# Die mechanischen Prinzipien

der

# Ingenieurkunst und Architektur

von

Heinrich Moseley,

Professor der Physik und Astronomie an der Universität zu London rc.

Aus dem Englischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen

von

H. Scheffler.



Erster Theil.



Mit 500 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1845.

# Vorrede.

Der Zweck des vorliegenden Werkes, dessen Original den Titel „**The mechanical Principles of Engineering and Architecture**“ führt, besteht in der Anwendung der Prinzipien der Mechanik auf die wichtigsten Fragen, welche sich in der Praxis des Ingenieurs und Architekten darbieten, unter Berücksichtigung aller Umstände, von denen die Lösung derselben abhängig ist.

Zu diesem Ende hat der Verfasser in dem ersten und zweiten Abschnitte eine der Bestimmung dieses Werkes entsprechende Abhandlung der **Statik** und **Dynamik** vorausgeschickt, in welcher derselbe versucht, die Prinzipien dieser Wissenschaften durch möglichst einfache Methoden zu entwickeln.

Die Verbindung eines stetigen Druckes mit einer stetigen Bewegung tritt in dem letzteren Abschnitte unter dem Namen der Arbeit jenes Druckes auf. Die Einheit dieser Arbeit ist die Wirkung, welche hervorgebracht werden muß, um Eine Gewichtseinheit (Ein Pfund) durch einen Raum gleich der Längeneinheit (Einem Fuße) zu überwinden. Da ein Körper, welcher sich mit irgend einer Geschwindigkeit bewegt, im Stande ist, auf einen seiner Bewegung entgegentretenden Widerstand eine gewisse Quantität der Arbeit zu entwickeln; so wird gesagt, diese Quantität der Arbeit sei in dem sich bewegenden Körper angehäuft. Wie aus der sehr einfachen Betrachtung des §s. 66 hervorgeht, ist diese angehäufte Arbeit (accumulated work) gleich der Hälfte der lebenden Kraft des Körpers.

Wenn eine Maschine durch die Wirkung einer Kraft in Bewegung gesetzt wird; so theilt sich die Arbeit dieser Kraft in drei Theile: der erste Theil dient zur Überwindung des Nutzwiderstandes, der zweite zur Überwindung der schädlichen Widerstände zwischen den Maschinentheilen, wie der Reibungen, Steifigkeiten rc. Ist nun der Druck der treibenden Kraft größer, als zur Besiegung dieser beiden Widerstände und demnach zur Erhaltung einer gleichförmigen Bewegung der Maschine erforderlich ist; so bewirkt der dritte Theil der obigen Arbeit eine Beschleunigung der Bewegung der einzelnen Maschinentheile, und geht als angehäufte Arbeit in dieselben über. Zwischen diesen drei Elementen besteht bei einer jeden Maschine eine mathematische Beziehung, welche der Verfasser den Model der Maschine genannt hat. Die allgemeine Form dieses Models hat der Verfasser in einer Abhandlung über die „Theory of Machines“ in den Philosophical Transactions für das Jahr 1841 einer näheren Diskussion unterworfen. Der dritte Abschnitt dieses Werkes beschäftigt sich mit der Bestimmung der besonderen Model für diejenigen Elemente des Maschinenwesens, welche am häufigsten im Gebrauch sind. Es wird dabei gezeigt, daß eine Verbindung der Model für mehrere solche Maschinenelemente den Model für die ganze Maschine ergibt, welche aus diesen Elementen zusammengesetzt ist.

Bei dieser Untersuchung, welche sehr viel Eigenthümliches enthält, macht der Verfasser vielfach von einem Satze eine glückliche Anwendung, welcher darin besteht, daß in dem Augenblicke, wo Ein Körper auf der Oberfläche eines anderen in eine gleitende Bewegung versetzt wird, d. i. in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes (state bordering upon motion) des Einen Körpers auf der Oberfläche eines anderen, der mittlere Druck zwischen den beiden Berührungsflächen gegen die Normale auf derselben unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten ist. Die Werthe dieses Reibungswinkels (limiting angle of resistance) sind für eine große Anzahl von Berührungsflächen berechnet und neben den Versuchen von Morin über die Reibung in einer Tabelle am Ende dieses Werkes mitgetheilt.

Ferner hat der Verfasser im dritten Abschnitte den Model für ein System von verzahnten Rädern unter Berücksichtigung der Reibung zwischen den Zähnen und an den Axen, sowie der Gewichte der Räder entwickelt. Wenn man in diesen allgemeinen Gleichungen die Glieder vernachlässigt, welche sich auf die Reibung an den Axen und auf die Gewichte der Räder beziehen; so erhält man eine Näherungsformel, welche mit dem bekannten, von Poncelet aufgestellten Lehrsatze übereinstimmt.

Der größere Theil der in dem dritten Abschnitte vorgetragenen Gegenstände ist für die Wissenschaft neu.

Im vierten Abschnitte handelt der Verfasser von der Stabilität der Konstruktionen, indem derselbe die Bedingungen dieses Gleichgewichtszustandes, soweit sie sich auf den Widerstand gegen die Drehung beziehen, von den Eigenschaften einer gewissen Linie abhängig macht, welche durch die Punkte geht, in denen die einzelnen Fugenschnitte von den Resultanten der auf dieselben wirkenden Kräfte durchschnitten werden. Diese Linie, deren Eigenschaften der Verfasser zuerst in einer Abhandlung über die „Stability of a System of Bodies in Contact“ in dem sechsten Bande der Cambridge Phil. Trans. bekannt gemacht hat, führt in dem gegenwärtigen Werke den Namen der Mittellinie des Druckes (line of resistance) (vergl. die Note zu §. 286).

Den Abstand der Mittellinie des Druckes von der Außenfläche einer Konstruktion in dem Punkte, wo sich jene Linie der letzteren Fläche am meisten nähert, hat der Verfasser für ein Maaß der Stabilität der Konstruktion angenommen und denselben den Stabilitätsmodel genannt, indem ihm dieses Maaß eine einfachere und leichtere Anwendung zu verstatten schien, als der von den französischen Schriftstellern gewöhnlich gebrauchte Stabilitätskoeffizient.

Diejenige Konstruktion, für deren einzelne Elemente der Stabilitätsmodel Ein und denselben Werth behält, ist offenbar die von der größten Stabilität bei einer gegebenen Menge von Material, oder von der größten Materialersparung bei einer gegebenen Stabilität.

Die Anwendung dieser Prinzipien auf die Theorie verschiedener Konstruktionen hat dem Verfasser zu einer Klasse von Aufgaben Gelegenheit gegeben, welche bisher noch nicht mathematisch behandelt sind.

Bei der Anwendung des Coulombschen Prinzipes über das Erdprisma vom größten Drucke bedient sich der Verfasser mit großem Vortheile der Eigenschaften des Reibungswinkels, wodurch alle seine Resultate eine neue und einfachere Form erhalten.

Die Theorie des gewölbten Bogens basirt der Verfasser auf Prinzipien, welche derselbe zuerst in der oben erwähnten Abhandlung über die „**Theory of the Stability of a System of Bodies in Contact**“ und später in einer Abhandlung niedergelegt hat, welche in dem „**Treatise on Bridges**“ von Hosking und Hann abgedruckt ist. Dieselben unterscheiden sich wesentlich von denen, auf welche die Coulombsche Theorie gegründet ist, wennauch die letzteren zu denselben Resultaten führen.

Der fünfte Abschnitt dieses Werkes handelt von der Festigkeit der Materialien, und bietet manche Eigenthümlichkeiten dar. Bei der Abhandelung des Bruches durch Ausdehnung in der Längenrichtung theilt der Verfasser eine Theorie der Kettenbrücken mit, welche sich gegen die gewöhnlichen Theorien, bei denen die Ketten von gleichförmigen Dimension angenommen werden, bedeutend vereinfacht, sobald man annimmt, daß der Querschnitt der Ketten in dem Maaße variire, daß die Letzteren in allen Punkten dieselbe Haltbarkeit bekommen. Eine unter diesen Bedingungen konstruirte Kettenbrücke ist offenbar eine solche, welche bei einer gegebenen Festigkeit mit der kleinsten Menge von Material ausgeführt werden kann, oder welche bei einer gegebenen Menge von Material die größte Festigkeit darbietet.

Bei der Untersuchung der Festigkeit der in gewissen Punkten unterstützten Balken hat der Verfasser seine Aufmerksamkeit besonders auf die Bestimmung der vortheilhaftesten Stellung der Stützen und auf eine Vergleichung der Festigkeit zweier Balken gerichtet, von denen der Eine an seinen Enden frei unterstützt und der andere fest vermauert ist.

Die mathematischen Spekulationen über den Widerstand prismatischer Körper gegen das Zerknicken, welche offenbar auf irrigen Voraussetzungen beruhen, hat der Verfasser durch die Resultate der neueren Versuche von Hodgkinson vertauscht, welche sich in den **Philosophical Transactions** für das Jahr 1840 mitgetheilt finden.

Der sechste Abschnitt endlich enthält eine Abhandlung über den Stoß und eine Theorie der Ramme.

Im Anhange ist neben verschiedenen Tabellen über die mechanischen Eigenschaften der wichtigsten Materialien und den vollständigen elliptischen Funktionen der ersten und zweiten Art ein Beweis des schönen Ponceletschen Lehrsatzes über die näherungsweise Bestimmung der Quadratwurzel aus der Summe und Differenz zweier Quadrate mitgetheilt.

---

Was die deutsche Bearbeitung dieses Werkes betrifft; so besteht dieselbe keineswegs in einer wörtlichen Übersetzung. Wo es erforderlich schien, habe ich sowol im Texte, wie in den begleitenden Noten, die Theorieen möglichst zu verallgemeinern und die Resultate zu erläutern gesucht. Für einige Untersuchungen des Verfassers sah ich mich veranlaßt, einen anderen Gang der Betrachtung einzuschlagen, da der des Verfassers die nöthige Strenge zu entbehren schien. Unter Anderem bedurfte das von dem Verfasser zuerst aufgestellte Prinzip des kleinsten Widerstandes

(§. 334) einer etwas genaueren Definition und eines vollständigen Beweises, welcher in dem Originale verfehlt zu sein scheint.

Bei den Untersuchungen über die Biegung (§. 356 ff.) denkt sich der Verfasser den zu biegenden Stab durch Ebenen, welche der Biegungsebene parallel sind, in lauter sehr schmale Schichten zerlegt, betrachtet darauf die Bedingungen für die Biegung einer jeden einzelnen Schicht, indem er die Größe der biegenden Kräfte gleichförmig über alle jene elementaren Schichten vertheilt, und setzt darauf die erhaltenen Resultate für gewisse einfache Fälle, in denen der Querschnitt des Stabes eine symmetrische Form annimmt, zu einem auf den ganzen Stab bezüglichen Resultate zusammen. Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Methode ist, daß die neutrale Fläche oder diejenige Durchschnittsfläche des Stabes, in welcher die Fibern durch die Biegung durchaus keine Längenveränderungen erleiden, nur in besonderen Fällen eine zylindrische, im Allgemeinen aber eine Fläche sei, deren Durchschnitt mit einer auf der Biegungsebene perpendikular stehenden Ebene eine Kurve bildet.

Diese Betrachtungsweise des Verfassers ist offenbar mit der physischen Konstitution eines starren Stabes unvereinbar. Wenn der Querschnitt des Stabes nicht gerade ein Rechteck bildete; so würden die vorhin erwähnten elementaren Schichten in der Richtung der Biegungsebene verschiedene Höhen haben, und da auf eine jede eine gleiche biegende Kraft angebracht ist; so würden sich die niedrigeren Schichten stärker und die höheren Schichten schwächer biegen. Eine Folge hieraus wäre, daß sich sämmtliche elementare Schichten voneinander trennten, und daß der Stab bei der Biegung in den verschiedenen Punkten seiner Länge einen verschiedenen Querschnitt annähme, was bei der Kohäsion des Materiales in der Seitenrichtung keineswegs geschehen kann. Die obige Betrachtungsweise des Verfassers würde auf eine Anzahl lose nebeneinander gelegter Scheibenflächen, aber nicht auf einen starren, aus kohärirenden Theilen bestehenden Stab Anwendung finden, und man erkennt leicht, daß die neutrale Fläche nicht bloß in gewissen, sondern in allen Fällen eines prismatischen Stabes eine zylindrische ist, welche auf der Biegungsebene perpendikular steht. Hiernach sind jene Untersuchungen in der geeigneten Weise abgeändert worden.

Die allgemeinen Gesetze der Elastizität und Torsion (§. 347 ff., §. 433) schienen mir eine gründlichere Darlegung zu verdienen. Bei den ersteren nimmt man gewöhnlich an, die Elastizitätskraft variire sowol bei der Ausdehnung, wie bei der Zusammendrückung prismatischer Körper im direkten Verhältnisse mit der Längenzu- oder Abnahme. Es muß jedoch gezeigt werden, daß dieses Gesetz bei der Zusammendrückung nur näherungsweise, und zwar nur in den Fällen zulässig ist, wo die Zusammendrückung im Vergleich zu der ganzen Länge des Prismas sehr gering ist. Eine strenge Durchführung der in §. 347 aufgestellten Prinzipien ergibt in §. 348 das Resultat, daß das bekannte Mariottesche Gesetz über die Zusammendrückbarkeit der Gase nur der besondere Fall eines allgemeinen, für alle Körper gültigen Gesetzes der Elastizität sei.

Es ist zwar nicht die Absicht des Verfassers gewesen, in dem vorliegenden Werke ein vollständiges Lehrbuch der reinen Mechanik zu liefern: um jedoch den Abriß der Statik und Dynamik im ersten und zweiten Abschnitte jenem Titel möglichst nahe zu bringen, habe ich diesen Abschnitten in den betreffenden Zusätzen die wichtigsten Lehren hinzugefügt, welche sich auf die allgemeinsten Fälle des Gleichgewichtes und der Bewegung beziehen.

Ebenso ist die Theorie des Stoßes in den Zusätzen zum sechsten Abschnitte um einige allgemeine Sätze und einige Anwendungen auf die Wirkung der Stöße in den Maschinen erweitert worden.

In den Zusätzen zum vierten Abschnitte habe ich versucht, die Theorie des Verfassers von den kreisförmigen gewölbten Bögen durch eine praktische Methode auf Gewölbe von beliebiger Form anzuwenden. Auch habe ich daselbst einen allgemeinen analytischen Beweis für den Satz mitgetheilt, daß die Grundfläche des Coulombschen Erdprismas vom größten Drucke stets eine Ebene sein müsse.

Die in dem Originale enthaltenen, meistens durch Rechenfehler entstandenen irrthümlichen Formeln sind sämmtlich berichtigt worden.

Da ich voraussetzen durfte, daß es manchem deutschen Leser erwünschter sein würde, die Maaß- und Gewichtsangaben in einem allgemein bekannten vaterländischen, als in dem weniger bekannten englischen Maaße aufgezeichnet zu finden; so habe ich sämmtliche Tabellen und sonstige Angaben auf preußische Einheiten reduzirt, da sich diese neben den vielen anderen deutschen Maaßsystemen wol der ausgebreitetsten Bekanntschaft erfreuen möchten.

H. Scheffler.

# Inhaltsverzeichniß.

## Erster Abschnitt.

### Die Principien der Statik.



Zusätze zum ersten Abschnitte.



## Zweiter Abschnitt.

### Die Prinzipien der Dynamik.

## Zusätze zum zweiten Abschnitte.

# Dritter Abschnitt.

## Die Theorie der Maschinen.

## Zusätze zum dritten Abschnitt.

# Die mechanischen Prinzipien

der

# Ingenieurkunst und Architektur.

# Erster Abschnitt.

## Die Prinzipien der Statik.

### Allgemeine Begriffe.

§. 1. **Kraft** ist die Ursache, welche Bewegung zu erzeugen oder zu vernichten **strebt**, oder welche solche wirklich erzeugt oder wirklich vernichtet.

Die **Richtung** einer Kraft ist die gerade Linie, nach welcher sie in ihrem Angriffspunkte Bewegung hervorzubringen oder zu zerstören strebt.

Wenn mehr als Eine Kraft auf einen Körper angebracht sind, und ihre Bestrebungen zur Mittheilung von Bewegung einander dergestalt entgegen wirken, daß der Körper in Ruhe bleibt; so sagt man, jene Kräfte seien im **Gleichgewichte**, und nennt sie **Druckkräfte** oder **Pressungen**.

Die Erfahrung lehrt, daß die Wirkung eines auf einen festen Körper angebrachten Druckes dieselbe sei, in welchem Punkte seiner Richtung er auch angebracht werde, so daß die Bedingungen für das Gleichgewicht dieses Druckes in Beziehung zu anderen auf denselben Körper gleichfalls angebrachten Kräften ungestört bleiben, wenn man seinen Angriffspunkt, ohne die Richtung des Druckes zu änderen, in der geraden Linie, in welcher er wirkt, nach der Einen oder anderen Seite verrückt.

Die **Statik** ist die Wissenschaft, welche von dem **Gleichgewichte der Druckkräfte** handelt.

Wenn nur **zwei** Kräfte auf einen Körper angebracht sind und ihn in Ruhe halten; so lehrt die Erfahrung, daß dieselben nach entgegengesetzten Seiten wirken und ihre Richtungen in derselben geraden Linie haben. Zwei solche Kräfte werden **gleich** genannt.

Wenn man zwei gleiche Kräfte in **derselben** Richtung, nach einerlei Seite wirkend, anbringt, so heißt die einzige Kraft, welche in entgegengesetzter Richtung angebracht werden muß, um jene beiden im Gleichgewichte zu erhalten, doppelt so groß, als jede derselben. Nimmt man zu jenen beiden noch eine dritte, eben so große Kraft, so heißt die einzige Kraft, welche, nach entgegengesetzter Richtung wirkend, den ersten dreien das Gleichgewicht hält, dreimal so groß, als jede einzelne derselben, und so fort für eine jede beliebige größere Anzahl von Kräften. Denkt man sich in dieser Weise irgend eine Kraft, und untersucht, wie viel dieser gleiche Kräfte erforderlich sind, um, in entgegengesetzter Richtung angebracht, irgend eine andere größere Kraft im Gleichgewichte zu erhalten; so gelangt man zu einem richtigen Begriffe von der Größe dieser letzteren Kraft in Beziehung zu der ersteren.

Diese erstere Kraft, vermittelst welcher die Stärke irgend einer anderen angegeben ist, wird eine Einheit der Kraft oder des Druckes genannt.

Von Kräften, deren Größen im Verhältnisse zu einer beliebigen bekannten Einheit bestimmt sind, sagt man, sie seien gemessen.

Verschiedene Kräfte, deren Größen durch Ein und dieselbe Einheit bestimmt werden können, heißen kommensurabel.

Zu Einheiten des Druckes eignen sich am besten die Gewichte bestimmter Mengen Ein und desselben Stoffes oder die Druckkräfte, mit welchen diese Gewichte nach dem Mittelpunkte der Erde streben. Die Einheiten des Druckes sind in den verschiedenen Ländern verschieden. In Preußen ist die Einheit des Druckes das Gewicht von $\frac{1}{66}$ rheinländischem Kubikfuß destillirten Wassers bei 15° Reaumur im luftleeren Raume. Dieses Gewicht heißt ein Pfund. Zur Vergleichung mit den Gewichtseinheiten anderer Länder wird hierbei noch bemerkt, daß die Länge eines rheinländischen Fußes 139, 13 pariser Linien oder 0,9661805 pariser Fuß oder 0,313853542 Meter oder 1,0297218 englische Fuß beträgt.

Wenn man in die Richtungen irgend einer Anzahl von Kräften gerade Linien legt und ihre Längen proportional zu der Anzahl der in den Kräften enthaltenen Einheiten annimmt; so sagt man von diesen Linien, deren Längen in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Größen der Kräfte, und welche außerdem in den Richtungen gezogen sind, in welchen die Kräfte wirken, sie stellen die Letzteren in Größe und Richtung dar.

Denkt man sich, es würde aus einem im Gleichgewichte befindlichen Systeme von Kräften eine Anzahl herausgenommen und durch eine einzige Kraft ersetzt, welche im Stande wäre, das vorher bestehende Gleichgewicht aufrecht zu erhalten; so heißt diese einzige Kraft, welche in Beziehung zu dem Gleichgewichte dieselbe Wirkung hervorbringt, als die Kräfte, welche sie vertritt, die Resultante oder Mittelkraft der letzteren.

Die Kräfte, welche sie vertritt, heißen die Komponenten oder Seitenkräfte jener einzigen Kraft, und das Verfahren, welches man anwendet, um mehrere Kräfte durch eine einzige zu ersetzen, trägt den Namen der Zusammensetzung der Kräfte.

Wird dagegen eine einzige Kraft aus einem im Gleichgewichte befindlichen Systeme entfernt und durch eine Anzahl anderer Kräfte von der Beschaffenheit ersetzt, daß dadurch in Beziehung auf das Gleichgewicht derselbe Effekt hervorgebracht wird, als durch die einzige Kraft; so sagt man, die letztere sei in jene zerlegt, und das Verfahren der Substitution zweier oder mehrerer Kräfte für Eine heißt die Zerlegung der Kräfte.

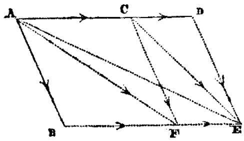
## Das Parallelogramm der Kräfte.

§. 2. Die Resultante zweier auf einen Punkt angebrachter Kräfte wird der Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen zusammenstoßende Seiten jene Kräfte in Größe und Richtung darstellen.

(Beweis von Duchayla.)

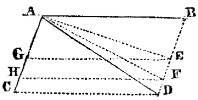
Zu dem Beweise dieses Satzes nach der Methode von Duchayla ist es zuvörderst erforderlich, zu zeigen, daß wenn zwei beliebige Kräfte $Q$ und $Q'$, deren Richtungen in Ein und derselben geraden Linie liegen, und eine dritte Kraft $P$ in irgend einer anderen Richtung gegeben sind und der vorstehende Satz sowol für $P$ und $Q$, wie für $P$ und $Q'$ wahr ist, derselbe auch für $P$ und $Q+Q'$ Gültigkeit hat.

Angenommen, $P$, $Q$ und $Q'$ gehören zu einem im Gleichgewichte befindlichen Systeme von Kräften und seien im Punkte




A angebracht, AB und AC stellen in Größe und Richtung die Kräfte P und Q und CD die Kraft Q′ dar; so vollende man die Parallelogramme CB und DF. Setzt man nun voraus, der obige Satz sei für P und Q richtig; so wird die Resultante von P und Q in der Richtung der Diagonale AF des Parallelogramms BC liegen, dessen zusammenstoßende Seiten AB und AC die Kräfte P und Q der Größe und Richtung nach darstellen. Man ersetze P und Q durch diese Resultante. Für das Gleichgewicht ist es gleichgültig, in welchem Punkte der Linie AF dieselbe angebracht werde; deshalb bringe man sie in F an. Nachdem dieselbe aber nach F transportirt ist, kann sie auch, ohne Störung des Gleichgewichts, durch zwei andere Kräfte ersetzt (oder in dieselben zerlegt) werden, welche in den Richtungen CF und BF wirken und offenbar gleich P und Q sind. Hiervon trage man die Kraft P an den Punkt C und die Kraft Q an den Punkt E. Bringt man jetzt die Kraft Q′ von A nach C, so hat man an diesem Punkte die Kräfte P und Q′, welche in den Richtungen CF und CD wirken, und an dem Punkte E die Kraft Q, welche in der Richtung FE wirkt, und die Bedingungen des Gleichgewichtes werden durch diese Transpositionen nicht gefährdet sein. Nun nehme man an, der in Rede stehende Satz sei auch für P und Q′ wahr, wie es für P und Q angenommen war. Alsdann wird die Resultante jener Kräfte in der Richtung der Diagonale CE liegen. Man setze diese Resultante für P und Q′ an die Stelle, transportire dieselbe nach E und zerlege sie dort wiederum in zwei andere Kräfte, welche in den Richtungen DE und FE wirken und offenbar P und Q′ sein werden. Hierdurch sind nun alle drei Kräfte P, Q, Q′ von A nach E gebracht, und dieselben wirken daselbst in Richtungen, welche ihren früheren Richtungen bei A parallel sind; dies Alles ist geschehen, ohne die Bedingungen des Gleichgewichtes zu stören, oder mit anderen Worten, es ist nachgewiesen, daß die Kräfte P, Q, Q′ hinsichtlich des Gleichgewichtes dieselbe Wirkung thun, sie mögen in A oder in E angebracht werden. Demnach muß auch die Resultante von P, Q, Q′ denselben Effekt liefern, ob man sie in A oder in E anbringe. Damit diese Resultante aber sowol in A, wie in E dieselbe Wirkung äußeren könne, ist es nothwendig, daß sie in der geraden Linie AE wirke, weil ein Druck nur dann in zwei verschiedenen Punkten einen gleichen Effekt hervorbringen kann, wenn dieselben in seiner Richtungslinie liegen. Nach den gemachten Voraussetzungen wirkt also die Resultante von P, Q und Q′ oder von P und Q+Q′ in der Richtung der Diagonale AE des Parallelogramms BD, dessen zusammenstoßende Seiten AB und AD die Kräfte P und Q+Q′ in Größe und Richtung darstellen, und dieser Satz ist nachgewiesen, sobald derselbe einzeln für P und Q und für P und Q′ Gültigkeit hat.

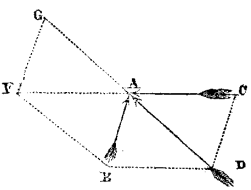
Nimmt man nun an, die drei Kräfte P, Q, Q′ seien sämmtlich einander gleich, so wird die Richtung der Resultante von P und Q offenbar so nahe an die Eine, wie an die andere fallen, d. h., sie wird den Winkel zwischen beiden halbiren; die Diagonale AF halbirt aber in diesem Falle ebenfalls den Winkel BAC, so daß unter dieser besonderen Annahme der Gleichheit von P und Q die Richtung der Resultante wirklich mit der Diagonale zusammenfällt und der obige Satz für P und Q wahr ist. Aus demselben Grunde hat er auch seine Richtigkeit für die beiden gleichen Kräfte P und Q′ und demnach für die Kräfte P und Q+Q′ d. i. für P und 2P. Da er nun ferner für P und P und für P und 2P richtig ist, so ist er es auch für P und 3P und allgemein für P und $m$P, wenn $m$ eine ganze Zahl bedeutet. Auf eine ähnliche Weise folgt aus der Richtigkeit des Satzes für $m$P und P die für $m$P und 2P u. s. f., und allgemein die für $m$P und $n$P, worin $m$ und $n$ ganze Zahlen bezeichnen. Man sieht also, daß der angekündigte Satz für irgend zwei kommensurabele Kräfte $m$P und $n$P wahr ist.




Er ist es aber auch, wenn die Kräfte inkommensurabel sind. Denn wenn die Linien AC und AB irgend zwei solcher Kräfte P und Q in Größe und Richtung darstellen, und man vollendet das Parallelogramm ABDC; so wird die Richtung der Resultante von P und Q in die Diagonale AD fallen. Denn thäte sie es nicht; so sei ihre Richtung AE, und man ziehe EG parallel zu CD, theile dann AB in gleiche Theile, von denen ein jeder kleiner ist, als GC, trage von A nach C auf die Linie AC eine Anzahl solcher gleicher Theile, bis endlich ein Theilpunkt, wie es nothwendig geschehen muß, zwischen **G** und **C**, etwa in **H** fällt, und vollende das Parallelogramm **AHFB**. Denkt man sich nun die Kraft **Q** in ebensoviel gleiche Einheiten getheilt, wie in der Linie **AB** gleiche Theile liegen; so kann man durch **AH** eine Kraft **P′** darstellen, welche ebenso viel Einheiten, als **AH** gleiche Theile, enthält, und diese beiden Kräfte **Q** und **P′** werden kommensurabel sein, weil sie durch dieselbe Einheit gemessen werden. Demnach läge die Resultante der letzteren beiden Kräfte in der Richtung **AF** und hätte eine nähere Lage an **AC**, als die Resultante **AE** von **P** und **Q**, was offenbar absurd ist, da **P** größer ist, als **P′**.

Hieraus folgt, daß **AE** nicht die Richtung der Resultante von **P** und **Q** sein kann, und auf dieselbe Weise wird man zeigen, daß keine andere Linie, als die Diagonale **AD**, in der Richtung jener Resultante liegen kann.

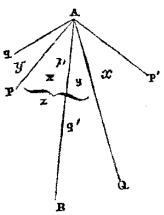
§. 3. Die Resultante zweier auf einen Punkt angebrachter Kräfte wird sowol in Größe, wie in Richtung durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, dessen zusammenstoßende Seiten jene Kräfte der Größe und Richtung nach darstellen.




Wenn **BA** und **CA** irgend zwei auf den Punkt **A** angebrachte Kräfte in Größe und Richtung darstellen, so entwerfe man das Parallelogramm **BC**. Nach dem vorhergehenden Satze wird **DA** die Resultante jener beiden Kräfte der Richtung nach darstellen; sie wird es aber auch der Größe nach thun. Denn verlängert man **DA** nach **G** und denkt sich in **GA** eine Kraft gleich der Resultante von **BA** und **CA** angebracht, welche dieser direkt entgegenwirkt und der Größe nach durch die Linie **GA** dargestellt wird; so werden die durch die Linien **BA**, **CA** und **GA** dargestellten Kräfte offenbar im Gleichgewichte sein. Entwirft man das Parallelogramm **BG**, so liegt die Resultante von **GA** und **BA** in der Richtung **FA**: da nun **GA** und **BA** mit **CA** im Gleichgewichte sind; so muß auch diese Resultante mit **CA** im Gleichgewichte sein. Wenn aber zwei Kräfte einander das Gleichgewicht halten; so liegen ihre Richtungen in derselben geraden Linie, und es muß mithin die Linie **FAC** eine gerade sein. Nun ist **AC** parallel zu **BD**, demnach auch **FA** parallel zu **BD**, und **FB** ist nach der Konstruktion mit **GD** parallel; mithin ist **AFBD** ein Parallelogramm und **AD** gleich **FB** und daher auch gleich **AG**. **AG** stellte aber die Resultante von **CA** und **BA** der Größe nach dar und demzufolge thut dies auch **AD** oder die Diagonale des Parallelogramms **BC**. (*)

---

*) Der vorstehende Beweis des Parallelgramms der Kräfte ist rein geometrisch ausgeführt. Da dieser Satz die Grundlage der ganzen Statik bildet; so ist es nicht uninteressant, denselben auch von einem rein analytischen Standpunkte aus zu betrachten.




Die auf den Punkt **A** unter dem Winkel $z$ wirkenden Kräfte seien durch **P** und **Q**, und ihre Resultante, welche mit **P** den Winkel $x$ und mit **Q** den Winkel $y$ einschließe, sei durch **R** dargestellt.

Zuvörderst ist klar, daß wenn man auf das System der drei Kräfte **P, Q, R** ein ganz gleiches System ein-, zwei-, drei-, und mehreremal dergestalt legt, daß die Richtungen der korrespondirenden Kräfte in einander fallen, man ein neues System erhält, in welchem die beiden Kräfte $2\mathbf{P}$ und $2\mathbf{Q}$ die Komponenten von $2\mathbf{R}$, $3\mathbf{P}$ und $3\mathbf{Q}$ die von $3\mathbf{R}$ u. s. w. sind. Man sieht auch leicht ein, daß man durch gleichmäßige Eintheilung der Kräfte **P**, **Q** und **R** in dieselbe Anzahl gleicher Theile Systeme erhält, worin $\frac{1}{2}\mathbf{P}$ und $\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ die Komponenten von $\frac{1}{2}\mathbf{R}$, $\frac{1}{3}\mathbf{P}$ und $\frac{1}{3}\mathbf{Q}$ die von $\frac{1}{3}\mathbf{R}$ u. s. w. sein müssen, und daß überhaupt, wenn $m$ irgend eine positive rationale oder irrationale Zahl bedeudet, $m\mathbf{R}$ die Mittelkraft der beiden unter dem Winkel $z$ wirkenden Kräfte $m\mathbf{P}$ und $m\mathbf{Q}$ sein und mit diesen Seitenkräften dieselben Winkel $x$ und $y$ bilden werde. Hieraus folgt, daß der analytische Ausdruck von **R** durch die beiden Kräfte **P** und **Q** nothwendig eine solche Form haben müsse, daß wenn diese Kräfte beide gleichmäßig wachsen, auch der Werth von **R** proportional zu der Einen **P** oder **Q** zunehme. Demnach kann man $\mathbf{R} = \mathbf{P} f\left(\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}}\right)$ oder $= \mathbf{P} f(n)$ setzen, wenn man das Verhältniß $\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}}$ mit $n$ bezeichnet oder $\mathbf{Q} = n\mathbf{P}$ annimmt. $f(n)$ stellt hierin eine unbekannte Funktion des Verhältnisses $n = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}}$ dar, welche übrigens gleichzeitig von dem Winkel $z$ abhängig ist, so daß man ganz allgemein

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} f(n, z) \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

setzen muß, worin $f(n, z)$ eine noch näher zu bestimmende Funktion der beiden Größen $n$ und $z$ darstellt.

Trägt man an **AP** den Winkel $\mathbf{PA}q = y$ und an **AQ** den Winkel $\mathbf{QA}p' = x$, so kann man **P** als die Resultante zweier anderer Kräfte **p** und $q$ ansehen, deren Richtungen **AR** und $\mathbf{A}q$ sind und welche zu einander und zu **P** dasselbe Verhältniß besitzen, wie **P** und **Q** zu einander und zu **R**, wie dies aus dem Vorstehenden hervorgeht. Ebenso kann man **Q** in die beiden Kräfte $p'$ und $q'$ zerlegen, deren Richtungen $\mathbf{A}p'$ und **AR** sind und welche sich zu einander und zu **Q** ebenso verhalten, wie **P** und **Q** zu einander und zu **R**

## Das Prinzip der Gleichheit der Momente.

**§. 4. Erklärung.** Wenn eine Anzahl von Kräften in derselben Ebene wirken, und man nimmt in dieser Ebene einen

---

Hiernach kann man die beiden Kräfte **P** und **Q** mit den vier Kräften $p, q, p', q'$ vertauschen, und die mittlere Resultante dieser letzteren muß gleich der Mittelkraft von **P** und **Q**, d. i. gleich **R** sein. Zur Bestimmung der Kräfte $p, q, p', q'$ hat man aber die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{llll} \mathbf{R}:\mathbf{P}=\mathbf{P}:p, & \text{also} & p=\frac{\mathbf{P}^2}{\mathbf{R}}, \\ \mathbf{R}:\mathbf{Q}=\mathbf{P}:q, & \text{"} & q=\frac{\mathbf{PQ}}{\mathbf{R}}, \\ \mathbf{R}:\mathbf{Q}=\mathbf{Q}:q', & \text{"} & q'=\frac{\mathbf{Q}^2}{\mathbf{R}}, \\ \mathbf{R}:\mathbf{P}=\mathbf{Q}:p', & \text{"} & p'=\frac{\mathbf{PQ}}{\mathbf{R}}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Man sieht, daß die beiden Kräfte $q$ und $p'$ einander gleich und zwar $=\frac{\mathbf{PQ}}{\mathbf{R}}$ sind, daß also ihre Resultanten in die Halbirungslinie des Winkels $q\,A\,p'$, d. i. in die Richtung der Kraft **R** fallen muß, was auch schon dadurch evident wird, daß die übrigen beiden Kräfte $p$ und $q'$ in dieser Richtung liegen, welche die Richtung für die gesammte Mittelkraft aller vier Kräfte $p, q, p', q'$, werden muß. Bezeichnet man also die Mittelkraft von $q$ und $p'$ mit $r$, so hat man

$$\mathbf{R}=p+q'+r,$$

und es ergibt sich der Werth von $r$ aus der allgemeinen Formel (1), wenn man darin $\mathbf{P}=q$, $n=\frac{p'}{q}=1$ und für $z$ den Werth des Winkels $q\,A\,p'$, d. i. $2z$ setzt. Demnach ist

$$r=qf(1,\,2z) \text{ und}$$
$$\mathbf{R}=p+q'+qf(1,\,2z),$$

d. i., wenn man für $p, q'$ und $q$ ihre Werthe aus den Beziehungen (2) substituirt,

$$\mathbf{R}=\frac{\mathbf{P}^2}{\mathbf{R}}+\frac{\mathbf{Q}^2}{\mathbf{R}}+\frac{\mathbf{PQ}}{\mathbf{R}}f(1,\,2z),$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit **R** multiplicirt,

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{P}^2+\mathbf{Q}^2+\mathbf{P}\mathbf{Q}f(1,\,2z), \quad \ldots\ldots (3)$$

oder auch, wenn man, wie früher, $\mathbf{Q}=n\mathbf{P}$ setzt,

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{P}^2[1+n^2+nf(1,\,2z)].$$

Führt man nun für **R** seinen Werth aus (1) ein und dividirt mit $\mathbf{P}^2$; so folgt

$$[f(n,z)]^2=1+n^2+nf(1,\,2z), \quad \ldots (4)$$

eine Beziehung, mit Hülfe welcher man das Wesen der Funktion $f(n,z)$ bestimmen kann. Denn da dieselbe allgemein für beliebige Werthe von $n$, also auch für $n=1$ gilt; so hat man für diesen Fall

Punkt, fällt alsdann von diesem Punkte Perpendikel auf die Richtungen jener Kräfte und multiplizirt die Zahl der Einheiten

---

$$f(1, z)^2 = 2 + f(1, 2z), \ldots . (5)$$

oder wenn man der Kürze wegen $f(1, z) = \varphi(z)$ setzt,

$$\varphi(z)^2 = 2 + \varphi(2z) \ldots . (6)$$

Der besseren Uebersicht und leichteren Verständlichkeit beim späteren Rechnen wegen setze man $2z = z'$, also

$$\varphi(z)^2 = 2 + \varphi(z') \ldots . (7)$$

Differenziirt man diese Gleichung mehrere Male hintereinander für $z$, bezeichnet die sukzessiven Differenzialkoeffizienten der Funktion $\varphi$ mit $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$, $\varphi^{IV}$ etc. und beachtet, daß $\frac{d\varphi(z')}{dz} = \frac{d\varphi(z')}{dz'} . \frac{dz'}{dz} = \varphi'(z') \frac{d(2z)}{dz} = 2\varphi'(z')$, ebenso $\frac{d^2\varphi(z')}{dz^2} = 4\varphi''(z')$, $\frac{d^3\varphi(z')}{dz^3} = 8\varphi'''(z')$ u. s. w. ist; so erhält man nach und nach bei gehöriger Reduktion

$$\varphi(z) . \varphi'(z) = \varphi'(z') \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\varphi'(z)^2 + \varphi(z) . \varphi''(z) = 2\varphi''(z') \ldots\ldots (9)$$

$$3\varphi'(z)\ \varphi''(z) + \varphi(z) . \varphi'''(z) = 4\varphi'''(z') \ldots\ldots (10)$$

$$3\varphi''(z)^2 + 4\varphi'(z) . \varphi'''(z) + \varphi(z) . \varphi^{IV}(z) = 8\varphi^{IV}(z') \ldots (11)$$

u. s. w.

Setzt man nun in den vorstehenden Gleichungen $z = o$, also auch $z' = 2z = o$; so ergibt sich aus (7)

$$\varphi(o)^2 = 2 + \varphi(o)$$

und hieraus nach gehöriger Entwickelung

$$\varphi(o) = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} = 2 \text{ oder } = -1.$$

Von diesen beiden Werthen 2 oder $-1$ für $\varphi(o)$ oder $f(1, o)$ ist nur der erstere brauchbar; denn eine Substitution von $f(1, o) = -1$ in die frühere Gleichung $r = qf(1, 2z)$ für den Fall, daß der Winkel $z$ oder $2z = o$ wäre, also die Kraft $q$ mit $p'$ zusammenfiele, würde $r = -q$ ergeben, was absurd ist, da alsdann $r$ nur $= 2q$ sein könnte. Demnach hat man

$$\varphi(o) = 2 \ldots . (12).$$

Aus (8) folgt für $z = o$ mit Berücksichtigung der Gleichung (12)

$$2\varphi'(o) = \varphi'(o),$$

eine Gleichung, welche nur durch den Werth

$$\varphi'(o) = o \ldots\ldots (13)$$

realisirt werden kann. Mit Berücksichtigung der Gleichung (12) und (13) ergibt die Gleichung (9) für $z = o$

$$\varphi''(o) = \varphi''(o).$$

Der Werth von $\varphi''(o)$ bleibt also vor der Hand noch unbestimmt, ist aber eine Konstante, welcher man die allgemeine Form

$$\varphi''(o) = \pm 2\alpha^2 \ldots . (14)$$

geben kann. Vermittelst der Gleichungen (12), (13), (14) erhält man nun ferner aus den späteren Differenzialgleichungen, wenn man darin $z = o$ setzt,

**einer jeden Kraft mit der Zahl der Längeneinheiten des entsprechenden Perpendikels; so heißt dieses Produkt das Moment der**

---

$$\varphi'''(o) = o \; . \; . \; . \; . \; (15)$$
$$\varphi^{IV}(o) = 2\alpha^4 \; . \; . \; . \; . \; (16)$$
$$\varphi^{V}(o) = o \; . \; . \; . \; . \; (17)$$
$$\varphi^{VI}(o) = \pm 2\alpha^6 \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

u. s. f.

Wendet man nun zur Bestimmung der Funktion $\varphi$ die Maclaurinsche Formel

$$\varphi(z) = \varphi(o) + z\varphi'(o) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(o) + \frac{z^3}{1.2.3}\varphi'''(o) + \frac{z^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(o) + \text{etc.}$$

an, so findet man durch Substitution der Werthe aus den Gleichungen (12), (13), ...

$$\varphi(z) = 2\left(1 \pm \frac{\alpha^2 z^2}{1.2} + \frac{\alpha^4 z^4}{1.2.3.4} \pm \frac{\alpha^6 z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right)$$

Läßt man hierin die oberen Zeichen gelten, was der Annahme $\varphi''(o) = +2\alpha^2$ entspricht; so ist dieser Ausdruck nach den bekannten Exponentialreihen

$$\varphi(z) = f(1, z) = e^{\alpha z} + e^{-\alpha z},$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet; und läßt man die unteren Zeichen gelten, was der Annahme $\varphi''(o) = -2\alpha^2$ entspricht, so kommt

$$\varphi(z) = f(1, z) = 2\cos\alpha z.$$

Von diesen beiden Formen, welche die Funktion $f(1,z)$ möglicher Weise nur annehmen kann, ist die erstere ganz zu verwerfen, da sie bei der Anwendung auf die vorliegende Aufgabe zu Ungereimtheiten führt. Denn nimmt man an, daß zwei gleiche Kräfte **P** und **P** einander in derselben geraden Linie direkt entgegenwirken, daß also $z = \pi$ und $n = 1$ sei; so müßte die Resultante **R** offenbar $= o$ werden. Die Gleichung

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} f(1, z) = \mathbf{P}(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z})$$

würde aber für $z = \pi$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi})$$

ergeben, ein Ausdruck, welcher nicht $= o$ sein kann, da alsdann

$$e^{\alpha\pi} = -e^{-\alpha\pi} = -\frac{1}{e^{\alpha\pi}},$$

also $(e^{\alpha\pi})^2 = -1$ und $e^{\alpha\pi} = \sqrt{-1}$ und $\alpha = \frac{1}{\pi}\log\sqrt{-1}$

sein müßte, was unmöglich ist, wenn $\alpha$ eine reelle Größe sein soll.

Gestattet man übrigens, daß die Größe $\alpha$ auch imaginäre Werthe annehmen könne, so muß dieselbe, da der allgemeine Ausdruck für $\log.\sqrt{-1} = \frac{1}{2}.\log.(-1) = \frac{(2i+1)}{2}\pi\sqrt{-1}$ ist, $\alpha = \frac{2i+1}{2}\sqrt{-1}$ sein, worin $i$ irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Die Substitntion dieses Werthes von $\alpha$ in die obige Funktion $f$ ergibt alsdann aber

$$f(1, z) = e^{\frac{(2i+1)}{2}z\sqrt{-1}} + e^{-\frac{2i+1}{2}z\sqrt{-1}} = 2\cos\frac{(2i+1)}{2}z,$$

und man sieht, daß diese Form mit der zweiten für $f(1, z)$ allgemein entwickelten $2\cos\alpha z$ zusammenfällt, was man auch schon vorher bemerken konnte, ohne korrespondirenden Kraft in Beziehung oder für den angenommenen Punkt und man sagt, die Momente seien von diesem Punkte aus gemessen.

§. 5. Wenn drei Kräfte im Gleichgewichte sind, und es werden ihre Momente für irgend einen in ihrer

---

daß man diese Substitution wirklich ausführte, wenn man nur beachtete, daß wenn $\alpha = \frac{2i+1}{2}\sqrt{-1}$ wäre, $\alpha^2 = -\frac{2i+1}{2}$, also gleich einer negativen reelen Größe sein müßte, eine Bedingung, welche nach dem Vorstehenden für $f(1,z)$ nur die zweite Reihe, d. i. eine Funktion von der Form

$$f(1,z) = 2\cos\alpha z$$

ergibt.

Um hierin die Konstante $\alpha$ zu bestimmen, so ist schon eben bemerkt, daß für zwei gleiche Kräfte $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}$, welche unter einem Winkel $z = \pi$ einander entgegenwirken, $\mathbf{R} = 2\mathbf{P}\cos\alpha z = o$ sein muß. Hieraus folgt $\cos\alpha\pi = o$, also $\alpha\pi = \frac{\pi}{2}(1+2i)$ und, wie vorhin, $\alpha = \frac{1+2i}{2}$, worin $i$ jede ganze Zahl, die Null mit eingeschlossen, bezeichnen kann, und man würde für die Resultante zweier gleicher Kräfte $\mathbf{R} = 2\mathbf{P}\cos\frac{(1+2i)}{2}z$ zu setzen haben. Wäre nun $i$ irgend eine ganze Zahl, verschieden von $o$, so würde $\frac{\pi}{1+2i}$ ein spitzer Winkel sein, und die Resutante $\mathbf{R}$ zweier gleicher Kräfte $\mathbf{P}$, welche unter diesem Winkel $z = \frac{\pi}{1+2i}$ auf einen Punkt angebracht wären, würde $\mathbf{R} = 2\mathbf{P}\cos\frac{\pi}{2} = o$ sein. Da dies offenbar nicht möglich ist, so folgt, daß $i = o$, mithin $\alpha = \frac{1}{2}$ und

$$f(1,z) = 2\cos\frac{z}{2} \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

gesetzt werden müsse.

Setzt man hierin $2z$ an die Stelle von $z$, so erhält man

$$f(1,\ 2z) = 2\cos z,$$

und hierdurch wird die Gleichung (4)

$$f(n,z)^2 = 1 + n^2 + 2n\cos z,$$

woraus endlich

$$f(n,z) = \sqrt{1+n^2+2n\cos z} \quad . \; . \; . \; . \; (20)$$

folgt. Nach Gleichung (1) hat man daher für den Werth der gesuchten Mittelkraft

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}\sqrt{1+n^2+2n\cos z} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + n^2\mathbf{P}^2 + 2n\mathbf{P}^2\cos z},$$

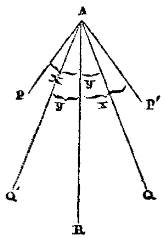
d. i., da $\mathbf{Q} = n\mathbf{P}$ ist,

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + \mathbf{Q}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{Q}\cos z} \quad . \; . \; . \; . \; (21)$$

Hieraus ersieht man, daß die Größe der Resultante $\mathbf{R}$ durch die Länge der Diagonale eines über den Seiten $\mathbf{P}$ nnd $\mathbf{Q}$ entworfenen Parallelogramms dargestellt wird, und es bleibt nur noch die Richtung dieser Kraft $\mathbf{R}$ zu bestimmen.

**Ebene liegenden Punkt genommen; so ist die Summe der Momente derjenigen beiden Kräfte, welche die Ebene in der Einen Richtung um den Punkt zu drehen streben, gleich dem Momente derjenigen Kraft, welche die Ebene in entgegengesetzter Richtung herum zu drehen strebt.**

---




Zu diesem Ende mache man $\angle RAP' = x, \angle RAQ' = y$ und lasse in der Richtung $P'A$ die Kraft $P' = P$ uud in der Richtung $Q'A$ die Kraft $Q' = Q$ auf den Punkt A wirken; alsdann stellt R in Größe und Richtung sowol die Mittelkraft für die beiden Kräfte P und Q, wie für die beiden Kräfte $P'$ und $Q'$ dar, und eine Kraft $= 2R$, in der Richtung RA angebracht, wird den vier Kräften, $PQ, P', Q'$ äquivalent sein. Man hat also für die Resultante $2R$ dieser vier Kräfte nach Gleichung (21).

$$2R = 2\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos z}.$$

Diese Resultante ist aber auch die Summe der Mittelkraft der beiden Kräfte P und $P'$ und der beiden Kräfte Q und $Q'$, da diese Kräfte resp. einander gleich sind und ihre Mittelkräfte demnach in die Halbirungslinie AR ihrer Neigungswinkel $PAP'$ und $QAQ'$ fallen müssen. Da nun $\angle PAP = x$ ist, so findet man für die Mittelkraft von P und $P'$ aus Gleichung (21), wenn man darin $Q = P' = P$ und $z = 2x$ setzt,

$$\sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2\cos 2x} = P\sqrt{2(1+\cos 2x)} = 2P\cos x,$$

und für die Mittelkraft von Q und $Q'$, da $\angle QAQ' = 2y = 2(z-x)$ ist, wenn man in jener Gleichung $P = Q' = Q$ und $z = 2(z-x)$ substituirt,

$$\sqrt{Q^2 + Q^2 + 2Q^2\cos.2(z-x)} = Q\sqrt{2[1+\cos 2(z-x)]} = 2Q\cos(z-x).$$

Die Summe dieser beiden Werthe, gleich dem obigen Ausdrucke von $2R$ gesetzt, gibt

$$P\cos x + Q\cos(z-x) = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos z}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten, setzt alsdann $P^2\cos^2 x = P^2 - P^2\sin^2 x$, $Q^2\cos^2(z-x) = Q^2 - Q^2\sin^2(z-x)$, entwickelt darauf das Glied $2PQ\cos x.\cos(z-x)$ in $2PQ\cos x(\cos z\cos x + \sin z\sin x) = 2PQ\cos z\cos^2 x + 2PQ\sin z\sin x\cos x = 2PQ\cos z - 2PQ\cos z\sin^2 x + 2PQ\sin z\sin x\cos x = 2PQ\cos z + 2PQ\sin x\sin(z-x)$ und reduzirt gehörig; so kommt

$$P^2\sin^2 x - 2PQ\sin x\sin(z-x) + Q^2\sin^2(z-x) = o, \text{ d. i.}$$

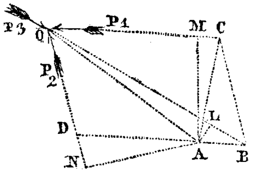
$$[Q\sin x - Q\sin(z-x)]^2 = o, \text{ also}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\sin x = Q\sin(z-x) \text{ oder} \\ \dfrac{\sin x}{\sin(z-x)} = \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{Q}{P} \end{array}\right\}, \ldots . (22)$$

eine Gleichung, woraus unmittelbar hervorgeht, daß die Richtung der in Rede stehenden Mittelkraft durch die Diagonale des über P und Q konstruirten Parallelogramms erhalten wird.

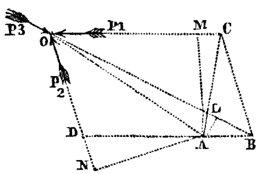
Durch die beiden Gleichungen (21) und (22) ist demnach das Prinzip des Parallelogramms der Kräfte vollständig erwiesen.

Anm. d. Uebers.




Denn wenn $P_1, P_2, P_3$ drei im Gleichgewichte befindliche Kräfte sind, welche in den Richtungen $P_1O$, $P_2O$, $P_3O$ wirken, so nehme man in ihrer Ebene einen beliebigen Punkt A und messe ihre Momente von diesem Punkte aus; es wird behauptet, daß die Summe der Momente von $P_2$ und $P_3$, welche die Ebene nach der Einen Seite um A zu drehen streben, gleich dem Momente von $P_1$ sei, welche die Ebene nach der entgegengesetzten Seite zu drehen strebt.

Zieht man durch A die Linie DAB parallel zu $OP_1$ und verlängert $OP_2$ bis zu dem Durchschnitte in D, stellt durch OD die Kraft $P_2$ dar und nimmt DB von einer solchen Länge, daß sich OD zu DB ebenso verhält, wie $P_2$ zu $P_1$, vollendet endlich das Parallelogramm ODBC; so wird OD und OC die Kräfte $P_2$ und $P_1$ und OB die Kraft $P_3$ in Größe und Richtung darstellen.




Fällt man nun auf OC, OD, OB die Perpendikel AM, AN, AL und zieht die Geraden AO, AC; so ist das Dreieck OBC gleich dem Dreiecke OAC, weil beide auf derselben Grundlinie stehen und zwischen zwei Parallelen liegen. Ferner hat man

$$\triangle ODA + \triangle OAB = \triangle ODB = \triangle OBC,$$

also auch

$$\triangle ODA + \triangle OAB = \triangle OAC,$$

und daraus folgt

$$\tfrac{1}{2} OD \times AN + \tfrac{1}{2} OB \times AL = \tfrac{1}{2} OC \times AM$$

oder

$$P_2 \times AN + P_3 \times AL = P_1 \times AM.$$

Nun sind aber $P_1 \times AM$, $P_2 \times AN$, $P_3 \times AL$ die Momente von $P_1$, $P_2$, $P_3$ um A, mithin ist, wenn man für Moment das Zeichen $m'$ einführt,

$$m'P_2 + m'P_3 = m'P_1 \quad \ldots . \; (1)$$

§. 6. Ist R die Resultante von $P_2$ und $P_3$, so hat man auch, da R gleich $P_1$ und in derselben geraden Linie wirkt, $m'R = m'P_1$, und mithin

$$m'P_2 + m'P_3 = m'R.$$

Die Summe der Momente zweier Kräfte $P_2$ und $P_3$ um einen in ihrer Ebene liegenden Punkt, welche die Ebene nach derselben Richtung um diesen Punkt zu drehen streben, ist also gleich dem Momente ihrer Resultante um diesen Punkt.

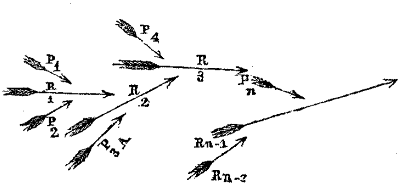
Hätten die Kräfte ein Bestreben, die Ebene nach entgegengesetzten Seiten zu drehen; so würde die Differenz ihrer Momente gleich dem Momente ihrer Resultante sein. Denn angenommen, R sei die Resultante von $P_1$ und $P_3$, welche die Ebene nach entgegengesetzten Seiten um A zu drehen streben; so ist R gleich $P_2$ und liegt mit ihr in derselben geraden Linie. Das Moment von R ist daher gleich dem von $P_2$; aber nach Gleichung (1) ist $m'P_1 - m'P_3 = m'P_2$, mithin ist auch $m'P_1 - m'P_3 = m'R$.

Allgemein kann man also setzen

$$m'P_1 \pm m'P_2 = m'R, \quad \ldots \quad (2)$$

und das Moment der Resultante zweier in derselben Ebene liegender Kräfte ist gleich der Summe oder der Differenz der Momente ihrer Komponenten, je nachdem dieselben die Ebene in einerlei oder in entgegesetzten Richtungen um den Punkt zu drehen streben, für welchen die Momente genommen sind.

§. 7. Wenn eine Anzahl in Einer Ebene liegender Kräfte im Gleichgewichte sind, und man nimmt ihre Momente für irgend einen Punkt dieser Ebene; so ist die Summe der Momente derjenigen Kräfte, welche die Ebene nach der Einen Richtung herum zu drehen streben, gleich der Summe der Momente der übrigen Kräfte, welche eine Drehung nach der entgegengesetzten Richtung herbeizuführen streben.




$P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ seien eine Anzahl von Kräften in derselben Ebene, welche sich im Gleichgewichte befinden.

Es sei $R_1$ die Resultante von $P_1$ und $P_2$,
$R_2$ » » » $R_1$ » $P_3$,
$R_3$ » » » $R_2$ » $P_4$,
. . . . . . . . . . . .
$R_{n-1}$ » » » $R_{n-2}$ » $P_n$.

Nimmt man nun die Momente aller dieser Kräfte für einen in der Ebene liegenden Punkt A, so hat man unter der Voraussetzung, daß die Momente derjenigen Kräfte von $P_1, P_2, \ldots$, welche die Ebene links herum zu drehen streben, negativ genommen werden, während die Momente der übrigen Kräfte, welche eine Drehung nach der rechten Seite herum zu bewirken streben, das positive Zeichen erhalten,

$$\begin{aligned} m'R_1 &= m'P_1 + m'P_2, \\ m'R_2 &= m'R_1 + m'P_3, \\ m'R_3 &= m'R_2 + m'P_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m'R_{n-1} &= m'R_{n-2} + m'P_n. \end{aligned}$$

Addirt man alle diese Gleichungen und unterdrückt die auf beiden Seiten gemeinschaftlichen Glieder, so erhält man

$$m'R_{n-1} = m'P_1 + m'P_2 + m'P_3 + \ldots . m'P_n, \quad \ldots . (3)$$

worin $R_{n-1}$ die Resultante aller der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$. bezeichnet.

Da nun diese Kräfte im Gleichgewichte sind; so haben sie keine Resultante, es ist

$$R_{n-1} = o, \text{ mithin auch } m'R_{n-1} = o \text{ und demnach}$$
$$m'P_1 + m'P_2 + m'P_3 + \ldots . + m'P_n = o \quad \ldots . (4)$$

In dieser Gleichung sind die Momente derjenigen Kräfte, welche das System nach der linken Seite herum zu drehen streben, negativ zu nehmen. Außerdem muß die Summe der negativen Glieder gleich der Summe der positiven sein, weil sonst die ganze Summe nicht gleich Null sein könnte, und es folgt, daß die Summe der Momente derjenigen Kräfte, welche das System rechts herum zu drehen streben, gleich der Summe der Momente der übrigen Kräfte sein muß, welche dasselbe nach der linken Seite herum zu drehen streben.

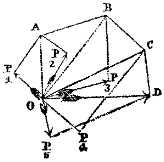
§. 8. Wenn eine Anzahl in Einer Ebene wirkender Kräfte im Gleichgewichte sind, und man trägt dieselben parallel zu ihren früheren Richtungen sämmtlich an Ein und denselben Punkt; so werden sie sich auch hier im Gleichgewichte erhalten.

Denn die Kraft $R_1$ (siehe die vorhergehende Figur) kann in jedem beliebigen Punkte ihrer Richtung in zwei andere zerlegt werden, welche den Kräften $P_1$ und $P_2$ parallel und gleich sind; ebenso kann $R_2$ in irgend einem Punkte ihrer Richtung in zwei Kräfte zerlegt werden, welche $R_1$ und $P_3$ parallel und gleich sind, und hiervon kann wiederum $R_1$ in zwei andere zerlegt werden, welche $P_1$ und $P_2$ parallel und gleich sind, so daß $R_2$ in irgend einem Punkte ihrer Richtung in drei Kräfte zerlegt werden kann, welche $P_1, P_2, P_3$ parallel und gleich sind; auf eine ähnliche Weise kann man $R_3$ in zwei Kräfte parallel und gleich $R_2$ und $P_4$, und daher auch in vier Kräfte zerlegen, welche parallel und gleich $P_1, P_2, P_3, P_4$ sind, u. s. f. Hieraus ergibt sich leicht, daß $R_{n-1}$ in irgend einem Punkte ihrer Richtung in $n$ Kräfte zerlegt werden kann, welche den Kräften $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ parallel und gleich sind. Wären daher $n$ solcher Kräfte in diesem Punkte angebracht, so würden sie durch eine der $R_{n-1}$ gleiche und entgegengesetzte Kraft im Gleichgewichte erhalten werden; $R_{n-1}$ ist aber $= o$, und daraus folgt, daß jene $n$ Kräfte, wenn sie an diesem Punkte angebracht wären, miteinander im Gleichgewichte sein würden.

Endlich leuchtet ein, daß wenn sich die fraglichen Kräfte an diesem Punkte im Gleichgewichte erhalten, sie es auch an jedem andern thun werden.

## Das Polygon der Kräfte.

§. 9. Bedingungen für das Gleichgewicht mehrerer an Einem Punkte angebrachter Kräfte.




Wenn $OP_1, OP_2, OP_3, \ldots$ verschiedene an Ein und demselben Punkte $O$ angebrachte Kräfte $P_1$, $P_2, P_3, \ldots$ in Größe und Richtung darstellen, und man vollendet das Parallelogramm $OP_1AP_2$ und zieht die Diagonale $OA$; so wird $OA$ die Resultante von $P_1$ und $P_2$ darstellen. Entwirft man das Parallelogramm $OABP_3$, so stellt $OB$ die Resultante von $OA$ und $P_3$, also von $P_1, P_2, P_3$ dar. Ebenso stellt die Diagonale $OC$ des Parallelogramms $OBCP_4$ die Resultante von $OB$ und $P_4$, das ist von $P_1, P_2, P_3, P_4$ dar, und in gleicher Weise wird durch die Diagonale $OD$ des Parallelogramms $OCDP_5$ die Resultante von $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ dargestellt.

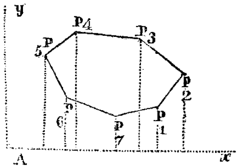
Nun bemerkt man, daß die Linie $AP_1$ der $OP_2$, $AB$ der $OP_3$, $BC$ der $OP_4$, $CD$ der $OP_5$ gleich und parallel ist, so daß $P_1A, AB, BC, CD$ die Kräfte $P_2, P_3, P_4, P_5$ der Größe nach darstellen und ihren Richtungen parallel sind. Außerdem liegt $OP_1$ in der Richtung der Kraft $P_1$ und stellt ihre Größe dar, und man sieht, daß die Seiten $OP_1, P_1A, AB, AC, CD$ des Polygones $OP_1ABCDO$ die Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ der Größe nach darstellen und ihren Richtungen parallel sind, während die Seite $OD$, welche das Polygon schließt, die Resultante aller dieser Kräfte in Größe und Richtung darstellt.

Sind daher die Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ im Gleichgewichte, so daß sie keine Resultante haben; so muß die Seite $OD$ des Polygons verschwinden und der Punkt $D$ mit $O$ zusammenfallen. Hieraus folgt nun, daß wenn mehrere Kräfte an Einem Punkte angebracht sind, und man zieht parallel zu ihren Richtungen Linien, welche die Kräfte der Größe nach darstellen und die Seiten eines Polygons bilden (wobei darauf Rücksicht genommen werden muß, daß eine jede Linie von dem Durchschnittspunkte mit der vorhergehenden aus nach der Seite gezogen wird, nach welcher die entsprechende Kraft wirkt); so wird die zu der letzten Kraft parallel gezogene Linie durch den Punkt gehen, in welchem das Polygon anfing, und dasselbe schließen, wenn die Kräfte im Gleichgewichte sind: sind die Kräfte aber nicht im Gleichgewichte; so wird jene letzte Linie das Polygon nicht vollenden, und wenn man dasselbe durch eine Linie schließt; so wird diese Linie die Resultante aller Kräfte in Größe und Richtung darstellen.

In diesem Satze besteht das Prinzip des Polygons der Kräfte; dasselbe behält Gültigkeit, die auf einen Punkt wirkenden Kräfte mögen in Ein und derselben Ebene liegen, oder nicht.

§. 10. **Wenn mehrere in Einer Ebene liegende Kräfte im Gleichgewichte sind, und man zerlegt eine jede derselben in Richtungen, welche zwei beliebigen rechtwinkligen Axen parallel sind; so ist die Summe aller Komponenten, welche ein Bestreben haben, längs irgend einer Axe in Ein und derselben Richtung Bewegung zu erzeugen, gleich der Summe der Komponenten, welche in entgegengesetzter Richtung Bewegung zu ertheilen streben.**

Man bilde das Polygon der Kräfte für mehrere in derselben




Ebene liegende Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (§. 8, 9) und projizire die Seiten dieses Polygons auf irgend eine gerade Linie A$x$ derselben Ebene. Es leuchtet ein, daß die Summe der Projektionen aller der Seiten des Polygons, welche den unteren Theil des Umfangs der Figur bilden und der Axe A$x$ am nächsten liegen, gleich der Summe der Projektionen derjenigen Seiten ist, welche den entgegengesetzten Theil des Umfanges bilden, und daß außerdem die ersteren solche Seiten des Polygons sind, welche Kräfte darstellen, deren Streben nach Bewegung von A nach $x$ oder von der Linken nach der Rechten gerichtet ist, während die letzteren solche Kräfte darstellen, welche in der entgegengesetzten Richtung Bewegung zu erzeugen streben. Nun ist eine jede Projektion gleich der korrespondirenden Seite des Polygons, multiplizirt mit den Kosinus ihres Neigungswinkels gegen A$x$, und demnach ist die Summe aller der Seiten des Polygons, durch welche die von A nach $x$ strebenden Kräfte dargestellt werden, multiplizirt mit den Kosinus der zugehörigen Neigungswinkel, gleich der Summe aller der Seiten, durch welche die nach entgegengesetzter Seite strebenden Kräfte dargestellt werden, multiplizirt gleichfalls mit dem Kosinus der entsprechenden Neigungswinkel gegen A$x$. Die Seiten des Polygons stellen aber die Kräfte der Größe nach dar und haben gegen A$x$ dieselben Neigungen: multiplizirt man daher eine jede Kraft mit dem Kosinus ihres Neigungswinkels gegen A$x$; so muß die Summe aller dieser Produkte für diejenigen Kräfte, welche nach der Einen Seite Bewegung zu erzeugen streben, gleich der Summe für die übrigen Kräfte sein, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken, oder wenn es bei der Bildung dieser

Summe vorbehalten bleibt, die Glieder positiv zu nehmen, in welchen Kräfte vorkommen, die von **A** nach $x$ wirken, während die Glieder, in welchen Kräfte vorkommen, die von $x$ nach **A** wirken, negativ genommen werden; so muß die Gesammtsumme aller der vorerwähnten Produkte null sein, das heißt, es muß sein, wenn man mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_n$ resp. die Neigungswinkel der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots . P_4$ gegen $Ax$ bezeichnet,

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots . + P_n \cos\alpha_n = o, \ldots . (5)$$

in welcher Gleichung alle diejenigen Glieder negativ zu nehmen sind, deren Streben von $x$ nach **A** gerichtet ist *).

Wenn dieser Satz für die Axe $Ax$ richtig ist; so ist er es auch für die andere Axe $Ay$. Bezeichnet man also die Neigungswinkel derselben Kräfte gegen diese zweite Axe mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$, so muß man auch haben

$$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \ldots . + P_n \cos\beta_n = o,$$

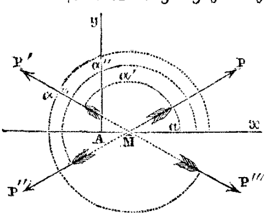
und wenn diese zweite Axe rechtwinklich auf der ersten steht, so daß $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$ etc, also $\cos\beta_1 = \sin\alpha_1, \cos\beta_2 = \sin\alpha_2$ etc. ist,

$$P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots . + P_n \sin\alpha_n = o \ldots . (6).$$

In dieser Gleichung sind ebenfalls die Glieder, deren Kräfte nach verschiedenen Seiten von $Ay$ Bewegung zu erzeugen streben, mit verschiedenen Zeichen zu nehmen **)

---

*) Bezeichnet man mit $\alpha$ denjenigen Winkel, welchen die Richtung, in der die Kraft **A** Bewegung zu erzeugen strebt, mit der *positiven* Richtung der Axe $Ax$ einschließt, wobei man denselben immer nach Ein derselben Seite herum rechnet; so braucht man auf die besondere Einschränkung hinsichtlich des Zeichens von $P \cos\alpha$ nicht weiter zu achten, weil alsdann eine Kraft, wie **P** oder **P'''**, deren Komponente in der positiven Richtung $Ax$ wirkt, einen Neigungswinkel $\alpha$ oder $\alpha'''$ im ersten oder vierten Quadranten mit $Ax$ einschließt, dessen Kosinus immer positiv ist, während eine Kraft, wie **A'** oder **A''**, deren Komponente in der negativen Richtung $xA$ wirkt, einen Winkel $\alpha'$ oder $\alpha''$ im zweiten oder dritten Quadranten mit $Ax$ einschließt, dessen Kosinus stets negativ ist. Will man indessen keine Winkel, welche größer sind, als 180⁰ in die Rechnung einführen; so muß man die Neigungswinkel $xMP'''$ und $xMP''$ der Kräfte **P'''** und **P''** als *negative Winkel* betrachten, wodurch man dasselbe Resultat erhält.



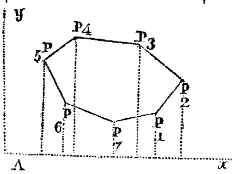

**) Dieser Zeichenwechsel tritt auch hier von selbst ein, wenn man dem Winkel $\alpha$ die in der vorstehenden Note angeführte Bedeutung gibt.

Wenn eine jede der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in zwei andere zerlegt wird, von denen die Eine parallel zur Axe $Ax$ und die andere parallel zur Axe $Ay$ ist; so leuchtet ein, daß diese Komponenten in paralleler Richtung zu $Ax$ durch $P_1 \cos\alpha_1, P_2 \cos\alpha_2$, etc. und die in paralleler Richtung zu $Ay$ durch $P_1 \sin\alpha_1, P_2 \sin\alpha_2$, etc. dargestellt werden. Es folgt also, daß wenn irgend ein im Gleichgewichte befindliches System von Kräften parallel zu zwei rechtwinkligen Axen zerlegt wird, die Summe aller Komponenten in der Richtung einer jeden Axe, welche Bewegung nach der Einen Seite hervorzubringen streben, gleich der Summe der übrigen ist, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken.

Diese Bedingung und die der Gleichheit der Momente sind zum Gleichgewichte irgend einer Anzahl von Kräften in derselben Ebene **nothwendig**; sie sind aber auch zusammen zur Herstellung des Gleichgewichtes **ausreichend**.

## §. 11. Bestimmung der Resultante mehrerer in Einer Ebene wirkender Kräfte.

Wenn die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ nicht im Gleichgewichte sind und eine Resultante haben; so fehlt zur Vollendung des Polygons der Kräfte Eine Seite, und diese Seite stellt die Resultante aller Kräfte der Größe nach dar und ist ihrer Richtung




parallel (§. 9). Ferner ist einleuchtend, daß in diesem Falle die Summe der Projektionen auf $Ax$ (§. 10) aller derjenigen Linien, welche die Eine Seite des Umfanges des Polygons bilden, von der Summe der Projektionen der übrigen Linien, welche die andere Seite dieses Umfanges bilden, um die Projektion der letzgedachten fehlenden Seitenlinie verschieden ist, und daß mithin die Summe der zerlegten Kräfte, welche in der Einen Richtung von $Ax$ wirken, um die Komponente der Resultante längs dieser Axe geringer ist, als die Summe der zerlegten Kräfte in der entgegengesetzten Richtung. Stellt daher $R$ diese Resultante und $\vartheta$ ihren Neigungswinkel gegen $Ax$ dar; so ist die Komponente von $R$ in der Richtung $Ax$ gleich $R\cos\vartheta$, und man hat bei gehöriger Beachtung der Zeichen der einzelnen Glieder,

$$R\cos\vartheta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\cos\alpha_n, \ldots (7)$$

und ebenso in Beziehung zu der Axe A$y$

$$R\sin\vartheta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots + P_n\sin\alpha_n \ldots (8)$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie alsdann, so ergibt sich, da $R^2\sin^2\vartheta + R^2\cos^2\vartheta = R^2(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = R^2$ ist,

$$R^2 = (\Sigma P\sin\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\alpha)^2, \ldots (9)$$

worin $\Sigma P\sin\alpha$ die Summe $P_1\sin\alpha_1 + P^2\sin\alpha^2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots$ und $\Sigma P\cos\alpha$ die Summe $P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots$ darstellt.

Dividirt man die Gleichung (8) durch (7), so kommt

$$\tang\vartheta = \frac{\Sigma P\sin\alpha}{\Sigma P\cos\alpha} \ldots (10)$$

Durch die Gleichung (9) wird also die Größe und durch die Gleichung (10) der Neigungswinkel $\vartheta$ der Resultante **R** gegen die Axe A$x$ bekannt. Zur vollständigen Bestimmung derselben ist aber noch der perpendikuläre Abstand anzugeben, in welchem sie von dem gegebenen Punkte A aus wirkt, und hierzu ist eine Rekursion zu der Bedingung der Gleichheit der Momente (§. 7) erforderlich.

Wenn die Summe der Momente derjenigen Kräfte von $P_1$, $P_2 \ldots P_n$, welche das System nach der Einen Seite um A zu drehen streben, nicht gleich der Summe der Momente der übrigen ist, welche nach der anderen Seite wirken; so wird eine Kraft R, welche der Resultante gleich und entgegengesetzt ist, die Gleichheit dieser beiden Summen herstellen, so daß das Moment von R gleich der Differenz dieser Summe ist. Bezeichnet man daher mit $p$ den perpendikulären Abstand der Richtung der Kraft R von A; so muß

$$Rp = m'P_1 + m'P_2 + m'P_3 + \ldots + m'P_n \ldots (11)$$

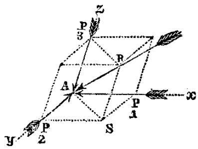
sein, in welcher Gleichung die Momente derjenigen Kräfte negativ zu nehmen sind, welche eine Drehung nach der linken Seite um A zu bewirken streben. Dividirt man auf beiden Seiten mit R, so kommt

$$p = \frac{m'P_1 + m'P_2 + m'P_3 + \ldots + m'P_n}{R} \ldots (12)$$

Durch die Gleichungen (9), (10), (12) wird also die Größe der Resultante R, ihre Neigung gegen die gegebene Axe A$x$ und der perpendikulare Abstand ihrer Richtung vom Punkte A gefunden, und der resultirende Druck ist hiernach in Größe und Richtung vollkommen bestimmt.

## Das Parallelepipedum der Kräfte.

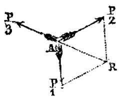
§. 12. Auf den Punkt A sind in den Richtungen $x$A, $y$A, $z$A, welche nicht in derselben Ebene liegen, die drei Kräfte $P_1, P_2, P_3$ angebracht; es soll ihre Resultante bestimmt werden.




Stellen die Linien $P_1A, P_2A, P_3A$ die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ in Größe und Richtung dar, und vollendet man das Parallelepipedum $RP_3P_2P_1$, von welchem $AP_1, AP_2, AP_3$ die zusammenstoßenden Kanten bilden; so stellt die Diagonale RA die Resultante von $P_1, P_2, P_3$ in Größe und Richtung dar. Denn da $P_1SP_2A$ ein Parallelogramm ist, dessen zusammenstoßende Seiten $P_1A, P_2A$ die Kräfte $P_1$ und $P_2$ in Größe und Richtung darstellen; so stellt seine Diagonale SA die Resultante dieser beiden Kräfte dar. Ebenso wird durch die Diagonale RA des Parallelogramms $RSAP_3$ die Resultante von SA und $P_3$, das ist von $P_1, P_2$ und $P_3$ dargestellt.

Es leuchtet ein, daß die vierte Kraft, welche nöthig ist, um mit $P_1, P_2, P_3$ Gleichgewicht zu halten, ihrer Resultante AR gleich und entgegengesetzt sein muß.

§. 13. Wenn drei Kräfte $P_1, P_2, P_3$ im Gleichgewichte sind, so soll die dritte $P_3$ und ihre Neigung gegen die beiden anderen vermittelst dieser beiden ausgedrückt werden.




Man stelle durch $AP_1$ und $AP_2$ die Kräfte $P_1$ und $P_2$ in Größe und Richtung dar und bezeichne mit ${}_1\vartheta_2$ den Neigungswinkel $P_1AP_2$ von $P_1$ gegen $P_2$. Vollendet man das Parallelogramm $AP_1RP_2$, so stellt die Diagonale AR die Resultante von $P_1$ und $P_2$ in Größe und Richtung dar. Diese Resultante ist aber mit $P_3$ im Gleichgewichte, da $P_1$ und $P_2$ mit $P_3$ im Gleichgewichte sind; sie wirkt daher in derselben geraden Linie, wie $P_3$, ist ihr entgegengesetzt und an Größe gleich. Nun hat man in dem Dreiecke $ARP_1$

$$\overline{AR}^2 = \overline{AP_1}^2 + \overline{P_1R}^2 - 2\overline{AP_1}.\overline{P_1R}.\cos AP_1R,$$

ferner $AP_1R = \pi - P_1AP_2 = \pi - {}_1\vartheta_2$, also $\cos AP_1R = \cos(\pi - {}_1\vartheta_2) = -\cos {}_1\vartheta_2$, und es ist $P_1R = AP_2$, und $AP_1, AP_2, AR$ stellen die Kräfte $P_1, P_2, P_3$ der Größe nach dar; demnach wird der vorstehende Ausdruck

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P\ P_2 \cos {}_1\vartheta_2,$$

woraus

$$P_3 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\ {}_1\vartheta_2} \ldots (13)$$

folgt

§. 14. **Wenn drei Kräfte $P_1, P_2, P_3$ miteinander im Gleichgewichte stehen; so verhalten sich irgend zwei derselben umgekehrt zueinander, wie die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die Richtung der dritten Kraft.**

Bezeichnet man den Neigungswinkel von $P_1$ gegen $P_3$ mit ${}_1\vartheta_3$ und den von $P_2$ gegen $P_3$ mit ${}_2\vartheta_3$, so ist

$P_1AR = \pi - P_1AP_3 = \pi - {}_1\vartheta_3$, also $\sin P_1AR = \sin {}_1\vartheta_3$,

$P_1RA = P_2AR = \pi - P_2AP_3 = \pi - {}_2\vartheta_3$, also $\sin P_1RA = \sin {}_2\vartheta_3$.

Man hat aber auch

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{AP_1}{P_1R} = \frac{\sin P_1RA}{\sin P_1AR},$$

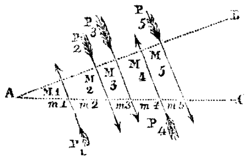
das ist, nach den vorstehenden Beziehungen

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sin {}_2\vartheta_3}{\sin {}_1\vartheta_3} \ldots (14)$$

## Von den parallelen Kräften.

§. 15. **Das Prinzip der Gleichheit der Momente behält für Kräfte in Ein und derselben Ebene immer Gültigkeit, welches auch ihre Neigungen gegeneinander seien, und mithin auch, wenn diese Neigungswinkel unendlich klein, oder wenn die Kräfte einander parallel werden.**

In diesem Falle der parallelen Kräfte ist dieselbe Linie AB,




welche von einem gegebenen Punkte A auf Eine dieser Kräfte perpendikular gezogen wird, auch auf allen übrigen perpendikular, so daß die Perpendikel hier die Theile $AM_1$, $AM_2$ etc. der Linie AB sind, welche zwischen dem Punkte A und den Richtungen der Kräfte abgeschnitten werden. Das obige Prinzip ist nun in diesem Falle nicht allein für die Theile dieser Perpendikulare AB, sondern auch für die Theile irgend einer anderen Linie AC richtig, da die abgeschnittenen Theile $Am_1$, $Am_2$, $Am_3$, etc. dieser zweiten Linie den Theilen $AM_1$, $AM_2$, $AM_3$, etc. der ersteren proportional sind. Denn nehmen wir das in der Figur dargestellte System von parallelen Kräften, so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\overline{AM_1}\,.\,P_1+\overline{AM_4}\,.\,P_4=\overline{AM_2}\,.\,P_2+\overline{AM_3}\,.\,P_3+\overline{AM_5}\,.\,P_5$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $AM_5$ dividirt,

$$\frac{AM_1}{AM_5}\,.\,P_1+\frac{AM_4}{AM_5}\,.\,P_4=\frac{AM_2}{AM_5}\,.\,P_2+\frac{AM_3}{AM_5}\,.\,P_3+P_5.$$

Wegen der ähnlichen Dreiecke ist aber

$$\frac{AM_1}{AM_5}=\frac{Am_1}{Am_5},\ \frac{AM_2}{AM_5}=\frac{Am_2}{Am_5},\ \text{etc., mithin auch}$$

$$\frac{Am_1}{Am_5}.P_1+\frac{Am_4}{Am_5}.P_4=\frac{Am_2}{Am_5}.P_1+\frac{Am_3}{Am_5}.P_3+P_5.$$

Multiplizirt man nun mit $Am_5$, so kommt

$$\overline{Am_1}\,.\,P_1+\overline{Am_4}\,.\,P_4=\overline{Am_2}\,.\,P_2+\overline{Am_3}\,.\,P_3+\overline{Am_5}\,.\,P_5.$$

## §. 16. Bestimmung der Resultante mehrerer paralleler Kräfte in derselben Ebene.

Es leuchtet ein, daß wenn in einem Systeme von Kräften eine der Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft angebracht würde, das Ganze im Gleichgewichte sein müßte, und wenn es im Gleichgewichte ist, so hat man (§. 8) gesehen, daß wenn alle Kräfte parallel zu ihren Richtungen an Ein und denselben Punkt transportirt würden, sie von der Beschaffenheit sein müßten, daß um diesen Punkt Gleichgewicht stattfände. Verlegt man aber in dieser Weise parallele Kräfte, so fallen alle ihre Richtungen in einer einzigen geraden Linie zusammen, und sollen sie in dieser Lage im Gleichgewichte sein; so muß die Summe derjenigen Kräfte, welche nach der Einen Seite wirken, gleich der Summe der übrigen sein, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken. Eine dieser Summen enthält die Resultante **R**, und es ist klar, daß ehe **R** eingeführt war, die beiden Summen ungleich gewesen sein müssen, und daß **R** gleich dem Ueberschusse der größeren Summe über die kleinere ist. Stellt daher allgemein $\Sigma \mathbf{P}$ die Summe mehrerer paralleler Kräfte dar, wobei diejenigen, welche nach der Einen Seite wirken, positiv, und diejenigen, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken, negativ genommen sind; so hat man

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{P}, \ldots . (15)$$

und das Zeichen von **R** gibt an, ob dieselbe in der Richtung der positiven oder in der der negativen Kräfte wirkt.

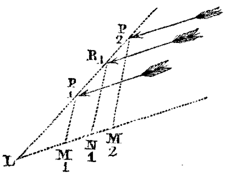
Da ferner diese Kräfte, mit Einschluß von **R**, im Gleichgewichte sind, so muß die Summe der Momente für irgend einen Punkt von den nach Einer Seite wirkenden Kräften gleich der Summe der Momente der übrigen sein, wobei diese Momente auf einer beliebigen Linie **AC** (s. die frühere Figur) gemessen werden können. Die Eine dieser Summen schließt aber das Moment von **R** ein; diese beiden Summen müssen daher vor der Einführung von **R** ungleich gewesen sein, und das Moment von **R** muß gleich dem Ueberschusse der größeren Summe über die kleinere sein, so daß, wenn man mit $\Sigma m' \mathbf{P}$ die Summe der Momente der Kräfte (mit Ausschluß von **R**) bezeichnet und dabei die nach Einer Seite wirkenden positiv und die übrigen negativ nimmt, und ferner durch $x$ den Abstand von **A** auf der Linie **AC** darstellt, in welchem diese Linie von **R** geschnitten wird, $x\mathbf{R} = \Sigma m' \mathbf{P}$ ist, worin das Zeichen von $x\mathbf{R}$ die Richtung angibt, in welchem **R** das System um **A** zu drehen strebt. Nun war $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{P}$; man hat also

$$x = \frac{\Sigma m' \mathbf{P}}{\Sigma \mathbf{P}} \ldots . (16)$$

Die Gleichungen (15) und (16) bestimmen vollständig die Größe und Richtung der Resultante eines Systemes von parallelen, in Einer Ebene liegenden Kräften.

§. 17. **Bestimmung der Resultante mehrerer paralleler Kräfte, welche nicht in derselben Ebene liegen.**

$P_1$ und $P_2$ seien die Angriffspunkte von irgend zwei dieser




Kräfte, welche selbst der Größe nach durch $P_1$ und $P_2$ dargestellt werden. Ihre Resultante $R_1$ schneide die Verbindungslinie der Punkte $P_1$ und $P_2$ in dem Punkte $R_1$. Verlängert man nun die Linie $P_1P_2$ bis zum Durchschnitte $L$ mit irgend einer der Lage nach gegebenen Ebene, zieht durch die Punkte $P_1, P_2$ und $R_1$ die Linien $P_1M_1, P_2M_2$ und $R_1N_1$ perpendikular auf jene Ebene; so werden diese Linien miteinander und mit $P_1L$ in Ein und derselben Ebene liegen. Ist nun $LM_1$ die Durchschnittslinie der ersteren Ebene mit dieser letzteren, so stehen $P_1M_1, P_2M_2$ und $R_1N_1$ auf $LM_1$ perpendikular. Nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente hat man aber

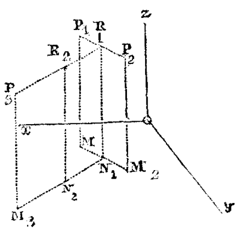
$$P_1 \cdot \overline{LP_1} + P_2 \cdot \overline{LP_2} = R_1 \cdot \overline{LR_1}, \text{ folglich auch}$$

$$P_1 \cdot \frac{LP_1}{LR_1} + P_2 \cdot \frac{LP_2}{LR_1} = R_1,$$

und wegen der ähnlichen Dreiecke ist

$$\frac{LP_1}{LR_1} = \frac{P_1M_1}{R_1N_1}, \frac{LP_2}{LR_1} = \frac{P_2M_2}{R_1N_1}, \text{ und daher}$$

$$P_1 \cdot \frac{P_1M_1}{R_1N_1} + P_2 \cdot \frac{P_2M_2}{R_1N_1} = R_1.$$




Schneidet nun ferner die Resultante $R_2$ von $R_1$ und $P_3$ die Verbindungslinie der Punkte $R_1$ und $P_3$ in dem Punkte $R_2$, und ebenso die Resultante $R_3$ von $R_2$ und $P_4$ die Verbindungslinie der Punkte $R_2$ und $P_4$ in dem Punkte $R_3$, u. s. f.; so ist nach der letzten Gleichung

$$P_1 \cdot \overline{P_1M_1} + P_2 \cdot \overline{P_2M_2} = R_1 \cdot \overline{R_1N_1};$$

ebenso hat man $R_1 \cdot \overline{R_1N_1} + P_3 \cdot \overline{P_3M_3} = R_2 \cdot \overline{R_2N_2}$,

$$R_2 \cdot \overline{R_2N_2} + P_4 \cdot \overline{P_4M_4} = R_3 \cdot \overline{R_3N_3},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$R_{n-2} \cdot \overline{R_{n-2}N_{n-2}} + P_n \cdot \overline{P_nM_n} = R_{n-1} \cdot \overline{R_{n-1}N_{n-1}}.$$

Addirt man diese Gleichungen und unterdrückt die beiden Seiten gemeinschaftlichen Glieder, so kommt

$$P_1 . \overline{P_1 M_1} + P_2 . \overline{P_2 M_2} + \ldots + P_n . \overline{P_n M_n} = R_{n-1} . \overline{R_{n-1} N_{n-1}} \ldots (17)$$

Nun ist aber $R_1 = P_1 + P_2$, $R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$,

$R_3 = R_2 + P_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ u. s. f.

$R_{n-1} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$, folglich

$$\overline{R_{n-1} N_{n-1}} . (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n) = P_1 . \overline{P_1 M_1} + P_2 . \overline{P_2 M_2} + \ldots + P_n . \overline{P_n M_n},$$

und endlich

$$\overline{R_{n-1} N_{n-1}} = \frac{P_1 . \overline{P_1 M_1} + P_2 . \overline{P_2 M_2} + \ldots + P_n . \overline{P_n M_n}}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}, \ldots (18)$$

in welchem Ausdrucke diejenigen der parallelen Kräfte $P_1, P_2, \ldots$, welche nach Einer Richtung wirken, positiv, und die nach entgegengesetzter Richtung wirkenden negativ zu nehmen sind.

Die Linie $R_{n-1} N_{n-1}$ stellt den perpendikularen Abstand eines Punktes, durch welchen die Resultante aller Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ geht, von der gegebenen Ebene dar. In derselben Weise kann der Abstand dieses Punktes von irgend einer anderen Ebene bestimmt werden; ermittelt man daher diesen Abstand von drei auf einander perpendikular stehenden Ebenen; so wird die Lage des Punktes im Raume bekannt sein. Hiernach kennt man also einen Punkt, durch welchen die Resultante aller Kräfte geht, ferner die Richtung dieser Resultante, denn sie muß der gemeinschaftlichen Richtung aller Kräfte parallel sein, und endlich die Größe derselben, denn sie ist gleich der Summe aller Kräfte, mit Rücksicht auf die ihnen zukommenden Zeichen, und man sieht, daß der resultirende Druck hierdurch vollkommen bestimmt ist. Der Punkt $R_{n-1}$, durch welchen derselbe geht, heißt der **Mittelpunkt der parallelen Kräfte**.

§. 18. Das Produkt einer Kraft in ihren perpendikularen Abstand von einer Ebene (oder vielmehr das Produkt der Anzahl von Einheiten dieser Kraft in die Anzahl von Einheiten des Perpendikels) heißt das **Moment der Kraft in Beziehung zu jener Ebene**, und hieraus folgt durch die Gleichung (17), daß die **Summe der Momente mehrerer paralleler**

Kräfte in Beziehung zu einer gegebenen Ebene gleich dem Momente ihrer Resultante in Beziehung zu derselben Ebene ist.

§. 19. Aus der Gleichung (17) geht hervor, daß der Abstand $R_{n-1}N_{n-1}$ des Mittelpunktes des Druckes mehrerer paralleler Kräfte von einer gegebenen Ebene unabhängig ist von den Richtungen dieser parallelen Kräfte und nur von den perpendikularen Abständen $P_1M_1$, $P_2M_2$ etc. ihrer Angriffspunkte von der gegebenen Ebene abhängt, so daß, wenn bloß die Richtung der Kräfte geändert würde, dabei aber ihre Größen und Angriffspunkte dieselben blieben, ihr Mittelpunkt des Druckes keine Aenderung erlitte, das heißt, die Resultante, obgleich sie eine andere Richtung, nämlich die der einzelnen Komponenten, annähme, würde immer durch denselben Punkt gehen.

Die Gewichte mehrerer Körper oder verschiedener Theile Ein und desselben Körpers bilden ein System von parallelen Kräften. Die Richtung des hieraus resultirenden Gewichtes kann daher nach dem vorhergehenden Satze bestimmt werden; der Mittelpunkt des Druckes wird hier der Schwerpunkt des Systemes.

## Der Schwerpunkt.

§. 20. Die Resultante des Gewichtes mehrerer Körper oder mehrerer Theile desselben Körpers, welche zu einem unveränderlichen Systeme verbunden sind, geht immer durch denselben Punkt, in welche Lage das System auch gebracht werden mag.

Denn die Wirkung, welche durch eine Veränderung der Lage hervorgebracht wird, besteht darin, daß die Richtungen der Gewichte der einzelnen Theile den schweren Körper oder das System von schweren Körpern nach verschiedenen Seiten durchdringen, und der Einfluß auf die Richtung des resultirenden Gewichtes bei der Drehung des Systemes ist offenbar derselbe, als der, welchen man erhalten würde, wenn sich bei unveränderter Lage des Körpers die Richtung der Schwere ändern könnte. Nach §. 19 würde nun aber durch diese letztere Veränderung, wobei die parallelen

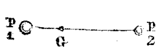
Kräfte zwar eine andere Richtung durch den Körper bekämen, aber ihre Größe und Angriffspunkte beibehielten, die Lage ihres Mittelpunktes nicht geändert werden; mithin wird dies auch nicht durch die *zuerst* erwähnte Veränderung geschehen. Hieraus folgt, daß der Mittelpunkt des Druckes für die Gewichte der Theile eines schweren Körpers oder eines Systemes von unveränderlicher Form seine Lage in dem Körper nicht ändert, welches auch die Lage sein mag, in welche der Körper gebracht wird.

Dieser Punkt, durch welche die Resultante der Gewichte der Theile eines schweren Körpers geht, heißt sein *Schwerpunkt*.

§. 21. Da die Gewichte der Theile eines Körpers in parallelen Richtungen und nach derselben Seite wirken; so ist ihre Resultante gleich ihrer Summe. Diese Resultante der Gewichte der verschiedenen Theile eines Körpers bringt hinsichtlich der Bedingungen des Gleichgewichtes des Körpers einzeln denselben Effekt hervor, wie die Gewichte der Theile zusammengenommen, sie ist gleich der Summe der Gewichte der Theile oder gleich dem ganzen Gewichte des Körpers und wirkt in jeder Lage durch denselben Punkt, nämlich den Schwerpunkt des Körpers, vertikal nach unten. Hieraus folgt, *daß in jeder Lage des Körpers und unter allen Umständen die Gewichte seiner Theile in Beziehung auf das Gleichgewicht denselben Effekt hervorbringen, als wenn sie alle in dem Schwerpunkte vereinigt wären.*

§. 22. *Bestimmung der Lage des Schwerpunktes für zwei Gewichte* $P_1$ *und* $P_2$*, welche ein festes System bilden.*

Nimmt man an, dieser Punkt liege in G, so hat man nach der Gleichung (16), da die Resultante von $P_1$ und $P_2$ durch G geht, wenn man $P_1$ als den Punkt ansieht, von welchem aus die Momente gemessen werden,




$$\overline{P_1+P_2}\,.\,P_1G=P_2\,.\,\overline{P_1P_2},\ \text{mithin}$$

$$P_1G=\frac{P_2\,.\,\overline{P_1P_2}}{P_1+P_2},$$

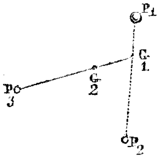
wodurch die Lage von G bestimmt ist. Sind die beiden Gewichte $P_1$ und $P_2$ einander gleich; so wird

$$P_1 G = \tfrac{1}{2} P_1 P_2,$$

und der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Linie $P_1 P_2$.

§. 23. Bestimmung der Lage des Schwerpunktes für drei Gewichte $P_1, P_2, P_3$, welche nicht in derselben geraden Linie liegen und ein festes System bilden.

Nach dem vorstehenden Satze suche man den gemeinschaftlichen Schwerpunkt $G_1$ für $P_1$ und $P_2$, denke sich alsdann die Gewichte $P_1$ und $P_2$ in $G_1$ vereinigt und suche, wie vorhin, den gemeinschaftlichen Schwerpunkt $G_2$ für dieses Gewicht $P_1 + P_2$ und das dritte gegebene Gewicht $P_3$.




Es leuchtet ein, daß dieser Punkt $G_2$ der gesuchte Schwerpunkt für die drei Gewichte $P_1, P_2, P_3$ sein wird. Da nun $G_2$ der Mittelpunkt des Druckes von $P_3$ und von dem in $G_1$ vereinigten Gewichte $P_1 + P_2$ ist; so hat man nach dem vorstehenden Satze

$$\overline{G_1 G_2} . (P_1 + P_2 + P_3) = \overline{G_1 P_3} . P_3 \text{ und}$$

$$G_1 G_2 = \frac{\overline{G_1 P_3} . P_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Sind die drei Gewichte $P_1, P_2, P_3$ einander gleich; so ist

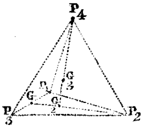
$$\overline{G_1 G_2} = \tfrac{1}{3} \overline{G_1 P_3}.$$

und außerdem ist in diesem Falle

$$\overline{P_1 G_1} = \tfrac{1}{2} \overline{P_1 P_2}.$$

§. 24. Bestimmung der Lage des Schwerpunktes für vier Gewichte, welche nicht in derselben Ebene liegen und ein festes System bilden.

Wenn diese Gewichte durch $P_1, P_2, P_3, P_4$ dargestellt werden, so suche man den Schwerpunkt $G_2$ für die Gewichte $P_1, P_2, P_3$ nach dem vorhergehenden Satze, denke sich diese drei Gewichte in $G_2$ vereinigt und suche den Schwerpunkt $G_3$ für das in G vereinigte Gewicht $P_1 + P_2 + P_3$ und das vierte Gewicht $P_4$.



$G_3$ wird alsdann der gesuchte gemeinschaftliche Schwerpunkt für $P_1, P_2, P_3, P_4$ sein, und da derselbe der Schwerpunkt für $P_4$ und für das in $G_2$ wirkend gedachte Gewicht $P_1+P_2+P_3$ ist; so hat man

$$\overline{G_2G_3}\,.\,(P_1+P_2+P_3+P_4)=\overline{G_2P_4}\,.\,P_4, \text{ mithin}$$

$$\overline{G_2G_3}=\frac{\overline{G_2P_4}\,.\,P_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}.$$

Sind die gegebenen Gewichte alle einander gleich, so wird

$$\overline{G_2G_3}=\tfrac{1}{4}\overline{G_2P_4},$$
$$\text{ferner } \overline{G_1G_2}=\tfrac{1}{3}\overline{G_1P_3},$$
$$\text{und } \overline{G_1P_1}=\tfrac{1}{2}\overline{P_1P_2}.$$

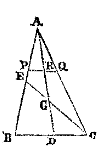
### §. 24a. Schwerpunkt einer geraden Linie.

Die Linie **AB** sei über ihre ganze Länge gleichförmig mit Gewichten beschwert, so daß die Theile der Linie selbst die darauf wirkenden Gewichte der Größe nach darstellen.


Denkt man sich die Linie in lauter unendlich kleine Elemente zerlegt und halbirt dieselbe in **G**; so wird dieser Punkt der Schwerpunkt für irgend zwei von **G** gleichweit abstehende Elementargewichte **C** und **D** (§. 22) und mithin der gemeinschaftliche Schwerpunkt für die ganze schwere Linie **AB** sein, so daß man sich das ganze Gewicht dieser Linie in dem Punkte **G** vereinigt vorstellen kann.

### §. 25. Schwerpunkt eines Dreiecks.

Halbirt man die Seiten **AB** und **BC** der dreieckigen Fläche **ABC** in **E** und **D** und zieht die Linien **CE** und **AD** nach den gegenüberliegenden Winkelspitzen; so ist der Durchschnitt **G** dieser Linien der Schwerpunkt des als schwer gedachten Dreiecks.




Denn man kann sich das Dreieck als aus lauter unendlich schmalen, mit **BC** parallelen Streifen zusammengesetzt denken. Von diesen äußerst schmalen Streifen wird ein jeder, wie z. B. **PQ**, durch die Linie **AD** halbirt, indem man wegen der ähnlichen Dreiecke **PR : BD = AR : AD = QR : CD**, und folglich auch **PR : QR = BD : CD** hat; es ist aber **BD = CD**, mithin auch **PR = QR**.

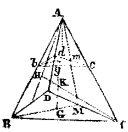
Hiernach würde sich nun ein jeder der elementaren, zu **BC** parallelen Streifen, welche das Dreieck **ABC** bilden, über der Linie **AD** im Gleichgewichte erhalten (§. 24 a.), mithin auch alle Streifen zusammengenommen, und es folgt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks in der Linie **AD** liegen müsse.

Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, daß der Schwerpunkt des Dreiecks auch in der Linie **CE** liegen müsse, und hieraus geht hervor, daß derselbe im Durchschnittspunkte **G** der beiden Linien **AD** und **CE** liegt; es ist aber aus der Geometrie bekannt, daß sich die Linien, welche aus den Spitzen eines Dreiecks nach den Halbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, auf den dritten Theilen ihrer Längen durchschneiden, so daß $DG = \frac{1}{3}DA$ ist.

Das letztere Resultat, daß nämlich $DG = \frac{1}{3}DA$ sei, ergibt sich auch einfach durch folgende Betrachtung.

Bringt man in den Winkelspitzen **A**, **B** und **C** des gegebenen Dreiecks drei gleiche Gewichte an; so liegt der Schwerpunkt der in **B** und **C** angebrachten Gewichte in **D** und mithin der gemeinschaftliche Schwerpunkt der in **A**, **B** und **C** angebrachten Gewichte in der Linie **AD**. Ebenso liegt der Schwerpunkt der in **A** und **B** angebrachten Gewichte in **E** und mithin der gemeinschaftliche Schwerpunkt der in **A**, **B** und **C** angebrachten Gewichte in der Linie **CE**. Der Schwerpunkt dieser d r e i Gewichte liegt also im Durchschnittspunkte **G** der beiden Linien **AD** und **CE** und fällt daher mit dem Schwerpunkte des Dreiecks **ABC** zusammen. Nach §. 23 hat man aber für die Lage des Schwerpunktes der drei gleichen in **A**, **B** und **C** angebrachten Gewichte $DG = \frac{1}{3}DA$, wodurch denn auch die Lage des Schwerpunktes des Dreiecks **ABC** bestimmt wird.

### §. 26. Schwerpunkt einer Pyramide.




Man denke sich die dreiseitige Pyramide **ABCD** aus elementaren Schichten *bcd* von unendlich geringer Dicke, welche sämmtlich der Grundfläche **BCD** parallel sind, zusammengesetzt. Ist nun **G** der Schwerpunkt der Grundfläche **BCD**, und man zieht die Linie **AG**; so wird **AG** durch den Schwerpunkt

$g$ der Schicht $bcd$ gehen. Denn legt man durch **A, B** und **G** eine Ebene, welche die Seitenfläche **ADC** der Pyramide in **AM** schneidet, so hat man wegen ähnlicher Dreiecke $DM:MC=dm:mc$; es ist aber $DM=MC$, also auch $dm=mc$. Ferner hat man wegen ähnlicher Dreiecke $GM:BM=gm:bm$; es ist aber $GM=\frac{1}{3}BM$, also auch $gm=\frac{1}{3}bm$. Da nun $dm=\frac{1}{2}dc$ und $gm=\frac{1}{3}bm$; so ist $g$ der Schwerpunkt des Dreiecks $bdc$.

Hiernach wird sich nun eine jede elementare Schicht auf der Linie **AG** im Gleichgewichte erhalten, und mithin auch alle Schichten zusammengenommen oder die ganze Pyramide. Der Schwerpunkt der Letzteren liegt also in der Linie **AG**. Wird nun ebenso der Schwerpunkt **H** der Seitenfläche **ABD** mit der Spitze **C** verbunden; so liegt der Schwerpunkt der Pyramide auch in der Linie **CH**, und es folgt, daß sich die Linien **AG** und **CH** in dem gesuchten Schwerpunkte **K** der Pyramide durchschneiden müssen.

Um die Lage dieses Durchschnittspunktes der beiden Linien **AG** und **CH** zu bestimmen, kann man ein ähnliches Verfahren, wie im vorstehenden Paragraphe bei einem ebenen Dreiecke anwenden.

Denn denkt man sich in den Ecken **A, B, C, D** der gegebenen Pyramide vier gleiche Gewichte angebracht; so werden sich diese Gewichte auf der Linie **AG** im Gleichgewichte erhalten, weil das Eine derselben **A** in dieser Linie selbst liegt und die Linie durch den Schwerpunkt **G** der übrigen drei geht; der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser vier Gewichte liegt also in **AG**.

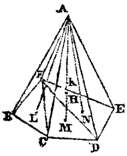
Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, daß der Schwerpunkt derselben vier Gewichte auch in der Linie **CH**, also im Durchschnittspunkte **K** der beiden Linien **AG** und **CH** liegen und daher mit dem Schwerpunkte der schweren Pyramide **ABCD** zusammenfallen müsse. Nach §. 24 hat man aber zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes für die vier in **A, B, C, D** angebrachten gleichen Gewichte

$$GK=\tfrac{1}{4}GA,$$

woraus folgt, daß der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide auf dem vierten Theile der Linie liegt, welche den Schwerpunkt irgend einer Seitenfläche mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet.

§. 27. Der Schwerpunkt einer Pyramide mit vielseitiger Grundfläche liegt in einer vertikalen Höhe gleich dem vierten Theile der ganzen Höhe der Pyramide über dieser Grundfläche.

Denn eine jede solcher Pyramiden, wie **ABCDEF**, kann

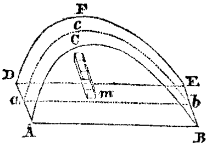



als aus lauter dreiseitigen Pyramiden **ABCF**, **ACDF** und **ADEF** zusammengesetzt gedacht werden, deren Schwerpunkte **G**, **H** und **K** in den Verbindungslinien **AL**, **AM** und **AN** der Schwerpunkte **L**, **M** und **N** ihrer Grundflächen mit der Spitze **A** liegen, so daß $LG = \frac{1}{4}LA$, $MH = \frac{1}{4}MA$ und $NK = \frac{1}{4}NA$ ist. Hieraus folgt, daß die Punkte **G**, **H** und **K** in einer zur Grundfläche der Pyramide parallelen Ebene liegen, deren vertikaler Abstand von dieser Grundfläche den vierten Theil der vertikalen Höhe der Pyramide beträgt. Wenn aber die Schwerpunkte **G**, **H** und **K** aller dreiseitigen Pyramiden, aus denen die ganze gegebene Pyramide besteht; in dieser Ebene liegen, so muß auch der Schwerpunkt der Letzteren in derselben, also in einem vertikalen Abstande gleich dem vierten Theile der vertikalen Höhe der Pyramide über deren Grundfläche oder in einer vertikalen Tiefe gleich drei Viertel der Höhe der Pyramide unter deren Spitze liegen.

Der vorstehende Satz behält Gültigkeit, welches auch die Anzahl der Seiten der polygonalen Grundfläche sein möge, und mithin auch, wenn diese Anzahl unendlich wird. Er gilt daher ebenfalls von einem Kegel mit kreisförmiger oder sonstiger Grundfläche, der als eine Pyramide mit polygonaler Basis von unendlicher Seitenzahl angesehen werden kann, und es ist dabei gleichgültig, ob der Kegel oder die Pyramide schief oder gerade sei.

§. 28. Wenn ein Körper eine prismatische Form hat und um eine gewisse Ebene symmetrisch ist; so kann sein ganzes Gewicht als in dieser Ebene vereinigt und gleichmäßig vertheilt angesehen werden.

Denn es sei **ACBEFD** ein solcher prismatischer Körper

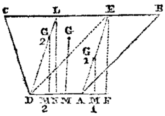



und *abc* eine Ebene, um welche er symmetrisch ist. Ist nun *m* ein körperliches Element von gleichförmiger Stärke, dessen Seiten mit den Seitenlinien **AD** oder **BE** des Prismas parallel sind und welches zwischen den Flächen **ABC** und **DEF** liegt; so wird dasselbe offenbar durch die Ebene *abc* halbirt und sein Schwerpunkt in diese Ebene fallen, so daß sein ganzes Gewicht als in dieser Ebene vereinigt gedacht werden kann. Da man Dies von einem jeden ähnlichen Elemente sagen kann und alle Elemente einander gleich sind; so folgt, daß das ganze Gewicht des prismatischen Körpers als in der Ebene *abc* vereinigt und über dieselbe gleichmäßig vertheilt angesehen werden kann.

In diesem Sinne allein kann man von dem Gewichte und dem Schwerpunkte einer Ebene sprechen, da eine Ebene, welche nur eine Oberfläche und keine Dicke hat, streng genommen, kein Gewicht und mithin auch keinen Schwerpunkt haben kann. Ebenso wird unter dem Schwerpunkte einer krummen Fläche der Schwerpunkt eines Körpers verstanden, von welchem die Gewichte aller seiner Theile als in der krummen Fläche vereinigt und über dieselbe gleichförmig vertheilt angesehen werden können. Es leuchtet ein, daß diese Bedingung näherungsweise erfüllt wird, wenn der Körper hohl und das Material, woraus er besteht, äußerst dünn ist. Man kann sich alsdann denken, daß sein ganzes Gewicht in einer Fläche vereinigt sei, welche von seinen beiden äußeren Oberflächen gleich weit absteht. In derselben Weise kann man sich vorstellen, daß das Gewicht eines gekrümmten Stabes von äußerst geringer gleichförmiger Stärke in einer krummen Linie, welche durch die Mittelpunkte seiner Querschnitte geht, vereinigt und gleichmäßig vertheilt sei; und unter diesem Vorbehalte wird es erlaubt sein, von dem Schwerpunkte einer Linie zu sprechen, obgleich eine solche weder Breite noch Dicke und mithin, streng genommen, kein Gewicht und keinen Schwerpunkt haben kann.

## §. 29. Schwerpunkt eines Paralleltrapezes.

AD und BC seien die parallelen Seiten des Trapezes; man bezeichne mit




$a$ die Länge der Seite AD, mit
$b$ die Länge der Seite BC und mit
$h$ den perpendikularen Abstand NL dieser beiden Seiten.

Zieht man DE parallel zu AB; so wird der Durchschnittspunkt $G_1$ der Diagonalen des Parallelogramms ABED der Schwerpunkt des Letzteren sein. Halbirt man CE in L, zieht DL und macht $DG_2 = \frac{2}{3}DL$; so ist $G_2$ der Schwerpunkt des Dreiecks DEC. Zieht man nun $G_1M_1$ und $G_2M_2$ perpendikular auf AD, so ist $G_1M_1 = \frac{1}{2}FE = \frac{1}{2}h$, und da $DG_2 = \frac{2}{3}DL$ ist, $G_2M_2 = \frac{2}{3}NL = \frac{2}{3}h$. Denkt man sich jetzt das Gewicht des ganzen Parallelogramms, welches durch die Größe seiner Fläche dargestellt wird, in $G_1$ und das Gewicht des ganzen Dreiecks, welches ebenfalls durch die Größe seiner Fläche dargestellt wird, in $G_2$ vereinigt, bezeichnet ferner den Schwerpunkt des ganzen Paralleltrapezes mit G und zieht GM perpendikular auf AD; so wird eine in G aufwärts wirkende Kraft, gleich dem Gewichte des Trapezes, welches durch die Größe seiner Fläche dargestellt wird, dem Systeme das Gleichgewicht halten, und man hat nach §. 17

$$\overline{MG}.\overline{ABCD} = \overline{M_1G_1}.\overline{ABED} + \overline{M_2G_2}.CED.$$

Es ist aber $ABCD = \frac{1}{2}h(a+b)$, $ABED = ha$, $CED = \frac{1}{2}h(b-a)$, $M_1G_1 = \frac{1}{2}h$, $M_2G_2 = \frac{2}{3}h$;
mithin hat man

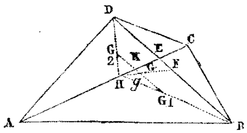
$$\overline{MG}.\tfrac{1}{2}h(a+b) = \tfrac{1}{2}h.ha + \tfrac{2}{3}h.\tfrac{1}{2}(b-a) \text{ oder}$$

$$\overline{MG}.(a+b) = ha + \tfrac{2}{3}h(b-a) = \tfrac{1}{3}h(a+2b), \text{ also}$$

$$MG = \tfrac{1}{3}h.\frac{a+2b}{a+b} \ldots (19)$$

## §. 30. Schwerpunkt irgend eines Vierecks.

Wenn ABCD das gegebene Viereck ist, so ziehe man die




Diagonalen **AC** und **BD**, welche sich in **E** schneiden. Von dem größeren der beiden Theile **BE** und **DE** irgend einer Diagonale **BD** schneide man ein Stück **BF** gleich dem kleineren Theile **DE** ab, halbire die andere Diagonale **AC** in **H**, ziehe **HF** und nehme $HG = \frac{1}{3}HF$; alsdann wird **G** der Schwerpunkt der ganzen Figur sein.

Denn wäre er es nicht; so sei $g$ der Schwerpunkt. Man ziehe **HB** und **HD**, mache $HG_1 = \frac{1}{3}HB$ und $HG_2 = \frac{1}{3}HD$; alsdann sind $G_1$ und $G_2$ die Schwerpunkte der Dreiecke **ABC** und **ADC** (§. 25). Denkt man sich diese Dreiecke in ihren Schwerpunkten $G_1$ und $G_2$ vereinigt, so leuchtet ein, daß der Schwerpunkt $g$ der ganzen Figur in der Verbindungslinie der Punkte $G_1, G_2$ liegt. Ist nun **K** der Durchschnitt dieser Linie mit **AC**; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente (§. 15), da eine in $g$ aufwärts wirkende Kraft gleich dem Gewichte der ganzen Figur mit den in $G_1$ und $G_2$ vereinigten Gewichten der beiden Dreiecke im Gleichgewichte sein muß,

$$\overline{Kg}.\overline{ABCD} = \overline{KG_1}.\overline{ABC} - \overline{KG_2}.\overline{ADC}.$$

Es ist aber $HG_1 = \frac{1}{3}HB$ und $HG_2 = \frac{1}{3}HD$, mithin ist $G_1G_2$ parallel zu $DB, KG_1 = \frac{1}{3}BE$ und $KG_2 = \frac{1}{3}DE$.

Bezeichnet man den Winkel $AED = BEC$ mit $\alpha$, so ist die Länge des von **B** auf **AC** gefällten Perpendikels $= \overline{BE}\sin\alpha$ und die des Perpendikels von **D** auf $AC = \overline{DE}.\sin\alpha$, also die Fläche des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{BE}\sin\alpha$ und die des Dreiecks $ADC = \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DE}\sin\alpha$, demnach die Fläche des Vierecks $ABCD = \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{BE}\sin\alpha + \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DE}\sin\alpha = \frac{1}{2}(BE+DE)\overline{AC}\sin\alpha$. Substituirt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung, so kommt

$$\overline{Kg}.\tfrac{1}{2}(BE+DE)\overline{AC}\sin\alpha = \tfrac{1}{3}\overline{BE}.\tfrac{1}{2}\overline{AC}.\overline{BE}\sin\alpha - \tfrac{1}{3}\overline{DE}.\tfrac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DE}\sin\alpha$$

oder

$$Kg.(BE+DE) = \tfrac{1}{3}(\overline{BE}^2 - \overline{DE}^2),$$

und hieraus folgt

$$Kg = \frac{1}{3}\,\frac{\overline{BE}^2 - \overline{DE}^2}{BE+DE} = \tfrac{1}{3}(BE-DE) = \tfrac{1}{3}(BE-BF) = \tfrac{1}{3}FE.$$

Da aber $HG = \frac{1}{3}HF$; so ist auch $KG = \frac{1}{3}FE$, und es muß sein $Kg = KG$, das heißt, der wahre Schwerpunkt $g$ des Vierecks fällt mit dem Punkte G zusammen.

§. 31. In den bisher angeführten Beispielen ist der Mittelpunkt des Druckes eines Systemes von Gewichten durch Methoden bestimmt, welche im Vergleich zu dem in §. 17 angegebenen direktenen und allgemein Verfahren indirekt zu nennen sind. Dieses Verfahren setzt übrigens voraus, daß die Summe der Momente der Gewichte aller einzelnen Elemente des Körpers in Beziehung zu drei gegebenen Ebenen bestimmt werde, wodurch man erst zu der vollständigen Kenntniß der Lage des Schwerpunktes gelangt. Bei einem stetigen Körper ist die Anzahl dieser Elemente aber unendlich groß, wobei ein jedes Element selbst unendlich klein ist; man sieht also, daß jenes Verfahren in diesem Falle die Summation einer unendlichen Menge unendlich kleiner Größen erfordert und daher eine Anwendung der Prinzipien der Integralrechnung nothwendig macht.

Stellt nun $\triangle M$ irgend ein sehr kleines Element des Volums M eines stetigen Körpers und $x$ dessen perpendikularen Abstand von einer gegebenen Ebene dar; so ist $\mu \triangle M$ das Gewicht dieses Elementes, wenn $\mu$ das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet, und $x\mu \triangle M$ das Moment dieses Gewichtes in Beziehung zu jener Ebene. $\mu \Sigma x \triangle M$ sei die Summe aller solcher Momente für sämmtliche Elemente, aus denen der Körper besteht, und $G_1$ der Abstand seines Schwerpunktes von der gegebenen Ebene; alsdann hat man nach §. 19, da $\mu M$ das Gewicht des ganzen Körpers darstellt,

$$G_1 . \mu M = \mu \Sigma x . \triangle M, \text{ also}$$

$$G_1 = \frac{\mu \Sigma x . \triangle M}{\mu M} = \frac{\Sigma x . \triangle M}{M} \quad \ldots . (20)$$

Nun wird in der Integralrechnung bewiesen, daß eine Summe, wie die durch $\Sigma x \triangle M$ dargestellte, deren Glieder unendlich viel an der Zahl sind und die Produkte von einer endlichen Größe $x$ in eine unendlich kleine Größe $\triangle M$ bilden, wobei M eine Funktion von $x$ ist, dem bestimmten Integrale $\int_{x_2}^{x_1} x dM$ gleich kommt, worin $x_1$ und $x_2$ die äußersten Gränzwerthe von $x$, zwischen welchen das Integral zu nehmen ist, bezeichnen. Demnach hat man allgemein

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{\int_{x_2}^{x_1} x\,d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}, \\ \text{und auf ähnliche Weise } G_2 &= \frac{\int_{y_2}^{y_1} y\,d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}, \\ G_3 &= \frac{\int_{z_2}^{z_1} z\,d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (21)$$

In den beiden letzteren Gleichungen stellen $y$ und $z$ resp. die Abstände des Elementes $\triangle \mathrm{M}$ von zwei anderen gegebenen Ebenen und $G_2$ und $G_3$ die Abstände des Schwerpunktes des ganzen Körpers von denselben Ebenen dar. Sind hiernach die Abstände $G_1, G_2, G_3$ des Schwerpunktes von drei verschiedenen Ebenen bekannt; so ist dadurch die Lage dieses Punktes im Raume vollkommen bestimmt. Jene drei Ebenen werden gewöhnlich perpendikular aufeinander angenommen und heißen alsdann rechtwinklige Koordinatenebenen, sowie ihre gemeinschaftlichen Durchschnittslinien rechtwinklige Koordinatenaxen genannt werden.

Weiß man, daß der Schwerpunkt des Körpers in einer gewissen Ebene liege, und nimmt an, daß Eine der eben erwähn- Koordinatenebenen, z. B. die, von welcher der Abstand $G_3$ gemessen ist, mit der Ebene zusammenfalle, von der man weiß, daß sie den Schwerpunkt enthalte; so wird $G_3 = o$ und die Lage des Schwerpunktes ist durch die ersten beiden Gleichungen allein bestimmt. Dieser Fall tritt ein, wenn der Körper um irgend eine Ebene *symmetrisch* ist, wo denn sein Schwerpunkt offenbar in dieser Ebene liegt. Weiß man, daß der Schwerpunkt des Körpers in einer gewissen *geraden Linie* liege, und nimmt an, daß sich zwei der obigen Koordinatenebenen, z. B. die, von welchen die Abstände $G_2$ und $G_3$ gemessen sind, in jener Linie durchschneiden; so wird der Schwerpunkt gleichzeitig in diesen beiden Ebenen liegen und man hat $G_2 = o$ und $G_3 = o$, so daß die Lage des Schwerpunktes durch die erste der vorstehenden Gleichungen allein bestimmt ist. Dieser Fall ereignet sich, wenn der Körper um eine gegebene Linie symmetrisch ist; sein Schwerpunkt liegt alsdann nothwendig in dieser Linie.

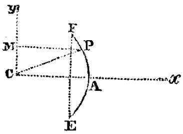
## §. 32. Schwerpunkt einer krummen Linie, welche ganz in Einer Ebene liegt.

M stellt hier die Länge S einer solchen Linie dar, und man hat nach den Gleichungen (21)

$$G_1 = \frac{\int x\,dS}{S},\ G_2 = \frac{\int y\,dS}{S} \ldots (22)$$

**Beispiel.** — Der Schwerpunkt eines Kreisbogens EF soll bestimmt werden.

Der Schwerpunkt eines solchen Bogens liegt offenbar in dem Halbmesser CA, welcher den Letzteren halbirt, da derselbe um diesen Halbmesser symmetrisch ist. Nimmt man nun die durch den Mittelpunkt gehende Axe $Cy$ perpendikular zu dem Halbmesser CA und bezeichnet mit




$x$ den Abstand PM irgend eines Punktes B des gegebenen Bogens von dieser Axe, mit

$s$ die Länge des Bogens AP, mit

S die Länge des ganzen Bogens EAF, mit

$a$ den Halbmesser CA und mit

C die Sehne EF;

so hat man

$$x = \text{PM} = \overline{\text{CP}}.\cos\text{CPM} = \overline{\text{CP}}.\cos\text{ACP} = a\cos\frac{s}{a},$$

und demnach

$$\int x dS = a\int_{-\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}S} \cos\frac{s}{a}.ds = a^2\int_{-\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}S} \cos\frac{s}{a}d.\left(\frac{s}{a}\right) = a^2\left[\sin\left(\frac{\frac{1}{2}S}{a}\right) - \sin\left(\frac{-\frac{1}{2}S}{a}\right)\right]$$

$$= 2a^2 \sin\frac{\frac{1}{2}S}{a},$$

indem das Integral zwischen den Gränzen $\frac{1}{2}$S und $-\frac{1}{2}$S genommen wird, da Dies die Werthe von $s$ sind, welche den äußersten Punkten F und E des Bogens entsprechen.

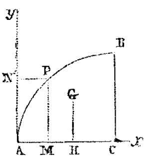
Nun ist $2a\sin\frac{\frac{1}{2}S}{a}=C$, also $\int x\,dS=aC$, und mithin

$$G_1=\frac{aC}{S}\ldots\ldots(23)$$

Der Abstand des Schwerpunktes eines Kreisbogens vom Mittelpunkte des Kreises ist also die vierte geometrische Proportionale zwischen der Länge des Bogens, der Länge der Sehne und dem Halbmesser des Kreises.

### §. 33. Schwerpunkt einer krummlinigen Fläche, welche ganz in Einer Ebene liegt.

Wenn **BAC** eine solche Fläche ist, so stellen $x$ und $y$ die




perpendikularen Abstände **PN** und **PM** irgend eines Punktes **P** der Kurve **AB** von den rechtwinkligen Koordinatenaxen **A**$y$ und **A**$x$ dar und **M** die Fläche **PAM**. Denkt man sich nun diese Fläche aus sehr schmalen Rechtecken zusammengesetzt, welche sämmtlich parallel zu **PM** sind und die Breite $\triangle x$ haben; so ist der Inhalt eines jeden solchen Flächenelementes $\triangle M=y\triangle x$, sein Gewicht $=\mu y\triangle x$ und sein Moment in Beziehung zur Axe **A**$y$ gleich $\mu xy\triangle x$. Die Gleichung (20) ergibt also

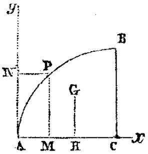
$$G_1=\frac{\mu\Sigma xy\triangle x}{\mu M}=\frac{\int_{x_2}^{x_1} xy\,dx}{M}\ldots\ldots(24)$$

Ein ähnlicher Ausdruck bestimmt den Werth von $G_2$; man erhält jedoch einen für die Rechnung bequemeren Ausdruck, wenn man sich das Gewicht eines jeden Flächenelementes, dessen Länge $y$ ist, in seinem Schwerpunkte vereinigt denkt, welcher von der Axe **A**$x$ um $\frac{1}{2}y$ absteht. Das Moment des Gewichtes eines jeden solchen rechtwinkligen Flächenelementes in Beziehung zur Axe **A**$x$ ist alsdann durch $\frac{1}{2}\mu y^2\triangle x$ dargestellt, und man hat

$$G_2=\frac{\frac{1}{2}\mu\Sigma y^2\triangle x}{\mu M}=\frac{1}{2}\,\frac{\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx}{M}\ldots\ldots(25)$$

**Beispiel.** — Angenommen, die Kurve **APB** sei eine Parabel, deren Axe **A**$x$ ist.

Nach der Gleichung für die Parabel ist $y^2 = 4ax$, wenn $a$




den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel bezeichnet. Ferner sind die Gränzen, zwischen welchen das Integral zu nehmen ist, $o$ und $x_1$ für $x$ und $o$ und $y_1$ für $y$, weil man bei A $x = o, y = o$ und bei C $x = x_1, y = y_1$ hat. Hieraus ergibt sich

$$\int_{x_2}^{x_1} xy\,dx = 2\sqrt{a}\int_0^{x_1} x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}\sqrt{a}\,.\,x_1^{\frac{5}{2}},$$

und $$\mathrm{M} = \int_0^{x_1} y\,dx = 2a\int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{3}\sqrt{a}\,.\,x_1^{\frac{3}{2}};$$ mithin

$$\mathrm{G}_1 = \frac{3}{5}x_1.$$

Ferner hat man $$\int_{x_2}^{x_1} y^2 dx = 4a\int_0^{x_1} x\,dx = 2ax_1^2 = \frac{y_1^4}{8a}$$

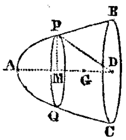
und $$\mathrm{M} = 4\sqrt{a}\,.\,x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{y_1^3}{6a};$$ mithin

$$\mathrm{G}_2 = \frac{3}{8}y_1.$$

Ist also G der Schwerpunkt der parabolischen Fläche **ABC**; so ist $\mathbf{AH} = \frac{3}{5}\mathbf{AC}$ und $\mathbf{HG} = \frac{3}{8}\mathbf{CB}$.

## §. 34. Schwerpunkt einer Umwälzungsfläche.

Irgend eine Umwälzungsfläche **BAC** ist offenbar um ihre




Axe **AD** symmetrisch; ihr Schwerpunkt liegt demnach in dieser Axe. Mißt man die Momente von einer Ebene, welche durch **A** geht und auf der Axe **AD** perpendikular steht; so sei

$x$ die Abszisse, $y$ die Ordinate } des Punktes **P** der erzeugenden Kurve **APB**

$s$ die Länge des Kurvenbogens **AP**.

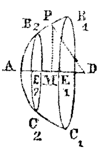
Denkt man sich die gegebene Fläche durch parallele Ebenen, wie

PQ, in unendlich schmale Streifen getheilt; so ist der mittlere Umfang eines solchen Streifens $=2\pi y$, seine Breite $=\triangle s$, mithin seine Oberfläche $\triangle M = 2\pi y \triangle s$ und sein Moment $=2\pi\mu x y \triangle s$. Hieraus folgt

$$G_1 = \frac{2\pi \Sigma x y \triangle s}{M} = \frac{2\pi \int^{S_2} x y d s}{M} \; \ldots . (26)$$

**Beispiel.** — Es soll der Schwerpunkt der krummen Oberfläche einer Kugelzone oder eines Kugelabschnittes bestimmt werden.

$B_1AC_1$ sei die Oberfläche eines Kugelabschnittes, dessen Mittelpunkt D und dessen Halbmesser $a$ ist. Rechnet man die




Abszissen $DM=x$ vom Mittelpunkte D aus und bezeichnet den Kurvenbogen AP mit $s$; so hat man $x = DM = DP.\cos PDM = a\cos\frac{s}{a}$, $y = PM = DP.\sin PDM = a\sin\frac{s}{a}$, also $2xy = 2a^2\sin\frac{s}{a}.\cos\frac{s}{a} = a^2\sin\frac{2s}{a}$;

mithin

$$2\pi\int_{S_2}^{S_1} xyds = \pi a^2 \int_{S_2}^{S_1} \sin\frac{2s}{a}.ds = \tfrac{1}{2}\pi a^3 \left[\cos\left(\frac{2S_2}{a}\right) - \cos\left(\frac{2S_1}{a}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi a^3 \left[\left(1+\cos\frac{2S_2}{a}\right) - \left(1+\cos\frac{2S_1}{a}\right)\right]$$

$$= \pi a^3 \left[\cos^2\left(\frac{S_2}{a}\right) - \cos^2\left(\frac{S_1}{a}\right)\right] \; \ldots . (27)$$

worin $S_1$ und $S_2$ die Werthe von $s$ in den Endpunkten $B_1$ und $B_2$ der Zone bezeichnen.

Ferner hat man $dM = 2\pi y d s$, also

$$M = 2\pi\int_{S_2}^{S_1} y d s = 2\pi a \int_{S_2}^{S_1} \sin\frac{s}{a}.ds = 2\pi a^2 \left[\cos\frac{S_2}{a} - \cos\frac{S_1}{a}\right].$$

Hieraus folgt

$$G_1 = \tfrac{1}{2} a \left[ \cos\frac{S_2}{a} - \cos\frac{S_1}{a} \right]$$

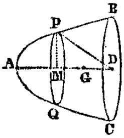
$$= \tfrac{1}{2} \left[ \overline{DE_2} + \overline{DE_1} \right] = DE, \ldots (28)$$

wenn E der Halbirungspunkt der Linie $E_1 E_2$ ist. Wenn $S_2 = o$ ist, oder wenn die Zone bei A anfängt und einen Kugelabschnitt bildet; so wird

$$G_1 = \tfrac{1}{2} a \left[ 1 + \cos\frac{S_1}{a} \right] = a \cos^2\left(\frac{S_1}{2a}\right) \ldots (29)$$

## §. 35. Schwerpunkt eines Umwälzungskörpers.

Irgend ein Umwälzungskörper BAC ist offenbar um seine



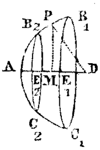

Axe AD symmetrisch; sein Schwerpunkt liegt also in dieser Linie, und wenn man für die Ebene, von welcher aus die Momente gemessen werden sollen, eine durch A gehende und auf der Axe AD perpendikular stehende annimmt; so hat man nur den Abstand AG des Schwerpunktes von dieser Ebene zu bestimmen.

Bezeichnen nun $x$ und $y$ die Koordinaten irgend eines Punktes P in der erzeugenden Kurve, M das Volum des Theiles PAQ, und denkt man sich den Körper in sehr schmale, zu PQ parallele zylindrische Schichten von der Dicke $\triangle x$ zerlegt; so wird das Volum einer jeden solchen Schicht durch $\pi y^2 \triangle x$ und ihr Moment durch $\pi \mu x y^2 \triangle x$ dargestellt. Demnach hat man

$$G_1 = \frac{\pi \Sigma y^2 \triangle x}{M} = \frac{\pi \int_{x_2}^{x_1} x y^2 \, dx}{M} \ldots (30)$$

**Beispiel.** — Es soll der Schwerpunkt eines Kugelabschnittes bestimmt werden.

$B_1 A C_1$ stelle irgend einen solchen Abschnitt einer Kugel dar,




deren Mittelpunkt D und deren Halbmesser $a$ ist. $x$ und $y$ seien die Koordinaten AM und MP des Punktes P, wobei die Abszissen $x$ von A aus gerechnet werden; alsdann hat man vermöge der Gleichung für den Kreis $y^2 = 2ax - x^2$ und daher

$$\pi\int_{x_2}^{x_1} x y^2\, dx = \pi\int_0^{x_1} x(2ax - x^2)\,dx \doteq \pi\left(\tfrac{2}{3}ax_1^3 - \tfrac{1}{4}x_1^4\right),$$

ferner $M = \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\, dx = \pi\int_0^{x_1} (2ax - x^2)\,dx = \pi\left(ax_1^2 - \tfrac{1}{3}x_1^3\right)$;

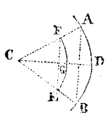
also

$$G_1 = \frac{\tfrac{2}{3}ax_1 - \tfrac{1}{4}x_1^2}{a - \tfrac{1}{3}x_1} = \tfrac{1}{4}x_1\left(\frac{8a - 3x_1}{3a - x_1}\right) \ldots . (31)$$

Wird der Abschnitt eine Halbkugel, also $x_1 = a$; so hat man

$$G_1 = \frac{5}{8}a.$$

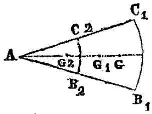
§. 36. Es soll der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes bestimmt werden.




Wenn CAB der gegebene Kreisausschnitt ist, so denke man sich den Bogen ADB als ein Polygon von unendlich vielen Seiten. Zöge man von allen Ecken dieses Polygons Radien nach dem Mittelpunkte C; so würde dadurch der Ausschnitt in ebenso viel Dreiecke zerlegt. Der Schwerpunkt eines jeden solchen Dreiecks liegt in einem Abstande gleich $\frac{2}{3}$ des Halbmessers vom Mittelpunkte C, so daß die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke in einem Kreisbogen FE liegen, dessen Mittelpunkt C und dessen Halbmesser CF gleich $\frac{2}{3}$CA ist; ferner kann man sich vorstellen, daß die Gewichte dieser Dreiecke in dem Bogen FE vereinigt und gleichmäßig über denselben vertheilt seien, so daß der Schwerpunkt G des ganzen Ausschnittes CAB auch der Schwerpunkt des Bogens FE ist. Stellen daher $S', C', a'$ resp. den Bogen FE, die Sehne $\overline{FE}$, und den Halbmesser CF dar; so hat man nach Gleichung (23) $CG = \frac{a'C'}{S'}$. Da aber die Bögen AB und FE ähnlich sind, und $a' = \frac{2}{3}a$ ist; so hat man auch $C' = \frac{2}{3}C$ und $S' = \frac{2}{3}S$. Substituirt man diese Werthe in die letztere Gleichung, so ergibt sich

$$CG = \tfrac{2}{3}\frac{aC}{S} \ldots . (32)$$

§. 37. Es soll der Schwerpunkt von einem Theile eines konzentrischen Ringes oder eines überall gleich starken Gewölbbogens bestimmt werden.




