganzen t-Ebene meromorphe Funktion. Durch ein (später von Gambier berichtigtes) Versehen war aber unter den von Painlevé aufgestellten Formen gerade die Differentialgleichung (47) nicht enthalten, die erst R. Fuchs (1905) von der Theorie der linearen Differentialgleichungen ausgehend fand, und von der dann Painlevé[1]) zeigte, daß aus ihr die von ihm angegebenen Typen durch Grenzübergänge hervorgehen. Nur der Fall der Differentialgleichung (47), wo die Zahlen $\delta_\infty, \delta_0, \delta_1, \delta_t$ sämtlich gleich Null sind, d. h. die Differentialgleichung

$$(54) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\right)\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{u(u-1)}{t(t-1)(u-t)}$$

kam unter den von Painlevé aufgestellten Typen vor[2]). Wir wollen für diese Differentialgleichung direkt zeigen, daß sie feste kritische Punkte besitzt, indem wir ihre Lösung explizite angeben.

Setzt man

$$(55) \qquad v = \int\limits_\infty^u \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-t)}}\,,$$

so folgt aus den in der Nr. 58 durchgeführten Rechnungen, wenn man daselbst $z = u$, $x = t$ und (vgl. die Nr. 60, S. 238) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ setzt, daß v als Funktion von t die Differentialgleichung

$$(56) \quad t(1-t)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (1-2t)\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{4}v = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{2}}(u-t)^{-\frac{3}{2}}$$

befriedigt. Erstreckt man die Integration über einen geschlossenen Weg, der je zwei der Punkte $0, 1, t, \infty$ umschließt, so wird das Integral zu einem Periodizitätsmodul ω des Integrals v und befriedigt nach der Nr. 60 die Legendresche Differentialgleichung (C)

$$(57) \qquad t(1-t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + (1-2t)\frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{4}\omega = 0\,,$$

[1]) P. Painlevé, Comptes Rendus, 143 (1906), S. 1111.

[2]) Siehe auch schon P. Painlevé, Leçons de Stockholm 1897, S. 501 ff. und Picard, Liouvilles Journal (4) 5, 1889, S. 203 ff.

deren allgemeine Lösung in der Form

$$\omega = c_1 2K + c_2 2K'i \tag{58}$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten c_1, c_2 erscheint. $2K$, $2K'i$ sind durch die Formeln der Nr. 60 (S. 238) gegeben.

Betrachtet man nun in (55) u als die durch die Differentialgleichung (54) gegebene Funktion von t, so hängt v in zwiefacher Weise von t ab, einmal explizite, das andere Mal durch Vermittlung von u; differentiiert man dann v total nach t, so ergibt sich

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-t)}} \frac{du}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-t)}} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \\ + \frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-t)}} \frac{1}{u-t} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-t)}} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1-2t}{t(1-t)} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{4t(1-t)} v = \frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-t)}} \left\{ \frac{d^2 u}{dt^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\right) \frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \right\} \\ + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1-2t}{t(1-t)} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{4t(1-t)} v,\end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (54)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1-2t}{t(1-t)} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{4t(1-t)} v = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{2}}(u-t)^{-\frac{3}{2}}}{t(t-1)} \\ + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1-2t}{t(1-t)} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{4t(1-t)} v.\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach (56) identisch gleich Null, wir finden also, daß die durch (55) dargestellte Funktion v von t, wo u als durch die Differentialgleichung (54) bestimmt angesehen wird, der Legendreschen Differentialgleichung (57) Genüge leistet und folglich in der Form (58) darstellbar ist. Bezeichnet man nunmehr mit

$$u = f(v)$$

die eindeutige Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrals (55), so erhält man die allgemeine Lösung von (54) in der Form

$$u = f(c_1 2K + c_2 2K'i),$$

und es ist evident, daß diese Funktion von t keine von den Integrationskonstanten c_1, c_2 abhängenden kritischen Punkte besitzt.

80. Integration des Differentialsystems (R). Bericht über neuere Untersuchungen.

Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, das Differentialsystem (R), losgelöst von seinem Ursprung aus dem Fuchsschen Problem, zu integrieren.

Es sei $t = \bar{a}_\lambda$ ein von den Punkten a_ν ($\nu \neq \lambda$) verschiedener endlicher Wert von t; dann denken wir uns zunächst die n^2 Integrationskonstanten $r_{ik}^{(\sigma+1)}$ beliebig gegeben, schreiben ferner für die $r_{ik}^{(\nu)}$ ($\nu \neq \lambda$) im Punkte $t = \bar{t}$ willkürliche Anfangswerte $\bar{r}_{ik}^{(\nu)}$ vor, und bestimmen die $\bar{r}_{ik}^{(\lambda)}$ durch die Gleichung

$$\bar{R}^{(\lambda)} = -\sum_{\nu \neq \lambda} \bar{R}^{(\nu)} - R^{(\sigma+1)}.$$

Dann besitzt das Differentialsystem (R) bzw. (R′) nach dem Cauchyschen Existenzsatze ein in der Umgebung von $t = \bar{t}$ holomorphes Lösungssystem, das wir mit $r_{ik}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \sigma$) bezeichnen wollen und das für $t = \bar{t}$ die Anfangswerte $\bar{r}_{ik}^{(\nu)}$ annimmt. Nach dem zu Anfang der Nr. 79 Bewiesenen sind die kanonischen Formen der $R^{(\nu)}$ von t unabhängig, stimmen also mit den kanonischen Formen der $\bar{R}^{(\nu)}$ überein.

Es sei nun x eine von t unabhängige Veränderliche; wir markieren in der x-Ebene die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$, konstruieren die Fläche T, indem wir die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ von diesen Punkten nach dem Unendlichen hin legen, und denken uns, um der Veränderlichkeit von $a_\lambda = t$ Rechnung zu tragen, l_λ als dehnbaren Faden, der sich den Veränderungen von t anzupassen vermag. Für $t = \bar{t} = \bar{a}_\lambda$ bezeichnen wir l_λ mit $\bar{l}_\lambda$ und T mit $\bar{T}$.

Wir setzen dann

$$\bar{A} = \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{\bar{R}^{(\nu)}}{x - a_\nu} + \frac{\bar{R}^{(\lambda)}}{x - \bar{a}_\lambda},$$

bilden das Differentialsystem

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \, \bar{a}_{\mu k}$$

und die Integralmatrix

$$\text{(59)} \qquad \bar{Y} = \overset{\frown}{\int_{x_0}^{x}} (\bar{A}\, dx + I)\,.$$

Ferner bilden wir mit den zuvor erklärten Lösungen $r_{ik}^{(\lambda)}$ des Systems (R) das Differentialsystem in t

$$\text{(P)} \qquad \frac{\partial y_k}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \frac{r_{\mu k}^{(\lambda)}}{t - x}$$

und diejenige Integralmatrix

$$\text{(60)} \qquad Y = \bar{Y} \overset{\frown}{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x}\, dt + I \right),$$

die sich für $t = \bar{t}$ auf Y reduziert. Nach den Ergebnissen der Nr. 78 befriedigt Y dann das Differentialsystem in x

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial y_k}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k},$$

wo

$$A = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{R^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (a_\lambda = t)$$

mit den oben definierten Lösungen $r_{ik}^{(\nu)} (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$ des Systems (R) gebildet ist. Es reduziert sich nämlich die Integralmatrix Y für $x = x_0$ gemäß den Gleichungen (59) und (60) auf

$$\text{(61)} \qquad (Y)_{x=x_0} = \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right),$$

diejenige Integralmatrix von (A), die sich für $x = x_0$ auf die Matrix (61) reduziert, ist aber

$$\text{(62)} \qquad \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) \widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I).$$

Eine einfache Rechnung[1]) zeigt nun, daß die Integralmatrix (62) von (A) als Funktion von t das Differentialsystem (P) befriedigt, und da sie sich offenbar für $t = \bar{t}$ auf Y reduziert, so stimmt sie tatsächlich mit der durch (60) gegebenen Matrix Y überein.

Vergleichen wir nun die beiden Darstellungen (60) und (62) der Matrix Y miteinander, so ergibt sich mit Rücksicht auf (59)

$$\widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I) \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x}\, dt + I \right) = \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) \widehat{\int_{x_0}^{x}} (A\,dx + I);$$

diese Gleichung, die noch den willkürlichen Parameter x enthält, stellt also eine kontinuierliche Schar von Integralgleichungen des Systems (R) dar. Erstrecken wir die darin vorkommenden auf x bezüglichen Produktintegrale über die σ Schleifenwege $s_1, \ldots, s_{\lambda-1}, s_{\lambda+1}, \ldots, s_{\sigma+1}$, die von x_0 ausgehend die Punkte $a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$ umlaufen, so erhält x den Wert x_0 und wir finden

$$\widehat{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I) \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) = \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) \widehat{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I)$$

oder

$$\text{(63)} \qquad \widehat{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I) = \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) \widehat{\int_{(s_\nu)}} (A\,dx + I) \widehat{\int_{\bar{t}}^{t}} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right)$$

[1]) Vgl. L. Schlesinger, Crelles Journal, 141 (1912), S. 96, I. Teil, 2.

für $\nu = 1, 2, \dots, \lambda - 1, \lambda + 1, \dots, \sigma + 1$. Diese Gleichungen sagen aber nichts anderes aus, als daß die Fundamentalsubstitutionen

$$\mathbf{\Omega}^{(1)}, \dots, \mathbf{\Omega}^{(\lambda-1)}, \mathbf{\Omega}^{(\lambda+1)}, \dots, \mathbf{\Omega}^{(\sigma+1)}\,[1]),$$

die zu der Integralmatrix Y des Systems (A) gehören, mit den entsprechenden Fundamentalsubstitutionen der Integralmatrix Y des Systems (A) übereinstimmen, d. h. daß diese letzteren von t unabhängig sind. Nun vertritt jede der σ Gleichungen (63) als Matrizengleichung n^2 Gleichungen, wir haben also in (63) genau $n^2\sigma$ Integralgleichungen des Systems (R), die, da sie die $n^2\sigma$ vorgeschriebenen Integrationskonstanten $r_{ik}^{(\nu)}$ enthalten, die allgemeine Lösung dieses Systems liefern. Wir können also sagen, daß wir das System (R) mit Hilfe von auf Schleifenwegen erstreckten Produktintegralen integrieren können, etwa ähnlich, wie wir die Gaußsche Differentialgleichung durch gewöhnliche, auf Schleifenwegen erstreckte Integrale gelöst haben.

Wir können aber die Integralgleichungen (63) von (R) auch in eine Form setzen, bei der die Elemente der Fundamentalsubstitutionen $\mathbf{\Omega}^{(1)}, \dots, \mathbf{\Omega}^{(\sigma)}$ selbst als Integrationskonstanten erscheinen.