Wenn $B_1 C_1 C_2 B_2$ einen solchen Theil eines um A konzentrischen Ringes dargestellt, so sei

$a_1$ der Halbmesser, $C_1$ die Sehne, $S_1$ die Länge } des Bogens $B_1 C_1$,

$a_2$ der Halbmesser, $C_2$ die Sehne, $S_2$ die Länge } des Bogens $B_2 C_2$.

Ist nun $G_1$ der Schwerpunkt des Ausschnittes $AB_1 C_1$, $G_2$ der des Ausschnittes $AB_2 C_2$ und G der des gegebenen Ringes; so hat man

$$\overline{AG_2} \, . \, \overline{AB_2 C_2} + \overline{AG} \, . \, \overline{B_1 C_1 B_2 C_2} = \overline{AG_1} \, . \, \overline{AB_1 C_1}.$$

Nach Gleichung (32) ist aber $AG_1 = \frac{2}{3} \frac{a_1 C_1}{S_1}$, $AG_2 = \frac{2}{3} \frac{a_2 C_2}{S_2}$,

ferner ist die Fläche des Ausschnittes $AB_1 C_1 = \frac{1}{2} S_1 a_1$, die des Ausschnittes $AB_2 C_2 = \frac{1}{2} S_2 a_2$ und die des Ringes $B_1 C_1 B_2 C_2 = AB_1 C_1 - AB_2 C_2 = \frac{1}{2} S_1 a_1 - \frac{1}{2} S_2 a_2$; folglich hat man

$$\frac{2}{3} \frac{a_2 C_2}{S_2} \, . \, \frac{1}{2} S_2 a_2 + \overline{AG} \, . \, \frac{1}{2} (S_1 a_1 - S_2 a_2) = \frac{2}{3} \frac{a_1 C_1}{S_1} \, . \, \frac{1}{2} S_1 a_1,$$

oder

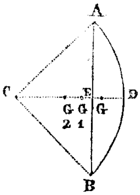
$$AG (S_1 a_1 - S_2 a_2) = \frac{2}{3} (C_1 a_1{}^2 - C_2 a_2{}^2),$$

und demnach

$$AG = \frac{2}{3} \frac{C_1 a_1{}^2 - C_1 a_2{}^2}{S_1 a_1 - S_2 a_2} \dots (33)$$

§. 37. a. Es soll der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes bestimmt werden.

Ist ABD der gegebene Kreisabschnitt und C der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises; so liegt der Schwerpunkt G des




Ersteren offenbar in der Halbirungslinie **CD** des Winkels **ACB**. Ist nun

$a$ der Halbmesser des Kreises,
**C** die Sehne **AB**,
**S** die Länge des Bogens **ADB**, und
$b$ die Linie **CE**;

so hat man, wenn $G_1$ den Schwerpunkt des Kreisausschnittes **ACBD**, $G_2$ den des Dreiecks **ACB** und **G** den des gegebenen Abschnittes **ABD** bezeichnet,

$$\overline{CG_2}\,.\,\triangle\,\overline{ACB}+\overline{CG}\,.\,\overline{ABD}=\overline{CG_1}\,.\,\overline{ACBD}.$$

Es ist aber $CG_1=\frac{2}{3}\frac{aC}{S}$ [Gleichung (32)] und $CG_2=\frac{2}{3}b$, ferner Ausschnitt $ACBD=\frac{1}{2}Sa$, Dreieck $ACB=\frac{1}{2}bC$ und Abschnitt $ABD=ACBD-ACB=\frac{1}{2}Sa-\frac{1}{2}bC$; mithin

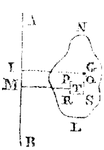
$$\tfrac{2}{3}b\,.\,\tfrac{1}{2}bC+\overline{CG}\,.\,\tfrac{1}{2}(Sa-bC)=\tfrac{2}{3}\frac{aC}{S}\,.\,\tfrac{1}{2}Sa \text{ oder}$$

$$\overline{CG}(Sa-bC)=\tfrac{2}{3}C(a^2-b^2)=\tfrac{2}{3}C.(\tfrac{1}{2}C)^2=\tfrac{1}{6}C^3,$$

folglich

$$CG=\tfrac{1}{6}\cdot\frac{C^3}{Sa-bC}\ldots(33\,a)$$

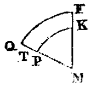
## §. 38 Die Guldinschen Regeln.




Wenn **NL** irgend eine ebene Fläche und **AB** eine beliebige Axe in derselben Ebene darstellt, um welche sich die Fläche drehet, so daß **NL** bei dieser Drehung einen Umwälzungskörper erzeugt; so ist das Volum dieses Körpers gleich dem eines Prismas, dessen Grundfläche **NL** und dessen Höhe gleich der Länge des Weges ist, welchen der Schwerpunkt **G** der Fläche **NL** beschreibt.

Denn nimmt man in **NL** irgend eine rechtwinklige Fläche **PRSQ** an, deren Seiten respektive parallel und perpendikular zu **AB** sind, und ist **MT** der mittlere Abstand der Punkte **P** und **Q** oder **R** und **S** von **AB**; so leuchtet ein, daß die Linie **PQ** bei der Umdrehung von **NL** um **AB** einen konzentrischen Ring beschreiben wird.

Stellt man diesen Ring durch **QFPK** und dessen Mittelpunkt durch **M** dar, und bezeichnet den Bogen, welcher dem Winkel **QMF** in einem Kreise von dem Halbmesser 1 entspricht mit $\vartheta$; so ist die Fläche **FQPK** gleich dem Ausschnitte **FQM**, weniger dem Ausschnitte **KPM**, also $= \frac{1}{2}\overline{MQ}^2 . \vartheta - \frac{1}{2}\overline{MP}^2 . \vartheta = \frac{1}{2}\vartheta(\overline{MQ}^2 - \overline{MP}^2) = \vartheta \left(\frac{MQ + MP}{2}\right)(MQ - MP) = \vartheta . \overline{MT} . \overline{PQ}$.




Nun ist der durch **PRSQ** erzeugte körperliche Ring offenbar gleich der durch **PQ** erzeugten Ringfläche, multiplizirt mit dem Abstande **PR**, also gleich $\vartheta . \overline{MT} . \overline{PQ} . \overline{PR}$ oder $= \vartheta . \overline{MT} . \overline{PRSQ}$.

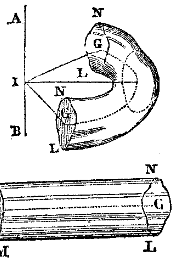
Nimmt man die Fläche **PRSQ** unendlich klein an und denkt sich die ganze Fläche **NL** in lauter solche sehr kleine Rechtecke zerlegt, bezeichnet dieselben alsdann mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und ihre mittleren Abstände **MT** mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$; so werden die von diesen Flächen erzeugten körperlichen Ringe durch $\vartheta x_1 a_1, \vartheta x_2 a_2, \vartheta x_3 a_3, \ldots$ und die Summe aller dieser Ringe oder der ganze erzeugte Körper durch $\vartheta(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots)$ dargestellt sein. Denkt man sich aber die Fläche **NL** als schwer und bezeichnet mit $\mu$ das Gewicht einer Flächeneinheit der Figur **NL**; so ist $x_1 a_1 \mu$ das Moment des Gewichtes von $a_1$ in Beziehung zur Axe **AB**, $x_2 a_2 \mu$ das von $a_2$ in Beziehung zu derselben Axe **AB**, und sofort; mithin $(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots)\mu$ das Moment der ganzen Fläche **NL** in Beziehung zu **AB**. Ist nun **G** der Schwerpunkt von **NL** und **GI** dessen Abstand von **AB**, so ist das Moment von **NL** in Beziehung zu **AB** auch gleich $\overline{GI} . \overline{NL}\mu$ und man hat

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots)\mu = \overline{GI} . \overline{NL}\mu \text{ oder}$$

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots) = \overline{GI} . \overline{NL} \text{ und daher}$$

$$\vartheta(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots) = \vartheta . \overline{GI} . \overline{NL}.$$

$\vartheta(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots)$ war aber der Ausdruck für das Volum des erzeugten Körpers; mithin ist dieses Volum auch gleich $\vartheta . \overline{GI} . \overline{NL}$. Hierin stellt $\vartheta . \overline{GI}$ die Länge des vom Punkte **G** beschriebenen Weges dar, und es folgt, daß das Volum




des Umwälzungskörpers erhalten wird, wenn man die Fläche **NL** mit der Länge des von ihrem Schwerpunkte **G** beschriebenen Weges multiplizirt, oder daß dasselbe gleich dem eines Prismas **NM** ist, welches **NL** zur Grundfläche und den vom Punkte **G** beschriebenen Weg **GH** zur Höhe hat. In diesem Satze besteht die **erste Guldinsche Regel.**

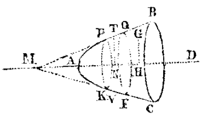
§. 39. Der vorstehende Lehrsatz kann auf die Ermittelung des körperlichen Inhaltes eines Schraubenganges angewendet werden; denn es leuchtet ein, daß ein Schraubengang durch Ebenen, welche durch die Axe der Schraube gehen, in eine unendliche Anzahl sehr schmaler Umwälzungskörper zerlegt werden kann, welche alle schräg übereinander gelagert sind, wie die Stufen einer Wendeltreppe. Dies wird noch deutlicher, wenn man sich denkt, daß alle diese kleinen Körper parallel mit der Axe auf der Schraubenspindel heruntergleiten, bis ihre oberen Flächen sämmtlich in Einer Ebene liegen, in welchem Falle sie wirklich einen ganzen Umwälzungskörper von demselben Volum, wie der gegebene Schraubengang, bilden.

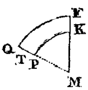
Der in Rede stehende Satz ist ferner auf die Volumbestimmung irgend eines Körpers anwendbar, wenn man denselben durch die Bewegung einer gegebenen ebenen Figur perpendikular zu einer gegebenen Kurve, welche fortwährend durch denselben Punkt der Figur geht, erzeugen kann. Denn welches Element der Kurve auch die Figur in irgend

einem Augenblicke durchlaufen mag, man kann sich immer denken, sie drehe sich um eine gewisse feste Axe, welche durch den Krümmungsmittelpunkt der Kurve in jenem Punkte geht, und indem sie sich so um eine feste Axe drehet, erzeugt sie für einen Augenblick einen elementaren Umwälzungskörper um diese Axe, dessen Volum gleich dem Produkte der ebenen Figur in die Länge des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen sehr kleinen Weges ist. Da dies nun von einem jeden solchen elementaren Umwälzungskörper gilt; so folgt auch für den ganzen Körper, daß sein Vozum gleich dem Produkte der ebenen Figur in die ganze Länge des von ihrem Schwerpunkte durchlaufenen Weges sei.

§. 40. Wenn **AB** irgend eine Kurve darstellt, welche sich um die Axe **AD** drehet und hierdurch die Umwälzungsfläche **BAC** erzeugt, und **G** ist der Schwerpunkt dieser Kurve; so ist die Größe der erzeugten Fläche gleich dem Produkte aus der Länge der Kurve **AB** und der Länge des von dem Punkte **G** während der Drehung um **AD** beschriebenen Weges.

**PQ** sei irgend ein Element der erzeugenden Kurve und **PQFK** eine von diesem Elemente erzeugte Zone der Umwälzungsfläche; alsdann kann diese Zone als ein Theil einer Kegeloberfläche angesehen werden, deren Spitze der Punkt **M** ist, in welchem sich die Tangenten **TM** und **VM** an den Halbirungspunkten **T** und **V** der Kurvenelemente **PQ** und **FK** schneiden. Wird dieser Streifen **PQFK** des Kegels **QMF** in einer Ebene ausgebreitet und ist **PQFK** seine Entwickelung; so wird die letztere offenbar einen konzentrischen Ring bilden, dessen Mittelpunkt **M** ist, da die Entwickelung des ganzen Kegels einen Kreisausschnitt **MQF** bildet, dessen Mittelpunkt **M** der Spitze des Kegels und dessen Halbmesser **MQ** der Seite **MQ** des Kegels entspricht.




Wie nun schon bei dem vorhergehenden Satze gezeigt ist, so wird die Fläche dieses Ringes, und mithin auch die Fläche der Kegelzone durch $\vartheta.\overline{\mathbf{MT}}.\overline{\mathbf{PQ}}$ dargestellt, worin $\vartheta$ den Bogen für den Winkel **QMF** in einem Kreise von dem Halbmesser 1 bezeichnet. Der Bogen, dessen Halbmesser **MT** ist, wird durch $\vartheta.\mathbf{MT}$ dargestellt; vor der Entwickelung bildete dieser Bogen aber einen vollen Kreis, dessen Halbmesser **NT** und dessen Umfang mithin $2\pi\overline{\mathbf{NT}}$ war; demnach hat man, da der Kreis bei der Entwickelung seine Länge nicht geändert hat,

$$\vartheta.\overline{\mathbf{MT}}=2\pi\overline{\mathbf{NT}}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\vartheta\overline{\mathbf{MT}}$ in den Ausdruck für die Fläche der Zone; so erhält man

$$PQFK = 2\pi . \overline{NT} . \overline{PQ}.$$

Denkt man sich die ganze Umwälzungsfläche in eine unendliche Menge solcher elementaren Zonen zerlegt und bezeichnet die Längen der entsprechenden Elemente der Kurve **AB** mit $s_1, s_2, s_3, \ldots$ und die zugehörigen Werthe von **NT** mit $y_1, y_2, y_3, \ldots$; so werden die Flächen der korrespondirenden Zonen durch $2\pi y_1 s_1$, $2\pi y_2 s_2, 2\pi y_3 s_3, \ldots$ und die Größe der ganzen Umwälzungsfläche **BAC** durch $2\pi(y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 + \ldots)$ dargestellt.

Da aber **G** der Schwerpunkt der Kurve **AB** ist; so stellt $\overline{AB} . \overline{GH}\mu$ das Moment des Gewichtes einer Ruthe von der Form **AB** in Beziehung zu **AD** dar, wobei $\mu$ das Gewicht einer jeden Längeneinheit der Linie bezeichnet; ferner ist dieses Moment gleich der Summe der Momente der Gewichte $s_1\mu, s_2\mu, s_3\mu, \ldots$ der Kurvenelemente, also

$$\overline{AB} . \overline{GH}\mu = (y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 + \ldots)\mu \text{ und}$$
$$\overline{AB} . \overline{GH} = y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 + \ldots;$$

daher denn auch wegen des vorhergehenden Ausdruckes

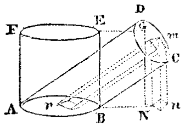
$$\text{Fläche } BAC = 2\pi\overline{AB} . \overline{GH} = \overline{AB} . 2\pi\overline{GH},$$

worin $2\pi\overline{GH}$ gleich der Länge des Weges ist, welchen der Schwerpunkt **G** der Kurve **AB** bei seiner Umdrehung um **AD** beschrieben hat.

Dieser Satz bildet die zweite **Guldinsche Regel**; derselbe ist, ebenso wie der vorhergehende, nicht allein für eine Umwälzungsfläche, sondern auch für irgend eine andere Fläche gültig, welche durch eine ebene Kurve erzeugt wird, die sich perpendikular zu einer anderen Kurve von beliebiger Form fortbewegt und dabei von der letzteren stets in demselben Punkte durchschnitten wird. Es erhellet in der That, daß hierfür derselbe Beweis, wie für den früheren Satz geführt werden kann. Uebrigens muß dabei noch bemerkt werden, daß keiner von den vorstehenden beiden Sätzen angewendet werden kann, wenn die Bewegung der erzeugenden Ebene von der Art ist, daß sich zwei aufeinander folgende Lagen gegenseitig schneiden oder durchkreuzen.

§. 41. Das Volum irgend eines abgestumpften prismatischen oder zylindrischen Körpers **ABCD**, von welchem die Eine Grundfläche **CD** auf den Seitenlinien perpendikular steht und die andere **AB** sich gegen dieselben neigt, ist gleich dem Inhalte eines geraden Prismas **ABEF**, dessen Grundfläche **AB** und dessen Höhe der perpendikulare Abstand **GN** des Schwerpunktes **G** der Fläche **DC** von der Ebene **AB** ist.

Denn wenn $\iota$ den Neigungswinkel der Ebene **DC** gegen **AB** und $m$ ein sehr kleines Element der Fläche **DC** darstellt, und man betrachtet ein Prismen $mr$, dessen Basis $m$ ist und dessen Seiten zu **AD** und **BC** parallel sind, so daß man den ganzen Körper **ABCD** in lauter solche unendlich schmale Prismen zerlegen kann; so ist das Volum dieses elementaren Prismas von der Höhe $mr$ und Grundfläche $m$ gleich $\overline{mr}.m$, oder da $\overline{mn} = \overline{mr}.\sin mrn = \overline{mr}.\cos\iota$, also $\overline{mr} = \frac{\overline{mn}}{\cos\iota}$ ist, gleich $\frac{\overline{mn}.m}{\mathrm{ocs}\,\iota}$.




Der ganze Körper ist demnach gleich der Summe aller dieser Produkte, wie $\overline{mn}.m$, dividirt durch $\cos\iota$. Stellt man diese Summe also durch $\Sigma\overline{mn}.m$ dar; so ist das Volum des ganzen Körpers $= \frac{\Sigma\overline{mn}.m}{\cos\iota}$.

Sieht man nun **CD** wie eine Scheibe von sehr geringer gleichförmiger Stärke an, von welcher die Flächeneinheit das Gewicht $\mu$ besitzt; so wird das Gewicht des Elementes $m$ durch $\mu m$ und sein Moment in Beziehung zu der Ebene **ABN** durch $\mu.\overline{mn}.m$ dargestellt, und $\mu\Sigma\overline{mn}.m$ wird die Summe der Momente aller Elemente der Scheibe **CD** in Beziehung zu jener Ebene sein. Nach §. 15 muß diese Summe gleich dem Momente des ganzen Gewichtes $\mu.\overline{CD}$ der Scheibe **CD** sein, welches in **G** vereinigt gedacht werden kann, und man hat daher

$$\mu.\overline{CD}.\overline{NG} = \mu\Sigma\overline{mn}.m \text{ oder}$$

$$\overline{CD}.\overline{NG} = \Sigma\overline{mn}.m.$$

Substituirt man diesen Werth von $\Sigma\overline{mn}.n$ in den obigen Ausdruck für den Inhalt des Körpers; so ergibt sich

$$\text{Volum des Körpers} = \frac{\overline{CD} \,.\, \overline{NG}}{\cos\iota}.$$

CD ist aber die Projektion von AB, und daher $\overline{CD} = \overline{AB}\,.\cos\iota$ oder $\frac{\overline{CD}}{\cos\iota} = \overline{AB}$, woraus endlich

Volum des Körpers ABCD $= \overline{AB}.\overline{NG} =$ Volum des Prismas ABEF folgt.

---

# Zusätze zum ersten Abschnitte.

Die vorstehenden Sätze sind zum Verständnisse und zur Entwickelung der nachfolgenden Untersuchungen vollkommen ausreichend. Um jedoch einen vollständigen Begriff von dem Zustande des Gleichgewichtes mehrerer Kräfte an irgend einem Systeme zu geben, so verdienen noch folgende Sätze angeführt zu werden.

## Von den Kräftepaaren.

1. Erklärung eines Kräftepaares. Wenn in Ein und derselben Ebene mehrere Kräfte gegeben sind; so hat man durch §. 11 gesehen, daß wenn alle diese Kräfte P parallel zu zwei rechtwinkligen Koordinatenaxen A$x$ und A$y$ in $P\cos\alpha$ und $P\sin\alpha$ zerlegt werden, und wenn $m'P$ das Moment irgend einer derselben in Beziehung zu einem beliebigen Punkte A bezeichnet, man zur Bestimmung der Resultante R aller gegebenen Kräfte die Gleichungen

$$R^2 = (\Sigma P\sin\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\alpha)^2,$$

$$\tang\vartheta = \frac{\Sigma P\sin\alpha}{\Sigma P\cos\alpha},$$

$$p = \frac{\Sigma m'P}{R}$$

hat, worin $\vartheta$ den Neigungswinkel von R gegen die Axe A$x$ und $p$ den perpendikularen Abstand dieser Kraft von denselben Punkte A bezeichnet.

Für den einfachen Fall, wo alle Kräfte **P** der Axe **A**$y$ parallel wären, wo man also $\alpha$ konstant $=\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=1$, $\cos\alpha=o$ hätte und wo das Moment der Kraft **P** in Beziehung zum Punkte **A** allgemein durch $x$**P** dargestellt werden würde, reduzirten sich die vorstehenden Gleichungen auf

$$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{P},\ \operatorname{tang}\vartheta=\frac{\Sigma\mathbf{P}}{o}=\infty \text{ oder } \vartheta=\frac{\pi}{2},$$

$$p=\frac{\Sigma x\mathbf{P}}{\mathbf{R}}=\frac{\Sigma x\mathbf{P}}{\Sigma\mathbf{P}},$$

in welchen Ausdrücken sowol die Kräfte **P**, wie die Momente $x$**P** dasselbe Zeichen erhalten müßten, welche eine Drehung nach Einer Seite um den Punkt **A** veranlassen würden, während die übrigen Kräfte und Momente, welche eine Drehung nach der entgegengesetzten Seite zu bewirken strebten, auch mit dem entgegengesetzten Zeichen in die Rechnung einzuführen wären.

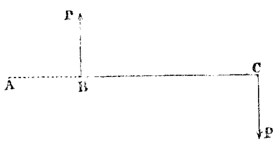
Brächte man nun in der gegebenen Ebene eine Kraft an, welche der Resultante **R** gleich und direkt entgegengesetzt wäre; so würde dadurch das ganze System im Gleichgewichte erhalten werden.

Nun könnte es sich ereignen, daß die Summe aller derjenigen der gegebenen Kräfte, welche nach Einer Seite wirken, gleich der Summe der übrigen wäre, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken. In diesem Falle würde die algebraische Summe aller gegebenen Kräfte, das ist die Größe der gesuchten Resultante $\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{P}=o$ werden. Wäre nun gleichzeitig auch die Summe $\Sigma x\mathbf{P}$ der Momente aller dieser Kräfte gleich null; so weiß man aus den früheren Betrachtungen, daß alsdann das gegebene System im Gleichgewichte sein würde, weil alsdann auch das Moment der Resultante $p\mathbf{R}=\Sigma x\mathbf{P}$ gleich null werden würde. Wäre diese Summe $\Sigma x\mathbf{P}$ der Momente aber gleichzeitig nicht gleich null; so wüßte man zwar, daß die Größe der gesuchten Resultante **R** null werden würde, ihr Moment $p$**R** würde jedoch einer endlichen Größe $\Sigma x\mathbf{P}$ gleich werden, und man sieht, daß in diesem Falle kein Gleichgewicht zwischen den Kräften **P** bestehen könnte. Außerdem reduzirten sich die beiden obigen Gleichungen $\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{P}$ und $p\mathbf{R}=\Sigma x\mathbf{P}$ auf

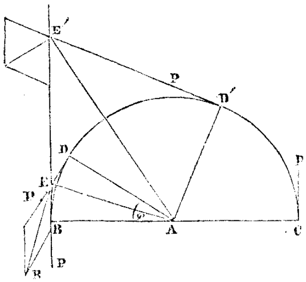
$$\mathbf{R}=o \text{ und } p\mathbf{R}=\Sigma x\mathbf{P}.$$

Es leuchtet ein, daß diesen beiden letzteren Bedingungen durch eine einzige Kraft **R** durchaus kein Genüge geleistet werden kann, weil aus der ersteren $\mathbf{R}=o$ und demnach aus der zweiten $\Sigma x\mathbf{P} = p\mathbf{R}=o$ folgen würde, was offenbar unmöglich ist, da $\Sigma x\mathbf{P}$, der Annahme gemäß, einen endlichen Werth, verschieden von null, haben soll. Hieraus zieht man den Schluß, daß ein System von parallelen Kräften, welche sich so entgegengesetzt sind, daß ihre algebraische Summe null ist, während die Summe ihrer Momente einen wirklichen Werth, verschieden von null, hat, durch eine einzige Kraft **R** nicht im Gleichgewichte erhalten werden kann.

Dieser Fall tritt in seiner einfachsten Gestalt auf, wenn in einer Ebene zwei gleiche Kräfte **P** gegeben sind, welche in parallelen, aber entgegengesetzten Richtungen und in einem perpendikularen Abstande $k$ voneinander wirken. Ein solches System nennt man ein **Kräftepaar**. Fällt man von irgend einem Punkte **A** der Ebene dieser Kräfte ein Perpendikel **ABC** auf die Richtungen derselben; so hat man zuvörderst $\Sigma\mathbf{P}=\mathbf{P}-\mathbf{P}=o$, und für die Summe der Momente der beiden gegebenen Kräfte $\overline{\mathbf{AC}}\,.\,\mathbf{P}-\overline{\mathbf{AB}}\,.\,\mathbf{P}=(\mathbf{AC}-\mathbf{AB})\mathbf{P}=k\mathbf{P}$, einen Ausdruck, welchen man das Moment des Kräftepaares nennen kann. Mit einer Intensität, welche durch das Produkt $k\mathbf{P}$ gemessen wird, strebt also das gegebene Kräftepaar die Ebene um den Punkt **A** zu drehen, und würde eine solche Drehung wirklich erzeugen, wenn dieser Punkt plötzlich fest gemacht würde. Die Ebene, in welcher die Kräfte **P** wirken, wird aber als ganz frei angenommen, und man sieht daher wegen der Willkürlichkeit, die bei der Wahl des Punktes **A** stattgefunden hat, daß die Eigenschaft des vorliegenden Kräftepaares darin besteht, die Ebene um einen jeden ihrer Punkte mit einer Intensität $=k\mathbf{P}$ zu drehen.




Wenn der Punkt **A** einer Ebene (s. d. nachstehende Fig.) fest ist, so daß sich dieselbe nur um diesen Punkt drehen kann, und man bringt in der Ebene an den beiden gleichen Hebelarmen **AB** und $\mathbf{AD}=p$ zwei gleiche Kräfte $\mathbf{BP}=\mathbf{DP}=\mathbf{P}$, an welche das System nach derselben Seite herumzudrehen streben; so kann man, um denselben Effekt zu erhalten, die beiden Kräfte **P** in eine einzige $\mathbf{ER}=\mathbf{R}$




zusammensetzen, welche das System an dem Hebelarme $\mathbf{AE} = r$ zu drehen strebt. Verlängert man daher die Richtungen **PB** und **DP** bis zu ihrem Durchschnittspunkte **E**, denkt sich alsdann die beiden Kräfte **P** in dem Punkte **E** ihrer Richtungen angebracht und setzt dieselben nach dem Prinzipe des Parallelogramms der Kräfte in die Resultante $\mathbf{ER} = \mathbf{R}$ zusammen; so findet man, daß die Richtung **ER** dieser Resultante auf der Linie **AE** perpendikular steht, daß also **AE** der Hebelarm ist, an welchem die Kraft **R** wirkt. Setzt man nun den Winkel $\mathbf{BAD} = \varphi$; so ergibt sich leicht

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P}\cos\frac{\varphi}{2} \text{ und } \mathbf{AE} = r = \frac{p}{\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Man hat also für das Moment der Resultante **R**

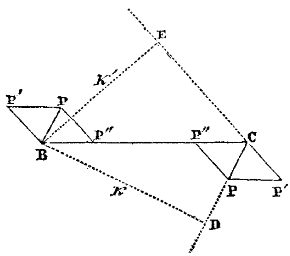
$$\mathbf{R}r = 2\mathbf{P}p$$

oder gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte **P**. Diese Beziehungen zwischen $\mathbf{R}, r$ und dem Momente $\mathbf{R}r$ finden immer statt, wie groß oder wie klein auch der Winkel $\varphi$ sein möge. Man bemerkt aber sowol aus den vorstehenden Gleichungen, wie aus der geometrischen Darstellung, daß je größer der Winkel $\varphi$ angenommen wird, desto kleiner die Resultante **R** und desto größer der Hebelarm $r$ wird, so jedoch, daß unter allen Umständen das Podukt aus **R** und $r$, oder das Moment der Resultante **R** gleich der konstanten Summe der Momente der gegebenen Kräfte **P** ist. Würde nun bei stetiger Zunahme endlich der Winkel $\varphi = 2\pi$; so geht das System der beiden Kräfte **P** in ein Kräftepaar über; die Größe der Resultante **R** wird null, aber der Hebelarm $r$, an welchem dieselbe wirkt, wird unendlich, so daß das Moment des Kräftepaares immer gleich $2\mathbf{P}p$ oder gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte bleibt.

Man zieht hieraus für die Anwendung auf ein System, welches um eine feste Axe drehbar ist, den Schluß, daß wenn in einer auf dieser Axe perpendikular stehenden Ebene Kräfte angebracht sind, welche das System herumzubewegen streben, und man hat dieselben nach dem Prinzipe des Parallelogramms der Kräfte und dem der Gleichheit der Momente nach allgemeinen Formeln in eine Resultante **R** zusammengesetzt und dieselbe mit beliebigen anderen an dem Systeme wirkenden Kräften in Beziehung gebracht; so wird man in dem Falle, wo die gegebenen Kräfte ein Kräftepaar bilden, die allgemeinen Formeln beibehalten können, wenn man für die Resultante **R** den Werth $o$, für den Hebelarm $r$, an welchem dieselbe wirkt, den Werth $\infty$, für das Produkt $\mathbf{R}r$ oder das Moment der Resultante aber immer die endliche Summe der Momente der einzelnen gegebenen Kräfte substituirt.

2. Ein jedes gegebene Kräftepaar, dessen Moment $k\mathbf{P}$ ist, kann in ein anderes verwandelt werden, wobei die Richtungen der Kräfte $\mathbf{P}'$ durch zwei beliebige Punkte der gegebenen Ebene gehen, und eine beliebige Neigung gegen die Richtung der früheren Kräfte **P** oder eine beliebige Größe haben, wofern nur das Produkt der Kraft $\mathbf{P}'$ in den perpendikularen Abstand $k'$ der beiden Kräfte $\mathbf{P}'$, das heißt das Moment $k'\mathbf{P}'$ des neuen Kräftepaares gleich dem Momente $k\mathbf{P}$ des gegebenen ist und das neue Paar nach derselben Richtung herum wirkt, wie das gegebene.

Denn zuvörderst bemerkt man, daß wenn **B** und **C** zwei Punkte in den Richtungen der Kräfte **P** des gegebenen Kräftepaares und $\mathbf{BD}=k$ der perpendikulare Abstand dieser Richtungen ist, und man zieht die Linien $\mathbf{BP}'$ und $\mathbf{CP}'$ in einer beliebigen Richtung miteinander parallel; so kann man jede der Kräfte **P** in zwei andere $\mathbf{P}'$ und $\mathbf{P}''$ zerlegen, wovon die erstere resp. in die Richtung $\mathbf{BP}'$ oder $\mathbf{CP}'$ und die andere in die Linie **BC** fällt. Die letzteren beiden sind einander gleich und entgegengesetzt und heben sich daher gegenseitig auf. Hinsichtlich der anderen beiden $\mathbf{P}'$, welche auch an Größe einander gleich werden, hat man, wenn $k'$ den perpendikularen Abstand **BE** der Richtungen der Kräfte $\mathbf{P}'$ bezeichnet,



$$\frac{\mathrm{CP}'}{\mathrm{CP}} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{\sin \mathrm{CPP}'}{\sin \mathrm{CP}'\mathrm{P}}$$

Es ist aber

$$\mathrm{BD} = k = \overline{\mathrm{BC}} \sin \mathrm{BCD} = \overline{\mathrm{BC}} . \sin \mathrm{CPP}' \text{ und}$$

$$\mathrm{BE} = k' = \overline{\mathrm{BC}} \sin \mathrm{BCE} = \overline{\mathrm{BC}} . \sin \mathrm{CP}'\mathrm{P} \text{ also}$$

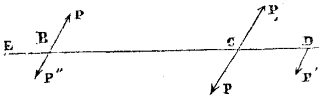
$$\frac{k}{k'} = \frac{\sin \mathrm{CPP}'}{\sin \mathrm{CP}'\mathrm{P}}$$

und hieraus folgt

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{k}{k'} \text{ oder } k'\mathrm{P}' = k\mathrm{P},$$

d. h. das Moment des neuen Kräftepaares ist gleich dem Momente des gegebenen.

Legt man ferner durch die beiden Punkte B und C der Richtungen der Kräfte P, welche das gegebene Kräftepaar bilden, die Linie BCD und bringt in dem Punkte C eine Kraft $\mathrm{P}_1$ an, welche der




Kraft P an Größe gleich und direkt entgegengesetzt ist, ferner an den Punkten B und D in entgegengesetzten Richtungen von $\mathrm{P}_1$ zwei Kräfte P″ und P′ von der Beschaffenheit, daß sie der Kraft $\mathrm{P}_1$ vollkommen das Gleichgewicht halten; so wird durch diese Einführung der Kräfte $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}'$ und $\mathrm{P}''$ der frühere Zustand des gegebenen Systemes durchaus nicht geändert. Damit sich aber die drei parallelen Kräfte $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}', \mathrm{P}''$, von denen $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}$ ist, das Gleichgewicht halten, muß erstens

$$\mathrm{P}' + \mathrm{P}'' = \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}$$

und nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, wenn man die Momente von $\mathrm{P}', \mathrm{P}''$ und $\mathrm{P}_1$ in Beziehung zu dem Punkte B nimmt und $\mathrm{BC} = l, \mathrm{BD} = l'$ setzt,

$$l'\mathrm{P}' = l\mathrm{P}_1 = l\mathrm{P}$$

sein. Aus der letzteren Gleichung folgt

$$\mathrm{P}' = \frac{l\mathrm{P}}{l'};$$

Diesen Werth in die vorhergehende Gleichung gesetzt, gibt

$$\frac{l\mathrm{P}}{l'} + \mathrm{P}'' = \mathrm{P}, \text{ also}$$

$$\mathrm{P}'' = \mathrm{P}\left(1 - \frac{l}{l'}\right).$$

Nachdem man nun diese drei Kräfte $P_1 = P, P' = \frac{lP}{l'}$ und $P'' = P \left(1 - \frac{l}{l'}\right)$ in das System des gegebenen Kräftepaares eingeführt hat, heben sich die beiden Kräfte P und $P_1$ im Punkte C vollkommen auf, und es bleibt ein System übrig, bei welchem im Punkte D die Kraft $P' = \frac{lP}{l'}$ und im Punkte B die Kraft $P - P'' = P - P\left(1 - \frac{l}{l'}\right) = \frac{lP}{l'} = P'$ in der Richtung BP wirkt. Dieses System bildet offenbar ein neues Kräftepaar, für welches man

$$P' = \frac{lP}{l'}$$

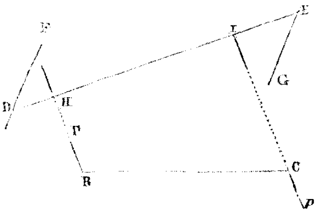
hat. Bezeichnen nun $k$ und $k'$ die perpendikularen Abstände der Richtungen BP, CP und der Richtungen BP, DP', so hat man $\frac{l}{l'} = \frac{k}{k'}$ und daher auch

$$P' = \frac{kP}{k'} \text{ oder } k'P' = kP,$$

d. h. das Moment des neuen Kräftepaares welches dieselbe Wirkung thut, wie das gegebene, ist gleich dem Momente des letzteren.

Nachdem man hierdurch das Paar der Kräfte P in ein anderes verwandelt hat, dessen Richtungen mit den früheren parallel sind und wobei die Richtung BP' der Einen Kraft mit Einer der früheren Richtungen BP genau zusammenfällt, kann man auch das neue Paar der Kräfte P' auf dieselbe Weise in ein anderes verwandeln, dessen Richtungen ebenfalls mit den früheren parallel sind und durch die Punkte D und E gehen.

Um endlich ein gegebenes Paar der Kräfte BP und CP in ein anderes umzuwandeln, dessen Kräfte P' in die gleichfalls gegebenen beliebigen Richtungen DF und EG fallen; so verbinde man zwei Punkte dieser Richtungen durch die Linie DE, verlängere die Richtungen BP und PC der Kräfte P des gegebenen Paares bis zu ihren Durchschnitten H und I mit der Li-



nie **DE**, denke sich alsdann die Kräfte **P** in den Punkten **H** und **I** nach denselben Richtungen angebracht, in welchen sie gegeben sind; darauf verwandele man nach dem letzteren Satze das Kräftepaar **HI** in ein anderes, dessen Richtungen zu **BH** und **IC** parallel sind und durch die Punkte **D** und **E** gehen und zerlege endlich die zuletzt erhaltenen Kräfte in **D** und **E** nach den ersteren der vorstehenden Sätze in andere, deren Richtungen in **DF** und **EG** und in **DE** fallen. Sind nun die Kräfte des aus dieser Operation hervorgehenden Paares $=\mathbf{P}''$ und ihr perpendikularer Abstand $=k''$; so wird man immer

$$k''\mathbf{P}''=k\mathbf{P}$$

haben, und man sieht, daß ein jedes gegebene Kräftepaar, durch ein jedes beliebige andere in derselben Ebene liegende Kräftepaar vertreten werden kann, wenn nur das Moment des letzteren $k''\mathbf{P}'$ gleich dem Momente $k\mathbf{P}$ des ersteren ist.

3. Zusammensetzung der Kräftepaare. Sind in Einer Ebene mehrere Kräftepaare gegeben, deren Momente resp. $k'\mathbf{P}'$, $k''\mathbf{P}''$, $k'''\mathbf{P}'''$, ... sind, so kann man ein jedes derselben in ein anderes verwandeln, dessen Richtungen in zwei bestimmte Parallellinien fallen, ohne daß hierdurch der Werth seines Momentes geändert würde. Bezeichnet man den perpendikularen Abstand dieser beiden Parallelen mit $k$, so wird die Größe der Kraft, welche sich durch die Verwandelung des ersten Kräftepaares ergibt $=\frac{k'\mathbf{P}'}{k}$, die Kraft, welche sich durch das zweite Paar ergibt $=\frac{k''\mathbf{P}''}{k}$ u. s. f. Alle diese Kräfte wirken nun in demselben perpendikularen Abstande und in denselben Linien, können also addirt werden und bilden so ein einziges Kräftepaar, dessen Kräfte

$$\mathbf{P}=\frac{k'\mathbf{P}'}{k}+\frac{k''\mathbf{P}''}{k}+\frac{k'''\mathbf{P}'''}{k'''}+\ldots$$

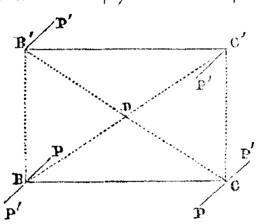
in dem Abstande $k$ wirken und dessen Moment mithin

$$k\mathbf{P}=k'\mathbf{P}'+k''\mathbf{P}''+k'''\mathbf{P}'''+\ldots,$$

d. i. gleich der Summe der Momente der einzelnen gegebenen Kräftepaare ist.

Sind unter den gegebenen Kräftepaaren mehrere vorhanden, welche eine Drehung nach der entgegengesetzten Seite der übrigen zu bewirken streben; so müssen ihre Momente in dem vorstehenden Ausdrucke offenbar negativ genommen werden, während die anderen das positive Zeichen erhalten. Würde hierdurch der Werth der rechten Seite der vorstehenden Gleichung gleich null; so sieht man, daß in diesem Falle auch das Moment des resultirenden Kräftepaares null ist, daß sich also die gegebenen Kräftepaare im Gleichgewichte erhalten. Hieraus folgt zugleich, daß zum Bestehen des Gleichgewichtes zwischen Kräftepaaren in Einer Ebene, wenigstens deren zwei vorhanden sein müssen, daß aber auch ein gegebenes Kräftepaar durch ein anderes immer in Gleichgewicht versetzt werden kann.

4. Kräftepaare in verschiedenen Ebenen. Betrachtet man ein System von Kräften im Raume, so sei in der Ebene **PBCP** irgend ein Kräftepaar gegeben, dessen Moment $k$**P** ist. Nimmt man **BC**$=k$ und legt die Richtungen der Kräfte **BP**$=$**P** und **CP**$=$**P** rechtwinklig gegen **BC**; so kann ein jedes in der gedachten Ebene gegebene Kräftepaar, dessen Moment den Werth $k$**P** hat, durch das letztere Paar vertreten werden. Ist nun **P′B′C′P′** irgend eine zu **PBCP** parallele Ebene und **BB′**, **CC′** gemeinschaftliche Perpendikel auf diesen beiden Ebenen; so kann man unbeschadet des statischen Zustandes des gegebenen Systemes

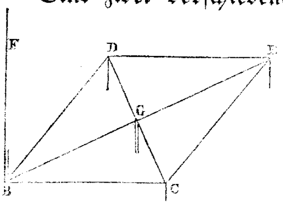



in den Punkten **B**, **C**, **B′**, **C′** vier gleiche und parallele Kräfte **P′** anbringen, von denen die in **B** und **C′** angebrachten der Richtung **BP** und die in **C** und **B′** angebrachten der Richtung **CP** direkt entgegenwirken; denn diese an den vier Ecken des Rechteckes **BCC′B′** wirkenden Kräfte **P′** sind unter sich im Gleichgewichte, weil je zwei von ihnen wie **BP′** und **C′P′** und wie **CP′** und **B′P′** eine Resultante $=2$**P′** besitzen, die resp. durch die Mitte der Linie **BC′** oder der Linie **CB′**, d. i. durch den Mittelpunkt **D** des Rechteckes **BCC′B** geht und welche für die ersten beiden nach der Einen und für die anderen beiden nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist, so daß die gemeinschaftliche Resultante aller vier Kräfte **P′** gleich null ist. Nimmt man **P′**$=$**P**; so heben sich die in den Punkten

B und C wirkenden Kräfte vollkommen auf und es bleibt nur ein Kräfttpaar P′B′C′P′ zurück, welches in der parallelen Ebene wirkt und dasselbe Moment wie das gegebene PBCP besitzt. Da nun aber durch das Kräftepaar P′B′C′P′ ein jedes beliebige andere Paar in der Ebene P′B′C′P′ vertreten wird, welches mit jenem ein gleiches Moment hat; so folgt allgemein daß irgend ein gegebenes Kräftepaar ohne Einfluß auf den Zustand eines Systemes von Kräften in ein anderes verwandelt werden kann, welches in einer parallelen Ebene liegt und dasselbe Moment hat.

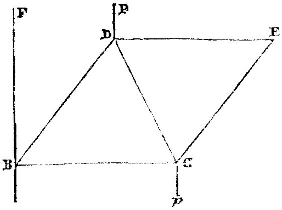
Hieraus erkennt man auch eine allgemeinere Eigenschaft eines Kräftepaares, welche nicht bloß darin besteht, daß dasselbe die Ebene, in welcher es wirkt, um einen jeden beliebigen Punkt, sondern daß dasselbe das ganze im Raume gegebene System um eine jede beliebige Axe zu drehen strebt, welche auf der Ebene des Kräftepaares perpendikular steht.

Sind zwei verschiedene Kräftepaare in zwei nicht parallelen




Ebenen gegeben, so sei BF die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen. Man verwandele ein jedes der gegebenen Paare in ein anderes, dessen Kräfte irgend einer beliebig zu wählenden Kraft P gleich und der Durchschnittslinie BF parallel sind, und trage beide an Ein und denselben Punkt B der Linie BF. Ist alsdann BC das erste und BD das zweite Kräftepaar, so vollende man das Parallelogramm BCED und ziehe die Diagonalen BE und CD, welche sich in G schneiden. Jetzt kann man die beiden in C und D wirkenden gleichen Kräfte P in eine einzige $=2P$ zusammensetzen, welche im Mittelpunkte G der Linie CD in derselben Richtung wirkt, und hierdurch die beiden gegebenen Kräftepaare auf ein einziges BG reduziren, an dessen Enden B und G die Kräfte 2P wirken. Statt dieses letzteren Paares kann man jedoch auch ein anderes setzen, welches ebenfalls in der Ebene EBF, aber mit den Kräften P und an den Endpunkten B und E der doppelten Länge von BG oder der Diagonale BE des Parallelogramms BCED wirkt, indem das Moment $\overline{BE}.P=(2\overline{BG})P$ dieses letzteren gleich dem Momente $\overline{BG}.2P$ des ersteren ist.

Wären die beiden gegebenen Kräftepaare **BC** und **BD** von




der Beschaffenheit, daß beim Antragen der Kräfte **P** dieser beiden Paare an den Punkt **B**, die Kraft des Einen Paares der des anderen gerade entgegengesetzt wäre; so würden sich die Kräfte bei **B** gegenseitig vernichten und man erhielte unmittelbar als resultirendes Kräftepaar jenes **CD**, welches mit den Kräften **P** an den Endpunkten der anderen Diagonale **CD** des Parallelogrammes **BCED** und in der Ebene **PDCP** wirkt.

Aus dem Vorstehenden ersieht man, daß sich die Kräftepaare in den verschiedenen Ebenen auf eine ähnliche Weise, wie einfache Kräfte, nach dem Prinzipe des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzen und mithin auch zerlegen lassen, und es wird immer leicht sein, sowol die Ebene, wie die Axe des resultirenden Paares zu bestimmen. Auch geht hieraus hervor, daß es immer möglich ist, eine jede beliebige im Raume gegebene Anzahl von Kräftepaaren zu einem einzigen zusammenzusetzen. Am leichtesten wird dies immer geschehen, wenn man die Richtungen der Axen der Kräftepaare statt ihrer Ebenen konstruirt, indem man diesen Axen, welche auf den Ebenen perpendikular stehen müssen, solche Längen gibt, durch welche die Momente der zugehörigen Kräftepaare dargestellt werden und dann diese Axen nach dem Parallelogramme oder Parallelepipedum der Kräfte zusammensetzt.

## Gleichgewicht eines ganz freien Systemes von Kräften.

5. Bedingungen für das Gleichgewicht mehrerer auf Einen Punkt angebrachter Kräfte. Auf Einen Punkt **A** seien mehrere in verschiedenen Ebenen liegende Kräfte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \ldots$ angebracht. Legt man durch **A** drei rechtwinklige Koordinatenaxen **AX, AY, AZ** und bezeichnet die Neigungswinkel der Kraft $\mathbf{P}_1$ gegen diese Axen resp. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ebenso die Neigungswinkel der Kraft $\mathbf{P}_2$ gegen diese Axen mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ u. s. f.; so kann man nach §. 12 die Kraft $\mathbf{P}_1$ in die drei Komponenten $\mathbf{P}_1 \cos\alpha_1, \mathbf{P}_1 \cos\beta_1, \mathbf{P}_1 \cos\gamma_1$ zerlegen, deren Richtungen resp. in

die drei angenommenen Koordinatenaxen fallen. Auf ähnliche Weise können die übrigen Kräfte $P_2, P_3 \ldots$ in die Komponenten $P_2 \cos\alpha_2, P_2 \cos\beta_2$ $P_2 \cos\gamma_2$ etc. zerlegt werden. Nimmt man nun mit Berücksichtigung der Zeichen, welche diesen Kräften einzeln zukommen, die Summen aller jener Komponenten, welche resp. in die drei Axen AX, AY, AZ fallen; so erhält man

in der Richtung AX $P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots = \Sigma P\cos\alpha$,
» » » AY $P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + \ldots = \Sigma P\cos\beta$,
» » » AZ $P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + \ldots = \Sigma P\cos\gamma$.

Setzt man hierauf die drei perpendikular gegeneinander gerichteten Kräfte $\Sigma P\cos\alpha, \Sigma P\cos\beta, \Sigma P\cos\gamma$ wieder in eine einzige zusammen; so findet man für die Resultante R aller gegebenen Kräfte

$$R = \sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2 + (\Sigma P\cos\gamma)^2},$$

und die Neigungswinkel $a, b, c$ dieser Resultante gegen die Axen AX, AY, AZ werden offenbar durch die Gleichungen

$$\cos a = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{R}, \cos b = \frac{\Sigma P\cos\beta}{R}, \cos c = \frac{\Sigma P\cos\gamma}{R}$$

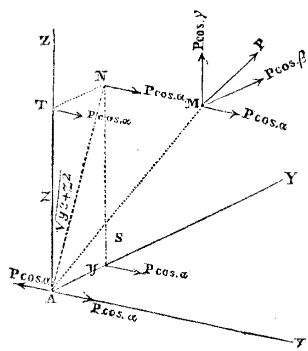
gegeben sein.

Sollen die gegebenen Kräfte untereinander im Gleichgewichte sein, so muß die Resultante R den Werth null annehmen; dies ist aber nach der vorstehenden Gleichung nur möglich, wenn man einzeln

$$\Sigma P\cos\alpha = o, \Sigma P\cos\beta = o, \Sigma P\cos\gamma = o$$

hat. Hieraus folgt, daß sich mehrere auf Einen Punkt angebrachte Kräfte nur dann im Gleichgewichte erhalten können, wenn die Summen ihrer Komponenten in den Richtungen dreier rechtwinkliger Axen einzeln gleich null sind.

6. **Bedingungen für das Gleichgewicht mehrerer an einem ganz freien Systeme im Raume angebrachter Kräfte.** Wenn auf ein System, welches sich nach allen Seiten frei drehen und fortbewegen kann, verschiedene Kräfte angebracht sind, so denke man sich durch irgend einen Punkt A des Raumes drei rechtwinklige Koordinatenaxen AX, AY, AZ gelegt. Schließt nun irgend Eine dieser Kräfte, wie P, mit den Axen resp. die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$




ein; so kann man dieselbe zuvörderst in drei Komponenten $P\cos\alpha, P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ zerlegen, welche jenen Axen resp. parallel sind. Nachdem man eine solche Zerlegung mit einer jeden der gegebenen Kräfte vorgenommen hat, kann man mit Poinsot an den Punkt A parallel zu den Komponenten $P\cos\alpha, P\cos\beta, P\cos\gamma$ zwei Kräfte tragen, welche denselben resp. gleich und einander direkt entgegengesetzt sind, wodurch der Zustand des früheren Systemes durchaus nicht geändert wird. Durch diese Zerlegung und Einführung neuer Kräfte erhält man zwei besondere Systeme, und zwar Ein System, welches nur aus Kräften $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ besteht, die unmittelbar auf den Punkt A wirken, und Ein System von Kräftepaaren, welches aus Kräften besteht, die den Komponenten $P\cos\alpha, P\cos\beta, P\cos\gamma$ gleich und parallel sind.

Nun leuchtet ein, daß wenn das ursprünglich gegebene System im Gleichgewichte sein soll, ein jedes der letztgedachten beiden Systeme für sich im Gleichgewichte sein muß; denn wäre Eines von diesen beiden im Gleichgewichte und das andere nicht; so könnte die Verbindung beider offenbar kein Gleichgewicht erzeugen, und hätte sowol das Eine, wie das andere eine Resultante, verschieden von null; so könnte durch ihre Vereinigung ebenfalls kein Gleichgewicht hervorgebracht werden, weil die Resultante des ersteren Systemes nur eine einfache Kraft, die Resultante des letzteren aber ein Kräftepaar sein würde, die einander, wie man vorhin gesehen hat, nicht im Gleichgewichte zu erhalten vermögen.

Sollen also beide erwähnte Systeme für sich im Gleichgewichte sein; so erhält man für das erstere nach dem vorhergehenden Paragraphe die Bedingungen

$$\Sigma P\cos\alpha = o, \Sigma P\cos\beta = o, \Sigma P\cos\gamma = o.$$

Um die Bedingungen für das Gleichgewicht des zweiten Systemes von Kräftepaaren zu ermitteln; so denke man sich die in M wirkende Kraft $P\cos\alpha$ des Einen Kräftepaares in dem Punkte N, wo ihre Richtung die Ebene YZ schneidet, angebracht. Das Moment dieses Kräftepaares wird alsdann $\overline{AN}.P\cos\alpha = \sqrt{y^2+z^2}.P\cos\alpha$ sein. Vollendet man das Rechteck ASNT, dessen Diagonale AN ist, so kann dieses Kräftepaar AN in die beiden anderen AS und AT zerlegt werden, deren Momente resp. $\overline{AS}.P\cos\alpha = y.P\cos\alpha$ und $\overline{AT}.P\cos\alpha = z.P\cos\alpha$ sind, und welche resp. in den Ebenen XY und XZ wirken. Auf eine ganz ähnliche Weise kann man das durch die Komponente $P\cos\beta$ entstandene Kräftepaar, dessen Moment $\sqrt{x^2+z^2}\,P\cos\beta$ ist, in zwei andere zerlegen, deren Momente resp. $x.P\cos\beta$ und $z.P\cos\beta$ sind, und welche in den Ebenen XY und YZ wirken. Ebenso ergibt das durch die dritte Komponente $P\cos\gamma$ gebildete Kräftepaar, dessen Moment $\sqrt{x^2+y^2}\,P\cos\gamma$ ist, zwei andere, deren Momente resp. $x.P\cos\gamma$ und $y.P\cos\gamma$ sind, und welche in den Ebenen XZ und YZ wirken.

Hierdurch sind nun die drei von den Komponenten $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ gebildeten Kräftepaare in sechs andere zerlegt, von denen zwei und zwei in Einer der drei Koordinatenebenen XY, XZ, YZ wirken. Die Momente der beiden Paare, welche in der Ebene XY wirken, sind $y.P\cos\alpha$ und $x.P\cos\beta$; beide wirken aber, wie man bei genauer Prüfung der Figur sehen wird, einander entgegen, so daß das Moment des aus beiden resultirenden Kräftepaares $y.P\cos\alpha - x.P\cos\beta = P(y\cos\alpha - x\cos\beta)$ sein wird. Ebenso erhält man für das resultirende Kräftepaar der beiden in der Ebene XZ wirkenden Paare $P(x\cos\gamma - z\cos\alpha)$, und der beiden in der Ebene YZ wirkenden Paare $P(z\cos\beta - y\cos\gamma)$, wobei die Momente derjenigen Kräftepaare als positiv angenommen sind, welche eine Drehung des Systemes von Y nach X, von X nach Z und von Z nach Y herbeizuführen streben. Nimmt man nun für eine jede gegebene Kraft, wie P, eine solche Zerlegung und Zusammensetzung der Kräftepaare vor; so werden die Momente der Resultanten aller dieser Paare in den Ebenen XY, XZ und YZ resp.

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta), \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha), \Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma)$$

sein.

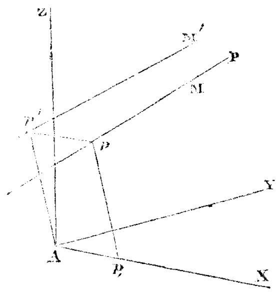
Diese drei aus allen gegebenen Kräften resultirenden Kräftepaare kann man endlich in einziges zusammensetzen, dessen Moment durch die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelpipedums dargestellt wird, dessen zusammenstoßende Seiten durch die vorstehenden Momente dargestellt werden, und man hat daher für das Moment dieses einzigen Kräftepaares

$$\sqrt{[\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta)]^2 + [\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha)]^2 + [\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma)]^2}.$$

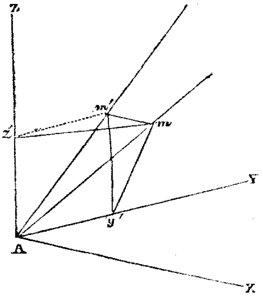
Da dieses Moment, wenn das ursprünglich gegebene System im Gleichgewichte sein soll, gleich null sein muß; so ergeben sich zu den oben entwickelten noch die folgenden drei Bedingungsgleichungen

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = o,\ \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = o,$$
$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = o.$$

Diese Gleichungen können folgendermaßen auf eine einfachere Form gebracht werden. Man bezeichne mit $p, q, r$ die kürzesten Abstände der Richtung der Kraft P von den Koordinatenaxen AX, AY, AZ und es sei $pp_1$ der kürzeste Abstand der Richtung MP der Kraft P von der Axe AX, $M'p'$ sei die Projektion der Richtung M$p$ und A$p'$ die Projektion der Linie $p_1p$ auf die Ebene YZ. Die Linie $pp_1$ bildet bekanntlich sowol mit M$p$, wie mit AX rechte Winkel, mithin kann dieselbe als in einer mit der Ebene YZ parallelen Ebene liegend angesehen werden. Die Projektion A$p'$ von $p_1p$ auf die Ebene YZ ist also parallel mit $p_1p$, und weil auch das Perpendikel $pp'$ vom Punkte $p$ auf die Ebene YZ parallel $p_1$A ist; so folgt, daß A$p_1pp'$ ein Rechteck bildet, daß also auch der Winkel $p_1pp'$ ein rechter ist. Hiernach steht $p_1p$ auf der Ebene $mpp'm'$ perpendikular, folglich auch A$p'$, und daher auch die Projektion A$p'$ von $p_1p$ auf der Projektion M$p'$ von der Richtungslinie M$p$ der Kraft P, und es ist A$p' = p_1p = p$.



Zieht man ferner durch den Punkt A mit der Richtung $p$M der Kraft P die Parallele A$m$ und projizirt den Punkt $m$ in $m'$ auf die Ebene YZ, in $y'$ auf die Axe AY und in $z'$ auf die Axe AZ; so hat man für die Tangente des Neigungswinkels $m'$AY




der Projektion $m'A$ gegen die Axe AY den Werth $\frac{m'y'}{Ay'}$, d. i., weil $m'y' = Az' = Am.\cos\gamma$, und $Ay' = Am.\cos\beta$ ist, den Werth

$$\frac{Am.\cos\gamma}{Am.\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta},$$

also für den Kosinus dieses Winkels den Werth

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\beta}}} = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}.$$

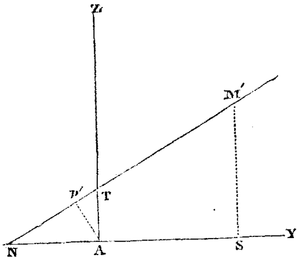
Bekanntlich ist aber $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

also $\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha$,

und daher der Ausdruck für den Kosinus des Neigungswinkels der Projektion der Richtung der Kraft P auf die Ebene YZ gegen die Axe AY gleich $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$.

Hieraus ergibt sich für den Kosinus des Neigungswinkels derselben Projektion gegen die Axe AZ der Ausdruck

$$\sqrt{1-\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$




Ist daher $M'p'$ die Projektion der Richtung der Kraft P auf die Ebene YZ und $Ap'$ die Projektion des kürzesten Abstandes jener Richtung von der Axe AX; so hat man $Ap' = p$, $AS = y$, $M'S = z$, $\cos p'NA = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, $\cos p'AN = \cos p'TA = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$,

also

$$NA = \frac{Ap'}{\cos p'AN} = p.\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}, \text{ ferner}$$

$$\frac{M'S}{NS} = \frac{M'S}{NA+AS} = \operatorname{tang} p'NA = \frac{\sin p'NA}{\cos p'NA} = \frac{\cos p'An}{\cos p'NA},$$

das ist

$$\frac{z}{p\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}+y}=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}, \text{ oder}$$

$$\frac{z}{p\sin\alpha+y\cos\gamma}=\frac{1}{\cos\beta}, \text{ mithin}$$

$$p=\frac{z\cos\beta-y\cos\gamma}{\sin\alpha} \text{ oder } z\cos\beta-y\cos\gamma=p\sin\alpha.$$

Ebenso findet sich für die kürzesten Abstände $q$ und $r$ der Richtung der Kraft P von den Axen AY und AZ

$$q=\frac{x\cos\gamma-z\cos\alpha}{\sin\beta} \text{ oder } x\cos\gamma-z\cos\alpha=q\sin\beta,$$

$$r=\frac{y\cos\alpha-x\cos\beta}{\sin\gamma} \text{ oder } y\cos\alpha-x\cos\beta=r\sin\gamma.$$

Substituirt man diese Werthe in die obigen drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht; so werden dieselben

$$\Sigma Pp\sin\alpha=o, \Sigma Pq\sin\beta=o, \Sigma Pr\sin\gamma=o.$$

Diese drei Gleichungen, verbunden mit den zuerst gefundenen

$$\Sigma P\cos\alpha=o, \Sigma P\cos\beta=o, \Sigma P\cos\gamma=o,$$

stellen die sämmtlichen nothwendigen Bedingungen für das Gleichgewicht eines ganz freien Systemes von Kräften dar.

Die letzteren drücken aus, daß die Summen der Komponenten der gegebenen Kräfte in parallelen Richtungen zu drei beliebigen rechtwinkligen Axen null sein müssen, und beziehen sich demgemäß auf das Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung.

Die drei ersteren fordern, daß die Summen der Momente in Beziehung zu den drei Axen null sei, und stellen demnach das Gleichgewicht gegen die drehende Bewegung her.

## Gleichgewicht eines Systemes, welches sich um Einen festen Punkt frei drehen kann.

7. Befindet sich in dem Systeme Ein fester Punkt, um welchen sich dasselbe nach allen Seiten frei drehen kann; so kann eine fortschreitende Bewegung des Systemes nicht erfolgen. Zur Bestimmung des Druckes, welchen der feste Punkt A aus=

zuhalten hat, denke man sich die obigen drei rechtwinkligen Axen **AX, AY, AZ** durch diesen Punkt gelegt.

Sind nun die Pressungen, welche derselbe in der Richtung der Axen **AX, AY, AZ** erleidet, resp. **L, M, N**; so wird man diesen Punkt offenbar ganz frei machen können, wenn man auf ihn drei Kräfte anbringt, welche diesen Pressungen gleich und direkt entgegengesetzt sind. Diese drei Kräfte müssen aber von der Art sein, daß sie, in Verbindung mit den gegebenen, das Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung erhalten, und man muß daher haben

$$\Sigma P\cos\alpha - L = o, \Sigma P\cos\beta - M = o, \Sigma P\cos\gamma - N = o,$$

oder

$$L = \Sigma P\cos\alpha, M = \Sigma P\cos\beta, N = \Sigma P\cos\gamma,$$

wodurch die Pressungen bestimmt sind, welche der feste Punkt **A** resp. in den Richtungen der Axen **AX, AY, AZ** auszuhalten hat. Bezeichnet man den hieraus resultirenden Druck mit **R** und die Neigungswinkel von **R** gegen die Axen resp. mit $a, b, c$; so hat man

$$R = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

$$\cos a = \frac{L}{R}, \cos b = \frac{M}{R}, \cos \gamma = \frac{N}{R}.$$

Damit keine Drehung um den festen Punkt erfolgen könne, so müssen hier, wie bei einem ganz freien Systeme die drei Bedingungsgleichungen

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = o, \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = o,$$
$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = o$$

oder

$$\Sigma P p\sin\alpha = o, \Sigma P q\sin\beta = o, \Sigma P r\sin\gamma = o$$

erfällt werden, in welche man die den Pressungen **L, M, N** auf den festen Punkt **A** entgegengesetzten Kräfte mit einzuführen haben würde, wenn man den Anfangspunkt der Koordinaten nicht in dem festen Punkte **A** annähme. Sobald dies aber geschieht, so sieht man, daß für diese Kräfte **L, M, N,** sowol die Größen $p, q, r$ wie $x, y, z$ sämmtlich null werden und alle in **L, M, N** multiplizirten Glieder aus den vorstehenden Gleichungen verschwinden würden. Es genügt also für das Gleichgewicht, daß die Summen der Momente der an dem Systeme angebrachten Kräfte in

Beziehung zu drei durch den festen Punkt gehenden Axen gleich null seien.

8. Theorie des Hebels. Liegen in dem Falle, wo sich das System um Einen festen Punkt A frei drehen kann, sämmtliche gegebene Kräfte in einer einzigen Ebene, welche durch den Punkt A geht; so kann man diese Ebene für die Koordinatenebene XY annehmen. Da nun hier sämmtliche gegebene Kräfte mit der dritten Axe AZ einen rechten Winkel bilden; so hat man für eine jede Kraft $P\cos\gamma = o$ und außerdem $\cos\beta = \sin\alpha$; ferner werden hier die kürzesten Abstände $p$ und $q$ der Richtung der Kräfte von den Axen AX und AY gleich null, oder wenn die Eine oder die andere dieser Kräfte zu AX oder AY parallel sein sollte, in welchem Falle allerdings $p$ oder $q$ nicht gleich null würde; so hätte man gleichzeitig $\sin\alpha$ oder $\sin\beta$ gleich null, und jedenfalls reduziren sich die drei Bedingungen für das Gleichgewicht gegen die Drehung auf die einzige $\Sigma P r = o$, worin $r$ den Abstand der Richtungen der Kräfte von dem festen Punkte A bezeichnet. Setzt man diesen Abstand gleich $p$; so wird die vorstehende Bedingungsgleichung

$$\Sigma p P = o,$$

und dieselbe drückt aus, daß die Summe der Momente der gegebenen Kräfte um den festen Unterstützungspunkt gleich null sein müsse, wobei natürlich die Momente derjenigen Kräfte, welche eine Drehung nach der Einen Seite herbeizuführen streben, positiv und die der übrigen, welche das System nach der entgegengesetzten Seite zu drehen streben, negativ zu nehmen sind.

Die Pressungen, welche der feste Punkt in der Richtung der Axen AX und AY erleidet, sind

$$L = \Sigma P\cos\alpha,\ M = \Sigma P\sin\alpha$$

und die Resultante dieser Pressungen ist durch die Gleichungen

$$R = \sqrt{L^2 + M^2}$$

$$\cos a = \frac{L}{R},\ \sin a = \frac{M}{R}$$

bestimmt.

Der vorliegende Fall ist der allgemeinste Fall eines Hebels. Denn denkt man sich in der Ebene XY eine unbiegsame gerade, gebogene oder krumme Linie, welche durch den Punkt A geht und sich um denselben frei drehen kann; so kann man alle gegebenen Kräfte in den Durchschnittspunkten ihrer Richtungslinien mit dem Hebel an dem Letzteren unmittelbar anbringen, und dieses System wird im Gleichgewichte sein, sobald die vorstehenden Gleichungen erfüllt sind. Wären sämmtliche an dem Hebel angebrachten Kräfte untereinander und zu der Axe A$y$ parallel; so würde die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$\Sigma p \mathrm{P} = o$$

bleiben; die beiden Gleichungen für den Druck, welchen der feste Unterstützungspunkt des Hebels auszuhalten hat, würden sich aber auf die einzige

$$\mathrm{M} = \mathrm{R} = \Sigma \mathrm{P},$$

reduziren, welche den Druck parallel zu A$y$ oder zu der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte angibt.

## Gleichgewicht eines Systemes, in welchem sich zwei feste Punkte befinden.

9. Sind **A** und **B** zwei feste Punkte in einem Systeme, so daß sich dasselbe nur um die feste Axe **AB** drehen kann; so nehme man den Einen **A** zum Anfangspunkte und die Linie **AB** zur Axe **AX** an, während die anderen beiden Axen **AY** und **AZ** perpendikular auf einander und auf **AB** stehen. Sind nun **L, M, N** die Pressungen, welche der feste Punkt **A** und **L', M', N'** die Pressungen welche der feste Punkt **B** resp. in den positiven Richtungen der Axen **AX, AY, AZ** auszuhalten haben; so kann man sich das System als vollkommen frei denken, und darauf die für diesen Fall vorhin entwickelten Gleichungen anwenden, sobald man annimmt, es seien in den Punkten **A** und **B** parallel zu den Axen Kräfte angebracht, welche den Pressungen **L, M, N** und **L', M', N'** resp. gleich und entgegengesetzt sind. Behandelt man nun die in **B** angebrachten Kräfte ebenso, wie es in §. 5. dieses Anhanges mit allen übrigen gegebenen Kräften **P** des Systemes geschehen ist, indem man durch nochmalige Anbringung der Kräfte **+L'** und **—L', +M'** und **—M', +N'** und **—N'** an dem Anfangspunkte **A** die nöthigen Kräftepaare erzeugt; so werden die Be-

bindungen für das Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung

$$\Sigma P \cos\alpha - L - L' = o,$$
$$\Sigma P \cos\beta - M - M' = o,$$
$$\Sigma P \cos\gamma - N - N' = o,$$

und die für die drehende Bewegung, wenn man den Abstand AB der beiden festen Punkte mit $a$ bezeichnet und darauf achtet, daß die Momente der Kräftepaare, welche eine Drehung von Y nach X, von X nach Z und von Z nach Y zu bewirken streben, positiv und die entgegengesetzt wirkenden negativ genommen sind, und daß das Moment des durch die Kräfte L′ erzeugten Kräftepaares offenbar null ist,

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + M'a = o,$$
$$\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - N'a = o,$$
$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) \qquad = o.$$

Aus den ersten beiden der letzteren drei Gleichungen findet sich für die Pressungen auf den Punkt B in den Richtungen A$y$ und A$z$

$$M' = -\frac{\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta)}{a}, N' = \frac{\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha)}{a}$$

Durch Substitution dieser Werthe in die letzten beiden der vorhergehenden drei Gleichungen findet man für die Pressungen auf den Punkt A in denselben Richtungen A$y$ und A$z$

$$M = \Sigma P\cos\beta + \frac{\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta)}{a} = \frac{\Sigma P[y\cos\alpha - (x-a)\cos\beta]}{a}$$

$$N = \Sigma P\cos\gamma - \frac{\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha)}{a} = -\frac{\Sigma P[(x-a)\cos\gamma - z\cos\alpha]}{a}$$

Die erste jener anfänglichen drei Gleichungen ergibt ferner

$$L + L' = \Sigma P\cos\alpha,$$

und da sich zwischen L und L′ weiter keine Beziehung darbietet; so sieht man, daß der in der Richtung der festen Axe AB auf jeden einzelnen Unterstützungspunkt ausgeübte Druck unbestimmt bleibt, daß aber der Gesammtdruck in der Richtung dieser Axe, welcher sich auf die beiden Punkte A und B vertheilen muß, gleich $\Sigma P\cos\alpha$, also gleich der Summe der Komponenten der gegebenen Kräfte in der Richtung dieser Axe ist. Nachdem nun durch die vorstehenden Werthe von M′ und N′ d. i. durch die Werthe der Pressungen, welche an dem festen Punkte B wirklich stattfinden werden, sobald das System den Kräften P ausgesetzt wird, den Forderungen der beiden ersten Bedingungen für das Gleichgewicht gegen die Drehung ein Genüge geleistet ist; so bleibt nur noch die letzte

$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = o$$

zu erfüllen, durch welche das Gleichgewicht gegen die Drehung um die feste Axe **AB** gesichert werden muß.

Diese Gleichung kann auch wie früher in die Form

$$\Sigma P p \sin\alpha = o$$

gebracht werden, wenn $p$ den kürzesten Abstand der Kraft **P** von der festen Axe **AX** bezeichnet.

Stehen alle Kräfte **P** auf dieser Axe perpendikular, so hat man für alle $\sin\alpha = 1$, und daher einfach

$$\Sigma P p = o.$$

Da für diesen Fall $\cos\alpha = o$ also auch $L + L' = \Sigma P\cos\alpha = o$ wird; so sieht man, daß die feste Axe durch solche Kräfte längs ihrer Richtung keinen Druck erleidet.

# Zweiter Abschnitt.

## Prinzipien der Dynamik.

§. 42. Bewegung ist Ortsveränderung.

Die **Dynamik** handelt von den Gesetzen, welche die Bewegungen materieller Körper beherrschen, und von ihren Beziehungen zu den Kräften, welche solche Bewegungen hervorbringen.

Die von einem in Bewegung begriffenen Körper beschriebenen Räume oder Wege sind die Abstände zwischen den Lagen, welche derselbe in verschiedenen aufeinander folgenden Zeitpunkten einnimmt.

Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn in gleichen aufeinander folgenden Zeitabschnitten gleiche Räume zurückgelegt werden.

Die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers ist der Raum, welchen er in jeder Zeiteinheit, z. B. in jeder Sekunde, durchläuft. Bewegt sich also ein Körper gleichförmig mit der Geschwindigkeit $V$ und während eines Zeitraumes von $T$ Zeiteinheiten; so wird der während der Zeit $T$ von dem Körper beschriebene Weg $S$ durch $TV$ dargestellt, oder man hat

$$S = TV, \text{ woraus } V = \frac{S}{T} \text{ und } T = \frac{S}{V}$$

folgt, so daß bei einer gleichförmigen Bewegung der beschriebene Raum gleich der Geschwindigkeit, multiplizirt mit der Zeit, die Geschwindigkeit gleich dem Raume, dividirt durch die Zeit, und die Zeit gleich dem Raume, dividirt durch die Geschwindigkeit ist.

§. 43. Es ist ein Gesetz der Dynamik, welches aus langer Beobachtung der Bewegungen der Planeten und durch Versuche über die Bewegungen der uns umgebenden Körper abgeleitet ist, daß wenn einem Körper einmal Bewegung ertheilt ist, dieselbe in dem Körper verbleibt, ohne mit der Zeit geschwächt oder geändert zu werden, so daß sie denselben in alle Ewigkeit mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung, mit welcher er anfing sich zu bewegen, forttreiben würde, wenn nicht späterhin irgend eine andere Kraft auf den Körper einwirkte, um den früheren Zustand der Bewegung zu ändern. Diese allen Körpern innewohnende Eigenschaft bezeichnet man mit dem Namen der Trägheit oder des Beharrungsvermögens.

Die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher sich mit einer veränderlichen Bewegung fortbewegt, in irgend einem Augenblicke, ist der Raum, welchen derselbe in einer Zeiteinheit beschreiben würde, wenn seine Bewegung von diesem Augenblicke an gleichförmig würde.

Eine beschleunigende Kraft ist eine solche, welche bei stetiger Einwirkung auf einen Körper in der Richtung seiner Bewegung eine fortwährende Zunahme der Geschwindigkeit hervorbringt.

Eine verzögernde Kraft ist eine solche, welche bei stetiger Einwirkung auf einen Körper in entgegengesetzter Richtung seiner Bewegung eine fortwährende Abnahme der Geschwindigkeit hervorbringt.

Eine Stoß- oder Impulsionskraft ist eine solche, welche, nachdem sie einem Körper Bewegung mitgetheilt hat, nach Verlauf eines äußerst kurzen Zeitraumes aufhört, auf den Körper zu wirken.

§. 44. Eine gleichförmig beschleunigende oder verzögernde Kraft wird diejenige genannt, welche in gleichen aufeinander folgenden Zeiträumen gleiche Zu- oder Abnahmen der Geschwindigkeit erzeugt. Wenn $f$ den Zuwachs an Geschwindigkeit bezeichnet, welcher einem Körper durch eine gleichförmig beschleunigende Kraft in jeder Zeitsekunde mitgetheilt wird, und $\mathbf{T}$ die Anzahl der Sekunden, während welcher er sich bewegt; so folgt aus dem ersten Gesetze der Bewegung, daß derselbe alle diese aufeinander folgenden Inkremente der Geschwindigkeit behält (wenn seine Bewegungen ungehindert vor sich geht) und daß ihm mithin nach $\mathbf{T}$

Sekunden ein Zuwachs an Geschwindigkeit gleich $f$T mitgetheilt sein wird. War also die Geschwindigkeit des Körpers in derselben Richtung im Anfange dieser T Sekunden gleich V; so wird seine gesammte Geschwindigkeit am Ende des Zeitraumes T gleich V$+f$T sein.

Stellt dagegen $f$ die Geschwindigkeit dar, welche einem Körper durch eine gleichförmig verzögernde Kraft in jeder folgenden Sekunde genommen wird, und V die Geschwindigkeit, mit welcher er in entgegengesetzter Richtung der Wirkung der verzögernden Kraft anfing sich zu bewegen; so wir seine Geschwindigkeit nach T Sekunden V$-f$T sein, so daß allgemein die Geschwindigkeit $v$ eines Körpers, auf welchen eine gleichförmig beschleunigende oder verzögernde Kraft einwirkt, nach T Sekunden durch die Formel

$$v = \mathrm{V} \pm f\mathrm{T} \ldots. (34)$$

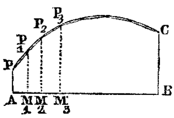
dargestellt wird.

Die Schwere ist bei dem Falle der Körper nahe an der Oberfläche der Erde eine gleichförmig beschleunigende Kraft, welche deren Fallgeschwindigkeit in jeder Sexîmal-Sekunde um 31,2644 rheinländische Fuß (Berlin) vermehrt, und wenn die Körper aufwärts geworfen werden, so ist sie eine gleichförmig verzögernde Kraft, welche ihre Geschwindigkeit in jeder Sekunde um dieselbe Größe vermindert. Die vorstehende Zahl 31,2644 wird gewöhnlich mit dem Buchstaben $g$ bezeichnet, so daß die obige Formel in Beziehung auf die Schwere als beschleunigende oder verzögernde Kraft $v = \mathrm{V} \pm g\mathrm{T}$ wird, wobei das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem der Körper nach unten oder nach oben geworfen wird.

Veränderlich beschleunigend heißt eine Kraft, welche in gleichen Zeiten ungleiche Zunahmen an Geschwindigkeit erzeugt, und veränderlich verzögernd eine solche, welche in gleichen Zeiten ungleiche Abnahmen an Geschwindigkeit herbeiführt.

§. 45. Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und dem durchlaufenen Raume und zwischen dem Raume und der verflossenen Zeit.

Man stelle durch $\mathrm{AM_1, M_1M_2, M_2M_3}$, etc. die äußerst kleinen aufeinander folgenden Zeitabschnitte in der Bewegung eines Körpers dar, ferner durch **AP** die Geschwindigkeit, mit welcher er seine Bewegung begann, durch $M_1P_1$ die Geschwindigkeit am




Ende des ersten Zeitabschnittes, durch $M_2P_2$ die am Ende des zweiten Zeitabschnittes, durch $M_3P_3$ die am Ende des dritten Zeitabschnittes und so fort, und anstatt daß der Körper während des Zeitraumes $AM_1$ seine Geschwindigkeit fortwährend ändere, nehme man an, er bewege sich während dieses Zeitraumes mit einer Geschwindigkeit, welche gleich dem mittleren Werthe zwischen der Geschwindigkeit **AP** bei **A** und der Geschwindigkeit $M_1P_1$ bei $M_1$ ist, das heißt mit einer Geschwindigkeit gleich $\frac{1}{2}(AP+M_1P_1)$.

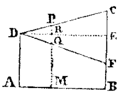
Da die Bewegung des Körpers unter dieser Voraussetzung gleichförmig ist; so wird der Raum, welchen derselbe während des Zeitraumes $AM_1$ beschreibt, gleich dem Produkte jener Geschwindigkeit in die Länge des Zeitraumes, oder gleich $\frac{1}{2}(AP+M_1P_1).AM_1$ sein. Durch dieses Produkt wird aber auch die Fläche des Paralleltrapezes $AM_1P_1P$ ausgedrückt, und es folgt, daß der Raum, welchen der Körper während des Intervalles $AM_1$ unter der Voraussetzung beschreibt, daß seine Geschwindigkeit gleich dem Mittel zwischen der Anfangs- und Endgeschwindigkeit **AP** und $M_1P_1$ sei, durch die Fläche des Trapezes $AM_1P_1P$ dargestellt wird.

Auf eine ähnliche Weise stellen die Flächen $P_1M_2$, $P_2M_3$ etc. die von dem Körper in den Zeitintervallen $M_1M_2$, $M_2M_3$, etc. beschriebenen Räume dar, und mithin bezeichnet die ganze polygonale Fläche **APCB** den ganzen Raum, welchen der Körper in der ganzen Zeit **AB**, immer unter der Voraussetzung, daß er sich in jedem Intervalle mit der mittleren Geschwindigkeit bewege, zurücklegt. Je kleiner nun die Zeitintervalle genommen werden, desto mehr nähert sich jene mittlere Geschwindigkeit der wirklichen Geschwindigkeit eines jeden Intervalles, und wenn man sie unendlich klein an Größe, also unendlich groß an Zahl, annimmt; so fällt die mittlere Geschwindigkeit in einem jeden sehr kleinen Zeitraume mit der wahren zusammen, und die polygonale Fläche geht in die krummlinige Fläche **APCB** über.

Stellt man daher allgemein durch die Abszissen einer Kurve die Zeiten dar, durch welche sich ein Körper bewegt, und durch die entsprechenden Ordinaten die Geschwindigkeiten, welche er am Ende dieser Zeiten erlangt hat; so ergibt die Fläche jener Kurve den Raum, welchen der Körper zurückgelegt hat, oder mit anderen Worten, wenn eine Kurve **PC** so genommen wird, daß die Anzahl der gleichen Theile, welche in irgend Einer ihrer Abszissen **AM** enthalten sind, gleich der Anzahl der Sekunden ist, während welcher sich ein Körper bewegt hat, und die Anzahl derselben gleichen Theile, welche in der Ordinate $M_3P_3$ enthalten sind, gleich der Anzahl der Fuße ist, durch welche seine Geschwindigkeit ausgedrückt wird; so ergibt der quadratische Inhalt der entsprechenden Kurvenfläche durch die Anzahl der darin enthaltenen Quadrate solcher gleichen Theilen den Raum in Fußen, welchen der Körper beschrieben hat.

§. 46. Bestimmung des von einem Körper in einer gegebenen Zeit beschriebenen Raumes, wenn derselbe mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortgestoßen und seine Bewegung darauf gleichförmig beschleunigt oder verzögert wird.

Stellt die Linie **AB** die gesammte Zeit **T** der Bewegung des Körpers in Sekunden dar; so versinnliche man durch das Perpendikel **AD**, dessen Länge nach demselben Maaßstabe aufgetragen ist, wie **AB**, die Geschwindigkeit im Anfange der




Bewegung, lege **DE** parallel zu **AB** und, je nachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wird, ziehe man **DC** oder **DF** unter einen Winkel gegen **DE**, dessen Tangente gleich $f$ oder gleich der konstanten Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit in Einer Sekunde ist. Wird darauf irgend eine Abszisse **AM** für die Anzahl von Sekunden $t$ angenommen, während welcher sich der Körper bewegt hat; so stellt die zugehörige Ordinate **MP** oder **MQ** die am Ende der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit dar, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wurde. Denn es ist $PR = RQ = DR.\text{tang}\,PDE = AM.\text{tang}\,PDE$, d. i., weil $AM = t$ und $\text{tang}\,PDE = f$ ist, $PR = RQ = ft$. Ferner ist $RM = AD = V$, also $MP = RM + PR = V + ft$ und $MQ = RM - RQ = V - ft$; demnach stellt nach Gleichung (34) **MP** oder **MQ** die Geschwindigkeit am Ende der Zeit

**AM** dar, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert ist. Da Dies von einer jeden Zeit gilt; so folgt aus dem vorstehenden Paragraphe, daß der ganze Raum, welcher in der Zeit **T** oder **AB** beschrieben wird, durch die Fläche **ABCD** dargestellt werden kann, wenn sich die Bewegung beschleunigt, und durch die Fläche **ABFD**, wenn sich die Bewegung verzögert.

Nun hat man Fläche $ABCD = \frac{1}{2} AB(AD + BC)$, oder weil $AB = T$, $AD = V$, $BC = V + fT$ ist,

$$\text{Fläche } ABCD = \tfrac{1}{2} T(V + V + fT) = VT + \tfrac{1}{2} fT^2.$$

Ferner hat man Fläche $ABFD = \frac{1}{2} AB(AD + BF)$, oder weil **AB** und **AD** dieselben Werthe wie vorhin haben und $BF = V - fT$ ist,

$$\text{Fläche } ABFD = \tfrac{1}{2} T(V + V - fT) = VT - \tfrac{1}{2} fT^2.$$

Allgemein hat man daher, wenn **S** den in **T** Sekunden durchlaufenen Raum darstellt,

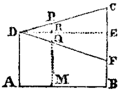
$$S = VT \pm \tfrac{1}{2} fT^2, \ldots . (35)$$

in welcher Formel das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wird.

§. 47. **Beziehung zwischen dem beschriebenen Raume und der erlangten Geschwindigkeit eines Körpers, welcher mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortgestoßen wird und darauf mit einer gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung fortschreitet.**

Ist $v$ die nach **T** Sekunden erlangte Geschwindigkeit, so ist nach Gleichung (34) $v = V \pm fT$, also $T = \pm \dfrac{v - V}{f}$.

Substituirt man diesen Werth von **T** in die Gleichung (35),




so erhält man die gesuchte Beziehung zwischen $v$ und **S**. Um diese Beziehung jedoch ebenso unabhängig, wie die Formel (35) zu entwickeln; so hat man Fläche $ABCD = \frac{1}{2} AB(AD + BC)$, worin $AB = T = \dfrac{v - V}{f}$, $AD = V$, $BC = v$ ist, also

$$\text{Fläche } ABCD = \tfrac{1}{2} \frac{(v - V)}{f} (V + v) = \tfrac{1}{2} \frac{(v^2 - V^2)}{f}.$$

Ebenso hat man

Fläche $\mathbf{ABFD} = \frac{1}{2}\mathbf{AB}(\mathbf{AD}+\mathbf{BF})$, worin $\mathbf{AB}=\mathbf{T}=-\frac{v-\mathbf{V}}{f}$, $\mathbf{AD}=\mathbf{V}$, $\mathbf{BF}=v$ ist, also

$$\text{Fläche } \mathbf{ABFD} = -\tfrac{1}{2}\frac{(v-\mathbf{V})}{f}(v+\mathbf{V}) = -\tfrac{1}{2}\frac{(v^2-\mathbf{V}^2)}{f}.$$

Demnach ist allgemein, wenn $\mathbf{S}$ den Raum darstellt, in welchem die Geschwindigkeit $v$ erlangt ist,

$$\mathbf{S} = \pm\tfrac{1}{2}\frac{(v^2-\mathbf{V}^2)}{f}, \text{ oder}$$

$$v^2-\mathbf{V}^2 = \pm 2f\mathbf{S}, \ldots . (36)$$

in welcher Formel das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wird.

Wenn die Bewegung des Körpers eine verzögerte ist; so wird seine Geschwindigkeit mit der Zeit gänzlich vernichtet werden. Bezeichnet man den Raum, welchen der Körper zurückgelegt haben wird, wenn $v$ null wird, mit $\mathbf{S}_1$; so ergibt sich aus der letzteren Gleichung $o-\mathbf{V}^2=-2f\mathbf{S}_1$, also

$$\mathbf{V}^2 = 2f\mathbf{S}_1 \ldots . (37),$$

worin $\mathbf{V}$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Körper anfangs in entgegengesetzter Richtung der verzögernden Kraft fortgeschleudert wurde, und $\mathbf{S}_1$ der ganze Raum, welchen derselbe vermöge jener anfänglichen Geschwindigkeit in ihrer Richtung zurücklegen kann, ehe er zu Ruhe kommt.

Wenn die Bewegung des Körpers eine beschleunigte ist, und derselbe geht von dem Zustande der Ruhe aus, so daß man $\mathbf{V}=o$ hat; so wird die Gleichung (36) $v^2-o=+2f\mathbf{S}$ oder

$$v^2 = 2f\mathbf{S} \ldots . (38)$$

Ist nun $\mathbf{S}_2$ der Raum, durch welchen sich der Körper in diesem Falle bewegen muß, um eine Geschwindigkeit $\mathbf{V}$ gleich der zu erlangen, mit welcher er in dem vorhergehenden Falle fortgestoßen wurde; so hat man $\mathbf{V}^2=2f\mathbf{S}_2$, woraus folgt, daß $\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2$ oder daß der ganze Raum $\mathbf{S}_1$, durch welchen ein mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $\mathbf{V}$ ausgehender und durch irgend eine Kraft gleichförmig verzögerter Körper sich bewegen kann, ehe er zu Ruhe kommt, gleich dem Raume $\mathbf{S}_2$ ist, durch welchen er sich bewegen muß, um jene Geschwindigkeit V zu erlangen, wenn er, von dem Zustande der Ruhe ausgehend, von derselben Kraft gleichförmig beschleunigt wird.

In dem Falle, wo sich Körper in vertikaler Richtung frei bewegen und der Wirkung der Schwere unterworfen sind, ist $f = 31{,}2644$ Fuß und wird mit $g$ bezeichnet; der Raum $S_2$, durch welchen eine gegebene Geschwindigkeit V erlangt wird, heißt die jener Geschwindigkeit zukommende Höhe.

## Arbeit.

§. 48. Arbeit ist die Verbindung eines stetigen Druckes mit einer stetigen Bewegung, und man sagt, ein mechanisches Agens arbeite, wenn durch dasselbe fortwährend ein Druck überwunden und ein Punkt (an welchem dieser Druck angebracht ist) fortwährend bewegt wird. Weder Druck, noch Bewegung allein sind hinreichend, um Arbeit zu erzeugen, so daß ein Mensch, welcher bloß eine Last auf seinen Schultern trägt, ohne dieselbe zu bewegen, in der hier zu Grunde liegenden Bedeutung nicht mehr arbeitet, als eine Säule, welche ein ungeheures Gewicht unterstützt, und ebenso ein Stein, welcher im luftleeren Raume fällt, nicht mehr arbeitet, als die Planeten, indem sie sich ohne Widerstand durch den Weltenraum schwingen. Was hier unter dem Begriffe Arbeit verstanden wird, ist von anderen Schriftstellern auch wol Quantität der Arbeit, der Leistung, der Wirkung und auch Wirkungsgröße genannt.

§. 49. Einheit der Arbeit. Die bei uns gebräuchliche Einheit, vermittelst welcher man im Stande ist, irgend einen Betrag von Arbeitsgröße zu messen, ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Druck eines Gewichtes von Einem Pfunde durch einen Raum von Einem Fuße in entgegengesetzter Richtung des Druckes zu überwinden. So ist zum Beispiel, wenn das Gewicht von Einem Pfunde auf eine vertikale Höhe von Einem Fuße gehoben ist, eine Einheit der Arbeit verrichtet, weil alsdann der Druck von Einem Pfunde durch den Raum von Einem Fuße in einer Richtung überwältigt ist, welche der Richtung des Druckes gerade entgegengesetzt ist.

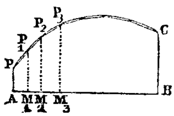
**§. 50. Die Anzahl der Arbeitseinheiten, welche erforderlich ist, um einen Druck von M Pfunden durch einen Raum von N Fußen zu überwinden, ist gleich dem Produkte MN.**

Denn da die Ueberwindung eines Druckes von Einem Pfunde durch den Raum von Einem Fuße Eine Arbeitseinheit erfordert; so leuchtet ein, daß zur Ueberwindung eines Druckes von M Pfunden durch denselben Raum M Einheiten erforderlich sind. Wenn aber M Einheiten erfordert werden, um diesen Druck durch den Raum Eines Fußes zu überwältigen; so müssen offenbar N mal so viel, d. i. NM Einheiten aufgewandt werden, um denselben durch den Raum von N Fußen zu besiegen. Bezeichnet man also die Anzahl der Einheiten, welche zur Ueberwindung eines Druckes von M Pfunden durch einen Raum von N Fußen nöthig sind, mit U; so hat man

$$U = MN \ldots . (39)$$

**§. 51. Bestimmung der Arbeit unter einem veränderlichen Drucke.**

Die Kurve PC sei von der Beschaffenheit, daß wenn irgend




Eine ihrer Abszissen $AM_3$ ebenso viel gleiche Theile, als der Raum, durch welchen irgend ein Theil der Arbeit geschehen ist, Einheiten enthält, in der zugehörigen Ordinate $M_3P_3$ ebenso viel von jenen gleichen Theilen, als in dem Drucke, unter welchem die Arbeit damals gerade verrichtet ist, Einheiten enthalten sind. Theilt man AB in sehr kleine gleiche Theile $AM_1$, $M_1M_2$, etc., zieht die Ordinaten $M_1P_1$, $M_2P_2$, etc., und nimmt an, daß die durch den Raum $AM_1$ verrichtete Arbeit (welche in der Wirklichkeit unter Druckkräften geschehen ist, welche von AP bis $M_1P_1$ variiren) gleichförmig unter einem Drucke erfolgt sei, welcher das arithmetische Mittel zwischen AP und $M_1P_1$ bildet; so leuchtet ein, daß die Anzahl der Einheiten der Arbeit, welche durch jenen sehr kleinen Raum verrichtet ist, gleich der Anzahl der Flächeneinheiten ist, welche in dem Trapeze $APP_1M_1$ (vergl. §. 45.) enthalten sind, und Ähnliches läßt sich von den übrigen Trapezen sagen. Man sieht also, daß die An=

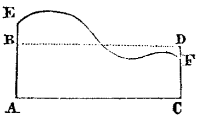
zahl der Einheiten der gesammten Arbeit, welche durch den Raum **AB** verrichtet ist, der Anzahl der Flächeneinheiten gleichkommt, welche sich in der polygonalen Fläche $\mathbf{APP_1P_2P_3CB}$ befinden.

Da nun die Längen $\mathbf{AM_1}$, $\mathbf{M_1M_2}$ etc. ungemein klein angenommen sind; so geht jene Polygon-Fläche endlich in die Kurvenfläche **APCB** über, und die gesammte verrichtete Arbeit wird demnach durch die Anzahl der Flächeneinheiten dieser letzteren Figur dargestellt.

Der Ausdruck für irgend eine solche Kurvenfläche ist allgemein $\int y\,dx$, worin $y$ die Ordinate und $x$ die entsprechende Abszisse bezeichnet. In dem vorliegenden Falle wird aber der veränderliche Druck **P** durch die Ordinate $y$ und der unter diesem veränderlichen Drucke beschriebene Raum **S** durch die Abszisse $x$ dargestellt. Bezeichnet daher **U** die zwischen den Werthen $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ von **S** verrichtete Arbeit; so hat man

$$\mathbf{U}=\int_{\mathbf{S_1}}^{\mathbf{S_2}}\mathbf{P}\,d\mathbf{S}\ldots.(40)$$

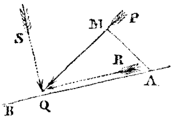
Der **mittlere Druck** ist derjenige, unter welchem ebendieselbe Arbeit durch denselben Raum hervorgebracht werden würde, wenn dieser Druck, statt durch jenen Raum zu variiren, fortwährend sich gleich bliebe. Hiernach ist der mittlere Druck für eine Arbeit, welche durch die Kurvenfläche **AEFC** dargestellt wird, gleich dem, unter welchem eine durch das Rechteck **ABDC** dargestellte Arbeit verrichtet werden würde, wenn die Fläche **ABDC** gleich der Kurvenfläche **AEFC** ist, und dieser mittlere Druck wird hier durch **AB** bezeichnet. Um also den mittleren Druck für irgend einen Fall eines veränderlichen Druckes zu bestimmen, braucht man nur die Kurvenfläche zu ermitteln, welche die unter dem veränderlichen Drucke hervorgebrachte Arbeit darstellt, und dann ein Rechteck über derselben Grundlinie **AC** zu beschreiben, welches der Kurvenfläche an Inhalt gleich ist.




Ist daher **S** der unter einem veränderlichen Drucke beschriebene Raum, **U** die verrichtete Arbeit und $p$ der mittlere Druck; so hat $p\mathbf{S}=\mathbf{U}$, und mithin $p=\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{S}}$.

§. 52. **Bestimmung der Arbeit eines Druckes, dessen Richtung nicht mit derjenigen zusammenfällt, in welcher sein Angriffspunkt gezwungen wird, sich zu bewegen.**

Bisher ist die Arbeit einer Kraft nur unter der Voraussetzung betrachtet, daß sich der Angriffspunkt dieser Kraft entweder in derselben Richtung bewege, in welcher sie selbst wirkt, oder in einer dieser Richtung direkt entgegengesetzten.




Ist nun aber **PQ** die Richtung eines Druckes **P**, dessen Angriffspunkt **Q** gezwungen wird, sich in der Richtung der geraden Linie **AB** zu bewegen, und nimmt man an, daß der Druck **P** sich fortwährend gleich und seine Richtung stets der anfänglichen **PQ** parallel bleibt; so kommt es darauf an, die von jenem Drucke verrichtete Arbeit während der Zeit zu bestimmen, in welcher sich sein Angriffspunkt von **A** nach **Q** bewegt.

Zerlegt man **P** in die beiden Kräfte **R** und **S**, von welchen **R** parallel und **S** perpendikular zu **AB** ist; so sieht man, daß weil in der Richtung **SQ** keine Bewegung erfolgt, der Druck **S** keine Arbeit verrichtet, und daß mithin die ganze Arbeit von dem Drucke **R** allein geleistet wird und $= R . \overline{AQ}$ ist.

Nun ist $R = P . \cos PQR$, also die verrichtete Arbeit $= P . \overline{AQ} . \cos PQR$. Fällt man von dem Punkte **A** das Perpendikel **AM** auf die Richtung des Druckes **PQ**, so ist $\overline{AQ} . \cos PQR = QM$, und man hat daher für die geleistete Arbeit den Werth

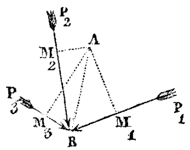
$$P . \overline{QM}.$$

Hieraus folgt, daß die Arbeit irgend einer Kraft, welche nicht in der Richtung der Bewegung des Angriffspunktes wirkt, derjenigen gleich ist, welche diese Kraft hervorbringen würde, wenn sich der Angriffspunkt in der Richtung der Kraft selbst, aber nur durch eine Länge **MQ** bewegte, welche die Projektion des von dem Angriffspunkte wirklich zurückgelegten Raumes **AQ** ist. Das Produkt $P . \overline{QM}$ kann die Arbeit der Kraft **P** in Beziehung zu ihrer Richtung **PQ** genannt werden.

Der vorstehende Satz, welcher ganz allgemein bewiesen ist, welches auch die Entfernung sei, durch welche der Angriffspunkt bewegt wird, wofern nur der Druck sich stets gleich und seine Richtung der ursprünglichen stets parallel bleibt, hat offenbar noch volle Gültigkeit für ungemein kleine Räume der Bewegung, selbst wenn der Druck sowol in Größe, wie in Richtung veränderlich ist, weil für solche ungemein kleinen Veränderungen in der Lage des Angriffspunktes die Variationen des Druckes selbst, sowol in Größe, wie in Richtung, unmeßbar gering sein müssen, und demnach auch die daraus resultirenden Variationen in der Arbeit selbst im Vergleich zu der ganzen Arbeit bei sehr kleinen Ortsveränderungen nur äußerst klein sein können, so daß sie gegen diese Arbeit ganz vernachlässigt werden dürfen, sobald man die Veränderungen der Lage des Angriffspunktes nur klein genug annimmt.

§. 53. Wenn auf Ein und denselben Punkt A mehrere Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ angebracht sind, welche sich fortwährend gleich und parallel bleiben, während der Punkt A gezwungen wird, sich durch die gerade Linie AB zu bewegen; so ist die gesammte auf den Punkt A entwickelte Arbeit gleich der Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte in Beziehung zu ihren verschiedenen Richtungen, wobei die Arbeit für eine jede solche Kraft positiv zu nehmen ist, welche in der direkten Richtung der Bewegung wirkt, während die bezügliche Arbeit für irgend eine andere Kraft, deren Wirkung der Bewegung des Angriffspunktes entgegengesetzt ist, negativ genommen werden muß.

Bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die Neigungswinkel der




Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gegen die Linie AB, so werden die Komponenten dieser Kräfte in der Richtung der Linie AB resp. $P_1 \cos\alpha_1$, $P_2 \cos\alpha_2$, $P_3 \cos\alpha_2$, sein, und dieselben können durch eine einzige Kraft in der Richtung jener Linie vertreten werden, deren Ausdruck $P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots$ ist, wobei alle diejenigen Glieder negativ zu nehmen sind, welche Kräfte enthalten, deren Richtung von B nach A gekehrt ist. Die ganze hervorgebrachte Arbeit ist demnach gleich

$$(P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots).\overline{AB}$$
$$= P_1 . \overline{AB} \cos\alpha_1 + P_2 . \overline{AB} \cos\alpha_2 + P_3 . \overline{AB} \cos\alpha_3 + \ldots, \text{ das ist}$$
$$= P_1 . \overline{BM_1} + P_2 . \overline{BM_2} + P_3 . \overline{BM_3} + \ldots$$

In diesem Ausdrucke stellen die einzelnen Glieder die Arbeiten der verschiedenen Kräfte in Beziehung zu ihren Richtungen dar, wobei ein jedes derselben positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem die Richtung der entsprechenden Kraft nach der Seite der Bewegung oder nach entgegengesetzter Seite gekehrt ist.

Bezeichnet daher U die gesammte Arbeit und $U_1$ und $U_2$ die Summen der in entgegengesetzten Richtungen erzeugten Arbeiten; so hat man

$$U = U_1 - U_2 \ldots . (41)$$

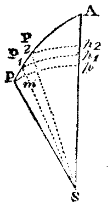
§. 54. Wenn mehrere auf Einen Punkt angebrachte Kräfte im Gleichgewichte sind, und ihr Angriffspunkt wird bewegt; so ist die gesammte Arbeit dieser Kräfte, welche in der Richtung der Bewegung erzeugt wird, gleich der gesammten Arbeit, welche in der entgegengesetzten Richtung erzeugt wird.

Denn wenn sich die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ (§. 53) im Gleichgewichte befinden; so sind die Summen ihrer Komponenten nach entgegengesetzten Richtungen von **AB** einander gleich (§. 10). Demzufolge wird die ganze Arbeit U längs **AB**, welche nach dem vorhergehenden Satze gleich der Arbeit einer durch die Differenz dieser Summen dargestellten Kraft ist, gleich null sein, und man hat $o = U_1 - U_2$ oder $U_1 = U_2$, das heißt, die von den Kräften $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in der Einen Richtung von **AB** entwickelte Arbeit ist gleich der nach der entgegengesetzten Richtung entwickelten Arbeit.

§. 55. Wenn auf einen Körper eine Kraft wirkt, deren Richtung stets nach einem gewissen Punkte S gekehrt ist, den man den Mittelpunkt der Kraft nennt, und der Körper wird gezwungen, eine gegebene Kurve **PA** in einer der Wirkung der Kraft entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen, und man macht auf der Linie **SA** die Länge $Sp = SP$; so wird die auf den Körper bei

**seiner Bewegung durch die Kurve PA entwickelte Arbeit gleich der sein, welche erforderlich sein würde, um denselben in einer geraden Linie von $p$ nach A zu bewegen.**

Denn betrachtet man die Kurve PA als ein Polygon von unendlich vielen sehr kleinen Seiten $PP_1$, $P_1P_2$, etc. und beschreibt aus dem Punkte S mit den Halbmessern $SP$, $SP_1$, $SP_2$, etc. Kreisbogen, welche die Linie SA in $p, p_1, p_2$, etc. schneiden; so kann man wegen der Kleinheit von $PP_1$ annehmen, daß die Kraft durch diesen Raum fortwährend in einer zu $SP_1$ parallelen Richtung wirke. Demnach ist die bei der Beschreibung des Raumes $PP_1$ verrichtete Arbeit gleich der, welche entwickelt werden muß, um den Körper durch die Entfernung $mP_1$ zu bewegen, weil $mP_1$ die Projektion von $PP_1$ auf die Richtung $SP_1$ der Kraft ist (§. 52). Es ist aber $mP_1 = pp_1$ und daher die durch $PP_1$ hervorgebrachte Arbeit gleich der, welche erforderlich sein würde, um den Körper längs der Linie SA durch den Raum $pp_1$ zu bewegen. Auf eine ähnliche Weise ist die durch $P_1P_2$ entwickelte Arbeit gleich der, welche aufgewendet werden muß, um den Körper durch $p_1p_2$ zu treiben, so daß die Arbeit durch $PP_2$ gleich der durch $pp_2$ ist, und so fort für alle übrigen Punkte der Kurve. Hieraus folgt endlich, daß die beim Durchlaufen der Kurve PA erzeugte Arbeit gleich der ist, welche entwickelt werden müßte, um den Körper durch den Raum $pA$ zu treiben.



Bei dieser Untersuchung ist natürlich vorausgesetzt, daß die Größe der Kraft, wofern sie nicht fortwährend konstant ist, doch nur von dem Abstande des Punktes, auf welchen sie wirkt, von dem Mittelpunkte S abhängt, so daß, wenn die Abstände der Punkte $p$ und P von S einander gleich sind, auch die Wirkung der Kraft auf den Punkt $p$ gleich der Wirkung auf den Punkt P ist, und ebenso die Wirkung auf $p_1$ gleich der auf $P_1$, die auf $p_2$ gleich der auf $P_2$, und so fort.

§. 56. **Wenn der Punkt S in einer im Vergleich zu AP ungemein großen Entfernung liegt; so können alle von S nach AP gezogenen Linien als parallel angese-**

hen werden. Dies ist der Fall bei der Wirkung der Schwerkraft an der Oberfläche der Erde, welche gegen einen Punkt, den Mittelpunkt der Erde, gerichtet ist, der im Vergleich zu den Längen, für welche die Arbeit der mechanischen Agenzien gewöhnlich untersucht wird, in einer ungeheuer großen Entfernung liegt.

Es folgt also, daß die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen schweren Körper längs einer Kurve **PA** oder längs einer geneigten Ebene hinaufzubewegen, gleich der ist, welche aufgewendet werden muß, um denselben in einer vertikalen Linie $pA$ zu derselben Höhe zu erheben.

Hierbei wird angenommen, daß die Dimensionen des Körpers unendlich klein seien, oder daß sich derselbe auf einen schweren materiellen Punkt reduzire. Hätte er jedoch beträchtliche Dimensionen; so würde die Arbeit, welche erforderlich ist, um seinen Schwerpunkt durch irgend eine Kurve **PA** zu bewegen, gleich der sein, welche zur Erhebung des Schwerpunktes auf eine gleiche vertikale Höhe $pA$ nothwendig wäre (vergl. §. 60).

Endlich muß noch bemerkt werden, daß die vorstehenden Sätze nur unter der vorausgeschickten Bedingung Gültigkeit behalten, daß auf den Körper nur die einzige nach **S** gerichtete Kraft wirke, und es ist hierbei durchaus keine Rücksicht auf die Reibung oder auf beliebige andere Kräfte genommen, welche sich der Bewegung des Körpers entgegensetzen können.

§. 57. Im Vorhergehenden ist die Arbeit immer unter der Voraussetzung bestimmt, daß der Körper gezwungen werde, sich so zu bewegen, daß dadurch eine Zunahme seines Abstandes von dem Mittelpunkte **S** herbeigeführt wird, oder daß seine Bewegung der entgegengesetzt ist, welche ihm die Kraft mitzutheilen strebt. Es leuchtet jedoch ein, daß die Arbeit ganz dieselbe sein würde, wenn sich der Körper, statt von **P** nach **A**, von **A** nach **P** bewegt hätte, vorausgesetzt, daß in diesem letzteren Falle in jedem Punkte seiner Bahn eine solche Kraft auf ihn angebracht gewesen wäre, welche verhindert hätte, daß sich seine Bewegung durch die fortwährend nach **S** wirkende Kraft beschleunigen konnte; denn offenbar mußte zur Verhinderung dieser Beschleunigung in einer Richtung von **S** aus stets eine Kraft gleich der, welche den Körper nach **S** anzog, auf denselben angebracht werden, und die Arbeit einer solchen Kraft ist begreiflich dieselbe, wofern nur der Weg derselbe ist, der Körper mag sich nach der Einen oder nach der anderen Seite durch diesen Weg bewegen, da sie in beiden Fällen die Arbeit derselben Kraft über denselben Raum, nur in entgegengesetzten Richtungen ist.

§. 58. Wenn mehrere parallele Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gegeben sind, und man verrückt einen jeden ihrer Angriffspunkte um irgend eine gegebene Entfernung aus der früheren Lage in eine andere; so ist die Arbeit, welche erforderlich sein würde, um die Resultante dieser Kräfte durch einen Raum zu verrücken, welcher demjenigen gleich ist, um welchen ihr Mittelpunkt des Druckes bei dieser Ortsveränderung verschoben ist, gleich der Differenz zwischen der Gesammtarbeit derjenigen Kräfte, deren Angriffspunkte in direkter Richtung ihrer Kräfte bewegt sind, und der Gesammtarbeit der übrigen Krüfte, deren Angriffspunkte in entgegengesetzter Richtung ihrer Kräfte bewegt sind.

Denn (§. 17), wenn $y_1, y_2, y_3, \ldots$ die Abstände der Angriffspunkte dieser parallelen Kräfte von irgend einer gegebenen Ebene in ihrer ersten Lage sind und $h$ der Abstand ihres Mittelpunktes des Druckes von derselben Ebene ist, wenn ferner $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ und $H$ die entsprechenden Abstände in der zweiten Lage darstellen und die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ positiv oder negativ genommen werden, jenachdem ihre Richtungen der gegebenen Ebene zu- oder abgekehrt sind; so hat man

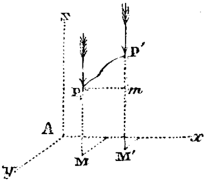
$$h(P_1+P_2+P_3+\ldots)=P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+\ldots \text{ und}$$

$$H(P_1+P_2+P_3+\ldots)=P_1Y_1+P_2Y_2+P_3Y_3+\ldots, \text{ mithin}$$

$$(H-h)(P_1+P_2+P_3+\ldots)=P_1(Y_1-y_1)+P_2(Y_2-y_2)+P_3(Y_3-y_3)+\ldots \quad (42)$$

Die einzelnen Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind offenbar positiv oder negativ, jenachdem der Druck $P$ und gleichzeitig die entsprechende Differenz $Y-y$ seines Abstandes von der gegebenen Ebene in seinen beiden Lagen dieselben oder entgegengesetzte Zeichen haben. Nun ist der Druck $P$ nach der Voraussetzung positiv oder negativ, jenachdem derselbe von der Ebene ab oder gegen dieselbe ein wirkt; ferner ist $Y-y$ offenbar positiv oder negativ, jenachdem der Angriffspunkt von P von der Ebene ab oder gegen dieselbe ein bewegt ist. Hieraus folgt, daß ein jedes der obigen Glieder $P(Y-y)$ positiv oder negativ sein wird, jenachdem der entsprechende Angriffspunkt in derselben Richtung, in welcher der darauf angebrachte Druck wirkt, oder in einer der Wirkung dieses Druckes entgegengesetzten Richtung verrückt ist.

Da nun hierbei die Ebene, von welcher die Abstände der verschiedenen Angriffspunkte gemessen werden, eine ganz beliebige sein kann; so nehme man dazu eine auf der gemeinschaftlichen Richtung aller Kräfte perpendikular stehende Ebene an. Wird diese Ebene durch $Axy$ dargestellt, sind P und P′ die beiden Lagen des Angriffspunktes der Kraft P (wobei der von diesem Punkte beschriebene Weg PP′ ein ganz willkürlicher sein kann) und MP und M′P′ die perpendikularen Abstände der Punkte P und P′ von der Ebene; so hat man, wenn die Linie P$m$ von P perpendikular auf M′P′ gezogen wird,




$$P(Y-y)=P(M'P'-MP)=P.\overline{mP'};$$

aber nach §. 55 ist $P.\overline{mP'}$ die Arbeit der Kraft P, wenn ihr Angriffspunkt von P nach P′ verrückt wird. Demnach stellt ein jedes Glied der rechten Seite der Gleichung (42) die Arbeit der entsprechenden Kraft dar, so daß, wenn $\Sigma u_1$ die Gesammtarbeit aller derjenigen Kräfte bezeichnet, deren Angriffspunkte in denselben Richtungen verrückt sind, in welchen die Kräfte wirken, und $\Sigma u_2$ die Gesammtarbeit aller der übrigen Kräfte bezeichnet, deren Angriffspunkte in entgegengesetzten Richtungen ihrer Wirkungen verrückt sind, die rechte Seite jener Gleichung durch $\Sigma u_1 - \Sigma u_2$ dargestellt wird. Außerdem ist die linke Seite derselben Gleichung offenbar der Ausdruck für die Arbeit, welche erforderlich ist, um die resultirende Kraft $P_1+P_2+P_3+\ldots$ durch den Raum $H-h$, das ist, durch den Raum, um welchen der Mittelpunkt des Druckes von der gegebenen Ebene ab oder gegen dieselbe ein bewegt ist, zu verrücken.

Bezeichnet man also die Arbeitsgröße, welche zu dieser Verrückung des Mittelpunktes des Druckes erforderlich ist, mit U; so hat man

$$U = \Sigma u_1 - \Sigma u_2 \ldots. (43)$$

§. 59. Wenn die Summe derjenigen parallelen Kräfte, deren Wirkungen nach der Einen Seite gerichtet sind, gleich der Summe der übrigen ist, deren Wirkungen nach der entgegengesetzten Seite streben; so ist $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = o$. In diesem Falle ist also auch $U = o$ und daher $\Sigma u_1 - \Sigma u_2 = o$ oder $\Sigma u_1 = \Sigma u_2$, so daß, wenn in irgend einem Systeme von parallelen Kräften die Summe derjenigen Kräfte, welche nach der Einen Seite streben, gleich der Summe der übrigen Kräfte ist, welche nach der entgegengesetzten Seite streben, die Gesammtarbeit derjenigen, deren Angriffspunkte in den Richtungen der darauf angebrachten Kräfte selbst bewegt werden, gleich der Gesammtarbeit der übrigen ist, deren Angriffspunkte in entgegengesetzten Richtungen ihrer Kräfte bewegt werden.

Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn die parallelen Kräfte im Gleichgewichte sind, weil alsdann die Summe der nach Einer Seite wirkenden Kräfte gleich der Summe der nach der anderen Seite wirkenden ist.

§. 60. Der vorstehende Satz gilt begreiflich auch von einem Systeme von Gewichten, da Dies Kräfte sind, deren Richtungen immer einander parallel sind, wie auch immer ihre Angriffspunkte bewegt werden mögen. Der Mittelpunkt des Druckes eines Systemes von Gewichten ist sein Schwerpunkt (§. 19); es folgt also, daß wenn die Gewichte, welche ein solches System bilden, einzeln in beliebigen Richtungen und durch beliebige Abstände bewegt werden, die Differenz zwischen der nach oben entwickelten Gesammtarbeit, welche erforderlich ist, um diese Ortsveränderung zu bewirken, und der nach unten entwickelten Gesammtarbeit, welche hierzu gleichfalls erforderlich ist, denselben Werth hat, wie die Arbeit, welche aufgeboten werden müßte, um die Summe aller Gewichte auf eine Höhe zu erheben, welche der gleichkommt, um welche ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt gehoben oder gesenkt ist. Ferner folgt, daß wenn ein solches System von Gewichten durch den Widerstand Eines oder mehrerer fester Punkte im Gleichgewichte erhalten wird, und alsdann eine Bewegung bekommt, (da die Arbeit des Widerstandes der festen Punkte null ist) die Gesammtarbeit der herabsinkenden Gewichte gleich der der aufsteigenden ist.

§. 61. Wenn perpendikular zu den Richtungen mehrerer paralleler Kräfte ein'e Ebene angenommen wird, und es gibt zwei verschiedene Lagen der Angriffspunkte von einigen dieser Kräfte, in welchen sie sich in verschiedenen Abständen von der Ebene befinden, während die Angriffspunkte der übrigen Kräfte in demselben Abstande von jener Ebene bleiben, und das System ist in beiden Lagen im Gleichgewichte; so wird sich der Mittelpunkt des Druckes der zuerst erwähnten Kräfte in beiden Lagen in demselben Abstande von der Ebene befinden.

Denn da das System in beiden Lagen im Gleichgewichte ist; so hat man für beide

$$P_1 + P_2 + P_3 +, \ldots = o$$

und daher auch

$$(Y_1 - y_1)P_1 + (Y_2 - y_2)P_2 + (Y_3 - y_3)P_3 + \ldots + (Y_n - y_n)P_n = o.$$

Nun sei $P_n$ irgend Eine von den Kräften, deren Angriffspunkt in beiden Lagen gleich weit von der gegebenen Ebene entfernt bleibt; alsdann ist

$$Y_n = y_n \text{ und } Y_n - y_n = o;$$

folglich auch

$$(Y_1 - y_1)P_1 + (Y_2 - y_2)P_2 + (Y_3 - y_3)P_3 + \ldots + (Y_{n-1} - y_{n-1})P_{n-1} = o,$$

das ist

$$Y_1P_1 + Y_2P_2 + Y_3P_3 + \ldots + Y_{n-1}P_{n-1} = y_1P_1 + y_2P_2 + y_3P_3 + \ldots + y_{n-1}P_{n-1}$$

und auch, wenn man mit $P_1 + P_2 + \ldots P_{n-1}$ dividirt,

$$\frac{Y_1P_1 + Y_2P_2 + Y_3P_3 + \ldots + Y_{n-1}P_{n-1}}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1}} = \frac{y_1P_1 + y_2P_2 + y_3P_3 + \ldots + y_{n-1}P_{n-1}}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1}}$$

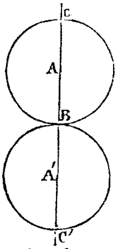
das ist

$$H_{n-1} = h_{n-1},$$

worin $H_{n-1}$ den Abstand des Mittelpunktes des Druckes der Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ von der gegebenen Ebene in der ersten Lage und $h_{n-1}$ den Abstand desselben Punktes in der zweiten Lage bezeichnet, ein Abstand, der also in beiden Lagen derselbe bleibt.

Aus diesem Satze folgt, daß wenn ein System von Gewichten durch den Widerstand Eines oder mehrerer fester Punkte getragen wird, und es gibt irgend zwei Lagen, in denen jene Gewichte mit den Widerständen dieser Punkte im Gleichgewichte sind; so ist die Höhe des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der Gewichte in beiden Lagen dieselbe *). Ferner folgt, daß wenn es eine

*) Damit dieser Satz volle Richtigkeit behält, ist es durchaus nothwendig, daß bei der Verrückung des Systemes die darin als fest anzunehmenden Punkte auch




wirklich in derselben Lage bleiben, was bei der Bewegung mancher Systeme um äußerlich feste Pnnkte zuweilen der Fall zu seiu scheint, aber doch in der That nicht stattfindet. Denkt man sich z. B. einen Körper **BC**, dessen Schwerpunkt **A** ist, so wird derselbe im Gleichgewichte bleiben, wen man in seinem Schwerpunkte **A** eine von unten nach oben wirkende Kraft gleich seinem Gewichte, oder einen festen Widerstand anbringt, welcher im Stande ist, den Gesammtdruck des Körpers auszuhalten. Der Körper würde auch in Ruhe erhalten werden, wenn man ihn in irgend einem Punkte der durch seinen Schwerpunkt gehenden Vertikalen **BC** z. B. in **B** aufhinge, weil der in seinem Schwerpunkte erforderliche Gegendruck durch die vorausgesetzte Festigkeit des Materiales in der Richtung **BC** nach diesem Punkte wirklich verpflanzt werden würde; jedoch wäre es sehr irrig, den Punkt **B**, wenn er wirklich fest gemacht würde, als einen solchen zu betrachten, wie er bei der vorliegenden Untersuchung vorausgesetzt ist. Der Punkt **B** besitzt die Eigenschaft, daß ein darin angebrachter Druck oder Widerstand das System im Gleichgewichte erhalten kann, nicht; er bewirkt das bei seiner Befestigung eintretende Gleichgewicht nur vermöge der Festigung des Stoffes, woraus der Körper besteht, und nicht deshalb, weil er der Angriffspunkt der Resultante der übrigen auf den Körper wirkenden Kräfte wäre. Er liegt nur in der Richtung dieser Resultanten, und ist deshalb auch im Stande einen auf ihn angebrachten Widerstand nach dem wahren Angriffspunkte **A** dieser Resultante fort zu pflanzen. Machte man nun auch den Punkt **B** fest; so hätte man immer noch keinen festen Punkt von der Beschaffenheit, wie er oben angenommen ist, so nämlich, daß eine darin angebrachte, in paralleler Richtung mit den übrigen Kräften wirkende Kraft im Stande wäre, das System im Gleichgewichte zu erhalten (was sich besonders deutlich herausstellt, wenn man plötzlich die gemeinschaftliche Richtung aller parallelen Kräfte änderte, wodurch der Punkt **B** offenbar die Eigenschaft ganz verlöre, durch Festwerden das System im Gleichgewichte zu erhalten). Aus diesem Grunde würde sich denn auch der vorstehende Satz an diesem Systeme nicht bewähren, sobald man irgend einen anderen Punkt, außer **A**, z. B. **B** fest machte, und alsdann das System in eine zweite Lage **BC′** bewegte, in welcher es sich gleichfalls im Gleichgewichte befände; der Schwerpunkt **A** würde hierbei durchaus nicht in derselben Höhe bleiben.

Dasselbe läßt sich von dem Falle sagen, wo in dem Körper **BC** zwei

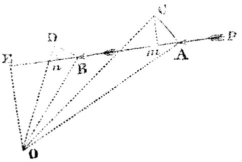
Reihe von Lagen gibt, in welchen allen die Gewichte um dergleichen feste Punkte im Gleichgewichte sind; so bleibt der Schwerpunkt fortwährend in derselben Höhe, sowie das System nach und nach in diese Lagen übergeht.

Wenn alle diese Gleichgewichtslagen unendlich nahe aneinder liegen; so bleibt der Schwerpunkt auch während einer unendlich kleinen Bewegung der Angriffspunkte in derselben Höhe, und umgekehrt, wenn der Schwerpunkt bei einer unendlich kleinen Bewegung der Angriffspunkte in derselben Höhe bleibt; so ist das System in zwei oder mehreren solchen unendlich benachbarten Lagen der Angriffspunkte im Gleichgewichte.

## Arbeit der Kräfte, welche in verschiedenen Richtungen auf einen Körper angebracht sind, der um eine feste Axe drehbar ist.

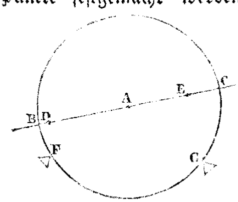
§. 62. Die Arbeit einer Kraft, welche an einem um irgend eine feste Axe drehbaren Körper angebracht ist, bleibt dieselbe, in welchem Punkte ihrer Richtung jene Kraft auch angebracht werden möge.

Wenn also **AB** die Richtung einer Kraft ist, welche an einem Körper angebracht ist, der sich um die feste Axe **O** drehen kann; so wird die von jener Kraft verrichtete Arbeit sich gleich bleiben, ob man dieselbe in **A** oder in **B** anbringt. Um Dies nachzuweisen, nehme man an, der Körper drehe sich um **O** um den sehr kleinen Winkel **AOC**,




---

Punkte festgemacht werden sollen. Diese müssen ebenfalls immer von der Art sein, daß sie als die Angriffspunkte zweier Kräfte angesehen werden können, welche im Stande sind, das System im Gleichgewichte zu erhalten. Es müssen Dies daher immer zwei Punkte, wie **D** und **E** sein, welche in irgend Einer durch den Schwerpunkt **A** gehenden geraden Linie **BC** liegen, weil sich auf solche zwei Punkte nach den früheren Gesetzen die durch **A** gehende Resultante nur zerlegen läßt. Das Festwerden irgend zweier anderer Punkte, wie **F**, **G**, welche mit **A** in Einer Vertikalebene liegen, könnte zwar ebenfalls die Ruhe des Systemes erhalten, aber nur mittelbar durch die Festigkeit des Stoffes, woraus der Körper besteht, und deshalb können auch diese Punkte nicht für solche feste Punkte angesehen werden, wie sie im vorstehenden Papagraphe vorausgesetzt sind.



so daß die Punkte A und D die Kreisbögen AC und BD beschreiben. Zieht man $Cm$, $Dn$ und OE perpendikular auf AB, so wird, wenn P die längs AB angebrachte Kraft bezeichnet, $P.\overline{Am}$ die verrichtete Arbeit darstellen, sobald P in A angebracht ist (§. 52.); dagegen wird diese Arbeit durch $P.\overline{Bn}$ dargestellt werden, sobald die Kraft P in B angebracht ist. Beide Arbeiten werden einander gleich sein, wenn $Am$ gleich $Bn$ ist.

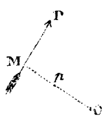
Da nun AC und BD sehr klein sind; so können sie als gerade Linien angesehen werden. Da ferner BD und BE respektive perpendikular auf OB und OE stehen; so ist $\angle DBE = \angle BOE$, und weil AC und AE perpendikular auf OA und OE stehen; so ist $\angle CAE = \angle AOE$. Es ist aber $Am = \overline{CA}.\cos.CAE = \overline{CA}.\cos.AOE = \frac{CA}{OA}.\overline{OA}.\cos.AOE = \frac{CA}{OA}.OE.$

Ebenso ist $Bn = \overline{DB}.\cos.DBE = \overline{DB}.\cos.BOE = \frac{DB}{OB}.\overline{OB}.\cos.BOE = \frac{DB}{OB}.OE.$

Endlich hat man, weil $\angle AOC = \angle BOD$ ist, $\frac{CA}{OA} = \frac{DB}{OB}$, und mithin $Am = Bn$.

§. 63. Wenn mehrere auf der Richtung einer festen Axe perpendikular stehende Kräfte um diese Axe im Gleichgewichte sind; so ist die Gesammtarbeit derjenigen, welche das System nach der Einen Seite zu drehen streben, gleich der Gesammtarbeit der übrigen, welche dasselbe nach der entgegengesetzten Seite um die feste Axe zu drehen streben.

Denn wenn P irgend Eine der gegebenen Kräfte, O die feste Axe und OM ein Perpendikel auf die Richtung von P ist; so wird die Arbeit dieser Kraft immer dieselbe sein, in welchem Punkte ihrer Richtung die Letztere auch angebracht werden möge; man kann sich diese Kraft also in M angebracht denken. Nimmt man nun an, das ganze System drehe sich um O um einen sehr kleinen Winkel $\vartheta$, und bezeichnet den Abstand OM mit $p$; so wird $p\vartheta$ den Raum darstellen, welchen der Punkt M in der Richtung der Kraft P beschreibt,



und es wird daher die Arbeit dieser Kraft $= P.p.\vartheta$ sein. Nun seien $P_1, P_2, P_3, \ldots$ diejenigen Kräfte, welche in der Richtung der Bewegung wirken, und $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ diejenigen, welche in entgegengesetzter Richtung wirken, ferner seien $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die perpendikularen Abstände der Ersteren und $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots$ die der Letzteren von der festen Axe; alsdann hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente (s. §. 9 des Anhanges zum ersten Abschnitte)

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots = P'_1 p'_1 + P'_2 p'_2 + P'_3 p'_3 + \ldots,$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $\vartheta$ multiplizirt

$$P_1 p_1 \vartheta + P_2 p_2 \vartheta + P_3 p_3 \vartheta + \ldots = P'_1 p'_1 \vartheta + P'_2 p'_2 \vartheta + P'_3 p'_3 \vartheta + \ldots$$

$Pp\vartheta$ ist aber allgemein die Arbeit der Kraft $P$, und demnach ist die Gesammtarbeit der Kräfte, welche das System nach der Einen Richtung zu drehen streben, gleich der Gesammtarbeit der übrigen, welche dasselbe nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben.

## Anhäufung der Arbeit in einem sich bewegenden Körper.

§. 64. In einem jeden sich bewegenden Körper wird durch die Wirkung der Kräfte, welche seine Bewegung erzeugt haben, eine gewisse Menge von innerer Kraft angehäuft, welche derselbe auf irgend einen Widerstand äußerst, der seiner Bewegung entgegentritt, und welche durch die Arbeit gemessen wird, die derselbe auf jenen Widerstand entwickelt. Um die Bezeichnungen nicht überflüssig zu vermehren, werden wir dieses gesteigerte Vermögen zu arbeiten, welches durch die Größe der Arbeit gemessen wird, die dadurch hervorgebracht werden kann, die in dem Körper *angehäufte Arbeit* nennen. In diesem Sinne muß man es nehmen, wenn gesagt wird, daß in einer abgeschossenen Kanonenkugel die Arbeit *angehäuft* sei, welche dieselbe auf die Widerstände entwickelt, die sich ihrem Fluge entgegensetzen, oder daß in dem fließenden Wasser eines Mühlgerinnes die Arbeit angehäuft sei, welche dasselbe dem Rade (namentlich dem durch den Stoß des Wassers getriebenen unterschlächtigen Rade) mit theilt, oder daß in einem frei bergab rollenden Wagen die Arbeit angehäuft sei, welche denselben noch auf eine beträchtliche Länge des nächstfolgenden Hügels hinauftreibt. Dadurch, daß der Druck, unter welchem eine Arbeit verrichtet wird, den ihm entgegengesetzten Widerstand überschreitet, geschieht es, daß Arbeit in einem sich bewegenden Körper angehäuft wird, und es wird weiter unten (§. 69) gezeigt werden, daß in allen Fällen die angehäufte Arbeit gleich der Arbeit ist, welche über das zur Ueberwindung der Widerstände erforderliche Maaß hinaus auf einen Körper entwickelt worden ist, ein Prinzip, welches schon als an sich selbst klar angenommen werden könnte.

§. 65. Der solchergestalt angehäufte Betrag an Arbeit in einem Körper, welcher sich mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt, ist offenbar derselbe, welches auch immer die Umstände gewesen sein mögen, unter denen er diese Geschwindigkeit erlangt hat. Ob einer Kugel die Geschwindigkeit durch die Explosion des Pulvers in einem Schießgewehre, oder durch den freien Fall von einer angemessenen Höhe mitgetheilt ist, bleibt für das Resultat gleichgültig, wofern nur in beiden Fällen die eingedrückte Geschwindigkeit und das Gewicht der Kugel dieselben sind; die darin angehäufte Arbeit, welche durch den Effekt gemessen wird, den die Kugel hervorzubringen im Stande ist, bleibt offenbar derselbe.

Ebenso ist der gesammte Betrag an Arbeit, welchen dieselbe fähig ist, bei der Ueberwältigung irgend eines Widerstandes zu entwickeln, immer derselbe, von welcher Beschaffenheit auch dieser Widerstand sein möge.

§. 66. Bestimmung der Anzahl von Einheiten der angehäuften Arbeit eines Körpers, welcher sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegt.

$w$ sei das Gewicht des Körpers in Pfunden und $v$ seine Geschwindigkeit in Fußen. Nimmt man an, der Körper werde mit der Geschwindigkeit $v$ in einer der Schwere direkt entgegengesetzten Richtung fortgestoßen; so wird er zu einer Höhe $h$ ansteigen, von welcher er herabfallen muß, um dieselbe Geschwindigkeit $v$ zu erlangen (§. 47). Es muß mithin in dem Augenblicke des Wurfes in dem Körper eine Quantität der Arbeit angehäuft gewesen sein, welche genügend ist, um denselben auf diese Höhe $h$ zu erheben. Da nun aber die Anzahl der Einheiten der Arbeit, welche erforderlich ist, um ein Gewicht $w$ auf eine Höhe $h$ zu erheben, durch $wh$ dargestellt wird; so muß dies offenbar die Anzahl der Einheiten der Arbeit sein, welche im Augenblicke des Wurfes in dem Körper angehäuft war. Da ferner $h$ die Höhe ist, von welcher der Körper fallen muß, um die Geschwindigkeit $v$ zu erlangen; so hat man $v^2=2gh$ (§. 47), und daher $h=\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$, woraus folgt, daß wenn $\mathrm{U}$ die Anzahl der Einheiten der in dem Körper angehäuften Arbeit bezeichnet,

$$\mathrm{U}=\tfrac{1}{2}\frac{w}{g}v^2 \ldots . (44)$$

ist.

Aus dem vorhergehenden Paragraphe geht hervor, daß dieser Ausdruck in allen Fällen die angehäufte Arbeit in einem Körper bezeichnet, welcher $w$ Pfund wiegt und sich mit einer Geschwindigkeit von $v$ Fuß bewegt, welches auch immer die Umstände gewesen sein mögen, unter denen er diese Geschwindigkeit erlangt hat.

Das Produkt $(\frac{w}{g})v^2$ nennt man die lebende Kraft des Körpers, so daß die angehäufte Arbeit durch die Hälfte der lebenden Kraft dargestellt wird. Der Quotient $(\frac{w}{g})$ heißt die Masse*) des Körpers, und die lebende Kraft desselben ist mithin das Produkt seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit.