Wie wir in der Nr. 77 gezeigt haben, sind die y_{ik} ganze transzendente Funktionen der $r_{ik}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \dots, \sigma)$, deren Koeffizienten noch abhängen von den $a_1, \dots, a_\sigma$ und vom Integrationswege $(x_0 x)$, auf dem das in (62) auftretende Produktintegral in x erstreckt ist; wir schreiben diese ganzen transzendenten Funktionen

$$(64) \qquad y_{ik} = e_{ik}(r_{11}^{(1)}, \dots, r_{nn}^{(\sigma)}; a_1, \dots, a_\sigma; x_0 x).$$

Für $x = x_0$ reduziert sich Y auf das Produktintegral (61); nehmen wir also in (64) für den Integrationsweg $x_0 x$ einen geschlossenen Weg s_0, der von x_0 ausgeht und in T verläuft, so wird

$$(65) \qquad \int_t^{t} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) = E(r_{11}^{(1)}, \dots, r_{nn}^{(\sigma)}; a_1, \dots, a_\sigma; s_0),$$

dagegen erhalten wir nach den Ergebnissen der Nr. 77, wenn wir als Integrationsweg den Schleifenweg s_ν wählen,

$$(66) \qquad \mathbf{\Omega}^{(\nu)} \int_t^{t} \left(\frac{R^{(\lambda)}}{t - x_0}\, dt + I \right) = E(r_{11}^{(1)}, \dots, r_{nn}^{(\sigma)}; a_1, \dots, a_\sigma; s_\nu).$$

Indem wir nunmehr in (66) von rechts her mit der inversen Matrix von (65) komponieren, ergeben sich die Elemente $\omega_{ik}^{(\nu)}$ der Fundamentalsubstitutionen $\mathbf{\Omega}^{(\nu)}$ in der Form von meromorphen Funktionen, d. h. als Quotienten beständig konvergenter Potenzreihen, der $r_{ik}^{(\nu)}$ mit einem gemeinsamen Nenner:

[1]) $\mathbf{\Omega}^{(\lambda)}$ bestimmt sich durch die Gleichung $\mathbf{\Omega}^{(\sigma+1)} = \mathbf{\Omega}^{(1)-1}\, \mathbf{\Omega}^{(2)-1} \cdots \mathbf{\Omega}^{(\sigma)-1}$.

$$(67) \qquad \omega_{ik}^{(\nu)} = f_{ik}^{(\nu)}(r_{11}^{(1)}, \ldots, r_{nn}^{(\sigma)}; a_1, \ldots, a_\sigma) \qquad \left(\begin{smallmatrix}\nu=1,2,\ldots,\sigma\\ i,k=1,2,\ldots,n\end{smallmatrix}\right)$$

und die Koeffizienten dieser $f_{ik}^{(\nu)}$ hängen noch von $a_\lambda = t$ ab. Die Gleichungen (67) stellen dann ebenfalls ein System von Integralgleichungen des Systems (R) dar, in dem die $\omega_{ik}^{(\nu)}$ als Integrationskonstanten fungieren.

Der Zusammenhang zwischen diesen Integrationskonstanten und den Anfangswerten $\bar{r}_{ik}^{(\nu)}$ der $r_{ik}^{(\nu)}$ für $t = \bar{t}$ wird durch die Gleichungen

$$\omega_{ik}^{(\nu)} = e_{ik}(\bar{r}_{11}^{(1)}, \ldots, \bar{r}_{nn}^{(\sigma)}; a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_\lambda, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma; s_\nu)$$

vermittelt, die voneinander unabhängig sind, da ja, wie wir in der Nr. 77 gezeigt haben, die Funktionaldeterminante dieser $n^2\sigma$ Funktionen nicht identisch verschwindet.

Setzt man die Lösbarkeit des Riemannschen Problems voraus, so kann man nun unschwer zeigen, daß die Lösungen $r_{ik}^{(\nu)}$ des Systems (R) in einem Punkte t, der von $a_\nu(\nu \neq \lambda)$ und von ∞ verschieden ist, holomorph sind oder einen Pol haben, man kann ferner die Mehrdeutigkeit der $r_{ik}^{(\nu)}$ als Funktionen von t analysieren und ihr qualitatives Verhalten in der Umgebung der festen singulären Punkte $t = a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$ angeben [1]). Umgekehrt würde sich, wenn ein direkter Beweis dafür gelänge, daß das System (R) feste kritische Punkte besitzt, daraus ein Beweis für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems ergeben, und zwar kein bloßer Existenzbeweis, wie es die bisher allgemein durchgeführten sind, sondern ein solcher, der zugleich einen Algorithmus für die Herstellung der $r_{ik}^{(\nu)}$ aus vorgeschriebenen $\omega_{ik}^{(\nu)}$ bei ebenfalls gegebenen $a_1, \ldots, a_\sigma$ lieferte.

Wenn in dem schlechthin kanonischen System (A) nicht nur ein singulärer Punkt a_λ, sondern mehrere der $a_1, \ldots, a_\sigma$ als veränderliche Parameter angesehen werden, und man verlangt, daß die Monodromiegruppe einer Integralmatrix von diesen Parametern unabhängig sein soll, so haben die Residuen entsprechend mehreren Systemen von der Form (R) zu genügen, die dann als simultane Systeme partieller Differentialgleichungen aufzufassen sind. Da durch eine lineare Transformation von x stets zwei der singulären Punkte, etwa $a_{\sigma-1}, a_\sigma$, nach 0, 1 verlegt werden können, so hat man im äußersten Falle $\sigma - 2$ solche simultane Systeme zu betrachten.