---

*) Der Begriff von Masse bezieht sich auf die Quantität der Materie, welche in einem gegebenen Volum eines Körpers angehäuft ist. Da alle Atome der Materie von der Wirkung der Schwere gleich stark affizirt werden, und die Gesammtwirkung der Schwere auf einen Körper durch das Gewicht desselben gemessen wird; so muss seine Masse oder die Menge der darin enthaltenen Atome offenbar seinem Gewichte proportional sein, und kann mithin durch den Quotienten $\frac{w}{g}$ dargestellt werden, weil es ganz willkürlich bleibt, welche Einheit man dem Maaße der Masse zu Grunde legen will. Die in der Volumeinheit eines Körpers enthaltene Masse nennt man auch seine Dichtigkeit, welche also für verschiedene Körper den absoluten Gewichten ihrer Volumeinheiten proportional ist. Die Darstellung der Masse eines Körpers durch den

## §. 67. Bestimmung der Arbeit, welche ein Körper gewinnt oder verliert, wenn er von Einer Geschwindigkeit in eine andere übergeht.

In einem Körper, dessen Gewicht $w$ ist, und welcher sich mit einer Geschwindigkeit $v$ bewegt, ist eine Anzahl von Arbeitseinheiten angehäuft, welche nach §. 66 durch die Formel $\frac{1}{2}\frac{w}{g}v^2$ dargestellt wird. Nachdem derselbe von dieser Geschwindigkeit in

---

Quotienten $\frac{w}{g}$ ist übrigens nicht ohne rationellen Grund geschehen. Es leuchtet ein, daß man die Intensität irgend einer Kraft auf zweierlei Weise messen kann: Ein Mal durch den einfachen Druck, welchen ein bestimmter Theil derselben auf einen Körper äußert, der durch Widerstände verhindert wird, diesem Drucke nachzugeben. Ist nun die Masse eines Körpers $m$, oder enthält er $m$ Masseneinheiten; so wirkt die Schwere in jede dieser Masseneinheiten gleich stark, und die Gesammtwirkung derselben auf den ganzen Körper wird der Anzahl der Masseneinheiten, oder der Zahl $m$ proportional sein, so daß diese Gesammtwirkung $= fm$ gesetzt werden kann, worin $f$ ein vorläufig noch unbestimmter aber für alle Körper constanter Koeffizient ist. Diese Gesammtwirkung der Schwere auf den Körper von der Masse $m$ wird aber auch durch sein Gewicht $w$ gemessen, und man hat daher $fm = w$.

Dieses Maaß der Wirkung der Schwere in einen Körper kann angewendet werden, sobald der Körper durch einen Widerstand verhindert wird, der Wirkung der Kraft zu folgen, und er nur einen einfachen Druck auf die Unterlage äußert. Ist aber kein Widerstand vorhanden, der seine Bewegung hindert; so wird eine solche erfolgen, und man sieht, daß die Intensität der erfolgenden Bewegung ein zweites Maaß für die Stärke der Kraft abgeben kann, sobald man hierbei noch ein drittes Element, nämlich die Zeit, in Betracht zieht. Es leuchtet nämlich ein, und ist schon in den ersten Paragraphen dieses Abschnittes näher erläutert, daß eine Kraft, welche ununterbrochen und mit derselben Stärke auf einen Körper einwirkt, demselben, wenn er ihrer Wirkung frei folgen kann, in gleichen Zeiten gleiche Zunahmen an Geschwindigkeit mittheilen wird, und es geht hieraus hervor, daß man diese in gleichen Zeiten erfolgenden gleichen Zunahmen an Geschwindigkeit ebenfalls als ein Maaß der Intensität der wirkenden Kraft ansehen kann, indem diese Zunahmen in Ein und derselben gegebenen Zeit für verschiedene Kräfte offenbar den Intensitäten dieser Kräfte proportional sein müssen. Für die Schwere kann demnach die Geschwindigkeit $g = 31{,}2644$ Fuß, welche dieselbe den Körpern in Einer Sekunde mittheilt, als Maaß ihrer Intensität betrachtet werden. Mit dieser durch $g$ dargestellten Stärke kann man sich denken, wirke die Schwere in eine jede Masseneinheit des Körpers ein, so daß sich auf einen Körper von $m$ Masseneinheiten, eine Gewalt $= gm$ entwickelt, welcher Ausdruck also gleichfalls einen Werth für die Gesammtwirkung der Schwere in die Masse $m$ darstellen kann.

Die durch den einfachen Druck gemessene Einwirkung der Schwere in die Masse $m$ war aber nach dem Obigen auch durch das Gewicht $fm = w$ repräsentirt, und man sieht, daß weil die Einheit für das Maaß der Masse beliebig ist, man jenen Koeffizienten $f = g$ annehmen und mithin $w = gm$ oder $m = \frac{w}{g}$ setzen kann.

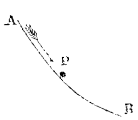
eine andere V übergegangen ist, werden in demselben eine Anzahl von Arbeitseinheiten $= \frac{1}{2} \frac{w}{g} V^2$ angehäuft sein, so daß, wenn diese letztere Geschwindigkeit größer ist, als die frühere, zu der in ihm angehäuften Arbeit nach $\frac{1}{2} \frac{w}{g} V^2 - \frac{1}{2} \frac{w}{g} v^2$ Einheiten hinzugekommen, und wenn die letztere Geschwindigkeit kleiner ist, als die erstere, von der in ihm angehäuften Arbeit $\frac{1}{2} \frac{w}{g} v^2 - \frac{1}{2} \frac{w}{g} V^2$ Einheiten hinweggenommen sein werden. Bezeichnet also U die von dem Körper bei seinem Uebergange aus der Geschwindigkeit $v$ in die Geschwindigkeit V gewonnene oder verlorene Arbeit; so hat man

$$U = \pm \frac{1}{2} \frac{w}{g} (V^2 - v^2) \ldots . (45)$$

worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wurde.

§. 68. Die gewonnene Arbeit eines Körpers, dessen Bewegung durch irgend einen gegebenen Raum von gegebenen Kräften beschleunigt wurde, ist gleich der Arbeit, welche erforderlich sein würde, um den Körper durch denselben Raum wieder zurückzutreiben, indem dieselben Kräfte auf ihn einwirken.

Es leuchtet ein, daß wenn ein Körper mit derselben Ge-




schwindigkeit, welche er in Folge der Einwirkung mehrerer Kräfte, die von A gegen B gerichtet sind, beim Durchlaufen des Raumes AB erlangt, von B gegen A wieder zurückgeworfen würde, er bei dem Durchgange durch ein jedes kleine Element seiner Bahn gerade durch dieselben Kräfte wieder verzögert würde, durch welche er vorher beschleunigt wurde, als er dasselbe Element von A gegen B durchlief, so daß er bei der Rückkehr durch ein jedes dieser Elemente denselben Theil seiner Geschwindigkeit verliert, welchen er vorher daselbst gewann, und wenn er endlich den ganzen Raum BA durchlaufen und den Punkt A wieder erreicht hat, er zwischen B und A eine Geschwindigkeit, und mithin einen Betrag an Arbeit, genau gleich, dem eingebüßt hat, welchen er vorher zwischen A und B empfing. Die zwischen B und A verlorene Arbeit ist die Arbeit, welche erfordert wird, um die der Bewegung durch BA entgegenstehenden Hindernisse zu besiegen. Die von A bis B gewonnene Arbeit ist demnach gleich der, welche erforderlich sein würde, um die Widerstände zwischen B und A zu überwältigen, oder auch, um den Körper von dem Zustande der Ruhe aus, mit einer gleichförmigen Bewegung diesen Widerständen entgegen von B nach A zu bewegen. Diese Arbeit sei U, die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper von A ausging, sei $v$ und die Geschwindigkeit, mit welcher er bei B ankommt, sei V; alsdann wird $\frac{1}{2}\frac{w}{g}(V^2 - v^2)$ die zwischen A und B gewonnene Arbeit darstellen und man hat

$$\tfrac{1}{2}\frac{n}{g}(V^2 - v^2) = U \text{ oder } V^2 - v^2 = \frac{2g}{w}U.$$

Wäre der Körper, anstatt beschleunigt zu sein, verzögert worden, so würde die verlorene Arbeit, welche durch die Ueberwindung der verzögernden Kräfte eingebüßt ist, offenbar gleich der sein, welche erforderlich ist, um den Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit den verzögernden Kräften entgegen durch AB zu bewegen, so daß, wenn diese Arbeit durch U dargestellt wird, $\frac{1}{2}\frac{w}{g}(v^2 - V^2) = U$ oder $v^2 - V^2 = \frac{2g}{w}U$ ist.

Man hat also allgemein

$$V^2 - v^2 = \pm\frac{2g}{w}U, \ldots . \quad (46)$$

worin das Zeichen + oder — zu nehmen ist, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wird.

§. 69. Die gewonnene Arbeit eines Körpers, welcher sich unter der Wirkung von Kräften durch irgend einen Raum bewegt hat, ist gleich dem Ueberschusse der Arbeit, welche diejenigen Kräfte auf ihn entwickelt haben, die seine Bewegung zu beschleunigen streben, über die Arbeit, welche die übrigen Kräfte auf ihn entwickelt haben, die seine Bewegung zu verzögern streben.

Denn wenn **R** eine einzige Kraft ist, welche in irgend einem Punkte **P** (s. die letzte Figur) erforderlich sein würde, um den Körper durch ein sehr kleines Element seiner Bahn wieder zurückzubewegen (wobei alle auf den Körper angebrachten Kräfte dieselben bleiben); so folgt aus §. 53, das die Arbeit der Kraft **R** über dieses Element des Weges gleich dem Ueberschusse der Arbeit derjenigen Kräfte, welche in der Richtung der Bewegung des Körpers wirkten, über die Arbeit der übrigen Kräfte sein würde, welche in entgegengesetzter Richtung wirkten. Da Dies von jedem Punkte der Bahn gilt; so ist auch die Gesammtarbeit der Kraft **R**, welche im Stande ist, den Körper von **B** nach **A** zurückzubewegen, gleich dem Ueberschusse der Arbeit derjenigen Kräfte, welche vorher in der Richtung **AB** wirkten, über die Arbeit der übrigen Kraft, welche in entgegengesetzter Richtung **BA** wirkten, woraus nach dem vorhergehenden Paragraphe folgt, daß auch die ganze gewonnene Arbeit diesem Ueberschusse gleich sein muß.

§. 70. Wenn **P** die Kraft bezeichnet, welche in der Richtung der Bewegung und durch den gegebenen Raum **S**, der längs des Weges **AB** gemessen ist, auf einen Körper einwirkt, um seine Bewegung zu beschleunigen, wobei angenommen wird, daß dieser Kraft keine andere weiter entgegenstrebe, oder daß sie die resultirende Kraft aller gegebenen Kräfte und Widerstände in der Richtung der Bewegung sei; so wird $\int_0^S P\,dS$ die Arbeit sein, welche in entgegengesetzter Richtung aufgewendet werden muß, um diese Kraft durch den Raum **S** zu überwinden (§. 51), oder man hat $U = \int_0^S P\,dS$, d. i. wegen Gleichung (46)

$$V^2 - v^2 = \pm 2\frac{g}{w_s}\int_0^S P\,dS \;\ldots\; (47)$$

oder auch

$$\frac{w}{g}(V^2-v^2)=\pm 2\int_0^S P\,dS,$$

d. h. die gewonnene lebende Kraft des Körpers ist gleich dem Doppelten der mitgetheilten Arbeit.

§. 71. Wenn die Kraft **P** zuvörderst in der Richtung wirkt, in welcher sich der Körper bewegt, so daß dadurch die Bewegung beschleunigt wird, und wenn darauf jene Kraft, nachdem ein gewisser Raum beschrieben ist, ihre Richtung ändert, so daß dadurch die Bewegung verzögert wird, und man bezeichnet mit $U_1$ den Werth der Arbeit, welcher bei der ersten Bewegung gewonnen wurde, mit $V_1$ die am Ende dieser Bewegung erlangte Geschwindigkeit, mit $U_2$ den Werth der Arbeit, welcher bei der zweiten Bewegung verloren wurde, mit $v$ die anfängliche und mit $V$ die Endgeschwindigkeit des Körpers; so hat man

$$V_1{}^2-v^2=\frac{2g}{w}U_1,$$

$$V^2-V_1{}^2=-\frac{2g}{w}U_2, \text{ also}$$

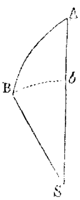
$$V^2-v^2=\frac{2g}{w}(U_1-U_2)\;\ldots\ldots\;(48)$$

oder auch

$$\frac{w}{g}(V^2-v^2)=2(U_1-U_2),$$

welche letztere Formel ausdrückt, daß die zwischem dem ersten und letzten Augenblicke der Bewegung gewonnene lebende Kraft gleich dem Doppelten der Differenz zwischen der gewonnenen und verlorenen Arbeit ist.

So wie $U_2$ wächst, vermindert sich die Endgeschwindigkeit $V$ des Körpers, und wenn zuletzt $U_2=U_1$ wird, d. h. wenn die Gesammtarbeit, welche auf den Körper in entgegengesetzter Richtung der Bewegung (über die Widerstände) entwickelt ist, derjenigen gleichkommt, welche vorher in direkter Richtung der Bewegung mitgetheilt wurde; so wird $V=v$, oder der Körper nimmt dieselbe Geschwindigkeit wieder an, welche er besaß, als die Kraft **P** anfing, auf ihn zu wirken. Dieses ist der allgemeine Fall der wiederkehrenden Bewegung, welche sich so häufig bei den Kombinationen des Maschinenwesens darbietet und wovon die Kurbelbewegung ein bemerkenswerthes Beispiel ist.




§. 72. Wenn die Kraft, welche die Bewegung des Körpers beschleunigt, fortwährend gegen Ein und denselben Mittelpunkt **S** wirkt, und man nimmt **S***b* gleich **SB**; so ist in §. 55 gezeigt, daß die zur Fortbewegung des Körpers in der Kurve von **B** nach **A** erforderliche Arbeit gleich der ist, welche nothwendig sein würde, wenn derselbe durch die gerade Linie *b***A** bewegt werden sollte. Die bei der Bewegung von **A** nach **B** gewonnene Arbeit ist demnach gleich der, welche entwickelt werden müßte, um den Körper durch den Unterschied *b***A** der beiden Abstände **SA** und **SB** zu bewegen (§. 68). Werden diese Abstände resp. mit $R_1$ und $R_2$ bezeichnet, und stellt **P** den Druck dar, welcher sich in irgend einem Abstande **R** vom Punkte **S** der Bewegung des Körpers längs *b***A** entgegensetzen würde; so wird die obige Arbeit durch $\int_{R_2}^{R_1} P\,dR$ ausgedrückt. Außerdem ist die von dem Körper zwischen **A** und **B** gewonnene Arbeit auch durch $\frac{1}{2}\frac{w}{g}(V^2-v^2)$ dargestellt, wenn **V** die Endgeschwindigkeit bei **B** und $v$ die Anfangsgeschwindigkeit von **A** bezeichnet; man hat also

$$\frac{1}{2}\frac{w}{g}(V^2-v^2)=\int_{R_2}^{R_1} P\,dR \text{ oder}$$

$$V^2-v^2=\frac{2g}{w}\int_{R_2}^{R_1} P\,dR \;\ldots\ldots (49).$$

§. 73. Ist die nach dem Punkte **S** wirkende Kraft die Schwere; so wird die von dem Körper beim herabsteigen in der Kurve **AB** gewonnene Arbeit gleich der sein, welche er durch den freien Fall gegen **S** von **A** bis *b* erlangen würde; denn beide sind gleich der Arbeit, welche aufgewendet werden müßte, um den Körper von $b$ nach A zu erheben. Da also die von dem Körper durch AB gewonnene Arbeit mit der übereinstimmt, welche sich durch den freien Fall durch A$b$ in ihm anhäufen würde; so folgt auch, daß die durch den ungehinderten Fall von A bis B erlangte Geschwindigkeit gleich der sein wird, welche er durch den Fall von A bis $b$ erlangt.

Hieraus geht hervor, daß wenn sich ein Körper von oben nach unten bewegt, sei es nun, daß er im freien Raume schräg geworfen würde, oder daß er vom Zustande der Ruhe aus auf irgend einer gekrümmten Fläche oder geneigten Ebene herabglitte, und dabei nur der Wirkung der Schwere unterworfen wäre (also keine Reibungen und andere Widerstände der Luft u. s. w. zu überwinden hätte); so erlangt er bei dieser Bewegung genau dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er von einer gleichen Höhe vertikal herabgefallen wäre.

§. 74. Erklärung. Die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers, welcher sich um eine feste Axe drehet, ist der Bogen, den ein jedes um die Längeneinheit von der Axe abstehende Theilchen in der Zeiteinheit oder in der Sekunde beschreibt, im Fall der Körper sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit drehet, oder im Fall die Bewegung veränderlich ist, den es in der Sekunde beschreiben würde, wenn seine Umdrehung von dem Augenblicke an, wo man die Winkelgeschwindigkeit messen will, plötzlich gleichförmig würde.

## Anhäufung der Arbeit in einem Körper, welcher sich um eine feste Axe drehet.

§. 75. Die Paragraphen 68 und 69 finden auf jeden Fall der Bewegung eines schweren Körpers Anwendung. In einem jeden solchen Falle ist die durch die Wirkung irgend einer bewegenden Kraft beim Uebergange des Körpers aus der Einen Lage in die andere gewonnene oder verlorene Arbeit gleich der, welche in entgegengesetzter Richtung auf den Körper entwickelt werden müßte, um ihn aus der zweiten Lage wieder in die erste zurückzuführen. Man bezeichne diese Arbeit für irgend einen Körper von gegebenen Dimensionen, welcher sich durch die Einwirkung gegebener Kräfte um eine feste Axe aus Einer gegebenen Lage in eine andere gedrehet hat, mit U.

Stellt nun $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers in dem Augenblicke dar, wo er aus der Einen dieser Lagen in die andere gekommen ist; so ist $\alpha$ die wirkliche Geschwindigkeit eines Körpertheilchens, welches um die Längeneinheit von der Axe absteht, und daher $\alpha\varrho_1$ die wirkliche Geschwindigkeit irgend eines anderen Massentheilchens, welches in der Entfernung $\varrho_1$ von dieser Axe liegt. Bezeichnet man ferner das Gewicht einer jeden Volumeinheit des Körpers mit $\mu$ und das Volum irgend eines Körpertheilchens, welches um $\varrho_1$ von der festen Axe absteht, mit $m_1$; so ist das Gewicht dieses Theilchens gleich $\mu m_1$. Da nun die Geschwindigkeit des Theilchens $m_1$ gleich $\alpha\varrho_1$ ist; so wird die in demselben angehäufte Arbeit durch $\frac{1}{2}\frac{\mu m_1}{g}\alpha^2\varrho_1{}^2$ oder durch $\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}m_1\varrho_1{}^2$ dargestellt.

Ebenso werden die verschiedenen Quantitäten der angehäuften Arbeit in den übrigen Theilchen oder Elementen des Körpers, deren Abstände von der Axe resp. $\varrho_2, \varrho_3 \ldots$, und deren Volumen $m_2, m_3 \ldots$ sind, durch $\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}m_2\varrho_2{}^2$, $\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}m_3\varrho_3{}^2, \ldots$ dargestellt, so daß die gesammte in dem Körper angehäufte Arbeit durch die Summe

$$\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}m_1\varrho_1{}^2+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}m_2\varrho_2{}^2+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}m_3\varrho_3{}^2+\ldots$$

oder durch

$$\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}(m_1\varrho_1{}^2+m_2\varrho_2{}^2+m_3\varrho_3{}^2+\ldots)$$

ausgedrückt wird.

Die Summe

$$m_1\varrho_1{}^2+m_2\varrho_2{}^2+m_3\varrho_3{}^2+\ldots.=\Sigma m\varrho^2,$$

welche für alle Elemente, aus denen der Körper besteht, genommen ist, heißt das Trägheits- oder Drehungsmoment*) des

*) Gewöhnlich wird mit dem Namen Trägheitsmoment die Summe

Körpers in Beziehung zu der angenommenen Umdrehungsaxe. Bezeichnet man dasselbe mit J, so ist

$$\tfrac{1}{2}\alpha^2 . \frac{\mu}{g} . J$$

der ganze Betrag der in dem Körper in dem Augenblicke angehäuften Arbeit, wo er genöthigt wird, vom Zustande der Ruhe aus die Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ anzunehmen. Wird daher durch U die Arbeit dargestellt, welche in einer entgegengesetzten Richtung entwickelt werden muß, um den Körper aus seiner letzteren Lage wieder in die frühere zurückzuführen; so hat man

$$\tfrac{1}{2}\alpha^2 \frac{\mu}{g} . J = U \text{ oder}$$

$$\alpha^2 = 2\frac{g}{\mu}\frac{U}{J} \dots (50)$$

Hätte der Körper, anstatt vom Zustande der Ruhe auszugehen, in seiner ersten Lage schon die Winkelgeschwindigkeit $\alpha_1$ besessen, welche in seiner zweiten Lage in die Geschwindigkeit $\alpha$ übergegangen wäre, und stellte U, wie vorhin, die Arbeit dar, welche erforderlich sein würde, um den Körper aus dem zweiten Zustande in den ersten wieder zurückzuversetzen; so hätte man für die zwischen der ersten und zweiten Lage gewonnene Arbeit den Ausdruck $\tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}J - \tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2\frac{\mu}{g}J = \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{g}(\alpha^2 - \alpha_1{}^2)J$, und demnach

$$\tfrac{1}{2}\frac{U}{g}(\alpha^2 - \alpha_1{}^2)J = \pm U \text{ oder}$$

$$\alpha^2 - \alpha_1{}^2 = \pm 2\frac{g}{\mu}\frac{U}{J}, \dots (51)$$

$$\text{oder auch } \alpha^2 = \alpha_1{}^2 \pm 2\frac{g}{\mu}\frac{U}{J}$$

worin das Zeichen + oder — zu nehmen ist, jenachdem die Be-

$\frac{\mu\, m_1}{g}\varrho_1{}^2 + \frac{\mu\, m_2}{g}\varrho_2{}^2 + \frac{\mu\, m_3}{g}\varrho_3{}^2 + \dots = \frac{\mu}{g}(m_1\varrho_1{}^2 + m_2\varrho_2{}^2 + m_3\varrho_3{}^2 + \dots)$ $= \frac{\mu}{g}\Sigma m\varrho^2$, also die Summe der Produkte aus den Massen $\frac{\mu m}{g}$ der einzelnen Körperelemente in die Quadrate ihrer Abstände von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Im Texte bildet dieses Moment die Summe der Produkte aus den Volumen der einzelnen Elemente in die Quadrate ihrer Abstände von der Axe; dasselbe unterscheidet sich von dem vorstehenden nur durch den konstanten Faktor $\frac{\mu}{g}$, welcher die Masse der Volumeinheit des Körpers oder dessen Dichtigkeit darstellt. (S. d. Note zu §. 66.)

wegung beim Uebergange aus der ersten in die zweite Lage beschleunigt oder verzögert wurde, weil in dem Einen Falle die Winkelgeschwindigkeit während der Bewegung wächst, so daß $\alpha^2$ größer ist, als $\alpha_1{}^2$, während sie in dem anderen Falle abnimmt, so daß $\alpha^2$ kleiner ist, als $\alpha_1{}^2$.

§. 76. Wenn die Arbeit der auf den Körper wirkenden Kräfte in dem Einen Zeitraume der Bewegung die Letztere zu beschleunigen und in dem anderen dieselbe zu verzögern strebt, und man stellt die während des ersten Zeitraumes entwickelte Arbeit durch $U_1$ und die während des zweiten entwickelte Arbeit durch $U_2$ dar; so hat man

$$\alpha^2 - \alpha_1{}^2 = 2\frac{g}{\mu}\frac{U_1}{J} - 2\frac{g}{\mu}\frac{U_2}{J} \text{ oder}$$

$$\alpha^2 - \alpha_1{}^2 = 2\frac{g}{\mu}\cdot\frac{(U_1 - U_2)}{J} \dots\dots (52)$$

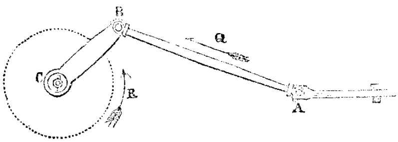
$$\text{oder auch } \alpha^2 = \alpha_1{}^2 + 2\frac{g}{\mu}\cdot\frac{(U_1 - U_2)}{J}$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß wenn $U_2 = U_1$ oder wenn die Arbeit $U_2$ der Kräfte, welche der Bewegung entgegen wirken, gleich der Arbeit $U_1$ der übrigen Kräfte ist, welche die Bewegung zu beschleunigen streben; so ist $\alpha = \alpha_1$, das heißt, der Körper kehrt bei seiner Drehung wieder zu der Geschwindigkeit zurück, mit welcher er die Bewegung anhob. Wenn $U_2$ beim Verlaufe einer ganzen Umdrehung niemals den Werth von $U_1$ erreicht; so nimmt auch die Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ ihren anfänglichen Werth nicht wieder an, sondern vermehrt sich bei jeder Umdrehung: bleibt dagegen $U_2$ bei jeder Umdrehung größer, als $U_1$; so vermindert sich die Winkelgeschwindigkeit des Körpers bei jeder späteren Umwälzung und endigt zuletzt in irgend einer Lage mit dem Zustande der Ruhe.

Je größer das Trägheitsmoment J des sich drehenden Körpers und je größer das Gewicht $\mu$ seiner Volumeneinheit ist, desto geringer ist die Variation in der Winkelgeschwindigkeit $\alpha$, welche durch eine gegebene Variation von U oder $U_1 - U_2$ in verschiedenen Perioden derselben Umdrehung oder von Einer ganzen Umdrehung zu einer anderen hervorgebracht wird, das heißt, desto **beständiger** ist die Bewegung, welche durch irgend eine veränderliche Wirkung der bewegenden Kraft erzeugt wird. Auf diesem Prinzipe beruhet die Anwendung der Schwungräder, welche benutzt werden, um die Bewegung einer Maschine unter einer veränderlichen Wirkung der bewegenden Kraft oder des Widerstandes möglichst auszugleichen. Es ist ein einfacher Kunstgriff, daß man das Trägheitsmoment der sich drehenden Masse vermehrt, um dadurch ihren Umwälzungen unter der Einwirkung veränderlicher Druckkräfte mehr Beständigkeit und Gleichmäßigkeit zu geben. Dieses bedeutendere Trägheitsmoment verschafft man einem Schwungrade dadurch, daß man den größeren Theil seiner Masse in dem äußeren Umfange anbringt, so daß der Abstand $\varrho$ eines jeden Massentheilchens von der Umdrehungsaxe, und mithin auch die Summe $\Sigma m\varrho^2 = J$ am größtmöglichen werde. Gleichzeitig wird der Größe $\mu$ der größte zu erreichende Werth gegeben, indem man das Rad aus dem schwersten Materiale verfertigt, welches sich zu diesem Zwecke eignet.

Das Vorstehende wird am besten durch eine Anwendung auf die **Kurbel** erläutert werden können.

§. 77. Denkt man sich einen konstanten Druck **Q**, welcher fortwährend auf den Kurbelarm **CB** in der Richtung **AB** der Kurbelstange wirkt, und einen konstanten Widerstand **R**, welcher sich der




Umdrehung um die Axe **C** immer in demselben perpendikularen Abstande von dieser Axe entgegengesetzt; so leuchtet ein, daß weil der perpendikulare Abstand von der Axe, in welchem **Q** wirkt, sich fortwährend ändert (indem er zu Einer Zeit null, und zu einer anderen Zeit gleich der ganzen Länge **CB** des Kurbelarmes ist) auch der wirksame Druck auf den Arm **CB** zu gewissen Zeiten einer jeden Umdrehung **größer** und zu gewissen Zeiten **kleiner** sein muß, als der konstante Widerstand **R**, welcher sich der Bewegung entgegensetzt, so daß die Resultante dieses Druckes und Widerstandes, oder der nicht im Gleichgewichte gehaltene Druck **P** auf den Kurbelarm während der Einen Periode einer jeden Umdrehung in der Richtung der Bewegung, während einer anderen Periode aber dieser Bewegung direkt entgegen wirken muß. Bezeichnet man die zu der Einen Zeit auf den Arm entwickelte Arbeit mit $U_1$ und die zu der anderen Zeit entwickelte Arbeit mit $U_2$; so folgt, daß wenn $U_1 = U_2$ ist, der Arm im Laufe einer jeden Umdrehung von der Geschwindigkeit, welche er besaß, als die Arbeit $U_1$ anfing sich zu entwickeln, zu derselben Geschwindigkeit in dem Augenblicke wieder zurückkehren wird, wo die Arbeit $U_2$ vollendet ist. Ist dagegen $U_1$ größer als $U_2$; so wird sich die Geschwindigkeit mit jeder Umdrehung vermehren, und ist $U_1$ kleiner als $U_2$; so wird sie sich fortwährend vermindern.

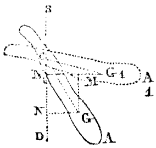
Aus der Gleichung (52) geht hervor, daß je größer das Trägheitsmoment $J$ des in Bewegung gesetzten Körpers und je größer das Gewicht $\mu$ seiner Volumeinheit ist, desto geringer die Variation des Werthes von $\alpha$ für eine gegebene Variation des Werthes von $U_1 - U_2$ sein wird. Je größer also jene ersteren beiden Größen sind, desto geringer werden die Variationen bei der Umdrehung des Kurbelarmes und bei der Bewegung der ganzen Maschine, an welcher die Kurbel angebracht ist, in Folge der veränderlichen Wirkung der bewegenden Kraft ausfallen. Ist nun an der Umdrehungsaxe der Kurbel ein Schwungrad befestigt, welches sich mit derselben herumbewegt; so addirt sich sein Trägheitsmoment zu dem der übrigen sich umdrehenden Maschinentheile, und vermehrt daher den Werth von $J$. Nach den obigen Prinzipien wird also durch die Anbringung des Schwungrades, da dasselbe die übrigen Widerstände, mit Ausnahme der Reibung an den Zapfen und des Widerstandes der Luft, nicht vermehrt, eine bedeutende Ausgleichung der Bewegung herbeigeführt werden.

## §. 78. Bewegung eines Körpers um eine feste Axe, wenn keine andere bewegende Kraft auf ihn wirkt, als sein Gewicht.

$U$ sei die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Körper aus seiner zweiten Lage in die erste zu erheben, wenn er eine niedergehende Bewegung hat, oder um ihn aus seiner ersten Lage in die zweite zu erheben, wenn er eine aufsteigende Bewegung hat; ferner sei $\alpha_1$ die Winkelgeschwindigkeit in der ersten Lage und $\alpha$ die in der zweiten; alsdann hat man nach Gleichung (51)

$$\alpha^2 = \alpha_1{}^2 + 2\frac{g}{\mu}\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{J}}.$$

Nun ist in §. 60 gezeigt worden, daß die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Körper aus der unteren Lage in die obere zu erheben, wobei sein Gewicht die einzige zu überwindende Kraft ist, derjenigen gleich kommt, welche aufgewendet werden müßte, um seinen Schwerpunkt aus der Einen Lage in die andere zu



bringen. Ist also CA die untere und $CA_1$ die obere Lage des Körpers, ferner G und $G_1$ die beiden entsprechenden Lagen des Schwerpunktes; so wird die zur Hebung des Körpers aus der Lage CA in $CA_1$ erforderliche Kraft gleich der sein, welche nothwendig sein würde, um sein ganzes Gewicht W, welches man sich in G vereinigt denkt, von G nach $G_1$ zu verrücken, oder was nach §. 56 dasselbe ist, um dieses Gewicht auf die vertikale Höhe GM zu erheben.

Nun sei $CG = CG_1 = h$, und wenn CD eine Vertikale durch die Axe C ist, $\angle G_1CD = \vartheta_1$ und $\angle GCD = \vartheta$, wenn der Körper eine niedergehende Bewegung hat, und umgekehrt $\angle GCD = \vartheta_1$ und $\angle G_1CD = \vartheta$, wenn der Körper eine aufsteigende Bewegung hat; daher $GM = NN_1 = CN - CN_1 = h\cos\vartheta - h\cos\vartheta_1$, wenn der Körper herabsinkt, und $= h\cos\vartheta_1 - h\cos\vartheta$, wenn er aus der Lage CA zu $CA_1$ aufsteigt, also allgemein $GM = \pm h(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)$, worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem der Körper sinkt oder steigt. Weil aber

$$\mathrm{U} = \mathrm{W}.\overline{\mathrm{GM}} = \pm \mathrm{W}h\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)$$

ist; so ergibt sich durch die Gleichung (51)

$$\alpha^2 = \alpha_1{}^2 + \frac{2\mathrm{W}gh}{\mu\mathrm{J}}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)$$

oder, wenn man das Volum des Körpers mit M bezeichnet, so daß $\mathrm{M}\mu = \mathrm{W}$ ist,

$$\alpha_2 = \alpha_1{}^2 + \frac{2gh\mathrm{M}}{\mathrm{J}}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1)\ldots.(53)$$

Wenn der Körper bei der niedergehenden Bewegung in die vertikale Lage gekommen sein wird, so hat man $\vartheta = o$; also $\cos\vartheta - \cos\vartheta_1 = 1 - \cos\vartheta_1 = 2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_1$. Wenn er bei der aufsteigenden Bewegung in die vertikale Lage gekommen sein wird, so hat man $\vartheta = \pi$; also

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta_1 = -(1 + \cos\vartheta_1) = -2\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta_1.$$

Im ersten Falle ist daher

$$\alpha^2 = \alpha_1{}^2 + \frac{4ghM}{J}\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_1 \ldots\ldots (54)$$

und im letzteren Falle

$$\alpha^2 = \alpha_1{}^2 - \frac{4ghM}{J}\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta_1 \ldots\ldots (55)$$

Wenn der Körper in die horizontale Lage entweder herab- oder hinaufgestiegen ist, so hat man $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; also $\cos\vartheta - \cos\vartheta_1 = -\cos\vartheta_1$. Hierbei muß aber bemerkt werden, daß wenn der Körper in die horizontale Lage herabgesunken ist, $\vartheta_1$ größer als $\frac{\pi}{2}$ gewesen sein muß, so daß alsdann $\cos\vartheta_1$ negativ und gleich $-\cos BCG_1$ sein wird. Setzt man also voraus, daß der Winkel $\vartheta_1$ von CB oder von CD gemessen werde, jenachdem der Körper herab- oder hinaufsteigt; so kann man für die Ankunft in der horizontalen Lage $\cos\vartheta - \cos\vartheta_1 = \pm\cos\vartheta_1$ schreiben, und hat für diesen Fall des Herabsinkens oder Hinaufsteigens in die horizontale Lage

$$\alpha^2 = a_1{}^2 \pm \frac{2ghM}{J}\cos\vartheta_1 \ldots\ldots (56)$$

Sänke der Körper vom Zustande der Ruhe aus herab; so würde man $\alpha_1 = o$ und nach Gleichung (53)

$$\alpha^2 = \frac{2ghM}{J}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_1) \ldots\ldots (57)$$

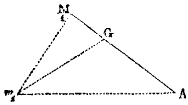
haben.

Hiernach ist also die vom Zustande der Ruhe aus erlangte Winkelgeschwindigkeit desto kleiner, je größer das Trägheitsmoment J im Verhältnisse zu dem Volum M ist, oder je weiter die Masse des Körpers von seiner Axe angebracht ist.

## Bestimmung der Trägheitsmomente.

**§. 79.** Wenn das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Systemes von Körpern für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe gegeben ist; so soll sein Trägheitsmoment für eine andere Axe angegeben werden, welche der ersteren parallel ist und durch einen beliebigen Punkt des Körpers oder Systemes geht.

Es sei $m_1$ irgend ein Element des Körpers oder Systemes,



$m_1 AG$ eine Perpendikularebene auf der Axe, für welche die Momente bestimmt werden sollen, A der Durchschnittspunkt dieser Axe mit jener Ebene und G der Durchschnittspunkt der parallelen Axe, welche durch den Schwerpunkt geht, mit derselben Ebene. Man ziehe die Linien AG, $Am_1$, $Gm_1$ und die Linie $m_1 M_1$ perpendikular auf AG. Setzt man alsdann

$$Am_1 = \varrho_1,\ Gm_1 = r_1,\ GM_1 = x_1,\ AG = h \text{ und}$$

das Volum des bei $m_1$ befindlichen Elementes $= m_1$; so hat nach einem bekannten Satze der Geometrie

$$\overline{Am_1}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{Gm_1}^2 + 2\overline{AG}.\overline{GM_1}, \text{ d. i.}$$
$$\varrho_1^2 = h^2 + r_1^2 + 2hx_1,$$

oder wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit dem Volum $m_1$ des Massenelementes im Punkte $m_1$ multiplizirt,

$$\varrho_1^2 m_1 = h^2 m_1 + r_1^2 m_1 + 2hx_1 m_1.$$

Ebenso hat man, wenn $m_2, m_3, m_4, \ldots$ die Volumen anderer Elemente bezeichnen und $\varrho_2, r_2, x_2;\ \varrho_3, r_3, x_3, \ldots$ für diese Elemente ähnliche Bedeutungen haben, wie die Größen $\varrho_1, r_1, x_1$ für das Element $m_1$,

$$\varrho_2^2 m_2 = h^2 m_2 + r_2^2 m_2 + 2hx_2 m_2,$$
$$\varrho_3^2 m_3 = h^2 m_3 + r_3^2 m_3 + 2hx_3 m_3,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so kommt

$$\varrho_1^2 m_1 + \varrho_2^2 m_2 + \varrho_3^2 m_3 + \ldots = h^2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)$$
$$+ (r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + r_3^2 m_3 + \ldots) + 2h(x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots)$$

oder

$$\Sigma \varrho^2 m = h^2 \Sigma m + \Sigma r^2 m + 2h \Sigma xm.$$

Nun ist $\Sigma xm$ die Summe der Momente aller Elemente des Körpers für eine zu AG perpendikulare und durch den Schwerpunkt G des Körpers gehende Ebene; demnach (§. 17) $\Sigma xm = o$ und

$$\Sigma \varrho^2 m = h^2 \Sigma m + \Sigma r^2 m.$$

$\Sigma \varrho^2 m$ ist das Trägheitsmoment des Körpers für die gegebene durch A gehende Axe und $\Sigma r^2 m$ ist das Trägheitsmoment für eine Axe, welche jener parallel ist und durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Bezeichnet man also das erstere Moment mit $J_1$, das letztere mit J und das ganze Volum des Körpers $\Sigma m$ mit M; so hat man

$$J_1 = h^2 M + J, \ldots . (58)$$

eine Beziehung, aus welcher das Trägheitsmoment $J_1$ für irgend eine Axe gefunden werden kann, wenn das Trägheitsmoment J für eine andere Axe, welche jener parallel ist und durch den Schwerpunkt des Körpers geht, bekannt ist.

§. 80. **Drehungshalbmesser.** Nimmt man an, $k_1$ sei der Abstand von der durch A gehenden Axe, in welchem man die ganze Masse des Körpers konzentriren müßte, so daß das Trägheitsmoment dasselbe bliebe, daß also $k_1{}^2 M = J_1$ wäre; so wird $k_1$ der Drehungshalbmesser in Beziehung zu der Axe A genannt.

Wäre ebenso $k$ der Drehungshalbmesser in Beziehung zu der durch den Schwerpunkt gehenden Axe, so daß $k^2 M = J$ wäre; so würde man durch Substitution dieser Werthe in die obige Gleichung und durch Division mit M

$$k_1{}^2 = h^2 + k^2 \ldots . (59)$$

erhalten.

Im Folgenden sollen nun einige Beispiele über die Bestimmung der Trägheitsmomente von Körpern mit den gewöhnlichsten geometrischen Formen in Beziehung zu Axen, welche durch ihren Schwerpunkt gehen, gegeben werden; mit Hülfe der Gleichung (58) oder (59) wird man alsdann leicht die Trägheitsmomente dieser Körper in Beziehung zu anderen parallelen Axen ermitteln können.

§. 81. **Trägheitsmoment eines dünnen gleichmäßig starken geraden Stabes für eine Axe, welche auf seiner**

Länge perpendikular steht und durch den Mittelpunkt desselben geht.

*m* sei ein Element des Stabes zwischen zwei ebenen Querschnitten, welche auf seiner Länge perpendikular stehen, die Fläche dieser Querschnitte sei $\varkappa$ und ihr Abstand von einander $=\triangle\varrho$.

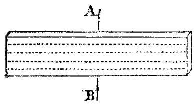

Denkt man sich $\varkappa$ und $\triangle\varrho$ so klein, daß ein jeder Punkt dieses Elementes als in demselben Abstande $\varrho$ von der Umdrehungsaxe **A** liegend angenommen werden kann; so ist das Volum des in Rede stehenden Elementes gleich $\varkappa\triangle\varrho$ und sein Trägheitsmoment in Beziehung zur Axe **A** gleich $\varkappa\varrho^2\triangle\varrho$. Hiernach wird das Trägheitsmoment J des ganzen Stabes durch $\Sigma\varkappa\varrho^2\triangle\varrho$, oder da $\varkappa$ für die ganze Länge des Stabes konstant ist, durch $\varkappa\Sigma\varrho^2\triangle\varrho$, oder weil $\triangle\varrho$ unendlich klein angenommen wird, durch $\varkappa\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\varrho^2 d\varrho$ dargestellt, worin $l$ die ganze Länge **BC** des Stabes bezeichnet. Man hat also, wenn man dieses Integral entwickelt und zwischen den gehörigen Gränzen $+\frac{1}{2}l$ und $-\frac{1}{2}l$ nimmt,

$$J=\varkappa[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}l)^3-\tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}l)^3], \text{ d. i.}$$

$$J=\tfrac{1}{12}\varkappa l^3 \ldots\ldots (60)$$

## §. 82. Trägheitsmoment einer dünnen rechtwinkligen Platte für eine Axe, welche durch ihren Schwerpunkt geht und Einer ihrer Seitenlinien parallel ist.

Es leuchtet ein, daß diese Platte als aus lauter sehr dünnen rechtwinkligen Stäben von derselben Länge zusammengesetzt angesehen werden kann, und daß das Trägheitsmoment der ganzen Platte gleich der Summe der Trägheitsmomente aller dieser Stäbe ist.

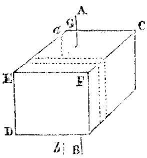



Ist also $\varkappa$ der Querschnitt eines solchen Stabes und $l$ die Länge der Platte; so wird das Trägheitsmoment dieses Stabes nach dem vorstehenden Paragraphe durch $\frac{1}{12}\varkappa l^3$ dargestellt, so daß, wenn die Querschnitte aller Stäbe einander gleich und *n* solcher Stäbe vorhanden sind, das Trägheitsmoment der ganzen Platte durch $\frac{1}{12}n\varkappa l^3$ ausgedrückt wird. $n\varkappa$ ist aber die Fläche des Querschnittes der Platte; bezeichnet man dieselbe mit K, so ergibt sich für das Trägheitsmoment der ganzen Platte in Beziehung zur Axe AB die Formel

$$J = \tfrac{1}{12}Kl^3 \ldots\ldots (61)$$

§. 83. Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedums für eine Axe, welche durch seinen Schwerpunkt geht und zu Einer seiner Kanten parallel ist.

CD sei ein rechtwinkliges Parallelepipedum und AB eine




Axe, welche durch seinen Schwerpunkt geht und zu der Kante ED parallel ist; ferner sei $ab$ eine Axe, welche mit der ersteren parallel läuft und durch den Schwerpunkt einer dünnen Platte geht, welche zwischen zwei zu den Seitenflächen des Parallelepipedums parallelen Ebenen liegt. Stellen nun $a, b, c$ die Längen der drei Kanten ED, EF, EG des Parallelepipedums dar; so ist das Trägheitsmoment der erwähnten Platte in Beziehung zu der Axe $ab$ gleich $\frac{1}{12}Kb^3$, worin K den Querschnitt der Platte bezeichnet (Gleichung 61), und wenn $x$ der perpendikulare Abstand der beiden Axen AB und $ab$ ist; so hat man (nach Gleichung 58) für das Trägheitsmoment derselben Platte in Beziehung zur Axe AB den Ausdruck $x^2 M + \frac{1}{12}Kb^3$, worin M das Volum der Platte darstellt. Bezeichnet man die Dicke dieser Platte mit $\triangle x$, so ist $M = ab\triangle x$, $K = a\triangle x$ und daher das Trägheitsmoment der Platte $= abx^2\triangle x + \frac{1}{12}ab^3\triangle x$, mithin das Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipedums

$$J = ab\Sigma x^2\triangle x + \tfrac{1}{12}ab^3\Sigma\triangle x,$$

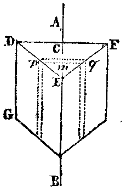
oder, wenn man $\triangle x$ unendlich klein annimmt,

$$J = ab\int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} x^2\,dx + \tfrac{1}{12}ab^3\int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dx, \text{ d. i.}$$

$$J = ab\left[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}c)^3 - \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}c)^3\right] + \tfrac{1}{12}ab^3\left[(\tfrac{1}{2}c) - (-\tfrac{1}{2}c)\right] \text{ oder}$$

$$J = \tfrac{1}{12}abc(b^2 + c^2) \ldots\ldots (62)$$

§. 84. Trägheitsmoment eines geraden dreiseitigen Prismas für eine vertikale Axe, welche durch seinen Schwerpunkt geht.




AB sei eine vertikale Axe, welche durch den Schwerpunkt eines Prismas geht, dessen horizontaler Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit den gleichen Seiten ED und EF bildet.

Legt man durch das Prisma parallel zu der Seitenfläche DF zwei Ebenen, welche eine dünne Schicht $pq$ seines Volums einschließen, und bezeichnet den perpendikularen Abstand C$m$ einer durch den Schwerpunkt dieser Schicht gehenden Axe von der Axe AB mit $x$, die Dicke dieser Schicht mit $\triangle x$, die Kante DF mit $a$, DG mit $b$ und das Perpendikel von der Spitze E des Dreiecks DEF auf dessen Grundlinie DF mit $c$; so hat man

$$\mathrm{EC}=\tfrac{2}{3}c,\ \mathrm{E}m=\tfrac{2}{3}c-x,\ \text{ferner}$$

$$\frac{pq}{\mathrm{DF}}=\frac{\mathrm{E}m}{c},\ \text{also}\ pq=\frac{a}{c}(\tfrac{2}{3}c-x),\ \text{ferner}$$

Querschnitt K der dünnen Schicht $=b\triangle x$, also

Volum M der Schicht $=\dfrac{ab}{c}(\tfrac{2}{3}c-x)\triangle x$; mithin nach Gleichung (58) und (61)

Moment der Schicht für die Axe AB

$$=\frac{ab}{c}(\tfrac{2}{3}c-x)x^2\triangle x+\tfrac{1}{12}b\frac{a^3}{c^3}(\tfrac{2}{3}c-x)^3\triangle x.$$

Hieraus folgt für das Moment des ganzen Prismas in Beziehung zur Axe AB

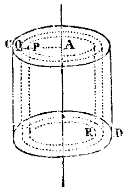
$$\mathrm{J}=\frac{ab}{c}\int_{-\frac{1}{3}c}^{\frac{2}{3}c}(\tfrac{2}{3}c-x)x^2\,dx+\tfrac{1}{12}\frac{ba^3}{c^3}\int_{-\frac{1}{3}c}^{\frac{2}{3}c}(\tfrac{2}{2}c-x)^3\,dx,$$

und wenn man die Integration zwischen den Gränzen $-\frac{2}{3}c$ und $\frac{1}{3}c$ ausführt

$$\mathrm{J}=\tfrac{1}{12}abc(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{3}c^2)\ \ldots.\ (63)$$

§. 85. Trägheitsmoment eines vollen Zylinders in Beziehung zu seiner Axe.

**AB** sei die Axe eines solchen Zylinders, dessen Halbmesser **AC**$=b$ und dessen Höhe $=b$ ist. Denkt man sich



den ganzen Zylinder aus lauter zylindrischen Schalen zusammengesetzt, welche alle dieselbe Axe haben, bezeichnet den inneren Halbmesser **AP** irgend einer dieser Schalen mit $\varrho$ und ihre Dicke mit $\Delta\varrho$, so daß der äußere Halbmesser **AQ** dieser Schale $=\varrho+\Delta\varrho$ ist; so wird das Volum der Letzteren durch $\pi b(\varrho+\Delta\varrho)^2-\pi b\varrho^2=\pi b[2\varrho\Delta\varrho+(\Delta\varrho)^2]=\pi b(2\pi+\Delta\varrho)\Delta\varrho$, oder wenn man $\Delta\varrho$ ungemein klein annimmt, so daß $\Delta\varrho$ im Vergleich zu $2\varrho$ verschwindet, durch $2\pi b\varrho\Delta\varrho$ dargestellt.

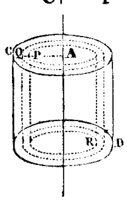
Findet diese Voraussetzung statt, so kann die ganze Schale als ein Element $\Delta$**M** des gegebenen Zylinders angesehen werden, dessen einzelne Punkte sämmtlich in dem Abstande $\varrho$ von der Axe **AB** liegen, und man hat demnach für das Trägheitsmoment des ganzen Zylinders

$$\Sigma\varrho^2\Delta M=\Sigma\varrho^2.2\pi b\varrho\Delta\varrho=2\pi b\Sigma\varrho^3\Delta\varrho \text{ oder}$$

$$J=2\pi b\int_0^a\varrho^3 d\varrho=\tfrac{1}{2}\pi b a^4 \ldots\ldots (64)$$

## §. 86. Trägheitsmoment eines hohlen Zylinders in Beziehung zu seiner Axe.

Ist $a_1$ der äußere, $a_2$ der innere Halbmesser und $b$ die



Höhe des Zylinders; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphe das Trägheitsmoment des als voll gedachten Zylinders **CD**$=\frac{1}{2}\pi b a_1{}^4$ und das Trägheitsmoment des als voll gedachten hohlen Raumes **PR** des gegebenen hohlen Zylinders $=\frac{1}{2}\pi b a_2{}^4$. Bezeichnet man also das Trägheitsmoment des hohlen Zylinders **CP** mit **J**; so hat man $J+\frac{1}{2}\pi b a_2{}^4=\frac{1}{2}\pi b a_1{}^4$, mithin

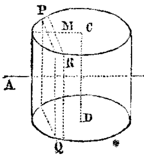
$$J=\tfrac{1}{2}\pi b a_1{}^4-\tfrac{1}{2}\pi b a_2{}^4=\tfrac{1}{2}\pi b(a_1{}^2-a_1{}^2)(a_2{}^2+a_2{}^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi b(a_1-a_2)(a_1+a_2)(a_1{}^2+a_2{}^2).$$

Wird aber die Dicke $a_1-a_2$ des hohlen Zylinders durch $c$ und sein mittlerer Halbmesser $\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ mit $r$ dargestellt; so hat man $a_1=r+\frac{1}{2}c$, $a_2=r-\frac{1}{2}c$, und wenn man diese Werthe in die vorstehende Gleichung substituirt,

$$J=2\pi b c r(r^2+\tfrac{1}{4}c^2)\ldots\ldots(65)$$

§. 87. Trägheitsmoment eines vollen Zylinders in Beziehung zu einer Umdrehungsaxe, welche durch seinen Schwerpunkt geht und auf seiner Axe perpendikular steht.

**AB** sei eine solche Umdrehungsaxe und **PQ** stelle eine sehr




dünne Schicht dar, welche zwischen zwei zu dieser Axe perpendikularen Ebenen liegt. Die Axe **CD** des Zylinders werde mit $b$, sein Halbmesser mit $a$, der Abstand **CM** mit $x$, die Dicke der Schicht mit $\triangle x$ und **MP** mit $y$ bezeichnet. Betrachtet man diese Schicht als ein rechtwinkliges Parallelepipedum, durch dessen Schwerpunkt die Umdrehungsaxe **AB** geht; so ist ihr Trägheitsmoment nach Gleichung (62) $\frac{1}{12}\triangle x.b.2y[b^2+(2y)^2]=\frac{1}{6}b(b^2y+4y^3)\triangle x$. Nun besteht das Trägheitsmoment J des ganzen Zylinders in Beziehung zur Axe **AB** offenbar aus der Summe der Trägheitsmomente aller dieser Schichten und ist demnach

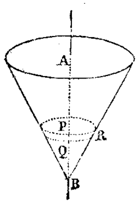
$$J=\frac{1}{6}b\Sigma(b^2y+4y^3)\triangle x=\frac{1}{6}b\int_{-a}^{a}(b^2y+4y^3)dx.$$

Da $x$ und $y$ die Koordinaten eines Punktes in einem Kreise sind; so hat man $y=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Substituirt man diesen Werth von $y$ in die vorstehende Gleichung und integrirt alsdann nach bekannten Regeln; so kommt

$$J=\frac{1}{4}\pi b a^2(a^2+\frac{1}{3}b^2)\ldots.(66)$$

§. 88. Trägheitsmoment eines Kegels in Beziehung zu seiner Axe.

Der Kegel kann als aus lauter Schichten wie **PQ** bestehend




gedacht werden, welche zwischen zwei auf seiner Axe **AB** perpendikularen Ebenen liegen und ihre Mittelpunkte in dieser Axe haben. Setzt man **BP**$=x$, die Dicke der Schicht $=\triangle x$ und ihren Halbmesser **PR**$=y$; so ist ihr Trägheitsmoment, wenn man dieselbe als einen Zylinder von sehr sehr geringer Höhe ansieht, in Beziehung zur Axe **AB**$=\frac{1}{2}\pi y^4\triangle x$ (Gleichung 64). Das Trägheitsmoment J des ganzen Kegels ist gleich der Summe der Trägheitsmomente aller dieser Elementarschichten, und man hat daher

$$J=\tfrac{1}{2}\pi\Sigma y^4\triangle x.$$

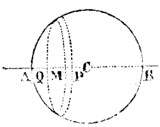
Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche des Kegels mit $a$, seine Höhe mit $b$; so ist $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$, folglich $x=\frac{b}{a}y$, $\triangle x=\frac{b}{a}\triangle y$ und

$$J=\tfrac{1}{2}\pi\frac{b}{a}\Sigma y^4\triangle y=\tfrac{1}{2}\pi\frac{b}{a}\int_0^a y^4 dy \text{ d. i.}$$

$$J=\tfrac{1}{10}\pi b a^4 \ldots\ldots (67)$$

## §. 89. Trägheitsmoment einer Kugel für Einen ihrer Durchmesser.

Wenn C der Mittelpunkt der Kugel und AB der Durchmesser ist, für welchen das Trägheitsmoment genommen werden soll; so sei PQ eine sehr dünne Schicht zwischen zwei auf AB perpendikular stehenden Ebenen; CM sei $=x$, die Dicke der Schicht $=\triangle x$, ihr Halbmesser $=y$ und der Halbmesser der Kugel CA$=a$. Setzt man die Schicht als sehr dünn voraus, so kann sie wie ein Zylinder behandelt werden, dessen Moment in Beziehung zur Axe AB (nach Gleichung 64) $\frac{1}{2}\pi y^4\triangle x$ ist. Das Trägheitsmoment J der ganzen Kugel ist die Summe der Trägheitsmomente aller dieser Schichten, und daher



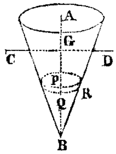

$$J=\tfrac{1}{2}\pi\Sigma y^4\triangle x=\tfrac{1}{2}\pi\int_{-a}^{a} y^4 dx.$$

Vermöge der Gleichung des Kreises hat man $y^2=a^2-x^2$, also $y^4=a^4-2a^2x^2+x^4$. Wird dieser Werth von $y^4$ in die vorstehende Gleichung substituirt und die Integration ausgeführt; so ergibt sich

$$J=\tfrac{8}{15}\pi a^5 \ldots\ldots (68)$$

## §. 90. Trägheitsmoment eines Kegels in Beziehung zu einer Umdrehungsaxe, welche durch seinen Schwerpunkt geht und auf seiner Axe perpendikular steht.

**CD** sei eine Umdrehungsaxe, welche durch den Schwerpunkt **G** des Kegels geht und auf seiner Axe perpendikular steht, ferner sei der Abstand **GP** einer sehr dünnen zur Grundfläche des Kegels parallelen Schicht vom Punkte **G** gleich $x$, die Dicke dieser Schicht gleich $\triangle x$ und ihr Halbmesser gleich $y$. Betrachtet man diese Schicht als einen Zylinder von sehr geringer Höhe; so ist ihr Trägheitsmoment in Beziehung zu einer Axe, welche mit **CD** parallel ist und durch ihren Mittelpunkt geht, nach Gleichung (66) $\frac{1}{4}\pi y^2[y^2+\frac{1}{3}(\triangle x)^2]\triangle x$, oder wenn man $\triangle x$ sehr klein annimmt, so daß $\frac{1}{3}(\triangle x)^2$ gegen $y^2$ verschwindet, $\frac{1}{4}\pi y^4 \triangle x$. Da Dies das Trägheitsmoment der Schicht für eine zu **CD** parallele Axe ist, welche durch ihren Schwerpunkt geht und von der Axe **CD** um $x$ absteht, und da $\pi y^2 \triangle x$ das Volum dieser Schicht ist; so folgt aus Gleichung (58), daß das Trägheitsmoment derselben Schicht in Beziehung zu **CD**




$$\pi y^2 x^2 \triangle x + \tfrac{1}{4}\pi y^4 \triangle x = \pi(y^2 x^2 + \tfrac{1}{4}y^4)\triangle y$$

ist.

Das Trägheitsmoment **J** des ganzen Kegels für die Axe **CD** ist die Summe der Momente aller dieser Elementarschichten, und man hat daher

$$\mathbf{J} = \pi \Sigma (y^2 x^2 + \tfrac{1}{4}y^4)\triangle x.$$

Wenn aber $a$ den Halbmesser der Grundfläche des Kegels und $b$ seine Höhe bezeichnet; so hat man, weil alsdann $\mathbf{BG} = \frac{3}{4}b$ ist,

$$\frac{\frac{3}{4}b - x}{y} = \frac{b}{a}, \text{ folglich } x = \frac{b}{a}(\tfrac{3}{4}a - y) \text{ und } \triangle x = -\frac{b}{a}\triangle y,$$

und hierdurch wird der obige Ausdruck für **J**

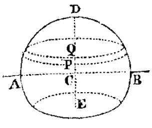
$$\mathbf{J} = -\pi\frac{b}{a}\Sigma\left[\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{3}{4}a - y)^2 y^2 + \tfrac{1}{4}y^4\right]\triangle y,$$

$$\mathbf{J} = -\pi\frac{b}{a}\int_a^0 \left[\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{3}{4}a - y)^2 y^2 + \tfrac{1}{4}y^4\right]dy,$$

$$\mathbf{J} = \tfrac{1}{20}\pi a^2 b(a^2 + \tfrac{1}{4}b^2) \ldots . (69)$$

**§. 91. Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes in Beziehung zu einem mit der Grundfläche parallelen Durchmesser der Kugel.**

Stellt **ADBE** irgend einen solchen Kugeltheil dar, und ist




der Durchmesser **AB** zur Grundfläche des Abschnittes parallel; so sei **CD**$=a$, **CE**$=b$. Ist ferner **PQ** eine elementare Schicht zwischen zwei zur Grundfläche des Abschnittes parallelen Ebenen; so bezeichne $x$ den Abstand dieser Schicht vom Mittelpunkte **C**, $\triangle x$ die Dicke derselben und $y$ ihren Halbmesser. Nun kann man diese Schicht als einen Zylinder von sehr geringer Höhe ansehen, dessen Moment in Beziehung zu einer Axe, welche durch seinen Schwerpunkt geht und mit **AB** parallel läuft, nach Gleichung (66) $\frac{1}{4}\pi y^2[y^2+\frac{1}{3}(\triangle x)^2]\triangle x$, oder wenn man $\frac{1}{3}(\triangle x)^2$ gegen $y^2$ vernachlässigt, $\frac{1}{4}\pi y^4 \triangle x$ ist. Hiernach wird das Trägheitsmoment dieser Schicht in Beziehung zur Axe **AB** (Gleichung 58) durch $\pi y^2 \triangle x x^2 + \frac{1}{4}\pi y^4 \triangle x = \pi(y^2 x^2 + \frac{1}{4}y^2)\triangle x$ dargestellt. Da nun endlich das Trägheitsmoment **J** des ganzen Kugelabschnittes **ADBE** aus der Summe der Trägheitsmomente aller solcher Elementarschichten besteht; so ergibt sich

$$\mathrm{J}=\pi\Sigma(y^2x^2+\tfrac{1}{4}y^4)\triangle x=\pi\int_{-b}^{a}(y^2x^2+\tfrac{1}{4}y^4)\,dx,$$

und dieser Ausdruck wird, wenn man die Beziehung $y^2=a^2-x^2$ berücksichtigt, woraus $y^2x^2+\frac{1}{4}y^4=\frac{1}{4}(2a^2x^2-3x^4+a^4)$ folgt, und alsdann integrirt,

$$\mathrm{J}=\tfrac{1}{60}\pi(16a^5+15a^4b+10a^2b^3-9b^5)\;\ldots.\;(70)$$

## Beschleunigung der Bewegung durch beliebige bewegende Kräfte.

§. 92. Wenn die Kräfte, welche an einem sich bewegenden Körper in der Richtung seiner Bewegung angebracht sind, diejenigen überschreiten, welche in entgegengesetzter Richtung wirken (wobei beide in die Richtung einer Tangente an der Bahn des Körpers zerlegt sind); so wird die Bewegung des Körpers **beschleunigt** werden, und wenn die Summe jener ersteren Kräfte kleiner ist, als die der letzteren; so wird die Bewegung **verzögert** werden. In jedem dieser beiden Fälle heißt der Ueberschuß des Betrages der Einen Kraft über den der anderen die bewegende Kraft dee Körpers. Sie wird durch den einzigen Druck gemessen, welcher in entgegengesetzter Richtung angebracht werden müßte, um dieser Resultate das Gleichgewicht zu halten, oder welcher, wenn er mit den übrigen Kräften zugleich im Zustande der Ruhe auf den Körper angebracht wäre, denselben in diesem Zustande der Ruhe erhalten würde, und welcher daher auch, wenn er nach Beginn der Bewegung auf den Körper angebracht wäre, denselben aus dem Zustande der veränderlichen in den der gleichförmigen Bewegung überführen würde. Demnach wird die bewegende Kraft eines Körpers, welcher vermöge seiner Schwere frei fällt, durch sein Gewicht, das heißt durch die einzige Kraft gemessen, welche, vor Beginn der Bewegung auf den Körper angebracht, denselben im Gleichgewichte erhalten hätte, und welche, in irgend einem Augenblicke des Falles auf den Körper angebracht, seine veränderliche Bewegung in eine gleichförmige überführen würde. Wenn bei diesem Falle des Körpers der Widerstand der Luft mit in Betracht gezogen würde; so müßte die bewegende Kraft des Körpers in irgend einem Augenblicke durch den einzigen Druck gemessen werden, welcher, wenn er vertikal nach oben angebracht wäre, mit dem Widerstande der Luft zusammen dem Gewichte des Körpers das Gleichgewicht halten könnte.

Denkt man sich hiernach eine bewegende Kraft durch einen Druck gemessen, da sie in der That der nicht im Gleichgewichte gehaltene Theil der auf einen Körper wirkenden Druckkräfte ist; so werden die nachfolgenden Beziehungen zwischen der Größe einer so gemessenen bewegenden Kraft und dem Grade der durch sie hervorgebrachten Beschleunigung leicht zu verstehen sein. Es sind dies Gesetze der Bewegung, welche sich aus der Beobachtung der Bewegungen aller irdischen und planetarischen Körper ergeben haben.

§. 93. Wenn die bewegende Kraft eines Körpers während der ganzen Bewegung dieselbe Stärke (welche durch den äquivalenten Druck gemessen wird) beibehält, oder wenn sie eine gleichförmig bewegende Kraft ist; so theilt sie dem Körper in gleichen aufeinander folgenden Zeiträumen gleiche Zunahmen an Geschwindigkeit mit. Da also die bewegende Kraft eines frei herabfallen-den schweren Körpers (welche durch sein Gewicht gemessen wird) sich fortwährend gleich bleibt (wenn der Widerstand der Luft unberücksichtigt gelassen wird); so empfängt der Körper von der Schwere in gleichen Zeiten gleiche Zunahmen an Geschwindigkeit, nämlich eine Geschwindigkeit von 31,2644 Fuß in jeder folgenden Sekunde.

§. 94. Die Geschwindigkeitszunahmen, welche denselben Körpern in denselben Zeiten von verschiedenen gleichförmig bewegenden Kräften mitgetheilt werden, verhalten sich zu einander, wie die Größen dieser bewegenden Kräfte selbst (welche durch die ihnen äquivalenten Druckkräfte gemessen gedacht werden).

Sind also $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}_1$ zwei ungleiche bewegende Kräfte, welche auf zwei ganz gleiche Körper in den Richtungen ihrer Bewegung wirken, und während der ganzen Dauer der Bewegung konstant bleiben, und sind $f$ und $f_1$ die Zunahmen an Geschwindigkeit, welche jene beiden Kräfte den beiden gleichen Körpern in jeder Zeitsekunde mittheilen; so ist es ein Gesetz der Bewegung der Körper, welches man durch Beobachtungen und Versuche aufgefunden hat, daß sich

$$\mathbf{P} : \mathbf{P}_1 = f : f_1$$

verhält.

Würde der Eine Körper durch die Schwere bewegt, so daß $\mathbf{P}_1$ das Gewicht $\mathbf{W}$ des bewegten Körpers darstellte; so hätte man für den Werth $f_1$ der Geschwindigkeitszunahme in der Sekunde, welche der Wirkung der Schwere entspricht, das Zeichen $g = 31{,}2644$ Fuß zu nehmen und

$$\mathbf{P} : \mathbf{W} = f : g$$

zu setzen, woraus sich

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{W}}{g} f \ldots. (71)$$

ergibt *)

*) $\frac{\mathbf{W}}{g}$ stellt die Masse des bewegten Körpers dar (§. 66), und man sieh daß das Maaß irgend einer konstanten Kraft entweder der einfache Druck $\mathbf{P}$ ist, welchen dieselbe auf einen festen Widerstand äußeren würde, oder daß dieses Maaß, wenn sie auf einen Körper von der Masse $\mathbf{M}$ wirkt, welcher ihrer Einwirkung frei folgen kann, und wenn sie diesem Körper in jeder Zeiteinheit eine Geschwindigkeitszunahme $= f$ mittheilt, durch das Produkt $\mathbf{M}f$ dargestellt wird, so daß man immer $\mathbf{P} = \mathbf{M}f$ hat (vergl. die Note zu §. 66).

§. 95. Wenn sich die Größe der bewegenden Kraft im Laufe der Bewegung nicht fortwährend gleich bleibt, oder wenn die Kraft veränderlich ist; so bleiben auch die in den sukzessiven gleichen Zeiträumen mitgetheilten Zunahmen an Geschwindigkeit nicht einander gleich; sie wachsen unaufhörlich, wenn die bewegende Kraft wächst, und nehmen ab, wenn diese abnimmt.

Wenn zwei ungleiche bewegende Kräfte, von denen die Eine oder auch beide in Größe veränderlich sind, die bewegenden Kräfte zweier gleicher Körper werden; so verhalten sich die Geschwindigkeitszunahmen, welche sie beiden Körpern in denselben Zeiten mittheilen würden, wenn sie in irgend einen Augenblicke der Bewegung aufhörten veränderlich zu sein und konstant würden (§. 94), wie die Größen, welche resp. beide Kräfte in demselben Augenblicke besitzen.

Dieser Satz ist eine nothwendige Folge des vorhergehenden (§. 94); denn in dem Augenblicke, wo beide Kräfte konstant oder gleichförmig würden, sind sie solche, wie dem Prinzipe des §. 94 zu Grunde gelegt sind, und da es gleichgültig ist, welche Beschaffenheit sie vor dem Augenblicke des Konstantwerdens besaßen, weil die den Körpern bis zu diesem Augenblicke eingedrückten absoluten Geschwindigkeiten bei den nachherigen Zunahmen an Geschwindigkeit gar nicht in Betracht kommen können; so folgt, daß von dem Augenblicke des angenommenen Konstantwerdens beider Kräfte dieselben Gesetze darauf Anwendung finden müssen, welche für wirklich konstante bewegende Kräfte gelten.

Sind daher $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}_1$ die Größen der beiden bewegenden Kräfte in irgend einem bestimmten Augenblicke, und stellen $f$ und $f_1$ die Zunahmen an Geschwindigkeit dar, welche beide Kräfte Ein und demselben Körper in der Sekunde mittheilen würden, wenn sie gleichförmig würden und mit den Stärken $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}_1$ auf den Körper einwirkten; so hat man nach §. 94

$$\mathbf{P} : \mathbf{P}_1 = f : f_1.$$

Da Dies von irgend zwei ganz beliebigen Kräften gilt; so hat es auch Richtigkeit, wenn die Eine der beiden bewegenden Kräfte schon von vorn herein konstant gewesen oder die Kraft der Schwere wäre. In diesem Falle hat man für $\mathbf{P}_1$ das Gewicht $\mathbf{W}$ des Körpers und für $f_1$ das bekannte Zeichen $g$ zu setzen, sodaß die vorstehende Gleichung

$$P : W = f : g \text{ oder}$$

$$P = \frac{W}{g} f$$

wird.

Wäre nun das Gesetz bekannt, nach welchem sich die Geschwindigkeit V des von der veränderlichen Kraft P getriebenen Körpers mit der Zeit $t$ ändert, oder kennte man die Zunahmen $f$, welche diese Geschwindigkeit in den verschiedenen Augenblicken der Zeit $t$ erleiden würde, wenn die Kraft plötzlich konstant $= P$ würde; so wäre man nach der vorstehenden Beziehung zwischen P und $f$ im Stande, für jeden Augenblick der Zeit oder für jeden Werth von $f$ den entsprechenden Werth der in demselben Augenblicke stattfindenden Größe P der bewegenden Kraft zu bestimmen, oder umgekehrt, wenn das Gesetz der Veränderlichkeit der Größe der bewegenden Kraft mit der Zeit bekannt wäre; so würde man aus jener Beziehung für jeden Augenblick der Zeit den Werth von $f$ d. h. das Gesetz der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit V des Körpers ermitteln können.

Um Dies näher auszuführen, so denke man sich, die bewegende Kraft P bleibe während einer Anzahl von Sekunden oder von Theilen einer Sekunde, d. i. allgemein während der Zeit $\triangle t$ konstant und $\triangle V$ sei der Zuwachs, welchen die Geschwindigkeit V in diesem ganzen Zeitraume $\triangle t$ erleidet. Bezeichnet nun $f$ die Zunahme, welche die Geschwindigkeit in Einer Sekunde empfängt; so hat man, weil $\triangle V$ die Zunahme in $\triangle t$ Sekunden ist, und weil die Kraft P während der Zeit $\triangle t$ als konstant angenommen wird, sodaß sich die Bewegung während dieser Zeit gleichförmig beschleunigt (§. 44)

$$f \triangle t = \triangle V, \text{ also } f = \frac{\triangle V}{\triangle t}.$$

Diese Gleichung ist richtig, wie klein auch die Zeit $\triangle t$ sein mag, vorausgesetzt, daß die Bedingung, worauf sie sich gründet, daß nämlich P während der Zeit $\triangle t$ konstant bleibe, wahr ist. Nimmt man nun diese Zeit unendlich klein an; so ist jene Bedingung in allen Fällen wahr: denn wenn auch der Werth von P mit der Zeit $t$ veränderlich ist und für irgend zwei Augenblicke, welche um einen endlichen Werth von $t$ von einander abstehen, nicht als derselbe betrachtet werden darf; so kann man denselben doch für die Dauer eines unendlich kleinen Zeitraumes als sich gleichbleibend ansehen. Wird aber $\triangle t$ unendlich klein; so reduzirt sich der Quotient $\frac{\triangle V}{\triangle t}$ auf den Differenzialkoeffizienten $\frac{dV}{dt}$, wobei die Geschwindigkeit V als eine Funktion der Zeit $t$ gedacht wird, und man hat allgemein $f = \frac{dV}{dt}$.

Wenn die Geschwindigkeit V mit der Zeit $t$ wächst, oder wenn die Bewegung beschleunigt wird; so ist $\frac{dV}{dt}$ nothwendig eine positive Größe. Wenn dagegen V abnimmt, sowie die Zeit wächst; so ist $\frac{dV}{dt}$ negativ, und man kann allgemein

$$f = \pm \frac{dV}{dt} \ldots\ldots (72)$$

setzen, worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert wird. Achtet man jedoch auf das Zeichen, welches der Differenzialkoeffizient $\frac{dV}{dt}$ von selbst annehmen wird, sobald V als Funktion von $t$ gegeben ist; so braucht man das Zeichen $\pm$ nicht weiter zu berücksichtigen. Durch Substitution dieses Werthes von $f$ in die obige Gleichung ergibt sich für den Fall, wo P einen veränderlichen Druck bezeichnet,

$$P = \pm \frac{W}{g} \quad \frac{dV}{dt} \ldots (73)$$

Die vorstehenden Prinzipien bilden die Fundamentalbeziehungen zwischen Druck und Bewegung.

§. 96. Da die Geschwindigkeit V in irgend einem Augenblicke der veränderlichen Bewegung eines Körpers den Raum bezeichnet, welchen derselbe in der Sekunde durchlaufen würde, wenn seine Bewegung in jenem Augenblicke plötzlich gleichförmig würde; so folgt, wenn man mit $\triangle t$ irgend eine Anzahl von Sefunden oder von Theilen einer Sekunde und mit $\triangle S$ den Raum bezeichnet, welchen der Körper in der Zeit $\triangle t$ beschreiben würde, wenn seine Bewegung vom Anfange bis zum Ende dieses Zeitraumes gleichförmig bliebe,

$$V \triangle t = \triangle S \text{ oder } V = \frac{\triangle S}{\triangle t}$$

Dieser Satz behält Gültigkeit, wie klein man auch jenen Zeitraum $\triangle t$ annehmen möge, also auch wenn derselbe unendlich klein wird, wofern nur die Bewegung während desselben gleichförmig bleibt. Wird aber die Zeit $\triangle t$ unendlich klein angenommen; so kann die Bewegung während derselben immer als gleichförmig betrachtet werden, wie veränderlich auch die bewegende Kraft sein möge. Für einen unendlich kleinen Werth von $\triangle t$ wird übrigens der Quotient $\frac{\triangle S}{\triangle t}$ gleich dem Differenzialkoeffizienten $\frac{dS}{dt}$, worin der Raum S als eine Funktion der Zeit $t$, am Ende welcher er durchlaufen ist, angesehen werden muß, und man hat daher allgemein für jede veränderliche Bewegung

$$V = \frac{dS}{dt} \dots\dots (74)$$

Die Gleichungen (73) und (74) sind die Fundamentalgleichungen der Dynamik; sie schließen alle Resultate in sich, welche in den vorhergehenden Sätzen der dynamischen Lehren mit Hülfe anderer Prinzipien entwickelt sind.

Sowol V wie S sind in diesen beiden Gleichungen als Funktionen der Zeit $t$ anzusehen; differenziirt man daher die Gleichung (74) nochmals in Beziehung zu $t$; so kommt

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = f,$$

und wenn man diesen Werth von $\frac{dV}{dt}$ in die Gleichung (73) substituirt,

$$P = \pm \frac{W}{g} \frac{d^2 S}{dt^2}, \dots\dots (74^a)$$

wodurch man einen direkten Zusammenhang zwischen dem am Ende der Zeit $t$ durchlaufenen Raume S und der in demselben

Augenblicke stattfindenden Größe der bewegenden Kraft P erhält. Wäre nun zwischen irgend zweien der vier Größen P, V, S und $t$, welche sich sämmtlich auf den Zustand der Bewegung am Ende der Zeit $t$ beziehen, eine beliebige Gleichung gegeben; so hätte man zwischen diesen vier Größen im Ganzen drei verschiedene Gleichnungen, nämlich die gegebene und die beiden Beziehungen (73) und (74) (die Beziehung $74^a$ ist von jenen beiden abhängig und nicht identisch verschieden, kann also nicht als eine dritte besondere Beziehung zwischen P, V, S und $t$ angesehen werden). Vermittelst dieser drei Gleichungen könnte man alsdann irgend zwei der vier Größen P, V, S, $t$ eliminiren und eine jede der übrigen beiden durch die vierte Größe ausdrücken, so daß dadurch das Gesetz der Bewegung vollkommen bestimmt wäre.

Das durch die frühere Gleichung (47) ausgedrückte allgemeine Prinzip ergibt sich aus den vorstehenden beiden Gleichungen (73) und (74), wenn man die erstere umkehrt und mit der letzteren multiplizirt; hierdurch erhält man

$$\frac{W}{g}V\frac{dV}{dt}=\pm P\frac{dS}{dt}$$

oder wenn man mit $dt$ multiplizirt,

$$\frac{W}{g}VdV=\pm PdS,$$

d. i., da $VdV=\frac{1}{2}d(V^2)$ ist,

$$\frac{W}{g}d(V^2)=\pm 2PdS,$$

und wenn man zwischen den Gränzen $S_1$ und $S_2$ von S, welchen die Gränzwerthe V und $v$ von V entsprechen mögen, integrirt,

$$\frac{W}{g}\int_v^V d(V^2)=\pm 2\int_{S_2}^{S_1} PdS,\ \text{oder}$$

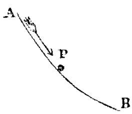
$$\frac{W}{g}(V^2-v^2)=\pm 2\int_{S_2}^{S_1} PdS,$$

d. h. die gewonnene lebende Kraft des Körpers ist gleich dem Doppelten der ihm beim Uebergange der Geschwindigkeit $v$ in V mitgetheilten Arbeit, da $\frac{W}{g}$ hier, wie in allen vorhergehenden Formeln, die Masse des Körpers bezeichnet.

## Bewegung eines Körpers in einer Kurve.

§. 97. Wenn die bewegende Kraft **P** eines Körpers in direktem Verhältnisse wie der Abstand varirt, in welchem sich der Körper am Ende der Zeit $t$ von einem gegebenen Punkte, gegen den er sich bewegt, befindet; so wird die ganze Zeit, welche der Körper gebraucht, um, vom Zustande der Ruhe ausgehend, bis zu jenem Punkte zu gelangen, immer dieselbe sein, wie groß auch die Entfernung sein mag, welche er bis zu diesem Punkte zu durchlaufen hat.

**A** sei der Punkt, von welchem der Körper ausgeht, und **B** der Punkt, gegen welchen er sich längs des Weges **APB**, der eine Kurve oder gerade Linie sein kann, bewegt. Nimmt man nun an, es wirke auf den Körper in jedem Punkte **P** seiner Bahn und in der Richtung der Letzteren eine Kraft, deren Stärke in demselben Verhältnisse ab-, resp. zunimmt, wie der Abstand **BP**, welcher längs des Weges von **B** aus gemessen ist, ab- oder zunimmt; so wird die Zeit der Bewegung, bis der Körper den Punkt **B** erreicht, immer dieselbe sein, wie groß auch die Entfernung zwischen dem Anfangspunkte **A** und dem Endpunkte **B** sein mag, vorausgesetzt, daß der Körper seine Bewegung mit der Geschwindigkeit null beginne.




Denn setzt man die Wegelänge $BP = S$ und stellt die in der Richtung des Weges gegen **B** wirkende Kraft durch $cS$ dar, worin $c$ eine konstante Größe ist, nimmt ferner an, der Körper werde, statt von **A** aus gegen **B** zu fallen, mit irgend einer Geschwindigkeit von **B** gegen **A** geworfen, und bezeichnet die bei **P** erlangte Geschwindigkeit mit $v$, die bei **A** erlangte mit **V** und setzt die Länge $BA = S_1$; so hat man nach Gleichung (47)

$$V^2 - v^2 = -\frac{2g}{W}\int_S^{S_1} cS\,dS = -\frac{cg}{W}(S_1{}^2 - S^2).$$

Nimmt man nun an, die Wurfgeschwindigkeit bei **B** sei von der Art gewesen, daß dadurch der Körper gerade nur bis zum Punkte **A** gelangte und daselbst zur Ruhe käme, sodaß man $\mathbf{V}=o$ hätte; so ergibt die vorstehende Gleichung

$$v^2=\frac{cg}{\mathrm{W}}(\mathrm{S}_1{}^2-\mathrm{S}^2)\,\ldots\ldots(75)$$

Nach Gleichung (74) hat man

$$\frac{dt}{d\mathrm{S}}=\frac{1}{v},\ \text{also}\ t=\int\frac{d\mathrm{S}}{v},$$

d. i., wenn man hierin für $v$ seinen Werth aus Gleichung (75) substituirt,

$$t=\int\frac{d\mathrm{S}}{\sqrt{\frac{cg}{\mathrm{W}}(\mathrm{S}_1{}^2-\mathrm{S}^2)}},$$

und wenn man die ganze Zeit in Sekunden, welche der Körper gebraucht, um von **B** bis **A** zu gelangen, mit $\frac{1}{2}$ **T** bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{T}=\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{cg}}\int_o^{\mathrm{S}_1}\frac{d\mathrm{S}}{\sqrt{\mathrm{S}_1{}^2-\mathrm{S}^2}}=\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{cg}}\int_o^{\mathrm{S}_1}\frac{d\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}_1}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}_1}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{cg}}\left(\text{arc.}\sin.\frac{\mathrm{S}_1}{\mathrm{S}_1}-\text{arc.}\sin.\frac{o}{\mathrm{S}_1}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{cg}}\,(\text{arc.}\sin.1-\text{arc.}\sin.o)\ \text{d. i.}$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{T}=\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{cg}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Es leuchtet ein, daß die Zeit, welche der Körper gebraucht, um von **A** bis **B** zu fallen, gleich der ist, welche er gebraucht, um von **B** bis **A** aufzusteigen, sodaß die ganze Zeit, welche erforderlich ist, um einen Hin- und Hergang zu vollenden, gleich **T** ist und durch die Formel

$$\mathrm{T}=\pi\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{cg}}\,\ldots\ldots(76)$$

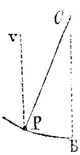
dargestellt wird.

Aus diesem Ausdrucke ist die Größe $S_1$ d. h. die Entfernung, aus welcher der Körper bis **B** fällt, ganz verschwunden, und man schließt, daß die Zeit **T** dieselbe bleibt, welches auch diese Entfernung sein mag.

## Das einfache Pendel.

§. 98. Wenn man sich denkt, an dem Punkte **C** sei vermittelst eines gewichtslosen Fadens ein schwerer materieller Punkt **P** aufgehängt und könne frei hin- undherschwingen, jedoch so, daß er nur sehr wenig auf jeder Seite von der Vertikalen abweiche; so werden seine Schwingungen, solange dieselben sehr klein bleiben, immer in derselben Zeit vollendet werden, welches auch ihr Ausschlagswinkel sein mag.

Denn bezeichnet man den Neigungswinkel **PCB** des Fadens




**CP** gegen die Vertikale mit $\vartheta$ und zerlegt das Gewicht $w$ des Punktes **P**, welches in der vertikalen Richtung **VP** wirkt, in zwei andere, von denen das Eine in die Richtung **CP** und das andere in die zu **CP** perpendikulare Richtung fällt; so wird die Wirkung des ersteren durch die Spannung des Fadens **CP** aufgehoben, das andere dagegen, welches durch $w . \sin . VPC = w \sin \vartheta$ dargestellt wird, wirkt in der Richtung, in welcher sich der Punkt **P** bewegt und bildet die ganze bewegende Kraft desselben (§. 92). Solange nun der Bogen $\vartheta$ klein ist, differirt er nicht merklich von seinem Sinus, so daß für kleine Schwingungen die bewegende Kraft von **P** durch $w\vartheta$ oder durch $\frac{w(l\vartheta)}{l}$ oder durch $\frac{wS}{l}$ dargestellt wird, worin $l$ die Länge des Fadens **CP** und **S** die Länge des Bogens **BP** bezeichnet. In diesem Ausdrucke sind $w$ und $l$ während der ganzen Schwingung konstant; die bewegende Kraft variirt also in direktem Verhältnisse mit **S**, und hieraus folgt, vermöge des vorhergehenden Satzes, daß die kleinen Schwingungen auf jeder Seite der Vertikalen **CB** isochron sind, weil die bewegende Kraft, so lange die Oszillationen klein bleiben, in demselben Verhältnisse, wie die Länge **BP** des Weges vom tiefsten

Punkte **B** aus variirt. Da in dem vorhergehenden Satze die bewegende Kraft $=c\mathbf{S}$ angenommen war und dieselbe hier durch $\frac{w}{l}\mathbf{S}$ dargestellt wird; so hat man in diesem Falle $c=\frac{w}{l}$, und die Gleichung (76) reduzirt sich für diesen Werth von $c$ auf

$$\mathbf{T}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ldots\ldots(77)$$

Ein solcher schwerer materieller Punkt, welcher an einem gewichtslosen Faden aufgehängt ist, bildet ein einfaches Pendel. Es leutet ein, daß die Schwingungsdauer **T** mit der Länge $l$ des Pendels wächst.

## Stoß- oder Impulsionskraft.

§. 99. Wenn mehrere bewegende Kräfte auf ebenso viel gleiche Körper angebracht sind; so werden sich die Geschwindigkeiten, welche diesen Körpern in demselben sehr kleinen Zeitraume mitgetheilt werden, ebenso verhalten, wie die bewegenden Kräfte selbst. Denn wenn $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ die bewegenden Kräfte und $f_1, f_2, \ldots$ die Zunahmen an Geschwindigkeit darstellen, welche jene Kräfte in der Sekunde mittheilen würden, wenn eine jede derselben fortwährend dieselbe Stärke behielte (§. 93); so würden $tf_1, tf_2, \ldots$ die gesammten Zunahmen an Geschwindigkeit sein, welche unter dieser Voraussetzung in $t$ Sekunden mitgetheilt würden. Bezeichnet man dieselben mit $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots$, so hat man nach §. 94

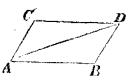
$$\mathbf{P}_1:\mathbf{P}_2:\ldots=f_1:f_2:\ldots=tf_1:tf_2:\ldots=\mathbf{V}_1:\mathbf{V}_2:\ldots$$

Dieser Satz ist richtig unter der Voraussetzung, daß die Kräfte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ während des Zeitraumes $t$ konstant bleiben. Ist nun $t$ ungemein klein; so können die Kräfte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ während dieser sehr kurzen Zeit immer als konstant betrachtet werden, welche veränderlichen Werthe sie auch sonst haben mögen, und demnach behält der obige Svtz allgemein für ganz beliebige Kräfte Gültigkeit, wenn sie nur auf gleiche Körper und nur während sehr kurzer Zeiträume wirken. Hieraus folgt aber auch, daß die vorstehende Behauptung wahr sei, wenn sämmtliche Kräfte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1, \ldots$ nacheinander auf Ein und denselben Körper angebracht werden, oder daß sich die Zunahmen an Geschwindigkeit, welche einem Körper in einer ungemein kurzen Zeit durch die Einwirkung von Kräften mitgetheilt werden, ebenso verhalten, wie die Kräfte selbst.

Solche bewegende Kräfte, welche nur während äußerst kurzer Zeiträume wirken, nennt man Stoß- oder Impulsionskräfte.

## Das Parallelogramm der Bewegung.

§. 100. Wenn zwei Stoßkräfte $P_1, P_2$, deren Richtungen AB und AC sind, gleichzeitig auf denselben Körper A angebracht sind, welcher, wenn er von jeder Kraft besonders getrieben würde, sich in derselben Zeit durch AB und AC bewegen müßte; so wird die gemeinschaftliche Wirkung beider Kräfte den Körper in dieser Zeit durch die Diagonale AD des Parallelogramms treiben, dessen zusammenstoßende Seiten AB und AC sind.

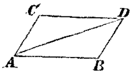



Denn da die bewegenden Kräfte $P_1$ und $P_2$, wenn sie einzeln während gleicher und unendlich kleiner Zeiträume auf den Körper wirken, demselben Geschwindigkeiten mittheilen, welche sich (§. 99) wie diese Kräfte selbst verhalten; so werden sich auch die Räume AB und AC, welche während einer beliebigen Zeit mit diesen Geschwindigkeiten beschrieben werden, wie jene Kräfte verhalten. Wenn aber AB und AC in demselben Verhältnisse stehen, wie die Kräfte $P_1$ und $P_2$; so liegt die Richtung der Resultante R von $P_1$ und $P_2$ nach dem Prinzipe des Parallelogramms der Kräfte (§. 2) in der Diagonale AD und hat zu $P_1$ und $P_2$ dasselbe Verhältniß, wie AD zu AB und AC.

Demnach verhält sich die Geschwindigkeit, welche die Resultante R von $P_1$ und $P_2$ dem Körper in einem ungemein kleinen Zeitraume mittheilen würde, zu den Geschwindigkeiten, welche $P_1$ und $P_2$ einzeln in derselben Zeit erzeugen würden, wie sich AD zu AB und AC verhält (§. 99), und hieraus folgt, daß auch die Räume, welche der Körper mit diesen drei Geschwindigkeiten in beliebigen gleichen Zeiten gleichförmig durchlaufen würde, in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie jene drei Linien. Nun sind aber **AB** und **AC** die in gleichen Zeiten durch die Impulse von $P_1$ und $P_2$ wirklich beschriebenen Räume; mithin ist auch **AD** der Raum, welcher in derselben Zeit durch den Impuls von **R**, d. i. durch die gleichzeitigen Impulse von $P_1$ und $P_2$ beschrieben werden wird.

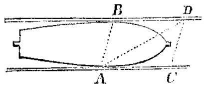
### §. 101. Unabhängigkeit der gleichzeitigen Bewegung.

Es leuchtet ein, daß wenn ein von **A** ausgehender Körper




gezwungen wäre, in einer gegebenen Zeit die Linie **AB** zu durchlaufen, und darauf gezwungen wäre, in einer gleichen Zeit die Linie **BD** zu durchlaufen, er genau in demselben Punkte **D** ankommen würde, zu welchem ihn die gleichzeitigen Bewegungen **AB** und **AC** bringen würden, sodaß der Körper durch diese gleichzeitigen Bewegungen gezwungen wird, denselben Punkt zu erreichen, in welchen er durch dieselben Bewegungen geführt werden würde, wenn sie ihm einzeln nacheinander, aber eine jede in der halben Zeit mitgetheilt würden.

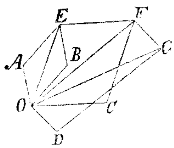
Das Folgende mag als eine Verdeutlichung dieses Prinzipes




der Unabhängigkeit gleichzeitiger Bewegungen angesehen werden. Man denke sich ein Boot, welches die ganze Weite eines Kanales ausfüllt und nehme an, eine im Punkte **A** des Einen Ufers stehende Person beabsichtige nach dem Punkte **D** des gegenüberliegenden Ufers zu gelangen. Zu diesem Zwecke trete sie in dem Augenblicke, wo das Boot den Punkt **A** passirt, in dasselbe und schreite in der Richtung **AB** über das Verdeck, so daß sie bei dem Punkte **B** des Bootes gerade in dem Augenblicke ankommt, wo die Bewegung des Bootes diesen Punkt durch die Linie **BD** geführt hat. Man erkennt, daß diese Person durch die gleichzeitige Wirkung ihrer eigenen Bewegung quer über das Boot und der Bewegung des Bootes längs des Kanales in den Punkt **D** gebracht wird, (indem sie in der Wirklichkeit die Diagonale **AD** beschreibt) welchen dieselbe in der doppelten Zeit erreicht haben würde, wenn sie zuerst in derselben Zeit, welche sie zur Durchschreitung des Bootes gebrauchte, von **A** bis **B** über eine Brücke und alsdann in einer gleichen Zeit am gegenüberliegenden Ufer von B bis D gegangen wäre.

## Das Polygon der Bewegung.

§. 102. Wenn ein Körper bei O gleichzeitig mehrere Impulse erhält, von denen der Eine den Körper in einer gegebenen Zeit von A nach O, ein anderer in derselben Zeit von B nach O, ein dritter in dieser Zeit von C nach O und ein vierter von D nach O treiben würde, und man




vollendet das Parallelogramm, dessen zusammenstoßende Seiten AO und BO sind; so würden die gleichzeitigen Wirkungen der Impulse AO und BO den Körper in derselben Zeit von E nach O bewegen. Vollendet man das Parallelogramm EOCF und zieht die Diagonale FO; so würden die Impulse EO und CO zusammen den Körper in der gegebenen Zeit durch FO treiben: der Impuls EO bringt aber denselben Effekt hervor, als die beiden AO und BO; mithin führen die Impulse AO, BO und CO bei ihrer Zusammenwirkung den Körper in der gegebenen Zeit durch den Raum FO. Ebenso kann gezeigt werden, daß die gleichzeitige Wirkung der Impulse AO, BO, CO und DO den Körper in jener Zeit durch die Linie GO bewegen wird.

Man bemerkt, daß GO die Seite ist, welche das Polygon OAEFG schließt, dessen übrige Seiten OA, AE, EF, FG den Größen und Richtungen OA, OB, OC und OD der gleichzeitigen Impulse respektive gleich und parallel sind.

Wenn die Impulse AO 2c., statt gleichzeitig zu wirken, nacheinander stattgefunden hätten, sodaß der Körper in einer gegebenen Zeit zuerst von O nach A, alsdann in derselben Zeit durch AE, welche gleich und parallel zu OB ist, darauf durch EF, welche gleich und parallel zu OC ist und zuletzt durch FG, welche gleich und parallel zu OD ist, getrieben wäre; so würde der Körper in denselben Punkt G gelangt sein, in welchen er durch die gleichzeitige Wirkung jener Impulse gebracht wird, jedoch nach einer Zeit, welche ebenso viel mal größer ist, als einzelne Bewegungen stattgefunden haben, und man sieht, daß das Prinzip der Unabhängigkeit gleichzeitiger Bewegungen Gültigkeit besitzt, wie groß auch die Anzahl solcher Bewegungen sein mag.

## Das d'Alembertsche Prinzip.

§. 103. $W_1, W_2, W_3, \ldots$ seien die Gewichte mehrerer in Bewegung begriffener Körper, auf welche in irgend einem Augenblicke der Bewegung die Druckkräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ angebracht sind. Bezeichnet man die bewegenden Kräfte dieser Körper, d. h. die nicht im Gleichgewichte erhaltenen Druckkräfte, oder die Kräfte, welche ganz allein zur Hervorbringung der Bewegung verwendet werden und welche denen gleich sind, die, in entgegengesetzten Richtungen angebracht, die Körper in den Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung versetzen würden, mit $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$; so hat man nach §. 95 $P'_1 = \frac{W_1}{g} f_1$, $P'_2 = \frac{W_2}{g} f_2$, $P'_3 = \frac{W_3}{g} f_3$, worin $f_1, f_2, f_3$ die Zunahmen an Geschwindigkeit darstellen, welche die Körper in jeder Sekunde erleiden würden, wenn ihre bewegenden Kräfte in dem Augenblicke, wo sie gemessen werden, konstant würden. Man nehme an, diese Körper, deren Gewichte $W_1, W_2, W_3, \ldots$ sind, bilden ein System von Körpern, welche durch irgend eine denkbare mechanische Verknüpfung miteinander verbunden seien, und auf welche man beliebige Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ angebracht habe, durch deren Wirkungen die nicht im Gleichgewichte gehaltenen bewegenden Kräfte $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ erzeugt werden. Denkt man sich nun, es würden auf diese in Bewegung begriffenen Punkte des Systemes Kräfte angebracht, welche den Kräften $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ resp. gleich, aber den Richtungen nach entgegengesetzt sind; so wird die Bewegung derselben offenbar in den Zustand der Gleichförmigkeit oder der Ruhe (§. 92) übergehen. Wenn nun das ganze System von Körpern dergestalt in den Zustand der gleichförmigen Bewegung oder der Ruhe versetzt ist; so müssen die auf seine einzelnen Elemente angebrachten Kräfte einander das Gleichgewicht halten.

Welches also auch die ursprünglich auf das System angebrachten Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sein mögen; sie müssen, mit den zuletzt erwähnten Kräften, welche gleich $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ sind, einen Zustand des Gleichgewichtes in dem Systeme hervorbringen, sodaß jene ursprünglichen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ zu den Kräften $P'_1$, $P'_2$, $P'_3, \ldots$, wenn dieselben nach entgegengesetzten Seiten angebracht werden, d. i. zu den Kräften $-P'_1$, $-P'_2, -P'_3, \ldots$ solche Beziehungen haben müssen, welche zwischen Kräften stattfinden, die einander das Gleichgewicht halten. Die Kräfte $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ nennt man auch wol die wirksamen Kräfte des Systemes. In einem Systeme von Körpern, welche irgendwie so miteinander verbunden sind, daß ihre Bewegungen einen gegenseitigen Einfluß auf einander haben, müssen demnach die darauf angebrachten Kräfte durch solche Kräfte im Gleichgewichte erhalten werden, welche den bewegenden oder wirksamen Kräften des Systemes der Größe nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind. In diesem Satze besteht das d'Alembertsche Prinzip.

§. 104. Die in einem sich bewegenden Körper beim Durchlaufen irgend eines Raumes angehäufte Arbeit ist gleich der Arbeit, welche auf denselben in entgegengesetzter Richtung entwickelt werden muß, um die wirksame oder bewegende Kraft desselben durch diesen Raum zu überwinden.

Die Richtigkeit dieses Satzes geht aus §. 68 und 69 hervor, da die wirksame Kraft der nicht im Gleichgewichte gehaltene Druck oder der Ueberschuß der auf den Körper angebrachten Kräfte, welche nach der Einen Seite wirken, über die Kräfte ist, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken.

## Fortschreitende Bewegung.

Erklärung. Wenn sich ein Körper im Raume fortbewegt, ohne sich gleichzeitig um sich selbst zu drehen, sodaß alle seine Theile eine gleich rasche und parallele Bewegung besitzen; so sagt man, der Körper habe nur eine fortschreitende Bewegung.

§. 105. **Damit sich ein Körper nur mit einer fortschreitenden Bewegung bewegen könne, muß die Richtung der Resultante aller darauf angebrachter Kräfte durch seinen Schwerpunkt gehen.**

Wenn $w_1, w_2, w_3, \ldots$ die Gewichte der einzelnen Elemente des Körpers und $f$ die Zunahme an Geschwindigkeit bezeichnet, welche irgend ein Element in der Sekunde erlangt oder erlangen würde, wenn seine Bewegung von irgend einem Augenblicke an gleichförmig beschleunigt würde; so ist der Werth von $f$, da die Bewegung nur eine fortschreitende sein soll, offenbar für alle Elemente gleich. Die wirksamen Kräfte $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ der verschiedenen Elemente werden also resp. durch $\frac{w_1}{g}f, \frac{w_2}{g}f, \frac{w_3}{g}f, \ldots$ dargestellt.

Nun sind die wirksamen Kräfte $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ offenbar **parallele** Kräfte. Bezeichnet man also den Abstand des Mittelpunktes des Druckes dieser parallelen Kräfte (§. 17) von irgend einer Ebene mit X, und die Abstände der Elemente $w_1$, $w_2, w_3, \ldots$, d. i. der Angriffspunkte von $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ von derselben Ebene mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$; so hat man nach Gleichung (18)

$$(P'_1 + P'_2 + P'_3 + \ldots)X = P'_1 x_1 + P'_2 x_2 + P'_3 x_3 + \ldots \text{ d. i.}$$

$$\left(\frac{w_1}{g}f + \frac{w_2}{g}f + \frac{w_3}{g}f + \ldots\right)X = \frac{w_1}{g}fx_1 + \frac{w_2}{g}fx_2 + \frac{w_3}{g}fx_3 + \ldots,$$

oder, wenn man mit $\frac{f}{g}$ dividirt,

$$(w_1 + w_2 + w_3 + \ldots)X = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots;$$

mithin

$$X = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots}.$$

Dies ist jedoch der Ausdruck dür den Abstand des Schwerpunktes des ganzen Körpers von der gegebenen Ebene (§. 19), und da man ein ähnliches Resultat für jede beliebige Ebene erhält; so folgt, daß der **Mittelpunkt** der parallelen Kräfte $P'_1, P'_2 P'_3, \ldots$, welche die **wirksamen** oder bewegenden Kräfte des Systemes bilden, mit dem Schwerpunkte des Systemes zusammenfällt, und daß mithin die Resultante aller wirksamen Kräfte durch den Schwerpunkt geht.

Nun muß diese Resultante der wirksamen Kräfte aber auch mit der Resultante aller auf das System angebrachten Kräfte in dieselbe Richtung fallen, weil nach dem d'Alembertschen Prinzipe die Letzteren mit den Ersteren im Gleichgewichte sein müssen, sobald diese in entgegengesetzten Richtungen angebracht werden. Hieraus geht hervor, daß die Resultante aller auf das System angebrachten Kräfte durch den Schwerpunkt desselben gehen muß.

## Umdrehungsbewegung um eine feste Axe.

§. 106. Ein starrer Körper oder ein System von fest verbundenen Körpern sei fähig, sich um die Axe **A** zu drehen. Es seien $m_1, m_2\, m_3, \ldots$ die Volumen der Elemente und $\mu$ das Gewicht der Volumeinheit dieses Körpers, ferner $f_1, f_2, f_3 \ldots$ die Zunahmen an Geschwindigkeit, welche diesen Elementen in der Sekunde mitgetheilt werden, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ die auf die Elemente angebrachten Kräfte und $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die perpendikularen Abstände von der Axe, in welchen jene Kräfte angebracht sind.

Da $\mu m_1$, $\mu m_2$, $\mu m_2, \ldots$ die Gewichte der Elemente und $f_1$, $f_2$, $f_3, \ldots$ die Geschwindigkeitszunahmen derselben in der Sekunde sind; so folgt, daß $\frac{\mu m_1}{g} f_1$, $\frac{\mu m_2}{g} f_2$, $\frac{\mu m_3}{g} f_3, \ldots$ die wirksamen Kräfte der einzelnen Elemente darstellen (§. 103). Bezeichnet man mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die Abstände dieser Elemente von der Umdrehungsaxe, so hat man, da ihre wirksamen Kräfte, welche die Drehung erzeugen, perpendikular gegen diese Abstände gerichtet sind, für die Momente der wirksamen Kräfte in Beziehung zu der Axe $\frac{\mu m_1}{g} f_1 \varrho_1$, $\frac{\mu m_2}{g} f_2 \varrho_2$, $\frac{\mu m_3}{g} f_3 \varrho_3$, .... Ebenso sind $\mathrm{P}_1 p_1$, $\mathrm{P}_2 p_2$, $\mathrm{P}_3 p_3, \ldots$ die Momente der auf das System angebrachten Kräfte in Beziehung zu der Axe. Nun müssen, nach dem d'Alembertschen Prinzipe, die Kräfte $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_3, \ldots$ zusammen mit den Widerständen der Axe, welche ebenfalls zu den auf das System angebrachten Kräften gehören, den wirksamen Kräften das Gleichgewicht halten. Nimmt man daher die Umdrehungsaxe für diejenige Axe, in Beziehung zuwelcher die Momente gemessen werden; so muß die Summe der Momente der angebrachten Kräfte $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ gleich der

Summe der Momente der wirksamen Kräfte sein, oder man muß haben

$$\frac{\mu m_1}{g} f_1 \varrho_1 + \frac{\mu m_2}{g} f_2 \varrho_2 + \frac{\mu m_3}{g} f_3 \varrho_3 + \ldots = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots$$

Bezeichnet $f$ den Werth von $f_1, f_2, f_3, \ldots$ welcher dem Abstande gleich der Längeneinheit von der Umdrehungsaxe entspricht; so stellen $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ Bögen dar, welche in derselben Zeit mit den Halbmessern $1, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ um die Axe beschrieben werden, und man hat daher $f_1 = f\varrho_1$, $f_2 = f\varrho_2$, $f_3 = f\varrho_3, \ldots$ Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so kommt

$$\frac{\mu}{g} m_1 f \varrho_1{}^2 + \frac{\mu}{g} m_2 f \varrho_2{}^2 + \frac{\mu}{g} m_3 f \varrho_3{}^2 + \ldots = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots,$$

oder

$$f \frac{\mu}{g} (m_1 \varrho_1{}^2 + m_2 \varrho_2{}^2 + m_3 \varrho_3{}^2 + \ldots) = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots, \text{ d.i.}$$

$$f \frac{\mu}{g} \Sigma m \varrho^2 = \Sigma P p \text{ oder } f \frac{\mu}{g} J = \Sigma P p,$$

und hieraus folgt

$$f = \frac{g}{\mu} \frac{\Sigma P p}{J}, \ldots . (78)$$

worin J das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung zu der Umdrehungsaxe darstellt.

Wenn $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit oder die Geschwindigkeit eines Elementes darstellt, welches um die Längeneinheit von der Axe absteht; so hat man nach Gleichung (72) $f = \pm \frac{d\alpha}{dt}$, mithin nach der vorstehenden Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dt} = \pm \frac{g}{\mu} \frac{\Sigma P p}{J},$$

oder auch, wenn man mit $\alpha$ multiplizirt,

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \pm \frac{g}{\mu J} \Sigma P p \alpha$$

oder auch $\alpha d\alpha = \frac{1}{2} d(\alpha^2) = \pm \frac{g}{\mu J} \Sigma P p \alpha dt.$

und wenn man gehörig integrirt,

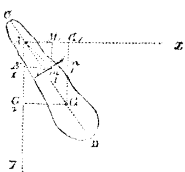
$$\tfrac{1}{2}\alpha_1{}^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_2{}^2 = \pm \frac{g}{\mu J} \Sigma \int_0^t P p \alpha dt.$$

Nun ist $p\alpha$ die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher im Abstande $p$ von der Axe liegt, also $Pp\alpha$ die Arbeit (§. 50) der Kraft P in der Sekunde, daher $\int_0^t Pp\alpha dt$ die Arbeit von P in der Zeit $t$, und $\Sigma \int_0^t Pp\alpha dt$ die Arbeit aller Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in dieser Zeit, welche früher mit U bezeichnet ist. Hiernach hat man

$$\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2 = \pm \frac{2g}{\mu} \frac{U}{J},$$

eine Gleichung, welche mit der obigen (51) vollkommen übereinstimmt.

§. 107. Wenn die auf irgend ein Element angebrachte Kraft



P das Gewicht desselben ist, und man bezeichnet mit $\vartheta$ die Neigung der Linie AG, welche von A nach dem Schwerpunkte G des Körpers oder Systemes gezogen ist, gegen die Vertikale A$y$ in irgend einem Augenblicke der Bewegung; so hat man, da die Summe der Momente der Gewichte der einzelnen Elemente gleich dem Momente des im Schwerpunkte vereinigt gedachten Körpers ist (§. 17), wenn man die Linie AG durch G und das ganze Volum des Körpers durch M darstellt,

$$\Sigma P p = M\mu . \overline{GG_2} = M\mu . G \sin\vartheta,$$

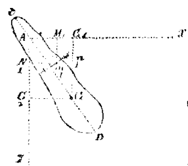
und mithin durch Gleichung (78)

$$f = g\frac{M . G}{J} \sin\vartheta \ldots . (79)$$

§. 108. Bestimmung der Resultante der wirksamen Kräfte eines Körpers, welcher sich vermöge der Einwirkung der Schwere um eine feste Axe drehet.

Die Resultante der wirksamen Kräfte eines um eine feste Axe sich drehenden Körpers ist offenbar gleich jener einzigen Kraft, welche sich mit diesen Kräften ins Gleichgewicht setzen würde, ohne daß dabei der Widerstand der festen Axe mit in Anspruch genommen würde. Wird jene einzige Kraft mit **R** bezeichnet; so muß das Moment von **R** in Beziehung zu irgend einem Punkte gleich der Summe der Momente aller wirksamen Kräfte in Beziehung zu demselben Punkte sein.

Nimmt man die Axe **A**, um von derselben die Momente zu messen und bezeichnet den perpendikularen Abstand der Resultante **R** von dieser Axe mit **L**; so hat man, da nach §. 106 die Summe der Momente der wirksamen Kräfte in Beziehung zu **A** durch $f\frac{\mu}{g}\Sigma m\varrho^2$ dargestellt wird,



$$\mathbf{R}.\mathbf{L} = f\frac{\mu}{g}\Sigma m\varrho^2 \dots (80)$$

Um den Werth von **R** zu bestimmen, so bemerke man, daß die wirksame Kraft $\frac{\mu}{g}fm_1\varrho_1$ irgend eines Elementes $m_1$, welche in einer Richtung $n_1m_1$, perpendikular zu dem Abstande $\mathrm{A}m_1$ von der Axe **A** wirkt, in zwei andere zerlegt werden kann, welche den beiden rechtwinkligen Axen $\mathrm{A}y$ und $\mathrm{A}x$ parallel sind und von denen eine jede gleich dem Produkte der in der Richtung $n_1m_1$ wirksamen Kraft und dem Kosinus des Neigungswinkels von $n_1m_1$ gegen die entsprechende Koordinatenaxe ist. Nun ist die Neigung von $m_1n_1$ gegen $\mathrm{A}x$ gleich der Neigung von $\mathrm{A}m_1$ gegen $\mathrm{A}y$, weil die letzteren beiden Linien auf den ersteren perpendikular stehen. Der Kosinus des Neigungswinkels von $m_1n_1$ gegen $\mathrm{A}x$ ist also gleich $\frac{\mathrm{AN}_1}{\mathrm{A}m_1} = \frac{y_1}{\varrho_1}$, wenn man $\mathrm{AN}_1 = y_1$ setzt. Ebenso ist der Kosinus des Neigungswinkels von $n_1m_1$ gegen $\mathrm{A}y$ gleich $\frac{\mathrm{AM}_1}{\mathrm{A}m_1} = \frac{x_1}{\varrho_1}$, wenn man $\mathrm{AM}_1 = x_1$ setzt. Die Komponenten der wirksamen Kraft $\frac{\mu}{g}fm_1\varrho_1$ in den Richtungen von $\mathrm{A}x$ und $\mathrm{A}y$ sind daher resp. $\frac{\mu}{g}fm_1\varrho_1\frac{y_1}{\varrho_1} = \frac{\mu}{g}fm_1y_1$ und

$\frac{\mu}{g} f m_1 \varrho_1 \frac{x_1}{\varrho_1} = \frac{\mu}{g} f m_1 x_1.$

Auf eine ähnliche Weise findet man für die Komponenten der wirksamen Kraft $\frac{\mu}{g} f m_2 \varrho_2$ auf das Element $m_2$ in den Richtungen von $Ax$ und $Ay$ resp. $\frac{\mu}{g} f m_2 y_2$ und $\frac{\mu}{g} f m_2 x_2$, und so fort.

Die Summen X und Y dieser Komponenten in parallelen Richtungen zu $Ax$ und $Ay$ sind demnach (§. 11) resp.

$$\frac{\mu}{g} f m_1 y_1 + \frac{\mu}{g} f m_2 y_2 + \frac{\mu}{g} f m_3 y_3 + \ldots = \mathrm{X} \text{ und}$$

$$\frac{\mu}{g} f m_1 x_1 + \frac{\mu}{g} f m_2 x_2 + \frac{\mu}{g} f m_3 x_3 + \ldots = \mathrm{Y}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mu}{g} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots) = \mathrm{X} \text{ und}$$

$$\frac{\mu}{g} (m_1 x_1 + m_2 x + m_3 x_3 + \ldots) = \mathrm{Y}.$$

Bezeichnet man nun die Abstände $G_2 G$ und $G_1 G$ des Schwerpunktes des Körpers von $Ay$ und $Ax$ resp. mit $G_1$ und $G_2$ und das ganze Volum des Körpers mit M; so ist nach Gleichung (18)

$$\mathrm{M}.\mathrm{G}_2 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots \text{ und}$$
$$\mathrm{M}.\mathrm{G}_1 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots; \text{ mithin}$$

$$\mathrm{X} = \frac{\mu}{g} f \mathrm{M}.\mathrm{G}_2 \text{ und } \mathrm{Y} = \frac{\mu}{g} f \mathrm{M}.\mathrm{G}_1 \ldots . (81)$$

Nach §. 11 ist $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}$, also

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{g} f \mathrm{M} \sqrt{\mathrm{G}_1{}^2 + \mathrm{G}_2{}^2};$$

bezeichnet aber G den Abstand AG des Schwerpunktes von der Axe A, so ist auch $\mathrm{G} = \sqrt{\mathrm{G}_1{}^2 + \mathrm{G}_2{}^2}$, und daher

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{g} f \mathrm{M}.\mathrm{G} \ldots . (82)$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth von $f$ aus Gleichung (78); so kommt

$$R = \frac{MG}{J} \Sigma P p, \ldots (83)$$

und wenn man den Werth von R aus Gleichung (82) in Gleichung (80) setzt,

$$f \frac{\mu}{g} M.G.L = f \frac{\mu}{g} J, \text{ also}$$

$$L = \frac{J}{MG}, \ldots (84)$$

worin L den Abstand des Angriffspunktes der Resultante oder deren perpendikularen Abstand von der Umdrehungsaxe A bezeichnet.

Um die Richtung dieser Resultante zu bestimmen, so sei $\vartheta$ ihr Neigungswinkel gegen die Koordinatenaxe $Ax$; alsdann hat man nach §. 11

$$R \cos \vartheta = X \text{ und } R \sin \vartheta = Y, \text{ also}$$

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{Y}{X}.$$

Nach den Gleichungen (81) ist aber

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{A\,G_1}{G_1\,G} = \operatorname{tang}.AGG_1,$$

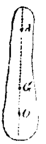
und man hat daher

$$\operatorname{tang} \vartheta = \operatorname{tang}.AGG_1, \text{ oder } \vartheta = AGG_1.$$

Die Neigung der Resultante R gegen $Ax$ ist also gleich dem Winkel $AGG_1$. Da nun aber das Perpendikel auf AG mit $Ax$ denselben Winkel bildet; so folgt, daß die Richtung der Resultante R auf der Linie AG perpendikular steht, welche vom Punkte A der Axe durch den Schwerpunkt G gezogen ist. Außerdem ist die Größe und der Abstand des Angriffspunktes dieser Resultante von A durch die Gleichungen (83) und (84) bestimmt.

## Der Mittelpunkt des Stoßes.

§. 109. Es leuchtet ein, daß wenn in einem Punkte, durch welchen die **Resultante** der wirksamen Kräfte des Körpers geht, der Bewegung ein **Widerstand** entgegen gehalten wird, sich auf diesen Widerstand derselbe Effekt äußert, als wenn sämmtliche wirksamen Kräfte auf diesen Punkt angebracht würden und ihre ganze Kraft auf denselben entwickelten, ohne daß dadurch irgend eine andere Wirkung und mithin irgend ein Rückstoß auf die feste Umdrehungsaxe erzeugt würde. Aus diesem Grunde nennt man den Punkt **O** in der Richtung der Resultante, wo dieselbe die Verbindungslinie **AG** des Schwerpunktes mit der Axe durchschneidet, den Mittelpunkt des Stoßes. Sein Abstand **L** von **A** ist durch die Gleichung



$$L = \frac{K^2}{G} \dots (85)$$

bestimmt, welche sich aus der Gleichung (84) ergibt, wenn man mit **K** den Drehungshalbmesser (§. 80) bezeichnet und demnach $MK^2$ für **J** setzt. Wenn der in Ruhe befindliche Körper im Mittelpunkte des Stoßes perpendikular zu der Linie **AG** einen Impuls erhält; so geht natürlich die Resultante der dadurch hervorgebrachten wirksamen Kräfte durch denselben Punkt, in welchem der Impuls mitgetheilt wird, also durch den Mittelpunkt des Stoßes, und es folgt, daß der ganze Effekt eines solchen Impulses bloß in der Hervorbringung von wirksamen Kräften besteht, ohne daß ein Theil desselben sich auf die Umdrehungsaxe fortpflanzt und daselbst einen Druck erzeugt.

## Der Schwingungspunkt.

§. 110. Man hat im §. 98 gesehen, daß bei einem einfachen Pendel, welches aus einem sehr kleinen, an einem gewichtslosen Faden aufgehängten Massenelemente besteht, die Dauer einer jeden Schwingung von der Länge des Fadens oder von dem Abstande des aufgehängten Elementes von der festen Umdrehungsaxe abhängt. Denkt man sich daher eine Anzahl solcher Massenelemente in verschiedenen Abständen von derselben Axe aufgehängt und, nachdem sie zu einem zusammenhängenden Körper vereinigt sind, in eine geneigte Lage gebracht; so werden dieselben, wenn man sie der gegenseitigen Verbindung entledigt und ihnen erlaubt, frei zu schwingen, ihre Oszillationen in verschiedenen Zeiten vollenden. Denkt man sich dieselben aber wieder zu einem einzigen Körper vereinigt, sodaß sie gezwungen werden, ihre Schwingungen sämmtlich in derselben Zeit zu vollenden, während sie einzeln streben, dieselben in verschiedenen Zeiten zu beendigen; so werden die Bewegungen der Einen in Folge ihrer Verbindung mit den übrigen Elementen offenbar **verzögert**, und die der anderen werden durch diese Verbindung **beschleunigt** werden. Jene ersteren sind die, welche der Axe am nächsten liegen, die letzteren sind solche Elemente, welche weiter von der Axe abstehen, sodaß es **zwischen** diesen beiden einen Punkt des Körpers geben muß, in welchem die Elemente aufhören verzögert und anfangen beschleunigt zu werden, und in welchem dieselben daher in Folge der Verbindung mit den übrigen weder verzögert, noch beschleunigt werden, dergestalt, daß ein in diesem Punkte befindliches Element seine Schwingungen genau in derselben Zeit vollendet, als es Dies thun würde, wenn es mit den übrigen nicht weiter verbunden, sondern an einem gewichtslosen Faden an der Axe frei aufgehängt wäre. Diesen Punkt des Körpers, in dessen Abstande von der Axe ein einzelnes frei aufgehängtes Element seine Schwingungen in derselben Zeit vollenden würde, in welcher der Körper seine Oszillationen ausführt, nennt man den **Schwingungspunkt**.

§. 111. **Der Schwingungspunkt fällt mit dem Mittelpunkte des Stoßes zusammen.**


Denn nach Gleichung (79) ist der Zuwachs $f$ der Winkelgeschwindigkeit eines Körpers, welcher sich um eine horizontale Axe drehet, wenn die auf denselben angebrachten Kräfte die Gewichte seiner Theile sind, in jeder Sekunde durch die Formel $g\frac{\mathrm{M.G}}{\mathrm{J}}\sin\vartheta$ dargestellt, worin $\vartheta$ den Neigungswinkel der Verbindungslinie AG des Schwerpunktes mit der Axe gegen die Vertikale bezeichnet. Nach Gleichung (84) ist aber $\mathrm{L}=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{M.G}}$, worin L den Abstand AO des Mittelpunktes des Stoßes von der Axe bezeichnet, und man hat daher auch

$$f=\frac{g\sin\vartheta}{\mathrm{L}} \ldots . (86) \text{ oder}$$

$$f\mathrm{L}=g\sin\vartheta.$$

Nun ist in §. 98 gezeigt, daß die in der Richtung der Bewegung angebrachte Kraft eines Massenelementes von dem Gewichte $w$, welches an einem gewichtslosen, unter dem Winkel $\vartheta$ gegen die Vertikale geneigten Faden aufgehängt ist, durch $w \sin \vartheta$ dargestellt wird. Bezeichnet ferner $f'$ die Zunahme an Geschwindigkeit dieses Elementes in der Sekunde; so ist $\frac{w}{g} f'$ die wirksame Kraft desselben. Demnach hat man durch das d'Alembertsche Prinzip

$w \sin \vartheta = \frac{w}{g} f'$, $f' = g \sin \vartheta$, also nach der vorstehenden Gleichung

$$f' = f\mathrm{L}.$$

$f\mathrm{L}$ ist aber die Geschwindigkeitszunahme im Mittelpunkte des Stoßes und $f'$ ist die eines einzelnen Elementes, welches in irgend einem Abstande von der Axe frei aufgehängt ist. Wäre daher ein solches Theilchen in einem Abstande gleich dem des Mittelpunktes des Stoßes aufgehängt, so würde dasselbe, da es in demselben Abstande von der Axe dieselben Zunahmen an Geschwindigkeit in der Sekunde erleidet, wie sie der Mittelpunkt des Stoßes in dieser Zeit empfängt, sich gerade so, wie dieser Punkt bewegen, und seine Schwingungen in ganz derselben Zeit vollenden, wie Dies der Körper thut.

§. 112. Der Schwingungspunkt und der Aufhängepunkt eines Körpers stehen in einer Wechselbeziehung.

Es sei O der Schwingungspunkt eines Körpers, wenn derselbe an der Axe A aufgehängt ist, und G sei sein Schwerpunkt; ferner setze man $\mathrm{AO} = \mathrm{L}$, $\mathrm{AG} = \mathrm{G}$, $\mathrm{OG} = \mathrm{G}_1$, den Drehungshalbmesser in Beziehung zu A gleich K und den in Beziehung zu G gleich $k$. Alsdann hat man nach Gleichung (59) $\mathrm{K}^2 = \mathrm{G}^2 + k^2$; hierdurch wird Gleichung (85)

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{G}^2 + k^2}{\mathrm{G}} = \mathrm{G} + \frac{k^2}{\mathrm{G}} \ldots . (87) \text{ d. i.}$$

$$\mathrm{G} + \mathrm{G}_1 = \mathrm{G} + \frac{k^2}{\mathrm{G}}, \text{ also}$$

$$\mathrm{G}_1 = \frac{k^2}{\mathrm{G}} \ldots . (88)$$

Nun denke man sich den Körper in O, statt in A, aufgehängt. Unter diesen Umständen wird er gleichfalls einen Schwingungspunkt haben. Bezeichnet man den Abstand desselben von O mit $L_1$; so ergibt sich durch Gleichung (87)

$$L_1 = G_1 + \frac{k^2}{G_1},$$

d. i. wenn man für $G_1$ den Werth aus Gleichung (88) substituirt,

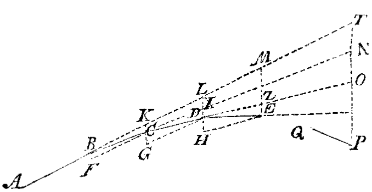
$$L_1 = \frac{k^2}{G} + G = L.$$

Da also der Abstand des Schwingungspunktes in dieser zweiten Lage vom Punkte O gleich L ist; so muß derselbe in A liegen, welches vorher der Aufhängepunkt war. Wird demnach der Schwingungspunkt in den Aufhängepunkt verwandelt; so verwandelt sich der Aufhängepunkt in den Schwingungspunkt, und unter dieser Eigenschaft ist die oben erwähnte Wechselbeziehung der beiden Punkte zu verstehen.

## Bewegung geworfener Körper.

§. 113. **Bestimmung der Bahn eines schweren Körpers, welcher im leeren Raume schief geworfen wird.**

Man nehme an, die ganze Zeit T der Bewegung eines sol-




chen geworfenen Körpers bis zu einem gegebenen Punkte P seiner Bahn sei in ungemein kleine gleiche Theile getheilt, welche durch $\triangle T$ dargestellt werden mögen, und denke sich, die ganze Wirkung der Schwere auf den Körper während eines jeden dieser kleinen Zeiträume sei in einen einzigen Impuls zusammengedrängt, welcher sich am Ende dieses Zeitraumes auf den Körper äußert, sodaß demselben durch diesen Impuls auf Ein Mal die ganze Zunahme an Geschwindigkeit mitgetheilt wird, welche derselbe in der Wirklichkeit durch die Schwere in den verschiedenen Augenblicken des kleinen Zeitraumes $\triangle T$ erhält.

Wenn AB der Raum ist, welchen der geworfene Körper mit seiner Wurfgeschwindigkeit allein im ersten Zeitelemente beschreiben würde; so wird derselbe im Anfange des zweiten Zeitelementes von B aus in der Richtung ABT mit einer Geschwindigkeit weitergeschleudert werden, welche ihn allein in dieser Zeit durch den Raum BK=AB führen würde, während er gleichzeitig durch den Impuls der Schwere eine Geschwindigkeit erhält, welche ihn allein in derselben Zeit durch einen vertikalen Raum BF führen würde. In Folge dieser beiden gleichzeitig wirkenden Impulse wird daher der Körper im zweiten Zeitelemente die Diagonale BC des Parallelogrammes beschreiben, dessen zusammenstoßende Seiten BK und BF sind. Im Anfange des dritten Zeitelementes ist der Körper in C angekommen und wird von da in der Richtung BCX mit einer Geschwindigkeit weitergetrieben, welche ihn allein in dieser Zeit durch den Raum CX=BC bewegen würde, während er zu gleicher Zeit von der Schwere einen Impuls erhält, welcher ihn allein in diesem Zeitelemente durch die vertikale Linie CG=BF führen würde. Diese beiden Impulse zusammen theilen ihm daher eine Geschwindigkeit mit, vermöge welcher er im dritten Zeitelemente den Raum CD zurücklegt, und auf eine ähnliche Weise wird der Körper gezwungen, nach und nach alle übrigen Seiten des Polygons ABCD....P zu durchlaufen.

Nun ziehe man die Vertikale PT, verlängere AB, BC, CD, etc. bis zu ihren Durchschnittspunkten T, N, O, etc. mit dieser Vertikalen und verlängere die Linien GC, HD etc. bis sie die AT in K, L etc. schneiden. Da BC gleich CX und CK parallel zu XL; so ist KL gleich BK oder gleich AB. Da ferner CD gleich DZ und DL parallel zu ZM; so ist LM gleich KL oder gleich AB, und so fort für die übrigen Abschnitte auf AT.

Sind daher $n$ Zeitelemente gleich $\triangle T$ verflossen, bis der Körper von A nach P gelangt, und enthält mithin das Polygon $n$ Seiten AB, BC, CD, etc. und die Linie AT $n$ Abschnitte AB, BK, KL etc.; so ist $\overline{AT} = n\,\overline{AB}$ und $\overline{BT} = (n-1)\,\overline{AB}$; demnach

$$\overline{TN} = (n-1)\overline{KC} = (n-1)\overline{BF}.$$

Ebenso ist $\overline{CN} = (n-2)\overline{CX}$, also

$$\overline{NO} = (n-2)\overline{DX} = (n-2)\overline{BF},$$

und so fort für die übrigen Theile von $\overline{TP}$.

Nun enthält die Linie $\overline{TP}$ $(n-1)$ solcher Theile und man hat

$$\overline{TP} = (n-1)\overline{BF} + (n-2)\overline{BF} + (n-3)\overline{BF} + \ldots + 2\overline{BF} + \overline{BF}$$

$$= [(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1]\,\overline{BF}.$$

Summirt man diese arithmetische Reihe von $(n-1)$ Gliedern; so kommt

$$\overline{TP} = [(n-1)+1]\frac{n-1}{2}.\overline{BF}, \text{ d. i.}$$

$$\overline{TP} = \frac{n(n-1)}{2}.\overline{BF}.$$

Da $g$ die Zunahme an Geschwindigkeit darstellt, welche die Schwere dem geworfenen Körper in der Sekunde mittheilen würde, wenn sie allein auf ihn wirkte; so ist $g\triangle T$ die Geschwindigkeit, welche sie ihm unter dieser Voraussetzung in der Zeit $\triangle T$ mittheilen würde. $g\triangle T$ ist also die Geschwindigkeit, welche dem Körper durch jeden Impuls mitgetheilt wird, den er nach Obigem von der Schwere am Ende eines jeden Zeitelementes $\triangle T$ erhält.

Weil nun BF den Raum bezeichnet, welchen der Körper mit dieser Geschwindigkeit $g\triangle T$ in jedem folgenden Zeitelemente $\triangle T$ gleichförmig durchlaufen würde; so hat man

$$\overline{BF} = (g\triangle T)\triangle T = g(\triangle T)^2, \text{ also}$$

$$\overline{TP} = \tfrac{1}{2}gn(n-1)(\triangle T)^2,$$

oder da $\triangle T = \dfrac{T}{n}$ ist,

$$\overline{TP} = \tfrac{1}{2}gn(n-1)\frac{T^2}{n^2} = \tfrac{1}{2}g\left(1-\frac{1}{n}\right)T^2.$$

Das Vorstehende behält Gültigkeit, wie klein auch die Zeitelemente $\triangle T$ sein mögen, und mithin auch, wenn sie unendlich klein angenommen werden, d. h., wenn man annimmt, daß die Impulse der Schwere in unendlich kleinen Zeiträumen aufeinander folgen, oder daß die Schwere stetig wirke, wie sie es wirklich thut.

Werden aber die Zeitelemente $\triangle T$ unendlich klein; so muß die Zahl $n$ dieser Elemente, aus denen die ganze endliche Zeit $T$ besteht, unendlich groß werden, und man hat alsdann $\frac{1}{n} = o$.

In der Wirklichkeit also, wo der geworfene Körper durch die Schwere stetig abgelenkt wird, ist der vertikale Abstand **TP** zwischen der Tangente an seiner Bahn im Ausgangspunkte **A** und seiner Lage **P** nach einer Zeit von **T** Sekunden durch die Formel

$$\overline{TP} = \tfrac{1}{2} g T^2 \;\ldots\; (89)$$

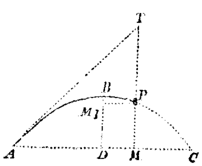
gegeben.

Ferner ist $\overline{AT} = n\overline{AB}$ und **AB** ist der Raum, welchen der Körper mit der Wurfgeschwindigkeit in der Zeit $\triangle T$ gleichförmig durcheilen würde, sodaß $n\overline{AB}$ den Raum darstellt, welchen derselbe in der Zeit $n . \triangle T$ oder **T** mit derselben Geschwindigkeit beschreiben würde. Setzt man daher die Wurfgeschwindigkeit $= V$; so hat man

$$\overline{AT} = V . T \;\ldots\; (90)$$

sodaß die Lage des Körpers am Ende der Zeit **T** dieselbe ist, als wenn er sich während dieser Zeit mit seiner Wurfgeschwindigkeit allein durch den Raum $\overline{AT}$ bewegt hätte und darauf während einer gleichen Zeit in Folge der Einwirkung der Schwere allein durch den Raum $\overline{TP}$ gefallen wäre (vergl. §. 101).

§. 114. Wenn man $AM = x$, $PM = y$ und den Neigungswinkel der anfänglichen Geschwindigkeit **V** gegen den Horizont $TAM = \alpha$ setzt; so ist




$$\frac{x}{\cos\alpha} = AT = V . T, \text{ also } T = \frac{x}{V\cos\alpha},$$

ferner

$$x \operatorname{tang}\alpha - y = \overline{MT} - \overline{MP} = \overline{TP} = \tfrac{1}{2} g T^2 \;\ldots\; (91)$$

Substituirt man hierin den Werth von T aus der ersteren Gleichung; so erhält man

$$x \operatorname{tang} \alpha - y = \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{V^2 \cos^2 \alpha} \text{ oder}$$

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2 V^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Bezeichnet man mit H die vertikale Höhe, von welcher ein Körper frei fallen muß, um die Geschwindigkeit V zu erlangen, oder die jener Geschwindigkeit zukommende Fallhöhe; so ist nach §. 47 $V^2 = 2gH$, also $4H = \frac{2V^2}{g}$, und man erhält aus der vorstehenden Gleichung, wenn man darin diesen Werth von $\frac{2V^2}{g}$ einführt,

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4 H \cos^2 \alpha} \ldots (92)$$

§. 115. **Bestimmung der Zeit, welche ein geworfener Körper gebraucht, um einen Theil seiner Bahn zu durchlaufen.**

Wenn T die Zeit in Sekunden bezeichnet, welche der Körper gebraucht, um in einen Punkt zu gelangen, dessen Koordinaten $x$ und $y$ sind; so hat man nach Gleichung (91)

$$\tfrac{1}{2} g T^2 = x \operatorname{tang} \alpha - y, \text{ also } T^2 = \frac{2}{g}(x \operatorname{tang} \alpha - y),$$

und demnach

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{x \operatorname{tang} \alpha - y} \ldots (93)$$

Setzt man näherungsweise $g = 32$ Fuß, so ist $\frac{2}{g} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ und demnach

$$T = \tfrac{1}{4} \sqrt{x \operatorname{tang} \alpha - y} \text{ näherungsweise.}$$

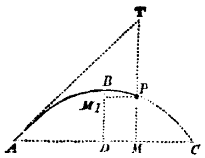
Fällt der Körper mit der Zeit wieder in die horizontale Ebene herab, von welcher er ausgeworfen wurde, und bezeichnet T die ganze Zeit seines Fluges und X die ganze Wurfweite AC am Ende dieser Zeit T; so ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen, da alsdann $y = o$ und $x = \mathrm{X}$ wird,

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\mathrm{X} \operatorname{tang} \alpha}$$

oder näherungsweise $\mathrm{T} = \frac{1}{4}\sqrt{\mathrm{X} \operatorname{tang} \alpha}$.

§. 116. **Bestimmung der horizontalen Wurfweite X aus dem Elevationswinkel $\alpha$ und der anfänglichen Geschwindigkeit V.**

Wenn der Körper seine größte horizontale Wurfweite in der Ebene AC erreicht; so wird seine Höhe $y$ über dieser Ebene $= o$, während die Abszisse des Punktes P seiner Bahn für diesen Fall $= \mathrm{X}$ wird. Substituirt man diesen Werth $o$ und X für $y$ und $x$ in die Gleichung (92); so ergibt sich




$$o = \mathrm{X} \operatorname{tang} \alpha - \frac{\mathrm{X}^2}{4\,\mathrm{H} \cos^2 \alpha},$$

oder wenn man mit X dividirt und mit $4\mathrm{H}\cos^2\alpha$ multiplizirt,

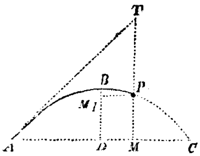
$$\mathrm{X} = 4\mathrm{H} \operatorname{tang} \alpha . \cos^2 \alpha = 4\mathrm{H} \sin \alpha . \cos \alpha, \text{ d. i.}$$

$$\mathrm{X} = 2\mathrm{H} \sin 2\alpha \ldots . (94)$$

Wenn der Körper unter verschiedenen Elevationswinkeln, aber mit derselben anfänglichen Geschwindigkeit geworfen wird; so wird seine horizontale Wurfweite am größten sein, wenn $\sin 2\alpha$ am größten ist, das heißt, wenn $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist,

Da ferner $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha'\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$, das ist $\sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha'\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha'\right)$ ist; so folgt auch, daß bei unveränderter anfänglicher Geschwindigkeit der Körper dieselbe Wurfweite erreichen wird, er mag nun unter einem Elevationswinkel geworfen werden, welcher um irgend einen Winkel $\alpha'$ größer ist, als $\frac{\pi}{4}$, oder unter einem Elevationswinkel, welcher um denselben Winkel $\alpha'$ kleiner ist, als $\frac{\pi}{4}$.

**§. 117. Bestimmung der größten Höhe der Bahn eines Körpers, welcher mit einer gegebenen Geschwindigkeit und unter einem bestimmten Elevationswinkel geworfen wird.**



Multiplzirt man die beiten Seiten der Gleichung (92) mit $4H\cos^2\alpha$; so kommt $4H\cos^2\alpha\,.\,y = 4H\cos^2\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha\,.\,x - x^2 = 2H\,.\,2\cos\alpha\,.\,\sin\alpha\,.\,x - x^2 = 2H\sin 2\alpha\,.\,x - x^2$. Subtrahirt man beide Seiten dieser Gleichung von $H^2\sin^2 2\alpha$; so ergibt sich

$$H^2\sin^2 2\alpha - 4H\cos^2\alpha\,.\,y = H^2\sin^2 2\alpha - 2H\sin 2\alpha\,.\,x + x^2;$$

da aber $\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\,.\,\cos^2\alpha$ ist,

$$4H\cos^2\alpha(H\sin^2\alpha - y) = (H\sin 2\alpha - x)^2 \;\ldots\; (95)$$

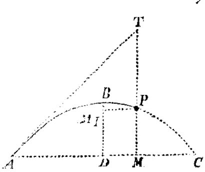
Nun ist die rechte Seite dieser Gleichung immer eine positive Größe, weil sie ein Quadrat ist. Demnach ist auch die linke Seite, und mithin auch $H\sin^2\alpha - y$ stets positiv. Hieraus folgt, daß $y$ nie größer werden kann, als $H\sin^2\alpha$, sodaß diese Ordinate ihren größtmöglichen Werth erreicht, wenn sie gleich $H\sin^2\alpha$ wird. Diesen Werth erreicht sie offenbar dann, wenn die rechte Seite der vorstehenden Gleichung $o$, oder wenn $x = H\sin 2\alpha$, d. i., wenn $x$ gleich der Hälfte der Wurfweite X wird. (s. Gleichung 94). Die größte Höhe BD der Bahn des Körpers ist demnach

$$\overline{BD} = H\sin^2\alpha,$$

und dieselbe wird erreicht, wenn die Abszisse AD gleich der halben Wurfweite AC ist.

**§. 118. Die Bahn eines im leeren Raume geworfenen Körpers ist eine Parabel.**

Wenn B der höchste Punkt der Bahn des geworfenen Körpers und BD die größte Höhe der Bahn ist, und $BM_1 = x_1$, $M_1P = y_1$ gesetzt wird; so hat man



$x_1 = BD - M_1D = BD - PM = H\sin^2\alpha - y$,
$y_1 = DM = AM - AD = x - H\sin 2\alpha$.

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (95); so kommt

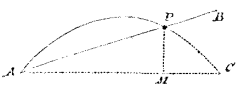
$$y_1{}^2 = 4H\cos^2\alpha\,.\,x_1, \;\ldots\; (96)$$

eine Gleichung, durch welche offenbar eine Parabel dargestellt wird, deren Scheitel in A liegt, deren Axe mit AD zusammenfällt und deren Parameter $4H\cos^2\alpha$ ist.

Die Bahn eines im leeren Raume geworfenen Körpers ist demnach eine Parabel, deren Scheitel im höchsten Punkte der Bahn liegt und deren Axe vertikal steht.

## §. 119. Bestimmung der Wurfweite auf einer geneigten Ebene.

R bezeichne die Wurfweite AP eines geworfenen Körpers




längs einer unter dem Winkel $\iota$ gegen den Horizont geneigten Ebene AB; H und $\alpha$ haben dieselben Bedeutungen, wie früher, und $x, y$ seien die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P in Beziehung zu der horizontalen Axe AC. Nun hat man

$$x = \overline{AM} = \overline{AP}.\cos PAM = R\cos\iota,$$

$$y = \overline{PM} = \overline{AP}.\sin PAM = R\sin\iota.$$

Substituirt man diese Werthe von $x$ und $y$ in die allgemeine Gleichung (92); so kommt

$$R\sin\iota = R\cos\iota.\tang\alpha - \frac{R^2\cos^2\iota}{4H\cos^2\alpha}.$$

Dividirt man mit R und multiplizirt mit $\cos\alpha$; so ergibt sich, wenn man gehörig transponirt,

$$\frac{R\cos^2\iota}{4H\cos\alpha} = \cos\iota.\sin\alpha - \sin\iota.\cos\alpha = \sin(\alpha-\iota),$$

und hieraus folgt

$$R = 4H\frac{\sin(\alpha-\iota).\cos\alpha}{\cos^2\iota} \dots . (97)$$

Es ist aber auch

$$\sin(2\alpha-\iota) - \sin\iota = \sin[\alpha+(\alpha-\iota)] - \sin[\alpha-(\alpha-\iota)]$$
$$= 2\sin(\alpha-\iota).\cos\alpha,$$

und wenn man diesen Werth für $2\sin(\alpha-\iota).\cos\alpha$ in die vorhergehende Gleichung substituirt

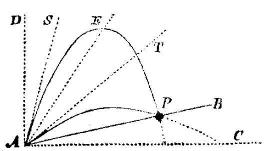
$$R = 2H\left[\frac{\sin(2\alpha-\iota)-\sin\iota}{\cos^2\iota}\right] \dots . (98)$$

Nun leuchtet ein, daß wenn $\iota$ unverändert bleibt und man $\alpha$ variiren läßt, **R** seinen größten Werth erreichen wird, sobald $\sin(2\alpha-\iota)$ am größten, d. h. sobald $\sin(2\alpha-\iota)=1$ oder $2\alpha-\iota = \frac{\pi}{2}$, oder sobald $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\iota}{2}$ wird. Dieses ist also der Elevationswinkel, welcher bei einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit der größten Wurfweite auf einer unter dem Winkel $\iota$ gegen den Horizont geneigten Ebene entspricht.

Wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke für die Wurfweite $\frac{\pi}{2}-(\alpha-\iota)$ statt $\alpha$ setzt; so wird der Werth des ganzen Ausdruckes unverändert bleiben, da $\sin(2\alpha-\iota)$ durch diese Substitution in

$$\sin[\pi-2(\alpha-\iota)-\iota]=\sin[\pi-(2\alpha-\iota)]=\sin(2\alpha-\iota)$$

übergeht. Der Werth von **R** bleibt also derselbe, ob der Elevationswinkel gleich $\alpha$ oder gleich $\frac{\pi}{2}-(\alpha-\iota)$ sei, d. h. der geworfene Körper wird in derselben Entfernung die geneigte Ebene erreichen, ob er unter dem Einen oder dem anderen dieser beiden Elevationswinkel geworfen wird.




Ist **BAC** der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont, **AT** die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit und macht man den Winkel **DAS** gleich **BAT**; so ist Winkel $BAT=TAC-BAC=\alpha-\iota$ und $SAC=DAC-DAS=\frac{\pi}{2}-BAT = \frac{\pi}{2}-(\alpha-\iota)$. Die Wurfweite **AP** bleibt sich also sowol für den Elevationswinkel **TAC**, wie für den Winkel **SAC** oder sowol für die Richtung **AT**, wie für die Richtung **AS** gleich.

Halbirt man durch die Linie **AE** den Winkel **BAD**; so ist Winkel $EAC=BAC+BAE=BAC+\frac{1}{2}BAD=\iota+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\iota\right)= \frac{\pi}{4}+\frac{\iota}{2}$.

Der Winkel **EAC** ist also derjenige, welcher der größten Wurfweite entspricht, und **AE** ist die Richtung, in welcher der

Körper geworfen werden muß, damit er auf der geneigten Ebene **AB** die größte Wurfweite erreicht.

Man sieht, daß die Richtungen **AS** und **AT**, welche gleichen Wurfweiten angehören, gegen die Richtung **AE**, welche der größten Wurfweite zukommt, gleich stark geneigt sind.

§. 120. Geschwindigkeit eines geworfenen Körpers in den verschiedenen Punkten seiner Bahn.

Es ist schon im §. 56 nachgewiesen, daß die von einem Körper, welcher sich unter der Einwirkung der Schwere in irgend einer Kurve bewegt, gewonnene oder verlorene Arbeit gleich der ist, welche der Körper gewonnen oder verloren haben würde, wenn er sich, anstatt in einer Kurve, durch die vertikale Projektion dieser Kurve bewegt hätte.

Demnach wird ein geworfener Körper, welcher sich von **A** bis **P** bewegt (s. die Figur zu §. 119) dieselbe Arbeit gewinnen oder verlieren, welche er gewinnen oder verlieren würde, wenn er sich vertikal von **M** nach **P** oder von **P** nach **M** bewegte, wobei **PM** die Projektion seines Weges auf die Richtung der Schwere ist. Nun ist die gewonnene oder verlorene Arbeit gleich der halben Differenz zwischen den lebenden Kräften im Anfange und am Ende der Bewegung. Setzt man daher die Geschwindigkeit bei **A** gleich **V** und die bei **P** gleich $v$; so ist die zwischen **A** und **P** verlorene Arbeit

$=\frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2-\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2$ (§. 67). Die über den Raum **PM** entwickelte Arbeit ist $W.\overline{PM}=W.y$, wenn man **PM** mit $y$ bezeichnet, und hieraus folgt

$$\frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2-\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2=W.y \text{ oder}$$

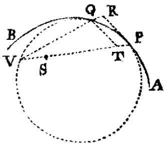
$$V^2-v^2=2gy$$

oder auch, zur Bestimmung der Geschwindigkeit $v$ in irgend einem Punkte der Kurve,

$$v^2=V^2-2gy \ldots . (99)$$

## Zentrifugalkraft.

§. 121. Ein Körper von sehr kleinen Dimensionen bewege




sich in einer krummen Linie **AB**, indem er fortwährend durch eine Kraft, deren Betrag $=$ **F** ist, wenn sich der Körper im Punkte **P** seiner Bahn befindet, gegen einen gegebenen Punkt **S** (den Mittelpunkt der Kraft) getrieben wird. **PQ** sei ein sehr kleines Element der Bahn des Körpers, sodaß man die Kraft **F** während der Beschreibung dieses Bahnelementes als konstant und der Richtung **PS** parallel annehmen kann. Wird nun **PR** tangent an die Kurve bei **P** und **QR** parallel zu **SP** gezogen; so ist **PR** der Raum, welchen der Körper in der Zeit, wo er **PQ** durchläuft, beschrieben haben würde, wenn er nur mit seiner Wurfgeschwindigkeit allein von **P** aus sich fortbewegt hätte und nicht gegen den Punkt **S** angezogen worden wäre; ebenso ist **RQ** oder **PT** (wenn **QT** parallel zu **RP** gezogen wird) der Raum, durch welchen der Körper durch die Anziehung gegen den Punkt **S** allein getrieben sein würde, wenn er von **P** aus nicht geworfen wäre. Bezeichnet man also mit $v$ die Geschwindigkeit, welche der Körper unter der letzteren Voraussetzung in dem Augenblicke erlangt haben würde, wo er den Punkt **T** erreichte; so hat man, wenn $w$ sein Gewicht darstellt, nach §. 66

$$\mathrm{F} \times \overline{\mathrm{PT}} = \tfrac{1}{2} \frac{w}{g} v^2.$$

Die Geschwindigkeit $v$, welche der Körper durch den Fall von **P** bis **T** unter der Wirkung der konstanten, gleichförmig beschleunigenden Kraft **F** erlangt haben würde, ist gleich dem Doppelten der Geschwindigkeit, welche ihn mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit durch denselben Raum **PT** treiben würde. (Denn wenn $f$ die Zunahme an Geschwindigkeit bezeichnet, welche die als konstant angenommene Kraft **F** dem Körper in der Sekunde mittheilen würde, und wenn $t$ die Zeit ist, welche zur Beschreibung des Raumes **PT** erforderlich ist; so ist nach §. 44 $v = ft$; nach §. 46 ist aber auch $\overline{\mathrm{PT}} = \tfrac{1}{2} f t^2 = \left(\frac{ft}{2}\right) t = \frac{v}{2} t$,

sodaß $\frac{v}{2}$ die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher der Raum **PT** in der Zeit $t$ gleichförmig durchlaufen werden könnte.)

Ist daher V die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers im Punkte P seiner Bahn; so hat man

$$\frac{\frac{1}{2}v}{V} = \frac{PT}{PR} \text{ also } v = 2V \cdot \frac{PT}{PR}.$$

Substituirt man diesen Werth von $v$ in die vorhergehende Gleichung; so wird dieselbe

$$F \times \overline{PT} = 2\frac{w}{g} V^2 \left(\frac{PT}{PR}\right)^2 \text{ und man hat}$$

$$F = 2\frac{w}{g} V^2 \frac{QR}{(PR)^2}.$$

Beschreibt man nun einen Kreis PQV, welcher mit der Kurve AB im Punkte P eine gemeinschaftliche Tangente hat und durch den Punkt Q geht, verlängert PS bis zu dem Durchschnittspunkte V mit diesem Kreise und zieht QV; so sind die Dreiecke PQV und QPR ähnlich, weil der Winkel RQP gleich dem Winkel QPV (wegen des Parallelismus von QR und VP) und der Winkel QPR gleich dem Winkel QVP in dem gegenüberliegenden Kreisabschnitte ist. Hieraus folgt $\frac{QR}{PQ} = \frac{PQ}{PV}$, also $QR = \frac{(PQ)^2}{PV}$. Substituirt man diesen Werth für QR in die letzte Gleichung; so kommt

$$F = 2\frac{w}{g} \frac{V^2}{PV} \cdot \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2.$$

Diese Gleichung ist richtig, wie klein man auch PQ annehmen möge. Denkt man sich nun das Kurvenelement PQ unendlich klein; so wird die Voraussetzung, daß die Größe von F während der Beschreibung dieses Elementes konstant und ihre Richtung parallel bleibe, mit dem wirklichen Zustande einer veränderlichen Größe und Richtung jener Kraft zusammenfallen, das Verhältniß $\frac{PQ}{PR}$ wird gleich der Einheit werden, und der Kreis PQV wird der Krümmungskreis und PV eine Sehne des Krümmungskreises werden, welche durch die Punkte P und S geht. Bezeichnet man diese Sehne PV des Krümmungskreises mit C; so erhält man

$$F = 2\frac{w}{g} \frac{V^2}{C} \dots (100)$$

Die hierdurch bestimmte Kraft **F** ist offenbar gleich der, mit welcher sich der Körper bei seiner stetigen Bewegung von dem Mittelpunkte **S** zu entfernen strebt, und könnte deshalb seine Zentrifugalkraft genannt werden. Man beschränkt jedoch im Allgemeinen diese Bezeichnung bei ihrer Anwendung auf den Fall, wo sich der Körper in einem Kreise herumbewegt, lediglich auf diejenige Kraft, mit welcher er sich von dem Mittelpunkte dieses Kreises zu entfernen strebt, oder wenn sie auf den Fall einer Bewegung in irgend einer anderen Kurve angewendet wird, so versteht man darunter die Kraft, mit welcher sich der Körper von dem Mittelpunkte des Krümmungskreises seiner Bahn in dem Punkte, in welchem er sich eben befindet, zu entfernen strebt. Wenn sich der Körper in einer kreisförmigen Bahn herumbewegt, und man denkt sich, derselbe würde fortwährend gegen den Mittelpunkt dieser Bahn angezogen; so fällt der Krümmungskreis an irgend einem Punkte der Bahn mit derselben zusammen, und die Sehne **PV** wird Einer ihrer Durchmesser. Bezeichnet man also den Halbmesser des Kreises, welchen der Körper beschreibt, mit **R**; so ist $\mathbf{C}=2\mathbf{R}$, und die Zentrifugalkraft, d. h. die Kraft, mit welcher sich der Körper vom Mittelpunkte dieses Kreises zu entfernen strebt, wird

$$\mathbf{F}=\frac{w}{g}\,\frac{\mathbf{V}^2}{\mathbf{R}}\ldots\ldots(101)$$

Da ein Körper, welcher sich in irgend einer beliebigen Kurve bewegt, in jedem Punkte seiner Bahn wie ein solcher betrachtet werden kann, der sich momentan in dem Krümmungskreise der Bahn an jenem Punkte herumbewegte; so wird die Kraft **F**, mit welcher er von dem Mittelpunkte des Krümmungskreises zurückzuweichen strebt, durch die vorstehende Formel dargestellt werden, wenn darin **R** für den Krümmungshalbmesser der Bahn in dem Punkte, wo sich der Körper gerade befindet, genommen wird.

Wenn $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um den Mittelpunkt des Krümmungskreises seiner Bahn bezeichnet; so ist $\mathbf{V}=\alpha\mathbf{R}$, und daher auch

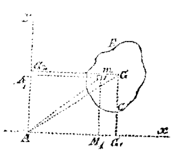
$$\mathbf{F}=\frac{w}{g}\,\alpha^2\,\mathbf{R}\ldots\ldots(102)$$

§. 122. Durch Transposition der Gleichung (100) erhält man

$$V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Fg}{w}\right)C = 2\left(\frac{Fg}{w}\right)(\tfrac{1}{4}C).$$

Nach §. 94 stellt $\frac{Fg}{w}$ die Geschwindigkeitszunahme $f$ dar, welche dem Körper von der Kraft **F** in der Sekunde mitgetheilt werden würde, wenn derselbe frei gegen den Punkt **S** einfiele und die Kraft **F** fortwährend konstant bliebe. Ferner geht aus §. 47 hervor, daß **V** die ganze Geschwindigkeit sein würde, welche der Körper unter der vorstehenden Voraussetzung erlangt haben würde, wenn er durch einen Raum gleich $\frac{1}{4}$**C** oder gleich dem vierten Theile der Sehne des Krümmungskreises gefallen wäre. Demnach ist die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher sich in einer beliebigen Kurve bewegt und gegen den Mittelpunkt einer Kraft angezogen wird, in irgend einem Punkte seiner Bahn gleich der, welche er erlangen würde, wenn er von diesem Punkte aus gegen den Mittelpunkt der Kraft durch den vierten Theil derjenigen Sehne des Krümmungskreises fiele, welche durch den Mittelpunkt der Kraft geht, wobei die in jenem Punkte der Kurve auf ihn wirkende Kraft während des Falles konstant bliebe. In diesem Sinne sagt man von der Geschwindigkeit eines Körpers, welcher sich in einer beliebigen Kurve um den Mittelpunkt einer Kraft bewegt, sie sei die dem vierten Theile der Sehne des Krümmungskreises zukommende Geschwindigkeit.

§. 123. Zentrifugalkraft eines Körpers von endlichen Demensionen.



**BC** stelle eine sehr dünne Schicht eines solchen Körpers zwischen zwei Ebenen dar, welche sehr nahe aneinander liegen und auf einer gegebenen Axe **A**, um welche sich der Körper drehet, perpendikular stehen.

Zieht man durch **A** zwei rechtwinklige Koordinatenaxen **A**$x$ und **A**$y$, bezeichnet mit $m_1$ das Volum eines Elementes der Schicht **BC**, dessen Gewicht $w_1$ ist, und mit $x_1, y_1$ die Koordinaten $AM_1$, $AN_1$ des Elementes $m_1$; so hat man nach Gleichung (102), wenn $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers darstellt, für die Zentrifugalkraft des Elementes $m_1$ den Werth $\frac{\alpha^2}{g} w_1 \overline{\mathrm{A}m_1}$. Zerlegt man diese Kraft, deren Richtung $\mathrm{A}m_1$ ist, in zwei andere, deren Richtungen parallel zu $\mathrm{A}x$ und $\mathrm{A}y$ sind; so wird die erstere durch $\frac{\alpha^2}{g} w_1 \overline{\mathrm{A}m_1}.\cos \mathrm{M}_1 \mathrm{A}m_1$ oder durch $\frac{\alpha^2}{g} w_1 x_1$ und die letztere durch $\frac{\alpha^2}{g} w_1 \overline{\mathrm{A}m_1}.\cos \mathrm{N}_1 \mathrm{A}m_1$ oder durch $\frac{\alpha^2}{g} w_1 y_1$ dargestellt sein. Auf eine ähnliche Weise kann man die Zentrifugalkräfte aller Elemente der Schicht BC zerlegen, und erhält dadurch zwei Reihen von Komponenten, von denen die parallel zu $\mathrm{A}x$ wirkenden durch $\frac{\alpha^2}{g} w_1 x_1$, $\frac{\alpha^2}{g} w_2 x_2$, $\frac{\alpha^2}{g} w_3 x_3, \ldots$ und die parallel zu $\mathrm{A}y$ wirkenden durch $\frac{\alpha^2}{g} w_1 y_1$, $\frac{\alpha^2}{g} w_2 y_2$, $\frac{\alpha^2}{g} w_3 y_3, \ldots$ ausgedrückt sind.

Bezeichnet man die Komponenten der Resultante aller dieser Kräfte in parallelen Richtungen zu $\mathrm{A}x$ und $\mathrm{A}y$ resp. mit X und Y; so hat man nach §. 11

$$\mathrm{X} = \frac{\alpha^2}{g} w_1 x_1 + \frac{\alpha^2}{g} w_2 x_2 + \frac{\alpha^2}{g} w_3 x_3 + \ldots = \frac{\alpha^2}{g} \Sigma wx = \frac{\alpha^2}{g} \mathrm{W}\mathrm{G}_1,$$

$$\mathrm{Y} = \frac{\alpha^2}{g} w_1 y_1 + \frac{\alpha^2}{g} w_2 y_2 + \frac{\alpha^2}{g} w_3 y_3 + \ldots = \frac{\alpha^2}{g} \Sigma wy = \frac{\alpha^2}{g} \mathrm{W}\mathrm{G}_2,$$

worin $\mathrm{G}_1$ und $\mathrm{G}_2$ die Koordinaten $\mathrm{AG}_1$ und $\mathrm{AG}_2$ des Schwerpunktes der Schicht BC und W ihr Gewicht bezeichnet (§. 18).

Die gesammte Zentrifugalkraft F dieser Schicht ist die Resultante dieser beiden Reihen von Kräften, und wird daher durch $\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}$ (§. 11) dargestellt, sodaß

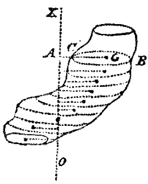
$$\mathrm{F} = \sqrt{\frac{\alpha^4}{g^2} \mathrm{W}^2 \mathrm{G}_1{}^2 + \frac{\alpha^4}{g^2} \mathrm{W}^2 \mathrm{G}_2{}^2} = \frac{\alpha^2}{g} \mathrm{W} \sqrt{\mathrm{G}_1{}^2 + \mathrm{G}_2{}^2}, \text{ d. i.}$$

$$\mathrm{F} = \frac{\alpha^2}{g} \mathrm{W}.\mathrm{G} \ldots . (103)$$

ist, worin G den Abstand AG des Schwerpunktes der Schicht von der Umdrehungsaxe bezeichnet.

Außerdem geht die Richtung dieser resultirenden Zentrifugalkraft durch **A**, weil die Richtungen aller ihrer Komponenten durch diesen Punkt gehen.

§. 124. Aus der vorstehenden Formel folgt, daß wenn ein Körper, der sich um eine feste Axe drehet, durch Perpendikularebenen auf der Axe in sehr dünne Schichten zerlegt wird, die Zentrifugalkraft einer jeden Schicht gleich der ist, welche stattfinden würde, wenn das ganze Gewicht derselben in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre, sodaß, wenn die Schwerpunkte aller dieser Schichten in Ein und dieselbe durch die Axe gehende Ebene fallen, die Zentrifugalkräfte aller Schichten in ebenderselben Ebene liegen und daselbst parallele Kräfte bilden werden, welche sämmtlich auf der Axe perpendikular stehen. Die Resultante aller dieser parallelen Kräfte ist daher in diesem Falle gleich ihrer Summe, wobei diejenigen Kräfte negativ zu nehmen sind, deren zugehörige Schichten ihre Schwerpunkte auf der entgegengesetzten Seite der Axe haben und welche mithin Zentrifugalkräfte darstellen, die nach der entgegengesetzten Richtung der übrigen wirken. Stellt demnach **F'** die ganze Zentrifugalkraft eines solchen Körpers dar; so hat man $\mathrm{F}' = \frac{\alpha^2}{g} \Sigma \mathrm{W\,G}$. Wenn man aber mit **W'** das Gewicht des ganzen Körpers und mit **G'** den Abstand seines Schwerpunktes von der Axe bezeichnet; so ist $\Sigma \mathrm{WG} = \mathrm{W'G'}$, und mithin




$$\mathrm{F}' = \frac{\alpha^2}{g} \mathrm{W'G'} \ldots . (104)$$

In dem Falle also, wo ein sich drehender Körper durch Perpendikularebenen zur Umdrehungsaxe in sehr dünne Schichten zerlegt werden kann, deren Schwerpunkte sämmtlich in Eine durch die Axe gehende Ebene fallen, ist die Zentrkfugalkraft gleich der, welche stattfinden würde, wenn das ganze Gewicht des Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre, sodaß diese Eigenschaft dem ganzen Körper ebenso gut zukommt, wie sie einer jeden seiner elementaren Schichten angehört.

Da ferner die Zentrifugalkräfte der einzelnen Schichten parallele Kräfte sind, sobald die Schwerpunkte dieser Schichten in Eine durch die Umdrehungsaxe gehende Ebene fallen, und da ihre Richtungen sämmtlich in dieser Ebene liegen; so folgt (§. 16), daß wenn man von irgend einem Punkte O der Axe die Momente jener parallelen Kräfte mißt, mit $x$ den perpendikularen Abstand OA irgend einer Schicht BC vom Punkte O und mit H den Abstand der allgemeinen Resultante von demselben Punkte bezeichnet,

$$H\frac{\alpha^2}{g}\Sigma WG=\frac{\alpha^2}{g}\Sigma WGx, \text{ und mithin}$$

$$H=\frac{\Sigma WGx}{\Sigma WG}\ldots\ldots(105)$$

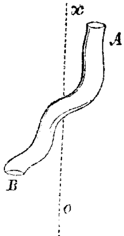
ist.

Die Gleichungen (104) und (105) bestimmen die Größe und den Angriffspunkt der Resultante aller Zentrifugalkräfte des Körpers unter der Voraussetzung, daß derselbe in elementare Schichten zerlegt werden könne, welche auf der Umdrehungsaxe perpendikular stehen und ihre Schwerpunkte sämmtlich in Einer durch die Axe gehenden Ebene haben.

Es leuchtet ein, daß diese Bedingung erfüllt wird, wenn der Körper in Beziehung zu einer gewissen Axe symmetrisch ist, welche mit der Umdrehungsaxe in derselben Ebene liegt, wobei es dann gleichgültig ist, ob jene erstere Axe die letztere schneidet, oder mit derselben parallel läuft.

Wenn unter der obigen Voraussetzung $\Sigma WG=o$ ist, d. h. wenn der Schwerpunkt des Körpers in der Umdrehungsaxe liegt; so verschwindet die Zentrifugalkraft. Dieser Fall tritt offenbar ein, sobald sich ein Körper um eine Axe drehet, für welche er symmetrisch ist; man sieht, daß alsdann die Umdrehungsaxe durch die Zentrifugalkraft keinen Druck zu erleiden hat.

§. 125. Wenn die Schwerpunkte der elementaren Schichten, in welche der Körper durch Perpendikularebenen zu der Umdrehungsaxe zerlegt wird, nicht in Ein und dieselbe durch diese Axe gehende Ebene fallen; so liegen auch die Zentrifugalkräfte der einzelnen Schichten nicht in Einer Ebene, sondern divergiren in verschiedene Richtungen um jene Axe. In einem solchen Falle kann die Größe und Richtung ihrer Resultante durch die vorstehenden Gleichungen nicht gefunden werden.

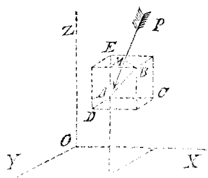


## Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 126. Wenn irgend ein Druck P, dessen Angriffspunkt A gezwungen wird, sich durch die gerade Linie AB zu bewegen, in drei andere X, Y, Z parallel zu drei rechtwinkligen Axen, $Ox$, $Oy$, $Oz$ zerlegt wird, und wenn AC, AD, AE und AM die Projektionen von AB resp. auf diese Axen und auf AP sind; so wird die Arbeit von P bei der Beschreibung des Raumes AB gleich der Summe der Arbeiten von X, Y, Z resp. durch die Räume AC, AD, AE, oder es wird

$$X.\overline{AC}+Y.\overline{AD}+Z.\overline{AE}=P.\overline{AM}$$

sein.




Die Neigungswinkel der Richtung von P gegen die Axen $Ox$, $Oy$, $Oz$ seien resp. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, und die Neigungswinkel von AB gegen dieselben Axen seien $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; alsdann hat man (§. 12)

$X=P\cos\alpha$, $Y=P\cos\beta$, $Z=P\cos\gamma$ und

$$AC=\overline{AB}.\cos\alpha_1,\ AD=\overline{AB}\cos\beta_1,\ AE=\overline{AB}\cos\gamma_1.$$

Hieraus folgt

$$X.\overline{AC}=P.\overline{AB}.\cos\alpha.\cos\alpha_1,\ Y.\overline{AD}=P.\overline{AB}.\cos\beta.\cos\beta_1,$$

$$Z.\overline{AE}=P.\overline{AB}.\cos\gamma.\cos\gamma_1 \text{ und demnach}$$

$$X.\overline{AC}.+Y.\overline{AD}+Z.\overline{AE}=P.\overline{AB}\,(\cos\alpha.\cos\alpha_1+\cos\beta.\cos\beta_1+\cos\gamma.\cos\gamma_1).$$

Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist aber

$$\cos\alpha.\cos\alpha_1+\cos\beta.\cos\beta_1+\cos\gamma.\cos\gamma_1=\cos PAB,$$

und daher

$$X.\overline{AC}+Y.\overline{AD}+Z.\overline{AE}=P.\overline{AB}\cos PAB.$$

Weil nun endlich $\overline{AB}\cos PAB=AM$ ist; so folgt

$$X.\overline{AC}+Y.\overline{AD}+Z.\overline{AE}=P.\overline{AM}.$$

Die Arbeit der Kraft P durch AM ist aber gleich der durch AB (§. 52) und mithin der obige Satz erwiesen.

**§. 127. Wenn mehrere auf irgend ein System angebrachte Kräfte untereinander im Gleichgewichte sind, und man nöthigt ihre verschiedenen Angriffspunkte, ungemein kleine Räume zu beschreiben, so jedoch, daß sich die Bewegung der einzelnen Punkte mit der mechanischen Verbindung des Systemes verträgt; so wird die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, deren Angriffspunkte sich in direkten Richtungen der darauf angebrachten Kräfte bewegen, gleich der gesammten Arbeit der übrigen Kräfte sein, deren Angriffspunkte sich in entgegengesetzten Richtungen der darauf angebrachten Kräfte bewegen.**

Denn zerlegt man alle an dem Systeme angebrachten Kräfte in drei Reihen von Kräften, welche drei rechtwinkligen Axen parallel sind, und bezeichnet diese Reihen resp. mit **A**, **B** und **C**; so muß die Resultante der parallelen Kräfte einer jeden Reihe null sein. Denn wenn irgend Eine dieser Resultanten einen endlichen Werth hätte; so würden auch die gesammten drei Reihen eine Resultante haben, was nicht möglich ist, da dieselben im Gleichgewichte sein sollen (vergl. §. 5 des Anhanges zum ersten Abschnitte).

Nun nehme man an, die Bewegung der Angriffspunkte der Kräfte sei so gering, daß sich die Größen und Richtungen der Kräfte während der Bewegung nur um ungemein kleine Beträge ändern und daß mithin die Komponenten an irgend einem Angriffspunkte sehr nahe dieselben Werthe behalten. Unter dieser Voraussetzung bezeichne man mit $u_1$, $u_2$, $u_3$ die Arbeiten der Komponenten an einem beliebigen Punkte, ferner mit $\Sigma u_1$ die Snmme der Arbeiten aller Komponenten der Reihe **A**, mit $\Sigma u_2$ die Summe der Arbeiten aller Komponenten der Reihe **B** und mit $\Sigma u_3$ die Summe der Arbeiten aller Komponenten der Reihe **C**.

Da die parallelen Kräfte der Reihe **A** keine Resultante haben; so ist nach §.59 die Summe der Arbeiten von denjenigen Kräften dieser Reihe, deren Angriffspunkte sich in den direkten Richtungen ihrer Kräfte bewegt haben, gleich der Summe der Arbeiten der übrigen Kräfte dieser Reihe, deren Angriffspunkte sich in entgegengesetzten Richtungen ihrer Kräfte bewegt haben, sodaß $\Sigma u_1 = o$ wird, wenn man die Werthe von $u_1$, welche diese Summe bilden, in Uebereinstimmung mit der letzteren Bedingung, resp. positiv oder negativ nimmt.

Ebenso hat man $\Sigma u_2 = o$ und $\Sigma u_3 = o$, und daher auch

$$\Sigma (u_1 + u_2 + u_3) = o.$$

Stellt aber U die Arbeit der Kraft P dar, deren Komponenten in parallelen Richtungen zu den drei Axen die Arbeiten $u_1$, $u_2$, $u_3$ geliefert haben; so ist nach dem vorstehenden Paragraphe

$$u_1 + u_2 + u_3 = \mathrm{U},$$

und demnach

$$\Sigma \mathrm{U} = o, \ldots . (106)$$

in welchem Ausdrucke U nach denselben Bedingungen, welche für $u_1$, $u_2$, $u_3$ galten, positiv oder negativ zu nehmen ist, d. h. jenachdem die Arbeit an einem jeden Punkte in der Richtung der darauf angebrachten Kraft selbst oder in entgegengesetzter Richtung verrichtet ist. Hieraus folgt, daß die Summe der Arbeiten nach der Einen dieser beiden Richtungen gleich der Summe der Arbeiten nach der entgegengesetzten Richtung ist.

Die Projektion der Linie, welche der Angriffspunkt irgend einer Kraft beschreibt, auf die Richtung dieser Kraft, heißt die virtuelle Geschwindigkeit der Letzteren, und das Produkt dieser virtuellen Geschwindigkeit in die Kraft selbst, nennt man ihr virtuelles Moment, sodaß das virtuelle Moment einer Kraft mit ihrer Arbeit übereinstimmt. Bezeichnet man daher irgend eine Kraft des Systemes mit P und ihre virtuelle Geschwindigkeit mit $p$; so hat man $\mathrm{P}p = \mathrm{U}$ und nach der vorstehenden Gleichung

$$\Sigma \mathrm{P} p = o.$$

In diesem Satze, welcher als Bedingungsgleichung für den Zustand des Gleichgewichtes mehrerer auf ein System angebrachter Kräfte sehr häufig benutzt wird, besteht das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten *).

*) Dieser Beweis des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten ist hier zum ersten Male von dem Verfasser mitgetheilt.

**§. 128. Wenn die Kräfte eines gegebenen Systemes von der Art sind, daß sie sich bei der Bewegung ihrer Angriffspunkte durch mehrere unmittelbar auf einander folgende Lagen fortwährend im Gleichgewichte erhalten; so ist in Beziehung zu irgend einer endlichen Bewegung der Angriffspunkte durch diese Reihe von Lagen die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, welche in denselben Richtungen wirken, in welchen ihre Angriffspunkte bewegt werden, gleich der gesammten Arbeit der übrigen Kräfte, welche in entgegengesetzten Richtungen wirken.**

Dieses Prinzip ist in dem vorhergehenden Satze nur unter der Voraussetzung bewiesen worden, daß die Bewegungen der einzelnen Angriffspunkte ungemein klein seien, sodaß die von einer jeden Kraft verrichtete Arbeit nur über einen äußerst kleinen Raum entwickelt ist. Dasselbe läßt sich jedoch auch auf den Fall ausdehnen, wo die Bewegung eines jeden Angriffspunktes und die von jeder Kraft verrichtete Arbeit über einen noch so großen Raum erfolgt ist, wofern nur die Kräfte des Systemes in allen den verschiedenen Lagen, welche ihre Angriffspunkte allmählig annehmen, miteinander im Gleichgewichte sind; denn es leuchtet ein, daß wenn es eine Reihe solcher unmittelbar aufeinander folgender Lagen gibt, das Prinzip für eine jede kleine Bewegung aus der Einen in die andere dieser Lagen, und demnach auch für die Summe aller solcher Bewegungen des Systemes aus irgend Einer dieser Lagen in irgend eine andere, daß heißt für die ganze Bewegung des Systemes durch alle Zwischenlagen Gültigkeit hat.

## Das Prinzip der lebendigen Kräfte.

**§. 129. Wenn die Kräfte irgend eines Systemes miteinander nicht im Gleichgewichte sind; so ist die Differenz zwischen der gewonnenen Arbeit derjenigen Kräfte, deren Angriffspunkte sich in den direkten Richtungen ihrer Wirkungen bewegen, und der verlorenen Arbeit der übrigen Kräfte, deren Argriffspunkte sich**

in den entgegengesetzten Richtungen bewegen, gleich der Hälfte der gewonnenen lebenden Kraft des ganzen Systemes.

Denkt man sich in einer jeden der unmittelbar aufeinander folgenden Lagen, welche das System von Körpern nach und nach annimmt, auf einen jeden Körper eine Kraft angebracht, welche der wirksamen Kraft desselben (§. 103) gleich und gerade entgegengesetzt ist; so wird das System in allen Lagen im Gleichgewichte sein, wenn es gezwungen wird dieselben sukzessive einzunehmen.

Sowie nun die Körper, welche das System bilden, und die verschiedenen Angriffspunkte der darauf angebrachten Kräfte durch beliebige endliche Räume aus der Einen Lage in die andere übergehen, so sei $\Sigma u_1$ die gesammte Arbeit derjenigen auf das System angebrachten Kräfte, deren Richtungen mit denen der Bewegungen ihrer Angriffspunkte übereinstimmen, und $\Sigma u_2$ die gesammte Arbeit der übrigen auf das System angebrachten Kräfte, welche in entgegengesetzten Richtungen wirken; ferner bezeichne $\Sigma u_3$ die gesammte Arbeit der auf das System angebrachten Kräfte, welche den wirksamen Kräften gleich und entgegengesetzt sind. Es leuchtet ein, daß die Richtungen dieser letzteren, den wirksamen Kräften entgegengesetzten Kräfte auch den Richtungen der Bewegung ihrer verschiedenen Angriffspunkte direkt entgegengesetzt sind, sodaß im Ganzen $\Sigma u_1$ die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, deren Richtungen mit den Bewegungen ihrer Angriffspunkte übereinstimmen, und $\Sigma u_2 + \Sigma u_3$ die gesammte Arbeit der übrigen Kräfte bezeichnet, welche nach entgegengesetzten Richtungen der Bewegungen ihrer Angriffspunkte wirken. Da nun nach dem d'Alembertschen Prinzipe zwischen den vorstehend genannten Kräften in jeder unmittelbar aufeinander folgenden Lage des Systemes Gleichgewicht bestehen muß; so folgt nach dem vorhergehenden Paragraphe, daß man auch für eine Bewegung durch beliebig viele solcher Lagen

$$\Sigma u_1 = \Sigma u_2 + \Sigma u_3 \text{ oder}$$
$$\Sigma u_1 - \Sigma u_2 = \Sigma u_3 \ldots . (107)$$

hat.

Hierin bezeichnet $u_3$ die Arbeit einer Kraft, welche der wirksamen Kraft eines jeden Körpers des Systemes gleich und entgegengesetzt ist; die Arbeit einer solchen Kraft durch irgend einen Raum ist aber gleich der Arbeit, welche die wirksame Kraft, wenn ihr kein Widerstand entgegensteht, in dem Körper beim Durchlaufen dieses Raumes anhäuft (§. 68), oder sie ist gleich der Hälfte der Differenz zwischen der lebenden Kraft des Körpers im Anfange und am Ende der Zeit, während welcher dieser Raum beschrieben ist (§. 67). Demnach ist $\Sigma u_3$ gleich der Hälfte der Summe aller Differenzen zwischen den lebenden Kräften der einzelnen Körper des Systemes in den beiden betrachteten Zeitpunkten, und man hat

$$\Sigma u_1 - \Sigma u_2 = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{w}{g}(v_2{}^2 - v_1{}^2) \dots . (108)$$

Hieraus folgt, daß die Differenz zwischen der gesammten Arbeit $\Sigma u_1$ derjenigen Kräfte, welche in der Richtung der Bewegung ihrer Angriffspunkte wirken, und der gesammten Arbeit $\Sigma u_2$ der übrigen Kräfte, welche in entgegengesetzter Richtung der Bewegung ihrer Angriffspunkte wirken (oder mit anderen Worten, die Differenz zwischen der Gesammtarbeit der beschleunigenden Kräfte und der verzögernden Kräfte des Systemes) gleich der Hälfte der bei der Entwickelung dieser Arbeiten gewonnenen oder verlorenen lebenden Kraft des Systemes ist. In diesem Satze besteht das Prinzip der lebendigen Kräfte*).

§. 130. Die Hälfte der lebenden Kraft des Systemes mißt die in demselben angehäufte Arbeit; das Prinzip der lebendigen Kräfte lehrt daher, daß die ganze Differenz zwischen der Arbeit derjenigen Kräfte, welche die Bewegungen der Theile des Systemes zu beschleunigen streben, und derjenigen, welche dieselben zu verzögern streben, in den sich bewegenden Theilen des Systemes vollständig angehäuft wird, sodaß keine Arbeit verloren geht

*) Einige Schriftsteller nennen nicht den Ausdruck $\frac{w}{g}v^2$, sondern $\frac{1}{2}\frac{w}{g}v^2$ die lebende Kraft des Elementes, dessen Gewicht $w$ ist, und demnach auch nicht $\Sigma\frac{w}{g}(v_2{}^2 - v_1{}^2)$, sondern $\frac{1}{2}\Sigma\frac{w}{g}(v_2{}^2 - v_1{}^2)$ die gewonnene lebende Kraft des ganzen Systemes. Hiernach bestände vermöge des Prinzipes der lebendigen Kräfte Gleichheit zwischen der mitgetheilten Arbeit und der gewonnenen lebenden Kraft des Systemes.

und die ganze Arbeit, welche von den beschleunigenden Kräften über die verzögernden ausgeübt wird, in dem Systeme als angehäufte Arbeit verbleibt.

Dieses Prinzip ist allgemein für irgend ein mechanisches System bewiesen worden und gilt daher für die komplizirteste Maschine. Der ganze Betrag der Arbeit, welche die bewegende Kraft entwickelt, wird zum Theil an den Punkten der Maschine vernichtet, wo der Bewegung derselben der Nutzwiderstand entgegentritt, zum Theil wird dieselbe zur Überwindung der Reibung und anderer schädlichen Widerstände verbraucht, und der ganze Rest wird in den sich bewegenden Theilen der Maschine angehäuft, sodaß derselbe fortwährend disponibel ist, um bei irgend einer Schwächung der bewegenden Kraft mit verwendet zu werden oder um die Maschine noch eine Zeit lang fortzuführen, nachdem ihr die Wirkung der bewegenden Kraft gänzlich entzogen ist.

§. 131. Wenn die Kräfte irgend eines Systemes (welche in allen Lagen, die das System nach und nach annimmt, nicht im Gleichgewichte sind) durch eine Gleichgewichtslage gehen; so wird die lebende Kraft des Systemes in demselben Augenblicke ein Maximum oder ein Minimum sein.

Denn bezeichnet man, wie in §. 129, die gesammte Arbeit, welche in den Richtungen der Bewegungen der einzelnen Theile des Systemes verrichtet wird, mit $\Sigma u_1$ und die gesammte Arbeit, welche in entgegengesetzten Richtungen der Bewegungen dieser Theile verrichtet wird, mit $\Sigma u_2$; so ist die Hälfte der gewonnenen lebenden Kraft des Systemes $=\Sigma u_1 - \Sigma u_2$ (§. 129). Sowie das System aus irgend einer Lage in eine andere übergeht, vermehrt sich offenbar eine jede der beiden Größen $\Sigma u_1$ und $\Sigma u_2$. Wächst nun $\Sigma u_1$ um einen größeren Betrag, als $\Sigma u_2$; so nimmt auch die lebende Kraft des Systemes bei dieser Ortsveränderung der einzelnen Theile zu: wächst dagegen $\Sigma u_1$ um einen geringeren Betrag, als $\Sigma u_2$; so nimmt die lebende Kraft des Systemes bei dieser Bewegung ab. Bezeichnet man also mit $\triangle \Sigma u_1$ und $\triangle \Sigma u_2$ die Inkremente von $\Sigma u_1$ und $\Sigma u_2$ während der gedachten Veränderung der Lage des Systemes; so stellt

$(\Sigma u_1 + \triangle\Sigma u_1) - (\Sigma u_2 + \triangle\Sigma u_2)$ oder $(\Sigma u_1 - \Sigma u_2) + (\triangle\Sigma u_1 - \triangle\Sigma u_2)$ die Hälfte der lebenden Kraft des Systemes nach dieser Veränderung der Lage dar, und es leuchtet ein, daß die vorher stattgefundene lebende Kraft des Systemes hierdurch vermehrt oder vermindert sein wird, jenachdem $\triangle\Sigma u_1$ größer oder kleiner ist, als $\Sigma u_2$; daß sich aber der Betrag der lebenden Kraft gar nicht geändert haben wird, wenn $\Sigma u_1$ gleich $\Sigma u_2$ ist.

Nun geht aus dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 127) hervor, daß der letztere Fall gerade dann eintritt, wenn das System durch eine Gleichgewichtslage geht, indem alsdann die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, welche die Bewegungen ihrer Angriffspunkte zu beschleunigen streben, genau gleich der gesammten Arbeit der übrigen Kräfte ist, welche die Bewegungen ihrer Angriffspunkte zu verzögern streben. Für eine ungemein kleine Veränderung der Lage, welche durch eine Gleichgewichtslage geht, hat man also $\triangle\Sigma u_1 = \triangle\Sigma u_2$, eine Gleichheit, welche übrigens in keinem anderen Falle stattfinden kann, wo der Körper nicht durch eine solche Lage des Gleichgewichtes geht.

Da mithin die Summe $\Sigma u_1 - \Sigma u_2$ und demzufolge die gesammte lebende Kraft des Systemes fortwährend zu- oder abnimmt, bis das System eine Gleichgewichtslage erreicht, und dann (wenigstens für irgend einen endlichen Zeitraum) aufhört zu- oder abzunehmen; so folgt, daß die lebende Kraft in jener Lage ein Maximum oder ein Minimum ist.

§. 132. Wenn die Kräfte irgend eines Systemes durch eine Gleichgewichtslage gehen; so wird die lebende Kraft entweder ein Maximum oder ein Minimum sein, jenachdem das Gleichgewicht in dieser Lage stabil oder nicht stabil ist.

Denn man begreift, daß wenn die lebende Kraft in irgend einer Gleichgewichtslage des Systemes ein Maximum wäre, sodaß die lebende Kraft beim Übergange des Systemes aus dieser Gleichgewichtslage in irgend eine andere um endliche Räume davon abstehende Lage kleiner würde, als sie vorher war, die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, welche die Bewegung zwischen diesen beiden Lagen zu beschleunigen strebten, kleiner gewesen sein muß, als die der übrigen Kräfte, welche die Bewegung zu verzögern strebten (§. 131). Nun nehme man an, der Körper sei in jener Gleichgewichtslage zur Ruhe gebracht, und es sei ihm alsdann ein sehr kleiner Impuls zur Bewegung gegeben, wodurch unmittelbar ein Gesammtbetrag von lebender Kraft $=\Sigma m V^2$ erzeugt wäre. Bei dem Übergange aus dieser Gleichgewichtslage in die andere vorhin erwähnte Lage nehme nun die lebende Kraft des Körpers den Werth $\Sigma m v^2$ an, und die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, welche bei diesem Übergange die Bewegung zu beschleunigen strebten, sei $=\Sigma U_1$, und die der übrigen Kräfte, welche die Bewegung zu verzögern strebten, sei $=\Sigma U_2$; alsdann wird aus den obigen Gründen $\Sigma U_2$ größer sein, als $\Sigma U_1$. Außerdem hat man nach dem Prinzipe der lebendigen Kräfte

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 = \Sigma U_1 - \Sigma U_2 \text{ also}$$
$$\Sigma m v^2 = \Sigma m V^2 - 2(\Sigma U_2 - \Sigma U_1),$$

in welcher Gleichung das Glied $2(\Sigma U_2 - \Sigma U_1)$ mit Rücksicht auf die besondere Reihenfolge von Lagen, durch welche sich der Körper in der Nachbarschaft der Gleichgewichtslage bewegen soll, durchaus positiv ist.

Für eine jede dieser Lagen muß es daher einen gewissen Werth von $\Sigma m V^2$, das heißt einen gewissen ursprünglichen Impuls zur Fortbewegung des Systemes aus seiner Gleichgewichtslage geben, welcher bewirkt, daß die rechte Seite der vorstehenden Gleichung und demnach auch ihre linke Seite $\Sigma m v^2$ verschwindet. Nun ist ein jedes Glied der Summe $\Sigma m v^2$ wesentlich positiv; diese Summe kann also nur verschwinden, wenn ein jedes ihrer Glieder verschwindet, das heißt, wenn die Geschwindigkeit eines jeden Körpers des Systemes null wird, oder das ganze System zur Ruhe kommt. Diese Ruhe kann indessen nur momentan sein; denn nach der Voraussetzung ist die Lage, in welche es gebracht wird, keine Lage des Gleichgewichtes. Ferner kann die wiederanhebende Bewegung des Systemes nicht in der Richtung erfolgen, in welcher sie vorher stattgefunden hatte, weil alsdann das negative Glied auf der rechten Seite der obigen Gleichung noch weiter anwachsen und das positive Glied überschreiten würde, sodaß die linke Seite $\Sigma m v^2$ der Gleichung negativ werden müßte, was unmöglich ist.

Die weitere Bewegung des Systemes kann demnach nur dadurch eingeleitet werden, daß sich die Richtungen der Bewegungen der verschiedenen Elemente umkehren, sodaß die entsprechenden Größen, um welche resp. $\Sigma U_1$ und $\Sigma U_2$ vorher wuchsen, ihre Zeichen ändern und der ganze Werth von $\Sigma U_1 - \Sigma U_2$, welcher vorher fortwährend zunahm, nun fortwährend abnimmt. In diesem Falle wird sich alsdann $\Sigma m v^2$ so lange vermehren, bis ihr Werth in dem Augenblicke, wo $\Sigma U_1 - \Sigma U_2 = o$ wird, wieder gleich $\Sigma m V^2$ geworden ist, das heißt, bis das System wieder die lebende Kraft gewonnen hat, mit welcher es die Oszillation bekam.

Hieraus geht hervor, daß es für eine jede der vorausgesetzten Lagen des Systemes (zu deren Reihenfolge nämlich die angenommene Gleichgewichtslage die Beziehung einer Lage des Maximums der lebenden Kraft hat) einen gewissen Impuls oder Betrag an lebender Kraft gibt, durch dessen Mittheilung das im Gleichgewichte befindliche System veranlaßt wird zu oszilliren, bis es jene Lage erreicht, in welcher es für einen Augenblick in Ruhe bleibt, und aus welcher es alsdann wieder in seine frühere Gleichgewichtslage mit derselben lebenden Kraft zurückkehrt, mit der es die Bewegung begann. Da Dies für eine jede Lage der gedachten Reihenfolge gilt; so folgt, daß Dasselbe für eine jede Bewegung oder für einen jeden Impuls Richtigkeit hat, welcher das System nicht über diese besondere Reihe von Lagen hinaustreibt, sodaß das System, wenn es durch irgend einen solchen Impuls aus der Gleichgewichtslage gebracht ist, stets in dieselbe wieder zurückkehrt und demnach das Gleichgewicht des Systemes in dieser Lage stabil ist.

Wenn aber auf der anderen Seite die ursprüngliche Gleichgewichtslage Eine von denen ist, in welchen die lebende Kraft ein Minimum wird; so muß die gesammte Arbeit derjenigen Kräfte, welche die Bewegung zu beschleunigen streben, nachdem das System durch diese Lage gegangen ist, größer sein, als die der übrigen Kräfte, welche die Bewegung zu verzögern streben, sodaß bei derselben Bewegung wie vorhin $\Sigma U_1$ größer, als $\Sigma U_2$ und die rechte Seite der obigen Gleichung nothwendig positiv sein muß. Von welcher Art also der anfängliche Impuls und die dadurch mitgetheilte lebende Kraft $\Sigma m V^2$ auch gewesen sein mag, der Werth von $\Sigma m v^2$ muß fortwährend wachsen, sodaß das System niemals (d. h. innerhalb der Reihenfolge von Lagen, zu denen die angenommene Gleichgewichtslage in der Beziehung einer Lage des Minimums der lebenden Kraft steht) in einen Zustand der augenblicklichen Ruhe kommen kann, sondern seine Bewegungen fortwährend beschleunigen und sich immer mehr von der Gleichgewichtslage entfernen wird. Hieraus folgt, daß das Gleichgewicht in dieser Lage *nicht stabil* ist.

## Reibung.

§. 133. Es ist ein Gegenstand der Erfahrung, daß sich der Bewegung eines Körpers auf der Oberfläche eines anderen immer ein gewisser Widerstand entgegensetzt, wie glatt auch die in Berührung befindlichen Flächen sein mögen, und zwar äußert sich dieser Widerstand nicht bloß im ersten Anfange, sondern auch in jedem folgenden Augenblicke der Bewegung, sodaß nicht allein ein gewisser Kraftaufwand erforderlich ist, um den Einen Körper auf der Oberfläche des anderen aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung zu versetzen, sondern auch ferner eine gewisse Kraft erfordert wird, um diesen Zustand der Bewegung zu *erhalten*. Der Widerstand, welcher sich hiernach der Bewegung des Einen Körpers auf der Oberfläche des anderen entgegensetzt, sobald beide Körper gegeneinander gedrückt werden, heißt die *Reibung* oder *Friktion*; derjenige Widerstand, welcher sich dem Übergange aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung widersetzt, wird die *Reibung der Ruhe* und der, welcher den Zustand der Bewegung fortwährend begleitet, wird die *Reibung der Bewegung* genannt.

Die hauptsächlichsten Versuche über die Reibung sind von Coulomb, Vince, G. Rennie, N. Wood und neuerdings von Morin angestellt worden. Dieselben beziehen sich 1) auf den Zusammenhang zwischen der Reibung der Ruhe und der der Bewegung; 2) auf die Variationen der Reibung für dieselben in Berührung befindlichen Flächen bei *verschiedenen Pressungen*; 3) auf die Beziehung zwischen der Reibung und der Ausdehnung der Berührungsflächen; 4) auf die Beziehung zwischen dem Betrage der Reibung der Bewegung und der Geschwindigkeit der Bewegung; 5) auf den Einfluß schlüpfrig machender Substanzen auf die Gesetze und den Betrag der Reibung unter denselben Umständen des Druckes und der Berührung. Im Folgenden sollen die wichtigsten Resultate mitgetheilt werden, welche aus diesen Versuchen hervorgehen und welche die Gesetze der Reibung bilden.

1. Die Reibung der Bewegung ist denselben Gesetzen unterworfen, wie die der Ruhe, stimmt mit diesen Gesetzen aber in den meisten praktischen Fällen besser überein. Unter denselben Umständen des Druckes und der Berührung sind beide Reibungen übrigens dem Betrage nach verschieden.

2. Wenn kein Fett zwischen die Körper gebracht wird; so ist die Reibung zweier Flächen (sowol die der Ruhe, wie die der Bewegung) dem Drucke proportional, mit welchem dieselben perpendikular gegeneinander gepreßt werden (bis zu einer gewissen Gränze dieses Druckes auf die Flächeneinheit), sodaß für irgend zwei gegebene Berührungsflächen ein konstantes Verhältniß der Reibung zu dem perpendikularen Drucke stattfindet. Während dieses Verhältniß aber für dieselben reibenden Flächen dasselbe bleibt, ist es für verschiedene Flächen verschieden. Sein besonderer Werth in Beziehung zu zwei bestimmten Berührungsflächen heißt der Reibungskoeffizient für diese Flächen. Die Reibungskoeffizienten für diejenigen Flächen, welche in den meisten Fällen die in den Maschinen vorkommenden Reibungsflächen bilden, sind in einer Tabelle zusammengestellt, die sich am Ende dieses Werkes befindet.

3. Wenn die Reibungsflächen mit keiner fettigen Substanz bestrichen sind; so ist die Reibung von der Ausdehnung dieser Flächen völlig unabhängig, sodaß in allen Fällen, wo der Druck der beiden Flächen gegeneinander sich gleich bleibt, ohne eine gewisse Gränze für die Flächeneinheit zu überschreiten, ihre Reibung denselben Werth behält, was auch immer die Ausdehnung ihrer in Berührung befindlichen Theile sein mag.

4. Die Reibung der Bewegung ist von der Geschwindigkeit der Bewegung ganz unabhängig.

5. Wo fettige Substanzen zwischen die Berührungsflächen

gebracht werden, hängt der Reibungskoeffizient von der Beschaffenheit und der größeren oder geringeren Menge der verwendeten Substanz ab. Hinsichtlich der Menge des angewendeten Fettes sind zwei Gränzfälle zu unterscheiden; Ein Mal der, wo die Berührungsflächen mit der fettigen Substanz nur leicht abgerieben werden, und ferner der, wo in Folge der größeren Fülle und der zähen Konsistenz des angewendeten Fettes, sowie der bedeutenden Ausdehnung der Berührungsflächen im Verhältnisse zu dem obwaltenden Drucke sich fortwährend eine zusammenhängende Lage der fettigen Substanz zwischen den in Bewegung begriffenen Flächen befindet, und die Reibung demnach so weit vermindert ist, wie es durch die Anwendung dieser besonderen Art von Fett nur möglich gemacht werden kann. In dem letzteren Falle hängt die Stärke der Reibung eher von der Natur des Fettes, als von der der Berührungsflächen ab, wie Dies Morin durch eine große Anzahl von Versuchen über dergleichen Reibungsverhältnisse bestätigt hat. Derselbe bemerkt dabei »daß wenn eine zusammenhängende Lage von Schweinefett und Baumöl zwischen die Reibungsflächen gebracht wird, Flächen von Holz auf Metall, von Holz auf Holz, von Metall auf Holz und von Metall auf Metall sämmtlich (wenn sie in Bewegung sind) nahe denselben Reibungskoeffizienten besitzen, dessen Werth zwischen 0,07 und 0,08 liegt.«

»Für die Talgschmiere ist der Koeffizient in allen vorstehenden Fällen derselbe, wie für die übrigen Schmieren, mit Ausnahme des Falles, wo Eisen auf Eisen gleitet. Diese Schmiere scheint sich nach den Versuchen von Morin für Metall weniger zu eigenen, als für andere Körper, und ergibt als mittleren Werth des Reibungskoeffizienten unter denselben Umständen 0,10.«

§. 134. Während unter den Resultaten, welche man hinsichtlich der Reibung von Flächen erhalten hat, zwischen denen durch die Zwischenlage einer zusammenhängenden fettigen Substanz eine vollkommene Trennung bewirkt ist, eine bemerkenswerthe Gleichförmigkeit herrscht, findet eine große Abwechselung hinsichtlich der Grade von Fettigkeit statt, welche zwischen den oben erwähnten Gränzen von bloß fettigen Flächen und dem vollkommensten Zustande der durch eine bestimmte Fettsubstanz zu erreichenden Schlüpfrigkeit liegen. Diese große Verschiedenheit in dem Grade der Fettigkeit der reibenden Flächen ist es, welche eine so bedeutende Abweichung in den Resultaten der Versuche über Friktion bei Anwendung von Fetten herbeigeführt hat, eine Abweichung, welche übrigens wahrscheinlich nicht in dem Maaße aus einer Verschiedenheit der verwendeten Menge von Fett bei den verschiedenen Versuchen, als vielmehr aus einer Verschiedenheit des Verhältnisses des obwaltenden Druckes zu der Ausdehnung der reibenden Fläche hervorgegangen ist. Es leuchtet ein, daß einer jeden besonderen Art von Fett ein gewisser Druck auf die Flächeneinheit entsprechen muß, bei welchem eine vollkommene Trennung der beiden Flächen durch die Zwischenlage einer zusammenhängenden Schicht dieses Fettes bewirkt wird, sodaß, wenn der Druck auf die Flächeneinheit jenen Werth überschreitet, die vollkommene Trennung nicht mehr erreicht werden kann, in welcher Fülle man auch die fettige Substanz verwenden möge.

Die Versuche von N. Wood, welche durch die von G. Rennie bestätigt sind, haben diese wichtigen Bedingungen der Reibung fettiger Flächen entschieden herausgestellt. Es ist sehr zu bedauern, daß man keine Versuche hat, welche speziell auf die Bestimmung jenes Druckes für die Flächeneinheit, welcher hinsichtlich einer jeden Fettsubstanz dem Zustande der vollkommenen Trennung entspricht, sowie auf die Bestimmung des Reibungskoeffizienten unter den verschiedenen Zuständen der Trennung, welche einem noch höheren Drucke entsprechen, gerichtet sind.

Ferner leuchtet ein, daß wenn die Ausdehnung der Fläche, welche einen bestimmten Druck zu ertragen hat, so groß ist, daß dadurch der Druck auf die Flächeneinheit kleiner wird, als der, welcher dem Zustande der vollkommenen Trennung entspricht, diese größere Flächenerstreckung ebenfalls die Reibung vermöge der A d h ä s i o n des Fettes, welche von der größeren oder geringeren Klebrigkeit desselben abhängt, zu vermehren strebt, sodaß der Effekt dieser Adhäsion der Ausdehnung der mit dem Fette bestrichenen Flächen proportional ist. Die Wirkungen dieser Adhäsion sind besonders durch die Versuche von Wood auf eine bemerkenswerthe Weise ans Licht gestellt.

§. 135. Die Versuche von Morin zeigen, daß die Reibung zweier Flächen, welche **eine beträchtliche Zeit miteinander in Berührung** gewesen sind, von der Reibung **stetig bewegter** Flächen nicht allein hinsichtlich ihres Betrages, sondern auch darin verschieden ist, daß sie Abweichungen und Unsicherheiten zuläßt, von denen die Reibung der Bewegung frei ist. Diese Abweichungen scheinen nicht von der Ausdehnung der Berührungsflächen abzuhängen, in welchem Falle sie der Adhäsion zugeschrieben werden könnten; denn der Friktionskoeffizient variirte in gewissen Fällen bei verschiedenen Pressungen sehr bedeutend, obgleich die Berührungsflächen ganz dieselben blieben. Die Unsicherheit, welche durch diese Bemerkung in eine jede Untersuchung über Maschinen oder sonstige Konstruktionen eingeführt werden würde, wird jedoch durch eine zweite sehr wichtige Beobachtung, welche sich im Lauf jener Versuche herausgestellt hat, wieder beseitigt. Dieselbe besteht darin, daß durch den kleinsten **Stoß** zweier in Berührung befindlicher Körper ihre Reibung in diejenige übergeführt wird, welche der Bewegung entspricht. Da nun im Allgemeinen eine jede Maschine und eine jede Baukonstruktion dergleichen Stößen und unmerklichen Erschütterungen unterworfen ist; so bemerkt man, daß die Reibung, welche allen Fragen der Statik zu Grunde gelegt werden sollte, diejenige ist, welche die stetige Bewegung begleitet. Die oben angeführten Gesetze der Reibung, welche der Bewegung entspricht, haben sich durch die Versuche von Morin mit einer nie vorher gekannten Genauigkeit und Gleichmäßigkeit herausgestellt; sie haben allen Berechnungen in Beziehung auf die Theorie der Maschinen eine unerwartete Sicherheit gegeben, und können zu den genauesten und schätzenswerthesten Resultaten der praktischen Erfahrung gezählt werden.

Es muß übrigens bemerkt werden, daß alle diese Versuche unter verhältnißmäßig kleinen Pressungen im Vergleich zu der Ausdehnung der Reibungsflächen angestellt sind (indem die Pressungen ungefähr 14 bis 20 Pfund auf den Quadratzoll betrugen). Wenn man sich der Resultate von Morin bedient, muß man auf diesen Umstand Rücksicht nehmen, da die Versuche von Coulomb und namentlich die von G. Rennir, welche für weit größere Pressungen ausgeführt sind, beweisen, daß der Koeffizient für die

Reibung der Ruhe von einer gewissen Gränze an, welche man viel früher erreicht, als die Reibungsflächen durch zu starken Druck angegriffen werden, ungemein rasch wächst. Für manche Flächen, wie z. B. für Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen verdreifachte sich der Koeffizient, als der Druck sich der Gränze näherte, bei welcher die Oberflächen angegriffen wurden. Man hat bis jetzt noch keine direkten Versuche über die genaue Ermittelung der Gränze angestellt, bei welcher diese Änderung in dem Werthe des Koeffizienten anfängt einzutreten. Dieselbe markirt sich in den Versuchen von Rennie bei einigen der weicheren Metalle, z. B. bei Zinn auf Zinn und bei Zinn auf Gußeisen; bei den härteren Metallen jedoch, wo seine Versuche plötzlich von einem Drucke von 33,5 Pfd. zu einem Drucke von 180,9 Pfd. auf den Quadratzoll übergehen, und der Koeffizient sich von 0,148 auf 0,25 erhebt, verliert sich die gesuchte Gränze in der dazwischen liegenden Lücke. Die Versuche von Rennie beziehen sich übrigens nur auf die Reibung der Ruhe. Es scheint wahrscheinlich, daß der Koeffizient für die Reibung der Bewegung unter einer größeren Variation des Druckes konstant bleibt, als der für die Reibung der Ruhe; übrigens ist es gewiß, daß die Gränzen des Druckes, bei welchem die Berührungsflächen anfangen sich gegenseitig zu zerstören oder anzugreifen, eher erreicht werden, wenn die Eine derselben in Bewegung ist, als wenn beide aufeinander ruhen; auch hat es sich hinausgestellt, daß diese Gränzen von der Geschwindigkeit der sich bewegenden Flächen abhängen. Die genauere Untersuchung dieses Gegenstandes ist besonders in Beziehung auf die Reibung der Bewegung von großer Wichtigkeit, und es muß gewünscht werden, daß die hierbei obwaltenden Verhältnisse durch spezielle Versuche noch genügend ans Licht gestellt werden.

## Inbegriff der Gesetze der Reibung.

§. 136. Aus dem Vorstehenden folgt, daß wenn **P** die perpendikulare oder normale Kraft, mit welcher Ein Körper gegen die Oberfläche eines anderen gedrückt wird, **F** die Reibung der beiden Oberflächen oder die Kraft, welche parallel zu ihrer gemeinschaftlichen Berührungsebene angebracht werden muß, um ein Gleiten der beiden Flächen aufeinander zu bewirken, und endlich $f$ den Reibungskoeffizienten bezeichnet, dieser Koeffizient für den Fall, wo keine fettige Substanz zwischen die Flächen gebracht ist, eine konstante Größe darstellt, und daß man (§. 133)

$$F = fP \ldots . (109)$$

hat, eine Gleichung, welche in Beziehung zu der Reibung der Bewegung vollkommen und in Beziehung zu der Reibung der Ruhe näherungsweise Gültigkeit besitzt.

§. 137. Dieselbe Gleichung findet übrigens auch dann noch für fettige Flächen statt, wenn sie bloß mit Fett abgerieben sind, oder wenn die Gegenwart des Fettes keinen anderen Einfluß äußert, als die Glätte der Berührungsfläche zu vermehren, ohne dieselben ganz von einander zu trennen.

Bei Flächen, welche nur unvollkommen schlüpfrig gemacht sind oder zwischen welche nur eine unvollständige Lage von Fett gebracht ist, hängt der Reibungskoeffizient von dem Verhältnisse des obwaltenden Druckes zu der Ausdehnung der aneinander gepreßten Flächen oder von dem Drucke auf die Quadrateinheit ab. Dieser Werth des Koeffizienten für einen jeden Druck auf die Quadrateinheit ist in Beziehung zu den verschiedenen Fettsubstanzen, welche man bei den Maschinen als Schmieren benutzt, noch nicht durch umfassende Versuche genügend herausgestellt.

Auf die Größe des Widerstandes **F**, welcher sich dem Gleiten der Flächen übereinander entgegengesetzt, hat übrigens in dem vorstehenden Falle so gut, wie in dem der vollständig schlüpfrig gemachten Flächen die Adhäsion oder Klebrigkeit des Fettes einen Einfluß. Der Werth von **F** hängt mithin auch von der Ausdehnung der adhärirenden Flächen ab, und man kann, wenn **S** die Anzahl der Flächeneinheiten der Letzteren und $\alpha$ die Stärke der Adhäsion für jede Flächeneinheit bezeichnet, mit $\alpha S$ den ganzen Betrag der Adhäsion darstellen, welcher sich dem Gleiten der Flächen widersetzt, also

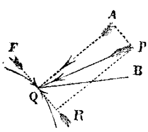
$$F = fP + \alpha S \ldots . (110)$$

setzen, worin $f$ eine Funktion des Druckes $\frac{P}{S}$ auf die Flächeneinheit und $\alpha$ ein sehr kleiner Faktor ist, welcher von der Klebrigkeit des Fettes abhängt.

## Der Reibungswinkel.

Im Nachfolgenden wird angenommen, daß die Materie der aufeinander gleitenden Körper eine solche Kohäsion besitze, daß ihre Theile durch die Wirkung keiner Kraft voneinander getrennt werden können. Die Gränzen innerhalb welcher diese Voraussetzung statthaft ist, werden später angegeben werden.

§. 138. Wenn auf die Oberfläche eines unbeweglichen starren Körpers vermittelst eines anderen beweglichen Körpers irgend ein Druck ausgeübt wird; so wird dieser Druck durch den Reibungswiderstand der Berührungsflächen immer im Gleichgewichte erhalten, wenn der Winkel, welchen seine Richtung mit der gemeinschaftlichen Normalen auf den Berührungsflächen einschließt, einen gewissen Winkel nicht überschreitet, den man den **Reibungswinkel** dieser Flächen nennt. Dieser Satz ist richtig, wie groß auch der Druck sein mag. Wenn aber die Neigung des Druckes gegen die Normale größer ist, als der Reibungswinkel; so wird jener Druck durch den Widerstand der Berührungsflächen nicht mehr im Gleichgewichte erhalten, wie klein er auch sein mag.




Stellt **PQ** die Richtung dar, in welcher die Oberflächen zweier Körper bei **Q** gegeneinander gepreßt werden, und ist **QA** die gemeinschaftliche Normale der beiden Berührungsflächen in jenem Punkte; so wird der Druck **PQ**, wie groß er auch sein mag, durch den Widerstand der Flächen so lange im Gleichgewichte erhalten, als seine Richtung innerhalb eines bestimmten Winkels **AQB**, des sogenannten Reibungswinkels liegt, und er wird, wie klein er auch sein mag, nicht im Gleichgewichte erhalten, sobald seine Richtung außerhalb dieses Winkels fällt.

Man stelle die Größe des Drucks durch die Linie **PQ** dar, und zerlege denselben in zwei andere **AQ** und **RQ**, von denen **AQ** gleich dem ist, mit welchem die Flächen perpendikular gegeneinander gepreßt werden, und **RQ** gleich dem ist, mit welchem die Flächen aufeinander zu gleiten streben. Überschreitet nun die durch den ersteren Druck **AQ** hervorgerufene Reibung **F** den letzteren Druck **RQ**; so wird der Eine Körper in Folge der Wirkung der Kraft **PQ** offenbar auf dem anderen nicht gleiten können, wie groß diese Kraft auch sein mag: ist aber die durch den perpendikularen Druck **AQ** erzeugte Reibung **F** kleiner, als der Druck **RQ**; so wird der Eine Körper auf dem andern hingeschoben werden, wie klein auch die Kraft **PQ** sein mag.

Bezeichnet man hiernach den Druck in der schrägen Richtung **PQ** mit **P** und den Winkel **AQP** mit $\vartheta$; so ist der perpendikulare Druck in der Richtung **AQ** gleich $P\cos\vartheta$, und mithin die Reibung der Berührungsflächen gleich $fP\cos\vartheta$, worin $f$ den Reibungskoeffizienten (§. 136) darstellt. Ferner ist die Komponente des schrägen Druckes **P** in der Richtung **RQ** gleich $P\sin\vartheta$, und man sieht, daß jener schräge Druck durch die Reibung der Berührungsflächen im Gleichgewichte gehalten wird oder nicht, jenachdem

$$P\sin\vartheta \text{ kleiner oder größer } fP\cos\vartheta,$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit $P\cos\vartheta$ dividirt, jenachdem

$$\tan\vartheta \text{ kleiner oder größer } f$$

ist.

Nun sei der Winkel **AQB** gleich dem, dessen Tangente $f$ ist, sodaß man, wenn derselbe mit $\varphi$ bezeichnet wird,

$$\tan\varphi = f$$

hat. Substituirt man diesen Werth von $f$ in die letzte Ungleichheit; so folgt, daß der Druck **P** durch die Reibung der Berührungsflächen im Gleichgewichte erhalten wird oder nicht, jenachdem man

$$\tan\vartheta \text{ kleiner oder größer } \tan\varphi,$$

oder jenachdem man

$$\vartheta \text{ kleiner oder größer } \varphi,$$

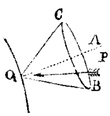
oder jenachdem man

AQP kleiner oder größer AQB

hat.

### Der Reibungskegel.

§. 139. Wenn sich der Winkel AQB um die Axe AQ dre-




het, sodaß der Schenkel BQ die Oberfläche eines Kegels BQC beschreibt; so wird dieser Kegel der Reibungskegel genannt. Es leuchtet ein, daß irgend ein nochso großer Druck, welcher in Q auf die Berührungsflächen angebracht ist, durch den Reibungswiderstand dieser Flächen im Gleichgewichte erhalten wird, wenn seine Richtung innerhalb der Oberfläche jenes Kegels liegt, und daß ein nochso kleiner auf den Punkt Q wirkender Druck nicht im Gleichgewichte erhalten wird, wenn seine Richtung außerhalb jenes Kegels liegt.

### Die beiden Gränzzustände des Gleichgewichtes.

§. 140. Wenn die Richtung des Druckes in die Oberfläche des Reibungskegels fällt; so wird derselbe durch die Reibung der Berührungsflächen eben noch im Gleichgewichte erhalten: aber der Körper, auf welchen der Druck angebracht ist, befindet sich im Momente des Ausgleitens auf dem anderen Körper. Von dem Gleichgewichte jenes ersteren Körpers sagt man, es gränze an Bewegung oder befinde sich im Gränzzustande. Wenn der Druck P ungehindert in einer beliebigen Richtung um den Punkt Q angebracht werden kann; so gibt es offenbar eine unendliche Menge solcher Gränzzustände des Gleichgewichtes, welche allen möglichen Richtungen des Druckes P in der Oberfläche des Reibungskegels entsprechen.

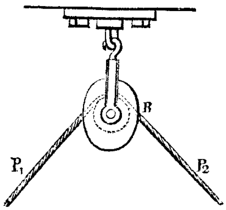
Wenn jedoch der Druck P nur in derselben Ebene angebracht werden kann; so gibt es nur zwei solcher Gränzzustände, welche den beiden Richtungen von P entsprechen, die mit den Durchschnittslinien jener Ebene und der Oberfläche des Kegels zusammenfallen: man nennt sie die oberen und unteren Gränzzustände des Gleichgewichtes. In dem Falle, wo die Richtung von

**P** auf die Ebene **AQB** beschränkt wäre, würden **BQ** und **CQ** die Richtungen des Druckes **P** sein, welche den beiden Gränzzuständen entsprechen. Eine jede Richtung von **P** innerhalb des Winkels **BQC** entspricht einem Zustande des Gleichgewichtes und eine jede Richtung außerhalb dieses Winkels einem Zustande der Bewegung.

§. 141. Aus dem Vorstehenden folgt umgekehrt, daß wenn sich das Gleichgewicht in einem Gränzzustande befindet, die Richtung des von den Berührungsflächen auszuhaltenden Druckes in der Oberfläche des Reibungskegels liegt. Ferner leuchtet ein, daß die Richtung des Druckes, welchen der erste Körper auf den zweiten ausübt, auch die Richtung des Widerstandes ist, welchen der zweite Körper dem ersten in der Berührungsfläche entgegensetzt, da jener einzelne Druck und dieser einzelne Widerstand Kräfte sind, welche sich im Gleichgewichte erhalten und demnach gleich und entgegengesetzt sein müssen. Alles, was bisher von einem einzelnen Drucke und einem einzelnen Widerstande zweier sich berührender Flächen gesagt ist, gilt offenbar auch von der Resultante mehrerer solcher Druckkräfte und von der Resultante mehrerer solcher Widerstände, und man kann behaupten: wenn mehrere auf einen beweglichen Körper angebrachte Kräfte durch den Reibungswiderstand zwischen der Oberfläche dieses Körpers und der eines zweiten unbeweglichen Körpers, gegen welchen sich der erstere stützt, im Gleichgewichte erhalten werden, und das Gleichgewicht befindet sich im Gränzzustande; so fällt die Richtung der Resultante aller jener Kräfte mit der Oberfläche des Reibungskegels zusammen, ebenso wie Dies auch die Resultante aller Widerstände der einzelnen Punkte der Berührungsfläche thut, d. h., diese beiden Resultanten neigen sich gegen die gemeinschaftliche Normale der Berührungsfläche (in dem Punkte, wo sie die Letztere treffen) unter einem Winkel, welcher dem Reibungswinkel gleich ist.

## Steifigkeit der Seile.

§. 142. Wenn ein gespanntes Seil seine gradlinige Richtung verlassen und sich um eine krumme Fläche, z. B. um den Umfang einer Rolle oder eines Rades biegen soll; so setzt dasselbe dieser Biegung einen gewissen Widerstand entgegen, welchen man die Steifigkeit des Seiles nennt. Der zur Ueberwindung dieses Widerstandes erforderliche Kraftaufwand läßt sich durch folgende Betrachtungen ermitteln. Man nehme an, das Seil $P_1 B P_2$ habe an seinen beiden




Enden die Spannung $P_1$ und $P_2$ zu ertragen und vernachlässige für den Augenblick die bei eintretender Bewegung an der Axe der Rolle sich erzeugende Reibung. Wenn das Seil eine Bewegung in der Richtung $P_2 B P_1$ annehmen soll; so leuchtet ein, daß die Spannung $P_1$ größer sein muß, als die Spannung $P_2$, und zwar um so viel, als zur Ueberwindung der Steifigkeit des Seiles oder zu seiner Biegung bei B erforderlich ist. Wäre keine Steifigkeit vorhanden, so brauchte $P_1$ nur gleich $P_2$ zu sein, um bei einer unendlich kleinen Vermehrung sogleich Bewegung zu erzeugen; man sieht also, daß der Effekt der Steifigkeit hinsichtlich der Vergrößerung der Spannung $P_1$ ganz derselbe ist, als ob bei nicht vorhandener Steifigkeit die Spannung $P_2$ vermehrt worden wäre. Aus zahlreichen Versuchen über diesen Gegenstand von Coulomb scheint nun hervorzugehen, daß die Größe, welche wegen der Steifigkeit des Seiles zu der Spannung $P_2$ hinzukommt, um von der Bewegung erzeugenden Spannung $P_1$ mit überwunden zu werden, theilweise konstant und theilweise von dem Betrage der Spannung $P_2$ abhängig ist, sodaß dieselbe durch eine algebraische Formel ausgedrückt werden kann, von welcher das Eine Glied eine konstante Größe und das andere das Produkt aus einem konstanten Faktor in die Spannung $P_2$ darstellt. Ist demnach D der konstante Theil dieser Formel und E der konstante Faktor von $P_2$; so hat man für den Effekt der Steifigkeit oder für die Größe, um welche sich gleichsam die Spannung $P_2$ vermehrt, den Ausdruck $D + E . P_2$.

Wenn das Seil bei gleicher Spannung $P_2$ über Kreise von verschiedenen Halbmessern gebogen wurde; so fand es sich, daß der Effekt der Steifigkeit umgekehrt wie der Halbmesser der Kreise variirte; so daß man also diesen Effekt durch die Formel

$$\frac{D+E.P_2}{R}\ldots.(111)$$

darstellen kann, worin **R** den Halbmesser des Kreises bezeichnet, über welchen das Seil gebogen wird. Hieraus geht hervor, daß die Steifigkeit des Seiles gerade denselben Effekt hervorbringt, als wenn im Momente der erfolgenden Bewegung in der Richtung $BP_2$ eine Spannung gleich

$$P_2+\frac{D+E.P_2}{R}$$

angebracht wäre.

Diese Formel kann für verschiedene Spannungen und verschiedene Kreise immer nur auf Ein und dasselbe Seil angewendet werden: für verschiedene Seile variiren die Konstanten **D** und **E** (innerhalb gewisser Gränzen) wie die Quadrate der Durchmesser oder der Umfänge der Seile, solange dieselben noch neu sind, und nahe wie die Potenz $\frac{3}{2}$ der Durchmesser oder Umfänge, wenn die Seile schon längere Zeit gebraucht sind.

Hierbei kann noch bemerkt werden, daß die Steifigkeit des Seiles ihren Einfluß auf die Vermehrung des Widerstandes nur in dem Punkte äußert, wo sich das Seil auf die Rolle windet; in dem Punkte, wo dasselbe sich abwickelt, wird kein Einfluß auf die Bedingungen des Gleichgewichtes bemerkbar.

Endlich muß bei der Berechnung der Maschinen, wo die bewegende Kraft vermittelst eines über eine Rolle gehenden Seiles angebracht ist, die Hälfte des Durchmessers des Seiles zu dem Halbmesser der Rolle oder zu dem perpendikularen Abstande der Richtung des Seiles von dem Punkte, für welchen die Momente genommen sind, hinzuaddirt werden, da die an dem Seile wirkende Kraft denselben Effekt hervorbringt, als wenn sie längs der Axe des Seiles angebracht wäre.

Die von Coulomb über die Werthe der Konstanten **D** und **E** aufgestellten Tabellen ergeben, auf preußische Maaßen reduzirt, die Uebersicht der Tabelle **VI**, welche am Ende dieses Werkes mitgetheilt ist.

# Zusätze zum zweiten Abschnitte.

---

**Bewegung eines ganz freien Körpers, auf welchen beliebige Kräfte angebracht sind.**

Um von den verschiedenen Eigenschaften der Bewegung eines ganz freien starren Körpers oder eines Systemes von dergleichen Körpern, welche fest miteinander verbunden sind, eine deutliche Vorstellung zu erlangen; so nehme man an, auf irgend ein Massentheilchen von dem Volum $m$ dieses Körpers sei in beliebiger Richtung die Kraft **P** angebracht, und $f$ sei die Zunahme oder $-f$ die Abnahme, welche die Geschwindigkeit dieses Theilchens in der Sekunde erleiden würde, wenn die Bewegung desselben am Ende der Zeit $t$ plötzlich gleichförmig würde. Bezeichnet man alsdann das Gewicht der Volumeinheit des Körpers an dem Orte, wo sich das Massentheilchen $m$ befindet, mit $\mu$; so ist nach §. 95 $\frac{\mu m}{g}f$ die bewegende oder wirksame Kraft dieses Theilchens. Nach dem d'Alembertschen Prinzipe (§. 103) müssen sich nun sämmtliche an dem Körper äußerlich angebrachten Kräfte **P** mit den wirksamen Kräften $\frac{\mu m}{g}f$ im Gleichgewichte erhalten, wenn man die letzteren in Richtungen nimmt, welche ihren Wirkungen direkt entgegengesetzt sind. Da der Körper, an welchem diese Kräfte wirken, nach der Voraussetzung ganz frei ist; so hat man sich der in §. 6 der Zusätze zum ersten Abschnitte entwickelten Formeln zu bedienen, um die Bedingungen für das Gleichgewicht der fraglichen Kräfte auszudrücken.

Zu diesem Ende denke man sich durch irgend einen unveränderlichen Punkt **A** des Raumes drei rechtwinklige Koordinatenaxen **AX**, **AY**, **AZ** gelegt, und bezeichne mit

$x, y, z$ die Koordinaten des Massentheilchens $m$ am Ende der Zeit $t$, mit

$u, v, w$ die Komponenten der Geschwindigkeit dieses Theilchens in parallelen Richtungen zu den drei Axen, mit

$x_1, y_1, z_1$ die Koordinaten des Schwerpunktes des ganzen Körpers am Ende der Zeit $t$, mit

$u_1, v_1, w_1$ die Komponenten der Geschwindigkeit dieses Schwerpunktes in parallelen Richtungen zu den drei Axen. Denkt man sich ferner am Ende der Zeit $t$ durch den Schwerpunkt des Körpers drei rechtwinklige Koordinatenaxen gelegt, welche den obigen parallel sind; so seien

$x_2, y_2, z_2$ die Koordinaten des Massentheilchens $m$ am Ende der Zeit $t$ in Beziehung zu dem Schwerpunkte, sodaß man $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$ hat, und

$u_2, v_2, w_2$ seien die relativen Geschwindigkeiten dieses Theilchens in Beziehung zu denen des Schwerpunktes, ebenfalls nach parallelen Richtungen zu den drei Axen, sodaß man $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2$ hat. Endlich seien

**X, Y, Z** die Komponenten der auf das Theilchen $m$ äußerlich angebrachten Kraft **P** in parallelen Richtungen zu den Axen.

Zerlegt man jetzt auch die wirksame Kraft $\frac{\mu m}{g} f$ des Theilchens $m$ in ihre drei Komponenten nach parallelen Richtungen zu den drei Axen, indem man die mittlere Geschwindigkeit dieses Theilchens am Ende der Zeit $t$ mit **V** und die Neigungswinkel dieser Geschwindigkeit gegen die drei Axen resp. mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet; so erhält man für die wirksamen Kräfte des Theilchens $m$ in parallelen Richtungen zu den drei Axen resp. $\frac{\mu m}{g} f \cos\alpha$, $\frac{\mu m}{g} f \cos\beta$, $\frac{\mu m}{g} f \cos\gamma$, oder da nach §. 95 $f dt = d\mathrm{V}$ ist, worin $d\mathrm{V}$ die unendlich geringe Zunahme der Geschwindigkeit **V** während des Zeitelementes $dt$ bezeichnet, $\frac{\mu m}{g} \frac{d\mathrm{V}}{dt} \cos\alpha$, $\frac{\mu m}{g} \frac{d\mathrm{V}}{dt} \cos\beta$, $\frac{\mu m}{g} \frac{d\mathrm{V}}{dt} \cos\gamma$, oder auch weil $\mathrm{V}\cos\alpha = u$, $\mathrm{V}\cos\beta = v$, $\mathrm{V}\cos\gamma = w$ ist, $\frac{\mu m}{g} \frac{du}{dt}$, $\frac{\mu m}{g} \frac{dv}{dt}$, $\frac{\mu m}{g} \frac{dw}{dt}$. Diese Kräfte, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, müssen sich mit den Kräften **X, Y, Z** im Gleichgewichte erhalten. Da dieselben nun mit den letzteren resp. in Ein und denselben Richtungen wirken; so folgt, daß sich die für alle einzelnen Massentheilchen zu nehmenden Kräfte $\mathrm{X} - \frac{\mu m}{g} \frac{du}{dt}$, $\mathrm{Y} - \frac{\mu m}{g} \frac{dv}{dt}$, $\mathrm{Z} - \frac{\mu m}{g} \frac{dw}{dt}$ im Gleichgewichte

13

erhalten müssen. Wendet man, um die Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte auszudrücken, die vorhin erwähnten Formeln aus den Zusätzen zum ersten Abschnitte an; so erhält man die sechs Gleichungen

$$\Sigma\left(X - \frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right) = o,$$

$$\Sigma\left(Y - \frac{\mu m}{g}\frac{dv}{dt}\right) = o,$$

$$\Sigma\left(Z - \frac{\mu m}{g}\frac{dw}{dt}\right) = o,$$

$$\Sigma\left(X - \frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)y - \Sigma\left(Y - \frac{\mu m}{g}\frac{dv}{dt}\right)x = o,$$

$$\Sigma\left(Z - \frac{\mu m}{g}\frac{dw}{dt}\right)x - \Sigma\left(X - \frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)z = o,$$

$$\Sigma\left(Y - \frac{\mu m}{g}\frac{dv}{dt}\right)z - \Sigma\left(Z - \frac{\mu m}{g}\frac{dw}{dt}\right)y = o.$$

Bewegung des Schwerpunktes. Was die ersten drei dieser Gleichungen betrifft; so erhält man aus der ersten derselben, wenn man erwägt, daß $u = u_1 + u_2$ und daß allgemein $u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}$, also $\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}$ (§. 96) ist,

$$\Sigma X - \frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}\right) = o.$$

Da sich die Koordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ des Massentheilchens $m$ auf den Schwerpunkt des ganzen Körpers als Anfangspunkt beziehen; so ist $\mu m . x_2$ das Moment des Gewichtes $\mu m$ in Beziehung zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe und $\Sigma\mu m x_2$ ist das Moment des gesammten Gewichtes $\mu M$ des ganzen Körpers in Beziehung zu einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Axe. Da dies Moment gleich null ist (§. 20); so hat man $\Sigma\mu m x_2 = o$. Diese Gleichung muß zu jeder beliebigen Zeit der Bewegung des Körpers, also auch dann bestehen, wenn sich die Koordinaten $x_2$ nach Verlauf des Zeitelementes $dt$ in $x_2 + dx_2$ verwandelt haben, sodaß man auch $\Sigma\mu m(x_2 + dx_2) = \Sigma\mu m x_2 + \Sigma\mu m dx_2 = o$ hat. Hieraus und aus der vorhergehenden Beziehung folgt aber $\Sigma\mu m dx_2 = 0$ und auch $\Sigma\mu m \frac{dx_2}{dt} = \Sigma\mu m u_2 = 0$. Da nun die letztere Gleichung ebenfalls zu jeder Zeit der Bewegung des Körpers bestehen muß; so folgt in ähnlicher Weise, wie vorhin, $\Sigma\mu m \frac{du_2}{dt} = \Sigma\mu m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0$. Substituirt man diesen Werth für $\Sigma\mu m \frac{d^2 x_2}{dt^2}$ in die obige Gleichung; so ergibt dieselbe

$$\Sigma X - \frac{1}{g} \Sigma\mu m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0.$$

Beachtet man nun, daß sich die Koordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ nur auf die Lage des **Schwerpunktes** beziehen, daß also $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ für alle Massentheilchen $m$ konstant ist; so hat man $\Sigma\mu m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \Sigma\mu m$, und wenn man den Körper überall von gleicher Dichtigkeit annimmt, so daß $\mu$ konstant ist, und das Volum $\Sigma m$ des ganzen Körpers mit M bezeichnet,

$$\Sigma X - \frac{\mu M}{g} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0.$$

Verfährt man in derselben Weise mit den übrigen beiden der ersten drei Gleichungen; so ergeben dieselben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu M}{g} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\mu M}{g} \frac{du_1}{dt} = \Sigma X, \\ \frac{\mu M}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{\mu M}{g} \frac{dv_1}{dt} = \Sigma Y, \\ \frac{\mu M}{g} \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{\mu M}{g} \frac{dw_1}{dt} = \Sigma Z. \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

Da sich die Koordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ und die Geschwindigkeiten $u_1$, $v_1$, $w_1$ nur auf die Bewegung des Schwerpunktes beziehen, und $\mu M$ das Gewicht des ganzen Körpers darstellt; so geht aus diesen Gleichungen hervor, daß sich der **Schwerpunkt des Körpers gerade so bewegen wird, als wenn die ganze Masse des Körpers in ihm konzentrirt wäre,** und sämmtliche äußere Kräfte X, Y, Z, welche auf die einzelnen Theilchen des Körpers wirken, parallel zu ihren Richtungen auf denselben angebracht wären.

Wären gar keine äußeren Kräfte auf den Körper angebracht; sodaß man für alle Massentheilchen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ hätte; so reduzirten sich die obigen Gleichungen, nachdem man durch $\frac{\mu M}{g}$ dividirt hätte, auf

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{dw_1}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt durch Integration zwischen den Gränzen $t=0$ und $t=t$, wenn man die anfänglichen Geschwindigkeiten des Schwerpunktes oder die Werthe von $\frac{dx_1}{dt} = u_1$, $\frac{dy_1}{dt} = v_1$, $\frac{dz_1}{dt} = w_1$ für $t=0$ mit $U_1$, $V_1$, $W_1$ bezeichnet,

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 = U_1,$$
$$\frac{dy_1}{dt} = v_1 = V_1,$$
$$\frac{dz_1}{dt} = w_1 = W_1.$$

Integrirt man diese Gleichungen nochmals zwischen den Gränzen 0 und $t$ von $t$, und bezeichnet die anfänglichen Abstände des Schwerpunktes von dem Anfangspunkte des festen Koordinatensystemes mit $a$, $b$, $c$; so erhält man

$$x_1 = a + U_1 t,$$
$$y_1 = b + V_1 t,$$
$$z_1 = c + W_1 t.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß unter der gemachten Voraussetzung der Schwerpunkt des Körpers fortwährend mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer geraden

Linie fortschreiten wird. Man bezeichnet diese Eigenschaft mit dem Prinzipe der Erhaltung der fortschreitenden Bewegung.

Wenn die auf die Theile des Körpers angebrachten Kräfte **X, Y, Z** fortwährend konstant und ihren ursprünglichen Richtungen parallel bleiben; so kann man in die Gleichungen ($a$) für $\Sigma X$, $\Sigma Y$, $\Sigma Z$ die konstanten Werthe **P, Q, R** einführen und die Integrationen derselben leicht bewirken. Wären die auf den Körper angebrachten Kräfte z. B. die Schwere, und nähme man die Koordinatenebene **XY** als horizontal an, indem man die positiven $z$ in vertikaler Richtung von oben nach unten rechnete; so würde man $X=0$, $Y=0$, $Z=\mu M$ zu setzen haben, und nach gehöriger Integration die Gleichungen

$$u_1=U_1,\ v_1=V_1,\ w_1=W_1+gt,$$
$$x_1=a+U_1t,\ y_1=b+V_1t,\ z_1=c+W_1t+\tfrac{1}{2}gt^2$$

erhalten. Man sieht hieraus, daß sich der Schwerpunkt eines schweren geworfenen Körpers immer in einer vertikalen Ebene bewegen wird, in welcher er nach horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet, während er in vertikaler Richtung nach den Gesetzen des freien Falles eines schweren materiellen Punktes herabsinkt. Die Bahn, welche der Schwerpunkt durchläuft, ist daher immer eine Parabel.

Umdrehungsbewegung um den Schwerpunkt. Was die letzten drei der vorhin entwickelten sechs Gleichungen anlangt; so substituire man darin zuvörderst für $x$, $y$, $z$ resp. die Werthe $x_1+x_2$, $y_1+y_2$, $z_1+z_2$. Beachtet man alsdann, daß sich die Koordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ nur auf den Schwerpunkt des ganzen Körpers beziehen, also in Beziehung zu den verschiedenen Massentheilchen $m$ konstant sind; so kann man z. B. $\Sigma\left(X-\frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)y_1=y_1\Sigma\left(X-\frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)$ setzen.

Da aber wegen der drei ersten Gleichungen $\Sigma\left(X-\frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)=0$ ist; so folgt, daß sämmtliche Glieder der letzten drei Gleichungen, welche nach der eben erwähnten Substitution in die Größen $x_1$, $y_1$, $z_1$ multiplizirt sein werden, verschwinden, und daß sich jene Gleichungen auf

$$\Sigma\left(X-\frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)y_2-\Sigma\left(Y-\frac{\mu m}{g}\frac{dv}{dt}\right)x_2=0 \text{ etc.}$$

reduziren.

Setzt man hierauf, wie vorhin $u=u_1+u_2=\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt}$, $v=v_1+v_2=\frac{dy_1}{dt}+\frac{dy_2}{dt}$, $w=w_1+w_2=\frac{dz_1}{dt}+\frac{dz_2}{dt}$, und beachtet, daß die Größen $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ in Beziehung zu den einzelnen Massentheilchen des Körpers konstant sind, und demnach als Faktoren vor das Zeichen $\Sigma$ gesetzt werden können; so erhält man z. B.

$$\Sigma\left(X-\frac{\mu m}{g}\frac{du}{dt}\right)y_2=\Sigma X y_2-\frac{1}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma\mu m y_2-\frac{1}{g}\Sigma\mu m y_2\frac{d^2x_2}{dt^2},$$

oder weil $\Sigma\mu m y_2=0$ ist,

$$=\Sigma X y_2-\frac{1}{g}\Sigma\mu m y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}.$$

In ähnlicher Weise reduziren sich die übrigen Glieder jener Gleichungen, und es ergibt sich aus denselben, wenn man gehörig transponirt,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-x_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)&=\Sigma(Xy_2-Yx_2),\\
\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(x_2\frac{d^2z_2}{dt^2}-z_2\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)&=\Sigma(Zx_2-Xz_2),\\
\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(z_2\frac{d^2y_2}{dt^2}-y_2\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)&=\Sigma(Yz_2-Zy_2).
\end{aligned}\right\}\ldots.(b)$$

Da $\left(y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-x_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)$ der Differenzialkoeffizient von $\left(y_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dy_2}{dt}\right)$ in Beziehung zu $t$ ist; so kann man die vorstehenden Gleichungen auch schreiben

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{g}\Sigma\mu m\frac{d}{dt}\left(y_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dy_2}{dt}\right)&=\Sigma(\mathrm{X}y_2-\mathrm{Y}x_2),\\ \frac{1}{g}\Sigma\mu m\frac{d}{dt}\left(x_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dx_2}{dt}\right)&=\Sigma(\mathrm{Z}x_2-\mathrm{X}z_2),\\ \frac{1}{g}\Sigma\mu m\frac{d}{dt}\left(z_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dz_2}{dt}\right)&=\Sigma(\mathrm{Y}z_2-\mathrm{Z}y_2).\end{aligned}\right\}\;\ldots.(c)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Koordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ beziehen sich sämmtlich auf das Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des Körpers am Ende der Zeit $t$ ist, und die Gleichungen selbst stellen demnach die Bedingungen der Umdrehungsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt am Ende der Zeit $t$ dar.

Die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen stellen offenbar die Summen der Momente der Kräfte X, Y, Z resp. in Beziehung zu der Axe der $z_2$, der $y_2$ und der $x_2$ dar. Wären nun diese Kräfte sämmtlich gleich null, sodaß sich der Körper nur vermöge der ihm anfänglich mitgetheilten Geschwindigkeit bewegte, oder wären dieselben von der Beschaffenheit, daß ihre Resultante fortwährend durch den Schwerpunkt des Körpers ginge, sodaß die Summe ihrer Momente in Beziehung zu den drei Axen stets gleich null wäre; so würden sich die vorstehenden Gleichungen auf

$$\Sigma\mu m\frac{d}{dt}\left(y_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dy_2}{dt}\right)=0,$$

$$\Sigma\mu m\frac{d}{dt}\left(x_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dx_2}{dt}\right)=0,$$

$$\Sigma\mu m\frac{d}{dt}\left(z_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dz_2}{dt}\right)=0$$

reduziren. Hieraus folgt, wenn man integrirt

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\mu m\left(y_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dy_2}{dt}\right)&=\mathrm{A},\\ \Sigma\mu m\left(x_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dx_2}{dt}\right)&=\mathrm{B},\\ \Sigma\mu m\left(z_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dz_2}{dt}\right)&=\mathrm{C},\end{aligned}\right\}\;\ldots.(d)$$

worin **A**, **B**, **C** konstante Größen darstellen, welche sich während der ganzen Zeit der Bewegung des Körpers nicht ändern.

Die Produkte $\mu m \frac{dx_2}{dt} = \mu m u_2$, $\mu m \frac{dy_2}{dt} = \mu m v_2$, $\mu m \frac{dz_2}{dt} = \mu m w_2$ des Gewichtes $\mu m$ irgend eines Massentheilchens in seine Geschwindigkeiten $u_2$, $v_2$, $w_2$ nach parallelen Richtungen zu den drei Axen, welche man Bewegungsgrößen nennt, bilden offenbar ein Maaß für die in den Theilchen am Ende der Zeit $t$ angehäufte Kraft, und man bemerkt, daß die Ausdrücke $\Sigma \mu m \left( y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt} \right)$ etc. die Summen der Momente dieser Bewegungsgrößen in Beziehung zu den Axen der $z_2$, der $y_2$ und der $x_2$ darstellen. Da diese Axen durch den Schwerpunkt gehen; so hat man $\Sigma \mu m x_2 = 0$, $\Sigma \mu m y_2 = 0$, $\Sigma \mu m z_2 = 0$ und demnach auch $\Sigma \mu m \frac{dx_2}{dt} = \Sigma \mu m u_2 = 0$, $\Sigma \mu m \frac{dy_2}{dt} = \Sigma \mu m v_2 = 0$, $\Sigma \mu m \frac{dz_2}{dt} = \Sigma \mu m w_2 = 0$, d. h. die Summen der Bewegungsgrößen selbst sind fortwährend gleich null. Dieselben äußern demnach auf den Schwerpunkt gar keine Wirkung und streben nur, den Körper um die drei Koordinatenaxen in der Weise zu drehen, wie Dies Kräftepaare thun würden, deren Axen mit den Koordinatenaxen der $z_2$, $y_2$, $x_2$ zusammenfallen und deren Momente in den Ebenen der $x_2 y_2$, der $x_2 z_2$ und der $y_2 z_2$ resp. gleich **A**, **B** und **C** sind.

Setzt man diese drei Kräftepaare nach den in den Zusätzen zum ersten Abschnitte entwickelten Prinzipien in ein einziges zusammen; so findet man für das Moment dieses resultirenden Kräftepaares den Ausdruck

$$\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2},$$

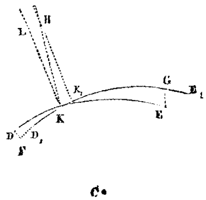
und für die Kosinus der Neigungswinkel, welche die Axe dieses Kräftepaares resp. mit den Axen der $x_2$, der $y_2$, und der $z_2$ einschließt,

$$\frac{\mathbf{C}}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2}}, \quad \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2}}, \quad \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2}}.$$

Man sieht, daß sowol das Moment, wie die Lage der Axe dieses resultirenden Kräftepaares während der ganzen Zeit der Bewegung nicht geändert wird. In dieser Eigenschaft besteht das Prinzip der Erhaltung der Umdrehungsbewegung.

Von welcher Beschaffenheit nun auch diese Umdrehungsbewegung sei, und wie sehr sie mit der Zeit veränderlich sein möge; so kann man sich dieselbe doch, wenn man nur eine unendlich geringe Drehung während des Zeitelementes $dt$ betrachtet, wie eine augenblicke Drehung des Körpers um eine einzige durch den Schwerpunkt gehende Axe vorstellen. Um dies deutlicher einzusehen, so beachte man, daß die Lage irgend eines Körpers im Raume vollkommen bestimmt ist, wenn die Lage irgend dreier, nicht in gerader Linie liegender Punkte desselben gegeben ist. Da in dem vorliegenden Falle der Umdrehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt der Letztere seinen Ort bei dem Uebergange des Körpers aus der Einen in die andere Lage nicht ändert; so folgt, daß die neue Lage des ganzen Körpers dadurch bestimmt ist, daß man die Ortsveränderungen angibt, welche zwei beliebige andere seiner Punkte erlitten haben. Kann man nun zeigen, daß die Ortsveränderungen zweier solcher Punkte durch eine Drehung um eine einzige Axe hervorgebracht werden können; so ist damit auch dargethan, daß sich die Bewegung des ganzen Körpers durch eine Umdrehung um diese Axe erzeugen läßt. Da alle in jener Umdrehungsaxe liegende Punkte des Körpers ihre Lage nicht ändern dürfen, und die Axe selbst durch den gegebenen Schwerpunkt gehen muß; so erkennt man endlich, daß sowol die Existenz, wie die Lage der fraglichen Umdrehungsaxe unzweifelhaft nachgewiesen ist, wenn man zeigt, daß die Ortsveränderungen irgend zweier Punkte des Körpers durch eine Bewegung hervorgebracht werden können, bei welcher außer dem Schwerpunkte noch Ein beliebiger anderer Punkt des Körpers seine Lage nicht ändert. Dieser letztere Punkt gibt alsdann die Richtung der durch den Schwerpunkt gehenden Umdrehungsaxe an.

Bezeichnet zu diesem Ende **C** die Lage des Schwerpunktes am Ende der Zeit $t$ und **D**, **E** die resp. Lagen irgend zweier Punkte des Körpers, welche beide um $\varrho$ von dem Schwerpunkte abstehen; so seien $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{E}_1$ die Lagen dieser beiden Punkte, welche dieselben in dem unendlich kleinen Zeitelemente $dt$ annehmen. Da bei dieser Bewegung der Schwerpunkt **C** seine Lage




nicht ändert; so wird der Abstand der Punkte $D_1$ und $E_1$ von C ebenfalls gleich $\varrho$ sein, oder die vier Punkte D, E, $D_1$, $E_1$ werden auf der Oberfläche einer Kugel liegen, welche mit dem Halbmesser $\varrho$ aus dem Schwerpunkte C, als Mittelpunkt, beschrieben ist. DE und $D_1E_1$ seien die Bögen zweier größten Kreise dieser Kugel und K ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Jetzt kann man sich die momentane Bewegung des Körpers oder den Uebergang des Bogens DE in die Lage $D_1E_1$ in der Weise vorstellen, daß sich der Körper zuvörderst um die Axe KC und zwar um die Winkelgröße $EKE_1$ drehe, sodaß die Punkte D und E in F und G mit der Richtung des größten Kreises $D_1E_1$ zusammenfallen, und daß darauf eine zweite Drehung des Körpers um eine Axe erfolge, welche in C auf der Ebene des größten Kreises $D_1E_1$ perpendikular stehe, sodaß endlich der Bogen FG in die Lage $D_1E_1$ gelangt.

Denkt man sich nun durch den Punkt K eine Berührungsebene an die fragliche Kugel gelegt, und ist KH das Perpendikel auf der Tangente an dem Bogen DE im Punkte K; so wird sich dieses Perpendikel bei der ersten Drehung des Körpers um die Axe KC ebenfalls um eine Winkelgröße $HKL = EKG$ herumdrehen und in die Lage KL kommen. Bei der zweiten Bewegung des Körpers um die auf der Ebene $CD_1E_1$ perpendikular stehende Axe wird dagegen die Linie KL parallel mit sich selbst fortrücken und in die Lage $K_1H$ kommen. Ist nun H der Durchschnittspunkt der beiden Linien KH und $K_1H$, welche wegen der unendlich geringen Bewegung des Körpers als in Einer Ebene liegend und als gleich lang angesehen werden können; so leuchtet ein, daß dieser Punkt bei der gesammten Bewegung des Körpers aus der Lage CDE in die Lage $CD_1E_1$ ebensowenig, wie der Schwerpunkt C, eine Ortsveränderung erlitten hat, daß man also die Bewegung des Körpers auch dadurch erzeugen kann, daß man denselben um die einzige Axe CH und zwar um die Winkelgröße $KHK_1 = HKL = EKE_1$ herumdrehet.

Fiele die Axe, um welche sich der Körper am Ende der Zeit $t$ drehet, mit der Axe des obigen mittleren Kräftepaares zusammen, welches man durch die Zusammensetzung aller Bewegungsgrößen erhält; so würden diese Kräfte durchaus kein Bestreben äußern, die Lage der Umdrehungsaxe zu ändern, und der Körper würde sich demnach in diesem Falle fortwährend um eine Axe drehen, deren Lage im Raume sich fortwährend parallel bliebe. Fiele die augenblickliche Umdrehungsaxe des Körpers aber nicht mit der Axe des konstanten mittleren Kräftepaares zusammen; so würde das Letztere bei seinem Bestreben nach Drehung auch die Umdrehungsaxe des Körpers fortwährend verändern.

In dem ersteren Falle, wo die Umdrehungsaxe des Körpers mit der Axe des mittleren Kräftepaares der Bewegungsgrößen zusammenfällt, erhält man aus der ersten der Gleichungen $(d)$, wenn man die Koordinatenaxe der $z_2$ in die Richtung der Umdrehungsaxe verlegt

$$\Sigma \mu m\left(y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt}\right) = \mathbf{A},$$

während die Momente **B** und **C** in Beziehung zu einer Drehung um die Axen der $y_2$ und $x_2$ offenbar gleich null sind.

Nun ist $y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt} = y_2{}^2 \frac{d\left(\frac{x_2}{y_2}\right)}{dt}$, und wenn man den Abstand des Massentheilchens $m$ von der Umdrehungsaxe mit $\varrho$ und den Neigungswinkel der Projektion von $\varrho$ gegen die Axe der $y_2$ mit $\omega$ bezeichnet, sodaß $\frac{x_2}{y_2} = \operatorname{tang}\omega$ ist,

$$y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt} = y_2{}^2 \frac{d \operatorname{tang}\omega}{dt} = \frac{y_2{}^2}{\cos^2\omega} \frac{d\omega}{dt} = \varrho^2 \frac{d\omega}{dt}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seine Umdrehungsaxe am Ende der Zeit $t$ mit $\alpha$; so ist offenbar $\alpha dt = d\omega$ oder $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$; demnach auch

$y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt} = \varrho^2 \alpha$. Substituirt man diesen Werth in die vorstehende Gleichung, und beachtet, daß die Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ allen Massentheilchen gemein ist; so erhält man

$$\alpha \Sigma \mu m \varrho^2 = A;$$

mithin

$$\alpha = \frac{A}{\Sigma \mu m \varrho^2},$$

worin $\Sigma \mu m \varrho^2$ einen durch die Form des Körpers gegebenen konstanten Werth besitzt, die Konstante A bestimmt sich durch die Bedingung, daß für $t=o$ $\alpha$ irgend einen gegebenen Werth $\alpha_1$ haben müsse. Hierdurch erhält man endlich die Gleichung

$$\alpha = \alpha_1,$$

welche ausdrückt, daß sich der Körper fortwährend mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit $\alpha_1$ um die konstante Umdrehungsaxe drehen wird.

Für den zweiten Fall, wo die Umdrehungsaxe nicht mit der Axe des mittleren Kräftepaares zusammenfällt und demnach fortwährend eine Aenderung erleidet, behalte man das vorhergehende allgemeine Koordinatensystem bei. Bezeichnet man alsdann mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Projektionen des Vektorradius $\varrho$ von dem Schwerpunkte bis nach irgend einem Theilchen $m$ resp. auf die Ebenen der $x_2 y_2$, $x_2 z_2$, $y_2 z_2$ und mit $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkelgeschwindigkeiten dieser Projektionen resp. um die Axe der $z_2$, der $y_2$ und der $x_2$; so hat man für irgend ein Theilchen $m$

$$y_2 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dy_2}{dt} = \alpha \varrho_1{}^2,\ x_2 \frac{dz_2}{dt} - z_2 \frac{dx_2}{dt} = \beta \varrho_2{}^2,\ z_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dz_2}{dt} =$$

$\gamma \varrho_3{}^2$, und demnach wegen der Gleichungen $(d)$

$$\Sigma \mu m \alpha \varrho_1{}^2 = \mathrm{A},\ \Sigma \mu m \beta \varrho_2{}^2 = \mathrm{B},\ \Sigma \mu m \gamma \varrho_3{}^2 = \mathrm{C},$$

oder auch, wenn man mit $dt$ multiplizirt,

$$\Sigma \mu m \varrho_1{}^2 \alpha dt = \mathrm{A} dt,\ \Sigma \mu m \varrho_2{}^2 \beta dt = \mathrm{B} dt,\ \Sigma \mu m \varrho_3{}^2 \gamma dt = \mathrm{C} dt.$$

In diesen Gleichungen sind die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nicht allein mit der Zeit, sondern auch für ein jedes Massentheilchen variabel. Da $\varrho_1 \alpha dt$ den sehr kleinen Bogen darstellt, welchen der Endpunkt des projizirten Vektorradius in der Ebene der $x_2 y_2$ um den Schwerpunkt beschreibt, und $\frac{1}{2} \varrho_1 \cdot \varrho_1 \alpha dt = \frac{1}{2} \varrho_1{}^2 \alpha dt$ die sehr kleine Fläche bezeichnet, welche diese Projektion in der Ebene der $x_2 y_2$ während des Zeitelementes $dt$ beschreibt; so sieht man aus der ersten der vorstehenden Gleichungen, daß die Summe aller dieser Vectorflächen in der Ebene der $x_2 y_2$, multiplicirt mit den Gewichten $\mu m$ der entsprechenden Massentheilchen, proportional mit der Zeit wächst. Allgemein geht aus den obigen Gleichungen hervor, daß wenn man in irgend einem Augenblicke der Bewegung sämmtliche Vektorradien auf Eine der drei Koordinatenebenen projizirt, und die Vektorflächen, welche diese Projektionen in der sehr kleinen Zeit $dt$ um den Schwerpunkt beschreiben, einzeln mit den Gewichten der zugehörigen Massentheilchen multiplizirt, die Summe aller dieser Produkte stets Ein und denselben Werth haben wird. Man bezeichnet diese Eigenschaft der Bewegung eines ganz freien Körpers, auf welchen entweder gar keine, oder nur solche Kräfte angebracht sind, deren Resultante fortwährend durch den Schwerpunkt geht, mit dem Namen des Prinzipes der Flächen.

Betrachten wir jetzt noch den allgemeineren Fall, wo die Kräfte X, Y, Z nicht gleich null und auch nicht von der Beschaffenheit sind, daß ihre Resultante stets durch den Schwerpunkt geht, wo dieselben jedoch der Bedingung unterworfen sind, daß die Partialsummen

$$\Sigma(\mathrm{X}y_2 - \mathrm{Y}x_2),\ \Sigma(\mathrm{Z}x_2 - \mathrm{X}z_2),\ \Sigma(\mathrm{Y}z_2 - \mathrm{Z}y_2)$$

ihrer Momente, welche den Körper resp. um die Axen $\mathrm{CZ_2}$, $\mathrm{CY_2}$, und $\mathrm{CX_2}$ in der Richtung von $\mathrm{Y_2}$ nach $\mathrm{X_2}$, von $\mathrm{X_2}$ nach $\mathrm{Z_2}$ und von $\mathrm{Z_2}$ nach $\mathrm{Y_2}$ zu drehen streben, stets konstante Werthe behalten, welche man resp. durch $\Sigma \mathrm{P}p$, $\Sigma \mathrm{Q}q$, $\Sigma \mathrm{R}r$ darstellen kann, indem man mit P die Resultante $\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}$ von X und Y und mit $p$ den Abstand derselben von der Axe $\mathrm{CZ_2}$ bezeichnet u. s. f.

Es ist schon vorhin erwähnt, daß man sich irgend eine unendlich kleine Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt während des Zeitelementes $dt$, wobei die Koordinaten $x$, $y$, $z$ irgend eines Massentheilchens $m$ die Inkremente $dx$, $dy$, $dz$ erleiden, als eine Drehung des Körpers um eine gewisse durch seinen Schwerpunkt gehende Axe denken könne. Wie aus dem Nachstehenden erhellet, kann man die Bewegung des Körpers, welche aus der Umdrehung um eine einzige Axe hervorgeht, auch als eine gleichzeitige Drehung um die drei Axen $\mathrm{CZ_2}$, $\mathrm{CY_2}$, $\mathrm{CX_2}$ nach den oben bemerkten Richtungen herum ansehen. Nimmt man daher, um die fragliche Bewegung des Körpers während der Zeit $dt$ zu erzeugen, an, derselbe drehe sich zuvörderst mit der Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ um die Axe $CZ_2$, indem die Projektionen aller seiner Punkte auf die Ebene $Y_2X_2$ den sehr kleinen Bogen $\alpha dt$ beschreiben und die Koordinaten $x_2$ und $y_2$ die Inkremente $\delta x'$ und $\delta y'$ erleiden; so hat man offenbar $\delta x' = y_2 \alpha dt$ und $\delta y' = -x_2 \alpha dt$. Hierauf nehme man an, der Körper drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\beta$ um die Axe $CY_2$, indem die Projektionen seiner Punkte auf die Ebene $X_2Z_2$ den Bogen $\beta dt$ beschreiben und die Koordinaten $x_2$ und $z_2$ die Inkremente $\delta x''$ und $\delta z''$ erleiden; alsdann hat man $\delta x'' = -z_2 \beta dt$ und $\delta z'' = x_2 \beta dt$. Endlich drehe sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma$ um die Axe $CX_2$, indem die Projektionen seiner Punkte auf die Ebene $Z_2Y_2$ den Bogen $\gamma dt$ beschreiben, und die Koordinaten $y_2$ und $z_2$ die Inkremente $\delta y'''$ und $\delta z'''$ erleiden; alsdann hat man $\delta y''' = z_2 \gamma dt$ und $\delta z''' = -y_2 \gamma dt$. Die Inkremente $dx_2$, $dy_2$, $dz_2$, welche die Koordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ irgend eines Massentheilchens bei der gleichzeitigen Drehung um die drei Axen während des Zeitelementes $dt$ erleiden, sind demnach

$$dx_2 = \delta x' + \delta x'' = y_2 \alpha dt - z_2 \beta dt,$$
$$dy_2 = \delta y' + \delta y''' = z_2 \gamma dt - x_2 \alpha dt,$$
$$dz_2 = \delta z'' + \delta z''' = x_2 \beta dt - y_2 \gamma dt,$$

und man hat

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha y_2 - \beta z_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \gamma z_2 - \alpha x_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \beta x_2 - \gamma y_2$$

Für diejenigen Punkte des Körpers, welche bei dieser Drehung ihre Lage nicht ändern, muß man $\frac{dx_2}{dt} = o$, $\frac{dy_2}{dt} = o$, $\frac{dz_2}{dt} = o$ haben. Dies ergibt zur Bestimmung der fraglichen Punkte die Gleichungen

$$\alpha y_2 = \beta z_2,\ \gamma z_2 = \alpha x_2,\ \beta x_2 = \gamma y_2,$$

von denen je zwei die dritte bedingen. Man sieht, daß hierdurch eine gerade Linie dargestellt ist, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Auch erkennt man, daß die Kosinus der Neigungswinkel dieser Umdrehungsaxe gegen die Koordinatenaxen $CX_2$, $CY_2$, $CZ_2$ resp. durch

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

dargestellt sind. Um die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta$ zu bestimmen, mit welcher sich der Körper um die Umdrehungsaxe drehet; so hat man für den Raum, welchen irgend ein Theilchen des Körpers während des Zeitelementes $dt$ beschreibt,

$$\sqrt{dx_2{}^2+dy_2{}^2+dz_2{}^2}=dt\sqrt{(\alpha y_2-\beta z_2)^2+(\gamma z_2-\alpha x_2)^2+(\beta x_2-\gamma y_2)^2}$$
$$=dt\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2)-(\gamma x_2+\beta y^2+\alpha z_2)^2}.$$

Multiplizirt man die obigen Werthe von $dx_2, dy_2, dz_2$ resp. mit $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ und addirt dieselben zusammen; so ergibt sich

$$\gamma x_2+\beta y_2+\alpha z_2=o,$$

und demnach

$$\sqrt{dx_2{}^2+dy_2{}^2+dz_2{}^2}=dt\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2)}.$$

Nimmt man nun an, das in Rede stehende Theilchen liege in einer auf der Umdrehungsaxe perpendikular stehenden, durch den Anfangspunkt gehenden Ebene in einem Abstande gleich 1 von dem letzteren Punkte; so hat man $x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2=1$ und $\sqrt{dx_2{}^2+dy_2{}^2+dz_2{}^2}=\vartheta dt$; mithin

$$\vartheta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Vermöge der obigen Werthe von $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$ und $\frac{dz_2}{dt}$ erhält man nach gehöriger Reduktion

$$y_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dy_2}{dt}=\alpha(x_2{}^2+y_2{}^2)-\beta y_2 z_2-\gamma x_2 z_2,$$

$$x_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dx_2}{dt}=\beta(x_2{}^2+z_2{}^2)-\gamma x_2 y_2-\alpha y_2 z_2,$$

$$z_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dz_2}{dt}=\gamma(y_2{}^2+z_2{}^2)-\alpha x_2 z_2-\beta x_2 y_2.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (c), worin der Voraussetzung gemäß die rechten Seiten konstante Werthe haben, führt alsdann die Integration in Beziehung zur Zeit $t$ aus, und beachtet, daß die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nur mit der Zeit veränderlich, für die einzelnen Massentheilchen des Körpers aber konstant sind; so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\alpha}{g}\Sigma\mu m(x_2{}^2+y_2{}^2)-\frac{\beta}{g}\Sigma\mu m y_2 z_2-\frac{\gamma}{g}\Sigma\mu m y_2 z_2&=t\Sigma \mathrm{P}p+\mathrm{A},\\
\frac{\beta}{g}\Sigma\mu m(x_2{}^2+z_2{}^2)-\frac{\gamma}{g}\Sigma\mu m x_2 y_2-\frac{\alpha}{g}\Sigma\mu m y_2 z_2&=t\Sigma \mathrm{Q}q+\mathrm{B},\\
\frac{\gamma}{g}\Sigma\mu m(y_2{}^2+z_2{}^2)-\frac{\alpha}{g}\Sigma\mu m x_2 z_2-\frac{\beta}{g}\Sigma\mu m x_2 y_2&=t\Sigma \mathrm{R}r+\mathrm{C},
\end{aligned}\right\}\ldots(e)$$

worin **A**, **B** und **C** konstante Größen bezeichnen.

Nehmen wir nun an, in dem Augenblicke, von welchem man anfängt, die Zeit $t$ zu rechnen, falle die Koordinatenaxe $\mathrm{CZ}_2$ mit der augenblicklichen Umdrehungsaxe des Körpers zusammen, sodaß für diesen Augenblick $\beta=0$, $\gamma=0$ ist und die Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ den Werth $\alpha_1$ hat. Ferner machen wir zur Vereinfachung der Untersuchung folgende Voraussetzungen: Die Summe der Momente der Komponenten **Z** und **X**, welche den Körper um die Axe $\mathrm{CY}_2$ zu drehen streben, sowie die Summe der Momente der Komponenten **Y** und **Z**, welche den Körper um die Axe $\mathrm{CX}_2$ zu drehen streben, sei gleich null, sodaß man $\Sigma(\mathrm{Z}x_2-\mathrm{X}z_2)=\Sigma\mathrm{Q}q=0$ und $\Sigma(\mathrm{Y}z_2-\mathrm{Z}y_2)=\Sigma\mathrm{R}r=0$ hat. Hierzu ist es nothwendig, daß die Resultante aller Kräfte **Q** durch die Axe $\mathrm{CY}_2$ und die Resultante aller Kräfte **R** durch die Axe $\mathrm{CX}_2$ gehe. Außerdem sei der Körper von einer solchen Beschaffenheit, daß man im ersten Augenblicke der Zeit

$$\Sigma\mu m y_2 z_2=0 \text{ und } \Sigma\mu m x_2 z_2=0$$

hat. Diese letzteren beiden Bedingungen werden dann erfüllt, wenn der Schwerpunkt aller zur Ebene $\mathrm{X}_2\mathrm{Y}_2$ parallelen Querschnitte des Körpers in der Axe $\mathrm{CZ}_2$ liegen; denn alsdann hat man für ein jeden solchen Querschnitt, dessen Abstand vom Anfangspunkte **C** gleich $z'$ ist,

$$\Sigma\mu m x_2=0 \text{ und } \Sigma\mu m y_2=0;$$

mithin auch

$$z' \Sigma \mu m x_2 = \Sigma \mu m x_2 z' = 0 \text{ und } z' \Sigma \mu m y_2 = \Sigma \mu m y_2 z' = 0,$$

und demnach für den ganzen Körper

$$\Sigma \mu m x_2 z_2 = 0 \text{ und } \Sigma \mu m y_2 z_2 = 0.$$

Führt man diese Bedingungen in die obigen drei Gleichungen ein, und beachtet hinsichtlich der beiden letzteren derselben, daß man für den Anfangspunkt der Zeit $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\Sigma \mu m y_2 z_2 = 0$ und $\Sigma \mu m x_2 z_2 = 0$ hat, daß also die Konstanten **B** und **C** nothwendig gleich null sein müssen; so erhält man

$$\frac{\alpha}{g} \Sigma \mu m (x_2^2 + y_2^2) - \frac{\beta}{g} \Sigma \mu m y_2 z_2 - \frac{\gamma}{g} \Sigma \mu m x_2 z_2 = t \Sigma \mathrm{P} p + \mathrm{A},$$

$$\frac{\beta}{g} \Sigma \mu m (x_2^2 + y_2^2) - \frac{\gamma}{g} \Sigma \mu m x_2 y_2 - \frac{\alpha}{g} \Sigma \mu m y_2 z_2 = 0,$$

$$\frac{\gamma}{g} \Sigma \mu m (y_2^2 + z_2^2) - \frac{\alpha}{g} \Sigma \mu m x_2 z_2 - \frac{\beta}{g} \Sigma \mu m x_2 y_2 = 0.$$

Das Moment des bei den frühern Untersuchungen erwähnten mittleren Kräftepaares, welches man erhält, wenn man die Momente aller Bewegungsgrößen, von denen die Massentheilchen des Körpers belebt sind, zusammensetzt, ist nun hier

$$t \Sigma \mathrm{P} p + \mathrm{A},$$

und man sieht, daß die Intensität dieses Kräftepaares mit der Zeit wächst. Für die Kosinus der Neigungswinkel der Axe dieses mittleren Kräftepaares gegen die Axen $\mathbf{CX}_2$, $\mathbf{CY}_2$, $\mathbf{CZ}_2$ erhält man aber resp.

$$0, \; 0, \; 1,$$

woraus folgt, daß die Axe dieses Kräftepaares fortwährend mit der Koordinatenaxe $\mathbf{CZ}_2$ parallel bleiben wird. Da nun diese Koordinatenaxe im Anfangspunkte der Zeit, der Voraussetzung gemäß, auch die Umdrehungsaxe des Körpers ist; so folgt ferner, daß die auf den Körper angebrachten Kräfte kein Bestreben äußern, die anfängliche Umdrehungsaxe zu verrücken, und daß demnach der Körper fortwährend um die Axe $\mathbf{CZ}_2$ rotiren wird.

Da man hiernach zu jeder Zeit $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\Sigma \mu m y_2 z_2 = 0$ und $\Sigma \mu m x_2 z_2 = 0$ haben wird; so reduziren sich die obigen drei Gleichungen auf die erste, welche, wenn man den Körper von

14

gleichförmiger Dichtigkeit annimmt, und das Trägheitsmoment $\Sigma m(x_2{}^2 + y_2{}^2)$ desselben in Beziehung zu der Umdrehungsaxe $CZ_2$ mit $J$ bezeichnet,

$$\frac{\mu J}{g}\alpha = t\Sigma Pp + A$$

ergibt. Da endlich für $t=0$, $\alpha=\alpha_1$ sein muß; so folgt

$$A = \frac{\mu J}{g}\alpha_1,$$

und demnach

$$\frac{\mu J}{g}(\alpha - \alpha_1) = t\Sigma Pp.$$

Durch diese Gleichung ist die Umdrehungsbewegung des Körpers um die durch seinen Schwerpunkt gehende Axe $CZ_2$, welche fortwährend die Umdrehungsaxe bleibt, vollkommen bestimmt.

Für $\Sigma Pp = 0$ würde man $\alpha = \alpha_1$ erhalten, sodaß in diesem Falle die Umdrehung des Körpers um die Axe $CZ_2$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgte.

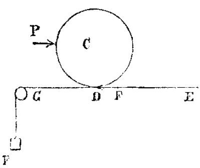
Aus den obigen allgemeinen Sätzen folgt, daß wenn auf einen Körper beliebige Kräfte angebracht sind

1. der Schwerpunkt desselben sich gerade so bewegen wird, als wenn die ganze Masse des Körpers in ihm konzentrirt und von Kräften getrieben würde, welche den gegebenen gleich und parallel sind,

2. daß sich der Körper, unabhängig von der Bewegung seines Schwerpunktes um diesen Punkt in derselben Weise drehen wird, wie er es thun würde, wenn der Schwerpunkt fest wäre, und die gegebenen Kräfte in derselben Weise auf ihn wirkten.

Dieses Resultat scheint auf den ersten Blick den obersten Prinzipien der Mechanik zu widersprechen, nach welchen die hervorgebrachten Wirkungen den erzeugenden Ursachen stets proportional sein müssen; denn wenn man sämmtliche an einem Körper angebrachte Kräfte parallel zu ihren Richtungen an den Schwerpunkt verlegte; so würden dieselben die fortschreitende Bewegung des Körpers ganz in der früherer Weise erzeugen, ohne auf die Umdrehung des Körpers um seinen Schwerpunkt eine Wirkung zu äußern. In dem Fall aber, wo diese Kräfte über den Körper in beliebiger Weise vertheilt sind, würden dieselben nicht allein die fortschreitende Bewegung ganz in derselben Art, sondern auch noch die Umdrehungsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt nach den aus den obigen Gleichungen sich ergebenden Gesetzen hervorbringen. Das Letztere ist offenbar eine weit stärkere Wirkung, welche man von Ein und denselben Kräften erhält, jenachdem man dieselben im Schwerpunkte oder in beliebigen anderen Angriffspunkten anbringt. So abnorm diese Thatsache zu sein scheint, so bestätigt sie bei genauerer Betrachtung nur die allgemeinen Gesetze über die Größe der Wirkung in Beziehung zu den obwaltenden Ursachen. Ein Beispiel wird dies am besten zeigen.

**C** sei ein Rad, welches durch die Wirkung einer in seinem Mittelpunkte angebrachten horizontalen Kraft **P** auf der horizontalen Ebene **DE** hinrollt, indem sich in dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte **D** fortwährend eine Reibung gleich **F** erzeugt. Substituirt man statt der festen Ebene **DE** eine im Mittelpunkte des Rades angebrachte, vertikal von unten nach oben wirkende Kraft gleich dem Gewichte $\mu$**M** des Rades und statt der Reibung **F** eine konstante horizontale Kraft, welche stets in entgegengesetzter Richtung der Bewegung durch den tiefsten Punkt **D** des Rades wirkt; so erhält man ein ganz freies System auf welches sich die im Vorstehenden entwickelten allgemeinen Resultate anwenden lassen. Es wird jedoch bemerkt, daß dieses neue System mit dem zuerst bezeichneten keineswegs identisch ist, weil bei dem letzteren die Umdrehungsbewegung des Rades um seinen Mittelpunkt von der fortschreitenden Bewegung desselben ganz unabhängig ist, was bei dem Falle eines physischen Rades, welches auf einer Ebene hinrollt, durchaus nicht stattfindet. Für das neue System geht aber aus dem Obigen hervor, daß sich der Mittelpunkt des Rades in einer horizontalen Linie und mit einer Geschwindigkeit bewegen wird, welche ein materieller Punkt von dem Gewichte $\mu$**M** durch die Wirkung einer konstanten Kraft gleich **P** — **F** empfangen würde. Gleichzeitig würde sich aber das Rad auch in Folge der Wirkung der Kraft **F** um seinen Mittelpunkt drehen.