Wir berichten nunmehr noch kurz über einige neuere, auf das System (R) bezügliche Untersuchungen französischer Mathematiker.

Will man nach der Methode von Painlevé (siehe Nr. 79, S. 311) nachzuweisen suchen, daß das System (R) feste kritische Punkte besitzt, so wird man zuvörderst das „vereinfachte System" aufstellen. Wir be-

[1]) L. Schlesinger, Crelles Journal 141 (1912), S. 96ff. III. Teil.

trachten gleich alle $\sigma - 2 = m$ Punkte $a_1, \ldots, a_m$ als veränderlich ($a_{\sigma-1} = 0$, $a_\sigma = 1$), setzen in den simultanen Systemen

$$(\mathrm{R}') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R^{(\nu)}}{\partial a_\lambda} = \dfrac{R^{(\nu)} R^{(\lambda)} - R^{(\lambda)} R^{(\nu)}}{a_\lambda - a_\nu}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{m+2} R^{(\nu)} = \text{const.}, \end{cases} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m, \\ \nu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda+1, \ldots, m+2 \end{smallmatrix}\right)$$

$$(68) \qquad a_\lambda = \alpha_\lambda + \varepsilon \tau_\lambda, \quad r_{ik}^{(\nu)} = \frac{1}{\varepsilon} s_{ik}^{(\nu)} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, m+2 \end{smallmatrix}\right)$$

und lassen ε gegen Null konvergieren (vgl. Gl. (50) der Nr. 79). Dann ergibt sich das „vereinfachte System“

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial S^{(\nu)}}{\partial \tau_\lambda} &= \frac{S^{(\nu)} S^{(\lambda)} - S^{(\lambda)} S^{(\nu)}}{\alpha_\lambda - \alpha_\nu}, \\ \sum_{\nu=1}^{m+2} S^{(\nu)} &= \text{const.}, \end{aligned} \qquad (\nu \neq \lambda)$$

das die unabhängige Veränderliche τ_λ nicht mehr explizite enthält und folglich eindeutige Lösungen besitzen muß. In einer Abhandlung, die vorwiegend dem Studium der Systeme (S') gewidmet ist [1]), hat Garnier gezeigt, daß dies in der Tat zutrifft, und daß sich die allgemeine Lösung von (S') durch klassische Transzendenten, nämlich durch Abelsche Funktionen vom Range oder Geschlecht

$$p = \frac{n(n-1)}{2}(m+1) - n + 1$$

darstellen läßt, in denen $p - m$ Argumente konstant und die m übrigen gleich linearen Funktionen der $\tau_1, \ldots, \tau_m$ zu setzen sind. Die Abelschen Funktionen reduzieren sich auf hyperelliptische in zwei Fällen:

1. wenn $n = 2$ ist, auf hyperelliptische vom Range $m = \sigma - 2$ [2]);

2. wenn n beliebig, $m = 1$, also $\sigma = 3$ ist, auf solche vom Range $n-1$.

Im letzteren Falle, wo nur eine unabhängige Veränderliche τ vorhanden ist, gelingt es, das System (S') durch Einführung neuer abhängiger Veränderlicher in die Form zu setzen:

$$(\mathrm{S}'') \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} &= \xi_i \left[2 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \eta_k - a_i\right], \\ \frac{d^2\eta_i}{d\tau^2} &= \eta_i \left[2 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \eta_k - a_i\right], \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

wo die a_i von τ unabhängig sind. Für $n = 3$ wird dieses System durch hyperelliptische Funktionen vom Range $p = 2$ gelöst, in denen das eine Argument konstant, das andere gleich einer linearen Funktion von τ

[1]) R. Garnier, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 43 (1919), S. 155.

[2]) Vergl. R. Garnier, Thèses. Paris 1912. Annales de l'École Normale (3) 29, S. 1.

zu nehmen ist, genau ebenso wie in dem von Sophie v. Kowalewski [1]) behandelten Falle des Rotationsproblems eines starren Körpers um einen festen Punkt. Das System (S″) kann also als Verallgemeinerung der Differentialgleichungen jenes Kowalewskischen Rotationsproblems angesehen werden.

Über die Bedeutung der von Garnier für das System (S′) erzielten Ergebnisse für die Differentialgleichungen (R′) selbst kann man sich durch die folgende Überlegung Rechenschaft geben. Wir schreiben (R′) in der Form

$$(\mathrm{R}'') \qquad \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial a_\lambda} = \frac{1}{a_\lambda}\,\frac{R^{(\nu)}R^{(\lambda)} - R^{(\lambda)}R^{(\nu)}}{1 - \dfrac{a_\nu}{a_\lambda}}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} R^{(\nu)} = \text{const.};$$

läßt man dann alle $a_\nu(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$ so ins Unendliche wachsen, daß sich die Verhältnisse $\frac{a_\nu}{a_\lambda}$ den festen Grenzwerten $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\lambda}$ nähern, und setzt

$$\alpha_\lambda \log a_\lambda = \tau_\lambda,$$

so verwandelt sich (R″) in

$$\frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial \tau_\lambda} = \frac{R^{(\nu)}R^{(\lambda)} - R^{(\lambda)}R^{(\nu)}}{\alpha_\lambda - \alpha_\nu}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} R^{(\nu)} = \text{const.},$$

d. h. in das System (S′). Man wird also vermuten können, daß die Lösungen des Systems (R′) für große Werte der unabhängigen Veränderlichen asymptotisch durch die Lösungen des Systems (S′) dargestellt werden, ähnlich wie dies (vgl. Nr. 71) für die Besselsche Funktion durch den Sinus der Fall ist. Bisher ist diese Vermutung nur in einem speziellen Falle durch Untersuchungen von P. Boutroux [2]) bestätigt worden.

Im Falle $n = 2$, $m = 1$, also $\sigma = 3$, wo das Differentialsystem (R′) mit der Differentialgleichung (47) äquivalent ist, wird nämlich nach den geschilderten Ergebnissen von Garnier das vereinfachte System durch hyperelliptische Funktionen vom Range $p = m = 1$, also durch elliptische Funktionen gelöst. Durch Grenzübergänge [3]) kann die Differentialgleichung (47) in die bereits (S. 312) erwähnte Painlevésche Gleichung

$$(69) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = 6u^2 + t$$

übergeführt werden, die die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß die Monodromiegruppe der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

[1]) S. v. Kowalewski, Acta mathematica 12 (1889), S. 177.

[2]) P. Boutroux, Annales de l'École Norm. Sup. (3) 30, 1913, S. 255; 31, 1914, S. 99.

[3]) Siehe R. Garnier, Thèses, S. 48ff.; P. Boutroux a. a. O. 31, 1914, S. 151 ff.

$$(70)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(4(x^3 - u^3) + 2t(x - u) + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-u)^2} - \frac{u'}{x-u} + u'^2\right)y$$

von dem Parameter t unabhängig wird. In dieser linearen Differentialgleichung (70) ist $x = \infty$ eine Unbestimmtheitsstelle und u der außerwesentlich singuläre Punkt. Durch die Transformation

$$u = t^{\frac{1}{2}} v, \quad \tau = \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}}$$

verwandelt sich (69) in

$$(71)\qquad \frac{d^2v}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dv}{d\tau} - \frac{4}{25}\frac{1}{\tau^2} v = 6v^2 + 1$$

und diese Differentialgleichung geht, wenn man $\tau \to \infty$ streben läßt, über in

$$(72)\qquad \frac{d^2v}{d\tau^2} = 6v^2 + 1\,,$$

aus der durch einmalige Integration

$$(73)\qquad \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 = 4v^3 + 2v + g$$

hervorgeht, wo g eine willkürliche Konstante bedeutet. Diese Differentialgleichung (73) wird durch eine elliptische Funktion $v = f(\tau)$ gelöst, und Boutroux zeigt ausführlich, daß die Lösungen von (71) für große Werte von τ durch diese elliptische Funktion asymptotisch dargestellt werden, ähnlich wie die Besselsche Funktion durch den Sinus.

Die letzten skizzenhaften Bemerkungen verfolgen das Ziel, jüngere Mathematiker zur Beschäftigung mit diesen aussichtsvollen und tiefgehenden Untersuchungen anzuregen, Untersuchungen, die geeignet erscheinen, den Kreis der analytisch zugänglichen Funktionen in bemerkenswerter Weise zu erweitern und dadurch der Analysis auch neue Gebiete der Anwendungen zu erschließen.

Sach- und Namenverzeichnis.

Abel, N. H. 26, 123.
Abelsche Funktionen 97, 318.
— Gleichung 161.
Abhängigkeit der Lösungen von
— den Anfangswerten 15, 41 ff.
— den Parametern 18, 41 ff., 145, 299 ff.
Abschätzungsformel für die Lösungen eines linearen Differentialsystems 141.
Additionstheorem der elliptischen Funktionen 117.
Addition von Matrizen 134, 286.
Adjungierte Differentialgleichung 225, 292.
Adjungierter Differentialausdruck 225.
Adjungiertes Differentialsystem 291.
Adjungierte Integralmatrizen 294.
Ähnliche Matrizen 148.
d'Alembert, J. le Rond 213, 214.
Algebraischer Verzweigungspunkt 38.
Algebraische Unendlichkeitsstelle 40.
Algebroid 40.
Allgemeines Lösungssystem eines linearen Differentialsystems 133.
Analytische Fortsetzung 46.
Anfangsbedingungen
— für die Differentialgleichung 1. Ordnung 7.
— für ein Differentialsystem 19, 133.
— für die Differentialgleichung n. Ordnung 19.
Anfangsmatrix 137.
Anfangswerte, reguläre 42.
—, singuläre 35.
Anormale Reihen 252.
Appell, P. 67, 76, 97, 99.
Art bei Differentialsystemen 166, 201, 289.
— bei Matrizen 182, 201.
Asymptotische Darstellung 248, 257, 270 ff., 319, 320.
Außerwesentlich singulärer Punkt einer Differentialgleichung 49, 147, 180, 202, 309 ff.
Automorphe Funktionen 240.
Autonne, L. 125.

Bedingungsgleichung 4.
Begleitender bilinearer Differentialausdruck 225.
Bernoulli, D. 56.
— J. 60.
Bernoullische Differentialgleichung 61.
— Transformation 64.
Berry, A. 94.
Bessel, F. W. 274.
Besselsche Differentialgleichung 274 ff.
— Funktion 278, 279, 319, 320.
Bestimmtheitsstellen 158, 165, 168, 288.
Betafunktion 234 ff.
Bieberbach, L. 37, 69.
Birationale Transformation 97 ff., 122.
Birkhoff, G. D. 167, 266, 302.
Bouquet, J. C. 31, 35, 67, 96, 112, 123, 124, 185, 189, 256.
Bourlet, Ch. 236.
Boutroux, P. 124, 125, 279, 319, 320.
Briot, Ch. 31, 35, 67, 96, 112, 123, 124, 185, 189, 256.
Briot- und Bouquetsche Differentialgleichungen 96, 101 ff., 108 ff.