Dächte man sich jetzt die horizortalen Kräfte **P** und **F** oder die einzige Kraft $\mathbf{P}-\mathbf{F}$ im Mittelpunkte des Rades angebracht; so würde die daraus resultirende fortschreitende Bewegung mit der früheren ganz identisch sein; eine Umdrehungsbewegung des Rades um seinen Mittelpunkt würde aber nicht erfolgen.

Um diese Erscheinung zu erklären, so denke man sich die Kraft **F** durch ein Gewicht **F** vertreten, welches an einem biegsamen Faden **DGF** aufgehängt ist, der sich um das gegebene Rad schlingt und bei **G** über eine Rolle geleitet ist. In dem zuletzt erwähnten Falle, wo die Kraft **F** in entgegengesetzter Richtung der Kraft **P** im Mittelpunkte des Rades angebracht wäre, würde der Angriffspunkt einer jeden dieser beiden Kräfte nach Verlauf irgend einer Zeit $t$ denselben Raum $x$ beschrieben haben, und die Arbeit, welche beide Kräfte bis dahin verrichtet hätten, würde $\mathbf{P}x-\mathbf{F}x=(\mathbf{P}-\mathbf{F})x$ sein. In dem ersteren Falle aber, wo die Kraft **P** am Umfange des Rades wirkt, sei $\omega$ der Winkel, um welchen sich das Rad am Ende der Zeit $t$ um seinen Mittelpunkt **C** in der Richtung **DP** gedrehet hat und $r$ der Halbmesser des Rades. Alsdann wird der Punkt **D** einen Bogen gleich $\omega r$ um den Mittelpunkt beschrieben haben, und das Gewicht **F** wird offenbar nur um $x-\omega r$ gehoben sein, sodaß die Arbeit, welche in entgegengesetzter Richtung der Wirkung von **F** von dieser Kraft geleistet ist, den Werth $\mathbf{F}(x-\omega x)$ hat. Die Summe der von den Kräften **P** und **F** geleisteten Arbeiten würde demnach in diesem Falle $\mathbf{P}x-\mathbf{F}(x-\omega r)=(\mathbf{P}-\mathbf{F})x+\mathbf{F}\omega r$ sein. Da dieser Betrag an Arbeit offenbar größer ist, als in dem anderen Falle, wo beide Kräfte im Mittelpunkte des Rades angebracht sind; so erklärt sich die verstärkte Wirkung dieser Kräfte in dem zuletzt erörterten Falle, wo neben der fortschreitenden Bewegung des Rades auch noch eine Umdrehungsbewegung desselben erfolgt, ohne Schwierigkeit.

# Dritter Abschnitt.

## Die Theorie der Maschinen.

§. 143. Die Theile einer Maschine können in Rücksicht auf ihre Bestimmung in drei Klassen getheilt werden, von denen die ersten die Einwirkung der bewegenden oder treibenden Kraft unmittelbar empfangen, die anderen die zu verrichtende Arbeit unmittelbar ausführen und die dritten zwischen jenen beiden die nöthige Verbindung herstellen oder die Arbeit von den treibenden nach den arbeitenden Theilen der Maschine leiten. Die erste Klasse nennt man Rezeptoren, die zweite Operatoren und die dritte Kommunikatoren der Arbeit.

### Fortpflanzung der Arbeit durch Maschinen.

§. 144. Die treibende Kraft zerfällt, wenn sie an der Maschine arbeitet, erstlich in die, welche die schädlichen Widerstände der Maschine oder solche überwindet, die durch Reibung und andere die Arbeit nutzlos verzehrende Ursachen erzeugt werden; zweitens in die, welche die Bewegung der verschiedenen Theile der Maschine so lange beschleunigt, als die Arbeit der treibenden Kraft diejenige überschreitet, welche auf die verschiedenen Widerstände der Bewegung verwendet wird (§. 129); drittens in die, welche die Nutzwiderstände oder solche überwindet, die der Bewegung der Maschine von den operirenden Theilen, durch welche die Nutzarbeit verrichtet werden soll, entgegengesetzt werden. Hiernach theilt sich denn auch die von der treibenden Kraft auf die Rezeptoren entwickelte Arbeit im Augenblicke der Fortpflanzung erstlich in die Arbeit, welche auf Reibungen und andere schädliche Widerstände der Bewegung nutzlos verwendet wird; zweitens in die Arbeit, welche in den verschiedenen sich bewegenden Elementen der Maschine angehäuft wird, und von denselben erforderlichen Falls reproduzirt werden kann; drittens in die Nutzarbeit der Operatoren, aus welcher der Nutzeffekt der Maschine unmittelbar hervorgeht.

§. 145. Die Anzahl der Einheiten der Nutzarbeit, welche irgend eine Maschine an ihren arbeitenden Theilen verrichtet, ist gerade um die Anzahl der Einheiten der Arbeit, welche auf die schädlichen Widerstände verwendet wird und um die Anzahl der Einheiten, welche in den sich bewegenden Theilen der Maschine während der Verrichtung der Arbeit angehäuft werden, kleiner, als die Anzahl der Einheiten, welche die Maschine von der treibenden Kraft direkt empfängt.

Denn wenn $\Sigma U_1$ die Anzahl der Arbeitseinheiten darstellt, welche die Maschine durch die Wirkung der treibenden Kraft unmittelbar empfängt, $\Sigma u$ die ganze Anzahl solcher Einheiten, welche zur Überwindung der schädlichen Widerstände verbraucht werden, $\Sigma U_2$ die ganze Nutzarbeit der Maschine (oder diejenige Arbeit, welche die Operatoren bei Hervorbringung des Nutzeffektes verrichten) und $\frac{1}{2}\Sigma\frac{w}{g}(v_2{}^2-v_1{}^2)$ die Hälfte der Summe aller Differenzen zwischen den lebenden Kräften der in Bewegung befindlichen Maschinentheile im Anfange und am Ende des in Rede stehenden Zeitraumes bezeichnet; so hat man nach dem Prinzipe der lebendigen Kräfte (Gleichung 108)

$$\Sigma U_1 = \Sigma U_2 + \Sigma u + \frac{1}{2g}\Sigma w(v_2{}^2 - v_1{}^2), \ldots. (112)$$

worin $v_1$ und $v_2$ die Geschwindigkeiten des Maschinenelementes vom Gewichte $w$ im Anfange und am Ende desjenigen Zeitraumes bezeichnen, während welches man die Arbeit betrachtet. Das letzte Glied der vorstehenden Gleichung stellt aber auch die in dem fraglichen Zeitraume in den beweglichen Maschinentheilen angehäufte Arbeit dar (§. 130), und man erkennt daher die Richtigkeit der obigen Behauptung.

§. 146. Wenn nach irgend einem Zeitraume immer dieselbe Geschwindigkeit der einzelnen Maschinentheile wiederkehrt, oder wenn die Bewegung periodisch ist; so ist die ganze von der treibenden Kraft mitgetheilte Arbeit während jenes Zeitraumes gleich der Summe der verrichteten Nutzarbeit und der auf die Ueberwindung der schädlichen Widerstände verwendeten Arbeit.

Denn da die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ im Anfange und am Ende des fraglichen Zeitraumes, für welchen die Arbeit bestimmt wird, einander gleich sein sollen; so hat man $\Sigma w (v_2^2 - v_1^2) = 0$, und daher

$$\Sigma U_1 = \Sigma U_2 + \Sigma u \ldots . (113)$$

Es leuchtet ein, daß auch das Umgekehrte dieses Satzes wahr ist.

§. 147. Wenn sich die treibende Kraft einer Maschine während der ganzen Bewegung mit dem Nutzwiderstande und den schädlichen Widerständen im Gleichgewichte befindet; so ist die Bewegung der Maschine gleichförmig.

Denn in diesem Falle hat man nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 127 und 128) $\Sigma U_1 = \Sigma U_2 + \Sigma u$ und daher wegen Gleichung (112)

$$\Sigma w (v_2^2 - v_1^2) = 0,$$

woraus folgt, daß unter den vorausgesetzen Umständen die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ irgend eines sich bewegenden Maschinenelementes im Anfange und am Ende eines jeden beliebigen Zeitraumes sich gleich seien, oder daß die Bewegung eines jeden solchen Elementes gleichförmig sei.

Das Umgekehrte dieses Satzes hat offenbar ebenfalls Gültigkeit.

## Der Model einer Maschine, welche mit einer gleichförmigen oder periodischen Bewegung arbeitet.

§. 148. Der Model einer Maschine in dem Sinne, in welchem dieser Ausdruck in dem vorligenden Werke gebraucht wird, ist die Beziehung zwischen derjenigen Arbeit, welche von der treibenden Kraft auf die Rezeptoren fortwährend entwickelt wird, und derjenigen, welche an den Operatoren als Nutzarbeit fortwährend zum Vorscheine kommt, nachdem die Bewegung der Maschine den Zustand der Gleichförmigkeit erreicht hat. Ist ein solcher Zustand der Gleichförmigkeit nicht möglich und die Bewegung der Maschine periodisch; so wird unter ihrem Model die Beziehung verstanden, welche zwischen der Arbeit der treibenden Kraft und der Nutzarbeit der Maschine während einer jeden Periode, an deren Endpunkten sich dieselben Geschwindigkeiten wiederholen, stattfindet.

Der Model irgend einer Maschine ist demnach die besondere Form, welche in Beziehung zu dieser Maschine die Gleichung (113) annimmt. Da derselbe von der Arbeit $\Sigma u$ abhängt, welche auf Reibungen und andere schädliche Widerstände der Bewegung verwendet werden muß; so ergibt er für eine jede Maschine den durch diese Ursachen herbeigeführten Verlust an Arbeit, und bildet demnach ein Mittel zur Vergleichung des Aufwandes an treibender Kraft, welcher bei verschiedenen Maschinen zur Hervorbringung gleicher Effekte erforderlich ist.

Während der besondere Model für eine jede verschieden konstruirte Maschine verschieden ist; so giebt es doch einen allgemeinen algebraischen Charakter oder eine allgemeine Formel, unter welche alle Model von Maschinen (in den meisten Fällen und mit gewissen Einschränkungen) gebracht werden können. Diese Formel ist die folgende,

$$U_1 = A . U_2 + B . S, \ldots . (114)$$

worin $U_1$ die von der treibenden Kraft bei der Beschreibung des Raumes $S$ hervorgebrachte Arbeit, $U_2$ die an den Operatoren verrichtete Nutzarbeit bezeichnet und $A$ und $B$ zwei Konstanten sind, welche von der eigenthümlichen Konstruktion der Maschine, das heißt von den Dimensionen und Verbindungen ihrer Theile, von deren Gewichten und den Reibungskoeffizienten der verschiedenen aufeinander gleitenden Flächen abhängen.

Es würde nicht schwer sein, die vorstehende Form des Models unter gewissen angenommenen Brdingungen allgemein zu entwickeln. Da jedoch der Model einer jeden besonderen Maschine im Laufe des Werkes unabhängig bestimmt und diskutirt werden muß; so wird es besser sein, den Leser auf die besonderen Model zu verweisen, welche auf den späteren Seiten entwickelt werden. Man wird bemerken, daß fast alle Model in der vorhin angenommenen Form enthalten sind, und daß sich die Modifikationen, welchen dieselbe unterworfen ist, bei der Diskussion eines jeden einzelnen Falles von selbst herausstellen.

§. 149. Es gibt indessen noch eine wichtige Ausnahme von dieser allgemeinen Form des Models, welche eintritt, sobald sich Maschinentheile ganz oder theilweise in Füssigkeiten bewegen. Jene Formel behält nur da Richtigkeit, wo die Widerstände, welche die Maschinentheile der Bewegung entgegensetzen, wie die der Reibung, den Druckkräften porportional, oder wo sie ganz konstant sind. Sind andere Widerstände verhanden, welche, wie die Widerstände der Flüssigkeiten, in denen Maschinentheile eingetaucht sind (z. B. wie der Widerstand der Luft) mit der Geschwindigkeit der Bewegung variiren; so müssen, wenn dieselben beträchtlich sind, noch andere Glieder zu dem Model addirt werden. Dieser Gegenstand wird bei dem Widerstande der Flüssigkeiten näher untersucht werden; es mag hier nur noch bemerkt sein, daß wenn sich die Maschine, welche dem Widerstande der Flüssigkeit während einer Zeit $T$ unterworfen ist, gleichförmig bewegt, und man voraussetzen kann, daß der Widerstand der Flüssigkeit wie das Quadrat der Geschwindigkeit $V$ varriirt, die zur Ueberwindung dieses Widerstandes erforderliche Arbeit, wie die Größe $V^2.S$ oder wie $V^3.T$, da $S=VT$ ist, variirt. Bezeichnen also $U_1$ und $U_2$ resp. die Arbeiten an dem Rezeptor und dem Operator während der Zeit $T$; so nimmt der Model in diesem Falle die Form

$$U_1 = A.U_2 + B.V.T + V^3 T \ldots. (115)$$

an.

## Der Model einer Maschine, welche mit einer beschleunigten oder verzögerten Bewegung arbeitet.

§. 150. In den beiden vorhergehenden Paragraphen ist angenommen, daß die Arbeit $U_1$ der treibenden Kraft gerade so groß sei, als es zur Überwindung der nützlichen und schädlichen Widerstände in immer gleichen oder periodischen Zeiträumen nothwendig ist, sodaß die ganze Arbeit auf diese Widerstände verwendet wird und gar keine in den sich bewegenden Maschinentheilen, wenigstens nicht für die ganze Dauer einer jeden vollen Periode, angehäuft werden kann. Nimmt man nun aber an, jene Gleichheit höre auf, und die Arbeit $U_1$ der treibenden Kraft überschreite das zur Überwindung der nützlichen und schädlichen Widerstände erforderliche Maaß; so wird sich die Bewegung der ganzen Maschine beschleunigen und in den beweglichen Theilen derselben wird eine gewisse Menge von Arbeit angehäuft werden. Um die in den früheren Fällen mit $U_1$ bezeichnete Arbeit, welche gerade zu der Überwindung aller Widerstände erforderlich ist, von der letzteren zu unterscheiden, welche einen Überschuß über die Widerstände enthält; so bezeichne man diese mit $U'$. Ferner sei $U_2$, wie früher, die Nutzarbeit, welche durch einen gegebenen Raum $S_2$ verrichtet wird, und welche immer als dieselbe angesehen werden kann, wie sich auch die Geschwindigkeit der Maschine während der Beschreibung des Raumes $S_2$ änderen möge; endlich sei $S_1$ der Raum, welchen der Angriffspunkt der treibenden Kraft in derselben Zeit beschreibt, in welcher der Angriffspunkt des Nutzwiderstandes den Raum $S_2$ durchläuft.

Da nun $U_1$ die Arbeit ist, welche am Rezeptor verrichtet werden muß, um gerade die Widerstände zu überwältigen, und $U'$ die Arbeit bezeichnet, welche auf den Rezeptor durch die treibende Kraft wirklich entwickelt wird; so ist $U' - U_1$ der Überschuß der treibenden Kraft über die, welche von den Widerständen aufgerieben wird, und daher gleich der in der Maschine während der betrachteten Zeit angehäuften Arbeit (§. 130) oder gleich der Hälfte der während dieser Zeit gewonnenen lebenden Kraft (§. 129). Bezeichnet man also mit $v_1$ die Geschwindigkeit irgend eines Elementes der Maschine, dessen Gewicht $w$ ist, in dem Augenblicke, wo die Arbeit $U'$ begann, und mit $v_2$ die Geschwindigkeit des Elementes, als jene Arbeit vollendet war; so hat man (nach §. 129)

$$U' - U_1 = \frac{1}{2g} \Sigma w (v_2^2 - v_1^2).$$

Nach Gleichung (114) war aber $U_1 = AU_2 + BS_1$; man erhält also

$$U' = A . U_2 + B . S_1 + \frac{1}{2g} \Sigma w (v_2^2 - v_1^2) \ldots . (116)$$

Wenn die Arbeit $U'$ der treibenden Kraft, statt die zur Überwindung der Widerstände erforderliche Arbeit $U_1$ zu überschreiten, kleiner gewesen wäre, als die letztere; so würde durch den Raum $S_1$ keine Arbeit angehäuft, sondern fortwährend dergleichen verloren sein, und man hätte (nach §. 129) die Beziehung

$$U_1 - U' = \frac{1}{2g} \Sigma w (v_1^2 - v_2^2),$$

sodaß auch in diesem Falle

$$U' - U_1 = \frac{1}{2g} \Sigma w (v_2^2 - v_1^2)$$

wäre.

Die Gleichung (116) findet demnach sowol auf den Fall einer verzögerten, wie auf den einer beschleunigten Bewegung der Maschine Anwendung und ist der allgemeine Ausdruck für den Model einer Maschine, welche mit einer veränderlichen Bewegung arbeitet. Während die Koeffizienten **A** und **B** des Models von der Reibung und anderen direkten Widerständen abhängen, ist das letzte Glied von allen diesen Widerständen ganz unabhängig, und wird einzig durch die Geschwindigkeiten der verschiedenen in Bewegung begriffenen Elemente der Maschine und durch deren Gewichte bestimmt.

### Geschwindigkeit einer Maschine, welche mit einer veränderlichen Bewegung arbeitet.

§. 151. Die Geschwindigkeiten der verschiedenen Theile oder Elemente irgend einer Maschine sind offenbar durch gewisse unveränderliche Beziehungen miteinander verbunden, welche man durch algebraische Formeln darstellen kann, sodaß diese Beziehungen, obgleich verschieden für verschiedene Maschinen, doch für Ein und dieselbe Maschine unter allen Zuständen der Bewegung sich gleich bleiben. Bei sehr vielen Maschinen wird diese Beziehung durch ein konstantes Verhältniß ausgedrückt. Bezeichnet man bei einer solchen Maschine das konstante Verhältniß der Geschwindigkeit $v_1$ irgend eines Elementes zu der Geschwindigkeit $V_1$ des Angriffspunktes der treibenden Kraft mit $\lambda$, sodaß man $v_1 = \lambda V_1$ hat; so wird für zwei beliebige andere Werthe $v_2$ und $V_2$ und $v_1$ von $V_1$ auch $v_2 = \lambda V_2$ sein. Durch Substitution dieser Werthe von $v_1$ und $v_2$ in die Gleichung (116) wird dieselbe

$$U' = A . U_2 + B . S_1 + \frac{1}{2g}(V_2{}^2 - V_1{}^2)\Sigma w \lambda^2, \ldots . (117)$$

worin $\Sigma w\lambda^2$ die Summe aller Produkte aus dem Gewichte eines jeden einzelnen Elementes in das Quadrat des Verhältnisses $\lambda$ seiner Geschwindigkeit zu der des Angriffspunktes der treibenden Kraft darstellt. Für Ein und dieselbe Maschine ist demnach dieser Koeffizient $\Sigma w\lambda^2$ eine konstante Größe; für verschiedene Maschinen ist er verschieden. Derselbe ist von den nützlichen und schädlichen Widerständen gänzlich unabhängig, und wird nur durch die Gewichte und Dimensionen der in Bewegung befindlichen Massen und durch die Art und Weise, in welcher dieselben miteinander verbunden sind, bestimmt.

Durch Transformation ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$V_2{}^2 = V_1{}^2 + 2g\left[\frac{U' - A . U_2 - B . S_1}{\Sigma w \lambda^2}\right], \ldots . (118)$$

eine Gleichung, durch welche die Geschwindigkeit $V_2$ des Angriffspunktes der treibenden Kraft gefunden werden kann, nachdem ein gegebener Betrag an Arbeit $U'$ von der treibenden Kraft verrichtet und ein gegebener Betrag an Nutzarbeit $U_2$ verzehrt worden ist, wobei natürlich auch die Geschwindigkeit $V_1$ jenes Angriffspunktes in dem Augenblicke des Beginnes der Arbeit $U'$ gegeben sein muß.

Es leuchtet ein, daß die Bewegung der Maschine um so gleichmäßiger sein wird, je größer die durch $\Sigma w\lambda^2$ dargestellte

Größe ist. Diese Größe, welche für Ein und dieselbe Maschine in allen Zuständen der Bewegung sich gleich bleibt und nur für verschiedene Maschinen andere Werthe annimmt, und welche die Eine Maschine von der anderen in Beziehung auf die Beständigkeit ihrer Bewegung, unabhängig von allen aus der Natur der nützlichen und schädlichen Widerstände entspringenden Betrachtungen, unterscheidet, kann schicklich der Koeffizient für die Gleichmäßigkeit der Bewegung genannt werden. Die Bewegung der Maschine wird desto gleichmäßiger sein, je größer dieser Koeffizient und je größer die beiden anderen Koeffizienten **A** und **B** (vorausgesetzt, daß sie positiv seien) gemacht werden.

## Bestimmung der Koeffizienten des Models einer Maschine.

§. 152. Man ermittele zuvörderst die Beziehung zwischen dem Drucke $P_1$ der treibenden Kraft und dem Nutzwiderstande $P_2$, welche in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes bei dem vorherrschenden Übergewichte von $P_1$ stattfindet. Diese Beziehung wird sich in allen Fällen, wo die von $P_2$ unabhängigen konstanten Widerstände der Bewegung im Vergleich zu $P_2$ klein sind, durch Formeln darstellen lassen, von denen Folgendes die allgemeine Form ist:

$$P_1 = P_2 \Phi_1 + \Phi_2 \dots . (119)$$

Hierin bezeichnen $\Phi_1$ und $\Phi_2$ gewisse Funktionen der Reibung und der anderen schädlichen Widerstände in der Maschine, von welchen die letztere verschwindet, wenn die Widerstände verschwinden, die erstere aber einen reelen Werth behält. Stellen also $\Phi_1(0)$ und $\Phi_2(0)$ die Werthe jener Funktionen für den Fall dar, daß die schädlichen Widerstände verschwinden; so hat man $\Phi_2(0) = 0$ und $\Phi_1(0) =$ einer bestimmten endlichen Größe, deren Betrag von der Konstruktion der Maschine abhängt. Ist ebenso $P_1(0)$ der Werth der Kraft $P_1$, welche mit der gegebenen Kraft $P_2$ im Gleichgewichte sein würde, wenn keine schädlichen Widerstände vorhanden wären; so folgt aus der letzten Gleichung

$$P_1(0) = P_2 . \Phi_1(0).$$

Nimmt man nun an, die Bewegung der Maschine sei gleichförmig, sodaß $P_1$ und $P_2$ fortwährend an derselben im Gleichgewichte sind, bezeichnet alsdann mit $S_1$ irgend einen vom Angriffspunkte der Kraft $P_1$ beschriebenen Raum, oder die Projektion dieses Raumes auf die Richtung von $P_1$ und mit $S_2$ den entsprechenden Raum oder dessen Projektion, welcher von dem Angriffspunkte der Kraft $P_2$ beschrieben wird; so hat man nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 127, 128)

$$P_1 (0) S_1 = P_2 . S_2,$$

und wenn man diese Gleichung durch die vorstehende dividirt

$$S_1 = \frac{S_2}{\Phi_1 (0)} \ldots . (120)$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit der Gleichung (119); so ergibt sich

$$P_1 . S_1 = P_2 . S_2 . \left[\frac{\Phi_1}{\Phi_1 (0)}\right] + S_2 . \left[\frac{\Phi_2}{\Phi_1 (0)}\right] = P_2 . S_2 . \left[\frac{\Phi_1}{\Phi_1 (0)}\right] + S_1 . \Phi_2,$$

das ist

$$U_1 = \left[\frac{\Phi_1}{\Phi_1 (0)}\right] . U_2 + \Phi_2 . S_1 \ldots . (121)$$

Durch die letztere Gleichung ist der Model der Maschine gegeben, sodaß die Konstante A aus Gleichung (114) durch $\frac{\Phi_1}{\Phi_1 (0)}$ und die Konstante B durch $\Phi_2$ dargestellt wird.

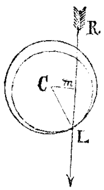
Die vorstehende Gleichung ist allgemein für jeden Werth von $S_1$ abgeleitet, wofern nur die Kräfte $P_1$ und $P_2$ konstant sind und die Bedingung für das Gleichgewicht in dem Gränzzustande sich durch eine Gleichung von der Form (119) darstellen läßt; sie gilt daher auch noch für einen unendlich kleinen Werth von $S_1$, sobald die auf die Maschine wirkenden Kräfte veränderlich sind.

Endlich sieht man, daß unter dieser Voraussetzung der Model für die veränderliche Bewegung immer durch die Gleichung (116) dargestellt ist, worin die Koeffizienten A und B die vorhin bemerkten Werthe haben.

## Allgemeine Bedingung für den Gränzzustand des Gleichgewichtes eines Körpers, auf welchen mehrere Kräfte in derselben Ebene wirken, und welcher um eine zylindrische Axe drehbar ist.

§. 153. Wenn mehrere Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$, welche in derselben Ebene auf einen um eine zylindrische Axe drehbaren Körper wirken, sich in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes befinden; so ist die Richtung des Widerstandes der Axe gegen den Halbmesser in dem Durchschnittspunkte dieser Richtung mit dem Umfange der Axe unter einem Winkel geneigt, welcher dem Reibungswinkel gleich kommt.

Denn da die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ eben im Begriffe sind, die Axe des Körpers auf ihren Lagern zu drehen; so würde auch ihre Resultante **R**, wenn dieselbe für alle übrigen Kräfte an die Stelle gesetzt würde, eben im Begriffe sein, die Axe auf ihren Lagern zu drehen. Hieraus folgt, daß die Richtung dieser Resultante **R** nicht durch den Mittelpunkt **C** der Axe gehen kann: denn thäte sie dies; so würde die Axe in der Richtung eines Halbmessers oder perpendikular gegen ihre Lager gedrückt und könnte von jener Resultante durchaus nicht gedrehet werden und mithin auch nicht in dem vorausgesetzten Momente der eintretenden Bewegung sein. Die Richtung von **R** muß also seitwärts von **C** liegen, sodaß die Axe in einer Richtung **RL** gedrückt wird, welche sich gegen die Normale oder den Halbmesser **CL** (in dem Punkte **L**, wo die Richtung von **R** den Umfang der Axe trifft) unter einem Winkel **RLC** neigt. Da nun die Kraft **R**, welche die Axe in **L** gegen ihre Lager preßt, auf dem Punkte ist, ein Gleiten der Axe auf ihren Lagern herbeizuführen; so geht aus §. 141 hervor, daß die Neigung **RLC** der Richtung von **R** gegen die Normale **CL** gleich dem Reibungswinkel für die Axe und ihre Lager sein muß. Nun ist aber der Widerstand der Axe offenbar der Resultante **R** aller auf den Körper angebrachten Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ gleich und entgegengesetzt, und es folgt demnach, daß auch die Richtung **LR** dieses Widerstandes unter einem Winkel gleich dem Reibungswinkel gegen **CL** geneigt ist.

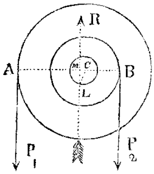


## Das Rad an der Welle.

§. 154. Die auf das Rad an der Welle vermittelst vertikaler Seile angebrachten Kräfte $P_1$ und $P_2$ befinden sich in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes bei vorherrschendem Übergewichte von $P_1$; es soll eine Beziehung zwischen $P_1$ und $P_2$ angegeben werden.

Es sei

$P_1$ die am Umfange des Rades wirkende Kraft,
$P_2$ die am Umfange der Welle wirkende Kraft,
$W$ das ganze Gewicht des Rades und der Welle,
$a_1$ der Halbmesser $CA$ des Rades,
$a_2$ der Halbmesser $CB$ der Welle,
$\varrho$ der Halbmesser $CL$ der Zapfen der Welle,
$\varphi$ der Reibungswinkel für die Zapfen auf den Lagern,
$D$ und $E$ die Konstanten für die Steifigkeit des Seiles $P_2B$ aus der Formel des §s. 142.




Nimmt man zur Vereinfachung der Rechnung an, daß die vertikalen Kräfte $P_1$, $P_2$ und $W$ in Einer Ebene liegen, welche auf der Richtung der Axe der Welle in deren Mitte perpendikular steht, sodaß ein jeder der beiden Zapfen einen gleichen Druck zu ertragen hat und man daher statt dieser beiden Zapfen nur einen einzigen zu betrachten braucht; so leuchtet ein, daß die Richtung $LR$ des Widerstandes des Zapfenlagers an der nach $P_1$ zugekehrten Seite des Mittelpunktes $C$ liegt, und gegen die Normale oder den Halbmesser $CL$ in dem Punkte $L$, wo sie das Lager und den Zapfen durchschneidet, unter einem Winkel $CLR$ geneigt ist, welcher gleich dem Reibungswinkel $\varphi$ ist. Bezeichnet man diesen Widerstand mit $R$; so sind die Kräfte $P_1$, $P_2$ das Gewicht $W$ und der Widerstand $R$ Kräfte, welche einander das Gleichgewicht halten müssen. Nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente (§. 7) hat man also, wenn man zuvörderst die Steifigkeit des Seiles bei $B$ vernachlässigt und beachtet, daß man die Richtung des Gewichtes $W$ als durch $C$ gehend annehmen kann,

$$P_1 . \overline{CA} = P_2 . \overline{CB} + R . \overline{Cm}.$$

Hätte in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes $P_2$ statt $P_1$ vorgeherrscht; so würde R an die andere Seite von C gefallen sein und man hätte die Beziehung $P_1 . \overline{CA} = P_2 . \overline{CB} - R . \overline{Cm}$, sodaß allgemein $P_1 . \overline{CA} = P_2 . \overline{CB} \pm R . \overline{Cm}$ die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte $P_1, P_2, W, R$ darstellt, worin das Zeichen + oder — zu nehmen ist, jenachdem sich $P_1$ in der oberen oder unteren Gränzlage befindet.

Nun ist $CA = a_1$, $CB = a_2$, $Cm = \overline{CL} . \sin CLR = \varrho \sin\varphi$ und $R = P_1 + P_2 \pm W$, worin das Zeichen + oder — zu wählen ist, jenachdem das Gewicht des Rades und der Welle mit den Kräften $P_1$ und $P_2$ in derselben oder in entgegengesetzter Richtung wirkt, d. h. jenachdem die Kräfte $P_1$ und $P_2$ vertikal nach unten (wie in der Figur) oder vertikal nach oben wirken. Hiernach wird die obige Gleichung für das Vorherrschen der Kraft $P_1$

$$P_1 a_1 = P_2 a_2 + (P_1 + P_2 \pm W) \varrho \sin\varphi \text{ oder}$$
$$P_1 (a_1 - \varrho \sin\varphi) = P_2 (a_2 + \varrho \sin\varphi) \pm W \varrho \sin\varphi.$$

Nun ist der Effekt der Steifigkeit des Seiles $BP_2$ nach §. 142 derselbe, als wenn die Spannung dieses Seiles von $P_2$ auf $\left(P_2 + \frac{D + E . P_2}{a_2}\right)$ vermehrt würde. Setzt man daher diesen Werth statt $P_2$ in die vorstehende Gleichung; so kommt

$$P_1 (a_1 - \varrho \sin\varphi) = \left(P_2 + \frac{D + E . P_2}{a_2}\right)(a_2 + \varrho \sin\varphi) \pm W \varrho \sin\varphi,$$

oder wenn man gehörig reduzirt,

$$P_1 = P_2 \left(1 + \frac{E}{a_2}\right) \frac{a_2 + \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi} + \frac{D + \left(\frac{D}{a_2} \pm W\right) \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi}, \dots (122)$$

welches die gesuchte Beziehung zwischen $P_1$ und $P_2$ in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes ist.

$\frac{\varrho}{a_1} \sin\varphi$ und $\frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi$ sind in allen Fällen ungemein klein; man kann daher ohne merklichen Einfluß auf das Resultat alle Glieder vernachlässigen, welche höhere Potenzen von diesen Größen, als die erste, enthalten. Führt man unter Berücksichtigung dieses Umstandes die in der vorstehenden Gleichung angedeuteten Divisionen aus; so reduzirt sich dieselbe auf

$$P_1 = P_2\left(\frac{a_2+E}{a_1}\right)\left[1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)\varrho \sin\varphi\right]+\frac{D}{a_1}\left[1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\pm\frac{W}{D}\right)\varrho\sin\varphi\right]$$

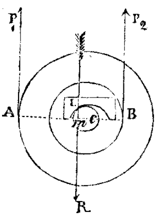
*) .... (123)

---

*) Die obige Gleichung $P_1\, a_1 = P_2\, a_2 + R\, \varrho \sin \varphi$,

worin $P_2$ für $P_2 + \frac{D + E.P_2}{a_2}$ steht, hat immer Gültigkeit, wofern nur $R$ die absolute Größe des Widerstandes des Zapfenlagers oder die absolute Größe der Resultante von $P_1$, $P_2$ und $W$ darstellt. Wirken nun die beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$ vertikal nach oben; so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn $P_1 + P_2 > W$; so ist die Resultante von $P_1$, $P_2$ und $W$, $R = P_1 + P_2 - W$. Diese Voraussetzung führt die vorstehenden Formeln (122), (123) und alle nachstehenden Formeln, welche daraus abgeleitet sind, mit sich und entspricht dem Falle, wo die Kräfte $P_1$ und $P_2$ stark genug sind, um die ganze Maschine zu heben und ihre Axe von unten gegen die Lager zu pressen. Dieselbe gehört namentlich dem gewöhnlichen Falle an, wo das Rad an der Welle durch Substitution von $a_1 = a_2$ zu einer Rolle wird (s. §. 158 ff.), weil das Gewicht der Rollen im Vergleich zu den Spannungen des Seiles in den meisten Fällen sehr gering ist.



Die obige Bedingung $P_1 + P_2 > W$ oder $P_1 + P_2 - W > o$, oder eigentlich

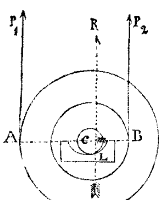
$$P_1 + P_2 + \frac{D + E.P_2}{a_2} - W > o,$$

welche stattfinden muß, wenn die Gleichungen (122) und (123) mit den daraus gezogenen Folgerungen Richtigkeit haben sollen, entwickelt sich, wenn man für $P_1$ den Werth aus Gleichung (122) substituirt, in die folgende:

$$\left(P_2 + \frac{D + E.P_2}{a_2}\right)\frac{a_1 + a_2}{a_1} > W \text{ oder}$$

$$\left(P_2 + \frac{D + E.P_2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) > W.$$

2) ist der Fall zu unterscheiden, wo $W > P_1 + P_2$. Alsdann ist die Resultante von $P_1$, $P_2$ und $W$ nicht $R = P_1 + P_2 - W$, sondern $R = W - P_1 - P_2$, und man hat den Fall, wo die Kräfte $P_1$ und $P_2$ nicht stark genug sind, um die Maschine zu heben, und wo dieselbe vermöge ihres größeren Gewichtes mit der Axe von oben gegen die Lager gedrückt wird. Unter dieser Voraussetzung wird aber die Fundamentalgleichung



$$P_1\, a_1 = P_2\, a_2 + (W - P_1 - P_2)\,\varrho \sin \varphi \text{ oder}$$
$$P_1\, a_1 = P_2\, a_2 - (P_1 + P_2 - W)\,\varrho \sin \varphi$$

Um nun für diesen Fall die Gleichungen (122), (123) und die daraus folgenden zu erhalten, so bemerkt man, daß man in allen Gleichungen, welche unter der ersteren Voraussetzung entwickelt sind, nur $-\varrho\sin\varphi$ statt

## §. 155. Der Model für die gleichförmige Bewegung des Rades an der Welle.

Aus der Gleichung (122) erhellet, daß für den Fall des Rades an der Welle die Gleichung (119) stattfindet, wenn man

---

$+\varrho \sin \varphi$ zu setzen braucht, um dieselben für die jetzige Bedingung umzuformen. Hierdurch würde sich für die Bedingung $W > P_1 + P_2$ aus den Gleichungen (122) und (123)

$$P_1 = P_2\left(1 + \frac{E}{a_2}\right)\frac{a_2 - \varrho \sin \varphi}{a_1 + \varrho \sin \varphi} + \frac{D - \left(\frac{D}{a_2} - W\right)\varrho \sin \varphi}{a_1 + \varrho \sin \varphi} \quad \ldots (122\,a)$$

$$P_1 = P_2\left(\frac{a_2 + E}{a_1}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\varrho \sin \varphi\right] + \frac{D}{a_1}\left[1 - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{W}{D}\right)\varrho \sin \varphi\right] \quad \ldots (123\,a)$$

ergeben. Substituirt man in die Bedingung $W > P_1 + P_2$ oder $W - P_1 - P_2 > o$, oder eigentlich

$$W - P_1 - \left(P_2 + \frac{D + E.P_2}{a_2}\right) > o$$

für $P_1$ seinen Werth aus der vorstehenden Gleichung (122 a); so reduzirt sich diese Bedingung auf

$$W > \left(P_2 + \frac{D + E\,P_2}{a_2}\right)\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1}\right) \text{ oder auf}$$

$$W > \left(P_2 + \frac{D + E\,P_2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right).$$

Jenachdem also $W <$ oder $> \left(P_2 + \frac{D + E\,P_2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)$ ist, tritt der erste oder zweite der eben erwähnten beiden Fälle ein, und die Axe der Maschine wird entweder von unten oder von oben gegen die Lager gepreßt. Wäre gerade $W = \left(P_2 + \frac{D + EP_2}{a_2}\right)\frac{a_1 + a_2}{a_1}$; so ergibt die Gleichung

$$P_1\, a_1 = P_2\, a_2 \pm (P_1 + P_2 - W)\,\varrho \sin \varphi, \text{ welche eigentlich}$$

$$P_1\, a_1 = \left[P_2 + \frac{D + E\,P_2}{a_2}\right]a_2 \pm \left[P_1 + P_2 + \frac{D + E\,P_2}{a_2} - W\right]\varrho \sin \varphi$$

ist,

$$P_1\, a_1 = \left[P_2 + \frac{D + E\,P_2}{a_2}\right]a_2.$$

Da unter dieser Voraussetzung die Axe in den Lagern schweben wird; so verschwindet der Widerstand der Reibung gänzlich.

$$\Phi_1 = \left(1 + \frac{E}{a_2}\right) \frac{a_2 + \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi} \text{ und}$$

$$\Phi_2 = \frac{D + \left(\frac{D}{a_2} \pm W\right) \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi}$$

setzt.

Beachtet man nun, daß $\Phi_1(0)$ den Werth von $\Phi_1$ darstellt, sobald die schädlichen Widerstände verschwinden, das heißt hier, sobald $\varphi = 0$ und $E = 0$ werden; so hat man

$$\Phi_1(0) = \frac{a_2}{a_1}$$

und daher

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_1(0)} = \left(1 + \frac{E}{a_2}\right) \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2 + \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi} = \left(1 + \frac{E}{a_2}\right) \frac{1 + \frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi}{1 + \frac{\varrho}{a_1} \sin\varphi}.$$

Hiernach wird die Gleichung (121) oder der Model für das Rad an der Welle,

$$U_1 = U_2 \left(1 + \frac{E}{a_2}\right) \left\{ \frac{1 + \frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi}{1 + \frac{\varrho}{a_1} \sin\varphi} \right\} + S \left\{ \frac{D + \left(\frac{D}{a_2} \pm W\right) \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi} \right\} \dots (124)$$

Vernachlässigt man alle Glieder, welche höhere Dimensionen, als die erste, von den Größen $\frac{\varrho}{a_1} \sin\varphi$, $\frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi$ und $\frac{E}{a_1}$ enthalten; so ergibt sich

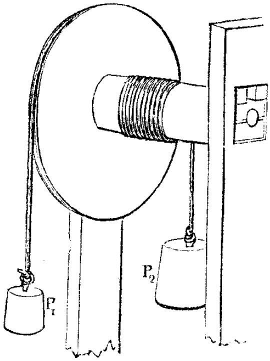
$$U_1 = U_2 \left[1 + \frac{E}{a_2} + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \varrho \sin\varphi\right] + \frac{S_1 D}{a_1} \left[1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \pm \frac{W}{D}\right) \varrho \sin\varphi\right]$$
$$\dots (125)$$

## §. 156. Der Model für die veränderliche Bewegung des Rades an der Welle.

Wenn die Beziehung zwischen $P_1$ und $P_2$ nicht diejenige ist, welche Einem der beiden Gränzzustände des Gleichgewichtes entspricht; so wird die Bewegung fortwährend beschleunigt oder verzögert werden, und die Arbeit wird sich entweder fortwährend in den in Bewegung begriffenen Maschinentheilen anhäufen, oder es wird sich die bereits angehäufte Arbeit fortwährend erschöpfen, bis dieselbe ganz verzehrt und die Maschine zur Ruhe gebracht ist. Der allgemeine Ausdruck für den Model in diesem Zustande der veränderlichen Bewegung ist nach Gleichung (116)

$$U' = AU_2 + BS_1 + \frac{1}{2g} \Sigma w (v_2{}^2 - v_1{}^2).$$

Bezeichnen nun in dem vorliegenden Falle des Rades an der Welle $V_1$ und $V_2$ die Geschwindigkeiten des Angriffspunktes von $P_1$ im Anfange und am Ende des Raumes $S_1$ und $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades und der Welle, und nimmt man an, daß die Kräfte $P_1$ und $P_2$ durch Gewichte vertreten werden, welche an den beiden Seilen aufgehängt sind; so hat man, da die Geschwindigkeit des Angriffspunktes von $P_2$ durch $\frac{a_2 V_1}{a_1}$ dargestellt ist,




$$\Sigma w v_1{}^2 = P_1 V_1{}^2 + P_2 \left(\frac{a_2 V_1}{a_1}\right)^2 + \alpha^2 \mu_1 J_1 + \alpha^2 \mu_2 J_2,$$

worin $J_1$ das Trägheitsmoment des Rades, $J_2$ das der Welle, $\mu_1$ das Gewicht der Volumeneinheit des Rades und $\mu_2$ das Gewicht der Volumeneinheit der Welle bezeichnet (§. 75). $\Sigma w v_1{}^2$ stellt nämlich die Summe aller Produkte aus den Gewichten der einzelnen sich bewegenden Elemente in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten dar, und nach §. 75 ist $\alpha^2 \mu_1 J_1$ diese Summe in Beziehung zu dem Rade und $\alpha^2 \mu_2 J_2$ dieselbe in Beziehung zu der Welle. Nun hat man aber auch $V_1 = \alpha a_1$, also $\alpha = \frac{V_1}{a_1}$ und daher

$$\Sigma w v_1{}^2 = P_1 V_1{}^2 + \frac{P_2 a_2{}^2}{a_1{}^2} V_1{}^2 + \frac{\mu_1 J_1}{a_1{}^2} V_1{}^2 + \frac{\mu_2 J_2}{a_1{}^2} V_1{}^2$$

$$= V_1{}^2 \left(\frac{P_1 a_1{}^2 + P_2 a_2{}^2 + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2}{a_1{}^2}\right).$$

Ebenso hat man

$$\Sigma w v_2^2 = V_2^2\left(\frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2 + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2}{a_1^2}\right);$$

folglich

$$\Sigma w(v_2^2 - v_1^2) = (V_2^2 - V_1^2)\left(\frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2 + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2}{a_1^2}\right).$$

Substituirt man diesen Werth in die allgemeine Gleichung (116); so erhält man für den Model der Maschine in dem Zustande der veränderlichen Bewegung

$$U' = AU_2 + BS_1 + \frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2)\left(\frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2 + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2}{a_1^2}\right), \ldots . (126)$$

worin **A** und **B** die bereits bestimmten Koeffizienten sind (Gleichung 124 oder 125) und $\frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2 + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2}{a_1^2}$ den Koeffizienten $\Sigma w \lambda^2$ für die Gleichmäßigkeit der Bewegung (§. 151, Gleichung 117) darstellt.

Wenn sowol das Rad, wie die Welle einen vollen Zylinder bildet und die Breite des Rades $= b_1$ und die Länge der Welle $= b_2$ gesetzt wird; so hat man nach §. 85

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\pi b_1 a_1^4 \text{ und } J_2 = \tfrac{1}{2}\pi b_2 a_2^4.$$

Bezeichnen ferner $W_1$ und $W_2$ resp. die Gewichte des Rades und der Welle; so ist

$$W_1 = \pi a_1^2 b_1 \mu_1 \text{ und } W_2 = \pi a_2^2 b_2 \mu_2$$

und daher

$$\mu_1 J_1 = \tfrac{1}{2} W_1 a_1^2 \text{ und } \mu_2 J_2 = \tfrac{1}{2} W_2 a_2^2.$$

Hiernach kann der Koeffizient für die Gleichmäßigkeit der Bewegung durch

$$\Sigma w \lambda^2 = \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2 + \frac{1}{2} W_1 a_1^2 + \frac{1}{2} W_2 a_2^2}{a_1^2}$$

oder durch

$$\Sigma w \lambda^2 = P_1 + \tfrac{1}{2} W_1 + (P_2 + \tfrac{1}{2} W_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \ldots . (127)$$

dargestellt werden.

§. 157. **Bestimmung der durch einen gegebenen Raum erlangten Geschwindigkeit, wenn die Beziehung zwi-**

schen den Gewichten $P_1$ und $P_2$ nicht die dem Gränzzustande des Gleichgewichtes entsprechende ist.

Der Raum, durch welchen sich das Gewicht $P_1$ bewegt, während es von der Geschwindigkeit $V_1$ zu $V_2$ übergeht, sei $S_1$. Bemerkt man nun, daß $U' = P_1 S_1$ und $U_2 = P_2 S_2 = P_2 \frac{S_1 a_2}{a_1}$ ist, substituirt diese Werthe in die Gleichung (126) und lös't dieselbe für $V_2$ auf; so ergiebt sich statt der allgemeinen Gleichung (118)

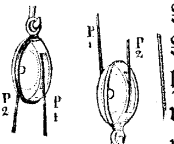
$$V_2{}^2 = V_1{}^2 + 2 g a_1 S_1 \left( \frac{P_1 a_1 - A . P_2 a_2 - B a_1}{P_1 a_1{}^2 + P_2 a_2{}^2 + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2} \right), \ldots (128)$$

oder wenn man dieselben Substitutionen, wie bei Gleichung (127) vornimmt und das Verhältniß $\frac{a_2}{a_1}$ mit $m$ bezeichnet,

$$V_2{}^2 = V_1{}^2 + 2 g S_1 \left[ \frac{P_1 - A . P_2 m - B}{(P_1 + \frac{1}{2} W_1) + (P_2 + \frac{1}{2} W_2) m^2} \right].$$

## Die Rolle.

§. 158. Wenn der Halbmesser der Welle gleich dem des Rades angenommen wird; so entsteht aus dem Rade an der Welle eine **Rolle**. Setzt man daher in Gleichung (122) $a_1 = a_2 = a$; so erhält man für die Beziehung zwischen den Kräften $P_1$ und $P_2$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes bei einer Rolle, wenn die Seile parallel sind,



$$P_1 = P_2 \left(1 + \frac{E}{a}\right) \left\{ \frac{1 + \frac{\varrho}{a} \sin\varphi}{1 - \frac{\varrho}{a} \sin\varphi} \right\} + \frac{D + \left(\frac{D}{a} \pm W\right) \varrho \sin\varphi}{a - \varrho \sin\varphi}, \ldots (129)$$

und die Gleichung (124) ergibt für den Model

$$U_1 = U_2 \left(1 + \frac{E}{a}\right) \left\{ \frac{1 + \frac{\varrho}{a} \sin\varphi}{1 - \frac{\varrho}{a} \sin\varphi} \right\} + S_1 \left\{ \frac{D + \left(\frac{D}{a} \pm W\right) \varrho \sin\varphi}{a - \varrho \sin\varphi} \right\}, \ldots (130)$$

worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die Kräfte

$P_1$ und $P_1$ vertikal nach unten wirken, wie in der ersten der seitstehenden Figuren, oder vertikal nach oben, wie in der zweiten. Vernachlässigt man die Dimensionen von $\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$ und $\frac{E}{a}$, welche höher sind, als die erste; so ergibt sich durch die Gleichungen (123) und (125)

$$P_1 = P_2\left[1+\frac{E}{a}+\frac{2\varrho\sin\varphi}{a}\right]+\frac{D}{a}\left[1+\left(\frac{2}{a}\pm\frac{W}{D}\right)\varrho\sin\varphi\right] \ldots (131)$$

$$U_1 = U_2\left[1+\frac{E}{a}+\frac{2\varrho\sin\varphi}{a}\right]+\frac{S_1 D}{a}\left[1+\left(\frac{2}{a}\pm\frac{W}{D}\right)\varrho\sin\varphi\right] \ldots (132)$$

Ebenso wird der Model für die veränderliche Bewegung, wenn man in Gleichung (126) $a_1 = a_2$ und $J_2 = o$ setzt,

$$U' = AU_2 + BS_1 + \frac{1}{2g}(V_2{}^2 - V_1{}^2)(P_1 + P_2 + \tfrac{1}{2}W), \ldots (133)$$

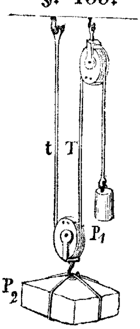
und die Geschwindigkeit bei der veränderlichen Bewegung (Gleichung 128) ist durch die Gleichung

$$V_2{}^2 = V_1{}^2 + 2g S_1\left[\frac{P_1 - A.P_2 - B}{P_1 + P_2 + \frac{1}{2}W}\right] \ldots (134)$$

bestimmt, worin A und B die Werthe der Koeffizienten aus dem Model für die gleichförmige Bewegung (Gleichung 125) haben.

## System aus Einer festen und Einer beweglichen Rolle.

§. 159. Im vorstehenden Paragraphe (Gleichung 131) ist gezeigt worden, daß die Beziehung zwischen den Spannungen $P_1$ und $P_2$ der beiden parallelen Theile eines über eine Rolle gehenden Seiles im Gränzzustande des Gleichgewichtes bei dem vorherrschenden Übergewichte von $P_1$ durch einen Ausdruck von der Form $P_1 = aP_2 + b$ dargestellt werden kann, worin $a$ und $b$ Konstanten bezeichnen, welche von den Dimensionen der Rolle und ihrer Axe, von ihrem Gewichte und von der Steifigkeit des Seiles abhängen. In diesem Ausdrucke hat $b$ einen verschiedenen Werth, jenachdem die Spannung des über



eine Rolle gehenden Seiles mit dem Gewichte dieser Rolle in einerlei Richtung (wie bei der ersten Rolle des seitwärts dargestellten Systemes) oder in entgegengesetzter Richtung wirkt (wie bei der zweiten Rolle); man bezeichne diese beiden Werthe von $b$ mit $b$ und $b_1$. Nun leuchtet ein, daß ehe das Gewicht $\mathbf{P}_2$ vermittelst eines in der Figur dargestellten Systemes aus Einer festen und Einer beweglichen Rolle gehoben werden kann, der Zustand des Gleichgewichtes für eine jede Rolle ein Gränzzustand sein muß, wie in dem vorhergehenden Paragraphe angegeben ist, da beide Rollen im Begriffe sein müssen, sich um ihre Axen zu drehen, ehe die Hebung des Gewichtes $\mathbf{P}_2$ erfolgen kann. Sind daher $\mathbf{T}$ und $t$ die Spannungen der beiden Theile des Seiles, welches über die bewegliche Rolle geht; so hat man

$$\mathbf{P}_1 = a\mathbf{T} + b \text{ und } \mathbf{T} = at + b_1.$$

Nun tragen die Spannungen $\mathbf{T}$ und $t$ zusammen das Gewicht $\mathbf{P}_2$ und auch das Gewicht der beweglichen Rolle, welche der festen Rolle gleich angenommen wird; man hat demnach

$$\mathbf{T} + t = \mathbf{P}_2 + \mathbf{W}.$$

Um aus diesen drei Gleichungen $\mathbf{T}$ und $t$ zu eliminiren, addire man auf beiden Seiten der zwiten dieser Gleichungen $a\mathbf{T}$ und multiplizire mit $a$; hierdurch ergibt sich

$$a(1+a)\mathbf{T} = a^2(\mathbf{T}+t) + ab_1 = a^2(\mathbf{P}_2 + \mathbf{W}) + ab_1.$$

Multiplizirt man die erste Gleichung mit $(1+a)$; so kommt

$$(1+a)\mathbf{P}_1 = a(1+a)\mathbf{T} + b(1+a) = a^2(\mathbf{P}_2 + \mathbf{W}) + ab_1 + b(1+a),$$

und hieraus folgt

$$\mathbf{P}_1 = \left(\frac{a^2}{1+a}\right)\mathbf{P}_2 + \frac{a^2\mathbf{W} + b(1+a) + ab_1}{1+a} \quad \dots . (135)$$

Wäre nun weder Friktion noch Steifigkeit vorhanden; so würde $a$ offenbar $=1$ werden (siehe Gleichung 131) und demnach würde $\frac{a^2}{1+a} = \frac{1}{2}$ werden. Die Koeffizienten des Models (§. 152) sind daher

$$\mathbf{A} = 2\left(\frac{a^2}{1+a}\right) \text{ und } \mathbf{B} = \frac{a^2\mathbf{W} + b(1+a) + ab_1}{1+a},$$

und hieraus folgt für den Model der gleichförmigen Bewegung der beweglichen Rolle

$$U_1 = 2\left(\frac{a^2}{1+a}\right)U_2 + \left(\frac{a^2 W + b(1+a) + ab_1}{1+a}\right)S_1 \ldots . (136)$$

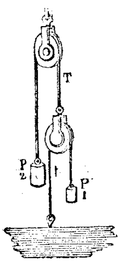
(Dieser Model kann auch aus Gleichung (135) direkt abgeleitet werden, wenn man mit $S_1$ und $S_2$ die Wege bezeichnet, welche $P_1$ und $P_2$ in derselben Zeit beschreiben, und beachtet, daß alsdann $S_1 = 2S_2$ ist. Multiplizirt man alsdann beide Seiten der Gleichung (135) mit dieser letzteren Gleichung; so kommt

$$P_1 S_1 = 2\left(\frac{a^2}{1+a}\right)P_2 S_2 + \left(\frac{a^2 W + b(1+a) + ab_1}{1+a}\right)2S_2,$$

worin $P_1 S_1 = U_1$, $P_2 S_2 = U_2$ und $2S_2 = S_1$ ist.)

Der Model für die veränderliche Bewegung dieses Systemes ergibt sich mit Hülfe der Werthe für die Koeffizienten **A** und **B** leicht aus der allgemeinen Gleichung (116).

Wäre das System der beiden Rollen dergestalt angeordnet,




daß über eine jede ein besonderes Seil ginge, wie in der seitstehenden Figur dargestellt ist; so hat man, wenn man mit $t$ die Spannung des zweiten Theiles des über die bewegliche Rolle gehenden Seiles, an welchem $P_1$ aufgehängt ist, und mit $T$ die Spannung des ersten Theiles des über die feste Rolle gehenden Seiles, an welchem $P_2$ aufgehängt ist, bezeichnet,

$$P_1 = at + b,\ T = aP_2 + b,\ P_1 + t + W = T.$$

Multiplizirt man die letzte dieser Gleichungen mit $a$ und addirt sie alsdann zu der ersten; so kommt

$$P_1(1+a) + Wa = Ta + b = a^2 P_2 + (1+a)b,$$

und hieraus folgt

$$P_1 = \left(\frac{a^2}{1+a}\right)P_2 + b - \frac{Wa}{1+a}, \ldots . (137)$$

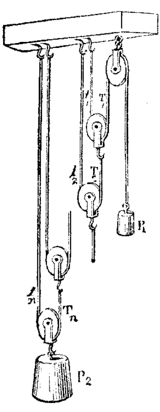
und für den Model (Gleichung 121)

$$U_1 = 2\left(\frac{a^2}{1+a}\right)U_2 + \left(b - \frac{Wa}{1+a}\right)S_1 \ldots . (138)$$

Da der Koeffizient des zweiten Gliedes des Models dieses letzteren Systemes kleiner ist, als der des vorhergehenden Systemes (Gleichung 136) (indem die Größen $a$ und $b$ wesentlich positiv sind); so leuchtet ein, daß vermittelst dieses Systemes eine gegebene Quantität Arbeit $\mathrm{U}_2$ mit einem geringeren Kraftaufwande $\mathrm{U}_1$ verrichtet oder ein gegebenes Gewicht $\mathrm{P}_2$ auf eine gegebene Höhe mit weniger Arbeit gehoben werden kann, als mit dem früheren Systeme, ein Vortheil, welcher nicht bloß dem Umstande zuzuschreiben ist, daß das Gewicht der beweglichen Rolle in dem vorstehenden Falle der treibenden Kraft zu Hülfe kommt, während dasselbe in dem anderen Falle der treibenden Kraft entgegen wirkt, da er auch dann noch, wenn auch in geringerem Grade, stattfinden würde, wenn die Rollen ohne Gewicht wären.

## System aus Einer festen und mehreren beweglichen Rollen. — Rollenzug.

§. 160. Es sei ein System von $n$ beweglichen und Einer



festen Rolle gegeben, welche, wie in der Figur dargestellt ist, dergestalt miteinander verbunden sind, daß über eine jede bewegliche Rolle ein besonderes Seil geht. Die Spannungen der beiden Theile des über die erste bewegliche Rolle gehenden Seiles seien $\mathrm{T}_1$ und $t_1$, die Spannungen der beiden Theile des über die zweite bewegliche Rolle gehendes Seiles seien $\mathrm{T}_2$ und $t_2$, und so fort. Nimmt man nun der Vereinfachung der Rechnung wegen alle Rollen von gleichen Dimensionen und Gewichten und alle Seile von gleicher Steifigkeit an; so hat man

$$\mathrm{T}_1 = at_1 + b_1 \text{ und } \mathrm{T}_2 + \mathrm{W} = \mathrm{T}_1 + t_1.$$

Hieraus folgt durch Elimination von $t_1$

$$\mathrm{T}_1 = \left(\frac{a}{1+a}\right)\mathrm{T}_2 + \frac{\mathrm{W}a + b_1}{1+a} \;\ldots .\; (139)$$

Bezeichnet man die Koeffizienten dieser Gleichung mit $\alpha$ und $\beta$; so wird dieselbe

$$T_1 = \alpha T_2 + \beta.$$

Ebenso findet sich

$$T_2 = \alpha T_3 + \beta,$$
$$T_3 = \alpha T_4 + \beta,$$
$$T_4 = \alpha T_5 + \beta,$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_{n-1} = \alpha T_n + \beta,$$
$$T_n = \alpha P_2 + \beta.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen, von der zweiten anfangend, respektive mit $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}$, addirt dieselben alsdann und hebt die gleichen Glieder auf beiden Seiten der Endgleichung gegeneinander auf; so erhält man

$$T_1 = \alpha^n P_2 + \beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta + \ldots + \alpha^{n-1}\beta,$$

oder wenn man die geometrische Progression auf der rechten Seite summirt,

$$T_1 = \alpha^n P_2 + \beta\left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\right) \ldots (140)$$

Substituirt man hierin für $\alpha$ und $\beta$ wieder ihre Werthe aus Gleichung (139) und reduzirt gehörig; so kommt

$$T_1 = \left(\frac{a}{1+a}\right)^n P_2 + (Wa + b_1)\left[1 + \left(\frac{a}{1+a}\right)^n\right].$$

Nun hat man

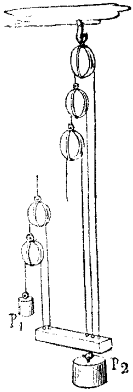
$$P_1 = a T_1 + b,$$

d. i. nach der vorstehenden Gleichung

$$P_1 = a\left(\frac{a}{1+a}\right)^n P_2 + a(Wa + b_1)\left[1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^n\right] + b \ldots (141)$$

Bemerkt man nun, daß wenn keine Reibung und Steifigkeit vorhanden wäre, die Größe $a$ gleich der Einheit und $\left(\frac{a}{1+a}\right)^n = (\frac{1}{2})^n$ werden würde; so ergibt sich nach Gleichung (121) für den Model dieses Systemes

$$U_1 = a\left(\frac{2a}{1+a}\right)^n U_1 + \left\{a(Wa + b_1)\left[1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^n\right] + b\right\} S_1 \ldots (142)$$




§. 161. Wenn ein jedes Seil mit dem Einen Ende statt an einem festen Gegenstande, an einem beweglichen Balken, welcher das zu hebende Gewicht trägt, befestigt wäre (eine Anordnung, wie sie in der Figur dargestellt ist); so würde man unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung

$$\mathrm{T}_1 = a t_1 + b,\quad a t_2 + b = \mathrm{T}_2,\quad \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1 + t_1 + \mathrm{W}$$

haben, worin $\mathrm{T}_1 = \mathrm{P}_1$ ist. Addirt man diese drei Gleichungen und lös't die Endgleichung für $t_1$ auf; so kommt

$$t_1 = \left(\frac{a}{a+1}\right) t_2 - \left(\frac{1}{a+1}\right) \mathrm{W},$$

eine Gleichung, worin das Zeichen $b$ nicht mehr erscheint, indem der konstante Theil des Widerstandes, welcher die beiden Spannungen $t_1$ und $t_2$ zu gleicher Zeit behaftet, mit verschwindet, sowie man $\mathrm{T}_1$ und $\mathrm{T}_2$ eliminirt. Setzt man $\frac{a}{a+1} = \alpha$; so hat man

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \alpha t_2 - \frac{\alpha}{a}\mathrm{W}, \\ \text{und auf eine ähnliche Weise} \\ t_2 = \alpha t_3 - \frac{\alpha}{a}\mathrm{W}, \\ t_3 = \alpha t_4 - \frac{\alpha}{a}\mathrm{W}, \\ \ldots\ldots \\ t_{n-1} = \alpha t_n - \frac{\alpha}{a}\mathrm{W}, \end{array}\right\} \ldots (143)$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen, ebenso wie zwischen den analogen Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs, und beachtet, daß hier $\beta$ durch $-\frac{\alpha}{a}\mathrm{W}$ vertreten ist; so ergibt sich

$$t_1 = \alpha^{n-1} t_n - \frac{\alpha W}{a}\left(\frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha-1}\right) \ldots . (144)$$

Addirt man auch die Gleichungen (143) zusammen; so kommt

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots . + t_{n-1} = \alpha(t_2 + t_3 + t_4 + \ldots . + t^n) \frac{\alpha}{a} W.$$

Nun wird das Gewicht $P_2$ von den Spannungen $t_1$, $t_2$, $t_3 \ldots .$ der verschiedenen an dem Balken befestigten Seile getragen. Begreift man also unter $P_2$ das Gewicht des Balkens mit; so hat man

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots . + t_{n-1} + t_n = P_2,$$

also

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots . + t_{n-1} = P_2 - t_n$$

und

$$t_2 + t_3 + \ldots . + t_n = P_2 - t_1.$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung; so wird dieselbe

$$P_2 - t_n = \alpha(P_2 - t_1) - (n-1)\frac{\alpha W}{a},$$

und hieraus folgt

$$t_n = (1-\alpha)P_2 + \alpha t_1 + (n-1)\frac{\alpha W}{a}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in Gleichung (144) ergibt sich

$$t_1 = (1-\alpha)\alpha^{n-1} P_2 + \alpha^n t_1 + (n-1)\frac{\alpha^n W}{a} - \frac{\alpha W}{a}\left(\frac{\alpha^{n-1}-1}{a-1}\right)$$

Hieraus folgt durch Transposition und Reduktion

$$(1-\alpha^n) t_1 = (1-\alpha)\alpha^{n-1} P_2 + \frac{W}{a}\left[n\alpha^n - \alpha\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right)\right],$$

also

$$t_1 = \frac{(1-\alpha)\alpha^{n-1}}{1-\alpha^n} P_2 + \frac{W}{a}\left[\frac{n\alpha^n}{1-\alpha^n} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right].$$

Nun ist $\alpha = \frac{a}{a+1}$, also $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{a}$, ferner

$$\frac{(1-\alpha)\,\alpha^{n-1}}{1-\alpha^n} = \frac{\frac{1}{\alpha}-1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n-1} = \frac{\frac{1}{a}}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1}, \text{ ferner}$$

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n-1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1} \text{ und}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1} = a.$$

Hiernach hat man

$$t_1 = \frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{P}_2}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1} + \frac{\mathrm{W}}{a}\left\{\frac{n}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1} - a\right\}.$$

Nun ist

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{P}_1 = a\,t_1 + b,$$

das ist nach der vorstehenden Gleichung

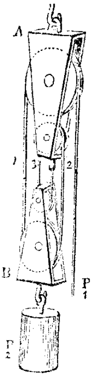
$$\mathrm{P}_1 = \frac{\mathrm{P}_2}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1} + \mathrm{W}\left\{\frac{n}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1} - a\right\} + b \;\ldots.\; (145)$$

Für den Fall, wo keine Reibung und Steifigkeit vorhanden wäre, würde man $a=1$, also $\left(1+\frac{1}{a}\right)^n - 1 = 2^n - 1$ haben; demnach ist der Model für die gleichförmige Bewegung (Gleichung 121)

$$\mathrm{U}_1 = \left[\frac{2^n-1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1}\right]\mathrm{U}_2 + \left\{\mathrm{W}\left[\frac{n}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n-1} - a\right] + b\right\}\mathrm{S}_1 \;\ldots (146)$$

## Der Flaschenzug.

§. 162. Wenn in einem jeden der beiden Kloben oder Blöcke **A** und **B** dieselbe Anzahl Rollen angebracht sind, welche sich um




besondere Mittelpunkte drehen, und von denen die Halbmesser der Rollen des Klobens **B** halb so groß sind, als die Halbmesser der entsprechenden Rollen des Klobens **A**, und wenn Ein und dasselbe an dem oberen Kloben befestigte Seil der Reihe nach über sämmtliche Rollen geschlungen ist, wie dies die Figur zeigt; so leuchtet ein, daß die Theile 1, 2, 3,... des Seiles, welche zwischen den beiden Kloben liegen und deren ebenso viele, als Rollen, vorhanden sind, einander parallel sein und den Druck des an dem unteren Kloben aufgehängten Gewichtes $P_2$ unter sich theilen werden. Ferner erkennt man, daß der Druck $P_2$ auf die Spannungen jener Theile gleichmäßig vertheilt werden würde, wenn keine Reibung der Axen der Rollen auf ihren Lagern und keine Steifigkeit des Seiles stattfände, weil es zum Bestehen des Gleichgewichtes alsdann nothwendig wäre, daß die Spannungen des Seiles zu beiden Seiten Ein und derselben Rolle immer einander gleich wären. Unter dieser Voraussetzung würde also die Spannung eines jeden der gedachten Theile des Seiles $\frac{1}{n}P_2$ sein, wenn $n$ Rollen verhanden wären, und ein Druck $P_1 = \frac{1}{n}P_2$, an dem freien Ende des Seiles angebracht, würde hinreichen, um das Gleichgewicht im Gränzzustande zu erhalten. Da diese Voraussetzung in der Wirklichkeit jedoch nicht stattfindet; so ergibt sich die Bedingung für das Gleichgewicht des Flaschenzuges auf folgende Weise.

Wenn $T_1$, $T_2$, $T_3$, ... die wirklichen Spannungen der vorhin bemerkten Theile des Seiles im Gränzzustande des Gleichgewichtes bei dem vorherrschenden Übergewichte von $P_1$ bezeichnen; so hat man

$$P_1 = a_1 T_1 + b_1,\ T_1 = a_2 T_2 + b_2,\ T_2 = a_3 T_3 + b_3$$
$$\text{etc. etc.}\quad T_{n-1} = a_n T_n + b_n,$$

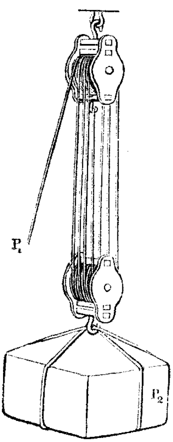
worin $a_1$, $a_2$, ..., $b_1$, $b_2$, ... gewisse konstante Koeffizienten bezeichnen, welche von den Dimensionen der Rollen und der Steifigkeit des Seiles abhängen und durch die Gleichung (131) bestimmt sind. Da ferner das **Gewicht** $P_2$ durch die parallelen

Spannungen der verschiedenen Theile des Seiles getragen wird; so ist auch

$$P_2 = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n.$$

Man bemerkt, daß die Anzahl der vorstehenden Gleichungen um Eine Einheit größer ist, als die Anzahl der Größen $T_1$, $T_2$, $T_3 \ldots T_n$; die Letzteren können demnach sämmtlich eliminirt werden, sodaß eine Beziehung zwischen dem zu hebenden Gewichte $P_2$ und der zum Heben erforderlichen Kraft $P_1$ übrig bleibt, woraus der Model des Systemes bestimmt werden kann.

Um die Rechnung zu vereinfachen und dieselbe der gewöhnlichen Form des Flaschenzuges anzupassen, beachte man die folgende Anordnung der Rollen. Statt daß dieselben, wie in der vorhergehenden Figur dargestellt ist, verschiedene Durchmesser haben und in derselben Ebene liegen, nehme man dieselben, nach der seitstehenden Figur, alle von gleichem Durchmesser und nebeneinander liegend an, wie dies bei dem gewöhnlichen Flaschenzuge stattfindet. Die Unbequemlichkeit bei der letzteren Einrichtung besteht darin, daß das Seil aus der Ebene irgend einer Rolle des Einen Klobens in die Ebene der entsprechenden Rolle des anderen Klobens in schräger Richtung übergehen muß,




sodaß die Theile des Seiles zwischen den Kloben nicht wirklich einander parallel sind und die Summe ihrer Spannungen nicht genau gleich dem zu hebenden Gewichte $P_2$, sondern etwas größer ist. So lange indessen die Kloben nicht sehr nahe aneinander liegen, ist die Ablenkung des Seiles unbeträchtlich und der Fehler, der dadurch in die Rechnung eingeführt wird, kann vernachlässigt werden. Nimmt man daher die Theile des Seiles zwischen den Kloben als parallel und die Durchmesser aller Rollen, sowie ihre Axen als gleich an, vernachlässigt ferner den Einfluß des Gewichtes einer jeden Rolle behuf Vermehrung der Reibung an ihrer Axe, da diese Gewichte in dem vorliegenden Falle im Vergleich zu den Spannungen des Seiles klein sind; so werden die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ebenso wie die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ einander gleich sein und man hat

$$\left.\begin{array}{c} P_1 = aT_1 + b,\ T_1 = aT_2 + b,\ T_2 = aT_3 + b, \\ \text{etc. etc.}\quad T_{n-1} = aT_n + b, \end{array}\right\} \ldots (147)$$

ferner

$$P_2 = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n.$$

Multiplizirt man die Gleichungen (147), von der zweiten anfangend, nacheinander mit $a$, $a^2$, $a^3, \ldots a^{n-1}$ und addirt dieselben; so ergibt sich, wenn man die gleichen Glieder auf beiden Seiten wegläßt und die geometrische Reihe auf der rechten Seite (wie bei Gleichung 140) summirt,

$$P_1 = a^n T_n + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Addirt man die Gleichungen (147) und bemerkt, daß

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = P_2$$

und daß mithin

$$P_1 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} = P_1 + P_2 - T_n$$

ist; so kommt

$$P_1 + P_2 - T_n = aP_2 + nb.$$

Durch Elimination von $T_n$ zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung erhält man

$$P_1 = a^n[P_1 - (a-1)P_2 - nb] + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1},$$

und hieraus folgt

$$P_1 = \frac{a^n(a-1)}{a^n - 1} P_2 + \frac{nba^n}{a^n - 1} - \frac{b}{a-1} \ldots (148)$$

Um den Model für die gleichförmige Bewegung zu bestimmen, so bemerkt man, daß wenn keine Reibung und Steifigkeit vorhanden wäre, $a = 1$ und $\frac{a^n(a-1)}{a^n - 1}$ für diesen Werth von $a$ ein Bruch von der Form $\frac{0}{0}$ werden würde, dessen wahrer Werth sich durch bekannte Methoden zu $\frac{1}{n}$ ergibt (denn wenn man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit $a-1$ devidirt; so wird derselbe $\frac{a^n}{a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1}$, dessen Werth für $a=1$ offenbar $\frac{1}{n}$ ist). Hiernach hat man für den gesuchten Model (vergl. §. 152)

$$U_1 = n\frac{a^n(a-1)}{a^n-1}U_2 + \left[\frac{n a^n b}{a^n-1} - \frac{b}{a-1}\right]S_1 \ldots (149)$$

Hierbei ist keine Rücksicht auf die Arbeit genommen, welche erforderlich ist, um das Seil zu heben, welches gleichzeitig mit dem Gewichte $P_2$ in die Höhe steigt. Aus §. 60 geht hervor, daß die zur Hebung des Seiles (von welchem verschiedene Theile auf verschiedene Höhen gehoben werden) erforderliche Arbeit dieselbe ist, als wenn die ganze gehobene Seilquantität mit Einem Zuge auf eine Höhe gehoben wäre, die gleich der ist, um welche ihr Schwerpunkt gehoben ist. Nun ist die Länge des gehobenen Seiles gleich der Gesammtlänge der einzelnen Theile, welche zwischen zwei Lagen von $P_2$, die um den Raum $S_2$ voneinander abstehen, liegend gedacht werden können, sodaß diese ganze Länge durch $nS_2$ und ihr Gewicht durch $\mu n S_2$ dargestellt wird, wenn $\mu$ das Gewicht eines laufenden Fußes des Seiles bezeichnet. Da ferner der Schwerpunkt dieses Seilgewichtes zwischen der ersten und zweiten Lage von $P_2$ offenbar um $\frac{1}{2}S_2$ gehoben ist; so folgt, daß zu der Hebung desselben eine Arbeit gleich $\frac{1}{2}\mu n S_2{}^2$ oder da $S_1 = nS_2$ ist, gleich $\frac{1}{2}\frac{\mu S_1{}^2}{n}$ erfordert wird. Addirt man diese auf die Hebung des Seiles zu verwendende Arbeit zu der, welche auf die Hebung des Gewichtes $P_2$ verwendet werden müßte, wenn das Seil ohne Gewicht wäre; so erhält man für den Model des Flaschenzuges

$$U_1 = n\frac{a^n(a-1)}{a^n-1}U_2 + \left[\frac{n a^n b}{a^n-1} - \frac{b}{a-1}\right]S_1 + \frac{\mu}{2n}S_1{}^2 \ldots (150)$$

Eine solche Korrektion für das Gewicht des Seiles kann auch mit dem Model der übrigen Rollensysteme vorgenommen werden. Uebrigens ist der Einfluß des **Gewichtes** des Seiles auf die Vermehrung der Arbeit behuf Überwindung der **Reibung** an den Rollen unbedeutend und kann in dieser Beziehung außer Acht gelassen werden.

## Der Model einer zusammengesetzten Maschine.

§. 163. Angenommen, die **Arbeit** einer Maschine werde durch eine Reihe von Elementen, welche eine zusammengesetzte Maschine bilden, von dem Einen auf das andere fortgepflanzt, bis dieselbe von dem **Rezeptor** aus den **Operator** erreicht. P sei der **Druck**, unter welchem die Arbeit am Rezeptor auf das erste Element der Maschine verrichtet wird, $P_1$ der Druck, unter welchem dieselbe von dem ersten auf das zweite Element der Maschine übertragen wird, $P_2$ der, unter welchem dieselbe von dem zweiten auf das dritte Element übergeht u. s. f. und endlich $P_n$ der Druck, unter welchem die Arbeit von dem letzten Elemente am Operator auf den Nutzwiderstand übertragen wird. Da nun ein jedes Element der zusammengesetzten Maschine eine **einfache** Maschine ist; so wird man finden, daß sich die Beziehung zwischen den Druckkräften, welche auf ein solches Element im Gränzzustande des Gleichgewichtes angebracht sind, in alle den Fällen, wo der Druck, unter welchem die Arbeit geschieht, im Vergleich zu dem **Gewichte** dieses Elementes **groß** ist (s. §. 166), unter der Form der Gleichung (119) §. 152 darstellen läßt.

Bezeichnet man daher mit $a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$ gewisse Konstanten, welche durch die Formen und Dimensionen der einzelnen Elemente und durch die schädlichen Widerstände gegeben sind; so hat man

$$P = a_1 P_1 + b_1, \; P_1 = a_2 P_2 + b_2, \; P_2 = a_3 P_3 + b_3$$
$$\text{etc. etc.} \quad P_{n-1} = a_n P_n + b_n.$$

Eliminirt man zwischen diesen $n$ Gleichungen die $n-1$ Größen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{n-1}$; so erhält man eine Gleichung von der Form

$$P = aP_n + b, \ldots . \; (151)$$

worin

$$\left.\begin{aligned}a&=a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \text{ und}\\ b&=a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b_n + a_1 a_2 \ldots a_{n-2} b_{n-1} + \ldots + a_1 b_2 + b_1\end{aligned}\right\} \ldots (152)$$

ist.

Wenn der einzige schädliche Widerstand, deren ein jedes Element unterworfen ist, nur in der Reibung besteht, und man bezeichnet den Reibungswinkel in Beziehung zu einem jeden dieser Elemente mit $\varphi$; so sind die Größen $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, ... Funktionen von $\varphi$. Entwickelt man dieselben daher nach der Maclaurinschen Formel in Reihen, welche nach den Potenzen von $\varphi$ fortschreiten; so erhält man bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\varphi$

$$a_1 = a_1(0) + \left(\frac{d a_1}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi, \quad b_1 = b_1(0) + \left(\frac{d b_1}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi,$$

$$a_2 = a_2(0) + \left(\frac{d a_1}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi, \quad b_2 = b_2(0) + \left(\frac{d b_2}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi,$$

$$\text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.,}$$

worin $a_1(0)$, $b_1(0)$, $a_2(0)$, $b_2(0)$, ... die Werthe von $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, ... für $\varphi = 0$ und $\left(\frac{d a_1}{d\varphi}\right)(0)$, $\left(\frac{d b_1}{d\varphi}\right)$, ... Die Werthe ihrer Differenzialkoeffizienten ebenfalls für $\varphi = 0$ darstellen.

Setzt man

$$\left(\frac{d a_1}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi = a_1(0) \cdot \alpha_1, \quad \left(\frac{d b_1}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi = b_1(0) \cdot \beta_1,$$

$$\left(\frac{d a_2}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi = a_2(0) \cdot \alpha_2, \quad \left(\frac{d b_2}{d\varphi}\right)(0) \cdot \varphi = b_2(0) \cdot \beta_2,$$

$$\text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.,}$$

so ist

$$a_1 = a_1(0) \cdot (1 + \alpha_1), \quad b_1 = b_1(0) \cdot (1 + \beta_1),$$

$$a_2 = a_2(0) \cdot (1 + \alpha_2), \quad b_2 = b_2(0) \cdot (1 + \beta_2),$$

$$\text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.,}$$

worin $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, ... den Faktor $\varphi$ enthalten und daher ungemein klein sind. Substituirt man diese Werthe von $a_1$ $a_2$, ... in den Ausdruck für $a$ und vernachlässigt die Glieder welche höhere Dimensionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, als die erste enthalten; so kommt

$$a = a_1(0) \cdot a_2(0) \ldots a_n(0) \cdot (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) \ldots (153)$$

Nun ist der Koeffizient des ersten Gliedes des Models (Gleichung 121) durch $\frac{a}{a(0)}$ dargestellt, worin $a$ den Koeffizienten des ersten Gliedes der Gleichung (119) vertritt; substituirt man daher den Werth von $a$ aus Gleichung (153) in die allgemeine Gleichung (121) und beachtet, daß

$$a(0) = a_1(0) \cdot a_2(0) \ldots a_n(0), \quad \text{also}$$

$$\frac{a}{a(0)} = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

ist; so erhält man für den Model einer zusammengesetzten Maschine von $n$ Elementen

$$U = (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) U_n + bS, \ldots (154)$$

worin U die am Rezeptor, $U_n$ die am Operator verrichtete Arbeit, S den vom Angriffspunkte der treibenden Kraft beschriebenen Raum und $b$ eine Konstante bezeichnet, welche durch Gleichung (152) bestimmt ist.

### §. 164. Bedingungen für das Gleichgewicht zweier Kräfte $P_1$ und $P_2$, welche in derselben Ebene auf einen Körper angebracht sind, der um eine feste Axe von gegebenen Dimensionen drehbar ist.

Fig. 1.

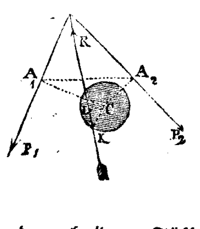
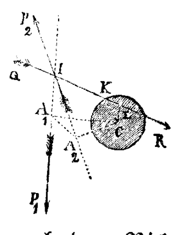


Fig. 2.



In Figur 1 wirken die Kräfte $P_1$ und $P_2$ auf entgegengesetzten Seiten der Axe, deren Mittelpunkt C ist, und in Figur 2 auf derselben Seite. Ist im ersteren Falle JR und im zweiten RJ die Richtung der Resultante von $P_1$ und $P_2$; so wird die Axe in den beiden Fällen nach den Richtungen dieser Linien gegen ihre Lager gedrückt werden. Nimmt man an, die Kräfte $P_1$ und

$P_2$ ständen in beiden Fällen in einer solchen Beziehung zu einander, daß der Körper im Begriffe wäre, sich in der Richtung zu drehen, nach welcher $P_1$ wirkt; so würde auch, wenn man jene Kräfte durch ihre Resultante ersetzte, diese Resultante im Begriffe sein, eine Drehung des Körpers in der Richtung von $P_1$ herbeizuführen. Demnach liegt die Richtung JR der Resultante im ersteren Falle mit $P_1$ auf derselben Seite des Mittelpunktes C der Axe und im letzteren Falle auf der entgegengesetzten Seite, und in beiden Fällen ist sie gegen der Halbmesser CK im Punkte K, wo sie die Axe schneidet, unter einem Winkel CKR gleich dem Reibungswinkel (§. 153) geneigt. Der Widerstand der Axe wirkt offenbar in beiden Fällen in der entgegengesetzten Richtung der Resultante von $P_1$ und $P_2$ und ist ihr gleich. Bezeichnet man denselben mit R, fällt von C aus auf die Richtungen von $P_1$, $P_2$ und R die Perpendikel $CA_1 = a_1$, $CA_2 = a_2$, und $CL = \lambda$; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, da $P_1$, $P_2$ und R Kräfte im Gleichgewicht sind

$$P_1 a_1 = P_2 a_2 + \lambda R.$$

Wäre $P_2$ statt $P_1$ vorherrschend gewesen; so würde R (in beiden Fällen) auf die andere Seite von C gefallen sein, sodaß man alsdann für die letzte Gleichung

$$P_1 a_1 + \lambda R = P_2 a_2$$

hätte.

Jenachdem also $P_1$ in der oberen oder unteren Gränzlage des Gleichgewichtes ist, hat man

$$P_1 a_1 - P_2 a_2 = \pm \lambda R,$$

und wenn man voraussetzt, daß $\lambda$ mit dem Zeichen + oder − genommen werde, jenachdem $P_1$ im Begriffe ist, Bewegung zu erzeugen oder überwunden zu werden; so kann man allgemein

$$P_1 a_1 - P_2 a_2 = \lambda R \;\dots\; (155)$$

setzen.

Da nun der Widerstand der Axe gleich der Resultante von $P_1$ und $P_2$ ist; so hat man, wenn man in beiden Fällen den Winkel $P_1 J P_2$ zwischen den positiven Richtungen jener Kräfte mit $\iota$ bezeichnet, (§. 13)

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1 P_2 \cos\iota}.$$

Substituirt man diesen Werth von R in die vorhergehende Gleichung und quadrirt auf beiden Seiten; so kommt

$$(P_1 a_1 - P_2 a_2)^2 = \lambda^2 (P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1 P_2 \cos\iota),$$

oder wenn man transponirt und mit $P_2{}^2$ dividirt,

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 (a_1{}^2 - \lambda^2) - 2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)(a_1 a_2 - \lambda^2 \cos\iota) = -(a_2{}^2 - \lambda^2)$$

Löſ't man diese Gleichung für $\frac{P_1}{P_2}$ auf; so ergibt sich

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(a_1 a_2 + \lambda^2 \cos\iota) \pm \sqrt{(a_1 a_2 + \lambda^2 \cos\iota)^2 - (a_1{}^2 - \lambda^2)(a_2{}^2 - \lambda^2)}}{a_1{}^2 - \lambda^2}$$

oder

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(a_1 a_2 + \lambda^2 \cos\iota) \pm \lambda\sqrt{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1 a_2 \cos\iota) - \lambda^2 \sin^2\iota}}{a_1{}^2 - \lambda^2}.$$

Bezeichnet man nun den Halbmesser der Axe mit $\varrho$ und den Reibungswinkel CKR mit $\varphi$; so ist $\lambda = CL = CK.\sin CKR = \varrho \sin\varphi$. Zieht man in beiden Figuren die gerade Linie $A_1 A_2$ und bezeichnet dieselbe mit L; so ist

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_1 a_2 \cos A_1 CA_2 = L^2.$$

Da aber die Winkel bei $A_1$ und $A_2$ rechte sind; so sind die beiden Winkel $A_1 JA_2$ und $A_1 CA_2$ zusammengenommen gleich zwei rechten, oder $A_1 CA_2 + \iota = \pi$, folglich $A_1 CA_2 = \pi - \iota$ und $\cos A_1 CA_2 = -\cos\iota$. Hieraus folgt

$$L^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1 a_2 \cos\iota.$$

Substituirt man diese Werthe von $L^2$ und $\lambda$ in die vorhergehende Gleichung; so ergibt dieselbe

$$P_1 = \frac{(a_1 a_2 + \varrho^2 \cos\iota \,.\, \sin^2\varphi) \pm \varrho \sin\varphi \sqrt{L^2 - \varrho^2 \sin^2\iota.\sin^2\varphi}}{a_1{}^2 - \varrho^2 \sin^2\varphi}. P_2 \ldots (156)$$

Die beiden Wurzeln der obigen Gleichung sind durch die positiven und negativen Werthe von $\lambda$ gegeben; sie entsprechen daher (Gleichung 155) den beiden Gränzzuständen des Gleichgewichtes. Diese beiden Werthe von $\lambda$ sind übrigens durch die positiven und negativen Werthe von $\varphi$ gegeben: setzt man daher voraus, daß $\varphi$ positiv oder negativ genommen werde, jenachdem $P_1$ vorherrscht oder nachsteht; so kann das doppelte Zeichen durch das positive ersetzt werden.

Die vorstehende Beziehung zwischen $P_1$ und $P_2$ leistet offenbar den Bedingungen der allgemeinen Gleichung (119) ein Genüge, und man erhält daher nach Gleichung (121) für den Model des vorliegenden Systemes

$$U_1=\left(\frac{a_1}{a_2}\right).\frac{(a_1 a_2+\varrho^2\cos\iota.\sin^2\varphi)+\varrho\sin\varphi.\sqrt{L^2-\varrho^2\sin^2\iota.\sin^2\varphi}}{a_1{}^2-\varrho^2\sin^2\varphi}.U_2..(157)$$

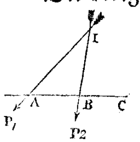
Wenn die Glieder, welche höhere Potenzen von $\left(\frac{\varrho}{a_1}\right)\sin\varphi$, als die erste, enthalten, wegen der Kleinheit dieser Größe vernachläßigt werden; so hat man

$$P_1=\left[\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{\varrho L}{a_1{}^2}\right)\sin\varphi\right]P_2\ldots.(158)$$

$$U_1=\left[1+\left(\frac{\varrho L}{a_1 a_2}\right)\sin\varphi\right]U_2\ldots.(159)$$

§. 165. **Bestimmung der Resultante R von mehreren Kräften $P_1, P_2, P_3, \ldots$ durch die Größen dieser Kräfte und die Kosinus ihrer Neigungswinkel gegeneinander.**

Die Neigungswinkel IAC, IBC, etc. der verschiedenen Kräfte



$P_1$ $P_2$, etc. gegen irgend eine in ihrer Ebene gegebene Linie CA seien resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und die Neigungswinkel dieser Kräfte gegeneinander seien resp. $\iota_{12}, \iota_{13}, \iota_{23}, \ldots$, sodaß hierunter immer diejenigen Winkel verstanden werden, welche die positive Richtung irgend einer Kraft mit der positiven Richtung einer anderen bildet; alsdann hat man

$$\angle AIB=\angle IBC-\angle IAC, \text{ das ist}$$

$$\iota_{12}=\alpha_2-\alpha_1, \text{ also auch}$$

$$\cos\iota_{12}=\cos\alpha_1.\cos\alpha_2+\sin\alpha_1.\sin\alpha_2,$$

und ähnlich $$\cos\iota_{13}=\cos\alpha_1.\cos\alpha_3+\sin\alpha_1.\sin\alpha_3,$$

$$\cos\iota_{23}=\cos\alpha_2.\cos\alpha_3+\sin\alpha_2.\sin\alpha_3,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

Nun ist nach Gleichung (9), §. 11

$$R^2 = (P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots)^2 + (P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + \ldots)^2.$$

Entwickelt man die Quadrate auf der rechten Seite, addirt die Resultate und beachtet, daß $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ist; so kommt

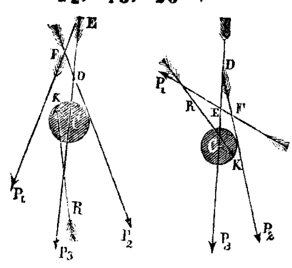
$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_3{}^2 + \ldots + 2P_1P_2(\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 . \sin\alpha_2) + 2P_1P_3(\cos\alpha_1 . \cos\alpha_3 + \sin\alpha_1 . \sin\alpha_3) + \ldots,$$

das ist nach den obigen Beziehungen

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_3{}^2 + \ldots + 2P_1P_2\cos\iota_{12} + 2P_1P_3\cos\iota_{13} + \ldots + 2P_2P_3\cos\iota_{23} + \ldots + \text{ etc.} \ldots . (160)$$

§. 166. **Bedingungen für das Gleichgewicht dreier Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, welche in derselben Ebene auf einen Körper angebracht sind, der um eine feste Axe drehbar ist, wenn die Richtung der Einen Kraft $P_3$ durch den Mittelpunkt der Axe geht und das System beim vorherrschenden Übergewichte von $P_1$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes sich befindet.**

$\iota_{12}, \iota_{13}, \iota_{23}$ seien die Neigungswinkel der Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, P_3$ gegeneinander, $a_1$ und $a_2$ die Perpendikel von dem Mittelpunkte der Axe auf $P_1$ und $P_2$, und $\lambda$ das Perpendikel von demselben Punkte auf die Resultante R der drei Kräfte $P_1, P_2, P_3$. Da die Resultante R nach §. 153 dem Widerstande der Axe gleich und entgegengesetzt ist;




so hat man durch das Prinzip der Gleichheit der Momente

$$P_1 a_1 - P_2 a_2 = \lambda R;$$

denn $P_3$ geht durch den Mittelpunkt der Axe und hat demnach in Beziehung zu diesem Punkte kein Moment.

Substituirt man hierin den Werth von R aus Gleichung (160); so kommt

$$P_1a_1-P_2a_2=\lambda\sqrt{P_1{}^2+P_2{}^2+P_3{}^2+2P_1P_2\cos\iota_{12}+2P_1P_3\cos\iota_{13}+2P_2P_3\cos\iota_{23}}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten und transponirt; so erhält man

$$P_1{}^2(a_1{}^2-\lambda^2)-2P_1[P_2a_1a_1+\lambda^2(P_2\cos\iota_{12}+P_3\cos\iota_{13})]$$
$$=-P_2{}^2a_2{}^2+\lambda^2(P_2{}^2+P_3{}^2+2P_2P_3\cos\iota_{23}).$$

Wird diese quadratische Gleichung für $P_1$ aufgelös't, und vernachlässigt man alsdann die Glieder, welche höhere Potenzen von $\lambda$, als die erste, enthalten; so ergibt sich die Gleichung

$$P_1a_1{}^2=P_2a_1a_2$$
$$+\lambda\sqrt{P_2{}^2(a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2\operatorname{coc}\iota_{12})+P_3{}^2a_1{}^2+2P_2P_3a_1(a_2\cos\iota_{13}+a_1\cos\iota_{23})},$$

oder wenn man (wie in §. 164) die Verbindungslinie der Fußpunkte der Perpendikel $a_1$ und $a_2$, d. i.

$$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2\cos\iota_{12}}=L,$$

ferner die Funktion

$$a_1(a_2\cos\iota_{13}+a_1\cos\iota_{23})=M$$

setzt, und für $\lambda$ seinen Werth $\varrho\sin\varphi$ substituirt,

$$P_1=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)P_2+\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1{}^2}\sqrt{P_2{}^2L^2+P_3{}^2a_1{}^2+2P_2P_3M}\ldots(161)$$

Bezeichnet man (wie in §. 152) den Werth von $P_1$ für den Fall, daß die schädlichen Widerstände verschwinden oder daß $\varphi=o$ ist, mit $P_1(0)$; so hat man

$$P_1(0)=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)P_2;$$

auch hat man nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$P_1(0).S_1=P_2.S_2.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $P_1(0)$; so ergibt sich

$$S_1=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)S_2.$$

Multiplicirt man mit dieser Gleichung (161); so kommt

$$P_1S_1 = P_2S_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2}\sqrt{P_2{}^2S_2{}^2L^2 + 2P_2P_3S_2{}^2M + P_3{}^2S_2{}^2a_1{}^2}.$$

Substituirt man nun $U_1$ für $P_1S_1$, $U_2$ für $P_2S_2$ und beachtet, daß $S_2 = \frac{a_2}{a_1}S_1$ ist; so erhält man für den Model des Systemes die Gleichung

$$U_1 = U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2}\sqrt{U_2{}^2L^2 + 2U_2P_3S_1M\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + P_3{}^2S_1{}^2a_2{}^2} \ldots\ldots (162)$$

Wenn $P_3$ im Vergleich zu $P_2$ so klein ist, daß bei der Entwickelung der Wurzelgröße in Gleichung (161) die Glieder vernachlässigt werden können, welche höhere Potenzen von $\frac{P_3}{P_2}$, als die erste, enthalten; so wird jene Gleichung

$$P_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)P_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1{}^2}\left(P_2L + P_3\frac{M}{L}\right), \ldots\ldots (163)$$

welche auch unter die Form

$$P_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1 + \frac{L\varrho}{a_1 a_2}\sin\varphi\right)P_2 + \left(\frac{M}{a_1{}^2}\right)\left(\frac{\varrho}{L}\right)P_3 \sin\varphi$$

gebracht werden kann.

Beachtet man nun, daß die Richtung der Kraft $P_3$ fortwährend durch den Mittelpunkt der Axe geht, daß sich mithin der Angriffspunkt dieser Kraft nicht bewegt, und dieselbe daher auch nicht arbeitet, wenn sich der Körper durch das Übergewicht von $P_1$ drehet; so sieht man, daß in diesem Falle die Bedingungen der Gleichung (119) (§. 152) erfüllt sind, und daß demnach der Model des Systemes durch

$$U_1 = \left(1 + \frac{L\varrho}{a_1 a_2}\sin\varphi\right)U_2 + \left(\frac{M}{a_1{}^2}\right)\left(\frac{\varrho}{L}\right)P_3 . S_1 \sin\varphi \ldots (164)$$

dargestellt wird.

§. 167. **Bedingungen für das Gleichgewicht der beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$, welche auf einen Körper angebracht sind, der um eine cylindrische Axe drehbar ist,** wenn man auf das Gewicht des Körpers, welcher um ſeine Axe als ſymmetriſch vorausgeſetzt wird, Rückſicht nimmt.

Da der Körper um ſeine Axe ſymmetriſch iſt; ſo liegt ſein Schwerpunkt in dieſer Axe, und ſein Gewicht bringt denſelben Effekt hervor, als wenn es fortwährend durch den Mittelpunkt der Axe wirkte. In dieſem Falle ſtellt die Kraft $P_3$ in Gleichung (161) das Gewicht W des Körpers und die Winkel $\iota_{13}, \iota_{23}$ ſtellen die Neigungen der Kräfte $P_1$ und $P_2$ gegen die Vertikale dar. Demnach hat man hier

$$P_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)P_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1^2}\sqrt{P_2^2 L^2 + 2P_2 W M + W^2 a_1^2} \dots (165)$$

Ebenſo findet man nach Gleichung (162) für den Model

$$U_1 = U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2}\sqrt{U_2^2 L^2 + 2U_2 W S_1 M\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + W^2 S_1^2 a_1^2} \dots (166)$$

Wenn $P_2$ im Vergleich zu W ſehr groß iſt; ſo ergeben die Gleichungen (163) und (164)

$$P_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1 + \frac{L\varrho}{a_1 a_2}\sin\varphi\right)P_2 + \left(\frac{M}{a_1^2}\right)\left(\frac{\varrho}{L}\right)W \sin\varphi \dots (167)$$

$$U_1 = \left(1 + \frac{L\varrho}{a_1 a_2}\sin\varphi\right)U_2 + \left(\frac{M\varrho}{a_1^2 L}\right)W S_1 \sin\varphi \dots (168)$$

§. 168 **Eine Maſchine, auf welche zwei beliebige Kräfte $P_1$ und $P_2$ angebracht ſind und welche um eine zylindriſche Axe drehbar iſt, kann mit dem geringſten Kraftaufwande in Bewegung geſetzt werden, wenn die Richtungen der Kräfte parallel ſind und auf derſelben Seite der Axe liegen; Dies ſetzt jedoch voraus, daß das Gewicht der Maſchine ſelbſt ſo klein ſei, daß ſein Einfluß auf die Vermehrung der Reibung vernachläſſigt werden kann.**

Denn bezeichnet man das Gewicht einer ſolchen Maſchine mit W, und vernachläſſigt alle Glieder, welche W sin φ enthalten; ſo folgt aus Gleichung (166), daß der Model

$$U_1 = U_2 \left(1 + \frac{L\varrho}{a_1 a_2} \sin\varphi\right)$$

iſt.

Sind nun die Abſtände $a_1$ und $a_2$ von dem Mittelpunkte der Axe gegeben, in welchen die Kräfte $P_1$ und $P_2$ wirken ſollen; ſo ſieht man aus der vorſtehenden Gleichung, daß die Arbeit $U_1$, welche am Rezeptor verrichtet werden muß, um am Operator einen gegebenen Effekt $U_2$ hervorzubringen, umſo geringer iſt, je kleiner L iſt.

L bezeichnet aber den Abſtand $A_1 A_2$ der Fußpunkte der Perpendikel $CA_1$ und $CA_2$ von einander, ein Abſtand, welcher offenbar am kleinſten iſt, wenn $P_1$ und $P_2$ auf derſelben Seite der Axe, wie in Figur 2, wirken und wenn $CA_1$ und $CA_2$ in derſelben geraden Linie liegen, das iſt, wenn $P_1$ und $P_2$ einander parallel ſind.

Fig. 1.

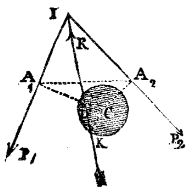
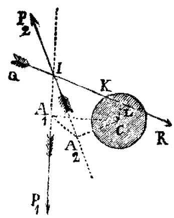



Fig. 2.




§. 169. **Eine Maſchine, auf welche zwei gegebene Kräfte $P_1$ und $P_2$ angebracht ſind, welche um eine zylindriſche Axe drehbar iſt und deren Gewicht mit in Betracht gezogen wird, kann mit dem geringſten Kraftaufwande in Bewegung geſetzt werden, wenn die beiden Kräfte auf derſelben Seite der Axe wirken und wenn die Richtung der treibenden Kraft $P_1$ gegen die Vertikale unter einem gewiſſen Winkel geneigt iſt, welcher noch näher zu beſtimmen bleibt.**

Wenn $P_3$ das Gewicht der Maſchine darſtellt, und der Schwerpunkt derſelben in den Mittelpunkt der Axe fällt; ſo iſt ihr Model nach Gleichung (166)

$$U_1 = U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2} \sqrt{U_2^2 L^2 + 2 U_2 P_3 S_1 M\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + P_3^2 S_1^2 a_2^2}.$$

Hiernach iſt die Arbeit $U_1$, welche am Rezeptor verrichtet werden muß, um eine gegebene Leiſtung $U_2$ am Operator hervorzubringen, um die Größe

$$\frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2}\sqrt{U_2^2 L^2 + 2 U_2 P_3 S_1 M\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + P_3^2 S_1^2 a_2^2}$$

größer, als diejenige Arbeit, welche zu dieſem Ende verrichtet werden müßte, wenn gar keine Reibung vorhanden wäre. Die Maſchine kann demnach mit dem geringſten Kraftaufwande die Leiſtung $U_2$ hervorbringen, wenn die vorſtehende Funktion ein Minimum iſt. Subſtituirt man in derſelben für $L^2$ wieder ſeinen Werth $a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\iota_{12}$, für M ſeinen Werth

$a_1(a_2 \cos\iota_{13} + a_1 \cos\iota_{23})$ (§. 166) und ſetzt $S_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = S_2$;

ſo wird dieſelbe

$$\frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2}\sqrt{U_2^2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\iota_{12}) + 2U_2 P_3 S_2 a_1(a_2 \cos\iota_{13} + a_1 \cos\iota_{23}) + P_3^2 S_1^2 a_2^2} \quad \ldots (169)$$

Nun nehme man an, es ſei der perpendikulare Abſtand $a_2$ vom Mittelpunkt der Axe, in welchem die Nutzarbeit $U_2$ verrichtet wird, und der Neigungswinkel $\iota_{23}$ ihrer Richtung gegen die Vertikale, ebenſo wie der Raum $S_2$, durch welchen dieſelbe verrichtet wird, gegeben, ſodaß dieſe Arbeit in jeder Beziehung beſtimmt iſt. Ferner ſei der perpendikulare Abſtand $a_1$, in welchem die treibende Kraft angebracht iſt, und demnach auch der Raum $S_1$, durch welchen dieſelbe wirkt, gegeben; es wird verlangt, die Neigung $\iota_{12}$ der treibenden Kraft $P_1$ gegen die Richtung der Nutzarbeit oder gegen die Richtung der Kraft $P_2$ dergeſtalt zu beſtimmen; daß die obige Funktion (169) ein Minimum wird oder daß die Maſchine die Nutzarbeit $U_2$ mit dem geringſten Kraftaufwande hervorbringen kann.

Faßt man in dieſer Funktion alle Glieder zuſammen, welche unter den vorſtehenden Vorausſetzungen nur konſtante Größen enthalten, und bezeichnet ihre Summe mit C; ſo wird die Funktion

$$\frac{\varrho \sin\varphi}{a_1 a_2}\sqrt{2 a_1 a_2 U_2(U_2 \cos\iota_{12} + P_3 S_2 \cos\iota_{13}) + C.}$$

Da hierin

$$C=U_2^2 a_1^2+U_2^2 a_2^2+2U_2P_3S_2a_1^2\cos\iota_{23}+P_3^2S_1^2a_2^2$$
$$=U_2^2a_2^2+a_2^2\left(U_2^2\frac{a_1^2}{a_2^2}+2U_2P_3S_2\frac{a_1^2}{a_2^2}\cos\iota_{23}+P_3^2S_1^2\right),$$

oder weil $U_2=P_2S_2$ und $S_2\dfrac{a_1}{a_2}=S_1$,

$$C=P_2^2S_2^2a_2^2+(P_2^2+2P_2P_3\cos\iota_{23}+P_3^2)S_1^2a_2^2$$

iſt und daher für einen jeden Werth von $\cos\iota_{23}$ eine poſitive Größe bleibt; ſo wird die vorſtehende Funktion ein Minimum, wenn

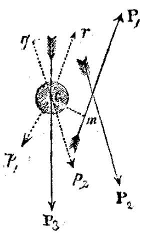
$$2a_1a_2U_2(U_2\cos\iota_{12}+P_3S_2\cos\iota_{13})$$

ein Minimum wird. Setzt man hierin $U_2=P_2S_2$ und dividirt durch den konſtanten Faktor $2a_1a_2U_2S_2$; ſo folgt, daß man für die obige Funktion ein Minimum erhält, wenn der Ausdruck

$$P_2\cos\iota_{12}+P_3\cos\iota_{13}$$

ein ſolches iſt.

Von dem Mittelpunkte C ziehe man die Linien $Cp_1$, $Cp_2$ parallel zu den Richtungen der Kräfte $P_1$, $P_2$, und während $Cp_2$ und $CP_3$ ihre Lagen unverändert beibehalten, nehme man an, der Winkel $p_1CP_3$ oder $\iota_3$ wachſe ſo lange, bis $P_1$ eine ſolche Lage erreicht, in welcher die Bedingung



$$P_2\cos\iota_{12}+P_3\cos\iota_{13}=\text{einem Minimum}$$

erfüllt wird.

Nun iſt $p_1CP_3=p_1Cp_2-p_2CP_3$ oder $\iota_{13}=\iota_{12}-\iota_{23}$. Subſtituirt man dieſen Werth für $\iota_{13}$; ſo wird die Bedingung

$$P_2\cos\iota_{12}+P_3\cos(\iota_{12}-\iota_{23})=\text{einem Minimum, d. i.}$$

$$P_2\cos\iota_{12}+P_3\cos\iota_{12}.\cos\iota_{23}+P_3\sin\iota_{12}.\sin\iota_{23}=\text{einem Minimum}$$

oder

$$(P_2+P_3\cos\iota_{23})\cos\iota_{12}+P_3\sin\iota_{23}.\sin\iota_{12}=\text{einem Minimum.}$$

Dividirt man durch die konſtante Größe $P_2+P_3\cos\iota_{23}$ und ſetzt die konſtante Größe

$$\frac{P_3\sin\iota_{23}}{P_2+P_3\cos\iota_{23}}=\tang\gamma;$$

ſo kommt die Bedingung

$$\cos\iota_{12} + \sin\iota_{12}\operatorname{tang}\gamma = \text{einem Minimum,}$$

oder wenn man mit $\cos\gamma$ multiplizirt,

$$\cos\iota_{12}.\cos\gamma + \sin\iota_{12}.\sin\gamma = \cos(\iota_{12} - \gamma) = \text{einem Minimum.}$$

Hieraus folgt aber

$$\iota_{12} - \gamma = \pi \text{ oder } \iota_{12} = \pi + \gamma, \text{ das iſt}$$

$$\iota_{12} = \pi + \operatorname{arc.tang}\left(\frac{P_3 \sin\iota_{23}}{P_2 + P_3 \cos\iota_{23}}\right) \dots (170)$$

Um alſo der Bedingung des Minimums zu genügen, muß der Winkel $p_1 C p_2$ ſolange vergrößert werden, bis er 180° um jenen Winkel $\gamma$ überſchreitet, deſſen Tangente $\frac{P_3 \sin\iota_{23}}{P_2 + P_3 \cos\iota_{23}}$ iſt. Hiernach findet man die Richtung und Lage der Kraft $P_1$, wenn man die Linie $p_2 C$ bis $q$ verlängert, den Winkel $qCr = \gamma$ macht, $Cm$ perpendikular auf $Cr$ errichtet und ihre Länge gleich dem perpendikularen Abſtande $a_1$ macht, welchen die Richtung der Kraft $P_1$ vom Mittelpunkte der Axe haben ſoll. Wird darauf $mP_1$ durch den Punkt $m$ parallel zu $Cr$ gezogen; ſo erhält man die verlangte Richtung der Kraft $P_1$, welche in dieſer Lage die Maſchine mit einem geringeren Kraftaufwande bewegen wird, als in irgend einer anderen Richtung rund um die Axe herum.

Da der Werth des Winkels $\iota_{12}$ oder $p_2 C p_1$, welcher der Bedingung der größten Krafterſparung oder des geringſten Widerſtandes entſpricht, nothwendig größer iſt, als zwei rechte; ſo folgt, daß $P_1$ und $P_2$ zur Erfüllung jener Bedingung beide an derſelben Seite der Axe angebracht werden müſſen. Es iſt alſo für die vortheilhafteſte Einrichtung einer Maſchine, welche ſich um eine zylindriſche Axe drehet (welches auch ihr Gewicht ſei), eine nothwendige Bedingung, daß **die treibende Kraft an derſelben Seite der Axe angebracht werde, an welcher der Widerſtand überwunden oder die Nutzarbeit verrichtet wird.** Eine zweite Bedingung für die größte Krafterſparung an einer ſolchen Maſchine iſt die, daß ſich die Richtung, in welcher die treibende Kraft angebracht wird, unter einem Winkel $\iota_{13}$, deſſen

Tangente durch die Gleichung (170) bestimmt ist, gegen die Vertikale neige.

Wenn $\iota_{23}=0$ ist, oder wenn die Nutzarbeit in vertikaler Richtung verrichtet wird; so hat man $\gamma=0$, also $\iota_{12}=\pi$, woraus folgt, daß in diesem Falle die treibende Kraft ebenfalls in vertikaler Richtung und an derselben Seite der Axe wie die Arbeit angebracht werden muß.

Wenn $\iota_{23}=\frac{\pi}{2}$, oder wenn die Arbeit in horizontaler Richtung ausgeübt wird; so hat man $\tang\gamma=\frac{P_3}{P_2}$, und daher

$$\iota_{12}=\pi+\text{arc.tang}\left(\frac{P_3}{P_2}\right).$$

Die treibende Kraft muß also in diesem Falle an derselben Seite der Axe, wie die Arbeit, und unter einem Neigungswinkel gegen den Horizont angebracht werden, dessen Tangente gleich dem Gewichte der Maschine, dividirt durch den arbeitenden Druck ist.

Da der Winkel $\iota_{12}$ größer ist, als $\pi$, und kleiner ist, als $\frac{3\pi}{2}$; so ist $\cos\iota_{12}$ negativ, und aus ähnlichen Gründen ist auch $\cos\iota_{13}$ in gewissen Fällen negativ. Hieraus geht hervor, daß die Funktion (169) unter gewissen Bedingungen nicht bloß ein Minimum in Beziehung auf die Neigung der treibenden Kraft, sondern auch in Beziehung auf den Abstand $a_1$ ihrer Richtung von dem Mittelpunkte der Axe zuläßt. Nimmt man zur Untersuchung dieses letzteren Minimums den Raum $S_1$, welchen der Angriffspunkt der treibenden Kraft bei Hervorbringung des Nutzeffektes $U_2$ beschreibt, als gegeben an, und substituirt deshalb in jener Funktion für $S_2 a_1$ den gleichen Werth $S_1 a_2$ (§. 166); so ergibt sich, wenn man das Differenzial der gedachten Funktion in Beziehung zu $a_1$ gleich null setzt, nach gehöriger Reduktion

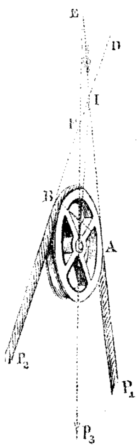
$$a_1=-a_2\frac{U_2{}^2+2U_2P_3S_1\cos\iota_{13}+P_3{}^2S_1{}^2}{U_2{}^2\cos\iota_{12}+U_2P_3S_1\cos\iota_{23}}\;\ldots.(171)$$

Nimmt man statt des Raumes $S_1$ den Raum $S_2$ als gegeben an, und substituirt in der Funktion (169) für $S_1 a_2$ den gleichen Werth $S_2 a_1$; so ergiebt das Differenzial in Beziehung zu $a_1$, gleich null gesetzt,

$$a_1 = - \frac{P_2 a_2}{P_2 \cos \iota_{12} + P_3 \cos \iota_{23}}.$$

Man findet leicht, daß wenn die Werthe von $\iota_{12}$ und $\iota_{23}$ aus Gleichung (170), in die vorstehenden Ausdrücke von $a_1$ substituirt, für $a_1$ einen *positiven* Werth liefern, dieselben in den beiden Fällen einem wirklichen Minimum der Funktion (169) entsprechen und die Bedingungen der größten Krafterſparung in Beziehung auf die Richtung der treibenden Kraft vollkommen bestimmen.

## §. 170. **Die Rolle, wenn die Spannungen des Seiles auf beiden Seiten nicht vertikal gerichtet sind.**




In dem Falle, wo die beiden Enden des über die Rolle gehenden Seiles einander nicht parallel sind, können die Beziehungen aus §. 158 nicht angewendet werden, und man muß behuf Aufstellung der Bedingungen für das Gleichgewicht der Spannungen im Gränzzustande zu der Gleichung (167) seine Zuflucht nehmen. Bezeichnet man das Gewicht der Rolle mit W, ihren Halbmesser mit $a$, und beachtet, daß die Wirkung der Steifigkeit des Seiles auf die Vermehrung der Spannung $P_2$ dieselbe ist, als wenn die Spannung $P_2$ gleich $P_2\left(1+\frac{E}{a}\right)+\frac{D}{a}$ (§. 142) geworden wäre; so hat man

$$P_1 = \left[1 + \frac{L\varrho}{a^2}\sin\varphi\right]\left[P_2\left(1+\frac{E}{a}\right)+\frac{D}{a}\right]+\frac{M\varrho}{a^2 L} W \sin\varphi \text{ oder}$$

$$P_1 = \left(1+\frac{E}{a}\right)\left(1+\frac{L\varrho}{a^2}\sin\varphi\right)P_2 + \frac{D}{a} + \frac{DL}{a^3}\varrho\sin\varphi + \frac{MW}{a^2 L}\varrho\sin\varphi$$

oder auch

$$P_1 = \left(1+\frac{E}{a}\right)\left(1+\frac{L\varrho}{a^2}\sin\varphi\right)P_2 + \frac{D}{a}\left[1+\left(\frac{L}{a^2}+\frac{MW}{LDa}\right)\varrho\sin\varphi\right]. \quad (172)$$

Hierin stellt L die Sehne AB des von dem Seile umspannten Bogens dar, M ist $=a^2(\cos\iota_{13}+\cos\iota_{23})$, $\iota_{13}$ und $\iota_{23}$ bezeichnen die Neigungen von $P_1$ und $P_2$ gegen die Vertikale. Diese Neigungen werden durch die Winkel $P_1EP_3$ und $P_2FP_3$ oder durch deren Nebenwinkel gemessen, jenachdem die entsprechenden Kräfte $P_1$ und $P_2$ nach unten, wie in der Figur und ebenso wie das Gewicht der Rolle, oder nach oben wirken, sodaß, wenn beide Kräfte aufwärts wirken, ihre beiden Kosinus negativ werden und damit auch der Werth von M negativ wird, während, wenn nur Eine Kraft aufwärts wirkt, auch nur das Eine Glied des Werthes von M negativ wird.

Substituirt man diesen Werth von M, beachtet dabei, daß $L=2a\cos\iota$ ist, wenn $2\iota$ den Neigungswinkel $P_1JP_2$ der beiden Seilenden gegeneinander bezeichnet (sodaß $2\iota=\iota_{13}+\iota_{23}$) und vernachlässigt die Glieder, welche Produkte aus zweien der sehr kleinen Größen $\frac{D}{a}$, $\frac{E}{a}$ und $\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$ enthalten; so ergibt sich

$$P_1=\left(1+\frac{E}{a}+\frac{2\varrho}{a}\cos\iota\,.\sin\varphi\right)P_2+\frac{D}{a}+\frac{W\varrho(\cos\iota_{13}+\iota_{23})\sin\varphi}{2a\cos\iota},$$

$$U_1=\left(1+\frac{E}{a}+\frac{2\varrho}{a}\cos\iota.\sin\varphi\right)U_2+\left[\frac{D}{a}+\frac{W\varrho(\cos\iota_{13}+\cos\iota_{23})\sin\varphi}{2a\cos\iota}\right]S_1 \quad \ldots\ldots (173)$$

Die letztere Gleichung ist der Model für die Rolle, wenn die beiden Enden des Seiles gegen die Vertikale und gegen einander geneigt sind.

## §. 171. Die Rolle vom kleinsten Widerstande.

Eine bloße Ansicht des Models (173) lehrt, daß der Kraftaufwand zur Hervorbringung einer bestimmten Nutzarbeit $U_2$ vermittelst einer Rolle um so geringer sein würde, je größer ihr Halbmesser $a$ ist, wennnicht gleichzeitig mit diesem Halbmesser ihr Gewicht W w ü ch s e. Wenn die Dicke der Rolle als konstant angenommen wird, und ihre übrigen Dimensionen dieselben Verhältnisse zueinander behalten; so wird ihr Gewicht W wie das Quadrat des Halbmessers $a$ variiren, und es wird offenbar einen gewissen Werth von $a$ geben, für welchen der Werth von $U_1$ aus Gleichung (173), der einem gegebenen Werthe von $U_2$ entspricht, ein Minimum wird, das heißt, es wird gewisse Dimensionen der Rolle geben, unter welchen sie mit dem geringsten Kraftaufwande gebraucht werden kann. Um diese Dimensionen zu bestimmen, so setze man $W = ca^2$. Substituirt man diesen Werth für W in die Gleichung (173), dividirt dieselbe durch $S_1$, beachtet dabei, daß hier $U_2 = P_2 S_2 = P_2 S_1$ ist, und differenziirt alsdann zweimal in Beziehung zu $a$; so ergeben sich für den Werth von $a$, welcher einem Minimum von $U_1$ entspricht, die Bedingungen

$$\frac{1}{S^1}\frac{dU_1}{da} = -\frac{1}{a^2}(E + 2\varrho\cos\iota.\sin\varphi)P_2 - \frac{D}{a^2} + \frac{c\varrho(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23})\sin\varphi}{2\cos\iota} = 0,$$

$$\frac{1}{S^1}\cdot\frac{d^2U_1}{da^2} = \frac{2}{a^3}(E + 2\varrho\cos\iota.\sin\varphi)P_2 + \frac{2D}{a^3} > 0.$$

Dieselben werden durch den Werth

$$a = \sqrt{\frac{2[(E + 2\varrho\cos\iota.\sin\varphi)P_2 + D]\cos\iota}{c\varrho(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23})\sin\varphi}} \quad \ldots.(174)\ ^{*)}$$

erfüllt.

---

*) Aus der vorstehenden Formel (174) folgt für das Gewicht der Rolle vom kleinsten Widerstande

$$W = ca^2 = \frac{2[(E + 2\varrho\cos\iota.\sin\varphi)P_2 + D]\cos\iota}{\varrho(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23})\sin\varphi}$$

$$= \frac{2a\cos\iota}{\varrho\sin\varphi(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23})}\cdot\frac{D + EP_2}{a} + \frac{4\cos^2\iota}{\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}}P_2$$

ein Werth, welcher den Umständen nach $>$ oder $< \frac{D + EP_2}{a} + P_2$ sein wird. Außerdem bemerkt man, daß diese Formel nur dann angewandt werden kann, wenn $\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}$ eine positive Größe ist: denn da alle übrigen darin vorkommenden Größen durchaus positiv sind; so würde man für einen negativen Werth von $\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}$ auch einen negativen Werth für das Gewicht W und für den Halbmesser $a$ eine imaginäre Größe erhalten, was unmöglich ist. Ist nun aber der für W sich ergebende Werth größer, als $\frac{D + EP_2}{a} + P_2$; so sieht man, daß alsdann die Bedingung nicht mehr erfüllt ist, unter welcher in §. 166 der Werth der Wurzelgröße $\sqrt{P_2^2 L^2 + P_3^2 a_1^2 + 2P_2 P_3 M}$ näherungsweise gleich $P_2 L + P_3 \frac{M}{L}$ gesetzt ist, in welchen Ausdrücken $P_3$ für W

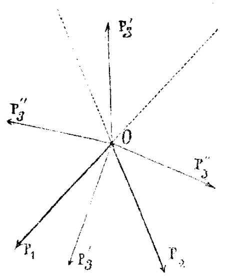
§. 172. **Wenn beide Seilenden unter demselben Winkel gegen die Vertikale geneigt sind, und auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen; so hat man $\iota_{13} = \iota_{23} = \iota$, $\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23} = 2\cos\iota$, und die Gleichungen (172) und (173) werden**

---

und $P_2$ für $P_2 + \frac{D+EP_2}{a}$ steht. Man würde also für den Fall, daß $P_3 > P_2$ wäre, jene Wurzelgröße auf eine andere Weise entwickeln müssen. Führt man zu diesem Ende die Beziehungen des §s. 167 wieder ein; so ist jene Wurzelgröße

$$A = \sqrt{(P_2a_1)^2+(P_2a_2)^2+(P_3a_1)^2+2(P_2a_1)(P_2a_2)\cos\iota_{12}+2(P_2a_1)(P_3a_1)\cos\iota_{23}+2(P_2a_2)(P_3a_1)\cos\iota_{13}}$$

Hierin bezeichnen $\iota_{12}$, $\iota_{13}$, und $\iota_{23}$ die Winkel, welche die positiven Richtungen der Kräfte $P_1$ und $P_2$, $P_1$ und $P_3$, $P_2$ und $P_3$ miteinander einschließen, sodaß diese Winkel sämmtlich $< \pi$ sind. Von diesen drei Winkeln sind immer nur zwei willkürlich und der dritte ist durch diese beiden bestimmt; es sind hierbei aber zwei besondere Fälle zu unterscheiden. Wenn man nämlich die positiven Richtungen der drei Kräfte $P_1$, $P_2$, und $P_3$ an Ein und denselben Punkt O trägt; so liegt die Richtung der dritten Kraft $P_3$, erstens, entweder zwischen den positiven Richtungen der beiden anderen Kräfte $P_1$ und $P_2$ oder auch zwischen deren Verlängerungen, wie Dies die Lagen $P'_3$ bezeichnen, oder die dritte Kraft $P_3$ fällt, zweitens, zwischen die positive Richtung der Einen und die Verlängerung der anderen der beiden Kräfte $P_3$ und $P_2$, wie Dies durch die Lagen $P''_3$ dargestellt ist. Man sieht leicht, daß man für den ersten Fall immer




$$\cos\iota_{12} = \cos\iota_{13} \,.\, \cos\iota_{23} - \sin\iota_{13} \,.\, \sin\iota_{23}$$

und für den zweiten Fall immer

$$\cos\iota_{12} = \cos\iota_{13} \,.\, \cos\iota_{23} + \sin\iota_{13} \,.\, \sin\iota_{23},$$

also allgemein, mit Unterscheidung der beiden gedachten Fälle

$$\cos\iota_{12} = \cos\iota_{13} \,.\, \cos\iota_{23} \mp \sin\iota_{13} \,.\, \sin\iota_{23}$$

hat. Fällt die Kraft $P_3$ gerade in die Richtung von $P_1$ oder $P_2$; so gilt die Formel für den ersten Fall: fällt sie gerade in die Verlängerung von $P_1$ oder $P_2$; so gilt die Formel für den zweiten Fall.

Setzt man diesen Werth für $\cos\iota_{12}$ in die Wurzelgröße A und substituirt für $(P_2a_1)^2$ und $(P_2a_2)^2$ die gleich bedeutenden Ausdrücke $(P_2a_1)^2(\cos^2\iota_{13}+\sin^2\iota_{13})$ und $(P_2a_2)^2(\cos^2\iota_{23}+\sin^2\iota_{23})$; so läßt sich dieselbe unter die Form

$$A = \sqrt{(P_2a_1\cos\iota_{13}+P_2a_2\cos\iota_{23}+P_3a_1)^2+(P_2a_1\sin\iota_{13}\mp P_2a_2\sin\iota_{23})^2}$$

bringen, auf welche man den ersten Ponceletschen Lehrsatz anwenden kann, welcher im Anhange bewiesen ist. Will man es unentschieden lassen, welches der beiden Quadrate unter dem Wurzelzeichen das größere sei, und sich demnach in dem ungünstigsten Falle mit einem Fehler von etwa $\frac{1}{6}$ begnügen; so kann man

$$P_1 = \left(1 + \frac{E}{a} + \frac{2\varrho}{a}\cos\iota.\sin\varphi\right)P_2 + \frac{D}{a} + \frac{W\varrho}{a}\sin\varphi \ldots (175)$$

$$U_1 = \left(1 + \frac{E}{a} + \frac{2\varrho}{a}\cos\iota.\sin\varphi\right)U_2 + \left(\frac{D}{a} + \frac{W\varrho}{a}\sin\varphi\right)S_1 \ldots (176)$$

Der Halbmesser der Rolle vom kleinsten Widerstande

---

$A = 0{,}828(P_2 a_1 \cos\iota_{13} + P_2 a_2 \cos\iota_{23} + P_3 a_1) + 0{,}828(P_2 a_1 \sin\iota_{13} \mp P_2 a_2 \sin\iota_{23})$

setzen. Ist jedoch der absolute Werth von $P_2 a_1 \cos\iota_{13} + P_2 a_2 \cos\iota_{23} + P_3 a_1 > P_2 a_1 \sin\iota_{13} \mp P_2 a_2 \sin\iota_{23}$; so hat man mit mehr Genauigkeit

$A = 0{,}96(P_2 a_1 \cos\iota_{13} + P_2 a_2 \cos\iota_{23} + P_3 a_1) + 0{,}4(P_2 a_1 \sin\iota_{13} \mp P_3 a_2 \sin\iota_{23})$,

und wenn umgekehrt der absolute Werth von $P_2 a_1 \sin\iota_{13} \mp P_2 a_2 \sin\iota_{23} > P_2 a_1 \cos\iota_{13} + P_2 a_2 \cos\iota_{23} + P_3 a_1$ wäre,

$A = 0{,}96(P_2 a_1 \sin\iota_{13} \mp P_3 a_2 \sin\iota_{23}) + 0{,}4(P_2 a_1 \cos\iota_{13} + P_2 a_2 \cos\iota_{23} + P_3 a_1)$.

Unter der ersteren Voraussetzung, wo

$$P_2 a_1 \cos\iota_{13} + P_2 a_2 \cos\iota_{23} + P_3 a_1 > P_2 a_1 \sin\iota_{13} \mp P_2 a_2 \sin\iota_{23} \text{ oder}$$

$$P_3 > \frac{1}{a_1}[a_1(\sin\iota_{13} - \cos\iota_{13}) + a_2(\mp\sin\iota_{23} - \cos\iota_{23})]P_2$$

ist, hat man also näherungsweise

$A = [0{,}96(a_1 \cos\iota_{13} + a_2 \cos\iota_{23}) + 0{,}4(a_1 \sin\iota_{13} \mp a_2 \sin\iota_{23})]P_2 + 0{,}96 a_1 P_3$.

Substituirt man diesen Werth für die Wurzelgröße in Gleichung (161); so erhält man statt (163) eine andere Näherungsformel, aus welcher sich denn auch leicht der Model (Gleichung 164) ableiten läßt.

Für die Rolle, wo $a_1 = a_2 = a$ ist, hat man

$$A = a[0{,}96(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}) + 0{,}4(\sin\iota_{13} \mp \sin\iota_{23})]P_2 + 0{,}96\, a P_3.$$

Hierdurch wird die Gleichung (161)

$$P_1 = \left\{1 + \frac{\varrho\sin\varphi}{a}[0{,}96(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}) + 0{,}4(\sin\iota_{13} \mp \sin\iota_{23})]\right\}P_2 + 0{,}96\frac{\varrho\sin\varphi}{a}P_3,$$

oder wenn man $0{,}96(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}) + 0{,}4(\sin\iota_{13} \mp \sin\iota_{23}) = B$ setzt,

$$P_1 = \left(1 + \frac{\varrho\sin\varphi}{a}B\right)P_2 + 0{,}96\frac{\varrho\sin\varphi}{a}P_3.$$

Nimmt man nun bei der Anwendung auf eine Rolle auf die Steifigkeit des Seiles Rücksicht, substituirt demnach $P_2\left(1 + \frac{E}{a}\right) + \frac{D}{a}$ für $P_2$ und setzt $P_3 = W$, gleich dem Gewichte der Rolle; so erhält man statt Gleichung (172) oder von der größten Kraftersparung ist in diesem Falle nach Gleichung (174)

$$a = \sqrt{\frac{1}{c}\left[\left(\frac{E}{\varrho\sin\varphi} + 2\cos\iota\right)P_2 + \frac{D}{\varrho\sin\varphi}\right]} \ldots (177)$$

---

$$P_1 = \left(1 + \frac{E}{a}\right)\left(1 + \frac{\varrho\sin\varphi}{a}B\right)P_2 + \frac{D}{a}\left[1 + \left(B + \frac{0,96\,W}{D}\right)\varrho\sin\varphi\right],$$

oder wenn man die Produkte von $\frac{D}{a}$ und $\frac{E}{a}$ in $\varrho\sin\varphi$ vernachlässigt,

$$P_1 = \left(1 + \frac{E}{a} + \frac{\varrho\sin\varphi}{a}B\right)P_2 + \frac{D}{a} + \frac{0,96\,W}{a}\varrho\sin\varphi,$$

und demnach für den Model, statt Gleichung (173),

$$U_1 = \left(1 + \frac{E}{a} + \frac{\varrho\sin\varphi}{a}B\right)U_2 + \left[\frac{D}{a} + \frac{0,96\,W\,\varrho\sin\varphi}{a}\right]S_1.$$

Verfährt man nun zur Bestimmung des Halbmessers der Rolle vom kleinsten Widerstande ebenso wie im vorstehenden Paragraphe, indem man $W = c\,a^2$ und $\frac{1}{S_1}\frac{d\,U_1}{d\,a} = o$ setzt; so ergibt sich für diesen Halbmesser statt des Ausdruckes (174)

$$a = \sqrt{\frac{(E + \varrho\sin\varphi\,.\,B)P_2 + D}{0,96\,.\,c\,.\,\varrho\sin\varphi}} = \sqrt{\frac{1}{0,96\,.\,c}\left(\frac{D + E\,P_2}{\varrho\sin\varphi} + B\,P_2\right)},$$

worin $B = 0,96(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}) + 0,4(\sin\iota_{13} \mp \sin\iota_{23})$

ist.

Diese Formeln sind für die Voraussetzung entwickelt, daß

$$W > (\sin\iota_{13} - \cos\iota_{13} \mp \sin\iota_{23} - \cos\iota_{23})\left[P_2\left(1 + \frac{E}{a}\right) + \frac{D}{a}\right]$$

sei; wäre

$$W < (\sin\iota_{13} - \cos\iota_{13} \mp \sin\iota_{23} - \cos\iota_{23})\left[P_2\left(1 + \frac{E}{a}\right) + \frac{D}{a}\right];$$

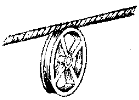
so brauchte man in den vorstehenden Formeln nur 0,4 statt 0,96 und 0,96 statt 0,4, also

$$B = 0,4(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23}) + 0,96(\sin\iota_{13} \mp \sin\iota_{23})$$

zu setzen.

Die Zweideutigkeit von $\mp\sin\iota_{23}$ bezieht sich hierbei immer auf die besondere Lage der Richtung der Kraft $P_3$ oder der Vertikalen gegen die Richtungen der Spannungen $P_1$ und $P_2$. Außerdem ist noch darauf zu achten, daß die beiden Glieder der nach dem Ponceletschen Lehrsatze entwickelten Wurzelgrößen durchaus positiv seien, d. h., daß $(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23})P_2 + P_3 > 0$ und auch $\sin\iota_{13} \mp \sin\iota_{23} > 0$, worin $P_2$ für $P_2\left(1 + \frac{E}{a}\right) + \frac{D}{a}$ und $P_3$ für $W$ steht. Sollte es sich ereignen, daß Eine dieser beiden Größen negativ würde; so hätte man dieselbe mit dem entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, sodaß stets nur der absolute Werth von $(\cos\iota_{13} + \cos\iota_{23})P_2 + P_3$ und $\sin\iota_1 \mp \sin\iota_{23}$

§. 173. Wenn die beiden Enden des über die Rolle gehenden Seiles in derselben horizontalen Linie liegen, sodaß die Rolle von der Spannung des Seiles keinen Druck erleidet und nur ihr eigenes Gewicht zu tragen hat; so ist $\iota = \frac{\pi}{2}$ und die $\cos\iota$ enthaltenden Glieder verschwinden aus den obigen Gleichungen.



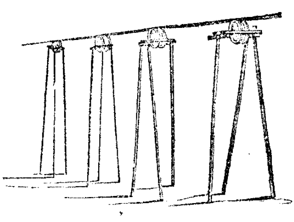
Man bemerkt übrigens, daß sich in diesem Falle das Gewicht, welches auf der Axe der Rolle lastet, um das Gewicht des Seiles vermehrt, welches die Rolle zu tragen hat. Ist also die Länge des von der Rolle zu tragenden Seiles gleich $s$ und das Gewicht eines jeden laufenden Fußes des Seiles gleich $\mu$; so wird das auf der Axe der Rolle ruhende Gewicht durch $W + \mu s$ ausgedrückt. Substituirt man diesen Werth statt W in Gleichung (176) und setzt $\cos\iota = 0$; so erhält man

$$U_1 = \left(1 + \frac{E}{a}\right)U_2 + \frac{1}{a}[D + (W + \mu s)\varrho \sin\varphi]S_1 \ldots . (178)$$

Die Rolle vom kleinsten Widerstande wird in diesem Falle ebenso wie in §. 171 bestimmt, indem man $W = ca^2$ setzt und für $a$ differenziirt. Der Werth von $a$, welcher den Bedingungen $\frac{dU_1}{da} = o$ und $\frac{d^2U}{da^2} > o$ ein Genüge leistet, ist hier

$$a = \sqrt{\frac{1}{c}\left(\frac{E \cdot P_2 + D}{\varrho \sin\varphi} + \mu s\right)} \ldots . (179)$$

§. 174. Nimmt man an, es seien $n$ gleiche Rollen gegeben, von denen eine jede dieselbe Länge $s$ eines Seiles zu tragen hat, und bezeichnet mit $U_2$ die Arbeit, welche von der Spannung des Seiles (bei der Beschreibung des Raumes $S_1$) verrichtet ist, nachdem dasselbe über die $n$te oder letzte Rolle gegangen ist, und mit $U_1$ die Arbeit, welche



in Rechnung kommt. Hierzu gehört unter anderen der in der Note zu §. 154 erörterte besondere Fall, wo $\iota_{13} = \iota_{23} = \pi$ und $P_3$ entweder $<$ oder $>$ $2P_2$ ist.

auf das Seil entwickelt ist, ehe es über die erste Rolle ging; so hat man nach §. 163, Gleichung 152, 154 und 178, wenn man höhere Potenzen als die erste von $\frac{E}{a}$, $\frac{D}{a}$, $\frac{\varrho}{a} \sin \varphi$ vernachlässigt und bemerkt, daß hier

$$a_1 = a_2 = \text{etc.} = 1 + \frac{E}{a}$$

$$a_1(0) = a_2(0) = \text{etc.} = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \text{etc.} = \frac{E}{a},$$

$$b_1 = b_2 = \text{etc.} = \frac{1}{a} [D + (W + \mu s) \varrho \sin \varphi]$$

ist,

$$U_1 = \left(1 + n \frac{E}{a}\right) U_2 + \frac{n}{a} [D + (W + \mu s) \varrho \sin \varphi] S_1,$$

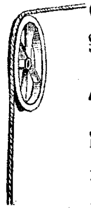
oder wenn man das ganze Gewicht des von allen Rollen zu tragenden Seiles mit $w$ bezeichnet, da alsdann $\mu n s = w$ ist,

$$U_1 = \left(1 + \frac{nE}{a}\right) U_2 + \frac{1}{a} [n D + (n W + w (\varrho \sin \varphi] S_1 \ldots . (180)$$

Bei den vorstehenden Gleichungen ist vorausgesetzt, daß obgleich die Richtung des Seiles zu beiden Seiten einer jeden Rolle so nahe horizontal sei, daß man $\cos \iota = o$ setzen könne, das Seil sich doch so weit um die Rollen biege, daß sich seine Oberfläche dem Umfange derselben anschmiege und demnach den ganzen Widerstande erzeuge, welcher der Steifigkeit zukommt. Wäre jedoch die Spannung so groß, daß das Seil wie ein unbiegsamer Stab auf den Rollen ruhete; so muß in den obigen Gleichungen $E = o$ und $D = o$ gesetzt werden. Der Halbmesser der Rolle vom kleinsten Widerstande (Gleichung 179) würde in diesem Falle

$$a = \sqrt{\frac{\mu s}{c}} \ldots . (181)$$

werden.



§. 175. Wenn das Eine Ende des über die Rolle gehenden Seiles eine horizontale und das andere eine vertikale Richtung hat; so wird der Eine der beiden Winkel $\iota_{13}$ oder $\iota_{23}$ (Gleichung 173) gleich $\frac{\pi}{2}$ und der andere gleich $o$ oder $\pi$, jenachdem die Spannung des vertikalen Seiles nach unten oder nach oben gerichtet ist, sodaß $\cos\iota_{13}+\cos\iota_{23}=\pm 1$ wird, worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die an dem vertikalen Seile angebrachte Kraft nach unten oder nach oben wirkt. Außerdem wird in diesem Falle (§. 170) $\iota=\pi$ und $\cos\iota=\frac{1}{\sqrt{2}}$, und man erhält nach Gleichung (173)

$$P_1=\left(1+\frac{E}{a}+\frac{\varrho\sqrt{2}}{a}\sin\varphi\right)P_2+\frac{1}{a}\left(D\pm\frac{W\varrho}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\ldots(182)$$

$$U_1=\left(1+\frac{E}{a}+\frac{\varrho\sqrt{2}}{a}\sin\varphi\right)U_2+\frac{1}{a}\left(D\pm\frac{W\varrho}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)S_1\ldots(183)$$

Der Halbmesser der Rolle vom kleinsten Widerstande (Gleichung 174) ist in diesem Falle durch die Gleichung

$$a=\sqrt{\frac{1}{c}\left[\frac{EP_2+D}{\varrho\sin\varphi}\sqrt{2}+2P_2\right]}\ldots(184)$$

bestimmt *).

---

*) Nach der Note zu §. 171 hat man, wenn die treibende Kraft $P_1$ horizontal und der Widerstand $P_2$ vertikal wirkt:

1. wenn $P_2$ vertikal nach unten wirkt,

$$B=0{,}96\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0+\right)0{,}4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=0{,}96+0{,}4=1{,}36,$$

also

$$a=\sqrt{\frac{1}{0{,}96\,.\,c}\left(\frac{D+EP_2}{\varrho\sin\varphi}+1{,}36\,P_2\right)}.$$

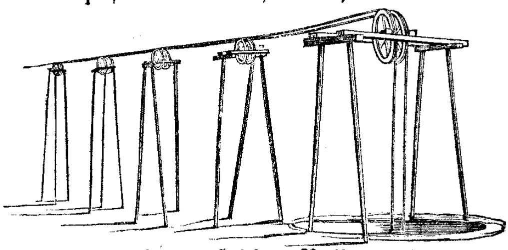
2. wenn $P_2$ vertikal nach oben wirkt,

$$B=0{,}96\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi\right)+0{,}4\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi\right)=-0{,}96+0{,}4=-0{,}56,$$

also

**§. 176. Model eines Systemes von Rollen, über deren letzte das Seil vertikal herabhängt, während es von den übrigen horizontal getragen wird.**

$U_1$ sei die Arbeit, welche von der treibenden Kraft bei Beschreibung des Raumes $S_1$ auf das Seil ausgeübt wird, ehe es horizontal über die erste Rolle geleitet ist.



Das Seil gehe über $n$ solcher Rollen und nehme alsdann, nachdem es über eine andere Rolle von verschiedenen Dimensionen geleitet ist, eine vertikale Richtung nach unten an. Bezeichnet man mit $U_2$ die Nutzarbeit, welche bei Beschreibung des Raumes $S_1$ verrichtet wird, nachdem das Seil unmittelbar in die vertikale Richtung übergegangen ist, und mit $u_1$ die Arbeit, welche auf das Seil ausgeübt wird, ehe dasselbe vor der letzten Rolle des Systemes ankommt; so hat man nach Gleichung (183)

---

$$a = \sqrt{\frac{1}{0{,}96 \, . \, c}\left(\frac{D + E P_2}{\varrho \sin \varphi} - 0{,}56 \, P_2\right)}.$$

Ferner wenn die treibende Kraft $P_1$ vertikal und der Widerstand $P_2$ horizontal wirkt:

3. wenn $P_1$ vertikal nach unten wirkt,

$$B = 0{,}96\left(\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}4\left(\sin 0 - \sin \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}96 + 0{,}4 = 1{,}36$$

(da $\sin \iota_{13} - \sin \iota_{23}$ nicht negativ werden darf); also

$$a = \sqrt{\frac{1}{0{,}96 \, . \, c}\left(\frac{D + E P_2}{\varrho \sin \varphi} + 1{,}36 \, P_2\right)}.$$

4. wenn $P_1$ vertikal nach oben wirkt,

$$B = 0{,}96\left(\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}4\left(\sin \pi + \sin \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}96 + 0{,}4 = -0{,}56,$$

also

$$a = \sqrt{\frac{1}{0{,}96 \, . \, c}\left(\frac{D + E P_2}{\varrho \sin \varphi} - 0{,}56 \, P_2\right)}.$$

$$u_1\left(1+\frac{E}{a}+\frac{\varrho\sqrt{2}}{a}\sin\varphi\right)U_2+\frac{1}{a}\left(D+\frac{W\varrho}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)S_1.$$

Ferner hat man nach Gleichung (180), wenn man den Halbmesser einer jeden der Rollen, welche das Seil horizontal fortleiten, mit $a_1$, den Halbmesser ihrer Axe mit $\varrho_1$, ihr Gewicht mit $W_1$ bezeichnet und dabei bemerkt, daß hier $U_1$ die Arbeit der treibenden Kraft und $u_1$ die des Widerstandes ist,

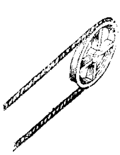
$$U_1=\left(1+\frac{nE}{a_1}\right)u_1+\frac{1}{a_1}\left[nD+(nW_1+w)\varrho_1\sin\varphi\right]S_1.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen die Größe $u_1$ und vernachlässigt höhere Potenzen, als die erste, von $\frac{E}{a}$ etc.; so kommt

$$U_1=\left\{1+E\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{a_1}\right)+\frac{\varrho\sqrt{2}}{a}\sin\varphi\right\}U_2$$

$$+\left\{D\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{a_1}\right)+\frac{nE}{a_1}+\left[\frac{W\varrho}{a\sqrt{2}}+\frac{(nW_1+w)\varrho_1}{a_1}\right]\sin\varphi\right\}S_1 \quad \ldots (185)$$

§. 177. Wenn die beiden Seilenden parallel sind, und man bezeichnet ihre gemeinschaftliche Neigung gegen die Vertikale mit $\iota'$, sodaß $\iota_{13}=\iota_{23}=\iota'$ ist; so hat man nach Gleichung (172), da hier $L=2a$ und $M=2a^2\cos\iota'$ wird, wenn man Glieder von mehr als Einer Dimension in $\frac{E}{a}$ und $\frac{\varrho}{a}$ vernachlässigt,



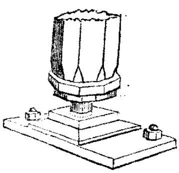
$$P_1=\left[1+\frac{E}{a}+\frac{2\varrho}{a}\sin\varphi\right]P_2+\frac{D}{a}\left[1+\left(\frac{2}{a}+\frac{W\cos\iota'}{D}\right)\varrho\sin\varphi\right] \quad \ldots (186)$$

$$U_1=\left[1+\frac{E}{a}+\frac{2\varrho}{a}\sin\varphi\right]U_2+\frac{D}{a}\left[1+\left(\frac{2}{a}+\frac{W\cos\iota'}{D}\right)\varrho\sin\varphi\right]S_1 \quad \ldots (187)$$

in welchen Gleichungen $\iota'$ größer oder kleiner, als $\frac{\pi}{2}$, und daher auch $\cos\iota'$ positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem die Spannungen der Seile nach unten oder nach oben wirken. Wenn die Spannungen vertikal gerichtet sind; so hat man entweder $\iota'=0$ oder $=\pi$, jenachdem dieselben nach unten oder nach oben wirken, sodaß alsdann $\cos\iota'=\pm 1$ ist. In diesem Falle stimmen die vorstehenden Gleichungen mit den Gleichungen (131) und (132) überein. Wenn die parallelen Spannungen horizontal sind; so hat man $\iota'=\frac{\pi}{2}$ und die in $\cos\iota'$ multiplizirten Glieder verschwinden aus den obigen Gleichungen.

## Die Reibung eines stehenden Zapfens.

§. 178. Wenn eine vertikal stehende Welle auf einem Zapfen ruhet, so sei **W** der gesammte Druck, welchen die Stirnfläche des Letzteren in paralleler Richtung zu der Axe der Welle auszuhalten hat. Bezeichnet man den Halbmesser eines solchen Zapfens mit $\varrho_1$; so ist $\pi\varrho_1{}^2$ seine Stirnfläche und $\frac{\mathbf{W}}{\pi\varrho_1{}^2}$ der Druck, welchen eine Einheit dieser Fläche zu tragen hat, und wenn man den Reibungskoeffizienten (§. 133) gleich $f$ setzt; so stellt $\frac{\mathbf{W}f}{\pi\varrho_1{}^2}$ die Kraft dar, welche parallel zur Stirnfläche des Zapfens angebracht werden muß, um die Reibung einer jeden solchen Flächeinheit zu überwinden.



Nun seien die punktirten Linien in der seitstehenden Figur die äußersten Umkreise eines ungemein schmalen konzentrischen Ringes von der Stirnfläche des Zapfens und $\varrho$ und $\varrho+\triangle\varrho$ die entsprechenden Halbmesser; alsdann wird die Fläche dieses Ringes durch $\pi(\varrho+\triangle\varrho)^2-\pi\varrho^2$ oder durch $\pi(2\varrho.\triangle\varrho+\triangle\varrho^2)$, $=\pi(2\varrho+\triangle\varrho)\triangle\varrho$ oder, da $\triangle\varrho$ gegen $\varrho$ ungemein klein ist, durch $2\pi\varrho\triangle\varrho$ ausgedrückt. Da die Reibung für eine jede Einheit dieser Ringfläche $\frac{\mathbf{W}f}{\pi\varrho_1{}^2}$ beträgt; so ist die ganze Reibung auf dieser Ringfläche gleich $\frac{\mathbf{W}f}{\pi\varrho_1{}^2}.2\pi\varrho\triangle\varrho$

$=\frac{2Wf}{\varrho_1^{\,2}}\varrho\triangle\varrho$ und das Moment dieser Reibung in Beziehung zu dem Mittelpunkte des Zapfens oder der Axe ist $\frac{2Wf}{\varrho_1^{\,2}}\varrho^2\triangle\varrho$. Die Summe der Momente der Reibungen aller solcher Ringflächen, welche die ganze Stirnfläche des Zapfens bilden, ist demnach

$$\Sigma\frac{2Wf}{\varrho_1^{\,2}}.\varrho^2\triangle\varrho=\frac{2Wf}{\varrho_1^{\,2}}\Sigma\varrho^2\triangle\varrho, \text{ das ist}$$

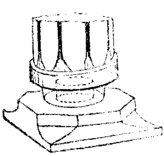
$$=\frac{2Wf}{\varrho_1^{\,2}}\int_0^{\varrho_1}\varrho^2 d\varrho=\frac{2Wf}{\varrho_1^{\,2}}\tfrac{1}{3}\varrho_1^{\,3}=\tfrac{2}{3}Wf\varrho_1 \ldots\ldots (188)$$

Hieraus folgt, daß die Reibung des stehenden Zapfens der Umdrehung der auf demselben ruhenden Masse denselben Widerstand entgegensetzt, als wenn der ganze von der Stirnfläche des Zapfens zu tragende Druck in Einem Punkte vereinigt wäre, welcher um zwei Drittel der Länge des Halbmessers des Zapfens von dessen Mittelpunkte absteht.

Wenn $\vartheta$ den Winkel bezeichnet, um welchen sich der Zapfen drehet; so ist $\tfrac{2}{3}\varrho_1\vartheta$ der Raum, welchen gleichzeitig der zuletzt erwähnte Punkt beschreibt, und demnach ist die **Arbeit**, welche auf den daselbst wirkenden Widerstand $Wf$ verwendet ist, während sich der Zapfen um den Winkel $\vartheta$ drehet, gleich $\tfrac{2}{3}\varrho_1 Wf\vartheta$. Die für eine ganze Umdrehung des Zapfens zu entwickelnde Arbeit ist daher

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho_1 fW \ldots\ldots (189)$$

§. 179. Wenn der Zapfen hohl ist, oder wenn seine Stirnfläche eine ringförmige Fläche bildet, so sei $\varrho_1$ der äußere und $\varrho_2$ der innere Halbmesser. Die Fläche dieses Ringes wird alsdann durch $\pi(\varrho_1^{\,2}-\varrho_2^{\,2})$ ausgedrückt, und man hat für den Druck auf eine jede Einheit dieser Fläche



$\frac{W}{\pi(\varrho_1^{\,2}-\varrho_2^{\,2})}$ und für die Reibung auf einer solchen Flächeneinheit $\frac{fW}{\pi(\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2)}$. Für die Reibung auf einer jeden elementaren Ringfläche erhält man, wie vorhin, den Ausdruck $\frac{2fW}{\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2} \cdot \varrho \triangle \varrho$ und für die Summe der Momente der Reibungen aller Elemente der Stirnfläche des Zapfens

$$\frac{2fW}{\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2} \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \varrho^2 d\varrho \text{ oder } \tfrac{2}{3} fW \left( \frac{\varrho_1{}^3 - \varrho_2{}^3}{\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2} \right).$$

Bezeichnet man den mittleren Halbmesser des Zapfens, also die Länge $\frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$ mit $r$ und die halbe Breite des Ringes, d. i. $\frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)$ mit $l$; so ist $\varrho_1 = r + l$ und $\varrho_2 = r - l$. Substituirt man diese Werthe für $\varrho_1$ und $\varrho_2$ in den vorstehenden Ausdruck; so wird derselbe

$$\tfrac{2}{3} fW \left[ \frac{(r+l)^3 - (r-l)^3}{(r+l)^2 - (r-l)^2} \right] = \tfrac{2}{3} fW \left[ \frac{6r^2 l + 2l^3}{4rl} \right] \text{ oder}$$

$$fr \left[ 1 + \tfrac{1}{3} \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] W \ldots . \quad (190)$$

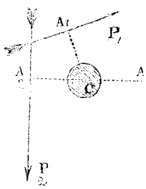
Hieraus folgt, daß die Reibung eines ringförmigen stehenden Zapfens dieselbe Wirkung hervorbringt, als wenn der ganze Druck in einem Punkte vereinigt wäre, welcher um $r\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]$ von dem Mittelpunkte des Zapfens absteht, wenn $r$ den mittleren Halbmesser und $l$ die halbe Breite des Ringes bezeichnet.

Man sieht, wie im vorhergehenden Paragraphe, daß die ganze Arbeit, welche bei einer vollständigen Umdrehung des Zapfens zur Überwindung der Reibung erforderlich ist, durch die Formel

$$2\pi fr \left[ 1 + \tfrac{1}{3} \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] W \ldots . \quad (191)$$

dargestellt wird.

**§. 180. Bestimmung des Models eines Systemes von zwei Kräften, welche auf einen um eine feste Axe drehbaren Körper angebracht sind, wenn sich der Angriffspunkt der Einen dieser Kräfte gleichzeitig mit dem Körper herumbewegt, wobei jedoch der perpendikulare Abstand ihrer Richtung von dem Mittelpunkte der Axe stets derselbe bleibt.**




Angenommen, die Kräfte $P_1$ und $P_2$, anstatt fortwährend dieselbe Lage gegeneinander zu behalten (wie Dies bisher vorausgesetzt wurde), änderen fortwährend ihre relative Lage, indem sich der Angriffspunkt von $P_1$ mit dem Körper herumdrehet, wobei die Richtung dieser Kraft stets denselben perpendikularen Abstand $a_1$ von der Axe behält, während die Richtung und der Betrag von $P_2$ unverändert bleiben.

Da hiernach der Punkt $A_1$ fortwährend seine Lage ändert; so leuchtet ein, daß auch der Abstand $A_1A_2$ oder L immer andere Werthe annehmen wird, sodaß der Werth von $P$, (Gleichung 158) ununterbrochen variirt. Nun ist die Arbeit, welche unter diesem veränderlichen Drucke während einer ganzen Umdrehung von $P_1$ ausgeübt wird, nach §. 51 durch die Formel $U_1 = \int_0^{2\pi} P_1 a_1 d\vartheta$ ausgedrückt, wenn $\vartheta$ den Winkel $A_1CA$ bezeichnet, welcher nach irgend einer Zeit von dem Perpendikel $CA_1$ um C beschrieben ist, und es ist auch $a_1\vartheta$ der Raum S, welchen in derselben Zeit der Angriffspunkt $A_1$ der Kraft $P_1$ durchlaufen hat.

Substituirt man daher für $P_1$ seinen Werth aus Gleichung (158); so erhält man

$$U_1 = \int_0^{2\pi} P_2 \left[\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{\varrho L}{a_1{}^2}\right)\sin\varphi\right] a_1\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} P_2 a_2 d\vartheta + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1} \int_0^{2\pi} P_2 . L d\vartheta$$

d. i., da $\int_0^{2\pi} P_2 a_2 d\vartheta = U_2$ ist

$$U_1 = U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1} \int_0^{2\pi} P_2 . L d\vartheta \ldots . (192)$$

Nimmt man die Kraft $P_2$ als konstant an; so ist

$$\frac{1}{a_1} \int_0^{2\pi} P_2 . L d\vartheta = \frac{P_2}{a_1} \int_0^{2\pi} L d\vartheta = P_2 a_2 . \frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{2\pi} L d\vartheta .$$

Nun ist $L = \overline{A_1 A_2} = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2 a_1 a_2 \cos\vartheta}$, also

$$\frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{2\pi} L d\vartheta = \frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{2\pi} (a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2 a_1 a_2 \cos\vartheta)^{\frac{1}{2}} d\vartheta$$

$$= \frac{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}}{a_1 a_2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2 a_1 a_2}{a_1{}^2 + a_2{}^2} \cos\vartheta\right)^{\frac{1}{2}} d\vartheta$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2}} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^{-1} \cos\vartheta\right]^{\frac{1}{2}} d\vartheta$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2}} \int_0^{2\pi} \left[1 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^{-1} \cos\vartheta\right] d\vartheta \text{ näherungsweise,}$$

wenn man höhere Potenzen, als die erste, von $\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^{-1}$ vernachlässigt, da der Werth dieser Größe in allen Fällen kleiner, als die Einheit ist. Integrirt man den vorstehenden Ausdruck zwischen den Gränzen 0 und $2\pi$; so verschwindet das zweite Glied, und man hat

$$\frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{2\pi} L d\vartheta = \sqrt{\frac{1}{a_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2}} . 2\pi \text{ näherungsweise;}$$

mithin

$$P_2 a_2 \cdot \frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{2\pi} L\,d\vartheta = P_2(2\pi a_2)\sqrt{\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}} = U_2\sqrt{\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}},$$

da $2\pi a_2$ der Raum ist, durch welchen sich der Angriffspunkt der konstanten Kraft $P_2$ bei einer jeden Umdrehung bewegt. Hierdurch wird die Gleichung (192) in dem Falle, wo $P_2$ konstant ist

$$U_1 = U_2\left[1+\varrho\sin\varphi\sqrt{\frac{1}{a_1^{\,2}}+\frac{1}{a_2^{\,2}}}\right] \ldots\ldots (193)$$

§. 181. Wenn die Kraft $P_2$ in der Spannung eines Seiles besteht, welches sich auf eine Trommel von dem Halbmesser $a_2$ aufwindet (wie bei der Winde); so erzeugt die Steifigkeit des Seiles denselben Effekt (§. 142), als wenn statt $P_2$ die Kraft

$$P_2 + \frac{D+EP_2}{a_2} \text{ oder } \left(1+\frac{E}{a_2}\right)P_2 + \frac{D}{a_2}$$

wirkte.

Nimmt man nun $P_2$ als konstant an, und bemerkt, daß $U_2 = 2\pi P_2 a_2$ ist; so hat man nach Gleichung (192)

$$U_1 = P_2 a_2\left[2\pi + \frac{\varrho\sin\varphi}{a_1 a_2}\int_0^{2\pi} L\,d\vartheta\right].$$

Substituirt man in diese Gleichung den vorstehenden Werth von $P_2$; so kommt

$$U_1 = a_2\left[\left(1+\frac{E}{a_2}\right)P_2 + \frac{D}{a_2}\right]\left[2\pi + \frac{\varrho\sin\varphi}{a_1 a_2}\int_0^{2\pi} L\,d\vartheta\right].$$

Führt man die angedeutete Multiplikation aus, und vernachlässigt, da $\frac{D}{a_2}$ immer sehr klein ist, das Produkt dieser Größe in $\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1}$; so ergibt sich

$$U_1 = P_2 a_2\left(1+\frac{E}{a_2}\right)\left[2\pi + \frac{\varrho\sin\varphi}{a_1 a_2}\int_0^{2\pi} L\,d\vartheta\right] + 2\pi D,$$

und wenn man, wie vorhin, integrirt,

$$U_1 = U_2\left(1+\frac{E}{a_2}\right)\left[1+\varrho\sin\varphi\sqrt{\frac{1}{a_1{}^2}+\frac{1}{a_2{}^2}}\right]+2\pi D.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $n$, und bezeichnet alsdann mit $U_1$ und $U_2$ die Arbeiten, welche von den Kräften $P_1$ und $P_2$ während $n$ Umdrehungen entwickelt sind, statt daß diese Größen vorhin die Arbeiten bei Einer Undrehung darstellten; so erhält man für den Model des Systemes die Formel

$$U_1 = U_2\left(1+\frac{E}{a_2}\right)\left(1+\varrho\sin\varphi\sqrt{\frac{1}{a_1{}^2}+\frac{1}{a_2{}^2}}\right)+2n\pi D \ldots (194)$$

§. 182. Wenn die Größe $\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)^{-1}$ nicht so klein ist, daß die Glieder der Binomialentwickelung, welche höhere Potenzen, als die erste, von derselben enthalten, vernachlässigt werden dürfen; so kann der Werth des bestimmten Integrales $\int_0^{2\pi} L\,d\vartheta$ auf folgende Weise ermittelt werden: es ist

$$\int_0^{2\pi}(a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}d\vartheta = \int_0^{2\pi}[(a_1+a_2)^2-2a_1a_2(1-\cos\vartheta)]^{\frac{1}{2}}d\vartheta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(a_1+a_2)^2-4a_1a_2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right]^{\frac{1}{2}}d\vartheta = (a_1+a_2)\int_0^{2\pi}\left[1-\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right]^{\frac{1}{2}}d\vartheta.$$

Setzt man $\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}=k^2$; so ist

$$\int_0^{2\pi} L\,d\vartheta = (a_1+a_2)\int_0^{2\pi}\left(1-k^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\vartheta.$$

Nach der Theorie der bestimmten Integrale ist allgemein

$$\int_{x_2}^{x_1} F(x).dx = n\int_{\frac{x_2}{n}}^{\frac{x_1}{n}} F(nx).dx,$$

also an

$$\int_0^{2\pi}\left(1-k^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)d\vartheta=2\int_0^{\pi}(1-k^2\sin^2\vartheta)\,d\vartheta,$$

und daher

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{L}\,d\vartheta=2(a_1+a_2)\int_0^{\pi}(1-k^2\sin^2\vartheta)\,d\vartheta.$$

In dem vorstehenden Integrale erkennt man eine elliptische Funktion der zweiten Art, und es ist aus der Theorie dieser Funktionen bekannt, daß

$$\int_0^{\pi}(1-k^2\sin\vartheta)\,d\vartheta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\vartheta)\,d\vartheta=2\mathrm{E}_1(k)$$

ist, wenn $\mathrm{E}_1(k)$ die vollständige elliptische Funktion der zweiten Art bezeichnet, deren Model $k=\frac{2\sqrt{a_1a_2}}{a_1+a_2}$ ist. Man findet die Werthe dieser Funktion, welche verschiedenen Werthen von $k$ entsprechen, in einer diesem Werke angehängten Tabelle, und hat nach dem Vorstehenden

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{L}\,d\vartheta=4(a_1+a_2).\mathrm{E}_1(k).$$

Substituirt man diesen Ausdruck für $\int_0^{2\pi}\mathrm{L}\,d\vartheta$ in die Gleichung (192); so wird dieselbe

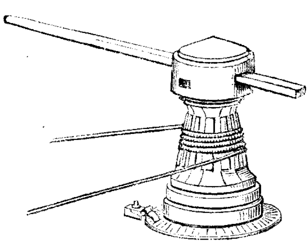
$$\mathrm{U}_1=\mathrm{U}_2+\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1}4(a_1+a_2).\mathrm{E}_1(k).\mathrm{P}_2=\mathrm{U}_1+(2\pi a_2\mathrm{P}_2)\frac{2}{\pi}\mathrm{E}_1(k).\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)\varrho\sin\varphi,$$

d. i., da $2\pi a_2\mathrm{P}_2=\mathrm{U}_2$ ist,

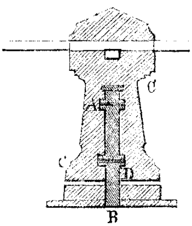
$$\mathrm{U}_1=\mathrm{U}_2\left[1+\frac{2}{\pi}\mathrm{E}_1(k).\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)\varrho\sin\varphi\right]\ldots.(195)$$

## Die Winde.

§. 183. In den seitstehenden Figuren ist die auf Schiffen



gebräuchliche Winde dargestellt. Sie besteht aus einem Schafte **CC**, welcher auf den größeren Theil **AD** seiner Länge durchbohrt ist. Diese Oeffnung enthält den oberen Theil einer sehr starken Spindel **AB**, deren unteres Ende im Zimmerwerke des Schiffes befestigt ist. Das Stück **CC**, durch dessen oberen Theil die beweglichen Arme der Winde




gesteckt sind, drehet sich auf der Spindel **AB**, indem sein Gewicht von dem Kopfe der Spindel getragen wird, und das Tau sich auf den mittleren Theil **CC** aufwindet. Die Spannung des Taues wird durch den Seitenwiderstand der Spindel aufgenommen. Hiernach vereinigen sich an der Winde die Widerstände des stehenden Zapfens und der Axe, sodaß der gesammte Widerstand, welcher sich ihrer Bewegung entgegensetzt, gleich der Summe der Widerstände ist, welche einzeln der Axe und dem stehenden Zapfen zukommen, und die gesammte Arbeit, welche erforderlich ist, um die Winde in Bewegung zu setzen, gleich der Arbeit ist, welche erforderlich sein würde, die Winde auf dem Zapfen zu drehen, wenn keine Spannung des Taues vorhanden wäre, plus der Arbeit, welche erforderlich sein würde, wenn auf dem Zapfen oder dem Kopfe der Spindel gar keine Reibung stattfände.

Bezeichnet nun $U_2$ die Nutzarbeit, welche bei $n$ Umdrehungen von dem Taue verrichtet wird; so ist die Arbeit, welche von der treibenden Kraft verrichtet werden muß, um diese Nutzarbeit zu überwinden, wenn auf dem Kopfe der Spindel keine Reibung vorhanden wäre, nach Gleichung (194)

$$\left(1+\frac{E}{a_2}\right)\left[1+\varrho\sin\varphi\sqrt{\frac{1}{a_1{}^2}+\frac{1}{a_2{}^2}}\right]U_2+2n\pi D,$$

worin $a_1$ die Länge des Hebelarmes und $a_2$ den Halbmesser des

Theiles der Winde bezeichnet, auf welchen sich das Tau aufwindet. Ferner ist nach §. 178 die Arbeit, welche der Reibung auf dem Kopfe der Spindel für $n$ Umdehungen entspricht,

$$\tfrac{4}{3} n \pi \varrho_1 f W,$$

worin W das Gewicht des beweglichen Theiles der Winde und $\varrho_1$ den Halbmesser des Kopfes der Spindel bezeichnet.

Hieraus folgt, daß die Arbeit $U_1$ der treibenden Kraft, welche auf die Winde entwickelt werden muß, um in $n$ Umdrehungen die Nutzarbeit $U_2$ hervorzubringen,

$$U_1 = \left(1 + \frac{E}{a_2}\right)\left[1 + \varrho \sin\varphi \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}\right] U_2 + 2n\pi (D + \tfrac{2}{3}\varrho_1 f W \quad \ldots (196)$$

ist, eine Formel, worin der Model für die Winde besteht.

Hierbei ist vorausgesetzt, daß behuf Bewegung der Winde eine einzige Kraft $P_1$ an einem einzigen Hebelarme angebracht sei. In der Wirklichkeit werden jedoch mehrere solche Kräfte an verschiedenen Armen angebracht, wenn die Winde zur Hebung des Ankers in Thätigkeit gesetzt wird. Diese Kräfte können übrigens mit Ausnahme eines einzigen noch näher zu beschreibenden besonderen Falles, nach den Prinzipien des Parallelogrammes der Kräfte und der Gleichheit der Momente immer in eine einzige Resultante zusammengesetzt werden, und diese Resultante ist es, welche alsdann für $P_1$ an die Stelle gesetzt werden muß; auch hat man für $a_1$ den perpendikularen Abstand der Richtung dieser Resultante von dem Mittelpunkte der Umdrehungsaxe in die obigen Formeln einzuführen.

Der erwähnte besondere Fall, in welchem mehrere an der Winde angebrachte Kräfte keine Resultante haben, oder nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden können, ist der, bei welchem die Kräfte in zwei Reihen getheilt werden können, von denen eine jede eine Resultante hat, und bei welchem diese beiden Resultanten der Größe nach einander gleich sind und auf entgegengesetzten Seiten von dem Mittelpunkte an Ein und derselben durch den Mittelpunkt gehenden geraden Linien in gleichen perpendikularen Abständen nach entgegengesetzten Richtungen wirken, oder wenn sich sämmtliche an der Winde angebrachte Kräfte auf ein **Kräftepaar** reduziren. (S. die Zusätze zum ersten Abschnitte).

Nimmt man nun an, diese Kräfte seien in die beiden gleichen Kräfte $R_1$ und $R_2$, welche das resultirende Kräftepaar bilden, zusammengesetzt, und werden durch dieselben vertreten; so wirken auf die Winde fünf Kräfte, nämlich die beiden Kräfte $R_1$ und $R_2$, die Spannung $P_2$ des Taues, der Seitenwiderstand $R$ am Umfange der Spindel und der Reibungswiderstand $fW$ auf dem Kopfe der Spindel, welcher als in einer Kreislinie vom Halbmesser $\frac{2}{3}\varrho_1$ (§. 178) auf der Oberfläche des Spindelkopfes konzentrirt und gleichmäßig vertheilt angesehen werden kann. Diese Kräfte sind miteinander im Gleichgewichte. Trägt man dieselben daher parallel zu ihren gegenwärtigen Richtungen an einen einzigen Punkt; so würden sie auch um diesen Punkt im Gleichgewichte sein (S. Nr. 6 des Anhanges zum ersten Abschnitte). Nachdem die Kräfte so verlegt sind, werden $R_1$ und $R_2$ in derselben geraden Linie und nach entgegengesetzten Richtungen wirken; dieselben werden also, da sie der Größe nach gleich sind, **für sich** im Gleichgewichte sein. Ebenso werden die einzelnen Elemente des Reibungswiderstandes $fW$ auf dem Kopfe der Spindel, welche sämmtlich in dem Abstande $\frac{2}{3}\varrho_1$ rings um den Mittelpunkt der Axe herum angebracht gedacht werden können, in der Wirklichkeit eine unendliche Menge von Kräftepaaren, und nachdem sie alle an einen einzigen Punkt getragen sind, eine unendliche Menge von Kräften bilden, von denen je zwei in derselben geraden Linien liegen, nach entgegengesetzten Richtungen wirken und einander gleich sind, sodaß auch die aus dem Reibungswiderstande am Kopfe der Spindel hervorgehenden Kräfte **für** sich im Gleichgewichte sind. Hieraus folgt nun, daß auch die beiden Kräfte $R$ und $P_2$ **für sich** im Gleichgewichte sein, also der Größe nach gleich und der Richtung nach gerade entgegengesetzt sein müssen. (Man sieht, daß die beiden Kräfte $R$ und $P_2$ in der Wirklichkeit in dem vorliegenden Falle ebenfalls ein **Kräftepaar** bilden werden, wie es auch nach Nr. 6 der Zusätze zum ersten Abschnitte sein muß, da die Kräftepaare $R_1$, $R_2$ und $fW$ nur durch ein anderes Kräftepaar $R, P_2$ im Gleichgewichte erhalten werden können.) Man hat hier also

$$R = P_2.$$

Da nun die Richtung der Kraft **R** in dem Punkte, wo sie den Umfang der Spindel trifft, mit der Normalen oder dem Halbmesser dieses Umfanges den Reibungswinkel $\varphi$ bilden muß (§. 153); so ist ihr Moment in Beziehung zu der Umdrehungsaxe (vergl. §. 154)

$$= R\varrho \sin\varphi = P_2 \varrho \sin\varphi,$$

und man hat, da das Moment einer jeden der treibenden Kräfte gleich $P_1 a_1$, das der Kraft $P_2$ gleich $P_2 a_2$ und das des Reibungswiderstandes auf dem Kopfe der Spindel gleich $\frac{2}{3}\varrho_1 f W$ ist, nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$2P_1 . a_1 = P_2 a_2 + P_2 \varrho \sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varrho_1 f W,$$

oder wenn man wegen der Steifigkeit des Taues $P_2 + \frac{D + E P_2}{a_2}$ an die Stelle von $P_2$ setzt, und das in $\frac{D}{a_2}$ und $\varrho \sin\varphi$ multiplizirte Glied vernachlässigt,

$$2P_1 . a_1 = P_2 a_2 \left(1 + \frac{E}{a_2}\right)\left(1 + \frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi\right) + D + \tfrac{2}{3}\varrho_1 f W.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit dem Winkel $\vartheta$, um welchen sich bei erfolgender Bewegung das System gedrehet hat, und bemerkt, daß

$$2P_1 . a_1 \vartheta = 2P_1 . S_1 = U_1, \quad P_2 . a_2 \vartheta = P_2 . S_2 = U_2 \text{ ist;}$$

so kommt

$$U_1 = \left(1 + \frac{E}{a_2}\right)\left(1 + \frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi\right) U_2 + \vartheta (D + \tfrac{2}{3}\varrho_1 f W),$$

und nach $n$ Umdrehungen, wofür $\vartheta = 2n\pi$ ist,

$$U_1 = \left(1 + \frac{E}{a_2}\right)\left(1 + \frac{\varrho}{a_2} \sin\varphi\right) U_2 + 2n\pi (D + \tfrac{2}{3}\varrho_1 f W) \ldots (197)$$

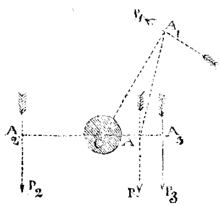
Dies ist offenbar der kleinste Werth, welchen der Model (196) annehmen kann, da er dem Werthe von $a_1 = \infty$ in jener Formel (196) entspricht, außerdem bemerkt man, daß der Werth von $U_1$ aus Gleichung (197) jederzeit kleiner ist, als der aus

Gleichung (196), da immer $\frac{1}{a_2} < \sqrt{\frac{1}{a_1^{\,2}} + \frac{1}{a_2^{\,2}}}$ ist.

Hieraus geht hervor, daß der Kraftverlust durch Reibung um so kleiner wird, je größer $a_1$ oder in einem je weiteren Abstande $P_1$ angebracht wird, daß dieser Verlust aber am kleinstmöglichen ist, wenn die Kräfte rund um die Winde dergestalt vertheilt werden, daß sie sich auf ein Kräftepaar reduziren, indem dieser Fall einem unendlich großen Werthe von $a_1$ in Gleichung (196) entspricht. Dieser Fall, in welchem sich die auf die Winde angebrachten Kräfte auf ein Kräftepaar reduziren lassen, tritt offenbar dann ein, wenn dieselben paarweise um die Axe vertheilt sind, sodaß die beiden Kräfte eines jeden Paares einander gleich sind und an entgegengesetzten Seiten von dem Mittelpunkte in demselben perpendikularen Abstande wirken, also selbst ein Kräftepaar bilden. Diese symmetrische Vertheilung der Kräfte um die Axe herum ist also für die Arbeit die günstigste, sowie sie für die Erhaltung der Spindel, welche den Druck jener Kräfte zu ertragen hat, die vortheilhafteste ist.

§. 184. **Der Model eines Systemes von drei Kräften, welche an einem um eine zylindrische Axe drehbaren Körper angebracht sind, wenn zwei von diesen Kräften, welche einander parallel sein sollen, ihre Richtung nicht änderen, während die Richtung der dritten sich fortwährend um die Axe in demselben perpendikularen Abstande herumbewegt.**

Wenn $P_2$ und $P_3$ die parallelen Kräfte und $P_1$ die sich herumbewegende Kraft ist; so fälle man von dem Mittelpunkte C der Axe die Perpendikel $CA_1$, $CA_2$, $CA_3$ auf die Richtungen der Kräfte, und bezeichne mit $\vartheta$ die Neigung der Linie $CA_1$ gegen $CA_3$ in irgend einem Augenblicke der Umdrehung der Kraft $P_1$.



Angenommen, die vorherrschende Kraft sei $P_1$, und $P_2$ strebe das System in derselben Richtung herumzudrehen wie $P_1$, $P_3$ dagegen in entgegengesetzter Richtung. Ist nun R die Resultante von $P_2$ und $P_3$ und $r$ der perpendikulare

Abstand **CA** ihrer Richtung von **C**; so kann man, ohne daß dadurch die Bedingungen des Gleichgewichtes und mithin die Arbeit von $\mathbf{P}_1$ während der ganzen Drehung geändert würden, **R** für $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ an die Stelle setzen. Hierdurch erhält man statt des Systemes von drei Kräften Eines von zwei Kräften $\mathbf{P}_1$ und **R**, von welchen **R** der Richtung nach gegeben ist. Der Model dieses Systemes ist demnach durch Gleichung (192) oder durch die Formel

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_r + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1}\int_0^\vartheta \mathrm{R}.\mathrm{L}\,d\vartheta \ldots . (198)$$

dargestellt, worin $\mathrm{U}_r$ die Arbeit von **R**, und **L** den Abstand $\mathbf{AA}_1$ der Fußpunkte der Perpendikel $r$ und $a_1$ bezeichnet, sodaß

$$\mathrm{L}^2 = a_1{}^2 + r^2 - 2a_1 r\cos\vartheta = (a_1 - r\cos\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta,$$

also

$$\mathrm{R}^2\mathrm{L}^2 = (\mathrm{R}a_1 - \mathrm{R}r\cos\vartheta)^2 + \mathrm{R}^2 r^2\sin^2\vartheta$$

ist. Man hat aber, weil **R** die Resultante von $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ ist,

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2 \text{ und } \mathrm{R}r = \mathrm{P}_3 a_3 - \mathrm{P}_2 a_2,$$

demnach

$$\mathrm{R}^2\mathrm{L}^2 = [(\mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2)a_1 - (\mathrm{P}_3 a_3 - \mathrm{P}_2 a_2)\cos\vartheta)]^2 + (\mathrm{P}_3 a_3 - \mathrm{P}_2 a_2)^2\sin^2\vartheta.$$

Ist nun

$$a_1 > r\sqrt{2} \text{ oder}$$
$$\mathrm{R}a_1 > \mathrm{R}r\sqrt{2} \text{ oder}$$
$$(\mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2)a_1 > (\mathrm{P}_3 a_3 - \mathrm{P}_2 a_2)\sqrt{2};$$

so ist auch, weil

$$1 = \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta \text{ und}$$
$$1 \geqq 2\sin\vartheta\cos\vartheta \text{ oder} \geqq \sin 2\vartheta, \text{ also}$$
$$2 \geqq \sin^2\vartheta + 2\sin\vartheta\cos\vartheta + \cos^2\vartheta \text{ oder } \geqq (\sin\vartheta + \cos\vartheta)^2 \text{ und daher}$$
$$\sqrt{2} \geqq \sin\vartheta + \cos\vartheta \text{ ist,}$$
$$a_1(\mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2) > (\mathrm{P}_3 a_3 - \mathrm{P}_2 a_2)(\sin\vartheta + \cos\vartheta)$$

Hieraus folgt denn auch, daß alsdann

$a_1 (P_3 + P_2) - (P_3 a_3 - P_2 a_2) \cos\vartheta > (P_3 a_3 - P_2 a_2) \sin\vartheta$.
ist.

Der Werth von $R^2 L^2$ wird daher, da diese Voraussetzung fast immer stattfindet, durch die Summe der Quadrate zweier Größen dargestellt, von welchen die erstere in jedem Augenblicke der Umdrehung oder für jeden Werth von $\vartheta$ größer ist, als die zweite. Zieht man daher nach dem Ponceletschen Lehrsatze (s. die zweite Note im Anhange) die Quadratwurzel aus; so erhält man sehr nahe

$$RL = 0{,}96[(P_3 + P_2) a_1 - (P_3 a_3 - P_2 a_2) \cos\vartheta] + 0{,}4 (P_3 a_3 - P_2 a_2) \sin\vartheta$$

oder

$$RL = 0{,}96 (P_3 + P_2) a_1 - (P_3 a_3 - P_2 a_2)(0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta) \quad \ldots (199)$$

Hiernach hat man also

$$\int_0^\vartheta RL\, d\vartheta = 0{,}96\, a_1 \left\{ \frac{1}{a_3} \int_0^\vartheta P_3 a_3\, d\vartheta + \frac{1}{a_2} \int_0^\vartheta P_2 a_2\, d\vartheta \right\}$$

$$- \int_0^\vartheta (P_3 a_3 - P_2 a_2)(0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta)\, d\vartheta,$$

das ist

$$\int_0^\vartheta RL\, d\vartheta = 0{,}96 a_1 \left[ \frac{U_3}{a_3} + \frac{U_2}{a_2} \right] - \int_0^\vartheta (P_3 a_3 - P_2 a_2)(0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta)\, d\vartheta \quad \ldots (200)$$

Wenn $P_2$ und $P_3$ konstant sind; so wird das Integral auf der rechten Seite

gleich $(P_3 a_3 - P_2 a_2) \int_0^\vartheta (0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta)\, d\vartheta$,

d. i., da $\int_0^\vartheta \cos\vartheta . d\vartheta = \sin\vartheta$ und $\int_0^\vartheta - \sin\vartheta . d\vartheta = \cos\vartheta - 1$ ist,

gleich $(P_3 a_3 - P_2 a_2)(0{,}96 \sin\vartheta + 0{,}4 \cos\vartheta - 0{,}4)$.

Beachtet man nun, daß

$$P_3 a_3 - P_2 a_2 = \frac{P_3 a_3 \vartheta - P_2 a_2 \vartheta}{\vartheta} = \frac{U_3 - U_2}{\vartheta} \text{ und daß}$$

$$U_r = Rr\vartheta = P_3 a_3 \vartheta - P_2 a_2 \vartheta = U_3 - U_2 \text{ ist;}$$

und substituirt diese und die vorstehenden Größen in die Gleichung (198); so wird dieselbe

$$U_1 = U_3 - U_2 + \varrho \sin\varphi \times$$
$$\left\{0{,}96\left(\frac{U_3}{a_3} + \frac{U_2}{a_2}\right) - \left(\frac{U_3 - U_2}{a_1 \vartheta}\right)(0{,}96 \sin\vartheta + 0{,}4 \cos\vartheta - 04,)\right\} \ldots (201)$$

Macht man für $n$ ganze Umdrehungen der Axe $\vartheta = 2n\pi$; so kommt

$$U_1 = U_3 - U_2 + \varrho \sin\varphi . 0{,}96 \left(\frac{U_3}{a_3} + \frac{U_2}{a_2}\right),$$

oder wenn man gehörig reduzirt,

$$U_1 = \left(1 + \frac{0{,}96 . \varrho \sin\varphi}{a_3}\right) U_3 - \left(1 - \frac{0{,}96 . \varrho \sin\varphi}{a_2}\right) U_2 \ldots . (202)$$

wodurch der Model des Systemes dargestellt wird *).

---

*) Die vorstehenden Formeln sind unter der besonderen Voraussetzung entwikkelt, daß in dem Ausdrucke für $L^2$ $a_1 - r\cos\vartheta < r\sin\vartheta$ sei. Wäre umgekehrt $a_1 - r\cos\vartheta < r\sin\vartheta$; so wird man in der Ponceletschen Näherungsformel für $\sqrt{(a_1 - r\cos\vartheta)^2 + r^2 \sin^2\vartheta}$ leicht die entsprechenden Koeffizienten statt der im Texte gewählten 0,96 und 0,4 substituiren. Es wird hierbei jedoch immer vorausgesetzt, daß $a_1$ wenigstens $> r$, sei, sodaß $a_1 - r\cos\vartheta$ stets positiv ist. Wäre dagegen $a_1 < r$; so setze man

$$L^2 = a_1^2 + r^2 - 2a_1 r\cos\vartheta = (r - a_1 \cos\vartheta)^2 + a_1^2 \sin^2\vartheta \text{ und daher}$$

$$R^2L^2 = (Rr - Ra_1\cos\vartheta)^2 + R^2 a_1^2 \sin^2\vartheta = [(P_3 a_3 - P_2 a_2) - (P_3 + P_2) a_1 \cos\vartheta]^2 + (P_3 + P_2)^2 a_1^2 \sin^2\vartheta,$$

ein Ausdruck, aus welchem sich alsdann die Quadratwurzel wiederum näherungsweise nach dem Poceletschen Lehrsatze ziehen läßt, und welcher, wenn $r - a_1 \cos\vartheta > a_1 \sin\vartheta$ oder $r > a_1 \sqrt{2}$ ist, statt Gleichung (201) die Formel

$$U_1 = U_3 - U_2 + \varrho \sin\varphi \times$$
$$\left\{0{,}96\left(\frac{U_3 - U_2}{a_1}\right) - \left(\frac{U_3}{a_3} + \frac{U_2}{a_2}\right) \frac{(0{,}96 \sin\vartheta + 0{,}4 \cos\vartheta - 0{,}4)}{\vartheta}\right\}$$

und für $n$ Umdrehungen, durch die Substitution von $\vartheta = 2n\pi$, statt (202) die Formel

§. 185. Wenn die Kraft $P_3$ durch die Spannung eines Seiles vertreten wird, welches sich auf einen Zylinder oder eine Trommel aufwindet; so muß auf die Steifigkeit des Seiles Rück-

---

$$U_1 = U_3 - U_2 + \varrho \sin\varphi \,.\, 0{,}96 \frac{U_3 - U_2}{a_1}$$

$$= \left(1 + \frac{0{,}96 \,.\, \varrho \sin\varphi}{a_1}\right) U_3 - \left(1 - \frac{0{,}96 \,.\, \varrho \sin\varphi}{a_1}\right) U_2$$

ergibt.

Auf folgende Weise läßt sich der Werth der Gleichung (198)

$$U_1 = U_3 - U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1} \int_0^{\vartheta} R \sqrt{a_1^2 + r^2 - 2 a_1 r \cos\vartheta} \,.\, d\vartheta$$

allgemeiner und in aller Strenge finden. Substituirt man statt $\vartheta$ den Werth $\pi - \vartheta$; so hat man nach den Regeln der bestimmten Integration

$$\int_0^{\vartheta} \sqrt{a_1^2 + r^2 - 2 a_1 r \cos\vartheta} \,.\, d\vartheta = -\int_{\pi}^{\pi-\vartheta} \sqrt{a_1^2 + r^2 + 2 a_1 r \cos\vartheta} \,.\, d\vartheta$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \sqrt{a_1^2 + r^2 + 2 a_1 r \cos\vartheta} \,.\, d\vartheta,$$

und wenn man $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ setzt, gehörig reduzirt und die Größe $\frac{4 a_1 r}{(a_1 + r)^2}$, welche immer $\leqq 1$ ist, mit $k^2$ bezeichnet; so kommt

$$(a_1 + r) \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \,.\, d\vartheta$$

oder nach der Theorie der bestimmten Integrale

$$2(a_1 + r) \int_{\frac{\pi-\vartheta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta} \,.\, d\vartheta,$$

ein Integral, welches eine elliptische Funktion der zweiten Art darstellt. Für $n$ ganze Umdrehungen oder für $\vartheta = 2n\pi$ wird dieser Ausdruck, wenn man mit sicht genommen und dieserhalb mit der vorstehenden Gleichung eine Korrektion vorgenommen werden. Hierzu bemerke man, daß die Wirkung der Steifigkeit des Seiles bei $A_3$ dieselbe ist, als wenn die Spannung daselbst von

---

$E_1(k)$ die vollständige elliptische Funktion der zweiten Art vom Model $k = \frac{2\sqrt{a_1 r}}{a_1 + r} = \frac{2\sqrt{a_1(P_3 + P_2)(P_3 a_3 - P_2 a_2)}}{a_1(P_3 + P_2) + P_3 a_3 - P_2 a_2}$ bezeichnet,

$$2(a_1 + r)\int_{-(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta$$

$$= 2(a_1 + r)\left\{\int_{-(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta\right\}$$

$$= 2(a_1 + r)\left\{(2n - 1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta\right\}$$

$$= 2(a_1 + r)\,.\,2n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta = 4n(a_1 + r)\,E_1(k)$$

Hierdurch wird die Gleichung (198)

$$U_1 = U_3 - U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1}\,.\,4nR(a_1 + r)\,.\,E_1(k)$$

$$= U_3 - U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1} 4n\left[(P_3 + P_2)a_1 + P_3 a_3 - P_2 a_2\right] E_1(k),$$

oder wenn man beachtet, daß $P_3 \,.\, 2n\pi a_3 = U_3$ und $P_2 \,.\, 2n\pi a_2 = U_2$ ist,

$$U_1 = U_3 - U_2 + \frac{\varrho \sin\varphi}{a_1}\,.\,\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{a_1 + a_3}{a_3}\right)U_3 + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_2}\right)U_2\right]E_1(k)$$

$$= U_3 - U_2 + \frac{2E_1(k)}{\pi}\varrho \sin\varphi\left[\left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_1}\right)U_3 + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)U_2\right]$$

Um sich zu überzeugen, wie weit diese Gleichung mit der Näherungsformel (202) übereinstimmt, so bemerkt man, daß für den besonderen Fall, wo $a_2 = a_3$ und $P_2 = P_3$, also $P_3 a_3 - P_2 a_2 = 0$, $U_3 = U_2$, $r = 0$, $k = 0$, $E_1(k) = \frac{\pi}{2}$ wäre, die vorstehende Gleichung

$$U_1 = \frac{2\varrho \sin\varphi}{a_2} U_2$$

$$\mathrm{P}_3 \text{ auf } \mathrm{P}_3\left(1+\frac{\mathrm{E}}{a_3}\right)+\frac{\mathrm{D}}{a_3}$$

vermehrt wäre, oder (wenn man auf beiden Seiten dieser Ungleichheit mit $a_3\,d\vartheta$ multiplizirt und für $\vartheta$ integrirt) als wenn

$$\int_0^{2n\pi}\mathrm{P}_3 a_3\,d\vartheta \text{ auf } \left(1+\frac{\mathrm{E}}{a_3}\right)\int_0^{2n\pi}\mathrm{P}_3\,a_3\,d\vartheta+\int_0^{2n\pi}\mathrm{D}\,d\vartheta,$$

oder als wenn

$$\mathrm{U}_3 \text{ auf } \left(1+\frac{\mathrm{E}}{a_3}\right)\mathrm{U}_3+2n\pi\mathrm{D}$$

vermehrt wäre. Substituirt man also statt $\mathrm{U}_3$ diesen Werth in die Gleichung (202), und vernachlässigt Glieder, welche Produkte aus den sehr kleinen Größen $\frac{\mathrm{E}}{a_3}$, $\frac{\varrho\sin\varphi}{a_3}$ und $\mathrm{D}$ enthalten; so ergiebt sich für den Model des Systemes die Formel

$$\mathrm{U}_1=\left(1+\frac{\mathrm{E}}{a_3}+\frac{0{,}96\,.\,\varrho\sin\varphi}{a_3}\right)\mathrm{U}_3-\left(1-\frac{0{,}96\,.\,\varrho\sin\varphi}{a_2}\right)\mathrm{U}_2+2\,n\,\pi\,\mathrm{D} \quad \ldots . (203)$$

---

und die Näherungsformel (202)

$$\mathrm{U}_1=0{,}96\,.\,\frac{2\,\varrho\sin\varphi}{a_2}\,\mathrm{U}_2,$$

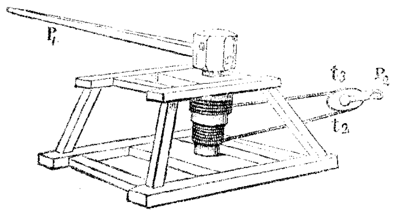
also einen Fehler von $1/_{25}$ ergeben würde, wie es nach dem Ponceletschen Lehrsatze auch noch gestattet ist. Endlich ist noch zu bemerken, daß wenn statt der Einen treibenden Kraft $\mathrm{P}_1$ deren zwei gegeben wären, welche sich in dem Abstande $a_1$ nach entgegengesetzten Seiten um die Axe drehen, sodaß sie in jeder Lage ein Kräftepaar bilden, man nach der Theorie der Kräftepaare für den Abstand der treibenden Kraft von der Axe den Werth $\infty$ in die obigen Gleichungen einzuführen hat. Setzt man demgemäß in die vorhergehende Formel $\infty$ statt $a_1$ an die Stelle; so wird dieselbe unter dieser Voraussetzung, da alsdann $k=\frac{4\,a_1\,r}{(a_1+r)^2}=\frac{1}{a_1}\,\frac{4r}{\left(1+\frac{r}{a^1}\right)^2}=0$, also $\mathrm{E}_1(k)=\frac{\pi}{2}$ wird,

$$\mathrm{U}_1=\mathrm{U}_3-\mathrm{U}_2+\varrho\sin\varphi\left(\frac{\mathrm{U}_3}{a_3}+\frac{\mathrm{U}_2}{a_2}\right)=\left(1+\frac{\varrho\sin\varphi}{a_3}\right)\mathrm{U}_3-\left(1-\frac{\varrho\sin\varphi}{a_2}\right)\mathrm{U}_2,$$

eine Formel, welche alsdann mit der Gleichung (202), soweit es die angewandte Näherungsmethode erlaubt, übereinstimmt, indem auch dort, sowie hier, die Größe $a_1$ ganz aus der Rechnung verschwunden ist.

## Die chinesische Winde.

§. 186. Diese Winde ist in der seitstehenden Figur in einer




sehr zweckmäßigen und transportabelen Form dargestellt. Die Welle der Winde besteht aus Theilen von verschiedenen Halbmessern. Das Eine Ende des Seiles ist um den Einen Theil und das andere um den andern Theil geschlungen, sodaß, wenn die Welle herumgedrehet wird, das Seil sich auf den Einen Theil der Welle aufwickelt, während es sich von dem andern Theile abwickelt, und das zwischenliegende Seilstück sich bei jeder Umdrehung um so viel verkürzt oder verlängert, als der Umfang des Einen Zylinders größer ist, als der des anderen. Indem das Seil so von dem Einen Theile der Welle zu dem anderen übergeht, wird es über eine bewegliche Rolle geleitet, welche an dem zu überwindenden Widerstande befestigt ist.

Um den Model dieser Maschine zu bestimmen, so seien $u_2$ und $u_3$ die Arbeiten, welche resp. an den beiden Seilenden verrichtet werden, sodaß $u_2$ dem Seilende entspricht, welches sich von dem kleinen Zylinder abwickelt und $u_3$ dem anderen Seilende, welches sich auf den größeren Zylinder aufwickelt; ferner sei $U_1$ die von der treibenden Kraft verrichtete und $U_2$ die an der beweglichen Rolle geleistete Nutzarbeit.

Da man hier einen Körper hat, welcher um eine zylindrische Axe drehbar ist, und auf welchen drei Kräfte wirken, von denen zwei, nämlich die Spannungen der beiden Seilenden, sehr nahe parallel und konstant bleiben, und die dritte bei unverändertem perpendikularen Abstande von der Axe sich mit derselben herumbewegt; so folgt nach Gleichung (203), daß man für $n$ Umdrehungen der Axe

$$U_1 = A u_3 - B u_2 + 2 n \pi D \dots . (204)$$

hat, worin

$$A = 1 + \frac{E}{a_3} + \frac{0{,}96 \varrho \sin \varphi}{a_3}$$

und

$$B = 1 - \frac{0{,}96\,\varrho \sin\varphi}{a_2}$$

ist, wenn $a_2$ und $a_3$ resp. die Halbmesser des kleineren und größeren Zylinders und $\varrho$ den Halbmesser der Axe oder des Zapfens bezeichnet. Hierbei ist der Widerstand der Reibung vernachlässigt, welcher sich an der Stirnfläche der stehenden Welle äußert, da derselbe im Allgemeinen bei dem nicht bedeutenden Gewichte der Welle gering ist. Will man denselben jedoch mit in Rechnung ziehen, und nimmt demzufolge an, daß das ganze Gewicht **W** der Welle auf einem konzentrischen Ringe von den Halbmessern $a_2$ und $\varrho$ ruhet; so hat man nach §. 179 statt der vorstehenden Gleichung 204 die folgende

$$U_1 = A u_3 - B u_2 + 2 n \pi D + 2 n \pi f r \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right] W$$

zu setzen, worin $r = \frac{1}{2}(a_2 + \varrho)$ und $l = \frac{1}{2}(a_2 - \varrho)$ ist und $f$ den Reibungskoeffizienten bezeichnet.

Nun hat man ferner, da die beiden Seilenden über eine Rolle gehen, und die Rolle unter den Spannungen $t_2$ und $t_3$ dieser beiden Seilenden bei dem Vorwalten der Spannung $t_3$ um ihre Axe gedrehet wird, nach Gleichung (186), wenn man annimmt, daß beide Seilenden horizontal gerichtet sind, sodaß $\iota = \frac{\pi}{2}$ und $\cos\iota = 0$ ist,

$$t_3 = A' t_2 + B',$$

worin

$$A' = 1 + \frac{E}{a'} + \frac{2\varrho' \sin\varphi}{a'}$$

und

$$B' = \frac{D}{a'}\left(1 + \frac{2\varrho' \sin\varphi}{a'}\right)$$

ist, wenn $a'$ den Halbmesser der Rolle und $\varrho'$ den Halbmesser ihrer Axe bezeichnet.

Ferner hat man zwischen den Spannungen $t_2$ und $t_3$ und dem Nutzwiderstande $P_2$, welche drei Kräfte sich an der Rolle im Gleichgewichte erhalten, die Beziehung

$$t_2 + t_3 = P_2.$$

Eliminirt man zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung die Größen $t_2$ und $t_3$; so ergibt sich

$$t_2 = \frac{P_2 - B'}{1 + A'} \quad \text{und} \quad t_3 = \frac{A' P_2 + B'}{1 + A'}.$$

Nun ist aber $t_2 . 2n\pi a_2 = u_2$, $t_3 . 2n\pi a_3 = u_3$ und

$$P_2 \frac{2n\pi a_3 - 2n\pi a_2}{2} = P_2 . n\pi(a_3 - a_2) = U_2, \text{ also}$$

$$t_2 = \frac{u_2}{2n\pi a_2}, \ t_3 = \frac{u_3}{2n\pi a_3} \text{ und } P_2 = \frac{U_2}{n\pi(a_3 - a_2)}.$$

Führt man diese Werthe für $t_2$, $t_3$ und $P_2$ in die letztere Gleichung ein; so ergibt sich

$$u_2 = \frac{2a_2[U_2 - n\pi(a_3 - a_2)B']}{(a_3 - a_2)(1 + A')} \text{ und}$$

$$u_3 = \frac{2a_3[A'U_2 + n\pi(a_3 - a_2)B']}{(a_3 - a_2)(1 + A')}.$$

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (204); so erhält man

$$U_1 = \frac{2(a_3 A A' - a_2 B)}{(a_3 - a_2)(1 + A')} U_2 + \frac{2n\pi(a_3 A + a_2 B)B'}{1 + A'} + 2n\pi D,$$

oder wenn man für A, B, A′, B′ ihre früheren Werthe wiedereinführt, alle Glieder vernachlässigt, welche höhere Dimensionen, als die erste, von $\frac{E}{a_3}$, $\frac{E}{a_2}$, $\frac{E}{a'}$, $\frac{\varrho \sin\varphi}{a_3}$ etc. enthalten, und gehörig reduzirt,

$$U_1 = \frac{2}{1 - \frac{a_2}{a_3}} \left\{ 1 - \frac{1 + \frac{a_2}{a_3} - \left( \frac{E}{a_3} + \frac{1{,}92\varrho \sin\varphi}{a_3} \right)}{2 + \frac{E}{a'} + \frac{2\varrho' \sin\varphi}{a'}} \right\} U_2$$

$$+ 2n\pi \left\{ 1 + \left( \frac{a_3}{a'} \right) \frac{1 + \frac{a_2}{a_3} + \frac{E}{a_3}}{2 + \frac{E}{a'} + \frac{2\varrho' \sin\varphi}{a'}} \right\} D \ \ldots . \ (206)$$

oder, wenn man die Divisionen ausführt, und dabei die Produkte aus den eben erwähnten sehr kleinen Größen vernachlässigt,

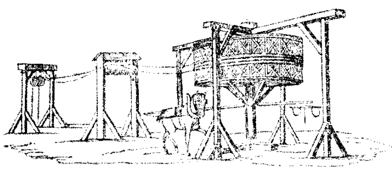
$$U_1 = \left\{1 + \frac{1}{a_3 - a_2}\left[\left(1+\frac{a_3+a_2}{2a'}\right)E + 2\left(0{,}96\varrho + \frac{a_3+a_2}{2a'}\varrho'\right)\sin\varphi\right]\right\} U_2 +$$

$$2n\pi\left\{1+\frac{a_3+a_2}{2a'} + \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{a_3+a_2}{2a'}\right)\frac{E}{a'} - \frac{a_3+a_2}{2a'}\cdot\frac{\varrho'\sin\varphi}{a'}\right\} D \ldots (206\text{a})$$

Aus dieser Formel, welche den Model der Maschine darstellt, ersieht man, wie bedeutend der Kraftverlust in Folge der Steifigkeit des Seiles und der Reibung wird, wenn die beiden Halbmesser $a_2$ und $a_3$ der Welle nahe einander gleich werden.

## Der Göpel.

§. 187. Der Göpel ist eine Art von Winde, welche bei Bergwerken angewendet wird, um mit Hülfe von Pferdekräften Materialien oder Erze aus den Schächten zu heben, wenn die Umstände es nicht räthlich machen,



hierzu die Dampfkraft zu verwenden. Die Einrichtung der Maschine wird aus der Figur hinreichend verstanden werden. Es ist hierbei zu bemerken, daß von der Trommel oder nach der bergmännischen Bezeichnung, dem Korbe, zwei Seile ausgehen, welche sich nach entgegengesetzten Seiten auf denselben winden. An dem Einen Seile hängt die leere hinabsteigende Tonne, und dieses Seil wickelt sich fortwährend von dem Korbe ab, indem sich der Göpel herumbewegt; das andere Seil zieht die volle Tonne herauf, und windet sich dabei fortwährend auf den Korb. Die von den Pferden zu leistende Arbeit ist die, welche erforderlich ist, um die Reibung in den verschiedenen Zapfenlagern und die übrigen schädlichen Widerstände zu überwinden, und um die Differenz zwischen dem Gewichte der aufsteigenden Tonne und des aufsteigenden Seiles und dem Gewichte der hinabsinkenden Tonne und des hinabsinkenden Seiles auszugleichen. Das Seil wird gewöhnlich, ehe es von dem Korbe bis zur Mündung, oder in der Sprache des Bergmannes bis zu der Hängebank, des

Schachtes gelangt, über eine Reihe von Rollen geleitet, wie sie in der Figur dargestellt sind.

Nun sei $a_2$ der Halbmesser des Korbes, auf welchen sich das Seil windet, $n$ sei die Anzahl der Umdrehungen, welche derselbe machen muß, um das ganze Seil aufzuwinden; ferner bezeichne $\mu$ das Gewicht eines jeden laufenden Fußes des Seiles und $\vartheta$ den Winkel, welchen der Göpel während der Zeit beschrieben hat, wo sich die aufsteigende Tonne von dem tiefsten Punkte oder dem Gesenke des Schachtes bis zu einer gewissen Höhe erhoben hat; alsdann stellt $a_2 \vartheta$ die Länge des auf den Korb gewundenen Theiles des aufsteigenden Seiles und daher auch die Länge des von dem Korbe abgewundenen Theiles des absteigenden Seiles dar. Bezeichnet ferner $\mathbf{M}$ das ganze Gewicht des Einen Seiles von der ersten Rolle über dem Schachte bis zum Gesenke; so ist $\mathbf{M} - \mu a_2 \vartheta$ das Gewicht des aufsteigenden und $\mu a_2 \vartheta$ das des absteigenden Seiles. Wenn $\mathbf{P}_2$ die Last, welche bei jedem Hube der Tonne heraufbefördert wird, und $w$ das Gewicht der Tonne bezeichnet; so ist die Spannung des aufsteigenden Seiles an der Hängebank des Schachtes durch $\mathbf{M} - \mu a_2 \vartheta + \mathbf{P}_2 + w$ und die des absteigenden Seiles durch $\mu a_2 \vartheta + w$ dargestellt.

Endlich seien $p_3$ und $p_2$ die Spannungen dieser beiden Seile, nachdem dieselben über die zwischenliegenden Rollen von der Hängebank des Schachtes bis zum Göpel geleitet sind.

Da sich nun bei dieser Leitung die Spannung des aufsteigenden Seiles, welche an der Hängebank des Schachtes $\mathbf{M} - \mu a_2 \vartheta + \mathbf{P}_2 + w$ ist, an dem Korbe bis auf $p_3$, und die Spannung des absteigenden Seiles, welche an dem Korbe $p_2$ ist, an der Hängebank des Schachtes bis auf $\mu a_2 \vartheta + w$ vermehrt hat; so ergibt sich aus Gleichung (185), §. 176, wenn man die darin enthaltenen konstanten Koeffizienten von $\mathbf{U}_2$ und $\mathbf{S}_1$ mit $(1+\alpha)$ und $\beta$ bezeichnet und bemerkt, daß daselbst $\mathbf{U}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_1$ und $\mathbf{U}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{S}_1$ ist, sodaß $\mathbf{S}_1$ auf beiden Seiten jener Gleichung verschwindet,

$$p_3 = (1+\alpha)(\mathbf{M} + \mathbf{P}_2 + w - \mu a_2 \vartheta) + \beta \ldots . (207)$$

und

$$\mu a_2 \vartheta + w = (1+\alpha) p_2 + \beta \ldots . (208)$$

Multiplizirt man die erste dieser beiden Gleichungen mit $1+\alpha$, addirt dieselbe alsdann zu der zweiten, transponirt gehörig, dividirt durch $(1+\alpha)$ und vernachläſſigt Glieder, welche mehr als Eine Dimenſion von $\alpha$ und $\beta$ enthalten; ſo kommt

$$p_3-p_2=(1+\alpha)(\mathrm{M}+\mathrm{P}_2)+2\alpha w+2\beta-2\mu a_2\vartheta.$$

Nun bezeichnet $\mathrm{U}_r$ in Gleichung (198) die Arbeit der Reſultante von $p_3$ und $p_2$ während $n$ Umdrehungen des Göpels; dieſelbe iſt alſo gleich der Differenz zwiſchen der Arbeit von $p_3$ und der von $p_2$. Hiernach hat man

$$\mathrm{U}_r=\int_0^{2n\pi}p_3\,a_2\,d\vartheta-\int_0^{2n\pi}p_2\,a_2\,d\vartheta=a_2\int_0^{2n\pi}(p_3-p_2)\,d\vartheta,$$

d. i. nach dem obigen Werthe für $p_3-p_2$

$$\mathrm{U}_r=a_2\int_0^{2n\pi}[(1+\alpha)(\mathrm{M}+\mathrm{P}_2)+2\alpha w+2\beta-2\mu a_2\vartheta]\,d\vartheta$$

$=[(1+\alpha)(\mathrm{M}+\mathrm{P}_2)+2\alpha w+2\beta](2n\pi a_2)-\mu(2n\pi a_2)^2$, oder

$$\mathrm{U}_r=(1+\alpha)\mathrm{U}_2+[(1+\alpha)\mathrm{M}+2\alpha w+2\beta-\mu\mathrm{S}_2]\mathrm{S}_2,\ldots. \quad (209)$$

da $2n\pi a_2=\mathrm{S}_2$ und $\mathrm{P}_2\mathrm{S}_2=\mathrm{U}_2$ iſt.

Nun bemerkt man, daß von den drei an dem Göpel angebrachten Kräften die beiden $p_3$ und $p_2$ einander parallel ſind und in gleichen Abſtänden $a_2$ von der Umdrehungsaxe wirken, und die dritte $\mathrm{P}_1$ ſich in dem Abſtande $a_1$ von dieſer Axe um dieſelbe herumbewegt (wobei $\mathrm{P}_1$ die von dem Pferde ausgeübte Kraft oder die Reſultante dieſer Kräfte, wenn mehrere Pferde angewendet werden, und $a_1$ den Abſtand ihrer Richtung von der Axe bezeichnet). Hiernach kann man alſo die Gleichung (198), §. 184 in Anwendung bringen, wenn man darin die Kräfte $\mathrm{P}_1$, $p_3$, $p_2$ ſubſtituirt und $a_3=a_2$ ſetzt. Subſtituirt man daher $p_2$ und $p_3$ für $\mathrm{P}_2$ und $\mathrm{P}_3$ in die Gleichung (199); ſo ergibt dieſelbe

$$\mathrm{RL}=0{,}96\,a_1(p_3+p_2)-a_2(p_3-p_2)(0{,}96\cos\vartheta-0{,}4\sin\vartheta),$$

und man hat

$$\int_0^{2n\pi} \mathrm{R L} d\vartheta = 0{,}96 a_1 \int_0^{2n\pi} (p_3 + p_2) d\vartheta - a_2 \int_0^{2n\pi} (p_3 - p_2)(0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta) d\vartheta.$$

Nun sind die Glieder der Gleichung (185), welche in den vorstehenden Gleichungen mit $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet sind, sämmtlich von Einer Dimension in den sehr kleinen Größen $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \sin\varphi$. Werden demnach die Werthe von $p_2$ und $p_3$, welche durch diese Gleichungen gegeben sind, in den Ausdruck $\frac{\varrho \sin\varphi}{a_1} \int_0^{2n\pi} \mathrm{R L}\, d\vartheta$ (Gleichung 198) substituirt; so müssen alle diejenigen Glieder, welche die Größen $\alpha$ und $\beta$ enthalten, wenigstens von zwei Dimensionen in $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \sin\varphi$ sein, und können daher vernachlässigt werden. Läßt man aus diesem Grunde die in $\alpha$ und $\beta$ multiplizirten Glieder der Gleichungen (207) und (208) unberücksichtigt; so ergibt sich

$$p_3 + p_2 = \mathrm{M} + \mathrm{P}_2 + 2w \text{ und } p_3 - p_2 = \mathrm{M} + \mathrm{P}_2 - 2\mu a_2 \vartheta,$$

und mithin

$$a_1 \int_0^{2n\pi} (p_3 + p_2) d\vartheta = a_1 (\mathrm{M} + \mathrm{P}_2 + 2w) 2n\pi = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)[2n\pi a_2 . \mathrm{P}_2 + 2n\pi a (\mathrm{M} + 2w)]$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)[\mathrm{S}_2 \mathrm{P}_2 + \mathrm{S}_2 (\mathrm{M} + 2w)] = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)[\mathrm{U}_2 + \mathrm{S}_2 (\mathrm{M} + 2w)],$$

wenn man mit $\mathrm{S}_2$ den Raum bezeichnet, welcher von der Last $\mathrm{P}_2$ beschrieben wird, und mit $\mathrm{U}_2$ die Nutzarbeit, welche bei $n$ Umdrehungen des Göpels verrichtet wird.

Ferner hat man

$$a_2 \int_0^{2n\pi} (p_3 - p_2)(0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta) d\vartheta$$

$$= a_2 \int_0^{2n\pi} (\mathrm{M} + \mathrm{P}_2 - 2\mu a_2 \vartheta)(0{,}96 \cos\vartheta - 0{,}4 \sin\vartheta) d\vartheta$$

$$=a_2(M+P_2)\int_0^{2n\pi}(0,96\cos\vartheta-0,4\sin\vartheta)d\vartheta-2\mu a_2{}^2\int_0^{2n\pi}(0,96\cos\vartheta-0,4\sin\vartheta)\vartheta d\vartheta,$$

Es ist aber $\int_0^{2n\pi}\cos\vartheta\, d\vartheta=\sin 2n\pi-\sin 0=0,$

$$\int_0^{2n\pi}\sin\vartheta\,.\,d\vartheta=-\cos 2n\pi-(-\cos 0)=0.$$

Ferner hat man nach den Regeln der partiellen Integration

$$\int\vartheta\cos\vartheta\,.\,d\vartheta=\vartheta\sin\vartheta-\int\sin\vartheta\,.\,d\vartheta,\ \text{und}$$

$$\int\vartheta\,.\,\sin\vartheta\,.\,d\vartheta=-\vartheta\,.\,\cos\vartheta+\int\cos\vartheta\,.\,d\vartheta;\ \text{also}$$

$$\int_0^{2n\pi}\vartheta\cos\vartheta\,.\,d\vartheta=2n\pi\,.\,\sin 2n\pi-0\,.\,\sin 0-\int_0^{2n\pi}\sin\vartheta\,.\,d\vartheta=0\ \text{und}$$

$$\int_0^{2n\pi}\vartheta\sin\vartheta\,.\,d\vartheta=-2n\pi\,.\,\cos 2n\pi+0\,.\,\cos 0+\int_0^{2n\pi}\cos\vartheta\,.\,d\vartheta=-2n\pi.$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Ausdruck; so kommt

$$a_2\int_0^{2n\pi}(p_3-p_2)(0,96\cos\vartheta-0,4\sin\vartheta)d\vartheta=-0,8\mu a_2(2n\pi a_2)=-0,8\mu a_2 S_2$$

Hiernach hat man nun

$$\int_0^{2n\pi}RL d\vartheta=0,96\left(\frac{a_1}{a_2}\right)[U_2+S_2(M+2w)]+0,8\mu a_2 S_2$$

und

$$\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1}\int_0^{2n\pi}RL d\vartheta=\frac{0,96\varrho\sin\varphi}{a_2}U_2+\frac{\varrho\sin\varphi}{a_2}\left[0,96(M+2w)+0,8\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\mu a_2\right]S_2.$$

Substituirt man diesen Werth und den von $U_r$ aus Gleichung (209) in Gleichung (198), und setzt der Kürze wegen

$$C = (1+\alpha)M + 2\alpha w + 2\beta;$$

so ergibt sich

$$U_1 = \left(1 + \alpha + \frac{0{,}96\varrho\sin\varphi}{a_2}\right)U_2 +$$

$$\left\{C + \frac{\varrho\sin\varphi}{a_2}\left[0{,}96(M+2w) + 0{,}8\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\mu a_2\right]\right\}S_2 . - \mu S_2{}^2.$$

Will man endlich noch die Reibung mit berücksichtigen, welche sich an der Stirnfläche des unteren Zapfens der stehenden Welle äußert; so hat man, wenn $W$ das Gewicht der Welle mit dem Korbe und $f$ den Reibungskoeffizienten bezeichnet, nach §. 178 auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung noch das Glied $2n\pi . \frac{2}{3}\varrho f W = 2n\pi a_2 . \frac{2}{3}\frac{\varrho f W}{a_2} = \frac{2}{3}\frac{\varrho f W}{a_2} S_2$ zu addiren, indem diese Reibung nur eine Vermehrung der treibenden Kraft erfordert, ohne auf die Spannungen der Seile einen Einfluß zu äußern. Hierdurch ergibt sich für den Model der Maschine die Formel

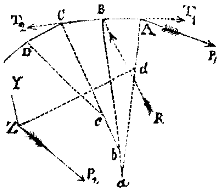
$$U_1 = \left(1 + \alpha + \frac{0{,}96\varrho\sin\varphi}{a_2}\right)U_2 +$$

$$\left\{C + \frac{\varrho}{a_2}\left[\left(0{,}96(M+2w) + 0{,}8\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\mu a_2\right)\sin\varphi + \frac{2}{3}fW\right]\right\}S_2 - \mu S_2{}^2.$$

Hierbei ist noch zu bemerken, daß wenn die treibenden Kräfte dergestalt symmetrisch um die Axe vertheilt sind, daß sie sich in ein Kräftepaar zusammensetzen lassen, die vorstehende Gleichung den Model der Maschine ergibt, sobald man darin $a_1 = \infty$ oder $\frac{1}{a_1} = 0$ setzt, indem der Angriffspunkt der Resultante alsdann in unendlicher Entfernung von der Axe liegend angesehen werden kann. Man sieht, daß eine solche symmetrische Vertheilung der treibenden Kräfte die größte Kraftersparung mit sich führt.

## Die Reibung der Seile.

**§. 188.** Das Polygon **ABC...YZ** von unendlich vielen Seiten stelle den gekrümmten Theil eines Seiles dar, welches irgend einen Bogen einer zylindrischen Fläche (von beliebigem Querschnitte) umfaßt und in einer auf der Axe des Zylinders perpendikular stehenden Ebene liegt. **A**$a$, **B**$b$, **C**$c$, etc. seien Normalen auf der Kurve, welche sich sämmtlich unter demselben Winkel $\triangle\vartheta$ gegen einander neigen. Man denke sich die Oberfläche des Zylinders zwischen je zwei der Punkte **A**, **B**, etc. von dem Seile etwas entfernt, sodaß das Seil nur einen kleinen Theil der Fläche in der Nachbarschaft dieser Punkte berührt und in dem dazwischenliegenden Raume eine gerade Linie bildet, welche die Zylinderfläche nicht weiter trifft. $P_1$ sei die Spannung des Seiles, ehe dasselbe den Punkt **A** erreicht, $T_1$ die Spannung zwischen den Punkten **A** und **B**, $T_2$ die Spannung zwischen den Punkten **B** und **C** und so fort, endlich sei $P_2$ die Spannung des Seiles, nachdem dasselbe den $n$ten oder letzten Punkt **Z** der krummen Fläche verlassen hat.




Nun wird irgend ein Punkt **B** des Seiles durch die Spannungen $T_1$ und $T_2$ in den Richtungen **BA** und **BC** und durch den Reibungswiderstand **R** der Oberfläche des Zylinders in Ruhe erhalten, und wenn man annimmt, daß das Seil sich im Gränzzustande des Gleichgewichtes befinde; so wird sich (§. 138) die Richtung dieses Widerstandes **R** gegen die Normale **B**$b$ der Fläche unter einem Winkel **RB**$b$ neigen, welcher dem Reibungswinkel $\varphi$ gleich ist.

Da $T_1$, $T_2$ und **R** drei Kräfte im Gleichgewichte sind; so hat man nach §. 14

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sin T_2 BR}{\sin T_1 BR}.$$

Es ist aber

$$T_1BR=ABb-RBb=\tfrac{1}{2}(\pi-AaB)-RBb=\frac{\pi}{2}-\frac{\triangle\vartheta}{2}-\varphi \text{ und}$$

$$T_2BR=CBb+RBb=\tfrac{1}{2}(\pi-BbC)+RBb=\frac{\pi}{2}-\frac{\triangle\vartheta}{2}+\varphi, \text{ folglich}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} - \varphi\right)\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \varphi\right)\right\}} = \frac{\cos\left(\frac{\Delta\vartheta}{2} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \varphi\right)}, \text{ und demnach}$$

$$\frac{T_1}{T_2} - 1 = \frac{\cos\left(\frac{\Delta\vartheta}{2} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\Delta\vartheta}{2} + \varphi\right)} = \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \sin\varphi}{\cos\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \cos\varphi - \sin\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \sin\varphi},$$

oder wenn man auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch $\cos\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \cos\varphi$ dividirt,

$$\frac{T_1}{T_2} - 1 = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \operatorname{tang}\varphi}.$$

Nimmt man nun an, daß die Winkel $AaB$, $BbC$ etc., von denen ein jeder gleich $\Delta\vartheta$ ist, sehr klein seien, und demnach die Punkte A, B, C, etc. sehr nahe aneinander liegen; so wird man sich dem wahren Zustande einer stetigen Kurve immer mehr und mehr nähern, und wird denselben vollkommen erreichen, wenn man $\Delta\vartheta$ unendlich klein annimmt. Unter dieser Voraussetzung kann aber das unendlich kleine Glied $\operatorname{tang}\frac{\Delta\vartheta}{2} \cdot \operatorname{tang}\varphi$ im Nenner des vorstehenden Bruches gegen die Einheit vernachlässigt und im Zähler $\operatorname{tang}\frac{\Delta\vartheta}{2} = \frac{\Delta\vartheta}{2}$ gesetzt werden. Hierdurch ergibt sich

$$\frac{T_1}{T_2} - 1 = \operatorname{tang}\varphi \cdot \Delta\vartheta, \text{ also}$$

$$T_1 = T_2(1 + \operatorname{tang}\varphi \cdot \Delta\vartheta).$$

Ist nun die Anzahl der Punkte A, B, C etc. gleich $n$ und der ganze Winkel $AdZ$ zwischen den äußersten Normalen in A und Z gleich $\vartheta$; so findet man leicht, daß $\vartheta = n \cdot \Delta\vartheta$, und daß mithin $\Delta\vartheta = \frac{\vartheta}{n}$ sein müsse. Hiernach hat man also

$$T_1 = T_2\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\tang\varphi\right),$$

und auf eine ähnliche Weise

$$P_1 = T_1\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\tang\varphi\right),$$

$$T_1 = T_2\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\tang\varphi\right),$$

$$T_2 = T_3\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\tang\varphi\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{n-1} = P_2\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\tang\varphi\right).$$

Multiplizirt man diese Gleichungen miteinander, und hebt die gleichen Faktoren gegeneinander auf; so ergibt sich

$$P_1 = P_2\left(1 + \frac{\vartheta}{n}\tang\varphi\right)^n, \text{ oder}$$

$$P_1 = P_2\left[1 + n\frac{\vartheta}{n}\tang\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\vartheta^2}{n^2}\tang^2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{\vartheta^3}{n^3}\tang^3\varphi + \ldots\right]$$

$$= P_2\left[1 + \vartheta\tang\varphi + \frac{1-\frac{1}{n}}{2}\vartheta^2\tang^2\varphi + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.3}\vartheta^3\tang^3\varphi + \ldots\right]$$

Diese Beziehung zwischen $P_1$ und $P_2$ behält Gültigkeit, wie klein man auch $\triangle\vartheta$, oder wie groß man auch $n$ annehmen möge. Nimmt man nun $n$ unendlich groß an, sodaß der Punkte A, B, C ... unendlich viele sind, welche unendlich nahe aneinander liegen; so geht der angenommene Fall in den wirklichen Fall einer stetigen Fläche über, die Brüche $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ... verschwinden, und die vorstehende Gleichung wird

$$P_1 = P_2\left[1 + \frac{\vartheta\tang\varphi}{1} + \frac{\vartheta^2\tang^2\varphi}{1.2} + \frac{\vartheta^3\tang^3\varphi}{1.2.3} + \ldots\right]$$

Die in den Klammern eingeschlossene Größe ist aber ein bekannter Ausdruck für die Funktion $e^{\vartheta\tang\varphi}$, worin $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet und gleich 2,718282... ist. Man hat also

$$P_1 = P_2 \, e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi} \; \ldots . (210)$$

Diesen Ausdruck erhält man auch aus dem früheren Werthe

$$\frac{T_1}{T_2} - 1 = \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \operatorname{tang} \varphi \, . \triangle \vartheta \text{ oder}$$

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = - \operatorname{tang} \varphi \, . \triangle \vartheta,$$

wenn man T als eine Funktion von $\vartheta$, und die Spannungen $T_1$ und $T_2$ als irgend zwei unmittelbar aufeinander folgende Werthe von T annimmt, sodaß $T_2 - T_1$ das Inkrement $\triangle T$ von T darstellt. Hiernach kann man setzen

$$\frac{\triangle T}{T} = - \operatorname{tang} \varphi \, . \triangle \vartheta \text{ und } \frac{1}{T} \frac{\triangle T}{\triangle \vartheta} = - \operatorname{tang} \varphi,$$

also auch für unendlich kleine Inkremente von T und $\vartheta$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\vartheta} = - \operatorname{tang} \varphi \text{ oder } \frac{dT}{T} = - \operatorname{tang} \varphi \, . d\vartheta.$$

Integrirt man nun zwischen den Gränzen $\vartheta$ und 0, und beachtet dabei, daß der ersteren Gränze von $\vartheta$ die Gränze $P_2$ für T und der letzteren Gränze von $\vartheta$ die Gränze $P_1$ für T entspricht; so erhält man

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dT}{T} = - \operatorname{tang} \varphi \int_0^{\vartheta} d\vartheta, \text{ d. i.}$$

$$\log \frac{P_2}{P_1} = - \vartheta \operatorname{tang} \varphi; \text{ also}$$

$$P_1 = P_2 \, e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi},$$

wie vorhin.

Da die Länge $S_1$ des Seiles, welche über den Punkt A gleitet, dieselbe ist, als die Länge $S_2$, welche über den Punkt Z gleitet; so folgt, daß der Model (§. 152) einer solchen zylindrischen Fläche, wenn man dieselbe als einen Maschinentheil betrachtet, und annimmt, daß sie fest sei, und daß ein Seil über dieselbe hingleite, durch die Formel

$$U_1 = U_2\, e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi} \ldots . (211)$$

dargestellt wird.

Es ist bemerkenswerth, daß diese Ausdrücke von der Gestalt und den Dimensionen der Fläche, welche der Spannung des Seiles widersteht, ganz unabhängig sind, und daß dieselben nur von dem Neigungswinkel $\vartheta$ oder **AdZ** der Normalen in den Punkten **A** und **Z**, wo das Seil die Fläche verläßt, und von dem Reibungskoeffizienten $\operatorname{tang}\varphi$ für das Material, aus welchem das Seil und die Fläche besteht, abhängen. So würde es z. B. hinsichtlich der Reibung ganz gleichgültig sein, ob ein Seil oder ein Riemen über eine Rolle oder eine Trommel von großem oder kleinem Halbmesser geschlungen wäre, wofern nur der überspannte Winkel und das Material der Rolle und des Seiles sich gleich blieben.

In dem Falle, wo ein Seil $m$ mal um eine solche Fläche geschlungen ist, hat man $\vartheta = 2m\pi$, also

$$P_1 = P_2\, e^{2m\pi \operatorname{tang} \varphi} .$$

Dieser Ausdruck behält Gültigkeit, welches auch die Gestalt der Fläche sein möge, sodaß die Kraft, welche erforderlich ist, um ein mehrmals um eine zylindrische Fläche geschlungenes Seil auf derselben gleiten zu lassen, sich immer gleich bleibt und durch die vorstehende Formel dargestellt wird, welches auch die Gestalt oder die Dimensionen der Fläche sein mögen, vorausgesetzt, daß ihr Material dasselbe bleibe. Es ist gleichgültig, ob die Fläche viereckig oder kreisförmig oder elliptisch sei.

§. 189. Wenn $P_1'$, $P_1''$, $P_1'''$ etc. die Kräfte darstellen, welche an dem Einen Ende eines Seiles angebracht werden müssen, um dasselbe auf einem Zylinder gleiten zu lassen, wenn es Ein-, zwei-, dreimal u. s. w. um denselben geschlungen ist, und wenn an dem anderen Ende des Seiles immer dieselbe Kraft $P_2$ angebracht wird; so hat man

$$P_1' = P_2\, e^{2\pi \operatorname{tang}\varphi},\ P_1'' = P_2\, e^{4\pi \operatorname{tang}\varphi},\ P_1''' = P_2\, e^{6\pi \operatorname{tang}\varphi} \text{ etc.},$$

sodaß die Kräfte $P_1'$, $P_1''$, $P_1'''$, etc. eine geometrische Progression bilden, deren Exponent $e^{2\pi \tan\varphi}$ immer größer, als die Einheit ist. Aus den Versuchen von Morin geht hervor, daß der Reibungskoefficient für hanfene Seile und Eichenholz, wenn kein Fett angewendet, das Seil aber angefeuchtet wird, 0,33 ist. In diesem Falle hat man also $\tan\varphi = 0{,}33$ und $2\pi \tan\varphi = 2 \times 3{,}14159 \times 0{,}33 = 2{,}07345$. Der Exponent der vorstehenden Progression ist daher unter dieser Voraussetzung $= e^{2{,}07345}$, oder gleich der Zahl, deren natürlicher Logarithmus 2,07345 ist. Diese Zahl $e^{2{,}07345} = (2{,}718282)^{2{,}07345}$ ist $= 7{,}95$, sodaß eine jede neue ganze Umwindung des Seiles um den Zylinder die Reibung nahe achtmal vermehrt. Hätte man statt der ganzen immer nur halbe Umwindungen angenommen; so würde man gefunden haben, daß die Reibung in derselben Weise in einer geometrischen Progression zunähme, daß aber alsdann der Exponent dieser Progression $e^{\pi \tan\varphi}$, statt $e^{2\pi \tan\varphi}$, wäre. Bei dem vorhergehenden Beispiele würde der Werth dieses Exponenten für eine jede halbe Umwindung $e^{\pi \tan\varphi} = 2{,}82$ sein.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich die ungeheuere Vermehrung der Reibung, welche bei einer jeden neuen Umwindung eines Seiles um die Welle einer Winde oder um eine Trommel stattfindet.

§. 190. Aus diesen Resultaten ergibt sich der Grund, warum ein Knoten, welcher die beiden Enden eines Seiles an der Oberfläche des Zylinders miteinander in Verbindung bringt, der Wirkung einer jeden Kraft widerstehen kann, welche denselben aufzulösen strebt.

Fig. 1.

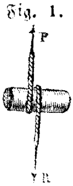



Fig. 2.

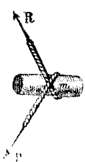
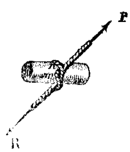
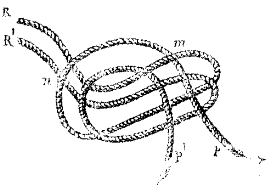



Fig. 3.




Wenn ein angefeuchtetes Seil Einmal um einen Zylinder von Eichenholz geschlungen ist, wie in Fig. 1, und an seinen beiden Enden wirken die Kräfte **P** und **R**; so hat man gesehen, daß die Kraft **P** die Kraft **R** nicht überwinden wird, solange dieselbe kleiner ist, als etwa das Achtfache von **R**. Wird nun das Seilende, an welchem **R** wirkt, so unter das andere Ende gebracht, daß es von diesem gegen die Oberfläche des Zylinders gepreßt wird, wie in Fig. 2; so wird das Seil nicht gleiten, wenn die aus dieser Pressung hervorgehende Reibung größer ist, als das Achtfache von **P**, selbst wenn die Kraft **R** ganz aufhörte zu wirken, und wenn beide Enden des Seiles in dieser Weise zwischen dem Zylinder und dem Seilringe hindurchgehen, wie in Fig. 3; so wird zur Erhaltung des Gleichgewichtes eine noch geringere Pressung erforderlich sein. Nun kann diese Pressung durch die Verminderung des Halbmessers des Zylinders zu einem jeden beliebigen Werthe gesteigert werden, da dieselbe nach einer Eigenschaft der Seilkurven (welche weiter unten im vierten Abschnitte bewiesen werden wird) im umgekehrten Verhältnisse mit dem Halbmesser variirt. Demnach kann man den Halbmesser des Zylinders so weit vermindern, daß keine noch so große Kraft im Stande ist, das um denselben geschürzte Seil hinwegzuziehen, selbst wenn das Eine Ende ganz frei wäre.

Nimmt man an, das Seil sei doppelt und wie in Fig. 4 in der vorhergehenden Weise um einen Zylinder geschlungen; so leuchtet ein, daß der Zylinder so klein gemacht werden kann, daß keine noch so großen Kräfte **P** und **P′**, welche an dem Einen Ende eines jeden Seiles angebracht werden, dasselbe von dem Zylinder zu ziehen vermögen, in welchen Richtungen diese Kräfte auch wirken.

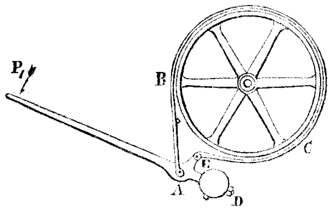



Entfernt man nun den Zylinder, und zieht die Seilenden vermittelst der Kräfte **P** und **P′** an; so werden sich dieselben, anstatt um den Zylinder, bei *m* und *n* um Theile von sich selbst schlingen, und statt daß sie in diesen Punkten von einer Kraft, welche nur in einem Theile des Umfanges wirkt, gegen den Zylinder gedrückt werden, werden sie sich mit einer Kraft, welche um den ganzen Umfang herum wirkt, aneinander pressen. Alles, was vorhin von der Unmöglichkeit, das Ende eines jeden Seiles aus dem Knoten zu ziehen, gesagt ist, wenn der Zylinder vorhanden wäre, gilt also noch in einem höheren Grade, wenn der Zylinder entfernt ist, und man sieht, daß wenn der Halbmesser des Seiles klein oder seine Oberfläche rauh genug genommen wird, keine noch so großen Kräfte **P** und **P′**, welche die beiden

Seilenden auseinanderzuziehen streben, im Stande sein werden, den Knoten zu trennen.

## Die Bremse.

**§. 191.** Es gibt Maschinen, deren Bewegung unter gewissen Umständen eine nachtheilige Geschwindigkeit anzunehmen strebt, wie z. B. ein Krahn bei dem Herunterlassen einer schweren Last, oder ein Wagenzug auf einer Eisenbahn, welcher auf einer geneigten Ebene herunter rollt, deren Neigung den Reibungswinkel überschreitet. In diesen Fällen überschreitet die Arbeit, welche von der Schwere auf die herabsinkende Last entwickelt wird, die Arbeit, welche zur Überwindung der gewöhnlichen Reibungswiderstände der Maschine erforderlich ist, und wenn man unter diesen Umständen der Bewegung der Letzteren keinen anderweitigen Widerstand entgegensetzte; so würde sich jenes Übermaaß von Arbeit in der Maschine als lebende Kraft anhäufen (§. 130) und sehr bald eine nachtheilige Geschwindigkeit derselben herbeiführen. Der außergewöhnliche Widerstand, welcher zur Vernichtung jenes Übermaaßes von Arbeit und zur Verhinderung jener Anhäufung als lebende Kraft erforderlich ist, wird bei dem Krahne zuweilen durch den Arbeiter geleistet, welcher zur allmähligen Niederlassung der Last auf die Kurbel in entgegengesetzter Richtung der Bewegung einen Druck ausübt, und in dieser Richtung eine gewisse Arbeit verrichtet. Dieser nothwendige Widerstand wird jedoch bei den Krahnen häufiger, und bei den Eisenbahnzügen immer, ohne die Verrichtung von eigentlicher Arbeit, durch einen einfachen Druck erzeugt, welchen der Arbeiter auf den Hebelarm einer Bremse ausübt. Dieses nützliche Instrument ist in der seitstehenden Figur unter der bei den Krahnen gewöhnlich angewendeten Form dargestellt, eine Form, welche dazu dienen kann, das Prinzip der Anwendung dieser Bremse bei einer jeden anderen Einrichtung derselben herauszustellen.




BC ist ein Rad, welches gewöhnlich auf derjenigen Axe der

Maschine befestigt ist, an welcher sich die Kurbel befindet, und welche sich mit einer größeren Geschwindigkeit herumbewegt, als irgend eine andere.

Der Kranz dieses Rades, welcher in den meisten Fällen aus Gußeisen besteht, wird von einem starken Reife **ABCE** von Schmiedeeisen umfaßt, welcher mit dem Einen Ende **A** an einem unbeweglichen Punkte und mit dem anderen Ende **E** an dem kurzen Arme **AE** eines gebrochenen Hebels **PAE** befestigt ist. Dieser Hebel drehet sich um eine feste Axe bei **A**, und die Verlängerung des Armes **PA** trägt ein Gegengewicht **D**, welches gerade hinreichend ist, um dem Arme **AP** das Gleichgewicht zu halten, und den Punkt **E** so hoch zu heben, daß der Reif keine Spannung zu ertragen hat und sich von dem Umfange des Rades ablößt, sobald an dem Endpunkte des Armes **AP** kein Druck **P** ausgeübt, oder die Bremse außer Wirkung gesetzt wird.

Es leuchtet ein, daß ein im Endpunkte des Hebelarmes **AP** angebrachter Druck **P** im Punkte **E** einen Druck und in dem Reife nach der Richtung **ABCE** eine Spannung erzeugen wird, in Folge welcher der Reif gegen das Rad gepreßt wird, und durch seine Reibung einen gewissen Widerstand am Umfange des Rades hervorbringt.

Ferner bemerkt man, daß dieser Reibungswiderstand am Umfange des Rades genau gleich der Spannung im Endpunkte **A** des Reifes ist, da derselbe von dieser Spannung vollkommen im Gleichgewichte erhalten wird, und daß es zur Bestimmung dieser Spannung gleichgültig ist, ob sich das Rad in der Richtung **ABC** herumbewegt, während der Reif unbeweglich ist, oder ob der Reif in der Richtung **CBA** auf dem Rade gleitet, während das Letztere fest gehalten wird.

Bezeichnet man daher die Spannungen des Reifes bei **A** und **E** resp. mit **R** und **Q**; so hat man nach Gleichung (210), wenn man das Rad als fest und den Reif **A** von **C** über **B** nach **A** gleitend annimmt, und den von dem Reife überspannten Winkel des Radumfanges mit $\vartheta$ bezeichnet,

$$R = Q\, e^{\vartheta \tan g \varphi}.$$

Ist nun $a_1$ die Länge des Hebelarmes **AP** und $a_2$ die Länge des Perpendikels, welches von dem Punkte **A** auf die Richtung des Reifes in E oder auf die Richtung einer Tangente an demjenigen Punkte des Radumfanges, wo das Ende EC des Reifes denselben verläßt, gefällt wird; so hat man, wenn man die Reibung der Axe A vernachlässigt (§. 5),

$$P . a_1 = Q . a_2 ,$$

also nach der vorhergehenden Beziehung

$$R = \frac{P a_1}{a_2} e^{\vartheta \tang \varphi} \ldots . (212)$$

Nun sei $P_2$ irgend eine Kraft, welche am Umfange des Rades BC, an dem sich die Bremse befindet, angebracht ist, $P_1$ sei eine Kraft, welche an dem Punkte der Maschine angebracht ist, wo die treibende Kraft wirkt, und $P_2 = a P_1 + b$ sei die Beziehung, welche zwischen $P_2$ und $P_1$ im unteren Gränzzustande des Gleichgewichtes, also bei dem Vorwalten der Kraft $P_1$ stattfindet (§. 152). Nimmt man alsdann in diesem Ausdrucke für $P_1$ die Kraft W, deren Wirkung an dem Rezeptor der Maschine durch die Bremse verrichtet werden soll; so wird $P_2$ den Werth R der Reibung darstellen, welche von der Bremse mit Hülfe des Hebels erzeugt werden muß, um die Wirkung der Kraft W am Rezeptor aufzuheben, sodaß, wenn R dieselbe Größe wie in Gleichung (212) bezeichnet,

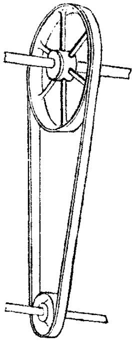
$$R = a W + b$$

sein muß. Eliminirt man daher R zwischen dieser und der Gleichung (212); so ergibt sich für den an dem Hebelarme AP auszuübenden Druck

$$P = \frac{a_2}{a_1} (a W + b) e^{-\vartheta \tang \varphi} \ldots . (213)$$

## Der Riemen.

§. 192. Wenn die Umdrehungsbewegung irgend einer Axe in einer Maschine und der Druck, welcher diese Bewegung begleitet, zwei Großen, aus denen zusammen die Arbeit der Axe besteht, einer anderen Axe mitgetheilt werden soll; so geschieht diese Mittheilung



gewöhnlich vermittelst eines ledernen Riemens, welcher sich um zwei an jenen Axen befestigten Trommeln schlingt, und dessen beide Enden mit einer gewissen Kraft zusammengezogen und dann vereinigt sind, sodaß dadurch in dem Riemen eine Spannung entsteht, welche gerade so groß ist, um zu verhindern, daß der Riemen unter dem Drucke der überzuführenden Arbeit auf den Trommeln gleitet.

**§. 193.** **Die Summe der Spannungen in den beiden Theilen eines Riemens ist immer dieselbe, unter welchem Drucke die Arbeit auch übergeführt oder der Widerstand überwunden wird, sodaß sich die Spannung des treibenden Theiles des Riemens gerade um so viel vermehrt, wie sich die Spannung des getriebenen Theiles vermindert.**

Dieses Prinzip ist zuerst von Poncelet aufgestellt und darauf durch die Versuche von Morin vollkommen bestätigt worden. Dasselbe kann auf folgende Weise bewiesen werden: In dem ersten Momente der Bewegung derjenigen Trommel, an welcher die treibende Kraft angebracht ist, wird der anderen Trommel noch keine Bewegung mitgetheilt. Ehe eine solche Bewegung der letzteren mitgetheilt werden kann, muß zwischen den Spannungen der beiden Theile des Riemens ein Unterschied entstehen, welcher groß genug ist, um den Widerstand, welchen die getriebene Trommel der Umdrehung entgegensetzt, zu überwinden. Nun muß eine Zunahme der Spannung auf der treibenden Seite des Riemens von einer Ausdehnung dieser Seite des Riemens (da derselbe elastisch ist) und von einer Drehung des Umfanges der treibenden Trommel um einen dieser Ausdehnung gleichkommenden Raum begleitet sein. Nimmt man ferner an, daß die andere oder die getriebene Seite des Riemens zwischen den beiden Berührungspunkten mit den Trommeln fortwährend in einer geraden Linie gespannt bleibt; so muß sich diese Seite des Riemens offenbar um dieselbe Länge zusammenziehen, um welche sich der Umfang der treibenden Trommel herumbewegt oder die treibende Seite des Riemens sich **ausgedehnt** hat. Hiernach ist also die Ausdehnung der treibenden Seite des Riemens genau gleich der Zusammenziehung der getriebenen Seite. Wird aber der Riemen als vollkommen elastisch vorausgesetzt; so ist die Zu- oder Abnahme seiner Spannung, der Zu- oder Abnahme seiner Länge proportional, und es folgt, daß die Zunahme der Spannung auf der treibenden Seite, welche durch die daselbst stattgefundene Ausdehnung herbeigeführt wird, genau gleich der Abnahme der Spannung auf der anderen Seite ist, welche durch die hier eintretende Zusammenziehung veranlaßt wird. Bezeichnet demnach $T$ die Spannung auf jeder Seite des Riemens, ehe die treibende Kraft anfing zu wirken, und $T_1$ und $T_2$ die Spannungen auf der treibenden und der getriebenen Seite des Riemens, nachdem beide Trommeln in Bewegung gesetzt sind; so ist $T_1 - T$ die Zunahme der Spannung auf der ersten und $T - T_2$ die Abnahme der Spannung auf der zweiten Seite, und man hat immer

$$T_1 - T = T - T_2,$$

oder

$$T_1 + T_2 = 2T \ldots . (214).$$

Behuf größtmöglicher Krafterſparung bei der Anwendung des Riemens ist es wichtig, die ursprüngliche Spannung $T$ nicht größer zu machen, als es eben erforderlich ist, um das Gleiten des Riemens auf den Trommeln unter dem höchsten überzuführenden Drucke zu verhindern. Die Mittel, welche zur Regulirung dieser Spannung dienen, werden weiter unten angegeben werden.

§. 194. **Der Model des Riemens.** Um die Betrachtungen über dieses wichtige Maschinenelement zu vereinfachen, wollen wir zuvörderst einen besonderen Fall seiner Anwendung betrachten.

Angenommen, die beiden Trommeln, deren Axen $C_1$ und $C_2$ sind, seien einander **gleich**, sodaß die beiden Theile des über dieselben geschlungenen Riemens einander parallel laufen. Ferner mögen die Mittelpunkte der beiden Trommeln in derselben Ver-

Fig. 1.

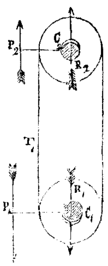
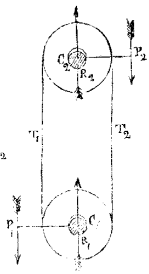


Fig. 2.



tikallinie liegen, sodaß die beiden Theile des Riemens vertikal gerichtet sind.

$P_1$ und $P_2$ seien zwei Kräfte, welche in vertikalen Richtungen und in den perpendikularen Abständen $C_1P_1$ und $C_2P_2$ von den Mittelpunkten der beiden Trommeln angebracht sind, und von denen $P_2$ den an der Trommel $C_2$ zu überwindenden Widerstand darstellt, welcher eben im Begriffe ist, durch das Vorherrschen der Kraft $P_1$ an der treibenden Trommel überwältigt zu werden. In Figur 1 sind die Kräfte $P_1$ und $P_2$ auf Ein und derselben Seite, und in Figur 2 sind dieselben auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes der Trommeln angebracht. $T_1$ und $T_2$ bezeichnen die Spannungen des Riemens und zwar $T_1$ die auf der treibenden Seite und $T_2$ die auf der getriebenen Seite. Ferner sei

$CP_1 = a_1$
$CP_2 = a_2$
$r$ der Halbmesser einer jeden Trommel,
$W$ das Gewicht einer jeden Trommel,
$\varrho$ der Halbmesser der Axe einer jeden Trommel,
$R_1$ und $R_2$ die Widerstände der Axenlager der beiden Trommeln,
$\varphi$ der Reibungswinkel für die Axen in ihren Lagern.

Nun sind die parallelen Kräfte $P_1$, $W$, $T_1$, $T_2$, $R_1$ an der unteren Trommel im Gleichgewichte, und man hat daher (§. 16)

$$R_1 = \pm (T_1 + T_2 - P_1 - W),$$

oder wenn man für $T_1 + T_2$ seinen Werth $2T$ aus Gleichung (214) substituirt,

$$R = \pm (2T - P_1 - W), \ldots . (215)$$

worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem $2T$ größer oder kleiner, als $P_1 + W$, ist, oder jenachdem die Axe der Trommel gegen die obere Fläche ihrer Lager, wie in Figur 1, oder gegen die untere Fläche, wie in Figur 2, gedrückt wird.

Ebenso sind die Kräfte $P_2$, $W$, $T_1$, $T_2$, $R_2$ an der oberen Trommel im Gleichgewichte, und man hat, da die Axe dieser Trommel immer gegen die untere Fläche ihrer Lager gedrückt wird,

$$R_2 = T_1 + T_2 \mp P_2 + W,$$

oder nach Gleichung (214)

$$R_2 = 2T \mp P_2 + W, \ldots . (216)$$

worin das Zeichen — oder + zu nehmen ist, jenachdem die Kraft $P_2$ mit $P_1$ an derselben oder an entgegengesetzten Seiten der Axe angebracht ist.

Da ferner $R_1$ und $R_2$ in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes in den perpendikularen Abständen $= \varrho \sin \varphi$ (§. 153) von dem Mittelpunkte der Axe wirken; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$\left. \begin{array}{l} P_1 a_1 + T_2 r = T_1 r + R_1 \varrho \sin \varphi \\ P_2 a_2 + T_2 r + R_2 \varrho \sin \varphi = T_1 r \end{array} \right\} \ldots (217).$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen voneinander, so ergibt sich

$$P_1 a_1 - P_2 a_2 = (R_1 + R_2) \varrho \sin \varphi.$$

Substituirt man hierin die Werthe von $R_1$ und $R_2$ aus den Gleichungen (215) und (216); so erhält man für den Fall, wo das negative Zeichen von $R_1$ zu nehmen ist, oder wo $2T < P_1 + W$ ist, indem die Axe $C_1$ auf der unteren Fläche ihres Lagers ruhet, wie in Fig. 2,

$$P_1 a_1 - P_2 a_2 = (P_1 \mp P_2 + 2W) \varrho \sin \varphi,$$

und für den Fall, wo das positive Zeichen von $R_1$ zu nehmen ist, oder wo $2T > P_1 W$ ist, indem die Axe $C_1$ gegen die obere Fläche ihres Lagers drückt, wie in Figur 1,

$$P_1 a_1 - P_2 a_2 = (4T - P_1 \mp P_2) \varrho \sin \varphi.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich für die treibende Kraft $P_1$ in den beiden beiden erwähnten Fällen, resp.

$$P_1 = P_2\left(\frac{a_2 \mp \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi}\right) + \frac{2 W \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi} \ldots\ldots (218)$$

$$P_1 = P_2\left(\frac{a_2 \mp \varrho \sin\varphi}{a_1 + \varrho \sin\varphi}\right) + \frac{4 T \varrho \sin\varphi}{a_1 + \varrho \sin\varphi} \ldots\ldots (219)$$

und demnach (durch Gleichung 121) für die Model in den beiden Fällen resp.

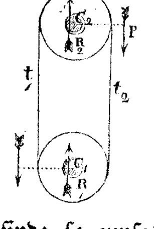
$$U_1 = \left\{\frac{1 \mp \left(\frac{\varrho}{a_2}\right)\sin\varphi}{1 - \left(\frac{\varrho}{a_1}\right)\sin\varphi}\right\} U_2 + \left(\frac{2 W \varrho \sin\varphi}{a_1 - \varrho \sin\varphi}\right) S_1 \ldots\ldots (220)$$

$$U_1 = \left\{\frac{1 \mp \left(\frac{\varrho}{a_2}\right)\sin\varphi}{1 + \left(\frac{\varrho}{a_1}\right)\sin\varphi}\right\} U_2 + \left(\frac{4 T \varrho \sin\varphi}{a_1 + \varrho \sin\varphi}\right) S_1 \ldots\ldots (221)$$

In den letzteren sechs Gleichungen ist das Zeichen — oder + zu nehmen, jenachdem die Kraft $P_2$ mit $P_1$ auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Mittellinie $C_1 C_2$ angebracht ist.

**§. 195. Bestimmung der anfänglichen Spannung T des Riemens unter der Bedingung, daß derselbe bei dem gegebenen Drucke, unter welchem die Arbeit fortgepflanzt wird, auf der Trommel nicht gleite.**

Angenommen, der größte Widerstand, welcher sich während der Wirkung der Maschine der Bewegung der Trommel entgegensetzt, sei durch einen Druck $P$ dargestellt, welcher sich in dem gegebenen Abstande $a$ von ihrem Mittelpunkte $C_2$ äußert. Der



Riemen habe eine solche anfängliche Spannung $T$ erhalten, welche eben hinreicht, um sein Gleiten zu verhindern, wenn die Trommel jenem Maximum des Widerstandes unterworfen wird. $t_1$ und $t_2$ seien die Spannungen der beiden Theile des Riemens, wenn derselbe gerade im Begriffe ist, zu gleiten und den Widerstand $P$ zu überwinden. Da die beiden Theile des Riemens einander parallel sind; so umfaßt derselbe den halben Umfang einer jeden Trom=

mel, und die Beziehung zwischen $t_1$ und $t_2$ ist nach Gleichung (210), wenn $\varphi'$ den Reibungswinkel für das Leder und das Material der Trommel, oder $\operatorname{tang}\varphi'$ den Reibungskoeffizienten hierfür bezeichnet, durch

$$t_1 = t_2\, e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'}$$

gegeben, woraus man

$$\frac{t_1 - t_2}{t_2 + t_1} = \frac{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} - 1}{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} + 1}$$

erhält. Nach Gleichung (214) ist aber $t_1 + t_2 = 2\mathrm{T}$; also auch

$$t_1 - t_2 = 2\mathrm{T} \left\{ \frac{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} - 1}{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} + 1} \right\}.$$

Ferner besteht zwischen dem Widerstande P an der oberen Trommel und den Spannungen $t_1$ und $t_2$ der beiden Theile des Riemens, wenn dieser Widerstand im Begriffe ist, überwunden zu werden, nach Gleichung (217) die Beziehung

$$\mathrm{P}a + t_2 r + \mathrm{R}_2 \varrho \sin\varphi = t_1 r,$$

oder wenn man für $\mathrm{R}_2$ seinen Werth aus Gleichung (216) substituirt und transponirt,

$$\mathrm{P}a + (2\mathrm{T} \mp \mathrm{P} + \mathrm{W})\varrho \sin\varphi = (t_1 - t_2) r.$$

Setzt man hierin den Werth von $t_1 - t_2$ aus der vorhergehenden Gleichung; so kommt bei gehöriger Reduktion

$$\mathrm{P}(a \mp \varrho \sin\varphi) + \mathrm{W}\varrho \sin\varphi = 2\mathrm{T} \left\{ \left( \frac{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} - 1}{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} + 1} \right) r - \varrho \sin\varphi \right\},$$

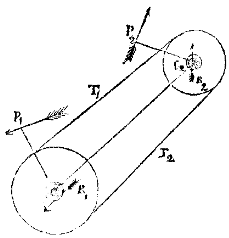
oder

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\mathrm{P}(a \mp \varrho \sin\varphi) + \mathrm{W}\varrho \sin\varphi}{\left( \frac{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} - 1}{e^{\pi \operatorname{tang}\varphi'} + 1} \right) r - \varrho \sin\varphi} \right\}, \ldots \ldots (222)$$

worin das Zeichen — oder + zu nehmen ist, jenachdem der Widerstand P und die treibende Kraft $\mathrm{P}_1$ auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Mittellinie der Trommeln wirken.

### §. 196. Der Model des Riemens in seiner allgemeinsten Gestalt.

Die seitstehende Figur stellt einen elastischen Riemen dar,




welcher über zwei Trommeln von ungleichen Halbmessern geschlungen ist, die Verbindungslinie der Mittelpunkte $C_1$ und $C_2$ dieser Trommeln ist gegen die Vertikale geneigt, und es sind an derselben zwei beliebige Kräfte $P_1$ und $P_2$ angebracht, von welchen die Kraft $P_1$ im Begriffe ist, das System in Bewegung zu setzen.

Es seien

$T_1$ und $T_2$ die Spannungen der beiden Theile des Riemens, und zwar $T_1$ die an der treibenden Seite,

$a_1$ und $a_2$ die perpendikularen Abstände der Richtungen der Kräfte $P_1$ und $P_2$ von den Mittelpunkten der Trommeln,

$\vartheta_1$, $\vartheta_2$ die Neigungen der Richtungen von $P_1$ und $P_2$ gegen die Linie $C_1 C_2$,

$r_1$, $r_2$ die Halbmesser der Trommeln,

$W_1$, $W_2$ die Gewichte der Trommeln,

$\iota$ die Neigung der Mittellinie $C_1 C_2$ gegen die Vertikale,

$\alpha$ die Neigung der beiden Theile des Riemens gegeneinander,

$\varrho_1$, $\varrho_2$ die Halbmesser der Axen der Trommeln,

$\varphi$ der Reibungswinkel für die Axen der Trommeln und ihre Lager,

$R_1$, $R_2$ die Widerstände der Lager, in welchen sich die Axen drehen im Gränzzustande des Gleichgewichtes, oder die Resultanten der auf diese Axen wirkenden Kräfte.

Die perpendikularen Abstände von den Umdrehungsaxen, in welchen diese letzteren Widerstände wirken, sind nach §. 153 $\varrho_1 \sin\varphi$ und $\varrho_2 \sin\varphi$.

Da die auf die untere Trommel wirkenden Kräfte $T_1$, $T_2$, $P_1$, $W_1$ und $R_1$ miteinander im Gleichgewichte sind, die Richtung von $W_1$ durch den Mittelpunkt der Axe geht, $T_1$ und $R_1$ die Trommel nach der Einen Seite und $P_1$ und $T_2$ dieselbe nach der entgegengesetzten Seite um die Axe zu drehen streben; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$P_1 a_1 + T_2 r_1 = T_1 r_1 + R_1 \varrho_1 \sin\varphi.$$

Da ferner die Kräfte $T_1$, $T_2$, $P_2$, $W_2$, $R_2$ an der oberen Trommel im Gleichgewichte sind, $W_2$ durch den Mittelpunkt wirkt, während $P_2$, $R_2$, $T_2$ eine Drehung nach der Einen und $T_1$ eine Drehung nach der entgegengesetzten Seite herbeizuführen streben; so hat man

$$P_2 a_2 + T_2 r_2 + R_2 \varrho_2 \sin\varphi = T_1 r_2, \text{ also}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 a_1 - (T_1 - T_2) r_1 = R_1 \varrho_1 \sin\varphi, \\ P_2 a_2 - (T_1 - T_2) r_2 = -R_2 \varrho_2 \sin\varphi \end{array}\right\}.$$

Setzt man

$$T_1 - T_2 = 2t \text{ und } T_1 + T_2 = 2T;$$

so kommt

$$\left.\begin{array}{l} P_1 a_1 - 2 t r_1 = R_1 \varrho_1 \sin\varphi, \\ P_2 a_2 - 2 t r_2 = -R_2 \varrho_2 \sin\varphi \end{array}\right\} \ldots (228).$$

Um die Werthe von $R_1$ und $R_2$ zu bestimmen, so zerlege man die an einer jeden Trommel angebrachten Kräfte (§. 11) in ihre Komponenten parallel und perpendikular zu der Linie $C_1 C_2$. Hiernach erhält man für die Komponenten der an der unteren Trommel wirkenden Kräfte, parellel zu $C_1 C_2$

$$+T_1 \cos\alpha, \; +T_2 \cos\alpha, \; -P_1 \cos\vartheta_1, \; -W_1 \cos\iota,$$

wobei diejenigen Kräfte positiv genommen sind, welche die Axe der Trommel in der Richtung von $C_1$ nach $C_2$ zu heben streben, während die übrigen, welche die Axe in entgegengesetzter Richtung herabzudrücken streben, negativ genommen sind.

Ebenso sind die Komponenten jener Kräfte perpendikular zu $C_1 C_2$

$$-T_1 \sin\alpha, \; +T_2 \sin\alpha, \; +P_1 \sin\vartheta_1, \; -W_1 \sin\iota,$$

wobei diejenigen Kräfte, welche die Linie $C_1 C_2$ weiter von der Vertikalen zu entfernen streben, positiv, und diejenigen welche die Linie $C_1 C_2$ der Vertikalen zu nähern streben, negativ genommen sind.

Da nun $R_1$ die Resultante aller dieser Kräfte ist; so hat man nach §. 11

$$R_1^2 = [(T_1 + T_2)\cos\alpha - P_1 \cos\vartheta_1 - W_1 \cos\iota]^2 + [P_1 \sin\vartheta_1 - (T_1 - T_2)\sin\alpha - W_1 \sin\iota]^2.$$

Verfährt man auf eine ähnliche Weise mit den an der oberen Trommel angebrachten Kräften, indem man hinsichtlich der Zeichen gerade die entgegengesetzten Bedeutungen gelten läßt, sodaß als positive Seitenkräfte, parallel zu $C_2C_1$, diejenigen angenommen werden, welche die Axe der Trommel von $C_2$ nach $C_1$ zu bewegen streben, und als positive Seitenkräfte, perpendikular zu $C_2C_1$, diejenigen, welche die Linie $C_2C_1$ der vertikalen Richtung näher zu bringen streben; so erhält man

$$R_2^2[(T_1+T_2)\cos\alpha-P_2\cos\vartheta_2+W_2\cos\iota]^2+[P_2\sin\vartheta_2-(T_1-T_2)\sin\alpha-W_2\sin\iota]^2.$$

Substituirt man hierin $2T$ für $T_1+T_2$ und $2t$ für $T_1-T_2$; so werden die beiden vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 &= (2T\cos\alpha-P_1\cos\vartheta_1-W_1\cos\iota)^2+(P_1\sin\vartheta_1-2t\sin\alpha-W_1\sin\iota)^2, \\ R_2^2 &= (2T\cos\alpha-P_2\cos\vartheta_2+W_2\cos\iota)^2+(P_2\sin\vartheta_2+2t\sin\alpha-W_2\sin\iota)^2 \end{aligned}\right\} \ldots(224)$$

Eliminirt man zwischen den vier Gleichungen (223) und (224) die Größen $R_1$, $R_2$ und $t$; so erhält man eine Beziehung zwischen den drei Größen $P_1$, $P_2$, $T$. Um diese Elimination abzukürzen, so nehme man an, die obigen Hypothesen hinsichtlich der Richtungen, für welche die Kräfte positiv und negativ genommen sind, seien unter der Voraussetzung gemacht, daß die in den Klammern der Gleichungen (224) eingeschlossenen Größen sämmtlich durchaus positiv seien. Ferner nehme man an, die erste der beiden eben erwähnten Größen in einer jeden Gleichung sei beträchtlich größer, als die zweite, oder der Druck auf die Axe einer jeden Trommel in der Richtung der Mittellinie $C_1C_2$ sei bedeutend größer, als der Druck auf diese Axe in perpendikularer Richtung zu jener Linie, eine Annahme, welche in einem jeden Falle der Praxis erfüllt sein wird. Unter diesen Voraussetzungen hat man nach dem Ponceletschen Lehrsatze (siehe den Anhang) mit einem hinreichenden Grade von Genauigkeit

$$R_1=0{,}96(2T\cos\alpha-P_1\cos\vartheta_1-W_1\cos\iota)+0{,}4(P_1\sin\vartheta_1-2t\sin\alpha-W_1\sin\iota),$$

$$R_2=0{,}96(2T\cos\alpha-P_2\cos\vartheta_2+W_2\cos\iota)+0{,}4(P_2\sin\vartheta_2+2t\sin\alpha-W_2\sin\iota).$$

Substituirt man diese Werthe von $R_1$ und $R_2$ in die Gleichungen (223); so ergeben dieselben, wenn man

$$\beta_1 = (0{,}96 \cos\vartheta_1 - 0{,}4 \sin\vartheta_1),$$
$$\beta_2 = (0{,}96 \cos\vartheta_2 - 0{,}4 \sin\vartheta_2),$$
$$\gamma_1 = (0{,}96 \cos\ \iota + 0{,}4 \sin\ \iota),$$
$$\gamma_2 = (0{,}96 \cos\ \iota - 0{,}4 \sin\ \iota)$$

setzt,

$$\left.\begin{array}{l} P_1 a_1 - 2t(r_1 - 0{,}4\varrho_1 \sin\alpha \sin\varphi) = \varrho_1(1{,}92 T \cos\alpha - P_1\beta_1 - W_1\gamma_1)\sin\varphi \\ P_2 a_2 - 2t(r_2 - 0{,}4\varrho_2 \sin\alpha \sin\varphi) = -\varrho_2(1{,}92 T \cos\alpha - P_2\beta_2 + W_2\gamma_2)\sin\varphi \end{array}\right\} (225)$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen die Größe $t$ und vernachlässigt Glieder, welche mehr, als Eine Dimension in $\varrho_1 \sin\varphi$ und $\varrho_2 \sin\varphi$, enthalten; so kommt

$$\left\{\begin{array}{l} + P_1 a_1 (r_2 - 0{,}4\varrho_2 \sin\alpha \sin\varphi) \\ - P_2 a_2 (r_1 - 0{,}4\varrho_1 \sin\alpha \sin\varphi) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} + \varrho_1 r_2 (1{,}92 T \cos\alpha - P_1\beta_1 - W_1\gamma_1) \\ + \varrho_2 r_1 (1{,}92 T \cos\alpha - P_2\beta_2 + W_2\gamma_2) \end{array}\right\} \sin\varphi \quad \ldots (226).$$

Da der Winkel $\alpha$ in den meisten Fällen ungemein klein ist; so können die Glieder $0{,}4\varrho_1 \sin\alpha . \sin\varphi$ und $0{,}4 . \varrho_2 \sin\alpha \sin\varphi$ vernachlässigt werden, und man erhält alsdann durch Transposition und Reduktion

$$P_1 a_1 r_2 \left(1 + \frac{\varrho_1 \beta_1}{a_1} \sin\varphi\right) - P_2 a_2 r_1 \left(1 - \frac{\varrho_2 \beta_2}{a_2} \sin\varphi\right)$$
$$= \{1{,}92 T (\varrho_1 r_2 + \varrho_2 r_1) \cos\alpha - (W_1 \varrho_1 r_2 \gamma_1 - W_2 \varrho_2 r_1 \gamma_2)\} \sin\varphi \ldots (227).$$

Wenn man diese Gleichung mit der Gleichung (219) vergleicht; so findet man, daß dieselbe bei der Einführung der in §. 194 gemachten Voraussetzungen mit jener übereinstimmt, ausgenommen, daß der Koeffizient 1,92 dort $= 2$ ist. Diese Abweichung geht offenbar aus der hier angewandten Näherungsmethode der Wurzelausziehung nach dem Ponceletschen Lehrsatze hervor. Substituirt man daher in der vorstehenden Gleichung statt 1,92 den Koeffizienten 2, multiplizirt beide Seiten derselben mit $\left(1 - \frac{\varrho_1 \beta_1}{a_1} \sin\varphi\right)$ und vernachlässigt Glieder von mehr, als zwei Dimensionen in $\frac{\varrho_1}{a_1}, \frac{\varrho_2}{a_2}$ und $\sin\varphi$; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$P_1 = \left(\frac{a_2 r_2}{a_1 r_1}\right)\left\{1 - \left(\frac{\varrho_1 \beta_1}{a_1} + \frac{\varrho_2 \beta_2}{a_2}\right)\sin\varphi\right\} P_2$$

$$+ \left\{\frac{2T(\varrho_1 r_2 + \varrho_2 r_1)\cos\alpha - (W_1 \varrho_1 r_2 \gamma_1 - W_2 \varrho_2 r_1 \gamma_2)}{a_1 r_2}\right\}\sin\varphi, \quad ..(228)$$

eine Beziehung, in welcher die treibende Kraft $P_1$ und der Widerstand $P_2$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes zu einander stehen.

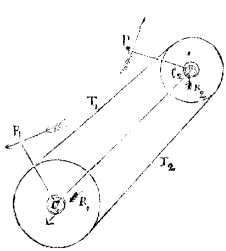
Aus dieser Beziehung ergibt sich nach Gleichung (121) für den Model des Riemens die Formel

$$U_1 = \left\{1 - \left(\frac{\varrho_1 \beta_1}{a_1} + \frac{\varrho_2 \beta_2}{a_2}\right)\sin\varphi\right\} U_2$$

$$+ \left\{\frac{2T(\varrho_1 r_2 + \varrho_2 r_1)\cos\alpha - (W_1 \varrho_1 r_2 \gamma_1 - W_2 \varrho_2 r_1 \gamma_2)}{a_1 r_2}\right\}\sin\varphi \,.\, S_1 \quad ..(229).$$

Wenn der Winkel $\vartheta_2$ über $\frac{\pi}{2}$ hinaus wächst; so fällt die Richtung der Kraft $P_2$ auf die entgegengesetzte Seite von $C_1C_2$, und $\beta_2$ wird negativ, woraus hervorgeht, daß die Gleichung (229) mit der Gleichung (219) auch hinsichtlich der Zweideutigkeit des Zeichens übereinstimmt. Außerdem zeigt die Form dieses Models, daß die größte Kraftersparung erzielt wird, wenn die treibende Kraft $P_1$ an derselben Seite der Mittellinie $C_1 C_2$ angebracht wird, an welcher der Widerstand $P_2$ zu überwinden ist. Es ist dies in der That nur ein besonderer Fall von dem in §. 168 aufgestellten allgemeinen Prinzipe.

§. 197. Die ursprüngliche Spannung T des Riemens kann auf dieselbe Weise, wie in dem früheren einfacheren Falle (Gleichung 222) bestimmt werden.



Bezeichnet man mit $\vartheta$ den Winkel, welchen der Riemen auf der zweiten oder der getriebenen Trommel überspannt, mit P den größten Widerstand, welcher sich in dem Abstande $a$ der Bewegung dieser Trommel entgegensetzt, mit $\varphi'$ den Reibungswinkel zwischen dem Riemen und der Trommel und mit $t_1$ und $t_2$ die Spannungen der beiden Theile des Riemens, wenn das Maximum des Widerstandes zu überwinden ist und der Riemen im Begriffe ist zu gleiten; so hat man zuvörderst nach §. 195

$$(t_1 - t_2) = 2t = 2\mathrm{T}\left(\frac{e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi'} - 1}{e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi'} + 1}\right).$$

Substituirt man diesen Werth für $2t$, ferner die Werthe $\mathrm{P}$ und $a$ für $\mathrm{P}_2$ und $a_2$ in die zweite der Gleichungen (225), und vernachlässigt das sehr kleine in $\sin\alpha . \sin\varphi$ multiplizirte Glied; so ergibt sich

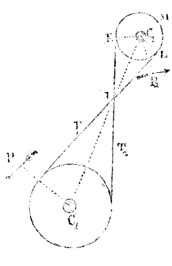
$$\mathrm{P}a - 2\mathrm{T}\left(\frac{e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi'} - 1}{e^{\vartheta \operatorname{tang} \varphi'} + 1}\right) r_2 = -\varrho_2 (2\mathrm{T}\cos\alpha - \mathrm{P}\beta_2 + \mathrm{W}_2 \gamma_2) \sin\varphi.$$

Da $\alpha$ den Neigungswinkel der beiden Theile des Riemens gegeneinander bezeichnet, da diese Theile die Oberfläche der Trommeln berühren, und da $\vartheta$ den Winkel zwischen den beiden Halbmessern der kleineren Trommel, welche nach den Berührungspunkten gezogen werden, darstellt; so hat man $\vartheta = \pi - \alpha$. Setzt man diesen Werth für $\vartheta$ in die vorstehende Gleichung, und löst dieselbe für $\mathrm{T}$ auf; so kommt

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{P}(a - \varrho_2 \beta_2 \sin\varphi) + \mathrm{W}_2 \varrho_2 \gamma_2 \sin\varphi}{\left(\frac{e^{(\pi-\alpha)\operatorname{tang}\varphi'} - 1}{e^{(\pi-\alpha)\operatorname{tang}\varphi'} + 1}\right) r_2 - \varrho_2 \cos\alpha \sin\varphi}\right\} \ldots (230).$$

§. 198. **Der Model des Riemens, wenn die beiden Theile desselben zwischen den Trommeln einander durchkreuzen.**

Wenn sich die beiden Theile des Riemens durchkreuzen, wie



in der seitstehenden Figur dargestellt ist; so wirkt die treibende Kraft vermittelst der Spannung $\mathrm{T}_1$ auf die zweite Trommel an der Seite, welche derjenigen entgegengesetzt ist, an welcher dieselbe wirken würde, wenn sich die Theile des Riemens nicht durchkreuzten. In diesem Falle müßte also zur Erreichung der größten Kraftersparung (§. 168) der Widerstand $\mathrm{P}_2$ an der

der früheren gerade entgegengesetzten Seite oder an derjenigen Seite der Linie $C_1 C_2$ angebracht werden, welche der treibenden Kraft $P_1$ an der ersten Trommel gegenüberliegt. Setzt man diese Anordnung der treibenden Kraft und des Widerstandes voraus, und untersucht diesen Fall ganz auf dieselbe Weise, wie den vorhergehenden; so gelangt man genau zu denselben Ausdrücken für die Beziehung zwischen der treibenden Kraft und dem Widerstande und für den Model des Systemes (Gleichungen 228 und 229).