Calcul des limites 30, 140, 141.
Cantor, M. 89.
Caqué, J. 145.
Casorati, F. 302.
Cauchy, A. L. 12, 30, 31, 32, 48, 123, 145, 175.

Cauchy-Lipschitzsches Verfahren 13.
— für eine Differentialgleichung 1. Ordnung 8 ff.
— für ein Differentialsystem 1. Ordnung 18 ff.
— für ein lineares homogenes Differentialsystem 1. Ordnung 20 ff., 137 ff., 141.
Cauchysche Differentialgleichung 130, 175.
Cauchysches Differentialsystem 153, 288, 295.
Cauchysche Konvergenzgrenze 33.
Cayley, A. 100.
Cesàro, E. 198.
Charakteristische Gleichung
— einer Matrix 149.
— einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten 175.
— eines Differentialsystems vom Range 1 249.
— eines Differentialsystems vom Range $p > 1$ 252.
Charakteristische Invarianten eines Systems ähnlicher Matrizen 148 ff.
Clairaut, A. C. 89.
Clairautsche Differentialgleichung 90.
Clebsch, F. A. 97.

Darboux, G. 81, 125.
Derivationsformel 157.
Derivierte Matrix 136.
Determinierende Fundamentalgleichg. einer linearen Differentialgleichung 170, 181.
— — und Matrix eines linearen Differentialsystems 182.
Dichtigkeitsfunktion 226, 261.
Differentialgleichungen
— gewöhnliche 1.
— partielle 2.
— Grad von 2.
— Begriff der Integration von 2, 5.
— System von 4.
— homogene lineare 1. Ordnung 16, 20, 57, 60, 126 ff.
— homogene lineare 2. Ordnung 63, 159 ff.
— homogene lineare unendlich hoher Ordnung 236.
Differentialgleichungen, homogene lineare mit konstanten Koeffizienten 175.
— allgemeine 1. Ordnung 1. Grades 6, 27 ff.
— allgemeine 1. Ordnung 1. Grades mit festen Verzweigungspunkten 55 ff.
— 1. Ordnung, höheren Grades 67 ff.
— 1. Ordnung, höheren Grades, mit festen Verzweigungspunkten 93 ff.
— 1. Ordnung, höheren Grades, mit festen Verzweigungspunkten, Rang Null 100 ff.
— 1. Ordnung, höheren Grades, mit festen Verzweigungen, Rang Eins 104 ff.
— 1. Ordnung, höheren Grades, mit festen Verzweigungspunkten Rang Zwei 118 ff.
— 2. Ordnung, mit festen kritischen Punkten 125, 311 ff.
Differentialsystem 4, 19.
— homogenes lineares 20.
— homogenes lineares mit 2 Unbekannten 63, 132 ff.
— homogenes lineares mit n Unbekannten 20, 286 ff.
— 2. Grades mit festen kritischen Punkten 307 ff.
— 2. Grades mit eindeutigen Lösungen 318.
Differenzengleichung 8, 9, 20, 137.
Diskriminantengleichung 68, 75 ff.
Diskriminantenkurve 81.
Doppelschleife 231.
Doppelverhältnis 59, 113.
Durège, H. 23, 117.

Eindeutige Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung 13.
— Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung n. Ordnung 20.
— Bestimmung der Lösung eines Differentialsystems 1. Ordnung 19.
Einheitsmatrix 135, 287.
Elementarteiler 287.
Elliptische Funktionen 25, 110, 116 ff., 320.
Elliptisches Integral 25, 99, 238.
Elliptische Modulfunktion 239.

Eneström, G. 209.
Enveloppe 83.
Euler, L. 1, 12, 30, 56, 117, 209, 211, 223, 226, 235, 236, 274.
Eulersches Integral
— 1. Gattung 234.
— 2. Gattung 268.
Eulersche Transformierte 228.
Existenzbeweis
— für die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung im reellen Gebiete 8 ff.
— für die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung im komplexen Gebiete 28 ff.
— für die Lösung einer Differentialgleichung n. Ordnung 19.
— für die Lösung eines Differentialsystems im reellen Gebiet 20 ff., 137 ff.
— für die Lösung eines Differentialsystems im komplexen Gebiet 139 ff., 143 ff.
Existenztheorem von Cauchy 34.
Exponent, zum Exponenten r gehörige Funktion 128.
Exponentialfunktion einer Matrix 153.
— eines Feldes 298.

Fabry, C. 252.
Fakultätenreihen 280.
Fejér, L. 198.
Feld von Größen und Funktionen 296.
Feldgleichung 289, 297.
Forsyth, A. R. 67, 88.
Fourier, J. B. 274.
Fouriersche Reihe 198.
Fredholm, J. 289.
Fricke, R. 240.
Frobenius, G. 168, 169, 213, 224, 225, 243.
Fuchs, L. 46, 53, 54, 55, 56, 67, 71, 88, 93, 94, 100, 123, 128, 145, 158, 161, 168, 170, 185, 198, 212, 224, 225, 239, 256, 288, 303.
— Satz von 168.
Fuchs, R. 310, 312.
Fuchssche Bedingungen für Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten 94.
Fuchssche Relation 194, 195.
Fuchsscher Typus 130, 191 ff.
Fuchssches Beispiel 46.
Fuchssches Problem 303 ff.
Fuhr, H. 143, 167.
Fundamentalgleichung einer Matrix 149, 287.
Fundamentallemma 204.
Fundamentalsubstitution 197, 299 ff.
Fundamentalsystem von Integralen 161.
Funktionselement 52.