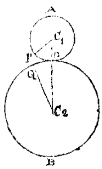
Bei der Bestimmung des Werthes für die ursprüngliche Spannung T (Gleichung 230) wird man übrigens finden, daß der von dem Riemen an der zweiten Trommel überspannte Winkel, welchem der Theil KML des Umfanges entspricht, in diesem Falle nicht mehr durch $\pi - \alpha$, sondern durch $\pi + \alpha$ dargestellt wird. Substituirt man daher diesen Werth für $\vartheta$ in die Gleichung (230); so wird dieselbe

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{P}(a - \varrho_2\beta_2 \sin\varphi) + \mathrm{W}_2\varrho_2\gamma_2 \sin\varphi}{\left(\frac{e^{(\pi+\alpha)\operatorname{tang}\varphi'} - 1}{e^{(\pi+\alpha)\operatorname{tang}\varphi'} + 1}\right) r_2 - \varrho_2 \cos\alpha \sin\varphi}\right\} \ldots (231).$$

Da der Bruch in dem Nenner dieses Ausdruckes immer größer ist, als der in dem Nenner der Gleichung (230); so folgt, daß die ursprüngliche Spannung T, welche dem Riemen gegeben werden muß, damit er die Arbeit unter einem gegebenen Widerstande P von der Einen Trommel zu der anderen überführen kann, kleiner ist, wenn sich die beiden Theile des Riemens durchkreuzen, und größer, wenn sie Dies nicht thun, sodaß nach Gleichung (229) der Riemen unter sonst gleichen Umständen die Arbeit am vortheilhaftesten fortpflanzt, wenn sich die zwischen den Trommeln liegenden Theile desselben durchkreuzen. In der That geht aus §. 188 hervor, daß in diesem Falle, wo der Riemen an einer jeden Trommel einen größeren Winkel überspannt, eine geringere Spannung erforderlich ist, um das Gleiten desselben unter einem gegebenen Widerstande zu verhindern, sodaß die Reibung an den Axen der Trommeln, welche aus den Spannungen des Riemens hervorgeht, in dem letzteren Falle kleiner ist, als in dem ersteren und daher auch in dem vorliegenden Falle zur Überwindung dieser Reibung weniger Arbeit erforderlich ist, als in dem früheren.

## Verzahnungen.

§. 199. **A** und **B** seien zwei Kreise, welche bei **D** einander berühren, und um die festen Mittelpunkte $C_1$ und $C_2$ drehbar sind. Es leuchtet ein, daß wenn eine dem Kreise **A** gegebene Bewegung in Folge der Reibung im Punkte **D** dem anderen Kreise **B** mitgetheilt wird, die Winkel $PC_1D$ und $QC_2D$, welche von diesen Kreisen in derselben Zeit beschrieben werden, denen gleich sind, welche von gleichen Bogenstücken **PD** und **QD** an dem Umfange der beiden Kreise überspannt werden. Bezeichnet man den Winkel $PC_1D$, oder vielmehr den Bogen, welcher diesem Winkel in einem Kreise entspricht, dessen Halbmesser gleich der Einheit ist, mit $\vartheta_1$, den Winkel $QC_2D$ mit $\vartheta_2$ und die Halbmesser $C_1D$ und $C_2D$ der Kreise resp. mit $r_1$ und $r_2$; so hat man Bogen $PD = r_1\vartheta_1$ und Bogen $QD = r_2\vartheta_2$, und da $PD = QD$ ist,




$$r_1\vartheta_1 = r_2\vartheta_2, \text{ oder}$$

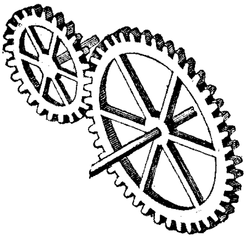
$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{r_2}{r_1} \ldots . (232)$$

Die Winkel, welche von zwei einander berührenden Kreisen in Ein und derselben Zeit beschrieben werden, sind also den Halbmessern dieser Kreise umgekehrt proportional, sodaß ihre Winkelgeschwindigkeiten (§. 74) immer ein konstantes Verhältniß zueinander behalten. Bewegt sich daher das Eine Rad gleichförmig; so bewegt sich auch das andere gleichförmig, und ändert sich die Winkelgeschwindigkeit des Einen Rades in irgend einem Verhältnisse; so ändert sich auch die des anderen Rades in demselben Verhältnisse.

Wenn der Widerstand, welcher sich der Umdrehung des getriebenen Kreises oder Rades **B** beträchtlich ist; so kann man diesem Rade die Bewegung nicht mehr durch die bloße Reibung zwischen seinem und dem Umfange des treibenden Rades mittheilen, und sieht sich genöthigt, die Umdrehung des getriebenen Rades durch andere Mittel, als die Reibung, zu bewirken.

Eines dieser Hülfsmittel ist der bereits beschriebene Riemen, vermittelst welches die Räder in beliebigen Entfernungen voneinander und unter viel größeren Widerständen, als Dies bei der gegenseitigen Reibung an ihren Umfängen möglich ist, sich die Bewegung mittheilen können.

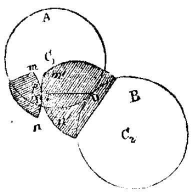
Wenn der Widerstand übrigens sehr bedeutend ist, und die



Räder nahe aneinander gebracht werden können; so führt man die Bewegung von dem Einen auf das andere vermittelst Erhabenheiten, sogenannter **Zähne**, über, welche an beiden Rädern angebracht werden und ineinandergreifen.

Die bei der Konstruktion dieser Zähne zu lösende Aufgabe besteht darin, daß ihren in gegenseitiger Berührung befindlichen Oberflächen eine solche Form gegeben werde, daß sich die Räder durch das Ineinandergreifen der Zähne gerade so herumdrehen, wie sie es bei bloßer Reibung an ihren Umfängen thun würden.

§. 200. Daß es **möglich** ist, Zähne zu konstruiren, welche



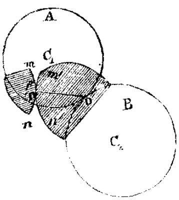

dieser Bedingung entsprechen, kann auf folgende Weise gezeigt werden. $mn$ und $m'n'$ seien zwei Kurven in der gemeinschaftlichen Ebene der beiden Kreise **A** und **B** von der Beschaffenheit, daß wenn sich der Kreis **A** herumdrehet und in Folge der beiderseitigen Berührung im Punkte **D** den Kreis **B** mit herumführt, jene beiden Kurv n $mn$ und $m'n'$ fortwährend miteinander in Berührung bleiben, indem sie natürlich ununterbrochen ihre relativen Lagen und ihren gemeinschaftlichen Berührungspunkt **T** ändern.

Es leuchtet ein, daß sich die beiden Räder durch das Ineinandergreifen von Zähnen, deren Oberflächen nach der Form jener beiden Kurven $mn$ und $m'n'$ gebildet wären, gerade so herumdrehen würden, als sie es durch die Reibung an ihren Umfängen im Punkte **D** thun würden; denn in dem ersteren Falle bringt eine gewisse Reihe von unendlich benachbarten Berührungspunkten an den Umfängen der Räder bei **D** eine andere Reihe von unendlich benachbarten Berührungspunkten an den Kurven $mn$

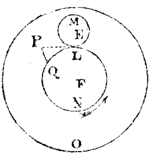
und $m'n'$ bei **T** heraus, und in dem letzteren Falle bewirkt dieselbe Reihe von Punkten an den Kurven $mn$ und $m'n'$ die Berührung derselben Reihe von Punkten an den beiden Umfängen der Räder bei **D**.

Die Herstellung von Zähnen, deren Berührungsflächen die im Vorstehenden bezeichnete Eigenschaft besitzen, ist nun die zu lösende Aufgabe. Man gelangt hierzu durch das folgende allgemeine Prinzip.

§. 201. **Damit zwei Kreise A und B durch die Berührung der Flächen $mn$ und $m'n'$ ihrer Zähne ebenso herumgedrehet werden, wie sie sich durch die Reibung an ihren Umfängen herumdrehen würden, ist es nothwendig und hinreichend, daß eine von dem Berührungspunkte T der Zähne nach dem Berührungspunkte D der Umfänge der beiden Kreise gezogene Linie in einer jeden Lage des Punktes T auf den daselbst in Berührung befindlichen Flächen perpendikular stehe oder eine gemeinschaftliche Normale auf den beiden Kurven $mn$ und $m'n'$ bilde.**




Um dieses Prinzip zu beweisen muß zuvörderst folgender Hülfssatz festgestellt werden: Wenn sich zwei Kreise **M** und **N** vermöge ihrer gegenseitigen Berührung bei **L** um ihre festen Mittelpunkte **E** und **F** drehen, und wenn man sich denkt, daß bei dieser Umdrehung die Ebenen, in welchen jene Kreise liegen (und welche ineinanderfallen) mit herumgeführt werden, und daß bei dieser beiderseitigen Drehung ein in der Ebene von **M** liegender Punkt **P** auf der Ebene von **N** die Kurve **PQ** beschreibt; so ist diese Kurve genau dieselbe, welche der Punkt **P** auf der Ebene von **N** beschreiben würde, wenn diese Ebene, anstatt sich zu drehen, fest gehalten würde, und der Kreis **M**, nachdem sein Mittelpunkt von der festen Axe gelös't wäre, auf der Peripherie von **N** hinrollte und dabei seine Ebene mit sich führte.



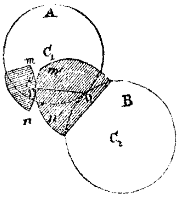

Denn denkt man sich unter **O** eine dritte Ebene, auf welcher die Mittelpunkte **E** und **F** befestigt sind; so leuchtet ein, daß wenn der Ebene **O**, während sich die Kreise **M** und **N** durch ihre gegenseitige Berührung um sich selbst drehen, irgend eine Bewegung mitgetheilt wird, hierdurch durchaus keine Änderung in der Form der Kurve PQ, welche der Punkt P der Ebene von M auf der Ebene von N beschreibt, hervorgebracht wird, da eine solche Bewegung der Ebene O den beiden Ebenen M und N gemeinschaftlich ist.

Nun sei die Richtung, in welcher sich der Kreis N herumdrehet die durch den Pfeil angegebene, und seine Winkelgeschwindigkeit sei gleichförmig. Denkt man sich alsdann, die Ebene O werde um den Punkt F mit einer Winkelgeschwindigkeit gedrehet, welche der von N gleich und gerade entgegengesetzt ist, während die beiden Kreise M und N nach wie vor um ihre Mittelpunkte rotiren; so begreift man, daß der Kreis N, welcher durch seine eigene Bewegung nach der Einen Seite und durch die mit der Ebene O gemeinschaftliche Bewegung um dieselbe Winkelgröße nach der entgegengesetzten Seite gedrehet wird, fortwährend im Raume in Ruhe bleibt. Der Mittelpunkt E des Kreises M dagegen, welcher keine eigene Bewegung hat, drehet sich mit der Winkelgeschwindigkeit der Ebene O um den Punkt F, indem gleichzeitig die übrigen Punkte seiner Ebene um ihn mit der ihm angehörigen Winkelgeschwindigkeit rotiren. Hierdurch rückt nun der gemeinschaftliche Berührungspunkt L in der Richtung der Bewegung der Ebene O oder in entgegengesetzter Richtung der Bewegung der Ebene N auf der Peripherie des Kreises N weiter, und zwar um denselben Bogentheil, welcher bei der gemeinschaftlichen Drehung der Kreise N und M vermöge ihrer Berührung bei L von beiden Peripherieen durch diesen Punkt L gegangen wäre, und man sieht, daß sich der Kreis M bei den vorausgesetzten Bewegungen gegen den Kreis N gerade so verhalten würde, als wenn er auf dessen Umfange hinrollte.

Es leuchtet aber ein, daß die hier angenommene gemeinschaftliche Bewegung um den Punkt F nur einen Einfluß auf die absoluten Bewegungen der beiden Kreise M und N im Raume, aber gar keinen auf ihre relativen Bewegungen äußern und mithin auch die Kurve PQ, welche ein Punkt P der Ebene des Einen auf der Ebene des anderen beschreibt, durchaus nicht ändern kann.

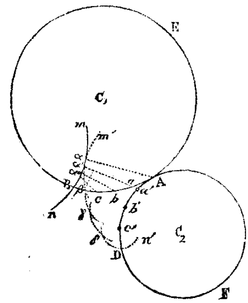
Nachdem dieser Hülfssatz dargethan ist, ergibt sich die Wahrheit des obigen Prinzipes leicht. Denn wenn der Umfang M auf dem Umfange N rollte; so würde der Punkt P in irgend einem Augenblicke um den gemeinschaftlichen Berührungspunkt L einen Kreisbogen beschreiben (indem man sich denken kann, daß sich die Linie LP in dem betrachteten Augenblicke momentan um den Punkt L drehete), und aus dem vorstehenden Satze folgt, daß der Punkt P der Ebene M auf der Ebene N ebenfalls in jedem Augenblicke um den Berührungspunkt L einen sehr kleinen Kreisbogen beschreiben würde, wenn die beiden Mittelpunkte E und F fest wären, und die Kreise sich vermöge ihrer gegenseitigen Berührung um sich selbst dreheten. Man sieht also, daß die Linie PL auf der Kurve PQ im Punkte P immer normal steht.

Nun sei $p$ ein Punkt der an dem Kreise A befestigten Kurve $mn$, welcher dem Punkte T sehr nahe liegt. Es leuchtet ein, daß wenn der Punkt $p$ in Folge der Berührung mit der Kurve $m'n'$ in T übergeht (s. §. 200), derselbe auf der Ebene des Kreises B einen sehr kleinen Theil der Kurve $m'n'$ beschreiben wird. Aber die Kurve, welche dieser Punkt in irgend einem Augenblicke auf der Ebene von B beschreibt, ist nach dem Vorhergehenden immer auf der Linie DT perpendikular; demnach ist die Kurve $m'n'$ im Punkte T auf der Linie DT perpendikular, und es folgt, daß auch die Kurve $mn$ auf dieser Linie perpendikular stehe, oder daß DT eine gemeinschaftliche Normale auf beiden Kurven im Punkte T sei. Dieses ist die charakteristische Eigenschaft der Kurven $mn$ und $m'n'$, nach welcher sie der Bedingung einer fortwährenden Berührung entsprechen, während sich die Kreise vermöge ihrer Berührung an den Umfängen bei D herumdrehen, und nach welcher sie umgekehrt durch ihre eigene Berührung den Kreisen dieselbe Bewegung mitzutheilen im Stande sind, welche die Letzteren durch die Berührung an ihren Umfängen annehmen würden.




§. 202. **Methode, mit Hülfe von Kreisbögen die Form eines Zahnes des Einen Rades zu beschreiben, welcher mit einem Zahne des anderen Rades von irgend einer gegebenen Form zusammengreifen soll.**

Wenn verlangt wird, daß die Räder durch das Ineinander-



greifen der Zähne gerade so herumbewegt werden, wie sie es durch die gegenseitige Berührung der Kreise ABE und ADF, welche man die Theilkreise oder Theilrisse nennt, thun würden; so sei AB ein Bogen des Theilkreises ABE zwischen irgend zwei Punkten A und B, welche gegen zwei auf einander folgende Zähne eine ähnliche Lage haben; ebenso sei AD ein Bogen des Theilkreises ADF, welcher dem Bogen AB gleich ist, sodaß die Punkte B und D gleichzeitig in A ankommen, wenn sich die beiden Kreise vermöge ihrer gegenseitigen Berührung herumdrehen. Den Bogen AB oder AD oder auch deren Sehnen, nennt man die Theilung der Räder. Zerlegt man eine jede dieser Theilungen in den Punkten $a, b, \ldots$ und $a,' b,' \ldots$ in gleiche Theile; so werden die Punkte $a$ und $a'$, $b$ und $b'$ u. s. w. gleichzeitig im Punkte A ankommen. Nun sei $mn$ die Form des Durchschnittes eines Zahnes an dem Rade $C_1$, mit welchem ein entsprechender Zahn an dem anderen Rade $C_2$ zusammengreifen soll, sodaß, wenn dieser letztere Zahn den ersteren treibt, oder von demselben getrieben wird, die Drehung der beiden Räder gerade so erfolgt, als wenn sie vermöge der Berührung der Theilkreise ABE und ADF in A rotirten.

Zu diesem Ende messe man von A den kleinsten Abstand $A\alpha$ bis zu der Kurve $mn$, und beschreibe mit dem Halbmesser $A\alpha$ aus dem Punkte A in der Ebene des Kreises $C_2$ einen Kreisbogen $\alpha\beta$. Alsdann messe man in ähnlicher Weise den kleinsten Abstand $a\alpha'$ der Kurve $mn$ vom Punkte $a$, und beschreibe mit dem Halbmesser $a\alpha'$ aus dem Punkte $a'$ einen Kreisbogen $\beta\gamma$, welcher den Bogen $\alpha\beta$ in $\beta$ scheidet. Ebenso messe man von dem Punkte $b$ den kürzesten Abstand $b\alpha''$ der Kurve $mn$, und beschreibe mit dem Halbmesser $b\alpha''$ aus dem Punkte $b'$ den Kreisbogen $\gamma\delta$, welcher den Bogen $\beta\gamma$ in $\gamma$ schneidet, und so fort mit den übrigen Theilpunkten. Eine Kurve, welche alle diese Kreisbögen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, etc. berührt, wird den gesuchten Durchschnitt des Zahnes mit der gemeinschaftlichen Ebene von $C_1$ und $C_2$ ergeben.

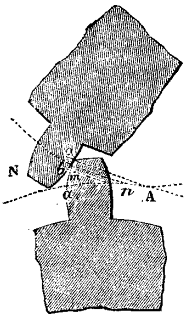
Diese Methode ist von Poncelet in seiner **Mécanique industrielle, 3. partie, No.** 60, ohne Beweis angegeben; man kann die Richtigkeit derselben auf folgende Weise darthun.

Da der kürzeste Abstand $a\alpha'$ eines gegebenen Punktes $a$ von einer gegebenen Kurve $mn$ eine Normale auf der Kurve im Punkte $\alpha'$ ist; so folgt, daß ein aus dem Punkte $a$ mit diesem kleinsten Abstande als Halbmesser beschriebener Kreis die Kurve im Punkte $\alpha'$ berührt, und daß mithin die Kurve und der Kreis in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Normale besitzen.

Nun werden die beiden Punkte $a$ und $a'$ bei der Umdrehung der Theilkreise gleichzeitig in dem Punkte A zusammenkommen und der kleinste Abstand der Kurve $mn$ vom Punkte A wird alsdann $a\alpha'$ sein, sodaß der Bogen $\beta\gamma$ alsdann einen Bogen darstellt, welcher aus A mit dem kleinsten Abstande als Halbmesser beschrieben ist. Demnach wird der Kreisbogen $\beta\gamma$ die Kurve $mn$ im Punkte $\alpha'$ berühren, und die Linie $a\alpha'$, welche alsdann von dem Berührungspunkte A der beiden Theilkreise nach dem Berührungspunkte $\alpha'$ der beiden Kurven $mn$ und $m'n'$ gezogen ist, wird eine gemeinschaftliche Normale auf beiden Kurven in diesem Punkte sein. Daraus folgt, daß sich die beiden Räder in diesem Augenblicke durch die Berührung der Kurven $mn$ und $m'n'$ gerade so treiben werden, wie sie es durch die Berührung im Punkte A thun würden, und da ein jeder Kreisbogen der Kurve $m'n'$ nach und nach die wirkende Fläche des Zahnes bildet; so wird er in gleicher Weise, wie der Bogen $\beta\gamma$, Einen Punkt haben, welcher mit einem entsprechenden Punkte der Kurve $mn$ so zusammenstimmt, daß sich die Räder beim Zusammentreffen dieser Punkte der Forderung gemäß bewegen. Dergleichen Punkte gibt es in der Kurve $m'n'$ offenbar so viele, als Theilpunkte $a, b \ldots$ und Kreisbögen $\alpha\beta,\ \beta\gamma, \ldots$ angenommen sind.

Man begreift, daß die Form der Zähne desto genauer ausfallen wird, je größer die Anzahl der angenommenen Theilpunkte ist. Es scheint jedoch in den meisten Fällen hinreichend zu sein, wenn man drei, oder wo keine große Genauigkeit erfordert wird, nur zwei Theilpunkte annimmt. Poncelet (**Méc. industr.** 3me **partie, Nro. 60**) hat die folgende sehr einfache Methode angegeben, durch welche die Form der Zähne näherungsweise und in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit gefunden werden kann.

Angenommen, der gegebene Zahn N des Einen Rades be-

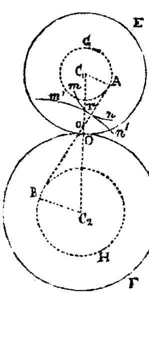



finde sich in der Lage, in welcher er von dem gesuchten Zahne des anderen Rades zuerst angegriffen oder verlassen wird. A$a$ und A$b$ seien gleiche Bögen der Theilkreise der beiden Räder, deren Berührungspunkt in A liegt. Man ziehe die Linie des kürzesten Abstandes A$\alpha$ zwischen A und der Kurve des Zahnes N, verbinde $a$ und $\alpha$ durch eine gerade Linie $a\alpha$, halbire dieselbe in $m$ und errichte in $m$ auf $a\alpha$ das Perpendikel $mn$, welches den Theilkreis A$a$ in $n$ schneidet. Beschreibt man nun aus $n$ einen Kreis, welcher durch die Punkte $a$ und $\alpha$ geht; so erhält man näherungsweise die Form des gesuchten Zahnes.

## Kreisevolventen-Verzahnung.

§. 203. Die Zähne zweier Räder werden gehörig ineinandergreifen, wenn sie durch Kurven begränzt sind, welche der Endpunkt eines biegsamen Fadens beschreibt, der sich von dem Umfange eines Kreises abwickelt, und welche man Kreisevolventen nennt, vorausgesetzt, daß die Kreise, deren Evolventen jene Kurven bilden, mit den Theilkreisen der Räder konzentrisch sind, und daß ihre Halbmesser in demselben Verhältnisse zueinander stehen, wie die der Theilkreise selbst.

OE und OF seien die Theilkreise der beiden Räder, AG




BH zwei mit denselben konzentrische Kreise, deren Halbmesser $C_1$A und $C_2$B sich ebenso zueinander verhalten, wie die Halbmesser $C_1$O und $C_2$O der Theilkreise. Ferner seien $mn$ und $m'n'$ die Durchschnitte der Zähne der beiden Räder, welche von den Endpunkten zweier biegsamen Fäden beschrieben werden, die sich resp. von den Umfängen der beiden Kreise AG und BH abwickeln. Befinden sich nun diese Zähne bei irgend einer

Lage der Räder im Punkte T miteinander in Berührung, und zieht man von dem Punkte T die Tangenten **TA** und **TB** an die Grundkreise **AG** und **BH**; so stellt **AT** offenbar die Lage des biegsamen Fadens dar, als sein Endpunkt im Begriffe war, das Element der Kurve *mn* bei **T** zu beschreiben. Hieraus folgt, daß **AT** auf der Kurve *mn* im Punkte **T** normal steht, und ebenso ergibt sich, daß **BT** eine Normale auf der Kurve *m′n′* in demselben Punkte **T** sei. Da aber die beiden Kurven in **T** eine gemeinschaftliche Normale haben müssen; so fallen ihre Normalen **TA** und **TB** für diesen Punkt nothwendig in Eine gerade Linie **ATB** zusammen. Zieht man nun die Halbmesser $C_1A$ und $C_2B$, welche beide auf **ATB**, als der gemeinschaftlichen Tangente der beiden erzeugenden Kreise, perpendikular stehen; so hat man, wenn die Linie **AB** die Linie $C_1C_2$ in *o* schneidet, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $AoC_1$ und $BoC_2$

$$C_1o : C_2o = C_1A : C_2B.$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$C_1A : C_2B = C_1O : C_2O,$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt

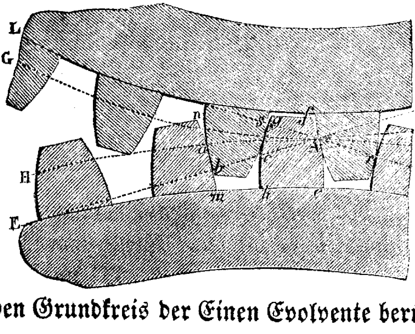
$$C_1o : C_2o = C_1O : C_2O,$$

d. h., die Punkte **O** und *o* fallen zusammen, und die gerade Linie **AB**, welche durch den Berührungspunkt **T** der beiden Zähne geht und daselbst auf beiden normal steht, geht auch durch den Berührungspunkt **O** der beiden Theilkreise der Räder.

Da sich diese Folgerung für eine jede beliebige Lage der Räder, und mithin für einen jeden gemeinschaftlichen Berührungspunkt der beiden Zähne ergibt; so sieht man, daß die in §. 201 aufgestellte zum richtigen Ineinandergreifen der Zähne nothwendige und hinreichende Bedingung bei Zähnen, welche nach Kreisevolventen gebildet sind, erfüllt wird.

Man kann die Wirkung der Kreisevolventen-Verzahnungen auch aus folgendem Gesichtspunkte betrachten. Stellt man sich unter **AB** einen Faden vor, welcher um die Kreise **AG** und **BH** geschlungen ist; so würden die Räder vermittelst dieses Fadens gerade so getrieben werden, wie Dies durch die Berührung ihrer Theilkreise geschehen würde, da sich die Halbmesser **AG** und **BH** wie die Halbmesser der Theilkreise zu einander verhalten. Denkt man sich ferner, die Kreise **AG** und **BH** führen bei dieser Umdrehung ihre Ebenen mit sich herum, und in irgend einem Punkte **T** des Fadens sei ein Stift befestigt, welcher gleichzeitig auf den unter ihm fortgleitenden Ebenen die Kurven $mn$ und $m'n'$ einreiße; so leuchtet ein, daß diese Kurven, da sie von Ein und demselben Punkte beschrieben werden, in allen Lagen der Kreise miteinander in Berührung sein müssen, ob nun diese Kreise durch den Faden oder durch die gegenseitige Berührung ihrer Theilkreise getrieben werden. Umgekehrt, würden die Räder aber auch durch die Berührung von Zähnen, welche nach den Kurven $mn$ und $m'n'$ gebildet wären, ebenso getrieben werden, wie Dies durch die Berührung ihrer Theilkreise geschehen würde. Es ist übrigens leicht zu sehen, daß die von dem Punkte **T** dergestalt beschriebenen Kurven $mn$ und $m'n'$ Evolventen der Kreise **AG** und **BH** sein werden.

Endlich ist hierbei noch zu bemerken, daß sich der Berührungspunkt **T** der Zähne längs der geraden Linie **AB**, welche die erzeugenden Kreise **AG** und **BH** der Evolventen berührt, fortbewegt, oder daß diese Linie der geometrische Ort der verschiedenen Berührungspunkte ist. Diese Eigenschaft der Linie **AB** findet außerdem für alle Zähne, welche in Ein und demselben Augenblicke miteinander in Berührung sind, gleichzeitig statt, sodaß die Berührungspunkte aller Zähne, wenn deren mehrere sich auf Ein Mal berühren, in jener Linie liegen. Hierin besteht eine charakteristische und sehr wichtige Eigenthümlichkeit der Evolventen-Verzahnung. So liegen z. B., die Berührungspunkte $r$ und $s$ der nach Kreisevolventen gebildeten Zähne der seitstehenden Figur in derselben geraden Linie, welche



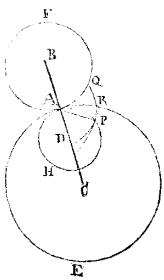

den Grundkreis der Einen Evolvente berührt und durch den Berührungspunkt A der Theilkreise geht. In derselben Weise liegen die Punkte A und *b* in der Berührungslinie des Grundkreises der anderen Evolvente.

## Epizykoliden- und Hypozykloiden-Verzahnung.

§. 204. Wenn Ein Kreis auf dem äußeren Umfange eines anderen hinrollt, und ein Punkt in dem Umfange des rollenden Kreises wird genöthigt, auf der Ebene des festen Kreises eine Kurve zu beschreiben; so entsteht eine Epizykloide. Der rollende Kreis heißt der erzeugende und der unbewegliche der Grundkreis der Epizykloide.

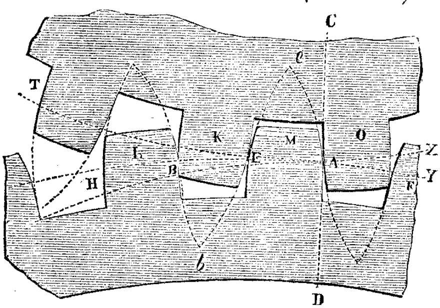
Wenn der erzeugende Kreis, statt auf dem äußeren, auf dem inneren Umfange des Grundkreises hinrollt; so beschreibt jener Punkt eine Hypozykloide.

**PQ** und **PR** seien resp. die Theile einer Epizykloide und einer Hypozykloide, welche beide Ein und denselben erzeugenden Kreis **APH** und zu Grundkreisen die Theilkreise **AF** und **AE** zweier Räder haben. Gibt man den Zähnen dieser beiden Räder die Form jener Kurven; so werden dieselben gehörig ineinandergreifen. Denn wenn die Zähne bei **P** miteinander in Berührung sind, und man legt den erzeugenden Kreis so, daß er die Theilkreise der beiden Räder in **A** berührt; so wird sein Umfang offenbar durch den Berührungspunkt **P** der Zähne gehen, da sein erzeugender Punkt in dem Augenblicke, wo man jenen Kreis im Punkte **A** auf dem gemeinschaftlichen unendlich kleinen Elemente der beiden Grundkreise hinrollte, gleichzeitig ein unendlich kleines Element der beiden Kurven beschreiben müßte, sodaß diese beiden Kurven und der erzeugende Kreis in der Lage **APH** nothwendig Einen Punkt **P** miteinander gemein haben müssen, welcher mit dem Berührungspunkte der Kurven zusammenfällt. Da sich aber der erzeugende Kreis bei seinen momentanen Rollen auf beiden Grundkreisen in **A** augenblicklich um diesen Punkt drehet, wobei der Punkt **P** desselben ein Element der beiden Kurven **PQ** und **PR** oder einen unendlich kleinen Kreisbogen mit dem Halbmesser **AP** aus **A** beschreibt; so folgt ferner, daß die Linie



**AP** in jenem Punkte auf beiden Kurven normal steht, und man sieht, daß Zähne, welche nach den Kurven **PQ** und **PR** gebildet sind, der Bedingung ein Genüge leisten, daß die von dem Berührungspunkte der Theilkreise nach irgend einem Berührungspunkte der Zähne gezogene Linie **AP** auf den Oberflächen der beiden Zähne normal stehe, eine Bedingung, welche nach §. 201 zu dem gehörigen Ineinandergreifen der Zähne nothwendig und hinreichend ist.

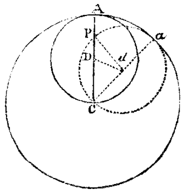
Beschreibt man also auf dem Theilkreise eines Rades als Grundkreis mit irgend einem erzeugenden Kreise eine Epizykloide und auf dem Theilkreise des anderen Rades als Grundkreis mit demselben erzeugenden Kreise eine Hypozykloide; so werden Zähne, welche die From dieser Kurven erhalten, die Räder in der gewünschten Weise treiben.




Man bemerkt übrigens, daß man statt des erzeugenden Kreises eine jede beliebige Kurve resp. auf dem äußeren Umfange des Einen und auf dem inneren Umfange des anderen Theilkreises hinrollen und dadurch Epi- und Hypokurvoiden erzeugen könnte, welche ebenso wohl, wie die Epi- und Hypozykloiden zu passenden Zahnformen dienen können, da sich der vorstehende Beweis in Nichts änderen würde; wenn man für den erzeugenden Kreis irgend eine andere erzeugende Kurve an die Stelle setzte.

§. 205. **Hülfssatz.** — **Wenn der Durchmesser des erzeugenden Kreises einer Hypozykloide dem Halbmesser seines Grundkreises gleich kommt; so wird die Hypozykloide eine gerade Linie, welche in der Richtung eines Halbmessers des Grundkreises liegt.**

Sind **D** und $d$ zwei Lagen des Mittelpunktes eines solchen erzeugenden Kreises, und nimmt man an, der erzeugende Punkt habe sich bei der ersten Lage in **A** befunden; so wird derselbe bei der




zweiten Lage in den Punkt P, d.h. in den Punkt fallen, wo die Linie CA den Kreis in der zweiten Lage durchschneidet. Denn zieht man C$a$ und P$d$; so ist $<$P$da = <$PC$d + <$CP$d$ $=2$AC$a$, und es ist auch $2da=$CA; mithin

$$2\overline{da}\times\overline{\mathrm{P}da}=2\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AC}a} \text{ oder}$$
$$\overline{da}\times\overline{\mathrm{P}da}=\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AC}a}, \text{ folglich}$$
$$\text{Bogen A}a = \text{Bogen P}a.$$

Wenn aber der Bogen $a$P gleich dem Bogen $a$A ist; so ist der Punkt P derjenige, welcher in der ersten Lage des Kreises mit A zusammenfiel, also der erzeugende Punkt. Da Dies für alle Lagen des erzeugenden Kreises gilt; so folgt, daß der erzeugende Punkt die gerade Linie AC beschreibt.

Der Durchschnitt eines hypozykloidalen Zahnes, bei welchem der Durchmesser des erzeugenden Kreises dem Halbmesser des Theilrisses seines Rades gleich ist, bildet demnach eine gerade Linie, welche nach dem Mittelpunkte des Rades gerichtet ist.

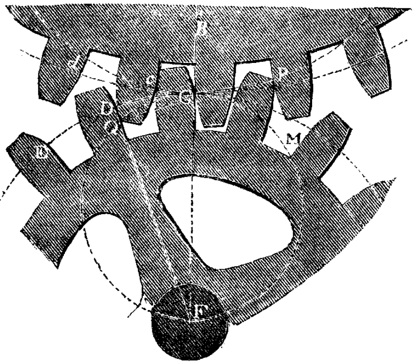
## Anordnung und Verzeichnung der Zähne.

§. 206. Alle Zähne desselben Rades erhalten eine gleiche Form und gleiche Dimensionen. Es würde in der That unmöglich sein, zwei Räder mit verschiedenen Anzahlen von Zähnen herzustellen, welche gehörig ineinandergriffen, wenn nicht alle Zähne des Einen Rades denen des anderen vollkommen gleich wären.

Alle Zähne Eines Rades werden demnach von dem Maschinenarbeiter nach Ein und derselben Schablone angefertigt, und in der Bestimmung der Form und der Dimensionen dieser einzelnen Schablone oder dieses einzelnen Modells in Uebereinstimmung mit den mechanischen Effekten, welche das Rad hervorbringen soll, besteht die Kunst der Verzeichnung der Radzähne.

Die mechanischen Funktionen, welche die verzahnten Räder gewöhnlich zu verrichten haben, reduziren sich auf die Mittheilung von Arbeit unter einer vermehrten oder verminderten Geschwindigkeit.

Wenn CD, DE etc. Bögen des Theilkreises oder Theilrisses



eines Rades sind, welche zwischen ähnlichen Punkten unmittelbar aufeinander folgender Zähne liegen, (und welche man die Theilungen des Rades nennt); so leuchtet ein, daß alle diese Bögen gleich sein müssen, da alle Zähne einander gleich und ähnlich vertheilt sind, sodaß ein jeder Zahn der beiden Räder, indem er vermöge der Berührung mit einem entsprechenden Zahne des anderen Rades vorübergeht, seine Theilung durch denselben Raum **CD** über den Berührungspunkt **C** des Theilkreises hinausführt. Da nun die Theilung des Einen Rades über den Raum **CD** und die des anderen Rades über den Raum *cd* geführt wird, und die Räder durch die Berührung ihrer Zähne sich gerade so bewegen, wie sie dies durch die Berührung ihrer Theilkreise in **C** thun würden; so folgt, daß die Bögen **CD** und *cd* oder die Theilungen der beiden Räder einander gleich sind. Bezeichnen daher resp. $r_1$ und $r_2$ die Halbmesser der Theilkreise der beiden Räder und $n_1$ und $n_2$ die Anzahlen der Zähne dieser Räder; so sind die Umfänge ihrer Theilkreise resp. gleich $2\pi r_1$ und $2\pi r_2$, ferner ist

$$\mathrm{CD} = \frac{2\pi r_1}{n_1}, cd = \frac{2\pi r_2}{n_2}, \text{ und man hat } \frac{2\pi r_1}{n_1} = \frac{2\pi r_2}{n_2} \text{ oder}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}, \ldots . (232)$$

d. h., die Halbmesser der Theilkreise müssen sich wie die Anzahlen der Zähne der beiden Räder verhalten.

Stellt ferner $m_1$ die Anzahl der Umdrehungen dar, welche das erste Rad in derselben Zeit macht, wo das zweite Rad $m_2$ Umdrehungen vollendet; so wird $2\pi r_1 m_1$ der Raum sein, welchen ein Punkt im Umfange des Theilkreises des ersten Rades beschreibt, während ein solcher im Umfange des Theilkreises des zweiten Rades den Raum $2\pi r_2 m_2$ zurücklegt. Da sich die Räder aber gerade so herumdrehen, als wenn ihre Theilkreise miteinander in Berührung wären; so müssen sich alle Punkte in den Umfängen der beiden Theilkreise in gleichen Zeiten durch gleiche Räume bewegen; man hat daher $2\pi r_1 m_1 = 2\pi r_2 m_2$, oder

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}, \ldots . (233)$$

d. h., die Halbmesser der Theilkreise verhalten sich umgekehrt, wie die Anzahlen der Umdrehungen der Räder in derselben Zeit.

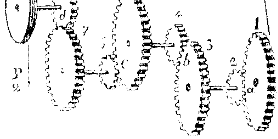
Aus den Gleichungen (232) und (233) folgt ferner

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{n_1}{n_2}, \ldots . (234)$$

d. h., die Anzahlen der Umdrehungen, welche beide Räder in derselben Zeit vollenden, verhalten sich umgekehrt, wie die Anzahlen der Zähne derselben.

§. 207. **Bei einem Systeme von mehreren Rädern ist die Anzahl der Umdrehungen des ersten Rades in einer gewissen Zeit gegeben; es soll die Anzahl der Umdrehungen des letzten Rades in derselben Zeit bestimmt werden.**

Wenn ein von einem anderen Rade getriebenes Rad an seiner Axe ein drittes Rad mit herumführt, welches wiederum in ein viertes Rad greift und demselben die Bewegung mittheilt, wenn alsdann an der Axe dieses vierten Rades ein fünftes befestigt ist, welches in ein sechstes



greift und so fort; so seien $n_1, n_2, n_3, \ldots n_{2p}$ die Anzahlen der Zähne der aufeinander folgenden Räder, welche ein aus $p$ Paaren bestehendes Räderwerk bilden. Während das erste Rad $m$ Umdrehungen macht, vollende das zweite und dritte (welche, an Ein und derselben Axe befestigt, sich zusammen umdrehen) deren $m_1$, das vierte und fünfte (welche sich in gleicher Weise zusammen umdrehen) deren $m_2$, das sechste und siebente deren $m_3$ und so fort, sodaß das letzte oder $2p$te Rad $m_p$ Umdrehungen macht, während das erste sich $m$ mal herumdrehet.

Da das erste Rad von $n_1$ Zähnen das zweite Rad von $n_2$ Zähnen in Bewegung setzt, und das erste Rad $m$ Umdrehungen macht, während sich das zweite $m_1$ mal herumdrehet; so hat man nach Gleichung (234) $\frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n_2}$, und da, während das dritte Rad (welches sich mit dem zweiten zusammen herumdrehet) $m_1$ Umdrehungen macht, das vierte deren $m_2$ vollendet; so hat man ferner $\frac{m_2}{m_1} = \frac{n_3}{n_4}$. Ebenso erhält man für die folgenden Räder

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{n_5}{n_6}, \frac{m_4}{m_3} = \frac{n_7}{n_8}, \ldots \frac{m_p}{m_{p-1}} = \frac{n_{2p-1}}{n_{2p}}.$$

Multiplizirt man alle diese Gleichungen miteinander, und hebt die gleichen Faktoren in Zähler und Nenner gegeneinander auf; so kommt

$$\frac{m_p}{m} = \frac{n_1 \cdot n_3 \cdot n_5 \ldots n_{2p-1}}{n_2 \cdot n_4 \cdot n_6 \ldots n_{2p}} \ldots (235)$$

Die Faktoren in dem Zähler dieses Bruches bezeichnen die Anzahlen der Zähne aller treibenden Räder, während die in dem Nenner die Anzahlen der Zähne aller getriebenen Räder bezeichnen.

Sind die Anzahlen der Zähne der ersteren Räder sämmtlich einander gleich und durch $n_1$ dargestellt, und sind ebenfalls die Anzahlen der Zähne der letztern einander gleich und durch $n_2$ dargestellt; so hat man

$$\frac{m_p}{m} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^p \ldots (236)$$

Nachdem man die Anzahl der Zähne bestimmt hat, welche ein jedes Rad haben muß, damit durch die Vereinigung aller zu einem Räderwerke eine verlangte Abänderung der Geschwindigkeit erreicht werden könne; so bleibt zunächst zu betrachten, welche Dimensionen die Zähne erhalten müssen, damit sie stark genug sind, um die Arbeit mit jener Geschwindigkeit fortzupflanzen, oder um den Druck zu ertragen, welcher die Mittheilung der Arbeit unter jener besonderen Geschwindigkeit begleitet; alsdann sind die Dimensionen des Rades selbst zu bestimmen, welche diesen Dimensionen der Zähne und ihrer gegebenen Anzahl entsprechen.

## §. 208. Bestimmung der Theilung eines Rades, wenn man die von demselben überzuführende Arbeit kennt.

Wenn U die Anzahl der Arbeitseinheiten, welche das Rad in der Minute überführen soll, $m$ die Anzahl der in der Minute zu machenden Umdrehungen, $n$ die Anzahl der Zähne, T die Theilung des Rades in Fußen, P den Druck auf jeden Zahn in Pfunden bezeichnet; so stellt $n\mathrm{T}$ den Umfang des Theilkreises oder Theilrisses in Fußen und $mn\mathrm{T}$ den Raum in Fußen dar, welchen der Letztere in der Minute beschreibt. Da nun U die Arbeit ausdrückt, welche durch diesen Raum in der Minute übergeführt wird; so ist $\frac{\mathrm{U}}{mn\mathrm{T}}$ der mittlere Druck, unter welchem die Arbeit verrichtet wird (§. 50), und man hat, wenn man diesen Druck mit P bezeichnet,

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{U}}{mn\mathrm{T}} \dots . (237)$$

Die Theilung T würde offenbar gleich der doppelten Stärke oder Dicke eines jeden Zahnes sein, wenn die Zwischenräume zwischen den Zähnen der Stärke der Zähne gleich wären. Damit die Zähne der beiden Räder mit Leichtigkeit ineinandergreifen, ist es übrigens nothwendig, daß die Theilung des Rades die doppelte Stärke eines Zahnes um eine Größe überschreitet, welche je nach der Genauigkeit der Konstruktion des Rades zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{15}$ jener Breite variirt.

Da die Theilung T von der Stärke des Zahnes, und die Stärke des Zahnes nach der Theorie der Festigkeit der Materialien von dem auszuhaltenden Drucke P abhängt; so sieht man, daß die Größe T in der obigen Gleichung eine Funktion von P, oder umgekehrt P eine Funktion von T ist. Diese Funktion kann nach den Versuchen von Morin (s. die Tabelle am Ende dieses Paragraphes) in der Form

$$\mathrm{T} = c\sqrt{\mathrm{P}} \ldots . (238)$$

angenommen werden, worin $c$ eine Konstante bezeichnet, deren Betrag von der Beschaffenheit des Materiales, aus welchem der Zahn besteht, abhängig ist. Eliminirt man zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung die Größe P; so ergibt sich

$$\mathrm{T} = \sqrt[3]{\frac{c^2\mathrm{U}}{mn}} \ldots . (238_a)$$

Wenn die von der Maschine fortgepflanzte Arbeit in Pferdekräften angegeben ist, und man nimmt Eine Pferdekraft zu 510 Arbeitseinheiten in der Sekunde oder zu 30600 Arbeitseinheiten in der Minute an (sodaß 1 Pferdekraft in der Sekunde $= 510^{\text{Pfund} \times \text{Fuß}}$ gesetzt wird, was mit der französischen Annahme von $75^{\text{kil.} \times \text{mèt.}}$ sehr nahe übereinstimmt); so hat man, wenn die überzuführende Arbeit H Pferdekräften gleichkommt, $\mathrm{U} = 30600\mathrm{H}$ (in der Minute) zu setzen. Substituirt man diesen Werth in die vorstehende Gleichung, und bezeichnet die Konstante $\sqrt[3]{30600c^2}$ mit C; so ergibt sich

$$\mathrm{T} = \sqrt[3]{\frac{30600\,c^2 . \mathrm{H}}{mn}} = \mathrm{C}\sqrt[3]{\frac{\mathrm{H}}{mn}} \ldots . (239)$$

Die folgenden Regeln sind dem **Aide-mémoire de Mécanique pratique par Morin** (Hilfsbuch für praktische Mechanik von Morin, übersetzt von Holtzmann) entlehnt:

Wenn man mit $a$ die Breite oder Länge eines Zahnes parallel zu der Axe des Rades und mit $b$ die Stärke oder Dicke desselben auf dem Theilkreise, beide Dimensionen in rheinländischen Fußen gemessen, bezeichnet; so ist es für fortwährend geschmierte Räder vortheilhaft, bei einer Geschwindigkeit des Theilkreises von etwa 5 Fuß in der Sekunde . . . . . . . . . . $a=4b$, bei einer größeren Geschwindigkeit . . . . . . . . . . . . . . $a=5b$, wenn die Räder fortwährend naß erhalten werden, . . . $a=6b$ anzunehmen.

Wenn diese Beziehungen zwischen der Breite $a$ und der Stärke $b$ der Zähne stattfinden; so kann man für die absolute Stärke $b$ derselben die folgenden Werthe nehmen,

für Zähne von Gußeisen . . . . . . . $b=0{,}002288\sqrt{\mathrm{P}}$,
" " " Bronze . . . . . . . . $b=0{,}002854\sqrt{\mathrm{P}}$,
" " " hartem Holze . . . . . $b=0{,}003159\sqrt{\mathrm{P}}$,

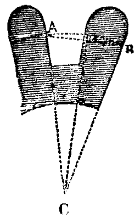
worin der Druck P, welchen die Zähne auszuhalten haben, in köllnischen Pfunden gegeben sein muß.

Für sehr sorgfältig ausgeführte Zähne macht man den Zwischenraum zwischen zwei Zähnen um $\frac{1}{15}$ größer, als die Stärke $b$ derselben, also $=(1+\frac{1}{15})b=1{,}067b$, und für weniger gut gearbeitete Zähne, macht man diesen Zwischenraum um $\frac{1}{10}$ größer, als die Stärke der Zähne, also $=(1+\frac{1}{10})b=1{,}1b$, sodaß die Theilung in diesen beiden Fällen resp. $\mathrm{T}=2{,}067b$ und $\mathrm{T}=2{,}1b$ beträgt. Substituirt man in diese Ausdrücke die obigen Werthe von $b$; so erhält man zur Bestimmung der Theilung T durch die Gleichungen (238), (238a) oder (239) für den Koeffizienten $c$ die nachstehenden Werthe.

| Material der Zähne | Werthe von $c$ | |
|---|---|---|
| | für sehr gut gearbeitete Zähne | für weniger gut gearbeitete Zähne |
| Gußeisen . . . . . . . . . . | 0,004729 | 0,004805 |
| Bronze . . . . . . . . . . . | 0,005899 | 0,005993 |
| hartes Holz . . . . . . . | 0,006529 | 0,006634 |

**§. 209. Bestimmung des Halbmessers des Theilkreises oder Theilrisses eines Rades, welches $n$ Zähne von einer gegebenen Theilung enthalten soll.**

Die Sehne AMB des Bogens AB stelle die Theilung T




des Rades dar; $AC=R$ sei der Halbmesser des Theilkreises und $n$ die Anzahl der auf das Rad zu schneidenden Zähne.

Da der Umfang des Theilkreises ebenso viel Theilungen, als Zähne, enthalten muß; so ist der von einer jeden Theilung überspannte Winkel $ACB$ gleich $\frac{2\pi}{n}$. Ferner ist

$$T=2\overline{AM}=2\overline{AC}.\sin\tfrac{1}{2}ACB=2R\sin\frac{\pi}{n}\text{; mithin}$$

$$R=\frac{T}{2\sin\frac{\pi}{n}}\ldots.(240)$$

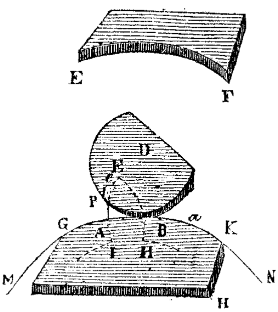
Wenn $n$ sehr groß ist; so ist $\sin\frac{\pi}{n}$ sehr nahe $=\frac{\pi}{n}$ und man hat alsdann sehr nahe

$$R=\frac{nT}{2\pi}$$

Dieser Werth für $R$ ist sogar dann vollkommen richtig, wenn man unter der Theilung des Rades nicht die Sehne des Bogens $AB$, sondern die Länge dieses Bogens selbst versteht.

### §. 210. Anfertigung der Schablone zu einem Epizykloiden-Zahne.

Nachdem man mittelst der vorhergehenden Sätze die Theilung des Rades und den Halbmesser des Theilkreises bestimmt hat, beschreibt man auf einem dünnen Brette von Eichenholz oder auf einer Metallplatte einen Bogen des Theilkreises, und durchschneidet das Brett mit einer feinen Säge längs dem Umfange dieses Kreisbogens, sodaß man zwei Stücke erhält, von denen das Eine, **EF**, durch eine konkave und das andere, **GH**, durch eine konvexe




Kante begränzt ist.

Darauf beschreibt man auf einem zweiten Brette oder auf einer zweiten Platte, aus welchem die Schablone gefertigt werden soll, ebenfalls einen Bogen MN des Theilkreises und befestigt das Stück GH auf diesem Brette so, daß seine kreisförmige Kante mit dem Bogen MN zusammenfällt. Alsdann nimmt man eine kreisrunde Scheibe D aus Holz oder Metall von den Dimensionen, welche man dem erzeugenden Kreise der Epizykloide zu geben beabsichtigt, und befestigt an derselben eine Stahlspitze P, welche auf der unteren Seite ein wenig vorsteht und genau in den Umfang der Scheibe fällt. Nachdem man auf dem Bogen MN die Stärke AB des Zahnes abgesetzt hat, sodaß diese doppelte Stärke, plus $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{15}$ derselben (je nach der zu erzielenden Genauigkeit) die Theilung des Rades ausmacht; so läßt man die Scheibe D auf der konvexen Kante GK des Brettes GH rollen, indem man dieselbe leicht gegen die Fläche des Brettes drückt, auf welcher der Bogen MN beschrieben ist und aus welcher die Schablone geschnitten werden soll: hatte man nun zuvor die Stahlspitze in den Punkt A gebracht; so wird dieselbe bei dieser Bewegung der Scheibe D auf der Fläche MN einen Epizykloidenbogen AP beschreiben.

Ebenso beschreibt man einen Epizykloidenbogen BE durch den Punkt B, welcher den ersteren durch den Punkt A beschriebenen in E trifft.

Hierauf entfernt man das Brett GH, und befestigt auf der Fläche MN das andere Brett EF so, daß seine konkave Kante mit dem Kreisbogen MN zusammenfällt. Beschreibt man nun mit der Stahlspitze P im Umfange der Scheibe D, indem man die Letztere auf der konkaven Kante von EF Ein Mal von A gegen M, und Ein Mal von B gegen N hinrollt, zwei Hypozykloidenbogen AI und BH, welche durch die Punkte A und B gehen; so stellt IEH die Form eines Zahnes dar, welcher (§. 204) mit einem ähnlich gebildeten Zahne irgend eines anderen Rades gehörig zusammengreifen wird, vorausgesetzt, daß die Theilung auf beiden Rädern gleich angenommen ist, und daß man sich zur Beschreibung der Kurven auf diesen beiden Rädern desselben erzeugenden Kreises D bedient hat. Die außerhalb des Theilkreises liegende Fläche AEB des

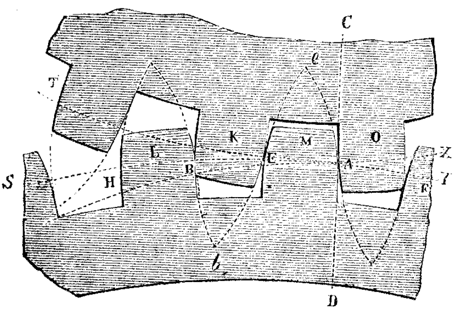
Zahnes nennt man seinen Kopf und die innerhalb des Theilkreises liegenden Flächen **AI** und **BH** seine Seiten.

## §. 211. Bestimmung der Höhe eines Epizykloidenzahnes über dem Theilkreise.

Nachdem im vorigen Paragraphe die Bestimmung der Form der Zähne auseinandergesetzt ist, bleibt noch die Höhe anzugeben, in welcher dieselben abgeschnitten werden müssen, damit sie allmählig die Arbeit von einander übernehmen und unter den zur Mittheilung der Arbeit und zur Erhaltung der Zähne günstigsten Umständen aufeinander fortpflanzen können.

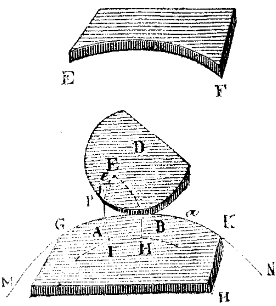
Was die größte Krafterſparung bei der Mittheilung der Arbeit betrifft; so ist es aus weiter unten anzugebenden Gründen Gebrauch, zu verhüten, daß ein Zahn des Einen Rades eher mit einem Zahne des anderen Rades zusammentrifft, als beide Zähne im Begriffe sind, durch die Mittellinie zu gehen. Diese Bedingung kann in allen Fällen, wo die Anzahl der Zähne an keinem der beiden Räder sehr klein ist, durch eine angemessene Einrichtung der Höhe der Zähne erfüllt werden.

Es seien zwei Zähne der beiden Räder in dem Punkte **A** der




Verbindungslinie **CD** der beiden Mittelpunkte miteinander in Berührung, und das Rad, dessen Mittelpunkt **C** ist, sei das treibende. Wenn **AH** einen Theil des Umfanges des erzeugenden Kreises der Zähne darstellt; so werden nach §. 204 die Punkte **A** und **B**, in welchen dieser Kreis die Köpfe der Zähne **O** und **K** des treibenden Rades durchschneidet, Berührungspunkte mit den Seiten der Zähne **M** und **L** des getriebenen Rades sein. Da nun ein jeder Zahn erst dann in Thätigkeit treten soll, wenn er in die Mittellinie kommt; so leuchtet ein, daß der Zahn **L** von dem Zahne **K** von dem Augenblicke an, wo ihre Berührung in der Mittellinie stattfand, bis zu dem Augenblicke, wo sie in die durch die Figur dargestellte Lage gekommen sind, oder wo der Kopf des nächsten Zahnes **O** des treibenden Rades mit der Seite des nächsten Zahnes **M** des getriebenen Rades durch die Mittellinie geht, getrieben werden muß, und da in diesem Augenblicke der Zahn **O** das Geschäft des Treibens übernehmen, und der Zahn **K** von demselben befreiet werden soll; so kann der ganze Theil des letzteren Zahnes, welcher über den Punkt **B** hinausliegt, hinweggenommen werden: wird aber dieser Zahn solchergestalt wirklich abgekürzt; so wird der Zahn **K** in jenem Augenblicke der Bewegung offenbar außer Berührung kommen und die ganze Treibkraft an den Zahn **O** abtreten, wie es verlangt wurde.

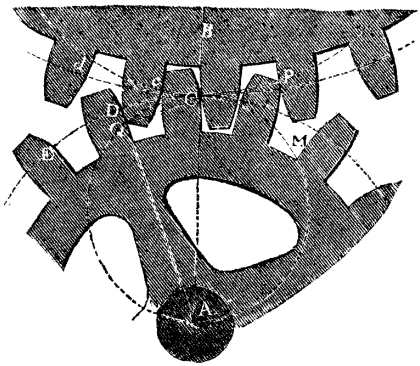
Um also die Schablone des Zahnes in der zur Erfüllung der obigen Bedingungen geeigneten Höhe abzuschneiden, braucht man nur **A***a* gleich der Theilung des Rades anzunehmen, und den Umfang des erzeugenden Kreises so zu legen, daß er mit seiner konvexen Krümmung die konvexe Seite des Bogens **MN** im Punkte *a* berührt; der Durchschnittspunkt *e* dieses Kreises mit dem Kopfe **AE** des Zahnes wird alsdann den letzten wirkenden Punkt des Zahnes ergeben, und wenn man aus dem Mittelpunkte des Theilkreises einen Kreisbogen beschreibt, welcher durch jenen Punkt *e* geht; so kann der ganze jenseit dieses Bogens liegende Theil des Zahnes hinweggeschnitten werden.




Die Höhe des Zahnes des zweiten Rades, welches mit dem ersteren zusammenarbeiten soll, kann auf ähnliche Weise bestimmt werden.

Der nach dem Vorstehenden bestimmte Punkt **e** wird in einigen Fällen über das äußerste Ende **E** des Zahnes hinausfallen. In solchen Fällen ist es natürlich unmöglich, den Zahn in einer solchen Höhe abzuschneiden, daß er die gestellten Bedingungen erfüllt, d. h., daß er nur dann erst treiben soll, nachdem er durch die Mittellinie gegangen ist.

**§. 212.** In dem vorhergehenden Paragraphe ist angenommen, daß mit Ein und demselben erzeugenden Kreise die ganzen Oberflächen der Zähne der beiden Räder beschrieben seien. Zum gehörigen Ineinandergreifen der Zähne ist es übrigens nicht nothwendig, daß man zur Beschreibung der ganzen Oberflächen zweier Zähne, welche zusammenarbeiten sollen, denselben Kreis annimmt; es ist nur erforderlich, daß der erzeugende Kreis für jede zwei Theile der beiden Zähne, welche wirklich miteinander in Berührung kommen, derselbe sei. Wenn z. B. die Seite des treibenden und der Kopf des getriebenen Zahnes, wie in der Figur (wo das obere Rad das untere treibt) bei **P** miteinander




in Berührung sind; so müssen diese Seite des Einen und dieser Kopf des andern Zahnes respektive eine Epizykloide und eine Hypozykloide von Ein und demselben erzeugenden Kreise sein. Ebenso, wenn der Kopf eines treibenden und die Seite eines getriebenen Zahnes sich bei Q, berühren, müssen dieselben von Einem erzeugenden Kreise beschrieben sein. Es ist aber offenbar gleichgültig, ob der erzeugende Kreis in dem ersten Falle dem im zweiten Falle gleich sei, oder nicht.

Nach einem fast überall üblichem Gebrauch bedient man sich zur Konstruktion der Zähne für zwei ineinandergreifende Räder zweier verschiedener erzeugender Kreise, indem man den Durchmesser des erzeugenden Kreises für die Köpfe der Zähne des Einen Rades gleich dem Halbmesser des Theilkreises des anderen Rades annimmt.

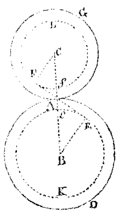
Nennt man also die Räder **A** und **B**; so werden die epizykloidischen Köpfe der Zähne von **A** und die entsprechenden hypozykloidischen Seiten der Zähne von **B** durch einen Kreis erzeugt, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser des Theilkreises von **B** ist. Die hypozykloidischen Seiten der Zähne von **B** werden hierdurch gerade Linien, welche in die Richtungen der Halbmesser dieses Rades fallen (§. 205). Ebenso werden die epizykloidischen Köpfe der Zähne von **B** und die entsprechenden hypozykloidischen Seiten der Zähne von **A** durch einen Kreis erzeugt, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser des Theilkreises von **A** ist, sodaß die hypozykloidischen Seiten der Zähne von **A** ebenfalls gerade Linien werden, deren Richtungen die der Halbmesser des Rades **A** sind. Bei dieser Anwendung von zwei verschiedenen erzeugenden Kreisen werden die Seiten der Zähne an beiden Rädern gerade Linien, und nur die Köpfe werden gekrümmt. Der Grund für die Annahme dieser besonderen Werthe für die Durchmesser der erzeugenden Kreise scheint kein anderer zu sein, als die Bequemlichkeit, welche die Konstruktion einer geraden Linie vor der einer Kurve darbietet. Eine genauere Betrachtung dieses Gegenstandes lehrt jedoch, daß in dem vorstehenden Verfahren in der That keine große Erleichterung liegt. Zuvörderst wird dadurch die Anwendung und Anfertigung zweier verschiedener erzeugender Kreise oder Scheiben nothwendig gemacht, während ein einziger erzeugender Kreis genügt haben würde, wenn man die Seiten der Zähne nach Hypozykloiden konstruirt hätte. Jene Methode führt übrigens eine noch größere praktische Unbequemlichkeit mit sich. Zwei nach dem obigen Verfahren konstruirte Räder **A** und **B** werden nämlich nur miteinander und keines von beiden wird mit einem dritten Rade **C**, welches eine verschiedene Anzahl von Zähnen mit ebenfalls geraden Seiten oder einen verschiedenen Theilkreis hat, gehörig arbeiten können, selbst wenn die Theilung des letzteren der von **A** und **B** gleich wäre. Denn damit **A** gehörig mit **C** zusammengreifen könnte, müßten die Köpfe seiner Zähne mit einem erzeugenden Kreise beschrieben sein, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser von **C** wäre; dieselben sind aber mit einem Kreise beschrieben, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser von **B** ist, und demnach findet sich die Bedingung zu einer gleichförmigen

Bewegung nicht erfüllt. Nimmt man dagegen an, daß die epizykloidischen Köpfe und die hypozykloidischen Seiten aller Zähne von **A**, **B** und **C** mit Ein und demselben erzeugenden Kreise beschrieben seien, und daß alle drei Räder dieselbe Theilung haben; so leuchtet ein, daß irgend Eines derselben mit irgend einem anderen gehörig zusammenarbeiten könnte. Demnach kann der Maschinenarbeiter durch die Anwendung Ein und desselben erzeugenden Kreises für alle seine Schablonen zu Radzähnen von derselben Theilung die Räder so konstruiren, daß ein jedes derselben mit einem jeden anderen gehörig zusammengreifen wird. Außerdem gibt es viele Fälle, wo eine Anordnung, ähnlich der vorstehenden, unerläßlich ist, so z. B., wenn Ein Rad **A** die beiden Räder **B** und **C** von verschiedenen Theilkreisen umtreiben soll; nach der gewöhnlichen Art der Konstruktion würde eine solche Verbindung von drei verschiedenen Rädern niemals gehörig ineinandergreifen.

Da ein jeder beliebige gemeinschaftliche erzeugende Kreis bei Herstellung der Zähne zu einer ganzen Reihe von Rädern der obigen Bedingung ein Genüge leistet; so kann gefragt werden, ob sich keine andere Betrachtung anstellen läßt, aus welcher sich die zweckmäßigste Dimension für diesen Kreis ergibt. Allerdings zeigt es sich als nothwendig, den Durchmesser des erzeugenden Kreises auf eine solche Länge zu beschränken, welche den Halbmesser seines Grundkreises nicht überschreitet. Denn solange derselbe unter dieser Gränze bleibt, hat die von ihm erzeugte Hypozykloide eine solche konkave Form, daß die Seiten des Zahnes nach dem Mittelpunkte des Rades hinzu auseinander laufen, oder daß sich die Grundfläche des Zahnes erweitert: überschreitet derselbe aber jene Gränze; so werden die Seiten des Zahnes konvex, seine Grundfläche zieht sich mehr zusammen und seine Stärke wird dadurch geschwächt. Da hiernach der erzeugende Kreis keinen größeren Durchmesser, als den Halbmesser des Theilkreises von irgend einem Rade des ganzen Räderwerkes haben sollte; so wird der größte, welchen man annehmen dürfte, offenbar der sein, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser des kleinsten Rades oder Getriebes wäre. Nun sollte kein Getriebe weniger als zwölf Zähne haben; demnach wäre der Halbmesser des Theilkreises eines Rades von der gegebenen Theilung, welches zwölf Zähne enthielte, der Gränzwerth für den Durchmesser des erzeugenden Kreises zu dem in Rede stehenden Räderwerke. Diese Vorschläge sind vom Professor Willis gemacht worden.

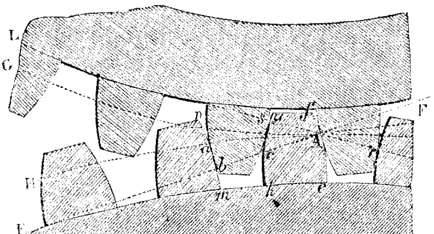
## §. 213. Verzeichnung der Kreisevolventen-Verzahnung.

Wenn **AD** und **AG** die Theilkreise der beiden Räder sind,



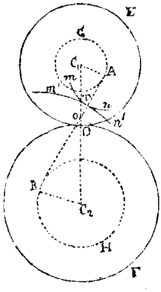
welche ineinandergreifen sollen; so zieht man durch den Berührungspunkt **A** derselben eine gerade Linie **FE**, welche sich gegen die Mittellinie **CAB** unter irgend einem Winkel **FAC** neigt, dessen größere oder geringere Weite einen später zu erklärenden Einfluß auf die Wirkung der Zähne hat, welchen man aber in der Regel nicht kleiner, als 80°, annimmt. Hierauf beschreibt man aus den Mittelpunkten **B** und **C** zwei Kreise $e$**EK** und $f$**FE**, welche die gerade Linie **EF** berühren. Diese Kreise werden als Grundkreise für die Evolventen angenommen, welche die Köpfe und Seiten der Zähne bilden sollen, da ihre Halbmesser **CF** und **BE** in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Halbmesser **CA** und **BA** der Theilkreise und demnach die Bedingung des §. 203 zum gehörigen Ineinandergreifen der Räder erfüllt sein wird, wenn die Durchschnitte der Zähne Evolventen jener beiden Kreise bilden.

Es seien in der nebenstehenden Figur **AG** und **AH** Bögen



der Theilkreise der beiden Räder und $e$**E**, $f$**L** einander entsprechende Theile der Kreise $e$**EK** und $f$**FL** der vorhergehenden Figur. Ferner sei $a$**A** die Theilung der beiden Räder. Durch die Punkte **A** und $a$ beschreibe man die Evolventen $ef$ und $mn$ des Kreises $e$**EK**. Ist nun $b$ der Durchschnittspunkt der geraden Linie **EF** mit der Evolvente $mn$; so halbire man die Linie **A**$b$ in $c$, wenn die Zähne an ihren Grundflächen auf beiden Rädern nahe dieselbe Stärke haben, oder man theile die Linie $Ab$ in $c$ in dem Verhältnisse dieser Stärken, wenn dieselben verschieden sind, und lege durch den Punkt $c$ eine Evolvente $hg$, welche der $ef$ gleich, aber nach entgegengesetzter Seite gekehrt ist. Scheidet man alsdann den oberen Theil des Kopfes des Zahnes $efgh$ nach der Linie $fg$ dergestalt ab, daß derselbe gerade bis an den Umfang des Kreises $f$L reicht; so erhält man die Schablone zu dem nach Kreisevolventen gebildeten Zahne des Rades $e$E.

Die Evolventenzähne besitzen zwei ausgezeichnete Eigenschaften, durch welche sie sich von allen übrigen Zähnen unterscheiden, und vermöge welcher sie unter sonst gleichen Umständen allen anderen Zahnformen vorzuziehen sind. Die erste dieser Eigenschaften ist die, daß irgend zwei Räder, welche Evolventenzähne und dieselbe Theilung haben, stets gehörig ineinandergreifen werden, da die Formen der Zähne eines jeden Rades von denen der Zähne des anderen Rades ganz unabhängig ist. Irgend zwei solcher Räder mit Evolventen-Verzahnungen werden sich genau so herumdrehen, wie sie es durch die wirkliche Berührung zweier Kreise thun würden, deren Halbmesser man findet, wenn man die Mittellinie in dem Verhältnisse der Halbmesser der Grundkreise der Evolventen theilt. Diese Eigenschaft haben die Evolventen-Verzahnungen übrigens mit den Epizykloiden-Verzahnungen verschiedener Räder gemein, wenn alle Epi- und Hypozykloiden der letzteren mit Ein und demselben erzeugenden Kreise beschrieben sind (§. 212). Die zweite nicht minder wichtige Eigenschaft der Evolventenzähne, und welche dieselben von den Zähnen aller übrigen Formen unterscheidet, ist die, daß sie immer gleich gut ineinandergreifen, wie weit auch die Mittelpunkte der Räder voneinander entfernt werden mögen, sodaß die Wirkung der Zähne nicht geschwächt wird, wenn die Axen der Räder durch die Abnutzung der Zapfenlager verrückt werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung begreift man leicht, wenn man unter **AG** und **BH** die Grundkreise der Zähne darstellt, und annimmt, daß ihre Mittelpunkte $C_1$ und $C_2$ um irgend einen Abstand auseinander gerückt seien. Sind nun die Durchschnitte $mn$ und $m'n'$ der Zähne beider Räder resp. Evolventen der Kreise **AG** und **BH**, und **AB** eine gemeinschaftliche Tangente an diese beiden Kreise, welche die Mittellinie $C_1C_2$ in O



durchschneidet; so geht aus §. 203 hervor, daß sich die beiden Räder durch das Ineinandergreifen ihrer Zähne gerade so herumbewegen werden, wie sie es durch unmittelbare Berührung der Kreise **OE** und **OF** thun würden. Die Formen der Evolventen *mn* und *m'n'* sind aber von dem Abstande $C_1C_2$ der Mittelpunkte der Räder ganz unabhängig, und man sieht auch, daß das Verhältniß der Halbmesser $C_1O$ und $C_2O$ der Theilkreise **OE** und **OF**, wenn sich auch bei einer Verrückung der Mittelpunkte ihre absoluten Längen änderen, stets konstant gleich dem Verhältnisse der Halbmesser $C_1A$ und $C_2B$ der Grundkreise **AG** und **BH** bleibt. Hieraus folgt offenbar; daß sich zwei Räder mit Evolventen-Verzahnungen immer auf dieselbe Weise herumdrehen werden, wie weit auch die Axen dieser Räder voneinander entfernt werden mögen.

## Eingriff des Getriebes in eine verzahnte Stange.

§. 214. Bestimmung des Theilkreises für das Getriebe.

Wenn **H** den Raum, durch welchen die verzahnte Stange von einem jeden Zahne des Getriebes bewegt werden soll, und $n$ die Anzahl der Zähne des Getriebes bezeichnet; so wird $n$**H** den Raum darstellen, durch welchen die Stange bei einer ganzen Umdrehung des Getriebes bewegt wird. Nun werden die Stange und das Getriebe durch die Wirkung ihrer Zähne gerade so getrieben, als Dies durch unmittelbare Berührung des Theilkreises des Getriebes mit der geraden Richtung der Stange geschehen würde, sodaß der von der Stange bei einer ganzen Umdrehung des Getriebes beschriebene Raum dem Umfange des Theilkreises des Getriebes gleich sein muß. Setzt man daher den Halbmesser des Theilkreises des Getriebes gleich **R**; so hat man

$$2\pi R = nH;\ \text{also}$$

$$R = \frac{n}{2\pi} H$$

**§. 215. Verzeichnung der Zähne des Getriebes, wenn die der Stange gerade Linien bilden.** Die Eigenschaften, welche nach §. 203 den Evolventen-Verzahnungen zukommen, behalten offenbar Gültigkeit, welches auch die Größe der Halbmesser der Theilkreise der beiden Räder sein oder wie sehr dieselben auch voneinander abweichen mögen. Nimmt man nun an, der Halbmesser des Theilkreises **OF** des Einen der beiden Räder **OF** und **OE** werde *unendlich*; so geht sein Umfang in eine gerade Linie über, welche durch die Richtung der Stange dargestellt wird. Während so der Halbmesser $C_2O$ des Theilkreises **OF** eine unendliche Länge annimmt, wird auch der Halbmesser $C_2B$ des Kreises **BH**, durch dessen Abwickelung die Evolventenbögen für die Zähne dieses Rades erzeugt sind, und welcher zu dem ersteren $C_1A$ ein konstantes Verhältniß hat, unendlich groß, sodaß die Evolventenbögen $m'n'$ sich auf gerade Linien reduziren, die auf der geraden Linie **BH, OF** oder **AB** perpendikular stehen. Hiernach werden also die Durchschnitte der Evolventenzähne des Rades **OF**, welches nun in eine *Stange* übergeht, gerade (Fig. 1), und stehen auf der Linie **AB** perpendikular, welche man erhält, wenn man durch den Punkt **O** eine Tangente an den Grundkreis **AC** der Evol-

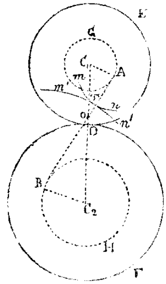


Fig. 1.

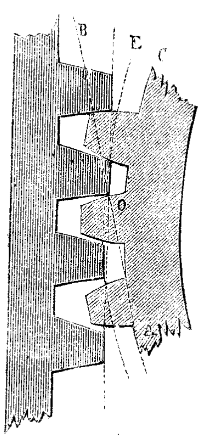
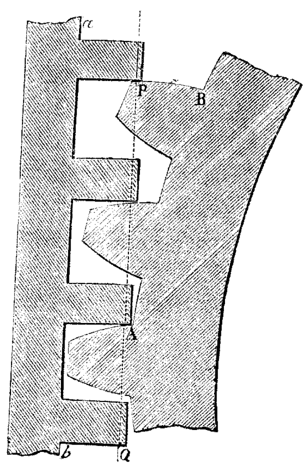



Fig. 2.



ventenzähne des Getriebes zieht. Wenn der Grundkreis **AC** der Evolventen-Verzahnung des Getriebes mit seinem Theilkreise zusammenfällt; so wird die Linie **AB** der Richtung **AP** der Stange parallel, und die Durchschnitte der Zähne der Stange nehmen eine auf ihrer Richtung perpendikulare Lage an (Fig. 2).

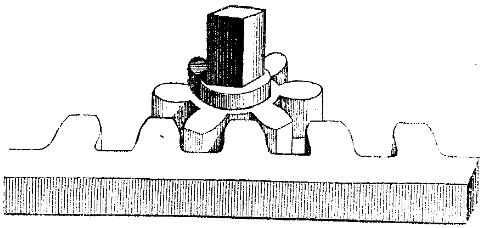
Hierbei sind die Evolventenzähne des anderen Rades unverändert geblieben, und der Übergang des Theilkreises des zweiten Rades in eine gerade Linie hat durchaus keinen Einfluß auf das gehörige Ineinandergreifen der Zähne beider. Man sieht also, daß die geraden Zähne einer verzahnten Stange mit den Evolventenzähnen eines Getriebes in der erwarteten Weise zusammenarbeiten. In der That leuchtet ein, daß wenn man von dem Berührungspunkte **P** (Fig. 2) eines solchen Evolventenzahnes des Getriebes mit dem geraden Zahne der Stange eine gerade Linie **PQ** parallel zu der Richtung $ab$ der Stange zieht, diese Linie auf den Oberflächen beider Zähne im Punkte **P** perpendikular stehen und demnach in **A** den Kreis berühren wird, dessen Evolvente den Durchschnitt des Getriebzahnes bildet; in demselben Punkte **A** würde aber auch die Seitenlinie der Stange $ab$ jenen Kreis berühren, wenn sich beide vermöge ihrer gegenseitigen Berührung bewegten, und man sieht, daß die zum gehörigen Ineinandergreifen der Zähne nothwendige und hinreichende Bedingung des §s. 201 für solche Zähne einer verzahnten Stange und eines Getriebes erfüllt wird.

Hiernach theile man den Umfang des durch §. 214 bestimmten Theilkreises in $n$ gleiche Theile, beschreibe über diesem Umfange eine Evolvente, welche den Kopf des Getriebzahnes bilden soll, und nehme die Länge des Letzteren etwas größer an, als die Länge **BP** des Evolventenbogens, welchen man durch die Abwickelung eines Fadens von der Länge **AP**=**H** oder gleich dem Raume, durch welchen die Stange von einem jeden Zahne des Getriebes bewegt werden soll, erhält. Die geraden Zähne der Stange werden in derselben Länge abgeschnitten, und der Umfang des Theilkreises des Getriebes und die innere Seitenlinie $ab$ der Stange um ein wenig mehr, als diese Länge, auseinander gelegt.

Dieser letzteren Anwendung der Evolvente auf die Form des Getriebzahnes kann man den Vorwurf machen, daß der Punkt **P** des geraden Zahnes der Stange, auf welchen der erstere wirkt, fortwährend derselbe bleibt, da er durch den Durchschnitt der geraden Oberfläche des Zahnes mit einer zu der Richtung der Stange parallelen Linie AP bestimmt ist. Dieser Vorwurf trifft jedoch den vorhergehenden Fall (Fig. 1) nicht, wo die geraden Seiten eines jeden Zahnes der Stange gegeneinander geneigt sind. Durch die fortwährende Wirkung des Getriebzahnes auf einen einzigen Punkt des Zahnes der Stange ist der letztere einer sehr bedeutenden Abnutzung an seiner Oberfläche ausgesetzt.

### §. 216. Verzeichnung der Zähne des Getriebes, wenn die der Stange gekrümmt sind.

Dies kann dadurch geschehen, wenn man dem Zahne der Stange eine zykloidische Form gibt,



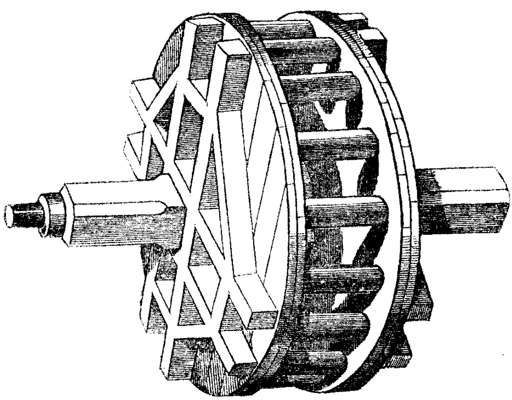
und den Zahn des Getriebes nach einer Epizykloide bildet. Man überzeugt sich hiervon, wenn man sich denkt, daß der Durchmesser des Kreises, dessen Mittelpunkt C ist (s. die erste Figur zu §. 204) unendlich werde, während die anderen beiden Kreise unverändert bleiben. Irgend ein endlicher Theil des Umfanges dieses unendlichen Kreises wird dann zu einer geraden Linie. Ist nun AE in der seitstehenden Figur ein solcher Theil, und sind PQ und PR, wie vorhin, Kurven, welche durch einen Punkt P des Kreises, dessen Mittelpunkt D ist, beschrieben werden, wenn Letzterer resp. auf dem Umfange AF und AE hinrollt; so stellen diese Kurven die Formen von Zähnen


dar, welche den Kreis AF und den unendlichen Kreis AE ebenso bewegen würden, wie Dies durch ihre unmittelbare Berührung in A geschehen müßte (§. 204). Die Kurve PQ wird aber offenbar eine Epizykloide und die Kurve PR eine Zykloide sein.

Man sieht also, daß wenn der Kopf des Getriebzahnes die Seite des Zahnes der Stange treiben soll, nachdem beide durch die Mittellinie gegangen sind, der Erstere eine epizykloidische und die Letztere eine zykloidische Form haben müsse. Ebenso kann gezeigt werden, wenn man den erzeugenden Kreis **APH** auf die entgegengesetzte Seite von **AE** verlegt, daß wenn vor dem Durchgange durch die Mittellinie die Seite des Getriebzahnes den Kopf des Zahnes der Stange treiben soll, die Erstere eine hypozykloidische und der Letztere eine zykloidische Form haben müsse, wobei die Zykloiden in den Köpfen und Seiten der Zähne nach entgegengesetzten Richtungen gekrümmt sind. Für den Durchmesser des erzeugenden Kreises nimmt man gewöhnlich den Halbmesser des Theilkreises des Getriebes an, weil sich hierdurch die hypozykloidischen Seiten der Getriebzähne auf gerade Linien reduziren. Der Halbmesser des Theilkreises für das Getriebe wird wie in §. 214 bestimmt, und die Zähne werden nach der in §. 210 angegebenen Methode beschrieben.

## Eingriff eines verzahnten Rades in einen Drilling.

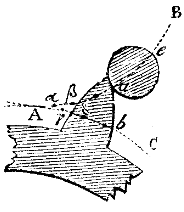
§. 217. Zuweilen wird die gewöhnliche Form des Getriebes durch einen sogenannten **Drilling** ersetzt, welcher aus zwei kreisrunden Scheiben besteht, die durch zylindrische Stäbe oder **Triebstöcke** miteinander verbunden sind. In diese Triebstöcke



greifen die Zähne des Rades ebenso, wie in die Zähne eines gewöhnlichen Rades oder Getriebes.

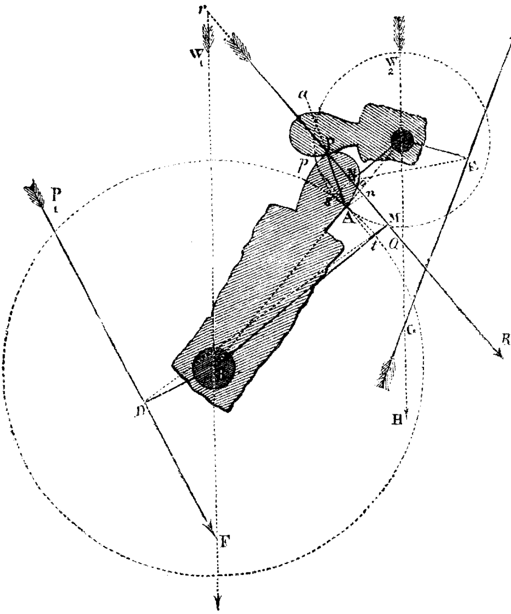
Es leuchtet ein, daß die Zähne des Rades, welches mit dem Drillinge zusammenarbeiten soll, durch die zylindrische Form der Triebstöcke bestimmt sind, und man wird ihre krummen Flächen leicht durch das in §. 202 auseinandergesetzte Verfahren konstruiren können.

Nachdem man nämlich den Durchmesser der Triebstöcke in Übereinstimmung mit dem Drucke, welchen dieselben auszuhalten haben, ferner die Durchmesser der Theilkreise des Drillings und des Rades und auch die Theilung derselben bestimmt hat; so beschreibt man die Bögen **AB** und **AC** jener Theilkreise, und setzt auf denselben von dem Berührungspunkte A aus (wenn die Zähne erst in der Mittellinie mit den Triebstöcken in Berührung kommen sollen, im anderen Falle von dem Punkte aus, wo die Berührung zuerst erfolgt) die Theilungen A$a$ und A$b$ ab. Hierauf entwirft man den Kreis $ae$, dessen Mittelpunkt in **AB** liegt, dessen Umfang durch $a$ geht und dessen Durchmesser gleich dem der Triebstöcke ist, und theilt eine jede der Theilungen A$a$ und A$b$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile (gewöhnlich in drei). Von den Theilpunkten A, $\alpha$, $\beta$, ... der Theilung A$a$ aus mißt man die kürzesten Abstände der Kreislinie $ae$, und beschreibt mit diesen Abständen respektive aus den Theilpunkten A, $\gamma$, $\delta$, ... der Theilung A$b$ Kreisbögen, welche einander durchschneiden. Eine Kurve $ab$, welche alle diese Kreisbögen berührt, wird alsdann die gesuchte Form des Radzahnes ergeben (§. 202). Die entgegengesetzte Kopffläche des Zahnes muß aus ähnlichen Mittelpunkten beschrieben werden, und die Seitenflächen desselben müssen so tief in den Theilkreis eingeschnitten werden, als es zur Aufnahme eines halben Triebstockes erforderlich ist, wenn derselbe durch die Mittellinie geht.




**Beziehung zwischen zwei Kräften $P_1$ und $P_2$, welche an zwei verzahnten Rädern angebracht sind, im Gränzzustande des Gleichgewichtes bei dem Vorwalten der Kraft $P_1$.**

§. 218. Es werden zuvörderst die Gewichte der Räder außer Acht gelassen. **B** und **C** seien die Mittelpunkte der Theilkreise der Räder, **A** der Berührungspunkt der Letzteren, **P** der Berührungspunkt zwischen zwei Zähnen in irgend einem Augenblicke der Bewegung, **RP** die Richtung des ganzen resultirenden Druckes auf die Zähne in ihrem Berührungspunkte, eines Druckes, welcher dem Widerstande des getriebenen Zahnes gegen den trei-




benden Zahn gleich und gerade entgegengesetzt ist, **BM** und **CN** Perpendikel von den Mittelpunkten der Axen der Räder auf die Linie **RP**, **BD** und **CE** Perpendikel von diesen Mittelpunkten auf die Richtungen der Kräfte $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$.

Setzt man nun

$$\mathbf{BD} = a_1,\ \mathbf{CE} = a_2,$$
$$\mathbf{BM} = m_1,\ \mathbf{CN} = m_2,$$
$$\mathbf{BA} = r_1,\ \mathbf{CA} = r_2,$$

$\varrho_1$ und $\varrho_2$ resp. gleich den Halbmessern der Axen oder Zapfen der Räder,

$\varphi_1$ und $\varphi_2$ resp. gleich den Reibungswinkeln zwischen den Axen der Räder und ihren Lagern;

so hat man nach Gleichung (158), da sich die Kräfte $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{R}$ an dem Rade, dessen Mittelpunkt $\mathbf{B}$ ist, bei dem Vorwalten von $\mathbf{P}_1$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes befinden,

$$\mathbf{P}_1 = \left\{ \frac{m_1}{a_1} + \left(\frac{\varrho_1 \mathbf{L}_1}{a_1^{\,2}}\right) \sin\varphi_1 \right\} \mathbf{R} = \frac{1}{a_1} \left\{ m_1 + \left(\frac{\varrho_1 \mathbf{L}_1}{a_1}\right) \sin\varphi_1 \right\} \mathbf{R}, \quad \ldots (241)$$

worin $\mathbf{L}_1$ die Länge der Linie $\mathbf{DM}$ bezeichnet, welche die Fußpunkte der Perpendikel $\mathbf{BD}$ und $\mathbf{BM}$ verbindet.

Ferner hat man, da sich die Kräfte $\mathbf{R}$ und $\mathbf{P}_2$ an dem Rade, dessen Mittelpunkt $\mathbf{C}$ ist, bei dem Vorwalten von $\mathbf{R}$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes befinden, nach §. 164, wenn man daselbst die Zweideutigkeit der Größe $\lambda$ berücksichtigt,

$$\mathbf{P}_2 = \left\{ \frac{m_2}{a_2} - \left(\frac{\varrho_2 \mathbf{L}_2}{a_2^{\,2}}\right) \sin\varphi_2 \right\} \mathbf{R} = \frac{1}{a_2} \left\{ m_2 - \left(\frac{\varrho_2 \mathbf{L}_2}{a_2}\right) \sin\varphi_2 \right\} \mathbf{R}, \quad \ldots (242)$$

worin $\mathbf{L}_2$ die Länge der Linie $\mathbf{EN}$ zwischen den Fußpunkten der Perpendikel $\mathbf{CE}$ und $\mathbf{CN}$ bezeichnet.

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\mathbf{R}$; so ergibt sich

$$\mathbf{P}_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \left\{ \frac{m_1 + \left(\frac{\varrho_1 \mathbf{L}_1}{a_1}\right) \sin\varphi_1}{m_2 - \left(\frac{\varrho_2 \mathbf{L}_2}{a_2}\right) \sin\varphi_2} \right\} \mathbf{P}_2 \quad \ldots (243)$$

Nun bemerkt man, daß die Linie $\mathbf{AP}$, welche von dem Berührungspunkte $\mathbf{A}$ der Theilkreise nach dem Berührungspunkte $\mathbf{P}$ der Zähne gezogen wird, auf den Oberflächen der Letzteren im Punkte $\mathbf{P}$ normal steht, welches auch ihre Formen sein mögen, vorausgesetzt, daß dieselben nach den Bedingungen des §s. 201 gehörig ineinandergreifen; ferner leuchtet ein, daß wenn der Berührungspunkt $\mathbf{P}$ bereits durch die Mittellinie $\mathbf{BC}$ gegangen ist, wie in der obigen Figur, derselbe im Begriffe steht, auf der Fläche $\mathbf{P}p$ des getriebenen Zahnes von dem Mittelpunkte $\mathbf{C}$ oder von $\mathbf{P}$ gegen $p$ zu gleiten (wennschon bei der wirklich erfolgenden Drehung der Räder in dem nächsten Augenblicke zwei Punkte der Oberflächen der Zähne miteinander in Berührung kommen, welche beide näher nach C liegen) sodaß sich die Reibung dieser Fläche in entgegengesetzter Richtung oder von $p$ gegen P äußert. Hieraus folgt, daß die Richtung $r$P der Resultante dieser Reibung und des perpendikularen Widerstandes $a$P des getriebenen Zahnes gegen den treibenden Zahn innerhalb des Winkels $a$P$p$ liegt, und daß dieselbe gegen die Normale $a$P unter einem Winkel $a$P$r$ geneigt ist, welcher dem Reibungswinkel gleichkommt (§. 141). Diese Resultante ist aber auch dem resultirenden Drucke zwischen den Oberflächen der Zähne im Gränzzustande des Gleichgewichtes gleich und gerade entgegengesetzt, und es folgt, daß der Winkel **APR** gleich dem Reibungswinkel zwischen den Berührungsflächen der Zähne ist. Setzt man daher

$\varphi$ gleich diesem Reibungswinkel **APR**,

$\lambda = \mathrm{AP}$,

$\vartheta$ gleich dem Neigungswinkel von **AP** gegen die Mittellinie **BC**, d. i. hier gleich dem spitzen Winkel **CAP**, welchen die Linie **AP** mit dem Halbmesser **CA** des getriebenen Rades einschließt,

und zieht durch **A** die Linie A$n$ perpendikular auf **PR** und die Linie $s$A$t$ parallel zu **PR**; so hat man

$$m_1 = \mathrm{BM} = \mathrm{B}t + t\mathrm{M} = \mathrm{B}t + \mathrm{A}n = \overline{\mathrm{BA}}.\sin \mathrm{BA}t + \overline{\mathrm{AP}}.\sin \mathrm{APR},$$

oder, da $\mathrm{BA}t = \mathrm{BOR} = \mathrm{CAP} + \mathrm{APR} = \vartheta + \varphi$ ist,

$$m_1 = r_1 \sin(\vartheta + \varphi) + \lambda \sin\varphi \;\ldots\; (244)$$

Ferner hat man

$$m_2 = \mathrm{CN} = \mathrm{C}s - s\mathrm{N} = \mathrm{C}s - \mathrm{A}n = \overline{\mathrm{CA}}.\sin \mathrm{CA}s - \overline{\mathrm{AP}}.\sin \mathrm{APR},$$

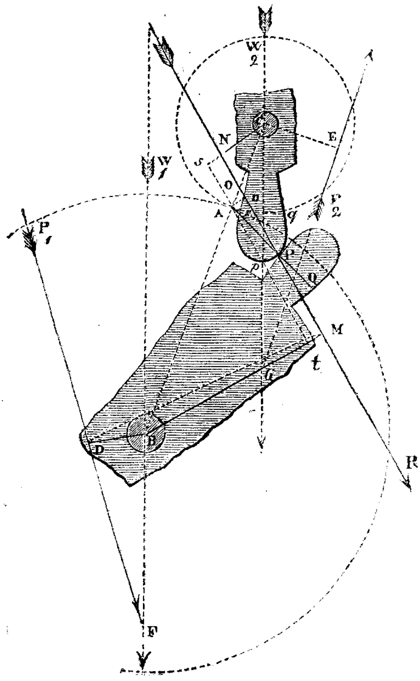
oder, da A$s$ parallel zu **PR**, also $\mathrm{CA}s = \mathrm{BOR} = \vartheta + \varphi$ ist,

$$m_2 = r_2 \sin(\vartheta + \varphi) - \lambda \sin\varphi \;\ldots\; (245)$$

Substituirt man diese Werthe für $m_1$ und $m_2$ in die vorhergehende Gleichung; so erhält man

$$\mathrm{P}_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \left\{ \frac{r_1 \sin(\vartheta+\varphi) + \lambda \sin\varphi + \left(\frac{\varrho_1 \mathrm{L}_1}{a_1}\right) \sin\varphi_1}{r_2 \sin(\vartheta+\varphi) - \lambda \sin\varphi - \left(\frac{\varrho_2 \mathrm{L}_2}{a_2}\right) \sin\varphi_2} \right\} \mathrm{P}_2 \;\ldots\; (246)$$

**§. 219.** Bei der vorstehenden Untersuchung ist angenommen, daß der Berührungspunkt **P** der Zähne bereits durch die Mittellinie gegangen sei oder sich *hinter* dieser Linie befinde. Nimmt man jetzt an, der Berührungspunkt **P** sei noch nicht durch die Mittellinie gegangen oder befinde sich *vor* derselben; so leuchtet ein, daß derselbe in diesem Falle im Begriffe steht, sich auf der




Oberfläche $pPq$ des getriebenen Zahnes dem Mittelpunkte **C** *entgegen* oder von **P** gegen $q$ zu bewegen, während er sich in dem früheren Falle von dem Mittelpunkte **C** *hinweg* oder von **P** gegen $p$ zu bewegen strebte. In dem vorliegenden Falle äußert sich also die Reibung der Fläche des getriebenen Zahnes in der Richtung $q$**P**, und hieraus folgt, daß in diesem Gränzzustande des Gleichgewichtes die Richtung des Widerstandes **R** des getriebenen Zahnes gegen den treibenden Zahn auf der anderen Seite der Normalen **APQ** liegt, indem sie sich gegen dieselbe unter einem Winkel **APN**, gleich dem Reibungswinkel, neigt. Die

Neigung von **R** gegen die Normale **APQ** ist demnach in beiden Fällen dieselbe; aber ihre Lage in Beziehung zu dieser Linie fällt in dem Einen Falle auf die Eine und in dem anderen Falle auf die andere Seite derselben.

Macht man nun dieselbe Konstruktion, wie vorhin, und bezeichnet mit

$\varphi$ den Reibungswinkel **APN** oder **QPR**, mit

$\lambda$ die Linie **AP** und mit

$\vartheta'$ den Neigungswinkel von **AP** gegen die Mittellinie **BC**, d. i. hier den spitzen Winkel **BAP**, welchen die Linie **AP** mit dem Halbmesser **BA** des treibenden Rades einschließt;

so hat man

$m_1 = \mathrm{BM} = \mathrm{B}t + t\mathrm{M} = \mathrm{B}t + \mathrm{A}n = \overline{\mathrm{BA}} . \sin \mathrm{BA}t + \overline{\mathrm{AP}} . \sin \mathrm{APO}$,

oder, da $\mathrm{BA}t = \mathrm{BOR} = \mathrm{BAP} - \mathrm{APO} = \vartheta' - \varphi$ ist,

$$m_1 = r_1 \sin(\vartheta' - \varphi) + \lambda \sin \varphi.$$

Ferner hat man

$m_2 = \mathrm{CN} = \mathrm{C}s - s\mathrm{N} = \mathrm{C}s - \mathrm{A}n = \overline{\mathrm{CA}} . \sin \mathrm{CA}s - \overline{\mathrm{AP}} . \sin \mathrm{APO}$,

oder, da **A**$s$ parallel zu **PN**, also $\mathrm{CA}s = \mathrm{BOR} = \mathrm{BAP} - \mathrm{APO} = \vartheta' - \varphi$ ist,

$$m_2 = r_2 \sin(\vartheta' - \varphi) - \lambda \sin \varphi.$$

Substituirt man diese Werthe für $m_1$ und $m_2$ in die Gleichung (243); so wird dieselbe

$$\mathrm{P}_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \left\{ \frac{r_1 \sin(\vartheta' - \varphi) + \lambda \sin \varphi + \left(\frac{\varrho_1 \mathrm{L}_1}{a_1}\right) \sin \varphi_1}{r_2 \sin(\vartheta' - \varphi) - \lambda \sin \varphi - \left(\frac{\varrho_2 \mathrm{L}_2}{a_2}\right) \sin \varphi_2} \right\} \mathrm{P}_2 \ldots . (247)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem früheren (Gleichung 246) nur dadurch, daß darin in den ersten Gliedern des Zählers oder Nenners $\vartheta' - \varphi$ statt $\vartheta + \varphi$ steht.

Bezeichnet man übrigens mit $\vartheta$ in beiden vorstehenden Fällen den Winkel **CAP**, welchen die Linie **AP** mit dem Halbmesser **CA** des getriebenen Rades bildet, gleichviel ob derselbe spitz oder stumpf ist, oder ob die Berührung der Zähne hinter oder vor der Mittellinie stattfindet; so sieht man, daß weil $\vartheta' = \mathrm{BAP} = \pi - \mathrm{CAP} = \pi - \vartheta$, also $\vartheta' - \varphi = \pi - \vartheta - \varphi = \pi - (\vartheta + \varphi)$ und demnach $\sin(\vartheta' - \varphi) = \sin[\pi - (\vartheta + \varphi)] = \sin(\vartheta + \varphi)$ ist, in beiden Fällen die Formel (246) die verlangte Beziehung zwischen den Kräften $P_1$ und $P_2$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes bei dem Vorwalten von $P_1$ ergibt.

Dividirt man den Zähler und Nenner des Bruches in dieser Formel mit $\sin(\vartheta+\varphi)$, und sondert die Faktoren $r_1$ und $r_2$ ab; so erhält man

$$P_1 = \left(\frac{r_1 a_2}{r_2 a_1}\right) \left\{ \frac{1 + \dfrac{\lambda \sin\varphi + \left(\dfrac{\varrho_1 L_1}{a_1}\right)\sin\varphi_1}{r_1 \sin(\vartheta+\varphi)}}{1 - \dfrac{\lambda \sin\varphi + \left(\dfrac{\varrho_2 L_2}{a_2}\right)\sin\varphi_2}{r_2 \sin(\vartheta+\varphi)}} \right\} P_2,$$

oder wenn man die angedeutete Division wirklich ausführt, und alle Glieder vernachlässigt, welche von den sehr kleinen Größen $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$ mehr, als Eine Dimension, enthalten,

$$P_1 = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2} \left\{ 1 + \frac{\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)\lambda\sin\varphi + \dfrac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \dfrac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2}{\sin(\vartheta+\varphi)} \right\} P_2$$

$$\ldots\ldots (247a)\ ^{*})$$

Wenn der Winkel $\vartheta$ stumpf und $=\pi-\vartheta'$ ist, sodaß man $\sin(\vartheta+\varphi)=\sin(\vartheta'-\varphi)$ hat; so ist der Werth von $P_1$ für eine gleiche absolute Neigung der Linie AP gegen die Mittellinie BC

---

*) Wenn man in dieser Formel die Reibungen an den Axen B und C der Räder vernachlässigt; so reduzirt sich dieselbe auf

$$P_1 = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{\lambda \sin\varphi}{\sin(\vartheta+\varphi)} P_2. \right\}$$

Setzt man alsdann $\sin(\vartheta+\varphi) = \sin\vartheta . \cos\varphi + \cos\vartheta . \sin\varphi$, und vernachlässigt das Glied $\cos\vartheta . \sin\varphi$ gegen $\sin\vartheta . \cos\varphi$, da der Winkel $\vartheta$ immer sehr nahe gleich einem rechten und der Winkel $\varphi$ immer sehr klein ist; so erhält man

$$P_1 = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{\lambda \tang\varphi}{\sin\vartheta} \right\} P_2,$$

oder wenn man den Reibungskoeffizienten $\tang\varphi$ mit $f$ bezeichnet,

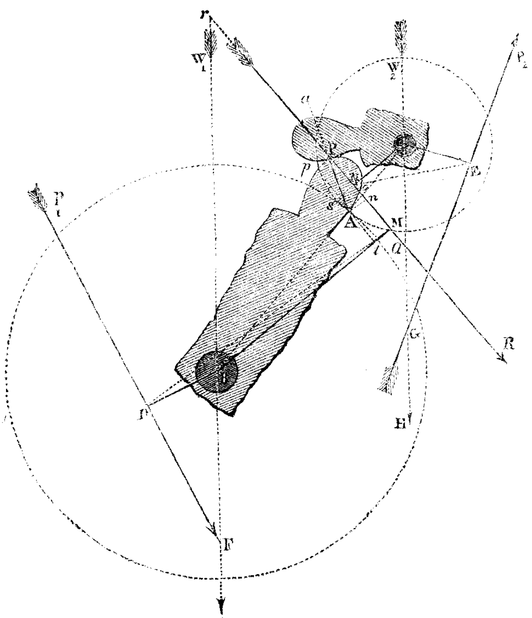
$$P_1 = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2} \left\{ 1 + \frac{f\lambda}{\sin\vartheta} \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right) \right\} P_2,$$

in welcher Abkürzung man die von Poncelet zuerst gegebene Formel erkennt.

immer größer, als wenn der Winkel $\vartheta$ spitz und $=\vartheta'$ wäre. Hieraus folgt, daß der Widerstand, welchen die Reibung an den Zähnen und an den Zapfenlagern der Bewegung entgegensetzt, größer ist, wenn die Berührung der Zahne **vor** der Mittellinie, als wenn sie in einem gleichen Winkelabstande **hinter** dieser Linie stattfindet, ein Satz, welcher durch die Erfahrung aller praktischen Maschinisten bestätigt ist.

§. 220. **Beziehung zwischen der treibenden Kraft $P_1$, welche an dem Einen, und dem Widerstande $P_2$, welcher an dem anderen Rade angebracht ist, im Gränzzustande des Gleichgewichtes, wenn auf die Gewichte der Räder Rücksicht genommen wird.**

Zieht man die Gewichte $W_1$ und $W_2$ der Räder mit in Rechnung, und nimmt an, daß dieselben im Vergleich zu den Kräften $P_1$ und $P_2$ gering seien; so werden die Beziehungen zwischen $P_1$ und $R$ und zwischen $P_2$ und $R$, da nun auf ein jedes Rad drei Kräfte




wirken, durch Gleichung (163), statt durch Gleichung (158), ausgedrückt. Setzt man daher in jener Gleichung $W_1$ und $W_2$ für

$P_3$ an die Stelle; so ergeben sich resp. für die beiden Räder, statt der Gleichungen (241) und (242), die folgenden,

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{1}{a_1}\Big\{ m_1 + \left(\dfrac{L_1 \varrho_1}{a_1}\right) \sin\varphi_1 \Big\{ R + \dfrac{M_1 W_1}{L_1 a_1^2} \varrho_1 \sin\varphi_1 \\ P_2 = \dfrac{1}{a_2}\Big\{ m_2 - \left(\dfrac{L_2 \varrho_2}{a_2}\right) \sin\varphi_2 \Big\{ R - \dfrac{M_2 W_2}{L_2 a_2^2} \varrho_2 \sin\varphi_2 \end{array}\right\}, \ldots (248)$$

worin $M_1$ und $M_2$ gewisse Funktionen bezeichnen, welche nach §. 166 durch die Neigungswinkel der Kräfte $P_1$ und $P_2$ gegen die Vertikale bestimmt sind.

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Größe R, vernachlässigt Glieder, welche mehr, als Eine Dimension, von $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$ enthalten, und multiplizirt mit $a_1 a_2$; so ergibt sich

$$P_1 a_1 \left(m_2 - \frac{L_2 \varrho_2}{a_2} \sin\varphi_2\right) - P_2 \alpha_2 \left(m_1 + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1} \sin\varphi_1\right)$$
$$= \frac{M_1 W_1}{L_1 a_1} m_2 \varrho_1 \sin\varphi_1 + \frac{M_2 W_2}{L_2 a_2} m_1 \varrho_2 \sin\varphi_2 \ldots. (249)$$

Substituirt man hierin für $m_1$ und $m_2$ die Werthe aus den Gleichungen (244) und (245); so kommt

$$P_1 a_1 \Big\} r_2 \sin(\vartheta + \varphi) - \lambda \sin\varphi - \frac{L_2 \varrho_2}{a_2} \sin\varphi_2 \Big\{$$
$$- P_2 a_2 \Big\} r_1 \sin(\vartheta + \varphi) + \gamma \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1} \Big\{$$
$$= \Big\} \frac{M_1 W_1}{L_1 a_1} r_2 \varrho_1 \sin\varphi_1 + \frac{M_2 W_2}{L_2 a_2} r_1 \varrho_2 \sin\varphi_2 \Big\{ \sin(\vartheta + \varphi) \ldots (250)$$

Nach §. 166 ist nun

$$\frac{M_1}{a_1} = m_1 \cos\iota'_{13} + a_1 \cos\iota'_{23},$$

worin $\iota'_{13}$ den Winkel, welchen die positive Richtung der Kraft $P_1$ mit der positiven Richtung der Schwere oder der Kraft $W_1$ bildet, also auch den Winkel $W_1 F P_1$ und $\iota'_{23}$ den Winkel $R r F$ darstellt, welchen die positive Richtung des Widerstandes R des getriebenen Zahnes mit der positiven Richtung der Schwere oder der Kraft $W_1$ bildet.

Nun sei in beiden Fällen, wo die Berührung der Zähne entweder hinter oder vor der Mittellinie stattfindet, sodaß $\vartheta$ immer den Winkel bezeichnet, welchen die Linie **AP** mit dem Halbmesser **CA** des getriebenen Rades bildet,

$\alpha_1$ der Winkel, welchen das Perpendikel **BD** von dem Mittelpunkte **B** auf die Richtung der Kraft $P_1$ beschreiben würde, wenn dasselbe durch die direkte Wirkung der Kraft $P_1$ so weit herumgedrehet würde, daß es mit der positiven Richtung **BF** der Schwere zusammenfiele, ferner sei

$\alpha_2$ der Winkel, welchen das Perpendikel **CE** von dem Mittelpunkte **C** auf die Richtung der Kraft $P_2$ beschreiben würde, wenn dasselbe durch die direkte Wirkung der Kraft $P_2$ so weit herumgedrehet würde, daß es mit der positiven Richtung **CG** der Schwere zusammenfiele; endlich sei

$\beta$ der Winkel, welchen die Mittellinie, **BC** beschreiben würde, wenn dieselbe durch die direkte Wirkung des Widerstandes **R** des getriebenen Zahnes so weit um den Punkt **B** gedrehet würde, daß sie mit der positiven Richtung **BF** der Schwere zusammenfiele.

Man sieht, daß diese Winkel in einem jeden der vier Quadranten liegen können. In der vorstehenden Figur und in der des §s. 219 ist der Winkel $\alpha_1$ gleich dem spitzen Winkel **DBF**, der Winkel $\alpha_2$ gleich dem überstumpfen Winkel **ECG** und der Winkel $\beta$ gleich dem stumpfen Winkel **ABF**, und man hat demnach

$$\iota'_{13} = \mathrm{W_1FP_1} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{DBF} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \text{ und}$$

$$\iota'_{23} = \mathrm{R}r\mathrm{F} = \mathrm{BOR} - \mathrm{OB}r = \mathrm{BOR} - (\pi - \mathrm{ABF})$$
$$= \mathrm{BOR} + \mathrm{ABF} - \pi = \vartheta + \varphi + \beta - \pi; \text{ also}$$

$$\cos\iota'_{13} = \sin\alpha_1 \text{ und } \cos\iota'_{23} = -\cos(\vartheta + \varphi + \beta), \text{ und daher}$$

$$\frac{\mathrm{M}_1}{a_1} = m_1 \sin\alpha_1 - a_1 \cos(\vartheta + \varphi + \beta)$$

Ebenso hat man für das zweite Rad, auf welches die Kraft $P_2$, der Druck **R** des treibenden Zahnes und das Gewicht $W_2$ wirkt, wenn man beachtet, daß der Druck **R** des treibenden Zahnes dem Widerstande **R** des getriebenen Zahnes gleich, aber direkt entgegengesetzt, ist, und daß der Pfeil in den obigen Figuren die Richtung des Widerstandes des getriebenen Zahnes und nicht die Richtung des Druckes des treibenden Zahnes darstellt,

$$\frac{M_2}{a_2} = m_2 \cos \iota''_{13} + a_2 \cos \iota''_{23},$$

worin $\iota''_{13}$ den Winkel $P_2GH$, welchen die positive Richtung der Kraft $P_2$ mit der positiven Richtung der Schwere oder der Kraft $W_2$ bildet, und $\iota''_{23}$ den Winkel $rQG$ bezeichnet, welchen die positive Richtung des Druckes $R$ des treibenden Zahnes mit der positiven Richtung der Schwere oder der Kraft $W_2$ bildet. Hiernach hat man

$$\iota''_{13} = P_2GH = CEG + ECG = CEG + (2\pi - \alpha_2)$$
$$= \frac{\pi}{2} + 2\pi - \alpha_2 = 2\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) \text{ und}$$

$\iota''_{23} = rQG = \pi - RrF$, d. i., da $RrF = \vartheta + \varphi + \beta - \pi$ war,
$= 2\pi - (\vartheta + \varphi + \beta)$; also

$\cos \iota''_{13} = \sin \alpha_2$ und $\cos \iota''_{23} = \cos(\vartheta + \varphi + \beta)$, und daher

$$\frac{M_2}{a_2} = m_2 \sin \alpha_2 + a_2 \cos(\vartheta + \varphi + \beta).$$

Diese Werthe der Größen $\frac{M_1}{a_1}$ und $\frac{M_2}{a_2}$, ausgedrückt durch die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$ und $\vartheta + \varphi$, gelten nicht allein für die in den Figuren dargestellten besonderen Lagen der Räder und der Kräfte $P_1$ und $P_2$, sondern auch für alle übrigen, und man hat daher allgemein, wenn man für $m_1$ und $m_2$ ihre Werthe aus den Gleichungen (244) und (245) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_1}{a_1} &= r_1 \sin \alpha_1 \sin(\vartheta + \varphi) + \lambda \sin \alpha_1 \sin\varphi - a_1 \cos(\vartheta + \varphi + \beta) \\ \frac{M_2}{a_2} &= r_2 \sin \alpha_2 \sin(\vartheta + \varphi) - \lambda \sin \alpha_2 \sin\varphi + a_2 \cos(\vartheta + \varphi + \beta) \end{aligned}\right\} \ldots (251)$$

Vernachlässigt man die Größe $\lambda \sin \varphi$ gegen $r_1 \sin(\vartheta + \varphi)$ und gegen $r_2 \sin(\vartheta + \varphi)$, was umso eher geschehen kann, da die erstere Größe bei ihrer Substitution in die Gleichung (250) Glieder von zwei Dimensionen in $\sin\varphi$ und $\sin\varphi_1$ oder $\sin\varphi_2$ erzeugt, und beachtet, daß in allen Fällen die Richtung von **PR** mit der Mittellinie **BC** einen Winkel $BOR = \vartheta + \varphi$ bildet, welcher sehr nahe gleich einem rechten ist, setzt demnach bei der Substitution auf der rechten Seite der Gleichung (250) $\vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$, da der hieraus entstehende Fehler durch die Multiplikation mit $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$ sehr unbedeutend wird; so werden die Gleichungen (251)

$$\frac{M_1}{a_1} = r_1 \sin\alpha_1 + a_1 \sin\beta,$$

$$\frac{M_2}{a_2} = r_2 \sin\alpha_2 - a_2 \sin\beta.$$

Substituirt man diese Werthe in den ersten Faktor der rechten Seite der Gleichung (250), und bezeichnet diesen Faktor mit $N r_1 r_2$; so erhält man

$$N r_1 r_2 = \frac{W_1}{L_1} r_2 \varrho_1 (r_1 \sin\alpha_1 + a_1 \sin\beta) \sin\varphi_1 + \frac{W_2}{L_2} r_1 \varrho_2 (r_2 \sin\alpha_2 - a_2 \sin\beta) \sin\varphi_2,$$

und wenn man mit $r_1 r_2$ dividirt,

$$N = \frac{W_1 \varrho_1 \sin\varphi_1}{L_1}\left(\sin\alpha_1 + \frac{a_1}{r_1}\sin\beta\right) + \frac{W_2 \varrho_2 \sin\varphi_2}{L_2}\left(\sin\alpha_2 - \frac{a_2}{r_2}\sin\beta\right) \quad \ldots . (252)$$

Wenn die Richtung Einer der beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$, z. B. die von $P_1$, eine Tangente im Berührungspunkte **A** der Theilkreise der beiden Räder bildete; so würde, wenn die Berührung der Zähne gerade in der Mittellinie, also im Punkte **A** stattfände, die Richtung **RP** mit der von $P_1$ zusammenfallen, $L_1$ würde verschwinden und der Ausdruck von **N** scheinbar einen unendlichen Werth annehmen. Dieser Widerspruch hebt sich jedoch, wenn man beachtet, daß alsdann gleichzeitig $a_1 = r_1$ und $\beta = 2\pi - \alpha_1$, also $\sin\beta = -\sin\alpha_1$ und daher $\sin\alpha_1 + \frac{a_1}{r_1}\sin\beta = o$ wird, sodaß $\dfrac{\sin\alpha_1 + \frac{a_1}{r_1}\sin\beta}{L_1}$ den Werth $\frac{o}{o}$ annimmt. Um den wahren Werth dieses Ausdruckes für den angenommenen Fall zu bestimmen, so bemerkt man, daß wenn $a_1 = r_1$, also die Richtung der Kraft $P_1$ eine Tangente an dem Theilkreise des Rades B wird, und die Berührung der Zähne in der Mittellinie BC, also in A, stattfindet, sodaß auch PR eine Tangente an diesem Theilkreise, und zwar im Punkte A, wird, der Punkt M in A und der Punkt D in den Umfang des Theilkreises fällt, und daß mithin die Linie $DM = L_1$ eine Sehne des Theilkreises darstellt. Diese Sehne kann alsdann aber durch $L_1 = 2r_1 \sin \frac{1}{2} DBA = 2r_1 \sin \frac{1}{2} [2\pi - (\alpha_1 + \beta)] = 2r_1 \sin [\pi - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)] = 2r_1 \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)$ ausgedrückt werden, und man hat demnach für diesen Fall, wo $a_1 = r_1$ ist,

$$\frac{\sin\alpha_1 + \frac{a_1}{r_1}\sin\beta}{L} = \frac{\sin\alpha_1 + \sin\beta}{2r_1 \sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta).\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\beta)}{2r_1\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta)}$$
$$= \frac{1}{r_1}\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\beta).$$

Nimmt man nun an, daß die Richtung der Kraft $P_1$ den Theilkreis von B im Punkte A berühre, setzt demnach $\alpha_1 = 2\pi - \beta$; so hat man $\alpha_1 - \beta = 2\pi - 2\beta$, $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta) = \pi - \beta$, also $\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta) = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$, und der Werth von N würde für diesen Fall

$$N = -\frac{W_1\,\varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1}\cos\beta + \frac{W_2\,\varrho_2\sin\varphi_2}{L_2}\left(\sin\alpha_2 - \frac{a_2}{r_2}\sin\beta\right)$$

werden.

Substituirt man jetzt $N r_1 r_2$ für den Faktor, welchen diese Größe in der Gleichung (250) darstellt; so ergibt sich

$$P_1 a_1 \left\} r_2 \sin(\vartheta+\varphi) - \lambda\sin\varphi - \frac{L_2\varrho_2}{a_2}\sin\varphi_2 \right\{$$
$$-P_2 a_2 \left\} r_1 \sin(\vartheta+)\varphi + \lambda\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1}\sin\varphi_1 \right\{$$
$$= N r_1 r_2 \sin(\vartheta+\varphi) \ldots . (253)$$

Löſ't man diese Gleichung für $P_1$ auf; so kommt

$$P_1 = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2}\left\{\frac{1 + \frac{\lambda\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1}\sin\varphi_1}{r_1\sin(\vartheta+\varphi)}}{1 - \frac{\lambda\sin\varphi + \frac{L_2\varrho_2}{a_2}\sin\varphi_2}{r_2\sin(\vartheta+\varphi)}}\right\} P_2 + \frac{\frac{r_1}{a_1}N}{1 - \frac{\lambda\sin\varphi + \frac{L_2\varrho_2}{a_2}\sin\varphi_2}{r_2\sin(\vartheta+\varphi)}}.$$

Wenn man die Divisionen wirklich ausführt, alle Glieder vernachlässigt, welche mehr, als Eine Dimension, von $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$ enthalten, und dabei beachtet, daß N bereits von Einer Dimension in diesen sehr kleinen Größen ist; so erhält man

$$P_1 = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2}\left\{1+\frac{\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\lambda\sin\varphi+\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2}{\sin(\vartheta+\varphi)}\right\}P_2+\frac{r_1}{a_1}N \quad \ldots . (254)\ *)$$

---

*) Die vorstehenden Formeln, welche sich auf die Gleichung (163), §. 166, gründen, sind unter der in jenem Paragraphe angenommenen Voraussetzung entwickelt, daß die Gewichte der Räder, welche dort durch die Kraft $P_3$ dargestellt sind, im Vergleich zu den übrigen auf die Räder wirkenden Kräften nicht sehr bedeutend seien. Ist dies Letztere aber der Fall; so kann man die Wurzelgröße der Gleichung (161) nach der in der Note zu §. 171 angegebenen Weise entwickeln, wodurch man Formeln erhält, welche bei richtiger Anwendung nicht allein dann Gültigkeit behalten, wenn die Gewichte der Räder sehr groß sind, sondern auch dann, wenn dieselben zu den übrigen auf die Räder wirkenden Kräften in beliebigen Verhältnissen stehen.

Man setze daher die Wurzelgröße aus der Gleichung (161) nach der in der Note zu §. 171 angenommenen Bezeichnung gleich

$$0{,}828(P_2 a_1\cos\iota_{13}+P_2 a_2\cos\iota_{23}+P_3 a_1)+0{,}828(P_2 a_1\sin\iota_{13}\mp P_2 a_2\sin\iota_{23}).$$

In diesem Ausdrucke gilt das obere Zeichen $-$, wenn die positive Richtung der Kraft $P_3$ zwischen den positiven Richtungen der Kräfte $P_1$ und $P_2$ oder deren Verlängerungen liegt, und das untere Zeichen $+$, wenn die positive Richtung der Kraft $P_3$ zwischen der positiven Richtung der Einen und der Verlängerung der anderen der beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$ liegt. Man kann diese Formel immer als Näherungswerth für die in Rede stehende Wurzelgröße annehmen, wenn man sich mit einem Fehler begnügen will, der in dem ungünstigsten Falle $\frac{1}{6}$ beträgt, ein Fehler, der auf das Endresultat nur einen geringen Einfluß hat, wenn man beachtet, daß die Wurzelgröße in den sehr kleinen Faktor $\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1{}^2}$ multiplizirt ist. Bei der Anwendung dieses Ausdruckes ist übrigens sorgfältig darauf zu achten, daß die beiden Theile desselben absolut positive Größen darstellen, daß also

$P_2 a_2\cos\iota_{13}+P_2 a_2\cos\iota_{23}+P_3 a_1>0$ und auch, wenn das obere Zeichen gilt,

$$P_2 a_1\sin\iota_{13}-P_2 a_2\sin\iota_{23}>0$$

sei, oder auch, daß

$P_3+(\cos\iota_{13}+\frac{a_2}{a_1}\cos\iota_{23})P_2>0$ und, wenn das obere Zeichen gilt,

$$\sin\iota_{13}-\frac{a_2}{a_1}\sin\iota_{23}>0$$

sei.

Setzt man also

## §. 221. Der Model eines Systemes von zwei verzahnten Rädern.

Multiplizirt man die beiden Seiten der Gleichung (254) mit $a_1 \frac{r_2}{r_1}$; so erhält man

$$P_1 a_1 \frac{r_2}{r_1} =$$

$$P_2 a_2 \left\{ 1 + \frac{1}{\sin(\vartheta + \varphi)} \left[ \lambda \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1} \sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2} \sin\varphi_2 \right] \right\} + N r_2.$$

---

$$\cos\iota_{13} + \frac{a_2}{a_1} \cos\iota_{23} = A \text{ und } \sin\iota_{13} \mp \frac{a_2}{a_1} \sin\iota_{23} = B;$$

so muß man immer

$$\left. \begin{array}{l} P_3 + A P_2 > 0 \text{ oder } P_3 > -A P_2 \\ \text{und } B > 0 \end{array} \right\} \ldots . (a)$$

haben. Fände irgend Eine dieser beiden Bedingungen nicht statt; so müßte man das entsprechende Glied des obigen Näherungswerthes mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen, also resp. $-P_3 - AP_2$ statt $+P_3 + AP_2$ oder $-B$ statt $+B$ setzen. Hinsichtlich der ersten der beiden vorstehenden Bedingungen bemerkt man, daß nach der Gleichung (161) $P_2$ immer $= \frac{a_1}{a_2} P_1 - X$ ist, worin X eine absolut positive Größe bezeichnet. Hierdurch geht diese Bedingung in

$$P_3 + A \left( \frac{a_1}{a_2} P_1 - X \right) > 0 \text{ oder in}$$

$$P_3 + \frac{a_1}{a_2} A P_1 - A X > 0$$

über. Da ferner die obige Bedingung in allen Fällen erfüllt wird, wo A positiv ist, und nur dann möglicher Weise nicht erfüllt werden könnte, wenn A negativ, also $-A$ positiv wäre; so sieht man, daß dieser Forderung unter allen Umständen eine Genüge geleistet wird, sobald man

$$P_3 + \frac{a_1}{a_2} A P_1 > 0 \text{ oder } P_3 > -\frac{a_1}{a_2} A P_1 \ldots . (b)$$

hat, weil alsdann auch $P_3 + \frac{a_1}{a_2} A P_1 - A X$ oder $P_3 + A P_2 > 0$ ist. Man erkennt aber auch, daß man, ohne dadurch einen bedeutenden Irrthum herbeizuführen, die Bedingung (b) für die erste der beiden Bedingungen (a) ganz an die Stelle setzen kann; denn wenn auch nicht nothwendig für $P_3 + \frac{a_1}{a_2} A P_1 < 0$ gleichzeitig $P_3 + \frac{a_1}{a_2} AP_1 - AX$ oder $P_3 + A P_2 < 0$ ist, sobald A einen positiven Werth hat; so wird doch, wenn wirklich $P_3 + \frac{a_1}{a_2} A P_1 < 0$ und $P_3 + AP_2 > 0$ wäre, der Werth von $P_3 + A P_2$ höchstens um die Größe $AX$ von

Nun sei $\triangle\psi$ ein sehr kleines Inkrement des Winkels $\psi$, um welchen sich das getriebene Rad von dem Augenblicke aus, wo

---

null verschieden sein, und da $\mathbf{X}$ im Vergleich zu $\mathbf{P}_2$ immer gering sein wird; so sieht man, daß es im Endresultate keinen wesentlichen Unterschied erzeugen würde, wenn man das entsprechende Glied in dem obigen Näherungsausdrucke wirklich mit dem Zeichen $+$ oder $-$ nähme, während es eigentlich mit dem Zeichen $-$ oder $+$ genommen werden müßte. $\mathbf{X}$ ist nämlich immer von Einer Dimension in $\sin\varphi$, und der Unterschied, welcher durch ein solches irrthümliches Zeichen im Endresultate entstehen könnte, würde von zwei Dimensionen in $\sin\varphi$, also von der Art sein, daß er vernachlässigt werden dürfte.

Substituirt man nun den obigen Näherungswerth in die Gleichung (161); so wird dieselbe nach einigen Reduktionen

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{a_1}\left\{a_2 + 0{,}828\,\varrho\sin\varphi\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right\}\mathbf{P}_2 + 0{,}828\,\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1}\,\mathbf{P}_3 \;\ldots\ldots (\mathrm{c})$$

wenn in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes die Kraft $\mathbf{P}_1$ vorwaltet, und (s. §. 164)

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{a_1}\left\{a_2 - 0{,}828\,\varrho\sin\varphi\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right\}\mathbf{P}_2 - 0{,}828\,\frac{\varrho\sin\varphi}{a_1}\,\mathbf{P}_3 \;\ldots\ldots (\mathrm{d})$$

wenn in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes die Kraft $\mathbf{P}_2$ vorwaltet.

Wendet man diese Formeln auf den Fall des vorstehenden Paragraphes an; so erhält man statt der Gleichungen (248) die folgenden,

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= \frac{1}{a_1}\left\{m_1 + 0{,}828\,\varrho_1\sin\varphi_1\,(\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1)\right\}\mathbf{R} + 0{,}828\,\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{a_1}\,\mathbf{W}_1\\ \mathbf{P}_2 &= \frac{1}{a_2}\left\{m_2 - 0{,}828\,\varrho_2\sin\varphi_2\,(\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2)\right\}\mathbf{R} - 0{,}828\,\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{a_2}\,\mathbf{W}_2\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (\mathrm{e})$$

Hierin hat man, wenn $\iota'_{13}$ und $\iota'_{23}$ resp. die Winkel bezeichnen, welche die positive Richtung der Kraft $\mathbf{P}_1$ und die positive Richtung des Widerstandes $\mathbf{R}$ des getriebenen Zahnes mit der positiven Richtung der Schwere bilden, und $\iota''_{13}$ und $\iota''_{23}$ resp. die Winkel bezeichnen, welche die positive Richtung der Kraft $\mathbf{P}_2$ und die positive Richtung des Druckes $\mathbf{R}$ des treibenden Zahnes mit der positiven Richtung der Schwere bilden,

$$\mathbf{A}_1 = \cos\iota'_{13} + \frac{m_1}{a_1}\cos\iota'_{23},\quad \mathbf{B}_1 = \sin\iota'_{13} \mp \frac{m_1}{a_1}\sin\iota'_{23},$$

$$\mathbf{A}_2 = \cos\iota''_{13} + \frac{m_2}{a_2}\cos\iota''_{23},\quad \mathbf{B}_2 = \sin\iota''_{13} \mp \frac{m_2}{a_2}\sin\iota''_{23}.$$

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (e) die Größe $\mathbf{R}$, und vernachlässigt höhere Dimensionen, als die erste, von $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$; so kommt

$$\mathbf{P}_1\,a_1\left\{m_2 - 0{,}828\,\varrho_2\sin\varphi_2(\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2)\right\} - \mathbf{P}_2\,a_2\left\{m_1 + 0{,}828\,\varrho_1\sin\varphi_1(\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1)\right\}$$
$$= 0{,}828\left\{\varrho_1\sin\varphi_1\,m_2\,\mathbf{W}_1 + \varrho_2\sin\varphi_2\,m_1\,\mathbf{W}_2\right\}\;\ldots\ldots (\mathrm{f})$$

Nun hat man nach den früheren Beziehungen (244) und (245) zwei Zähne zuerst miteinander in Berührung kamen, gedrehet hat. Da die linke Seite der vorstehenden Gleichung gleich $P_1 a_1 \frac{r_2}{r_1} \frac{\triangle\psi}{\triangle\psi}$

---

$$m_1 = r_1 \sin(\vartheta + \varphi) + \lambda \sin\varphi \text{ und } m_2 = r_2 \sin(\vartheta + \varphi) - \lambda \sin\varphi,$$

ferner
$$\cos\iota'_{13} = \sin\alpha_1, \quad \sin\iota'_{13} = \cos\alpha_1,$$
$$\cos\iota'_{23} = -\cos(\vartheta+\varphi+\beta), \quad \sin\iota'_{23} = -\sin(\vartheta+\varphi+\beta),$$
und
$$\cos\iota''_{13} = \sin\alpha_2, \quad \sin\iota''_{13} = \cos\alpha_2,$$
$$\cos\iota''_{23} = \cos(\vartheta+\varphi+\beta) \quad \sin\iota''_{23} = -\sin(\vartheta+\varphi+\beta)$$

Substituirt man diese Werthe in die vorstehenden Formeln, und setzt $\vartheta + \varphi$ überall da, wo der Sinus oder Kosinus dieser Größe in die Ausdrücke von $A_1$, $B_1$, $A_2$ und $B_2$ eintritt, $= \frac{\pi}{2}$, indem man erwägt, daß dieselbe von diesem Werthe immer nur sehr wenig verschieden ist, und daß $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ schon Ein Mal in die sehr kleinen Größen $\sin\varphi_1$ oder $\sin\varphi_2$ multiplizirt sind; so erhält man

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \sin\alpha_1 + \frac{r_1}{a_1}\sin\beta, \quad B_1 = \cos\alpha_1 \pm \frac{r_1}{a_1}\cos\beta, \\ A_2 &= \sin\alpha_2 - \frac{r_2}{a_2}\sin\beta, \quad B_2 = \cos\alpha_2 \pm \frac{r_2}{a_2}\cos\beta, \end{aligned}\right\} \ldots (g)$$

und aus (f), wenn man mehr, als Eine Dimension, von $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$ vernachlässigt,

$$\begin{aligned} &P_1 a_1 \{ r_2 \sin(\vartheta + \varphi) - \lambda\sin\varphi - 0{,}828\,\varrho_2 \sin\varphi_2 (A_2 + B_2) \} \\ &\quad - P_2 a_2 \{ r_1 \sin(\vartheta + \varphi) + \lambda\sin\varphi + 0{,}828\,\varrho_1 \sin\varphi_1 (A_1 + B_1) \} \\ &= 0{,}828\,(r_2 \varrho_1 \sin\varphi_1 W_1 + r_1 \varrho_2 \sin\varphi_2 W_2) \sin(\vartheta + \varphi) \ldots (h) \end{aligned}$$

Die Bedingungen, unter welchen die Größen $A_1$ und $W_1$; $B_1$; $A_2$ und $W_2$; $B_2$ resp. positiv oder negativ genommen werden müssen, sind

$$W_1 + \frac{a_1}{m_1} A_1 P_1 \gtrless 0; \; B_1 \gtrless 0;$$

$$W_2 + \frac{a_2}{m_2} A_2 P_2 \gtrless 0; \; B_2 \gtrless 0,$$

oder abgekürzt,

$$\left.\begin{aligned} W_1 + \left(\frac{a_1}{r_1}\sin\alpha_1 + \sin\beta\right) P_1 \gtrless 0; \; \cos\alpha_1 \pm \frac{r_1}{a_1}\cos\beta \gtrless 0; \\ W_2 + \left(\frac{a_2}{r_2}\sin\alpha_2 - \sin\beta\right) P_2 \gtrless 0; \; \cos\alpha_2 \pm \frac{r_2}{a_2}\cos\beta \gtrless 0 \end{aligned}\right\} \ldots (i)$$

In diesen Werthen von B ist immer das obere Zeichen + zu nehmen, wenn die positive Richtung der Schwere zwischen den positiven Richtungen der ist, und $\frac{r_2}{r_1}\triangle\psi$ den Winkel darstellt, welchen das treibende Rad beschreibt, während sich das getriebene Rad um den Winkel $\triangle\psi$ drehet (s. §. 206), und da mithin $P_1 a_1\left(\frac{r_1}{r_2}\triangle\psi\right)$ die Arbeit $\triangle U_1$ (§. 50) ausdrückt, welche die treibende Kraft $P_1$ leistet, während von dem getriebenen Rade der Winkel $\triangle\psi$ beschrieben wird; so hat man

$$\frac{\triangle U_1}{\triangle\psi}=$$

$$P_2 a_2\left\{1+\frac{1}{\sin(\vartheta+\varphi)}\left[\lambda\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\sin\varphi+\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2\right]\right\}+N r_2.$$

Nimmt man nun den Winkel $\triangle\psi$ unendlich klein an, sodaß die linke Seite dieser Gleichung der Differenzialkoeffizient von

---

Kräfte **P** und **R** oder deren Verlängerungen liegt, und das untere Zeichen —, wenn jene Richtung zwischen der positiven Richtung der Einen und der rückwärts verlängerten Richtung der anderen Kraft liegt. Fiele die positive Richtung der Schwere gerade in die Richtung Einer der beiden Kräfte **P** und **R**; so würde das obere Zeichen gelten: fiele dieselbe aber in die Verlängerung Einer dieser Kräfte; so würde das untere Zeichen gelten.