Gambier, B. 311, 312.
Gammafunktion 268.
Garnier, R. 304, 310, 318, 319.
Gauß, C. F. 30, 123, 209, 211, 223, 239, 243, 247, 258, 268, 277, 279, 284.
Gaußsche Differentialgleichung 209, 210 ff.
Gaußsches Differentialsystem 208.
Gaußsche Reihe 211, 232 ff.
Geschlecht einer Kurve 97.
Gleichgewicht einer elastischen Kugel mit Vererbung 298.
Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen 11.
Goursat, E. 67, 76, 97, 99, 212, 213.
Günther, P. 145.

Hamburger, M. 54, 67, 91.
Hansen, P. A. 279.
Hauptklasse einer Art von Differentialsystemen 202.
Hauptlösung eines vollständigen linearen Differentialsystems 295.
Hauptwert 38, 198.
Heffter, L. 169, 172, 213, 241.
Heine, E. 246, 280.
Hensel, K. 67, 99.
Hermite, Ch. 100, 104, 123.
Hilb, E. 123, 125, 236, 253, 289, 311.
Hilbert, D. 302.
Hildebrandt, T. H. 289.
Hill, M. J. M. 94.
Holomorph 27.
Holomorphiebereich 143.
Hooke, R. 178.
Horn, J. 44, 92, 124, 125, 158, 176, 185, 254, 256, 257, 266, 280, 281, 287.

Hyperelliptische Gleichung 98.
— Funktionen 318.
Hyperelliptisches Integral 99.
Hypergeometrische Reihe 211.
Identität von Lagrange 225. 293.

Implizite Funktion 67.
— Satz von der 69.
Integral einer Differentialgleichung
— partikuläres, allgemeines 3. 84.
— einer Differentialgleichung, singuläres 70, 89 ff.
— bestimmtes, für die Lösungen der Gaußschen Differentialgleichung 226 ff.
— — für die Gaußsche Reihe 232.
— — für die Laplacesche Differentialgleichung 260 ff.
— — für die Besselsche Differentialgleichung 275.
Integralgleichung 12, 236, 289.
— allgemeine einer Differentialgleichung 84.
Integralgleichungen, algebraische des Differentialsystems (R) 307 ff.
Integralkurve 6.
Integralmatrix 136, 286.
Integralsystem, partikuläres, allgemeines 5.
Integrationsproblem für Differentialgleichungen 20.
— für lineare Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus 196 ff.
— für die Gaußsche Differentialgleichung 223.
— für das Differentialsystem (R) 314 ff.
Integrodifferentialgleichung 289. 296 ff.
Inverse Matrix 135, 287.
Inversion einer Potenzreihe 37.
Irreduzible Gleichung 68.

Jacobi, C. G. J. 25. 26, 110, 118, 123, 146, 239, 287, 293.
Jacobische Gleichung 146. 161. 287.
Jacobsthal, W. 266.
Jordan, C. 212. 231, 244. 260, 274.

Kanonische Form eines Systems ähnlicher Matrizen 150 ff., 287.
Kanonische Integralmatrix 152.
Kanonisches Differentialsystem 166.
— — schlechthin 195.
— Fundamentalsystem 162.
Kirchhoff, G. 23.
Klasse von Differentialgleichungen 242.
— von Funktionensystemen 242.
— von Differentialsystemen 202.
Klein, F. 240.
Knopp, K. 32, 57, 127, 129.
Koch, H. v. 158, 288.
Koenigsberger, L. 59. 60, 185. 212, 243.
Kogrediente Differentialsysteme 166, 201.
— Matrizen 153, 201.
Komplettes lineares Differentialsystem 60, 295.
Komposition von Matrizen 134, 286.
Konvexer Bereich 19.
Kowalewski, G. 198.
— Sophie v. 319.
Kritischer Punkt von Integralen einer Differentialgleichung 311.
Kugelfunktionen 246.
Kummer, E. E. 212.

Lagrange, J. L. 91, 117, 224, 293.
— Identität von 225, 293.
Lalesco, T. 236.
Landfried, E. 67, 99.
Landsberg, G. 67, 69.
Laplace, P. S. de 260.
Laplacesche Differentialgleichung 260 ff., 280 ff.
— partielle Differentialgleichung 226.
— Transformierte 263.
Laurent, A. 127.
Legendre, A. M. 239.
Legendresche Differentialgleichung 238, 312.
— Polynome 246.
Lie, S. 62.
Liebmann, H. 179.
Liouville, J. 123.
Lipschitz, R. 12.
Lipschitzsche Bedingung 10, 19.
Lösung einer Differentialgleichung siehe Integral.
Lösungsfeld 297.
Lösungsstrecke 298.
Loewy, A. 243.

Logarithmisches Dekrement 177.
Logarithmische Normalreihen 252.

Majorante 31.
— von Cauchy 32.
— von Stäckel 34.
Malmquist, J. 124, 125.
Matrix 134 ff., 286.
Mehrdeutigkeit 131 ff.
Méray, Ch. 123.
Methode der sukzessiven Approximationen 143.
— der unbestimmten Koeffizienten 29.
Mittag-Leffler, G. 48, 143.
Mittelwertsatz 141, 167.
Modul des ellipt. Integrals 113, 239.
Moigno, F. 12, 145.
Monodromiegruppe 200, 307 ff.
Monogene Funktion 27.
Multiplikation von Matrizen 134, 286.
Multiplikator 224, 293.

Negativer Sinn 131.
Neumann, C. 280.
Nevanlinna, F. 281.
Newton, I. 62.
Nielsen, N. 280.
Normalform einer Differentialgleichung 169.
— eines Differentialsystems 185.
Normalintegrale, -reihen 252.

Osgood, W. F. 11, 48, 57.

Painlevé, P. 35, 44, 53, 56, 67, 88, 106, 114, 118, 121, 124, 125, 311, 312, 317.
— Satz von 54.
Parameter 1, 17, 145, 299.
Peano, G. 14, 145.
Peanosches Beispiel 14.
Pendel 23, 175.
Perron, O. 70, 253.
Pfaff, J. F. 211.
Picard, E. 31, 35, 46, 47, 53, 56, 58, 60, 67, 88, 121, 122, 124, 145, 212, 220, 251, 312.
Plemelj, J. 202, 302.
Plessner, A. 53.
Pochhammer, L. 231.
Poincaré, H. 14, 30, 31, 41, 58, 67, 100, 106, 114, 121, 123, 124, 125, 145, 167, 185, 191, 201, 240, 248, 251, 253, 254, 256, 257, 258, 299.
Poincaré, Satz von 122.
Poisson, S. D. 279.
Pol 40, 202.
Positiver Sinn 131.
Potenz einer Matrix 153, 154.
Potenzreihen einer Matrix 154.
Produktintegral 17, 138, 141.
Puiseux, V. 76.

Quadratur 3, 62, 295.
Querschnitt 48, 131.

Rang eines Differentialsystems 249, 251.
— einer linearen Differentialgleichung 254.
— (Geschlecht) einer algebraischen Gleichung 97, 99.
Raschke, W. 67, 100, 123.
Rationalitätsbereich 160.
Reduzible Differentialgleichung 243.
Reduzierte (verkürzte) lineare Differentialgleichungen und Systeme 60, 295.
Reguläre Anfangswerte 42.
Rekursionsformeln
— für die Lösung einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 129.
— für die Lösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung 170.
— für die Lösung eines Differentialsystems 140, 250.
Residuum 129.
Riccati, J. 56.
Riccatische Differentialgleichung 56, 62 ff., 101, 185 ff., 254 ff.
Riemann, B. 38, 97, 99, 202, 208, 209, 212, 220, 302.
Riemannsches Differentialsystem 206.
— Problem 302.
Rieß, F. 158.
Rolle, M. 12.
Rückkehrpunkt 81.
Runge, C. 13.
Sattelpunkt 14.
Sauvage, L. 167.
— Satz von 168.
Scheffers, G. 62.
Schiefsymmetrische Matrix 294.

Schlechthin kanonisches Differentialsystem 195, 299.
— kogrediente Matrizen 201.
Schleifenweg
— einfacher 131, 230, 265.
— doppelter 231.
Schlesinger, L. 125, 139, 167, 169, 198, 223, 224, 226, 238, 239, 240, 243, 260, 289, 302, 303, 306, 307, 315, 317.
Schnitt 48, 131.
Schwankung einer Funktion 8, 10.
Schwingungen, kleine eines Punktes 176 ff.
Separation der Veränderlichen 32, 66.
Simultane partielle Differentialsysteme 306, 318.
Singuläre Anfangswerte 35 ff.
Singuläres Integral 70, 81 ff.
Singuläre Stellen
— der Differentialgleichung 51.
— der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung 65.
— der Integrale 15, 47, 71.
— außerwesentliche 49.
— feste 51, 71.
— verschiebbare 53, 71.
— der Bestimmtheit 128, 157 ff.
Skalare Größe 138, 154.
Spannungszustand einer Ringflächenschale 178.
Stäckel, P. 34.
Stahl, H. 67.
Stern von Mittag-Leffler 48, 143.
Strecke von Größen und Funktionen 296.
Streckengleichung 289, 297.
Substitution 147.
System von Differentialgleichungen 4.
— von linearen homogenen Differentialgleichungen 20, 63, 65, 286.

Taylor, B. 27, 89.
Thetareihen von Jacobi 239.
Thomé, L. W. 198, 218, 223, 252, 258.
Trennung der Veränderlichen 32, 66.

Übergangssubstitution 199, 220.
Umkehrung einer Potenzreihe 37.
Unabhängige Veränderliche 1.
Unbestimmtheitsstelle 128.
Unikursalkurve 100.
Unität 44, 190.

Vallée-Poussin, Ch. de la 13.
Verbiegungen der Kugel 179.
Vereinfachte Differentialgleichung 311, 317.
Vererbung 289, 298.
Verkürztes System 295.
Vertauschbare Matrizen 134, 154.
Vertauschung des Parameters mit dem Argument, Satz von der 227, 228, 262.
Verzweigungspunkte 38, 202.
— feste 55, 93 ff.
Vessiot, E. 62.
Vollständiges lineares Differentialsystem 60, 295.
Volterra, V. 139, 289, 298, 299.
Volterrasche Integralgleichung 236.
— Transzendente 298.

Wallenberg, G. 114.
Watson, G. N. 280.
Weierstraß, K. 32, 97, 218, 269, 287, 302.
Weyr, Ed. 59, 154.
Wißler, H. 178.
Wronskische Determinante 161, 174.

Zyklus 75.
Zylinderfunktion 278.