Löst man endlich die Gleichung (h) für $P_1$ auf, und reduzirt gehörig; so kommt

$$P_1=\frac{a_2 r_1}{a_1 r_2}\left\{\frac{1+\dfrac{\lambda\sin\varphi+0{,}828\,\varrho_1\sin\varphi_1(A_1+B_1)}{r_1\sin(\vartheta+\varphi)}}{1-\dfrac{\lambda\sin\varphi+0{,}828\,\varrho_2\sin\varphi_2(A_2+B_2)}{r_2\sin(\vartheta+\varphi)}}\right\}P_2$$

$$+\frac{0{,}828\,\dfrac{r_1}{a_1}\left(\dfrac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}W_1+\dfrac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}W_2\right)}{\left\{1-\dfrac{\lambda\sin\varphi+0{,}828\,\varrho_2\sin\varphi_2(A_2+B_2)}{r_2\sin(\vartheta+\varphi)}\right\}},$$

oder wenn man die Divisionen ausführt, und alle Glieder von mehr, als Einer Dimension, in $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$ vernachlässigt,

$$P_1=$$

$$\frac{a_2 r_1}{a_1 r_2}\left\{1+\frac{\lambda\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)\sin\varphi+0{,}828\left[\dfrac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}(A_1+B_1)+\dfrac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}(A_2+B_2)\right]}{\sin(\vartheta+\varphi)}\right\}P_2$$

$$+0{,}828\,\frac{r_1}{a_1}\left(\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}W_1+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}W_2\right)\ldots.(k)$$

$U_1$ in Beziehung zu $\psi$ wird, integrirt alsdann zwischen den Gränzen 0 und $\psi$; so ergibt sich, wenn man während der Drehung $P_2$, $L_1$ und $L_2$, also auch N, als konstant annimmt,

$$U_1 =$$

$$P_2 a_2 \int_0^{\psi} \left\{ 1 + \frac{1}{\sin(\vartheta+\varphi)} \left[ \lambda\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \right] \right\} d\psi$$
$$+ N . S, \ldots . (255)$$

worin S den Bogen $r_2 \psi$ darstellt, welchen der Theilkreis des getriebenen und mithin auch der des treibenden Rades durchläuft, während jener den Winkel $\psi$ beschreibt.

## §. 222. Der Model eines Systemes von zwei verzahnten Rädern, wenn die Anzahl der Zähne des getriebenen Rades beträchtlich ist.

Es leuchtet ein, daß der Raum, welchen der Berührungspunkt zweier Zähne auf der Oberfläche eines jeden derselben beschreibt, im Vergleich zu den Halbmessern der Theilkreise in diesem Falle immer sehr klein und die Richtung des resultirenden Druckes R zwischen den Zähnen auf der Mittellinie BC sehr nahe perpendikular sein wird, sodaß man den Winkel BOR $= \vartheta + \varphi$ (s. die Figuren zu §. 218 und 219) ohne merklichen Fehler $= \frac{\pi}{2}$, und demnach $\sin(\vartheta+\varphi) = 1$ setzen kann.

Substituirt man diesen Werth für $\sin(\vartheta+\varphi)$ in die Gleichung (255); so bleibt von den unter dem Integrationszeichen enthaltenen Größen nur noch $\lambda$ von $\psi$ abhängig (indem $L_1$ und $L_2$ bei der kurzen Drehung als konstant angesehen werden). Da aber RP in dem vorliegenden Falle sehr nahe als eine auf der Mittellinie BC im Punkte A perpendikular stehende Linie angesehen werden kann; so sieht man, daß die Länge von $\lambda$ sehr nahe der Länge eines Bogens des Theilkreises vom getriebenen Rade gleichkommt, dessen Zentrumswinkel zwischen der Mittellinie CA und der nach dem Berührungspunkt P gezogenen Linie CP liegt. Nimmt man nun allgemein an, die Berührung zweier Zähne beginne vor der Mittellinie in einem Winkelabstande $PCA = \psi_1$ (Fig. zu §. 219) und endige hinter derselben in einem Winkelabstande $CAP = \psi_2$ (Fig. zu §. 218), betrachtet demzufolge die Bewegung des getriebenen Rades in einer jeden dieser beiden Perioden besonders, indem man den Winkel $\psi$ erst von 0 bis $\psi_1$ (vor der Mittellinie) und dann von 0 bis $\psi_2$ (hinter der Mittellinie) wachsen läßt; so hat man für die erste Periode $\lambda = r_2(\psi_1 - \psi)$ und für die zweite Periode $\lambda = r_2\psi$. Zerlegt man hiernach das bestimmte Integral der Gleichung (255), welches sich auf die Gränzen 0 und $\psi_1 + \psi_2$ bezieht, in zwei Theile; so hat man

$$\int_0^{\psi_1+\psi_2} \lambda d\psi = \int_0^{\psi_1} \lambda d\psi + \int_0^{\psi_2} \lambda d\psi = \int_0^{\psi_1} r_2(\psi_1 - \psi) d\psi + \int_0^{\psi_2} r_2 \psi d\psi, \text{ d. i.}$$

$$= r_2\psi_1{}^2 - \tfrac{1}{2} r_2 \psi_1{}^2 + \tfrac{1}{2} r_2 \psi_2{}^2 = \tfrac{1}{2} r_2 (\psi_1{}^2 + \psi_2{}^2).$$

Beachtet man nun, daß wenn die Berührung der Zähne wirklich vor der Mittellinie schon anhebt, der Winkel $\psi_1$ doch immer im Vergleich zu $\psi_2$ klein ist, daß ferner die Linie $AP = \lambda$ bei einer Berührung vor der Mittellinie immer etwas größer ist, als der Bogen $r_2(\psi_1 - \psi)$ des Theilkreises des Rades C, wie in dem Vorstehenden angenommen worden, und daß endlich für diese Periode der Berührung vor der Mittellinie der Faktor $\dfrac{1}{\sin(\vartheta + \varphi)}$ von $\lambda$, welcher ganz vernachlässigt ist, größer ist, als für die Periode der Berührung hinter der Mittellinie; so begreift man, daß es auf das Resultat keinen wesentlichen Einfluß haben wird, wenn man bei der Substitution des soeben entwickelten Integrals $(\psi_1 + \psi_2)^2$ statt $\psi_1{}^2 + \psi_2{}^2$ schreibt. Wäre $\psi_1 = 0$ oder begänne die Berührung erst in der Mittellinie; so stimmte diese Annahme mit der Wahrheit genau überein. Integrirt man nun ebenfalls die übrigen Glieder der Gleichung (255) zwischen den Gränzen 0 und $\psi_1 + \psi_2$ und setzt $\psi_1 + \psi_2 = \psi$; so ergibt sich leicht die Gleichung

$$U_1 =$$

$$\left\{ 1 + \tfrac{1}{2} r_2 \psi \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1} \sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2} \sin\varphi_2 \right\} P_2 a_2 \psi + N r_2 \psi \quad \ldots . (256)$$

Bezeichnet man die Anzahlen der Zähne des treibenden und des getriebenen Rades resp. mit $n_1$ und $n_2$; so hat man $\frac{r_2}{r_1}=\frac{n_2}{n_1}$ (§. 206), also

$$\tfrac{1}{2}r_2\psi\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right)=\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{n_2}{n_1}+1\right).$$

Da $\psi$ nothwendig den Winkel darstellt, welchen die Theilung des getriebenen Rades überspannt; so hat man ferner $\psi=\frac{2\pi}{n_2}$, demnach

$$\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{n_2}{n_1}+1\right)=\frac{\pi}{n_2}\left(\frac{n_2}{n_1}+1\right)=\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right).$$

Substituirt man diesen Werth in die vorstehende Gleichung, bezeichnet mit $U_2$ die Nutzarbeit $P_2 a_2 \psi$, welche am Angriffspunkte des Widerstandes $P_2$ geleistet wird, während sich das getriebene Rad um den Winkel $\psi$ drehet, und mit S den Raum $r_2\psi$, welchen gleichzeitig ein jeder Theilkreis beschreibt; so erhält man

$$U_1=\left\{1+\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi+\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2\right\}U_2+N.S\ldots(257)$$

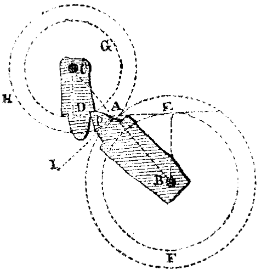
Die Beziehung, welche zwischen der Arbeit der treibenden Kraft und dem Nutzeffekte besteht, während zwei gegebene Zähne miteinander in Berührung sind, findet offenbar auch dann noch statt, wenn mehrere Zähne nachundnach miteinader in Berührung kommen. Dieselbe stellt also den Model eines Systemes von zwei verzahnten Rädern dar, wenn die Anzahl der Zähne des getriebenen Rades beträchtlich ist. *)

*) Wenn man von der Gleichung ($k$) in der Note zu §. 220 ausgeht; so erhält man für den Model zweier verzahnter Räder unter den hier gemachten Voraussetzungen

$$U_1=$$
$$\left\{1+\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi+0{,}828\left[\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}(A_1+B_1)+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}(A_2+B_2)\right\}U_2\right.$$
$$+\,0{,}828\left(\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}W_1+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}W_2\right).S\ldots(l)$$

## §. 223. Der Model eines Systemes von zwei Rädern mit Evolventen-Verzahnung.

In §. 203 hat man gesehen, daß der Ort für die Berührungspunkte der Zähne in diesem Falle eine gerade Linie DE ist, welche durch den Berührungspunkt A der Theilkreise geht und die Kreise EF und DG berührt, deren Evolventen die Kurven der Zähne bilden. Nimmt man nun an, die Berührung finde nur hinter der Mittellinie statt, und ist alsdann P irgend eine Lage des Berührungspunktes; so ist die Länge von AP auf der gegebenen Linie AD die in §. 218 mit $\lambda$ bezeichnete Entfernung und der Winkel CAD, der in diesem Falle konstant bleibt, ist der daselbst durch $\vartheta$ dargestellte. Da sich ferner der Berührungspunkt der Zähne gerade so bewegt, wie sich ein Punkt P auf einem biegsamen Faden ED bewegen würde, wenn dieser Faden um die Kreise EF und DG geschlungen wäre und sich von EF ab- und auf DG aufwickelte (s. §. 203); so leuchtet ein, daß der Abstand AP, welchen ein solcher Punkt durchläuft, während sich der Theilkreis AH um den Winkel $\psi$, von der Mittellinie aus, drehet, gleich der Fadenlänge ist, welche sich bei Beschreibung dieses Winkels auf den Kreis DG wickelt, also gleich dem Bogen des Kreises DG, welcher den Winkel $\psi$ überspannt. Bezeichnet man daher den Winkel ACD mit $\eta$, sodaß $\overline{CD}=\overline{CA}.\cos.ACD=r_2\cos\eta$ ist; so hat man $\lambda=r_2\psi\cos\eta$. Substituirt man diesen Werth für $\lambda$ in die Gleichung (254), und bemerkt, daß $\vartheta+\varphi=\frac{\pi}{2}-\eta+\varphi=\frac{\pi}{2}-(\eta-\varphi)$ und daß $\frac{r_2}{r_1}=\frac{n_2}{n_1}$ ist; so erhält man




$$P_1=\frac{a_2r_1}{a_1r_2}\left\{1+\frac{1}{\cos(\eta-\varphi)}\left[\psi\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)\cos\eta.\sin\varphi+\frac{L_1\varrho_1}{a_1r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2r_2}\sin\varphi_2\right]\right\}P_2+\frac{r_1}{a_1}N \ldots \quad (258)$$

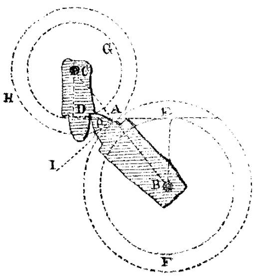
Hieraus ergibt sich ebenso, wie in §. 221 und 222 für den

Model eines Systemes von zwei Rädern mit Evolventenverzahnung bei einer jeden beliebigen Anzahl von Zähnen

$$U_1 = \left\{1 + \frac{1}{\cos(\eta - \varphi)}\left[\pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\cos\eta\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2\right]\right\} U_2 + N.S. \ldots (259)$$

## §. 224. Die Evolventen-Verzahnung vom kleinsten Widerstande.

Es leuchtet ein, daß der Werth von $U_1$ in Gleichung (259)




oder der Werth der Arbeit, welche von der treibenden Kraft geleistet werden muß, um einen gegebenen Nutzeffekt $U_2$ zu liefern, von dem Werthe des Koeffizienten von $U_2$ abhängt, und daß dieser Koeffizient, unter sonst gleichen Umständen, von dem Werthe des Winkels ACD $= \eta$, oder auch von dem Winkel DAI abhängig ist, welchen die Tangente DE an die Grundkreise der Evolventen mit einem Perpendikel AI auf der Mittellinie einschließt. Da ferner der Koeffizient N den Faktor $\eta$ nicht erhält (Gleichung 252); so liegt die Variation des Werthes von $U_1$, soweit dieselbe durch den Winkel $\eta$ bedingt ist, nur in dem Koeffizienten von $U_2$, und dieser Werth wird ein Minimum, wenn der letztere Koeffizient ein solches wird. Der Werth des Winkels $\eta$ nun, welcher jenen Koeffizienten auf sein Minimum reduzirt, ist derjenige, welcher der Bedingung der größten Krafterspazung ein Genüge leistet, und sowol die Neigung DAI der Tangente DE gegen das Perpendikel auf der Mittellinie, wie auch die Halbmesser CD und BE der Grundkreise bestimmt, von welchen die Evolventen erzeugt werden müssen, damit die Verzahnung den geringsten Widerstand leistet.

Zur Ermittelung des Werthes von $\eta$, welcher einem Minimum jenes Koeffizienten entspricht, bezeichne man den Letzteren mit $u$. Der gesuchte Werth von $\eta$ ist alsdann durch die Bedingungen

$$\frac{du}{d\eta} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{d\eta^2} > 0$$

bestimmt. Setzt man der Kürze wegen

$$\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=A,\ \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2=B;$$

so ist

$$u=1+\frac{(A\cos\eta\,.\sin\varphi+B)}{\cos(\eta-\varphi)}$$

$$=1+\frac{B}{\cos(\eta-\varphi)}+\frac{A\sin\varphi\,.\cos\eta}{\cos(\eta-\varphi)}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{du}{d\eta}=\frac{B\sin(\eta-\varphi)}{\cos^2(\eta-\varphi)}-A\sin\varphi\left\{\frac{\sin\eta}{\cos(\eta-\varphi)}-\frac{\cos\eta\,.\sin(\eta-\varphi)}{\cos^2(\eta-\varphi)}\right\}$$

$$=\frac{B\sin(\eta-\varphi)}{\cos^2(\eta-\varphi)}-\frac{A\sin\varphi}{\cos^2(\eta-\varphi)}\{\sin\eta.\cos(\eta-\varphi)-\cos\eta.\sin(\eta-\varphi)\},$$

d. i.

$$\frac{du}{d\eta}=\frac{B\sin(\eta-\varphi)-A\sin^2\varphi}{\cos^2(\eta-\varphi)}\ \ldots.(260)$$

Damit nun $\frac{du}{d\eta}=0$ werde, muß

$$B\sin(\eta-\varphi)-A\sin^2\varphi=0\ \ldots.(261)$$

sein, da der Faktor $\frac{1}{\cos^2(\eta-\varphi)}$ niemals gleich null sein kann (indem sein kleinster Werth die Einheit ist). Bestimmt man aber den Werth von $\eta$ aus der vorstehenden Gleichung; so kommt

$$\sin(\eta-\varphi)=\frac{A}{B}\sin^2\varphi \text{ oder}$$

$$\eta=\varphi+\text{arc.sin.}\left(\frac{A}{B}\sin^2\varphi\right),$$

d. i., wenn man für A und B ihre Werthe wieder einführt,

$$\eta=\varphi+\text{arc.sin}\left\{\frac{\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin^2\varphi}{\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2}\right\}\ \ldots.(262)$$

Ob die Funktion $u$ wirklich ein Minimum zuläßt, welchem dieser Werth von $\eta$ entspricht, zeigt sich, wenn man diesen Werth in $\frac{d^2 u}{d\eta^2}$ substituirt, und alsdann eine absolut positive Größe erhält. Differenzirt man daher Gleichung (260) nochmals; so ergibt sich

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} = \frac{2\sin(\eta-\varphi)}{\cos^3(\eta-\varphi)}[\mathrm{B}\sin(\eta-\varphi)-\mathrm{A}\sin^2\varphi] + \frac{\mathrm{B}}{\cos(\eta-\varphi)}.$$

Nun sieht man aus Gleichung (261), daß der obige Werth von $\eta$ von der Art ist, daß durch eine Substitution desselben in den vorstehenden Ausdruck der Faktor $\mathrm{B}\sin(\eta-\varphi)-\mathrm{A}\sin^2\varphi$ und mithin das ganze erste Glied verschwindet. Damit also der Werth von $\frac{d^2 u}{d\eta^2}$ durchaus positiv werde, ist es bloß erforderlich, daß $\cos(\eta-\varphi)$ positiv sei, indem der konstante Koeffizient $\mathrm{B}$ einen absolut positiven Werth hat; $\cos(\eta-\varphi)$ ist aber positiv, wenn

$$\eta-\varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ oder wenn}$$

$$\mathrm{arc}.\sin\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\sin^2\varphi\right) < \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\sin^2\varphi < 1 \text{ oder } \mathrm{A}\sin^2\varphi < \mathrm{B}, \text{ d. h., wenn}$$

$$\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin^2\varphi < \frac{\mathrm{L}_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{\mathrm{L}_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \quad \ldots . \; (263)$$

ist.

Findet sich diese Bedingung erfüllt; so entspricht der durch Gleichung (262) gegebene Werth von $\eta$ einem wirklichen Minimum der Funktion $u$, und bestimmt die Evolventen-Verzahnung vom kleinsten Widerstande.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (259) und (261) die Größe $\eta$; so findet sich leicht, daß der Model einer Evolventen-Verzahnung, welche der Bedingung der größten Kraftersparung entspricht, durch die Formel

$$U_1 = \{1 + \tfrac{1}{2} A \sin 2\varphi + \sqrt{B^2 - A^2 \sin^4 \varphi}\} U_2 + N.S$$

dargestellt wird. *)

§. 225. **Bestimmung des Verhältnisses, in welchem der Berührungswinkel eines jeden Zahnes durch die Mittellinie getheilt, oder um welches Bogenstück seiner Theilung ein jeder Zahn vor und hinter der Mittellinie getrieben werden sollte, damit die zur**

---

*) Wenn man bei dieser Untersuchung die Gleichung (I) aus der Note zu §. 222 zu Grunde gelegt hätte; so würde

$$A = \pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \text{ und } B = 0{,}828\left[\frac{\varrho_1 \sin \varphi_1}{r_1}(A_1 + B_1) + \frac{\varrho_2 \sin \varphi_2}{r_2}(A_2 + B_2)\right]$$

sein. Ereignete es sich nun, daß B einen negativen Werth $-B'$ hätte; so würden die obigen Bedingungen für ein Minimum der Funktion $u$

$$\eta = \varphi + \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{A}{B}\sin^2\varphi\right) = \varphi + \operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{A}{B'}\sin^2\varphi\right) \text{ und}$$

$$\frac{B}{\cos(\eta - \varphi)} = \frac{-B'}{\cos(\eta - \varphi)} > 0 \text{ oder } \cos(\eta - \varphi) < 0 \text{ werden.}$$

Diesen beiden Bedingungen kann nur durch einen Werth von $\eta - \varphi$ genügt werden, welcher im dritten Quadranten liegt, indem man $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{A}{B'}\sin^2\varphi\right)$ $= \pi + \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{A}{B'}\sin^2\varphi\right)$ und demnach $\eta = \pi + \varphi + \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{A}{B'}\sin^2\varphi\right)$ setzt, wobei es übrigens immer nothwendig ist, daß

$$A \sin^2 \varphi < B'$$

sei.

Da nun aber eine solche Forderung, daß $\eta > \pi$ werde, durchaus nicht erfüllt werden kann, indem $\eta$ bei fortwährender Abnahme der Halbmesser der Grundkreise EF und DG höchstens den Werth $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann, welcher dann stattfinden würde, sobald sich diese Kreise auf ihre Mittelpunkte reduzirten; so folgt, daß es in dem Falle, wo der Koeffizient B negativ $= -B'$ wird, kein Minimum der Funktion $u$ gibt, selbst wenn $A \sin^2 \varphi < B'$ ist, und daß alsdann die größte Kraftersparung mit der Anwendung der kleinsten Grundkreise verbunden sein wird. Die Gränze, welcher der Werth von $U_1$ bei allmähliger Verminderung der Halbmesser dieser Kreise entgegenstrebt, ist für $\eta = \frac{\pi}{2}$, oder wenn die Halbmesser null werden,

$$U_1 = \left(1 + \frac{B}{\sin\varphi}\right) U_2 + N.S = \left(1 - \frac{B'}{\sin\varphi}\right) U_2 + N.S.$$

**Überwindung der Reibung erforderliche Arbeit so gering als möglich werde.**

Nimmt man zuvörderst an, die Anzahlen der Zähne der beiden Räder seien so groß, daß man die Richtung des Druckes zwischen den Zähnen als ein Perpendikel auf der Mittellinie im Punkte A ansehen und demgemäß $\sin(\vartheta + \varphi) = 1$ und die Länge der Linie $\lambda$ gleich der Länge eines Bogenstückes des Theilkreises des getriebenen Rades setzen kann, bezeichnet ferner den Winkel, welchen die Linie CP vom Mittelpunkte C bis zum Berührungspunkte P vor der Mittellinie beschreibt, mit $\psi_1$, und den Bogen, welchen diese Linie hinter der Mittellinie beschreibt, mit $\psi_2$, sodaß $\psi_1 + \psi_2 = \psi$ und die Theilung $r_2 \psi = \frac{2\pi r_2}{n_2}$ oder der Winkel $\psi = \frac{2\pi}{n_2}$ ist; so hat man nach §. 222, wenn man die Arbeit der treibenden Kraft, ehe der Berührungspunkt durch die Mittellinie geht, mit $u_1$, und nachdem derselbe durch die Mittellinie gegangen ist, mit $u_2$ darstellt,

$$u_1 =$$

$$\Big\}1 + \tfrac{1}{2} r_2 \psi_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1} \sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2} \sin\varphi_2 \Big\{ \; P_2 a_2 \psi_1 + N r_2 \psi_1$$

und

$$u_2 =$$

$$\Big\}1 + \tfrac{1}{2} r_2 \psi_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1} \sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2} \sin\varphi_2 \Big\{ \; P_2 a_2 \psi_2 + N r_2 \psi_2.$$

Nimmt man nun an, der Winkel $\psi$ werde durch die Mittellinie so getheilt, daß

$$\psi_1 = x\psi = \frac{2\pi}{n_2} x \text{ und } \psi_2 = (1 - x)\psi = \frac{2\pi}{n_2}(1 - x)$$

sei, substituirt diese Werthe für $\psi_1$ und $\psi_2$ in die vorstehenden Gleichungen, und beachtet, daß $r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right)$ $= \left(\frac{n_2}{n_1} + 1\right)$, daß ferner $P_2 a_2 \psi = U_2$ und $r_2 \psi = S$ ist; so erhält man

$$u_1 =$$

$$\Big\{ 1 + x\pi \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \Big\} x\,U_2 + N\,x\,S,$$

$$u_2 =$$

$$\Big\{ 1 + (1-x)\pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \Big\} (1-x)U_2 + N(1-x)S.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, und setzt die gesammte Arbeit $u_1 + u_2$, welche die treibende Kraft verrichtet, während das getriebene Rad den Winkel $\psi_1 + \psi_2 = \psi$ beschreibt oder während zwei Zähne miteinander in Berührung sind, gleich $U_1$; so kommt

$$U_1 =$$

$$\Big\{ 1 + [x^2 + (1-x)^2]\pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \Big\} U_2 + NS.$$

Dieser Werth für $U_1$ wird ein Minimum, wenn der Koeffizient $x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ ein Minimum wird. Dieses Minimum findet offenbar für $x = \frac{1}{2}$ statt, und es folgt, daß unter den angenommenen Voraussetzungen der Winkel $\psi$ durch die Mittellinie halbirt werden muß, wenn die auf die Reibung zu verwendende Arbeit den geringsten Werth annehmen soll. Der Ausdruck für $U_1$ wird für $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}\psi$

$$U_1 = \Big\{ 1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \Big\} U_2 + NS.$$

Will man den Werth von $x$ mit mehr Genauigkeit bestimmen, und demnach für $\sin(\vartheta + \varphi)$ und $\lambda$ ihre wahren Werthe einführen; so hat man bei einer Verzahnung nach Kreisevolventen $\lambda = r_2\psi\cos\eta$ statt $\lambda = r_2\psi$ zu substituiren, und $\sin(\vartheta + \varphi) = \cos(\eta - \varphi)$ zu setzen, solange die Berührung hinter der Mittellinie stattfindet (§. 223), und $\sin(\vartheta + \varphi) = \cos(\eta + \varphi)$, solange die Berührung vor der Mittellinie stattfindet, weil in dem letzteren Falle $\vartheta$ den stumpfen Winkel **CAP** (§. 219) bezeichnet. Da die Faktoren $\cos\eta$, $\cos(\eta + \varphi)$ und $\cos(\eta - \varphi)$ dieser neu einzuführenden Größen von dem Winkel $\psi$ unabhängig sind; so erhält man ohne Weiteres für die beiden Perioden der Berührung vor und hinter der Mittellinie resp.

$$u_1 = \Big\{ 1 + \frac{1}{\cos(\eta+\varphi)}\left[x\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cos\eta\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2\right]\Big\} \times x\,U_2 + N\,x\,S$$

und

$$u_2 = \Big\{ 1 + \frac{1}{\cos(\eta-\varphi)}\left[(1-x)\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cos\eta\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2\right]\Big\} \times (1-x)\,U_2 + N\,(1-x)\,S$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cos\eta\sin\varphi = a \text{ und}$$

$$\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 = b$$

setzt,

$$u_1 = \Big\{1 + \frac{ax+b}{\cos(\eta+\varphi)}\Big\}\, x\,U_2 + N x S,$$

$$u_2 = \Big\{1 + \frac{a(1-x)+b}{\cos(\eta-\varphi)}\Big\}\,(1-x)\,U_2 + N(1-x)S.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen; so kommt

$$U_1 = \Big\{1 + \frac{ax^2+bx}{\cos(\eta+\varphi)} + \frac{a(1-x)^2+b(1-x)}{\cos(\eta-\varphi)}\Big\}\,U_2 + NS, \ldots (264)$$

eine Formel, wodurch der Model zweier Räder mit Evolventen-Verzahnung dargestellt wird, wenn die Berührung zum Theil vor und zum Theil hinter der Mittellinie stattfindet.

Bezeichnet man den Theil der Arbeit $U_1$, welcher auf die Reibung verwendet wird, mit $u$; so ist

$$u = \Big\{\frac{ax^2+bx}{\cos(\eta+\varphi)} + \frac{a(1-x)^2+b(1-x)}{\cos(\eta-\varphi)}\Big\}\,U_2 + NS.$$

Der Werth von $x$, welcher diese Funktion zu einem Minimum macht, und demnach das Verhältniß bestimmt, in welchem der Berührungswinkel $\psi$ durch die Mittellinie getheilt werden muß, wenn die größte Kraftersparung erzielt werden soll, ergibt sich aus den Bedingungen

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} > 0.$$

Differenziirt man daher die Funktion $u$ zweimal nach $x$; so reduziren sich diese Bedingungen auf

$$2ax \left\} \frac{1}{\cos(\eta+\varphi)} + \frac{1}{\cos(\eta-\varphi)} \right\{ + b \left\} \frac{1}{\cos(\eta+\varphi)} - \frac{1}{\cos(\eta-\varphi)} \right\{ - \frac{2a}{\cos(\eta-\varphi)} = 0 \text{ und}$$

$$2a \left\} \frac{1}{\cos(\eta+\varphi)} + \frac{1}{\cos(\eta-\varphi)} \right\{ > 0.$$

Da $a$ eine absolut positive Größe ist, und auch $\cos(\eta+\varphi)$ und $\cos(\eta-\varphi)$ (welche gleich $\sin(\vartheta+\varphi)$ sind) stets positiv sein werden; so sieht man, daß die zweite Bedingung immer erfüllt sein wird. Aus der ersteren ergibt sich, wenn man mit $\cos(\eta+\varphi) . \cos(\eta-\varphi)$ multiplizirt,

$$2ax\{\cos(\eta-\varphi)+\cos(\eta+\varphi)\}+b\{\cos(\eta-\varphi)-\cos(\eta+\varphi)\} - 2a\cos(\eta+\varphi)=0,$$

d. i.

$$2ax . 2\cos\eta . \cos\varphi + b . 2\sin\eta . \sin\varphi - 2a(\cos\eta\cos\varphi - \sin\eta\sin\varphi) = 0,$$

also

$$x = \tfrac{1}{2} \left\} 1 - \left(1 + \frac{b}{a}\right) \operatorname{tang}\eta . \operatorname{tang}\varphi \right\{.$$

Die Bedingung für die größte Krafterſparung bei der Evolventen-Verzahnung wird also erfüllt, wenn die Zähne zuerst vor der Mittellinie in einem Punkte miteinander in Berührung kommen, dessen Winkelabstand von dieser Linie um den Bruch $\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a}\right)\operatorname{tang}\eta . \operatorname{tang}\varphi$ oder um

$$\frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2}{\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cos\eta . \sin\varphi}\right\} \operatorname{tang}\eta . \operatorname{tang}\varphi \quad \ldots . (265)$$

kleiner ist, als die Hälfte des von der Theilung überspannten Winkels. Die absoluten Größen der beiden Winkelstände $\psi_1$ und $\psi_2$ vor und hinter der Mittellinie sind, wenn der ganze von der

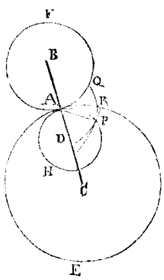
Theilung überspannte Winkel $\psi_1 + \psi_2 = \psi = \frac{2\pi}{n_2}$ gesetzt wird,

$$\psi_1 = \tfrac{1}{2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{b}{a}\right) \operatorname{tang} \eta . \operatorname{tang} \varphi \right\} \frac{2\pi}{n_2},$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{b}{a}\right) \operatorname{tang} \eta . \operatorname{tang} \varphi \right\} \frac{2\pi}{n_2}.$$

### §. 226. Der Model eines Systemes von zwei Rädern mit Epizykloiden-Verzahnungen.

Der Ort für die Berührungspunkte P zweier solcher Zähne ist hier offenbar der erzeugende Kreis APH des epizykloidischen Kopfes des Einen und der hypozykloidischen Seite des anderen Zahnes (§. 204), und demnach ist der Abstand AP des Berührungspunktes P der Zähne von A, welcher in Gleichung (255) mit $\lambda$ bezeichnet ist, gleich der Sehne des Bogens AP, den der erzeugende Kreis beschreiben würde, wenn er sich durch die gemeinschaftliche Berührung mit den Theilkreisen bei A um seinen Mittelpunkt D drehete, während der Theilkreis AE den Winkel ACP beschriebe. Bezeichnet man den Winkel, welchen das getriebene Rad C in der Zeit beschreibt, wo der Berührungspunkt P der Zähne aus der Mittellinie in die Lage der obigen Figur übergeht, mit $\psi$; so ist der Bogen des Theilkreises dieses Rades, welcher während derselben Zeit durch den Punkt A geht, gleich $r_2 \psi$. Da sich nun der erzeugende Kreis APH gleichzeitig mit herumgedrehet hat; so ist auch von seinem Umfange ein gleicher Bogen $AP = r_2 \psi$ durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt A gegangen. Setzt man daher den Halbmesser des erzeugenden Kreises $= r$; so ist der von dem Bogen AP überspannte Winkel $ADP \frac{AP}{r} = \frac{r_2}{r} \psi$ oder $= 2i\varphi$, wenn




man das Verhältniß $\frac{r_2}{r}$ des Halbmessers des Theilkreises des getriebenen Rades zu dem Halbmesser des erzeugenden Kreises durch $2i$ darstellt. Hieraus folgt für die Länge der Sehne AP

$$AP = 2\overline{AD}.\sin\tfrac{1}{2}ADP \text{ d. i.}$$

$$\lambda = 2r\sin i\psi = \frac{r_2}{i}\sin i\psi.$$

Substituirt man diesen Werth von $\lambda$ in die Gleichung (255), beachtet dabei, daß der Winkel $PAD = \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}ADP = \frac{\pi}{2} - i\psi$, also $\vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2} - (i\psi - \varphi)$ und daß der ganze Winkel $\psi$, durch welchen sich das getriebene Rad während der Berührung eines jeden seiner Zähne bewegt, $= \frac{2\pi}{n_2}$ ist; so hat man, da die Berührung nur hinter der Mittellinie stattfinden soll,

$$U_1 = P_2 a_2 \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \left\{ 1 + \frac{1}{\cos(i\psi - \varphi)} \left[ \frac{r_2}{i}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \sin\varphi.\sin i\psi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \right] \right\} d\psi + N.S,$$

oder wenn man $L_1$ und $L_2$ während der Berührung irgend zweier Zähne als konstant annimmt, und

$$\frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 = B$$

setzt auch für $\frac{r_2}{r_1}$ seinen Werth $\frac{n_2}{n^1}$ einführt,

$$U_1 = P_2 a_2 \left\{ \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} d\psi + B\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)} + \frac{1}{i}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\sin\varphi \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{\sin i\psi . d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)} \right\} + N.S.$$

Nun hat man zuvörderst

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} d\psi = \frac{2\pi}{n_2}.$$

Da nach einer bekannten Integrationsformel

$\int \frac{dx}{\cos x} = \text{Const} + \log . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ ist; so hat man ferner

$$\int \frac{d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)} = \frac{1}{i}\int \frac{d(i\psi - \varphi)}{\cos(i\psi - \varphi)} = \text{Const.} + \frac{1}{i}\log.\operatorname{tang}\left\{\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(i\psi - \varphi)\right\},$$

und demnach

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)} = \frac{1}{i}\log \frac{\operatorname{tang}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(i\frac{2\pi}{n_2} + \varphi\right)\right\}}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Endlich ist

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{\sin i\psi . d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)} = \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{\sin\{(i\psi - \varphi) + \varphi\}. d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)}$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{\{\sin(i\psi - \varphi).\cos\varphi + \cos(i\psi - \varphi).\sin\varphi\}\, d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)}$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \{\cos\varphi.\operatorname{tang}(i\psi - \psi) + \sin\varphi\}\, d\psi = \frac{1}{i}\cos\varphi \int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \operatorname{tang}(i\psi - \varphi).d(i\psi - \varphi)$$

$$+ \frac{2\pi}{n_2}\sin\varphi.$$

Nach einer anderen bekannten Formel ist aber

$$\int \operatorname{tang} x . dx = \text{Const.} - \log . \cos x, \text{ also}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \operatorname{tang}(i\psi - \varphi).d(i\psi - \varphi) = \text{Const.} - \log.\cos(i\psi - \varphi);$$

demnach

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \operatorname{tang}(i\psi - \varphi).d(i\psi - \varphi) = -\log \frac{\cos\left(i\frac{2\pi}{n_2} - \varphi\right)}{\cos\varphi} \text{ und}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n_2}} \frac{\sin i\psi . d\psi}{\cos(i\psi - \varphi)} = -\frac{1}{i}\cos\varphi \cdot \log\frac{\cos\left(i\frac{2\pi}{n_2} - \varphi\right)}{\cos\varphi} + \frac{2\pi}{n_2}\sin\varphi.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Formel für den Model des Systemes, und beachtet, daß die verrichtete Nutzarbeit $U_2 = P_2 a_2 . \frac{2\pi}{n_2}$, also $P_2 a_2 = \frac{n_2}{2\pi} U_2$ ist; so ergibt sich

$$U_1 =$$

$$\left\{1 + \frac{n_2}{(2i\pi)}\left[B\log\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i\pi}{n_2} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} - \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\sin\varphi . \left(\frac{\cos\varphi}{i}\log\frac{\cos\left(\frac{2i\pi}{n_2} - \varphi\right)}{\cos\varphi} - \frac{2\pi}{n_2}\sin\varphi\right)\right]\right\} U_2$$

$$+ N . S \ldots . (266)$$

Nun ist

$$\log\frac{\cos\left(\frac{2i\pi}{n_2} - \varphi\right)}{\cos\varphi} = \log\frac{\cos\frac{2i\pi}{n_2} . \cos\varphi + \sin\frac{2i\pi}{n_2} . \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \log\left\{\cos\frac{2i\pi}{n_2}\left(1 + \operatorname{tang}\frac{2i\pi}{n_2} . \operatorname{tang}\varphi\right)\right\}$$

$$= \log . \cos\frac{2i\pi}{n_2} + \log\left(1 + \operatorname{tang}\frac{2i\pi}{n_2}\operatorname{tang}\varphi\right),$$

oder wenn man das zweite Glied in die logarithmische Reihe entwickelt,

$$= \log . \cos\frac{2i\pi}{n_2} + \operatorname{tang}\frac{2i\pi}{n_2} . \operatorname{tang}\varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\frac{2i\pi}{n_2} . \operatorname{tang}^2\varphi + \text{ etc.}$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung, und vernachlässigt Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\operatorname{tang}\varphi$ und $\sin\varphi$; so kommt

$$U_1 =$$

$$\left\{1 + \frac{n_2}{2i\pi}\left[B\log\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i\pi}{n_2} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{1}{2i}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\sin 2\varphi . \log . \cos\frac{2i\pi}{n_2}\right]\right\} U_2$$

$$+ NS \ldots . (267)$$

In allen diesen Gleichungen bedeutet log einen natürlichen Logarithmus, der mit 2,3026 zu multipliziren ist, wenn er aus den gewöhnlichen Tafeln genommen werden soll.

§. 227. Wenn der Halbmesser $r$ des erzeugenden Kreises gleich der Hälfte des Halbmessers des Theilkreises des getriebenen Rades ist, wie Dies sehr häufig stattfindet (§. 205 und 212); so wird $i = \frac{1}{2}\frac{r_2}{r} = \frac{1}{2}\frac{2r}{r} = 1$. In diesem Falle also, wo die Seiten der Zähne des getriebenen Rades gerade werden, hat man für den Model die Gleichung

$$U_1 =$$

$$\left\{1+\frac{n_2}{2\pi}\left[B\log\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)\sin 2\varphi\,.\log.\cos\frac{2\pi}{n_2}\right]\right\}U_2$$

$$+NS \ldots. (268)$$

§. 228. In Gleichung (267) ist

$$\log\frac{\tan\left\{\frac{\pi}{4}+\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right\}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}=\log.\tan\left\{\frac{\pi}{4}+\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right\}-\log.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=\log\frac{1+\tan\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)}-\log\frac{1-\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan\frac{\varphi}{2}},$$

oder wenn man die Logarithmen in Reihen entwickelt,

$$=2\tan\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)+2\tan\frac{\varphi}{2}+\frac{2}{3}\tan^3\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{2}{3}\tan^3\frac{\varphi}{2}+\text{etc.}$$

Nimmt man nun an, daß die Anzahl $n_2$ der Zähne des getriebenen Rades so groß sei, daß die dritte und alle höheren Potenzen von $\tan\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)$ gegen die erste vernachlässigt werden können, und läßt man alle höheren Potenzen von tang $\frac{\varphi}{2}$ weg; so kann man

$$\log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}=2\left\}\operatorname{tang}\left(\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right\{$$

setzen. Dieser Ausdruck wird übrigens gleich $\frac{2i\pi}{n_2}$, wenn man die beiden Bogen $\frac{i\pi}{n_2}-\frac{\varphi}{2}$ und $\frac{\varphi}{2}$ so klein annimmt, daß sie ihren Tangenten gleichgesetzt werden können. Unter diesen Voraussetzungen kann man denn auch in dem Ausdrucke

$$\cos\frac{2i\pi}{n_2}=1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2i\pi}{n_2}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{2i\pi}{n_2}\right)^4-\text{ etc.}$$

die vierte und alle höheren Potenzen von $\frac{2i\pi}{n_2}$ vernachlässigen, und

$$\cos\frac{2i\pi}{n_2}=1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2i\pi}{n_2}\right)^2$$

setzen. Entwickelt man den Logarithmus dieses Ausdruckes, und vernachlässigt in der entstehenden Reihe wiederum die vierte und alle höheren Potenzen von $\frac{2i\pi}{n_2}$; so erhält man als Näherungswerth

$$\log.\cos\frac{2i\pi}{n_2}=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2i\pi}{n_2}\right)^2.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (267); so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$U_1=\left\}1+B+\tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin 2\varphi\right\{U_2+NS,$$

oder wenn man für **B** seinen Werth wieder einführt, und wegen der Kleinheit von $\sin\varphi$ die Größe $\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\sin\varphi$ setzt,

$$U_1=\left\}1+\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi+\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2\right\{U_2+NS \quad \ldots .(269)$$

In dieser Formel besteht also der Model zweier Räder mit Epizykloiden-Verzahnung, wenn die Anzahl $n_2$ der Zähne des getriebenen Rades beträchtlich ist (vergl. Gleichung 257).

Es leuchtet ein, daß der Werth von $U_1$ in der Gleichung (267) ein Minimum in Beziehung zu $i$ zuläßt. Man sieht also, daß es eine bestimmte Beziehung zwischen dem Halbmesser des erzeugenden Kreises des treibenden Rades und dem Halbmesser des Theilkreises des getriebenen Rades gibt, welche bei der Beschreibung der epizykloidischen Köpfe und der hypozykloidischen Seiten der Radzähne beobachtet werden müßte, damit die Räder mit dem geringsten Kraftaufwande arbeiten könnten. Dieser Werth von $i$ kann dadurch bestimmt werden, daß man den Differenzialkoeffizienten von $U_1$ aus Gleichung (267) in Beziehung zu $i$ gleich null setzt, und die sich ergebende transzendente Gleichung durch Näherungsmethoden auflöst.

## §. 229. Der Model für die verzahnte Stange mit dem Getriebe.

Wenn der Halbmesser $r_2$ des Theilkreises des getriebenen Rades **unendlich** wird, während der Halbmesser $r_1$ des treibenden Rades endlich bleibt; so geht das System der beiden Räder in das einer verzahnten Stange mit einem Getriebe über (§. 215). Um den Model für das letztere zu bestimmen, so braucht man für den Fall, daß die Zähne von einer beliebigen Form, aber auf dem Getriebe von beträchtlicher Anzahl seien, und für den Fall, daß dieselben nach Evolventen oder Epizykloiden gebildet, und auf dem Getriebe in beliebiger Menge vorhanden seien, in den bereits bestimmten Modeln für diese Fälle der Größe $r_2$ nur einen unendlichen Werth beizulegen. Ebenso ist $n_2 = \infty$ zu setzen. Hinsichtlich der Epizykloiden-Verzahnung muß jedoch noch bemerkt werden, daß wenn auch $r_2$ und $n_2$ unendlich werden, das Verhältniß $\frac{r_2}{n_2}$ einen endlichen Werth $= \frac{r_1}{n_1}$ behält (Gleichung 232) sodaß $\frac{i}{n_2} = \frac{1}{2}\,\frac{r_2}{n_2 r} = \frac{1}{2}\,\frac{r_1}{n_1 r} = \frac{i_1}{n_1}$ wird, wenn man $\frac{r_1}{r}$ durch $2i_1$ bezeichnet. Nimmt man daher in den Gleichungen (257), (259) und (267) $n_2$ und $r_2$ unendlich groß an, und substituirt in Gleichung (267) $\frac{i_1}{n_1}$ für $\frac{i}{n_2}$; so erhält man für den Model der verzahnten Stange mit dem Getriebe

1) wenn die Zähne sehr klein sind, welches auch ihre Formen sein mögen, vorausgesetzt, daß sie gehörig ineinandergreifen,

$$U_1 = \left\{1 + \frac{\pi}{n_1}\sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1\right\} U_2 + NS; \ldots . (270)$$

2) wenn die Zähne nach Evolventen gebildet sind, welches auch ihre Dimensionen sein mögen,

$$U_1 = \left\{1 + \frac{1}{\cos(\eta-\varphi)}\left(\frac{\pi}{n_1}\cos\eta . \sin\varphi + \frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1\right)\right\} U_2 + NS \ldots . (271)$$

(verg. die Figuren zu §. 215; in Figur 2 würde man $\eta = 0$, also $\cos(\eta - \varphi) = \cos\varphi$ und $\cos\eta = 1$ haben)

3) wenn die Zähne nach Zykloiden und Epizykloiden gebildet sind (§. 216)

$$U_1 = \left\{1 + \frac{n_1}{2 i_1 \pi}\left[\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 . \log \frac{\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i_1\pi}{n_1} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{\sin 2\varphi}{2 i_1}\log.\cos\left(\frac{2 i_1 \pi}{n_1}\right)\right]\right\} U_2 + N.S, \ldots . (271a)$$

indem der Koeffizient $\frac{1}{2i}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)$ aus Gleichung (267)

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{i} + \frac{n_2}{i n_1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{i} + \frac{n_1}{i_1 n_1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i_1}\right) = \frac{1}{2 i_1}$$

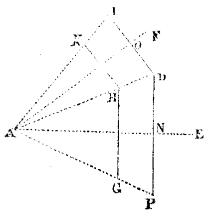
wird, da $i$ unendlich ist.

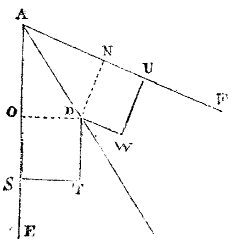
Der Werth für N wird in einem jeden Falle erhalten, wenn man in dem Ausdrucke (252) $r_2$ unendlich groß und $\varrho_2 = 0$ annimmt. Hierbei ist übrigens die Reibung der Stange in den Führungen nicht mit berücksichtigt.

## Konische Räder.

§. 230. Diese Räder dienen dazu, um eine Umdrehungsbewegung von irgend einer gegebenen Axe auf eine andere zu übertragen, welche sich gegen die erstere unter einem beliebigen Winkel neigt.

Ist daher **AF** eine Axe, welcher eine Umdrehungsbewegung von der Axe **AE**, die sich unter dem Winkel **EAF** gegen jene neigt, mitgetheilt werden soll; so theile man den Winkel **EAF** durch die gerade Linie **AD** so, daß die Perpendikel **DO** und **DN** von irgend einem Punkte **D** dieser Linie auf **AF** und **AE** in demselben Verhältnisse zueinander stehen, wie die Anzahlen der Zähne, welche die Räder erhalten müssen. (Diese Theilung geschieht, indem man auf den Linien **AE** und **AF** die Perpendikel **ST** und **UW** errichtet, die Längen derselben so nimmt, daß sie sich wie die Anzahlen der den Rädern zu gebenden Zähne verhalten, und durch die Endpunkte **T** und **W** Parallelen resp. zu **AE** und **AF** zieht, welche sich bei **D** in einem Punkte schneiden, durch welchen die gesuchte Theilungslinie **AD** des Winkels **EAF** gehen muß.)



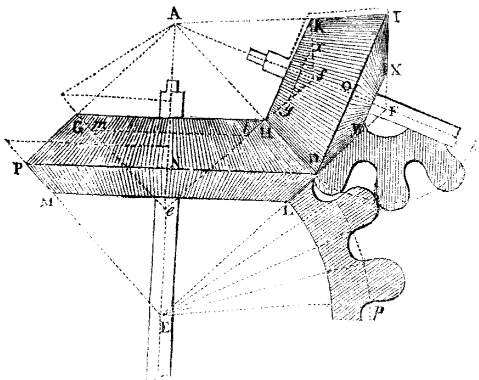

Denkt man sich nun durch die Umdrehung der Linie **AD** um **AE** Einen und durch die Umdrehung derselben Linie **AD** um **AF** einen anderen Kegel erzeugt, und nimmt an, daß sich diese beiden Kegel vermöge ihrer gegenseitigen Berührung um die festen Axen **AE** und **AF** dreheten; so würden ihre Oberfläche längs der ganzen Berührungslinie **AD** dergestalt aufeinander rollen, daß kein Theil der Oberfläche des Einen auf der des anderen glitte, und daß demnach die ganze Fläche des Einen Kegels, welche in einer gegebenen Zeit durch die Berührungslinie **AD** ginge, gleich der ganzen Fläche des anderen Kegels wäre, welche in derselben Zeit durch diese Linie ginge. Denn es leuchtet ein, daß wenn das $n_1$ fache des Umfanges des Kreises **DP** gleich dem $n_2$ fachen des Umfanges des Kreises **DI** wäre, und beide Kreise dreheten sich vermöge ihrer gegenseitigen Berührung bei **D** um ihre Mittelpunkte **N** und **O**, indem sie die obigen Kegel mit sich herumführten, der Kegel **DAP** $n_1$ Umdrehungen machen würde, während der Kegel **DAI** deren $n_2$ machte, und daß sich ebenso ein jeder Kreisdurchschnitt **G***H* des ersteren Kegels $n_1$ mal um sich selbst drehen würde, während sich der entsprechende Kreisdurchschnitt **HK** des letzteren Kegels $n_2$ mal um sich selbst drehete. Das $n_1$ fache des Umfanges von **GH** ist aber gleich dem $n_2$ fachen des Umfanges von **HK**, weil sich die Halbmesser dieser Kreise gerade so verhalten, wie die Halbmesser der Kreise **DP** und **DI**, und man sieht, daß auch die ersteren Kreise **GH** und **HK** aufeinander rollen und niemals gleiten werden. Da Dies von jeden zwei zusammengehörigen Kreisdurchschnitten der beiden Kegel gilt; so folgt, daß ihre ganzen Oberflächen durch die gegenseitige Berührung aufeinander rollen werden und daß keine Theile derselben aufeinander gleiten können, während die übrigen eine rollende Bewegung haben.

Hiernach könnte die Umdrehungsbewegung der Einen Axe der anderen durch das Übereinanderherrollen zweier solcher Kegel mitgetheilt werden, indem die Oberfläche des Einen Kegels die des anderen vermöge der gegenseitigen Reibung in der Berührungslinie **AD** mit sich herumführte, vorausgesetzt, daß die beiden Flächen so stark gegeneinander gepreßt werden könnten, wie es zur Hervorbringung einer Reibung erforderlich wäre, welche dem Drucke gleichkäme, unter dem die Bewegung mitgetheilt oder die Arbeit übergeführt werden müßte. In einem solchen Falle würde sich die Winkelgeschwindigkeit der beiden Axen offenbar umgekehrt zu einander verhalten, wie die Umfänge irgend zweier zusammengehöriger Kreisdurchschnitte **DP** und **DI** der Kegel, oder umgekehrt, wie ihre Halbmesser **ND** und **OD** (Gleichung 232), das heißt (nach der Konstruktion) umgekehrt, wie die Anzahlen der Zähne, welche den Rädern gegeben werden sollen.

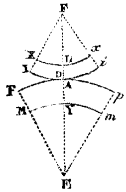
Wenn die Bewegung übrigens unter einem bedeutenden Drucke übergeführt werden muß; so wird die Reibung zweier solcher Kegel unzureichend, und es ist nothwendig, die Fortpflanzung der Bewegung durch konisch gebildete Zähne oder sogenannte Kämme zu vermitteln. Die charakteristische Eigenschaft solcher Kämme besteht darin, daß sie die Bewegung vermöge ihrer gegenseitigen Berührung, gerade so überführen, wie Dies durch die fortwährende Berührung der Kegeloberflächen geschehen würde. Die verzahnten Räder, welche zur Umsetzung einer Rotationsbewegung von der Einen Axe auf eine andere gegen jene geneigte Axe dienen, heißen auch wol *Kammräder*, zum Unterschied von den früher behandelten, sogenannten *Stirnrädern*, welche die Bewegung nur zwischen parallelen Axen fortpflanzen.

## §. 231. Konstruktion der Kämme.

Durch den Punkt D (s. den vorhergehenden Paragraph) ziehe man die Linie EDF perpendikular auf AD und verlängere dieselbe auf beiden Seiten so weit, daß sie die Axen AE und AF der beiden Kegel in E und F schneidet. Alsdann denke man sich durch die Umdrehung der beiden Linien DE und DF resp. um AE und AF zwei Kegelflächen erzeugt, und durch Ebenen LM




und XY, welche resp. auf den Axen AE und AF perpendikular stehen, abgestumpft, sodaß die Seiten DL und DY dieser abgestumpften Kegel resp. den Höhen gleichkommen, welche die Radkränze bis zu den Umfängen der Theilkreise erhalten werden.




Nimmt man nun an, die konischen Flächen LDPM und XIDY seien in einer auf AD im Punkte D perpendikular stehenden Ebene ausgebreitet; so werden dieselben die Oberflächen MP$pm$ und IX$xi$ (s. die seitstehende Figur) von Ausschnitten zweier ebener Ringe darstellen, deren Mittelpunkte in den Punkten E und F der Axen AE und AF liegen, deren äußere

Halbmesser resp. die Theile **ED** und **FD** der Linie **EF** sind, und welche sich in dem Punkte **D** der Berührungslinie der vorhin beschriebenen Kegel berühren.

Über den in Einer Ebene liegenden Kreisen **P**$p$ und **I**$i$ beschreibe man nun Zähne, welche diese Kreise gerade so herumbewegen würden, wie Dies durch die gegenseitige Berührung in **D** geschehen würde, d. h. man nehme die Kreise **P**$p$ und **I**$i$ zu Theilkreisen von Stirnrädern an, und verzeichne die Zähne nach Einer der früher angeführten Methoden. Hierbei ist die Theilung, welche für beide Kreise gleich sein muß, natürlich so zu wählen, daß auf die Kreisbögen **P**$p$ und **I**$i$ ebenso viel Zähne zu liegen kommen, wie resp. die konischen Räder **HP** und **HI** enthalten sollen.

Nachdem man auf eine biegsame Fläche so viel der ersteren Zähne verzeichnet hat, wie zur Herstellung einer Schablone erforderlich sind, biege man dieselbe über die konische Fläche **DLMP**, und zeichne die Umrisse der Zähne auf der letzteren ab. In ähnlicher Weise verfahre man mit der konischen Fläche **DIXY**. Hierauf nehme man **DH** gleich der Länge der konischen Zähne oder Kämme, ziehe durch **H** die Linie $ef$ perpendikular zu **AD**, und begränze die Räder an dieser Seite durch die konkaven konischen Flächen **HG**$ml$ und **HK**$xy$, welche in derselben Weise konstruirt werden, wie die koveren konischen Begränzungsflächen an der anderen Seite. Endlich verfahre man bei der Konstruktion der Schablonen zu den Umrissen der Kämme am oberen Ende der Räder genau so, wie bei den Schablonen zu den Kämmen am unteren Ende, und zeichne dieselben auf den oberen konischen Begränzungsflächen ab, indem man dafür Sorge trägt, daß ähnliche Punkte der Verzahnungen an beiden Enden immer in Ein und derselben durch den Punkt **A** gehenden geraden Linie liegen. Die nach dem Vorstehenden auf den Endflächen der Räder verzeichneten Umrisse ergeben die äußersten Begränzungen der Kämme, und dienen dem Maschinenarbeiter zu einer genauen Richtschnur beim Einschneiden derselben.

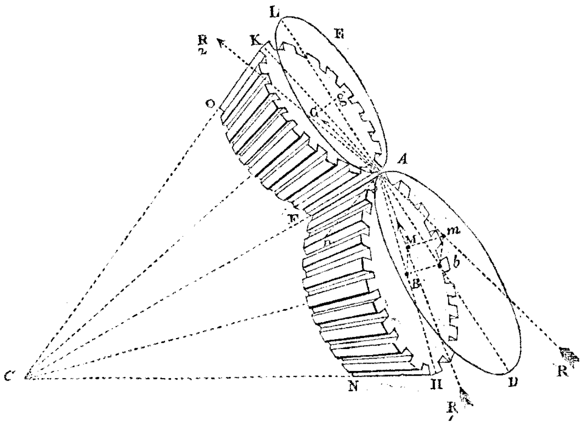
## §. 232. Beweis, daß so konstruirte Kämme gehörig ineinander greifen.

Wenn man sich in der durch **D** gehenden und auf **AD** perpendikular stehenden Ebene (s. die Figur zu §. 231) zwei ungemein dünne Räder denkt, deren Mittelpunkte in **E** und **F** liegen, und welche in der vorhin beschriebenen Weise mit Verzahnungen versehen sind; so werden diese Räder offenbar gehörig ineinandergreifen, und das Verhältniß ihrer Winkelgeschwindigkeit wird das Umgekehrte des Verhältnisses von **ED** zu **FD** oder von **ND** zu **OD**, also ein Verhältniß sein, wie es verlangtermaaßen den konischen Rädern zukommen soll.

Nun leuchtet ein, daß sich der Theil von einer jeden der beiden konischen Flächen **DPML** und **DIXY**, welcher in irgend einem Augenblicke durch die Linie **LY** geht, momentan in der Perpendikularebene auf **AD**, die durch den Punkt **D** geht, bewegt, indem sich die Eine Fläche während dieses kurzen Zeitmomentes um den Mittelpunkt **E** und die andere um den Mittelpunkt **F** drehet. Diejenigen Theile der Kämme der konischen Räder, welche in diesen beiden Endflächen liegen, treiben einander also in dem Augenblicke, wo sie durch die Linie **LY** gehen, in der gewünschten Weise, wenn sie nach den Formen gebildet sind, welche Zähne von Stirnrädern haben müssen, die sich in der oben erwähnten Perpendikularebene auf **AD** um die Mittelpunkte **E** und **F** drehen sollen. Diese Formen sind es aber, nach welchen die Kämme wirklich eingeschnitten sind. Diejenigen Theile der Kämme, welche in den konischen Flächen **DPML** und **DIXY** liegen, greifen also gehörig in einander, sowie sie durch die Linie **LY** gehen, und mithin auch in sehr kleinen Abständen zu beiden Seiten dieser Linie. Da nun irgend zwei Kämme nur auf sehr kleine Entfernungen von der Linie **LY** miteinander in Berührung bleiben; so folgt, daß die in den konischen Flächen **DM** und **DX** liegenden Theile der Kämme gehörig zusammenarbeiten. Hieraus folgt aber auch, daß die ganzen Oberflächen der Kämme, welche in der obigen Weise konstruirt sind, gehörig ineinander greifen werden, da man sich dieselben durch eine unendliche Menge der **DM** und **DX** paralleler und ähnlicher konischen Flächen in ungemein schmale Elemente zerlegt denken kann, von denen sich Dasselbe sagen läßt, wie von den Theilen, welche bei der Umdrehung der Räder nachundnach durch die Linie **DY** gehen.

## §. 233. Der Model eines Systemes von zwei konischen Rädern.

Die Kräfte $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ seien an den in der Figur dargestellten konischen Rädern in den perpendikularen Abstände $a_1$ und $a_2$ von ihren Axen **CB** und **CG** angebracht, die Länge **AF** der Kämme sei gleich $b$, der Abstand irgend eines Punktes dieser Linie **AF** vom Punkte **F** werde mit $x$ bezeichnet, und man nehme an, die ganze Länge $\mathbf{AF} = b$ sei in eine unendlich große Anzahl




gleicher Theile getheilt, von denen ein jeder durch $\triangle x$ dargestellt werde. Denkt man sich alsdann durch einen jeden dieser Theilpunkte Perpendikularebenen zu den Axen **CB** und **CG** der Räder gelegt, welche ein jedes Rad in sehr dünne Elemente oder Scheiben von gleicher Stärke theilen, und nimmt an, die Kräfte $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ seien auf diese Scheiben gleichmäßig vertheilt; so wird eine jede Theilkraft für das Rad **B** durch $\frac{\mathbf{P}_1}{b} \triangle x$ und für das Rad **G** durch $\frac{\mathbf{P}_2}{b} \triangle x$ dargestellt sein. Bezeichnet man hiernach die an den äußersten Scheiben **AH** und **AK** wirkenden Kräfte mit $p_1$ und $p_2$, und nimmt an, daß sich dieselben in diesen Querschnitten der Räder, unabhängig von den übrigen Kräften, im Gleichgewichte erhalten, stellt alsdann mit **R** den Druck dar, welcher sich zwischen den Berührungsflächen der Kämme längs der sehr kurzen Linie äußert, die innerhalb der gedachten Scheiben liegt, und mit $R_1$ und $R_2$ die Komponenten des Druckes R in den Richtungen der Ebenen AH und AK, sodaß $R_1$ oder $R_2$ erhalten wird, jenachdem man R in zwei Kräfte parallel und perpendikular zu AH oder in zwei Kräfte parallel und perpendikular zu AK zerlegt; so müssen sich die Kräfte $p_1$ und $R_1$ an der Scheibe AH und die Kräfte $p_2$ und $R_2$ an der Scheibe AK im Gleichgewichte erhalten. Setzt man daher, wie in §. 218, die Perpendikel von B und G auf die Richtungen von $R_1$ und $R_2$ gleich $m_1$ und $m_2$ und die Abstände zwischen den Fußpunkten der Perpendikel $a_1$, $m_1$ und $a_2$, $m_2$ gleich $L_1$ und $L_2$; so hat man nach den Gleichungen (241) und (242), wenn man die Gewichte der Räder vernachlässigt,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{a_1}\left\{m_1 + \left(\frac{\varrho_1 L_1}{a_1}\right)\sin\varphi_1\right\} R_1, \\ p_2 &= \frac{1}{a_2}\left\{m_2 - \left(\frac{\varrho_2 L_2}{a_2}\right)\sin\varphi_2\right\} R_2, \end{aligned}\right\} \ldots . (272)$$

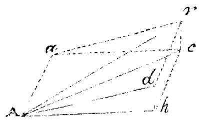
worin $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Halbmesser der Axen der beiden Räder und $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die denselben entsprechenden Reibungswinkel bezeichnen.

Stellen nun $\gamma_1$ und $\gamma_2$ die Neigungen der Richtung von R gegen die Ebenen AH und AK dar; so ist

$$R_1 = R\cos\gamma_1 \text{ und } R_2 = R\cos\gamma_2.$$

In dem vorhergehenden Paragraphe ist gezeigt, daß die Wirkung des Theiles der Oberfläche der Kämme, welcher die Begränzung einer jeden der Scheiben AH und AK bildet, dieselbe ist, wie die Wirkung von Zähnen, welche dieselbe Form und Theilung haben und auf zwei sehr schmalen Stirnrädern AD und AL eingeschnitten sind, welche in einer auf AC perpendikularen Ebene EAD liegen und deren Mittelpunkte die Durchschnittspunkte $b$ und $g$ dieser Ebene mit den Axen CB und CG sind. Die Richtung des elementaren Druckes R zwischen den Kämmen liegt demnach in der Ebene EAD, und wenn dieselbe mit der Mittellinie DL der beiden Kreise EA und AD zusammenfiele; so würden ihre Neigungswinkel gegen die Ebenen AH und AK durch DAH und LAK oder durch ACB und ACG dargestellt werden.

Die Richtung von **R** neigt sich übrigens in allen Fällen gegen die Mittellinie unter einem gewissen Winkel, der nach §. 218 und 219 in einer jeden Lage der Zähne der beiden Stirnräder durch $\vartheta + \varphi$ dargestellt wird, worin $\vartheta$ die Neigung der Linie $\lambda$, welche man sich von dem Berührungspunkte **A** der Theilkreise nach dem Berührungspunkte der Zähne gezogen denkt, gegen den Halbmesser $\mathbf{A}g$ des getriebenen Rades und $\varphi$ den Reibungswinkel zwischen den Oberflächen der Zähne bezeichnet. Um die Neigung $\gamma_1$ von **RA** gegen die Ebene des Kreises **AH** zu bestimmen, nachdem man weiß, daß ihre Neigung **RAD** gegen die Mittellinie gleich $\vartheta + \varphi$ und daß die Neigung der Ebene **AD**, in welcher die Kraft **R** wirkt, gegen die Ebene **AH** gleich $\mathbf{DAH} = \mathbf{ACB} = \iota_1$ ist; so stelle in der seitstehenden Figur $\mathbf{A}a$ die Durchschnittslinie der Ebenen **AD** und **AH** dar, sodaß $\mathbf{A}ard$ einen Theil der ersteren und $\mathbf{A}ach$ einen Theil der letzteren Ebene bildet. Ferner sei $\mathbf{A}r$ die Richtung des Druckes **R** in der ersteren Ebene und $\mathbf{A}d$ und $\mathbf{A}h$ seien Theile der Linien **AD** und **AH** aus der vorhergehenden Figur. Fällt man von $r$ das Perpendikel $rc$ auf die Ebene $\mathbf{A}ach$, zieht $rd$ und $ch$ parallel zu $\mathbf{A}a$ und verbindet die Punkte $d$ und $h$ durch die Linie $dh$; so ist $r\mathbf{A}c$ der Neigungswinkel $\gamma_1$ der Richtung von **R** gegen die Ebene **AH**, $d\mathbf{A}r$ der Neigungswinkel $\vartheta + \varphi$ von **AR** gegen **AD** und $d\mathbf{A}h$ der Neigungswinkel $\iota_1$ der Ebenen **AD** und **AH** gegeneinander. Endlich steht $rd$ auf der Ebene $\mathbf{A}hd$ perpendikular, weil $a\mathbf{A}$ ein Perpendikel auf dieser Ebene bildet. Hiernach hat man




$$rc = \overline{\mathbf{A}r}\sin\gamma_1 = \frac{\overline{\mathbf{A}d}}{\cos(\vartheta + \varphi)}.\sin\gamma_1, \text{ ferner}$$

$$rc = hd = \overline{\mathbf{A}d}.\sin\iota_1; \text{ mithin}$$

$$\frac{\overline{\mathbf{A}d}}{\cos(\vartheta + \varphi)}\sin\gamma_1 = \overline{\mathbf{A}d}.\sin\iota_1 \text{ und}$$

$$\sin\gamma_1 = \cos(\vartheta + \varphi).\sin\iota_1.$$

Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, daß

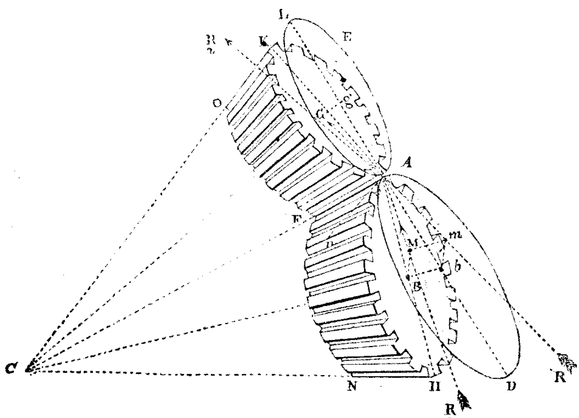
$$\sin\gamma_2 = \cos(\vartheta + \varphi).\sin\iota_2$$

ist, wenn $\iota_2$ den Neigungswinkel $KAL = ACG$ der Ebenen AE und AK gegeneinander bezeichnet.

Aus diesen und den vorhergehenden Beziehungen folgt

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R\cos\gamma_1 = R\sqrt{1-\cos^2(\vartheta+\varphi).\sin^2\iota_1} \\ R_2 &= R\cos\gamma_2 = R\sqrt{1-\cos^2(\vartheta+\varphi).\sin^2\iota_2} \end{aligned}\right\}\dots.(273)$$

Fällt man von dem Mittelpunkte $b$ des Kreises AD auf RA das Perpendikel $bm$; so ist das Perpendikel BM von dem Mittelpunkte B des Kreises AH auf die Richtung der Kraft $R_1$ die Projektion von $bm$ auf die Ebene des Kreises AH. Um die Neigung von $bm$ gegen die Ebene AH zu bestimmen, so ziehe man A$n$ parallel zu $bm$; alsdann ergibt sich für den Sinus des Neigungswinkels von A$n$ gegen die Ebene AH der Ausdruck




$\cos DAn.\sin\iota_1$ auf demselben Wege, auf welchem man den Ausdruck $\cos DAm.\sin\iota_1$ für den Sinus des Neigungswinkels von A$m$ gegen dieselbe Ebene fand. Nun ist aber $DAn = Abm = \frac{\pi}{2} - DAR = \frac{\pi}{2} - (\vartheta+\varphi)$, mithin der Sinus des Neigungswinkels von A$n$ oder von $bm$ gegen die Ebene AH gleich $\sin(\vartheta+\varphi).\sin\iota_1$ und der Kosinus dieses Winkels gleich $\sqrt{1-\sin^2(\vartheta+\varphi).\sin^2\iota_1}$. Hiernach hat man für die Projektion BM von $bm$ auf die Ebene AH den Ausdruck $BM = m_1 = \overline{bm}\sqrt{1-\sin^2(\vartheta+\varphi).\sin^2\iota_1}$.

Nach §. 218 ist das Perpendikel $bm$ von dem Mittelpunkte eines Stirnrades auf die Richtung des Druckes zwischen seinen Zähnen (Gleichung 244) durch die Formel

$$r_1 \sin(\vartheta + \varphi) + \lambda \sin\varphi$$

dargestellt, worin $\vartheta$, $\varphi$, $\lambda$ dieselben Größen bezeichnen, welche auch in dem gegenwärtigen Paragraphe mit diesen Buchstaben bezeichnet sind, worin aber $r_1$ für den Halbmesser $b\mathrm{A}$ des Kreises AD statt, wie hier, für den Halbmesser BA des Kreises AH steht. Man hat jedoch $b\mathrm{A} = \frac{\mathrm{BA}}{\cos \mathrm{DAH}} = \frac{r_1}{\cos \iota_1}$, und wenn man diesen Werth für $r_1$ in der vorstehenden Formel substituirt,

$$bm = \frac{r_1 \sin(\vartheta + \varphi)}{\cos \iota_1} + \lambda \sin\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \left[\dfrac{r_1 \sin(\vartheta+\varphi)}{\cos \iota_1} + \lambda \sin\varphi\right]\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta+\varphi).\sin^2 \iota_1} \\ \text{und auf ganz ähnliche Weise} \\ m_2 = \left[\dfrac{r_2 \sin(\vartheta+\varphi)}{\cos \iota_2} - \lambda \sin\varphi\right]\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta+\varphi).\sin^2 \iota_2} \end{array}\right\} \dots (274)$$

Substituirt man diese Werthe von $m_1$ und $m_2$ und auch die Werthe von $\mathrm{R}_1$ und $\mathrm{R}_2$ aus den Gleichungen (273) in die Gleichungen (272), und eliminirt alsdann die Größe R; so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Elementarkräften $p_1$ und $p_2$, welche für einen jeden Abstand des Berührungspunktes der Kämme von der Mittellinie Anwendung findet.

Nun nehme man an, die Anzahl der Zähne des getriebenen Rades sei so groß, daß der Winkel $\frac{2\pi}{n_2}$, welchen der Berührungspunkt eines jeden Zahnes beschreibt, gering, und die Linie $\lambda$ die Sehne eines sehr kleinen Bogens des Theilkreises des getriebenen Rades werde. Alsdann wird $\vartheta + \varphi$ nahe gleich $\frac{\pi}{2}$ sein (§. 222) sodaß $\cos^2(\vartheta + \varphi)$ eine ungemein kleine Größe darstellt, welche vernachläſſigt werden kann, und $\sin(\vartheta + \varphi)$ sehr nahe gleich der

Einheit ist. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (273) und (274); so erhält man

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R},\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}$$

$$m_1 = r_1 + \lambda \sin\varphi . \cos\iota_1,\ m_2 = r_2 - \lambda \sin\varphi . \cos\iota_2 .$$

Diese Werthe in die Gleichungen (272) eingeführt, ergeben, wenn man jene Gleichungen durch einander dividirt, um **R** zu eliminiren,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_2}{a_1} . \frac{r_1 + \lambda \sin\varphi . \cos\iota_1 + \left(\frac{\varrho_1 \mathrm{L}_1}{a_1}\right) \sin\varphi_1}{r_2 - \lambda \sin\varphi . \cos\iota_2 - \left(\frac{\varrho_2 \mathrm{L}_2}{a_2}\right) \sin\varphi_2}$$

oder

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2} . \frac{1 + \frac{\lambda}{r_1} \sin\varphi . \cos\iota_1 + \left(\frac{\varrho_1 \mathrm{L}_1}{a_1 r_1}\right) \sin\varphi_1}{1 - \frac{\lambda}{r_1} \sin\varphi . \cos\iota_2 - \left(\frac{\varrho_2 \mathrm{L}_2}{a_2 r_2}\right) \sin\varphi_2} .$$

Führt man die Division auf der rechten Seite wirklich aus, und vernachlässigt Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$; so kommt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_2 r_1}{a_1 r_2} \left\{ 1 + \lambda \left( \frac{\cos\iota_1}{r_1} + \frac{\cos\iota_2}{r_2} \right) \sin\varphi + \left( \frac{\varrho_1 \mathrm{L}_1}{a_1 r_1} \right) \sin\varphi_1 + \left( \frac{\varrho_2 \mathrm{L}_2}{a_2 r_2} \right) \sin\varphi_2 \right\} .$$

Bezeichnet nun $\psi'$ den Winkel, welchen das getriebene Stirnrad oder der getriebene Kreis **ELA** beschreibt, während irgend zwei seiner Zähne miteinander in Berührung sind; so hat man, da $\lambda$ sehr nahe eine Sehne dieses Kreises ist, welche den sehr kleinen Winkel $\psi'$ überspannt (§. 222) $\lambda = r_2 \psi'$. Wird aber der Winkel, welchen das konische Rad **FK** beschreibt, während sich der Kreis **ELA** um den Winkel $\psi'$ drehet, durch $\psi$ dargestellt; so sieht man, daß die Theilkreise des ungemein dünnen Rades **AK** und des Kreises **ELA**, welche sich vermöge der gemeinschaftlichen Berührung in **A** herumbewegen, in der Zeit, wo sie resp. die ungleichen Winkel $\psi$ und $\psi'$ beschreiben, gleiche Bogentheile durch den Punkt **A** führen werden. Außerdem ist der

Halbmesser $Ag$ des Kreises $AL$ gleich $\frac{\overline{AG}}{\cos GAg} = \frac{r_2}{\cos \iota_2}$, und demnach $\psi' \frac{r_2}{\cos \iota_2} = \psi r_2$ oder

$$\psi' = \psi \cos \iota_2 \ldots . (275)$$

und daher auch $\lambda = r_2 \psi \cos \iota_2$.

Setzt man diesen Werth für $\lambda$ in die obige Gleichung, und beachtet, daß $\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2}{n_1}$ ist; so erhält man

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_2 n_1}{a_1 n_2} \left\{ 1 + n_2 \left( \frac{\cos \iota_1}{n_1} + \frac{\cos \iota_2}{n_2} \right) \psi \cos \iota_2 . \sin \varphi + \left( \frac{\varrho_1 L_1}{a_1 r_1} \right) \sin \varphi_1 + \left( \frac{\varrho_2 L_2}{a_2 r_2} \right) \sin \varphi_2 \right\} \ldots . (276)$$

Multiplizirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $p_2 \frac{a_1 n_2}{n_1}$, und bemerkt, daß $p_1 a_1 \frac{n_2}{n_1} = p_1 a_1 \frac{n_2}{n_1} \frac{\triangle \psi}{\triangle \psi}$ und daß $\frac{n_2}{n_1} \triangle \psi$ der sehr kleine Winkel ist, welchen das treibende Rad $AN$ beschreibt, während das getriebene Rad den Winkel $\triangle \psi$ durchläuft, sodaß, wenn $\triangle u_1$ die von der Kraft $p_1$ an der Scheibe $AH$ verrichtete Arbeit bezeichnet, während das getriebene Rad den Winkel $\triangle \psi$ beschreibt, $p_1 a_1 \frac{n_2}{n_1} \triangle \psi = \triangle u_1$ ist; so hat man

$$\frac{\triangle u_1}{\triangle \psi} = p_2 a_2 \left\{ 1 + n_2 \left( \frac{\cos \iota_1}{n_1} + \frac{\cos \iota_2}{n_2} \right) \psi \cos \iota_2 . \sin \varphi + \left( \frac{\varrho_1 L_1}{a_1 r_1} \right) \sin \varphi_1 + \left( \frac{\varrho_2 L_2}{a_2 r_2} \right) \sin \varphi_2 \right\},$$

oder wenn man $\triangle \psi$ unendlich klein annimmt, sodaß $\frac{\triangle u_1}{\triangle \psi}$ in den Differenzialkoeffizienten $\frac{d u_1}{d \psi}$ übergeht, auf beiden Seiten mit $d\psi$ multiplizirt und zwischen den Gränzen $\psi = o$ und $\psi = \frac{2\pi}{n_2}$ integrirt, (s. §. 222)

$$u_1 =$$

$$\frac{2\pi p_2 a_2}{n_2} \Big\} 1 + \pi\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1} + \frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2 . \sin\varphi + \left(\frac{\varrho_1 L_1}{a_1 r_1}\right)\sin\varphi_1 + \left(\frac{\varrho_2 L_2}{a_2 r_2}\right)\sin\varphi_2 \Big\{$$

Die vorstehende Beziehung zwischen der Arbeit $u_1$, welche die elementare Kraft $p_1$ an der äußersten sehr dünnen Scheibe **AH** des treibenden Rades verrichtet, während irgend zwei Kämme miteinander in Berührung sind, und zwischen dem elementaren Widerstande $p_2$, welcher sich an der entsprechenden sehr dünnen Scheibe **AK** des getriebenen Rades der Bewegung entgegensetzt, findet offenbar auch auf irgend zwei andere sehr dünne zusammengehörige Scheiben der beiden Räder Anwendung, wenn man statt $p_2$, $r_1$, $r_2$, $L_1$ und $L_2$ die diesen Scheiben entsprechenden Werthe in die Formel substituirt. Stellt man daher das Inkrement der ganzen an dem treibenden Rade verrichteten Arbeit $U_1$, welches irgend Einer jener elementaren Scheiben dieses Rades zukommt, durch $\triangle U_1$ dar, setzt für $p_2$ seinen Werth $\frac{P_2}{b}\triangle x$, und bezeichnet die Werthe von $L_1$, $L_2$, $r_1$, $r_2$, welche jener Scheibe angehören, resp. mit $L$, $L'$, $r$, $r'$; so erhält man

$$\triangle U_1 =$$

$$\frac{2\pi P_2 a_2}{p_2 b} \Big\} 1 + \pi\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1} + \frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_1 . \sin\varphi + \left(\frac{L\varrho_1}{a_1 r}\right)\sin\varphi_1 + \left(\frac{L'\varrho_2}{a_2 r'}\right)\sin\varphi_2 \Big\{ \triangle x,$$

oder wenn man $\triangle x$ unendlich klein annimmt, zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = b$ integrirt, und beachtet, daß $P_2 a_2 \frac{2\pi}{n_2}$ die gesammte Arbeit $U_2$ darstellt, welche unter dem konstanten Drucke $P_2$ während der Berührung irgend zweier Kämme auf das getriebene Rad entwickelt wird,

$$U_1 =$$

$$U_2 \Big\} 1 + \pi\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1} + \frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2 . \sin\varphi + \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{b\, a_1}\int_0^b \frac{L}{r}dx + \frac{\varrho_2 \sin\varphi_2}{b\, a_2}\int_0^b \frac{L'}{r'}dx \Big\{ \quad \ldots . (277)$$

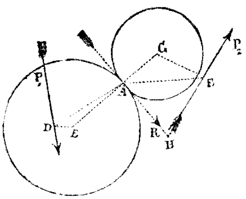
Bezeichnet man nun die Linie **CF** mit $c$, sodaß $c + x$ den Abstand des Berührungspunktes zweier solcher elementarer Scheiben vom Punkte C darstellt; so werden die Halbmesser $r$ und $r'$ dieser Scheiben (wegen ähnlicher Dreiecke) offenbar

$$r=\frac{c+x}{c}r_1=\left(1+\frac{x}{c}\right)r_1 \text{ und}$$

$$r'=\frac{c+x}{c}r_2=\left(1+\frac{x}{c}\right)r_2$$

sein, wenn man mit $r_1$ und $r_2$ die Halbmesser der äußersten Scheiben **NF** und **OF** an dem kleineren Umfange (und nicht, wie bei den vorhergehenden Untersuchungen, an dem größeren Umfange) der Räder bezeichnet.

Nimmt man nun wieder, wie es vorhin schon geschehen ist, die Richtungen der Kräfte $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ perpendikular zu den Linien **BA** und **GA** an, welche von dem Mittelpunkte einer jeden der beiden Scheiben nach ihrem Berührungspunkte **A** gezogen sind, sodaß die Punkte **M** und $m$ (s. die vorhergehende Figur) mit dem Punkte **A** zusammenfallen, und bezeichnet in der seitstehenden Figur (in welcher die Kreise um **B** und **G** zwei zusammengehörige Scheiben der beiden Räder darstellen, welche nicht in Einer Ebene liegen) die Winkel **ABD** und **AGE**, welche die Perpendikel **BD** und **GE** auf die Richtungen der Kräfte $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ mit den Halbmessern **AB** und **AG** einschließen, resp. mit $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$; so hat man




$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AB}.\overline{BD}.\cos ABD, \text{ also}$$

$$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=1+\left(\frac{BD}{AB}\right)^2-2\left(\frac{BD}{AB}\right)\cos ABD,$$

d. i., wenn man für **AD**, **AB**, **BD** und **ABD** resp. ihre Werthe **L**, $r=r_1\left(1+\frac{x}{c}\right)$, $a_1$ und $\vartheta_1$ einführt,

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2=1+\left[\frac{a_1}{r_1\left(1+\frac{x}{c}\right)}\right]^2-2\left[\frac{a_1}{r_1\left(1+\frac{x}{c}\right)}\right]\cos\vartheta_1 \text{ oder}$$

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2=1+\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2\left(1+\frac{x}{c}\right)^{-2}-2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\left(1+\frac{x}{c}\right)^{-1}\cos\vartheta_1.$$

Entwickelt man die Binomialgrößen dieses Ausdruckes in Reihen, beachtet dabei, daß $\frac{x}{c}$ immer eine sehr kleine Größe ist, vernachlässigt demnach Glieder mit höheren Potenzen, als der ersten, von $\frac{x}{c}$ und reduzirt gehörig; so kommt

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - 2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\cos\vartheta_1 + 2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\left(\cos\vartheta_1 - \frac{a_1}{r_1}\right)\frac{x}{c} \ldots (278)$$

Wenn nun $L_1$ den Werth von L für $x=0$, also für die Scheibe am kleineren Umfange des treibenden Rades, dessen Halbmesser $r_1$ ist, darstellt; so hat man nach der vorstehenden Beziehung, da der Winkel $\vartheta_1$ für alle Scheiben dieses Rades konstant bleibt,

$$\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - 2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\cos\vartheta_1 \text{ und daher auch}$$

$$2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\left(\cos\vartheta_1 - \frac{a_1}{r_1}\right) = 1 - \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2.$$

Setzt man zur Vereinfachung der Formeln den Winkel **ADB**, welchen in der ersten Scheibe am kleineren Umfange des treibenden Rades das Perpendikel **BD** oder $a_1$ mit der Linie **AD** oder **L** bildet, gleich $\eta_1$ und den entsprechenden Winkel für die erste Scheibe am kleineren Umfange des getriebenen Rades gleich $\eta_2$; so hat man

$$L_1^2 + a_1^2 - 2L_1 a_1 \cos\eta_1 = r_1^2, \text{ also}$$

$$\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - 2\frac{L_1 a_1}{r_1^2}\cos\eta_1 = 1 \text{ und}$$

$$-2\frac{L_1 a_1}{r_1^2}\cos\eta_1 = 1 - \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2 \text{ d. i. nach der obigen Formel}$$

$$= 2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\left(\cos\vartheta_1 - \frac{a_1}{r_1}\right).$$

Substituirt man diesen Werth für $2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\left(\cos\vartheta_1 - \frac{a_1}{r_1}\right)$ und den obigen Werth für $1+\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2-2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\cos\vartheta_1$ in den Ausdruck von $\left(\frac{L}{r}\right)^2$; so kommt

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2=\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2-2\left(\frac{L_1 a_1}{r_1^2}\right)\left(\frac{x}{c}\right)\cos\eta_1=\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2\Big\}1-2\left(\frac{a_1}{L_1}\right)\left(\frac{x}{c}\right)\cos\eta_1\Big\{.$$

Zieht man hieraus die Quadratwurzel, entwickelt die rechte Seite der Gleichung in eine Reihe, und vernachlässigt die Glieder, welche höhere Potenzen, als die erste, von $\frac{x}{c}$ enthalten; so ergibt sich

$$\frac{L}{r}=\frac{L_1}{r_1}-\left(\frac{a_1}{r_1}\right)\left(\frac{x}{c}\right)\cos\eta_1=\frac{a_1}{r_1}\left(\frac{L_1}{a_1}-\frac{x}{c}\cos\eta_1\right).$$

Hiernach ist (s. Gleichung 277)

$$\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{b a_1}\int_0^b\frac{L}{r}dx=\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{b r_1}\int_0^b\left(\frac{L_1}{a_1}-\frac{x}{c}\cos\eta_1\right)dx=\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}\left(\frac{L_1}{a_1}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_1\right),$$

und auf eine ganz ähnliche Weise erhält man

$$\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{b a_2}\int_0^b\frac{L'}{r'}dx=\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}\left(\frac{L_2}{a_2}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_2\right).$$

Substituirt man diese Werthe in den Model (Gleichung 277); so wird derselbe

$$U_1=$$
$$U_2\Big\}1+\pi\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2.\sin\varphi+\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}\left(\frac{L_1}{a_1}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_1\right)+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}\left(\frac{L_2}{a_2}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_2\right)\Big\{.$$

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel BCG der Axen der beiden konischen Räder gegeneinander mit $2\iota$; so ist $\iota_1+\iota_2=2\iota$, ferner $c\sin\iota_1=r_1$, $c\sin\iota_2=r_2$, und man hat

$$\frac{\sin\iota_1}{\sin\iota_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sin^2\iota_1}{n_1{}^2}=\frac{\sin^2\iota_2}{n_2{}^2},\ \text{d. i.}\ \frac{1}{n_1{}^2}-\frac{\cos^2\iota_1}{n_1{}^2}=\frac{1}{n_2{}^2}-\frac{\cos^2\iota_2}{n_2{}^2},$$

$$\frac{1}{n_1{}^2}-\frac{1}{n_2{}^2}=\frac{\cos^2\iota_1}{n_1{}^2}-\frac{\cos^2\iota_2}{n_2{}^2}=\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}-\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)$$

$$=\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}\frac{\cos\iota_1}{\cos\iota_2}-\frac{1}{n_2}\right)\cos\iota_2,\ \text{folglich}$$

$$\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2=\frac{\frac{1}{n_1{}^2}-\frac{1}{n_2{}^2}}{\frac{1}{n_1}\frac{\cos\iota_1}{\cos\iota_2}-\frac{1}{n_2}}.$$

Da ferner $\iota_1=\iota+\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)$ und $\iota_2=\iota-\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)$ ist; so hat man

$$\frac{\cos\iota_1}{\cos\iota_2}=\frac{\cos[\iota+\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)]}{\cos[\iota-\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)]}=\frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2).\operatorname{tang}\iota}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2).\operatorname{tang}\iota};$$

auch ist

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{\sin\iota_1}{\sin\iota_2}=\frac{\sin[\iota+\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)]}{\sin(\iota-\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)]}=\frac{\operatorname{tang}\iota+\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)}{\operatorname{tang}\iota-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)};$$

mithin

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\iota_1-\iota_2)=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\operatorname{tang}\iota;\ \text{demnach}$$

$$\frac{\cos\iota_1}{\cos\iota_2}=\frac{1-\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\operatorname{tang}^2\iota}{1+\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\operatorname{tang}^2\iota}=\frac{(n_1+n_2)-(n_1-n_2)\operatorname{tang}^2\iota}{(n_1+n_2)+(n_1-n_2)\operatorname{tang}^2\iota}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{n_1}\frac{\cos\iota_1}{\cos\iota_2}-\frac{1}{n_2}=\frac{1}{n_1n_2}\left(n_2\frac{\cos\iota_1}{\cos\iota_2}-n_1\right)=-\frac{1}{n_1n_2}\frac{(n_1{}^2-n_2{}^2)+(n_1{}^2-n_1{}^2)\operatorname{tang}^2\iota}{(n_1+n_2)+(n_1-n_2)\operatorname{tang}^2\iota}$$

$$=-\frac{1}{n_1n_2}\frac{(n_1{}^2-n_2{}^2)\frac{1}{\cos^2\iota}}{(n_1+n_2)+(n_1-n_2)\operatorname{tang}^2\iota}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{n_1{}^2}-\frac{1}{n_2{}^2}\right)}{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cos^2\iota-\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\sin^2\iota}.$$

Dieser Werth, in den obigen Ausdruck für $\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2$ gesetzt, gibt

$$\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cos^2\iota-\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\sin^2\iota=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}.$$

Substituirt man diesen Werth in die zuletzt entwickelte Beziehung zwischen $U_1$ und $U_2$; so verwandelt sich dieselbe in

$$U_1=\left\}1+\pi\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}\right]\sin\varphi+\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}\left(\frac{L_1}{a_1}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_1\right)+\frac{\varphi_2\sin\varphi_2}{r_2}\left(\frac{L_2}{a_2}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_2\right)\right\{U_2 \quad \ldots.(279)$$

Diese Formel stellt den Model für die konischen oder Kammräder dar, wenn man den Einfluß ihrer Gewichte außer Acht läßt. Die darin vorkommenden Größen $r_1, L_1, \eta_1$ und $r_2, L_2, \eta_2$ beziehen sich auf die kleineren Endflächen FN und FO der beiden Räder, welche dem Durchschnittspunkte C ihrer Axen am nächsten liegen. Die Größen $\eta_1$ und $\eta_2$ sind resp. von den Größen $r_1, L_1, a_1$ und $r_2, L_2, a_2$ durch die vorhin entwickelten Beziehungen abhängig; setzt man daher in der vorstehenden Formel

$$\cos\eta_1=-\frac{r_1^2}{2L_1a_1}\left\}1-\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2-\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2\right\{ \text{ und}$$

$$\cos\eta_2=-\frac{r_2^2}{2L_2a_2}\left\}1-\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^2-\left(\frac{L_2}{r_2}\right)^2\right\{;$$

so geht dieselbe in

$$U_1=\left\}1+\pi\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}\right]\sin\varphi+\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{a_1r_1}\left[L_1\left(1-\frac{1}{4}\frac{b}{c}\right)+\frac{b(r_1^2-a_1^2)}{4cL_1}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{a_2r_2}\left[L_2\left(1-\frac{1}{4}\frac{b}{c}\right)+\frac{b(r_2^2-a_2^2)}{4cL_2}\right]\right\{U_2 \quad \ldots.(280)$$

über.

Wenn die Richtung Einer der Kräfte $P_1$ und $P_2$, z. B. die der Kraft $P_1$, durch den Punkt F der Linie AF ginge und auf der Ebene BCG perpendikular stände; so würde $a_1=r_1$ und $L_1=0$ werden, sodaß der Faktor

$$\frac{1}{a_1 r_1}\left[L_1\left(1-\frac{1}{4}\frac{b}{c}\right)+\frac{b(r_1{}^2-a_1{}^2)}{4aL_1}\right]$$

des Gliedes der vorstehenden Gleichung, welches sich auf die Reibung an der Axe des treibenden Rades bezieht, die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annähme. Da in diesem Falle aber der Winkel $\eta_1=\frac{\pi}{2}$, also $\cos\eta_1=0$ wird; so sieht man, daß der Werth jenes Koeffizienten, welcher mit dem von $\frac{1}{r_1}\left[\frac{L_1}{a_1}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_1\right]$ übereinstimmen muß, unzweideutig $=0$ wird. Im Allgemeinen geht aus der vorstehenden Gleichung hervor, daß die Richtungen der treibenden Kraft und des Nutzwiderstandes für die zu verrichtende Arbeit die vortheilhafteste Lage haben werden, wenn dieselben den Bedingungen

$$L_1\left(1-\frac{1}{4}\frac{b}{c}\right)+\frac{b(r_1{}^2-a_1{}^2)}{4cL_1}=0 \text{ und}$$

$$L_2\left(1-\frac{1}{4}\frac{b}{c}\right)+\frac{b(r_1{}^2-a_2{}^2)}{4cL_2}=0,$$

aus welchen

$$L_1{}^2=b\left(\frac{a_1{}^2-r_2{}^2}{4c-b}\right) \text{ und } L_2{}^2=b\left(\frac{a_2{}^2-r_2{}^2}{4c-b}\right)$$

folgt, ein Genüge leisten. Wenn diese Bedingungen übrigens erfüllt werden sollen; so ist es nothwendig, daß $a_1 \geqq r_1$ und $a_2 \geqq r_2$ sei, und daß die Werthe für $L_1$ und $L_2$ resp. $\geqq(a_1-r_1)$ und $\geqq(a_2-r_2)$ bleiben, weil die Abstände $L_1$ und $L_2$ mindestens $=a_1-r_1$ oder $=a_2-r_2$ sein müssen. Wäre dagegen $a_1<r_1$; so würde man die Bedingungen für ein Minimum der vorstehenden Koeffizienten erhalten, wenn man ihre Differenzialkoeffizienten in Beziehung zu den Größen $L_1$ und $L_2$ gleich null setzte, und wenn alsdann die Differenzialkoeffizienten der zweiten Ordnung positive Werthe lieferten. Hierdurch ergeben sich leicht die Forderungen

$$L_1^{\,2} = \frac{b(r_1^{\,2} - a_1^{\,2})}{4c - b}, \quad L_2^{\,2} = \frac{b(r_2^{\,2} - a_2^{\,2})}{4c - b},$$

$$\frac{b(r_1^{\,2} - a_1^{\,2})}{4cL_1^{\,3}} > 0, \quad \frac{b(r_2^{\,2} - a_2^{\,2})}{4cL_2^{\,3}} > 0,$$

von denen die letzteren unter den gemachten Voraussetzungen immer erfüllt sein werden. Hierbei ist es jedoch wiederum durchaus erforderlich, daß $L_1$ und $L_2$ resp. $\geqq (r_1 - a_1)$ und $\geqq (r_2 - a_2)$ bleiben, da dieselben mindestens $= r_1 - a_1$ und $= r_2 - a_2$ sein müssen.

§. 234. Es leuchtet ein, daß wenn die Umdrehungsebene eines solchen konischen Rades vertikal wäre, der Einfluß seines Gewichtes sehr nahe derselbe sein müßte, wie bei einem Stirnrade von demselben Gewichte, dessen Halbmesser gleich dem mittleren Halbmesser des konischen Rades wäre, und welches sich ebenfalls in einer vertikalen Ebene herumbewegte. Wäre die Axe des Rades jedoch nicht horizontal, so müßte sein Gewicht in zwei Kräfte zerlegt werden, von denen die Eine in der Ebene des Rades und die andere rechtwinklig gegen dieselbe oder parallel zur Axe wirkte. Die letztere wirkte dann bloß auf die Stirnfläche der Axe und erzeugte daselbst eine Reibung, wie bei einem stehenden Zapfen, sodaß die zur Überwindung dieser Reibung erforderliche Arbeit nach §. 178 oder 179 bestimmt werden könnte. Ermittelte man nach diesen Paragraphen die in Rede stehende Arbeit zur Überwindung der Reibung an den Stirnflächen der Axen beider Räder; so würde sich für die Summe dieser Arbeiten ein Ausdruck von der Form $N''.S$ ergeben, worin $N''$ eine Konstante und $S$ den Raum bezeichnet, welchen die Theilkreise der kleineren Umfänge der konischen Räder beschreiben, während die Arbeit $U_1$ verrichtet wird.

Die zweite Theilkraft des Gewichtes eines jeden Rades, welche perpendikular zu den Axen wirkt, müßte ferner in die Gleichung (252) anstatt des Gewichtes der Räder substituirt werden. Hierdurch würde jene Gleichung einen Werth $= N'$ ergeben, und man erhielte für das zweite Glied des Models einen Ausdruck von der Form $(N' + N'')S$. Fügt man diese Größe der rechten Seite der Gleichung (279) hinzu; so erhält man für den Model zweier konischer Räder, wenn man ihre Gewichte, welche übrigens in Beziehung zu den Kräften $P_1$ und $P_2$ als gering vorausgesetzt werden, mit in Betracht zieht, die Formel

$$U_1 = \Big\{ 1 \pm \pi\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}\right]\sin\varphi + \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1}\left(\frac{L_1}{a_1}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_1\right)+\frac{\varrho_2 \sin\varphi_2}{r_2}\left(\frac{L_2}{a_2}-\frac{1}{2}\frac{b}{c}\cos\eta_2\right)\Big\} U_2 + (N'+N'')S \ldots . (281)^{*)}$$

---

*) Denkt man sich zur Vereinfachung der vorstehenden Formeln die Kränze der beiden konischen Räder auf zwei Kränze von unendlich geringer Stärke reduzirt, deren Halbmesser die mittleren Halbmesser der Räder sind, bezieht demnach die Größen $r_1$, $L_1$, $\eta_1$, und $r_2$, $L_2$, $\eta_2$, auf die mittleren Durchschnitte der beiden Räder, und setzt $b = o$; so ergibt die Gleichung (281)

$$U_1 = \Big\{ 1 + \pi\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}\right]\sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{a_2 r_2}\sin\varphi_2 \Big\} U_2 + (N'+N'')S,$$

worin denn auch die Größen $N'$, $N''$ und $S$ auf die mittleren Theilkreise der beiden Räder zu beziehen sind.

Diese Formel beruhet jedoch auf der Voraussetzung, daß die Gewichte der Räder, oder vielmehr die Komponenten dieser Gewichte in perpendikularen Richtungen gegen die Axen, im Vergleich zu den Kräften $P_1$ und $P_2$ gering seien. Wären diese Komponenten der Gewichte aber sehr bedeutend; so könnte man zur Bestimmung des Models der beiden Räder einen ähnlichen Weg, wie den in der Note zu §. 220 verfolgten, einschlagen. Zu diesem Ende nehme man an, die beiden konischen Räder reduziren sich auf ihre mittleren Umfänge; diese mittleren Umfänge seien in der ersten Figur des §. 233 durch AH und AK dargestellt, die Richtung des Druckes R zwischen den Kämmen der beiden Räder falle mit der Durchschnittslinie der beiden Ebenen AH und AK zusammen und stehe demnach auf den Linien AH und AK in A perpendikular. Außer den Beziehungen des §. 233, welche sich hier sämmtlich auf die mittleren Umfänge der Räder beziehen, seien

- $W_1$ und $W_2$ die Komponenten des Gewichtes des treibenden und des getriebenen Rades in perpendikularen Richtungen zu den Axen CB und CG oder in den Ebenen AH und AK,
- $w_1$ und $w_2$ die Komponenten dieser Gewichte in parallelen Richtungen zu diesen Axen,
- $\iota'_{13}$ der Winkel zwischen der positiven Richtung der Kraft $P_1$ und der positiven Richtung der Kraft $W_1$,
- $\iota'_{23}$ der Winkel zwischen der positiven Richtung des Druckes $R_1 = R$ des getriebenen Zahnes gegen den treibenden Zahn und der positiven Richtung der Kraft $W_1$,
- $\iota''_{13}$ der Winkel zwischen der positiven Richtung der Kraft $P_2$ und der positiven Richtung der Kraft $W_2$,
- $\iota''_{23}$ der Winkel zwischen der positiven Richtung des Druckes $R_2 = R$ des treibenden Zahnes gegen den getriebenen Zahn und der positiven Richtung der Kraft $W_2$, wobei die Druckkräfte $R_1$ und $R_2$ in der Durchschnittslinie der Ebenen AH und AK liegen und entgegengesetzte Richtungen haben. Ferner sei nach der Note zu §. 220

§. 235. Vergleicht man den Model eines Systemes von zwei konischen Rädern (Gleichung 281) mit dem eines Systemes

---

$$A_1 = \cos \iota'_{13} + \frac{r_1}{a_1} \cos \iota'_{23},\quad B_1 = \sin \iota'_{13} \mp \frac{r_1}{a_1} \sin \iota'_{23},$$

$$A_2 = \cos \iota''_{13} + \frac{r_2}{a_2} \cos \iota''_{23},\quad B_2 = \sin \iota''_{13} \mp \frac{r_2}{a_2} \sin \iota''_{23},$$

sodaß in den Ausdrücken **B** das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die positive Richtung der Kraft **W** zwischen die positiven Richtungen der Kräfte **P** und **R** oder deren Verlängerungen fällt, und das untere Zeichen, wenn jene Richtung von **W** zwischen die positive Richtung der Einen und die Verlängerung der anderen der beiden Kräfte **P** und **R** fällt.

Ist nun nach §. 178 oder 179 $k_1\ w_1$ die Kraft, welche am äußeren Umfange oder an dem Halbmesser $\varrho_1$ der Axe des treibenden Rades angebracht werden müßte, um den Reibungswiderstand an der Stirnfläche dieser Axe zu überwinden, sodaß hierzu am Angriffspunkte der Kraft $P_1$ ein Druck $= \frac{\varrho_1}{a_1} k_1 w_1$ erforderlich wäre, und hat $k_2\, w_2$ eine ähnliche Bedeutung für das getriebene Rad; so erhält man statt der Gleichungen (272) auf dieselbe Weise, wie die Gleichungen (*e*) in der Note zu §. 220 erhalten sind, die folgenden:

$$P_1 = \frac{1}{a_1}\left\{m_1 + 0{,}828\, \varrho_1 \sin\varphi_1\, (A_1 + B_1)\right\} R + 0{,}828\, \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{a_1} W_1 + \frac{\varrho_1 k_1}{a_1} w_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{a_2}\left\{m_2 - 0{,}828\, \varrho_2 \sin\varphi_2\, (A_2 + B_2)\right\} R - 0{,}828\, \frac{\varrho_2 \sin\varphi_2}{a_2} W_2 - \frac{\varrho_2 k_2}{a_2} w_2.$$

Hierin sind die Größen $A_1$ und $W_1$; $B_1$; $A_2$ und $W_2$; $B_2$ resp. positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem man

$$W_1 + \frac{a_1}{r_1} A_1 P_1 \gtrless 0;\quad B_1 \gtrless 0;$$

$$W_2 + \frac{a_2}{r_2} A_2 P_2 \gtrless 0;\quad B_2 \gtrless 0$$

hat.

Für $m_1$ und $m_2$ hat man nach §. 233 die Werthe

$$m_1 = r_1 + \lambda \sin\varphi \cos\iota_1 \quad\text{und}\quad m_2 = r_2 - \lambda \sin\varphi \cos\iota_2$$

zu setzen. Nimmt man diese Substitution vor, eliminirt alsdann zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen die Größe **R**, verfährt dabei genau so, wie in der Note zu §. 220; so ergibt sich

$$P_1 =$$

$$\frac{a_2 r_1}{a_1 r_2}\left\{1 + \lambda\left(\frac{\cos\iota_1}{r_1} + \frac{\cos\iota_2}{r_2}\right)\sin\varphi + 0{,}828\left[\frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1}(A_1 + B_1) + \frac{\varrho_2 \sin\varphi_2}{r_2}(A_2 + B_2)\right]\right\} P_2$$

$$+ 0{,}828\, \frac{r_1}{a_1}\left(\frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1} W_1 + \frac{\varrho_2 \sin\varphi_2}{r_2} W_2\right) + \frac{r_1}{a_1}\left(\frac{\varrho_1 k_1}{r_1} w_1 + \frac{\varrho_2 k_2}{r_2} w_2\right).$$

von zwei Stirnrädern (Gleichung 257); so zeigt sich, daß der durch die Reibungen herbeigeführte Verlust an Arbeit bei dem letzteren Systeme um den Theil

$$+\frac{2\pi\sin^2\iota.\sin\varphi}{n_1}+\frac{1}{2}\frac{b}{c}\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\cos\eta_1.\sin\varphi_1+\frac{\varrho_2}{r_2}\cos\eta_2.\sin\varphi_2\right)\ldots(281)$$

der Nutzarbeit $U_2$ größer ist, als bei dem ersteren. Das erste Glied dieses Ausdruckes kommt der Reibung zwischen den Zähnen allein zu, das zweite bezieht sich bloß auf die Reibung an den Axen. Beide Glieder sind wesentlich positiv, da $\eta_1$ und $\eta_2$ in jedem Falle $\leqq\frac{\pi}{2}$ sind.

Hieraus geht hervor, daß der Verlust an treibender Kraft,

---

Macht man nun hier dieselben Voraussetzungen hinsichtlich der Länge von $\lambda$, wie in §. 233, setzt also $\lambda = r_2\psi\cos\iota_2$, multiplizirt auf beiden Seiten mit $a_1\frac{r_2}{r_1}d\psi$ und integrirt alsdann zwischen den Gränzen $\psi = o$ und $\psi = \frac{2\pi}{n_2}$, indem man beachtet, daß $P_1 a_1 \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{2\pi}{n_2} = U_1$, $r_2\cdot\frac{2\pi}{n_2} = S$ und $\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2}{n_1}$ ist, so ergibt sich

$$U_1 =$$

$$P_2 a_2\int_0^{\frac{2\pi}{n^2}}\left\}1+n_2\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\psi\cos\iota_2\,\sin\varphi+0{,}828\left[\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}(A_1+B_1)+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{a_2}(A_2+B_2)\right]\right\{ d\psi$$

$$+\left\}0{,}828\left(\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}W_1+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}W_2\right)+\left(\frac{\varrho_1 k_1}{r_1}w_1+\frac{\varrho_2 k_2}{r_2}w_2\right)\right\{ S.$$

Wird die Integration ausgeführt, $P_2 a_2\frac{2\pi}{n_2} = U_2$ und $\left(\frac{\cos\iota_1}{n_1}+\frac{\cos\iota_2}{n_2}\right)\cos\iota_2 = \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}$ gesetzt, worin $\iota$ den Neigungswinkel der beiden Axen **CB** und **CG** gegeneinander bezeichnet; so findet sich für den Model zweier konischer Räder die Formel

$$U_1 =$$

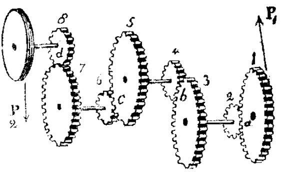
$$\left\}1+\pi\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)-\frac{2\sin^2\iota}{n_1}\right]\sin\varphi+0{,}828\left[\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}(A_1+B_1)+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}(A_2+B_2)\right]\right\{ U_2$$

$$+\left\}0{,}828\left(\frac{\varrho_1\sin\varphi_1}{r_1}W_1+\frac{\varrho_2\sin\varphi_2}{r_2}W_2\right)+\left(\frac{\varrho_1 k_1}{r_1}w_1+\frac{\varrho_2 k_2}{r_2}w_2\right)\right\{ S.$$

welcher den Kammrädern zukommt, bei übrigens gleichen Umständen geringer ist, als der, welcher bei Stirnrädern stattfindet; sodaß es in Rücksicht auf Kraftersparung vortheilhaft sein wird, überall da, wo die Praxis es erlaubt, ein Kammrad statt eines Stirnrades anzuwenden. Dieses Resultat stimmt mit der Erfahrung überein, welche lehrt, daß Kammräder leichter laufen, als Stirnräder.

## §. 236. Der Model eines Systems von mehreren Stirnrädern.

In einem Räderwerke, wie es die seitstehende Figur zeigt, bezeichne man der Reihe nach mit $r_1, r_2, r_3 \ldots r_{2p}$ die Halbmesser der Theilkreise der Räder, von dem treibenden Rade anfangend, mit $a$, den perpendikularen Abstand der treibenden Kraft von dem Mittelpunkte dieses Rades, mit $a_2$ den Abstand des Nutzwiderstandes von dem Mittelpunkte des letzten Rades, mit $\mathrm{U}_1$ die auf das erste Rad entwickelte Arbeit, mit $u_2$ die von dem zweiten Rade auf das dritte übertragene und von dem letzteren geleistete Arbeit, mit $u_3$ die von dem vierten Rade auf das fünfte übertragene und von dem letzteren geleistete Arbeit u. s. w., endlich mit $\mathrm{U}_2$ die von dem letzten oder $2p$ten Rade verrichtete Nutzarbeit. Die Beziehung zwischen $\mathrm{U}_1$ und $u_2$ ist durch den Model, Gleichung (257), bestimmt, wenn man bemerkt, daß der Angriffspunkt des Widerstandes für das zweite Rad der Berührungspunkt $b$ des dritten Rades mit dem vierten ist, sodaß man in jener Gleichung $a_2 = r_3$ zu setzen hat. Nimmt man außerdem $L_2$ für den Abstand des Punktes $b$ von der Projektion des Punktes $a$ auf die Ebene des dritten Rades; so erhält man




$$\mathrm{U}_1 = \left\{1 + \pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi + \frac{\mathrm{L}_1 \varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1 + \frac{\mathrm{L}_2 \varrho_2}{r_2 r_3}\sin\varphi_2\right\} u_2 + \mathrm{N}_1 . \mathrm{S}_1 .$$

Um in gleicher Weise die Beziehung zwischen $u_2$ und $u_3$ oder den Model des dritten und vierten Rades zu bestimmen, so denke man sich, die Arbeit $u_2$, mit welcher das dritte Rad das vierte treibt, äußere sich auf das dritte Rad im Berührungspunkte $b$, sodaß in diesem Falle der Abstand von dem Berührungspunkte des treibenden und des getriebenen Rades bis zu dem Fußpunkte des aus dem Mittelpunkte des treibenden Rades auf die treibende Kraft gefällten Perpendikels gleich null wird, und das Glied, welches jenen Abstand L als Faktor enthält, aus dem Model verschwindet, während das Perpendikel aus dem Mittelpunkte des treibenden Rades auf die treibende Kraft selbst gleich $r_3$ wird. Ebenso nehme man an, daß sich die Arbeit des vierten Rades im Berührungspunkte $c$ des fünften und sechsten Rades äußere, sodaß das Perpendikel von der Axe des getriebenen Rades auf die Richtung dieser Arbeit gleich $r_5$ ist. Hiernach erhält man für den Model des dritten und vierten Rades, wenn man mit $L_3$ den Abstand zwischen dem Punkte $c$ und der Projektion des Punktes $b$ auf die Ebene des fünften Rades bezeichnet,

$$u_2 = \left\{1 + \pi\left(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right)\sin\varphi + \frac{L_3\,\varrho_3}{r_4 r_5}\sin\varphi_3\right\} u_3 + N_2 S_2$$

Durch eine ähnliche Betrachtung ergibt sich für den Model des fünften und sechsten Rades oder für die Beziehung zwischen $u_3$ und $u_4$

$$u_3 = \left\{1 + \pi\left(\frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6}\right)\sin\varphi + \frac{L_4\,\varrho_4}{r_6 r_7}\sin\varphi_4\right\} u_4 + N_3 . S_3,$$

ferner für den Model des siebenten und achten Rades oder für die Beziehung zwischen $u_4$ und $u_5$

$$u_4 = \left\{1 + \pi\left(\frac{1}{n_7} + \frac{1}{n_8}\right)\sin\varphi + \frac{L_5\,\varrho_5}{r_8 r_9}\sin\varphi_5\right\} u_5 + N_4 . S_4,$$

und endlich, wenn 2 $p$ verzahnte Räder oder $p$ Paare solcher Räder vorhanden sind, welche ineinandergreifen, für den Model des letzten Paares

$$u_p = \left\{1 + \pi\left(\frac{1}{n_{2p-1}} + \frac{1}{n_{2p}}\right)\sin\varphi + \frac{L_{p+1}\,\varrho_{p+1}}{r_{2p}\,a_2}\sin\varphi_{p+1}\right\} U_2 + N_p . S_p .$$

In diesen Ausdrücken bezeichnen $N_1$, $N_2$, $N_3 \ldots N_p$ für die aufeinander folgenden $p$ Räderpaare die Werthe der Funktion (252), wodurch die Reibung bestimmt wird, welche den Gewichten der Räder zukommt, $L_2, L_3, L_4, \ldots L_p$ stellen die Abstände zwischen dem Berührungspunkte irgend eines zusammengehörigen Paares und der Projektion des Berührungspunktes des zunächst vorhergehenden Paares auf die Ebene des ersteren dar, $n_1, n_2, n_3, \ldots n_{2p}$ stehen für die Anzahlen der Zähne der einzelnen Räder, $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{2p}$ für die Halbmesser ihrer Theilkreise und $S_1$, $S_2, S_3, \ldots S_p$ für die Räume, welche ihre Berührungspunkte $a$, $b$, $c, \ldots$ beschreiben, während auf das erste Rad die Arbeit $U_1$ verrichtet wird.

Bezeichnet man in den vorstehenden Beziehungen die Koeffizienten von $u_2, u_3, u_4, \ldots U_2$ resp. mit $(1+\mu_1)$, $(1+\mu_2)$, $(1+\mu_3) \ldots (1+\mu_p)$; so werden dieselben

$$\begin{aligned} U_1 &= (1+\mu_1)u_2 + N_1 . S_1, \\ u_2 &= (1+\mu_2)u_3 + N_2 . S_2, \\ u_3 &= (1+\mu_3)u_4 + N_3 . S_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_p &= (1+\mu_p)U_2 + N_p . S_p. \end{aligned}$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Größen $u_2$, $u_3, u_4, \ldots u_p$ indem man die zweite mit $(1+\mu_1)$, die dritte mit $(1+\mu_1)(1+\mu_2)$, die vierte mit $(1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3)$ u. s. f. multiplizirt und dann alle Gleichungen addirt; so erhält man eine Gleichung von der Form

$$U_1 = (1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3)\ldots(1+\mu_p)U_2 + N.S, \ldots (282)$$

worin

$$\begin{aligned} NS = N_1 S_1 &+ (1+\mu_1)N_2 S_2 + (1+\mu_1)(1+\mu_2)N_3 S_3 + \ldots \\ &+ (1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3)\ldots(1+\mu_{p-1})N_p . S_p \ldots (283) \end{aligned}$$

ist.

Nun bemerkt man, daß der Winkel oder der Bogen, welchen das erste Rad in dem Abstande gleich der Einheit von seinem Mittelpunkt beschreibt, während sein Umfang den Raum $S_1$ durchläuft, durch $\frac{S_1}{r_1}$ dargestellt wird.

Dieser Winkel ist aber auch gleich dem, welchen in derselben Zeit der Angriffspunkt der treibenden Kraft $P_1$ oder der Fußpunkt des Perpendikels $a_1$ beschreibt, sodaß $\frac{S_1}{r_1} = \frac{S}{a_1}$ ist. Auch leuchtet ein, daß der Winkel, welchen das dritte Rad beschreibt, gleich dem ist, welchen gleichzeitig das zweite Rad zurücklegt, daß also $\frac{S_2}{r_3} = \frac{S_1}{r_2}$ ist. Ebenso hat man für den von dem vierten und fünften Rade beschriebenen Winkel $\frac{S_3}{r_5} = \frac{S_2}{r_4}$, ferner $\frac{S_4}{r_7} = \frac{S_3}{r_6}$ u. s. w. und endlich für den von dem $(2p-2)$ten und $(2p-1)$ten Rade beschriebenen Winkel $\frac{S_p}{r_{2p-1}} = \frac{S_{p-1}}{r_{2p-2}}$, worin $S_p$ der von dem Theilkreise des $(2p-1)$ten und auch von dem Theilkreise des $2p$ten oder letzten Rades beschriebenen Raum darstellt.

Multiplizirt man die beiden ersten dieser Gleichungen, alsdann die drei ersten, darauf die vier ersten u. s. f. miteinander; so ergeben sich die folgenden Beziehungen

$$S_1 = \left(\frac{r_1}{a_1}\right) S,$$

$$S_2 = \frac{r_1 . r_3}{a_1 . r_2} S = \left(\frac{r_1}{a_1}\right)\left(\frac{n_3}{n_2}\right) S,$$

$$S_3 = \frac{r_1 . r_3 . r_5}{a_1 . r_2 . r_4} S = \left(\frac{r_1}{a_1}\right)\left(\frac{n_3 . n_5}{n_2 . n_4}\right) S,$$

$$S_4 = \frac{r_1 . r_3 . r_5 . r_7}{a_1 . r_2 . r_4 . r_6} S = \left(\frac{r_1}{a_1}\right)\left(\frac{n_3 . n_5 . n_7}{n_2 . n_4 . n_6}\right) S,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$S_p = \frac{r_1 . r_3 . r_5 \dots r_{2p-1}}{a_1 . r_2 . r_4 \dots r_{2p-2}} S = \left(\frac{r_1}{a_1}\right)\left(\frac{n_3 . n_5 \dots n_{2p-1}}{n_2 . n_4 \dots n_{2p-2}}\right) S.$$

Substituirt man diese Werthe für $S_1, S_2, S_3 \dots$ in die Gleichung (283), und dividirt mit S, oder mit dem Raume, welchen der Angriffspunkt der treibenden Kraft $P_1$ beschreibt, während dieselbe die Arbeit $U_1$ verrichtet; so kommt

$$N = \left(\frac{r_1}{a_1}\right) \Big\{ N_1 + (1+\mu_1)\left(\frac{n_3}{n_2}\right) N_2 + (1+\mu_1)(1+\mu_2)\left(\frac{n_3 . n_5}{n_2 . n_4}\right) N_3 + \dots$$

$$+ (1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3)\dots(1+\mu_{p-1})\left(\frac{n_3\, n_5 \dots n_{2p-1}}{n_2\, n_4 \dots n_{2p-2}}\right) N_p \Big\},$$

oder wenn man beachtet, daß die Größen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sämmtlich aus Gliedern bestehen, welche Eine Dimension von $\sin\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2, \ldots$ enthalten, daß die Größen $N_1, N_2, N_3, \ldots$ (Gleichung 252) ebenfalls von Einer Dimension in diesen sehr kleinen Größen sind, und daß Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\sin\varphi, \sin\varphi_1, \sin\varphi_2, \ldots$ vernachlässigt werden können,

$$N = \left(\frac{r_1}{a_1}\right) \left\{ N_1 + \left(\frac{n_3}{n_2}\right) N_2 + \left(\frac{n_3 . n_5}{n_2 . n_4}\right) N_3 + \left(\frac{n_3 . n_5 . n_7}{n_2 . n_4 . n_6}\right) N_4 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{n_3 . n_5 \ldots n_{2p-1}}{n_2 . n_4 \ldots n_{2p-2}}\right) N_p \right\} \ldots (284)$$

Vernachlässigt man in gleicher Weise in der Gleichung (282) alle Glieder, welche mehr, als eine Dimension von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ enthalten; so wird dieselbe

$$U_1 = \{1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_p\} U_2 + N.S.$$

Hierin ist aber

$$\mu_1 = \pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1} \sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{r_2 r_3} \sin\varphi_2,$$

$$\mu_2 = \pi\left(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right) \sin\varphi + \frac{L_3 \varrho_3}{r_4 r_5} \sin\varphi_3,$$

$$\mu_3 = \pi\left(\frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6}\right) \sin\varphi + \frac{L_4 \varrho_4}{r_6 r_7} \sin\varphi_4,$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\mu_p = \pi\left(\frac{1}{n_{2-1p}} + \frac{1}{n_{2p}}\right) \sin\varphi + \frac{L_{p+1} \varrho_{p+1}}{r_{2p} a_2} \sin\varphi_{p+1}$$

Substituirt man daher diese Werthe für $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ in die vorhergehende Gleichung; so erhält man als allgemeinen Ausdruck für den Model eines Systemes von mehreren Stirnrädern

$$U_1 =$$
$$\left\{ 1 + \pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_{2p}}\right) \sin\varphi + \frac{L_1 \varrho_1}{a_1 r_1} \sin\varphi_1 + \frac{L_2 \varrho_2}{r_2 r_3} \sin\varphi_2 + \frac{L_3 \varrho_3}{r_4 r_5} \sin\varphi_3 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{L_p \varrho_p}{r_{2p-2} r_{2p-1}} \sin\varphi_p + \frac{L_{p+1} \varrho_{p+1}}{r_{2p} a_2} \sin\varphi_{p+1} \right\} U_2 + N.S. \ldots (285)$$

§. 237. Die Arbeit $U_1$, welche auf das erste Rad eines zusammengesetzten Räderwerkes verrichtet werden muß, um an dem letzten Rade eine gegebene Nutzarbeit $U_2$ hervorzubringen, überschreitet die letztere um die Größe

$$\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots+\frac{1}{n_{2p}}\right)\sin\varphi\,.\,U_2$$
$$+\left(\frac{L_1\varrho_1}{a_1r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{r_2r_3}\sin\varphi_2+\ldots+\frac{L_{p+1}\varrho_{p+1}}{r_{2p}a_2}\sin\varphi_{p+1}\right)U_2+N.S \quad \ldots.(286)$$

In diesem Ausdrucke stellt das erste Glied den Kraftaufwand dar, welcher aufgeboten werden muß, um die Reibung zwischen den Zähnen zn überwinden; derselbe variirt in direktem Verhältnisse mit der von der Maschine zu leistenden Nutzarbeit $U_2$. Das zweite Glied stellt den Kraftaufwand dar, welcher dazu verwendet werden muß, um die Reibung an den Axen der Räder zu überwinden, welche durch den Druck der treibenden Kraft, durch den Druck des Nutzwiderstandes und durch den Druck der durch diese beiden Kräfte zwischen den Zähnen erzeugten Pressungen an den Axen der Räder hervorgerufen wird; dieses Glied variirt ebenfalls in direktem Verhältnisse mit der Nutzarbeit $U_2$. Das dritte Glied endlich bezeichnet den Kraftaufwand, welcher erforderlich ist, um die von den Gewichten der Räder an ihren Axen erzeugten Reibungen zu besiegen; dasselbe ist von der zu leistenden Nutzarbeit ganz unabhängig und variirt nur mit dem Raume S, welchen der Angriffspunkt der treibenden Kraft beschreibt.

## §. 238. Der Kraftaufwand zur Überwindung der Reibung zwischen den Zähnen.

Die auf die Reibung zwischen den Zähnen zu verwendende Arbeit ist durch den Ausdruck

$$\pi\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots\frac{1}{n_{2p}}\right)\sin\varphi \quad \ldots.(287)$$

dargestellt. Der Werth desselben ist offenbar desto geringer, je kleiner der Faktor $\sin\varphi$ oder der Reibungskoeffizient für die Berührungsflächen der Zähne ist, und je größer die Anzahlen der

Zähne der verschiedenen Räder des Systemes sind. Die Anzahl der Zähne an irgend Einem dieser Räder kann in der That so klein angenommen werden, daß dadurch der vorstehende Ausdruck im Vergleich zu $U_2$ einen sehr beträchtlichen Werth erhält, und man kann sogar durch die gleichzeitige Verminderung der Anzahlen der Zähne mehrerer Räder des Systemes die auf die Reibung an ihren Berührungsflächen zu verwendende Arbeit so sehr steigern, daß sie die Nutzarbeit $U_2$ überschreitet. Dies wird umso begreiflicher, wenn man beachtet, daß die Berührungsflächen der Zähne, nachdem die Maschine längere Zeit in Thätigkeit gewesen ist, gewöhnlich frei von dem dazwischen gebrachten Fette werden, sodaß der Reibungswinkel für die Oberflächen der Zähne in den meisten Fällen einen viel größeren Werth annimmt, als für die Oberflächen der Axen der Räder. Aus dieser Betrachtung ersieht man, wie wichtig es ist, den Rädern eines zusammengesetzten Systemes die größtmögliche Anzahl von Zähnen zu geben.

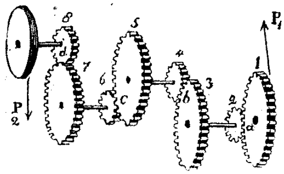
§. 239. Der Kraftaufwand zur Überwindung der Reibung, welche durch die treibenden Kräfte an den Axen erzeugt wird.

Die hierzu erforderliche Arbeit ist durch die Formel

$$\left(\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}\sin\varphi_1+\frac{L_2\varrho_2}{r_2 r_3}\sin\varphi_2+\frac{L_3\varrho_3}{r_4 r_5}\sin\varphi_3+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{L_p\varrho_p}{r_{2p-2}r_{2p-1}}\sin\varphi_p+\frac{L_{p+1}\varrho_{p+1}}{r_{2p}a_2}\sin\varphi_{p+1}\right)U_2 \ldots (288)$$

dargestellt, welche das zweite Glied des Ausdruckes (286) bildet. Es leuchtet ein, daß der Werth dieser Arbeit umso geringer wird, je kleiner die Größen $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$, ... oder die Reibungswinkel für die Berührungsflächen der Axen und ihrer Lager werden, oder je besser die Axen geschmiert werden; derselbe wird sich aber auch dann vermindern, wenn die Brüche $\frac{L_1\varrho_1}{a_1 r_1}$, $\frac{L_2\varrho_2}{r_2 r_3}$, $\frac{L_3\varrho_3}{r_4 r_5}$ kleiner werden.

Nun bezeichnen die Größen $L_1, L_2, L_3, \ldots$ für je zwei an Ein und derselben Axe befestigten Räder, welche hier als ein einziges Rad gedacht werden, den Abstand der Angriffspunkte der beiden auf dieses einzige Rad angebrachten Kräfte, wenn man diese Angriffspunkte auf eine Perpendikularebene zu der gemeinschaftlichen Umdrehungsaxe projizirt; es ist nämlich $L_1$ der Abstand des Angriffspunktes der treibenden Kraft $P_1$ (oder des Fußpunktes des Perpendikels $a_1$ aus dem Mittelpunkte des ersten Rades auf die Richtung dieser Kraft) von dem Berührungspunkte $a$ des ersten und zweiten Rades; $L_2$ ist der Abstand des Punktes $a$ von der Projektion des Berührungspunktes $b$ des dritten und vierten Rades auf die Ebene des zweiten Rades u. s. f. Es leuchtet ein, daß diese Größen $L_1$, $L_2$,... am kleinsten werden, wenn die Angriffspunkte der eben erwähnten Kräfte auf Ein und dieselbe Seite der entsprechenden Axe fallen, und daß dieselben am größten werden, wenn diese Angriffspunkte auf entgegengesetzte Seiten der gemeinschaftlichen Axe fallen, (vergl. §. 168, von welchem der vorliegende nur ein besonderer Fall ist). So wäre z. B. der kleinste Werth, welchen der Abstand $L_2$ annehmen kann, gleich $r_3 - r_2$ und der größte gleich $r_3 + r_2$, sodaß das Maximum und Minimum des Werthes von $L_2$ durch $r_3 \pm r_2$ und das Maximum und Minimum des Werthes vor $\frac{L_2 \varrho_2}{r_2 r_3}$ durch $\left(\frac{1}{r_2} \pm \frac{1}{r_3}\right)\varrho_2$ dargestellt werden kann.




Auf eine ähnliche Weise ergibt sich für das Maximum und Minimum des Werthes von $\frac{L_3 \varrho_3}{r_4 r_5}$ der Ausdruck $\left(\frac{1}{r_4} \pm \frac{1}{r_5}\right)\varrho_3$ u. s. f., sodaß sich das Maximum und Minimum der durch die Reibung an den Axen verloren gehenden Arbeit in der Form des Ausdruckes

$$\left\{\left(\frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{r_1}\right)\varrho_1 \sin\varphi_1 + \left(\frac{1}{r_2} \pm \frac{1}{r_3}\right)\varrho_2 \sin\varphi_2 + \left(\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)\varrho_3 \sin\varphi_3 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{r_{2p}} + \frac{1}{a_2}\right)\varrho_{p+1} \sin\varphi_{p+1}\right\} U_2$$

darstellt.

Hieraus ersieht man, daß in einem jeden Falle der Kraftaufwand zur Überwindung der Reibung an den Axen umso geringer sein wird, je kleiner das Verhältniß der Halbmesser dieser Axen zu den Halbmessern der Räder ist, indem derselbe durchaus nicht von den absoluten Dimensionen dieser Halbmesser, sondern nur von ihren gegenseitigen Verhältnissen abhängt, daß aber außerdem jener Kraftaufwand am geringsten sein wird, wenn die Räder so geordnet sind, daß die Projektion des Berührungspunktes irgend eines zusammengreifenden Paares auf die Ebene des nächstfolgenden Paares in die Mittellinie des letzteren, zwischen den Berührungspunkt seiner Zähne und den Mittelpunkt seiner Axe fällt, während der Kraftaufwand am größten sein wird, wenn jene Projektion ebenfalls in die letzgedachte Mittellinie, aber auf die entgegensetzte Seite des Mittelpunktes der Axe fällt. Der Unterschied zwischen der in diesen beiden äußersten Fällen auf die Reibung an den Axen zu verwendenden Arbeit ist durch die Formel

$$2\left\{\frac{\varrho_1}{r_1}\sin\varphi_1+\frac{\varrho_2}{r_3}\sin\varphi_2+\frac{\varrho_3}{r_5}\sin\varphi_3+\frac{\varrho_4}{r_7}\sin\varphi_4+\ldots+\frac{\varrho_p}{r_{2p-1}}\sin\varphi_p+\frac{\varrho+p_1}{a_2}\sin\varphi_{p+1}\right\}U_2$$

dargestellt, welche bei einem Systeme von sehr vielen Rädern zu einem beträchtlichen Bruche von $U_2$ anwachsen kann. Der Werth dieser Formel bezeichnet die Arbeit, welche durch eine unzweckmäßige Anordnung der Berührungspunkte der Räder verloren geht.

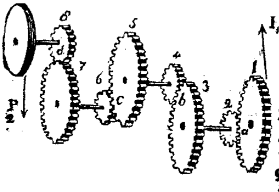
§. 240. Der Kraftaufwand zur Überwindung der Reibung, welche durch die Gewichte der Räder an den Axen erzeugt wird.

Das dritte und letzte Glied **N S** des Ausdruckes (286) stellt die Arbeit dar, welche zur Überwindung desjenigen Theiles der Reibung an den Axen erforderlich ist, der durch die Gewichte der einzelnen Räder des Systemes erzeugt wird. Von diesem Gliede bezeichnet der Faktor N einen Ausdruck (Gleichung 284), dessen einzelne Glieder als Faktoren die Größen $N_1, N_2, N_3, \ldots$ enthalten, deren allgemeine Form durch die Gleichung (252) gegeben ist, wenn man dabei berücksichtigt, daß die Richtungen der treibenden Kräfte für die verschiedenen Räderpaare, von dem zweiten an, in den Tangenten ihrer Berührungspunkte liegen. Die anderen Faktoren der Glieder des Ausdruckes von N (Gleichung

284) sind Brüche, deren Zähler aus den Produkten $n_3 n_5 \dots$ der Anzahlen der Zähne aller vorhergehenden treibenden Räder des Systemes, mit Ausnahme des ersten, und deren Nenner aus den Produkten $n_2 n_4 \dots$ der Anzahlen der Zähne aller vorhergehenden getriebenen Räder des Systemes bestehen. Wenn das Räderwerk von der Art ist, daß dadurch die Bewegung beschleunigt wird, sodaß die Anzahlen der Zähne der getriebenen Räder im Vergleich zu denen der treibenden Räder klein ist, und wenn die Größen $N_1, N_2, N_3, \dots$ sämmtlich positiv sind; so sieht man, daß alsdann der durch die Gewichte der Räder herbeigeführte Kraftverlust sehr beträchtlich werden kann. Da ferner die Koeffizienten von $N_1, N_2, N_3, \dots$ in dem Ausdrucke für N (Gleichung 284) sehr rasch zunehmen, und der Kraftverlust für die von dem ersten Rade am weitesten abliegenden Räder am größten ist; so ist es rathsam, die Gewichte der Räder mit ihrer Entfernung von dem ersten zu vermindern, was um so eher geschehen kann, da der Druck auf ein jedes folgende Rad in dem Maaße abnimmt, wie die Geschwindigkeit, unter welcher die Arbeit von demselben fortgepflanzt wird, zunimmt.

§. 241. Der Model eines Systemes von mehreren Rädern, in welchem alle treibenden und alle getriebenen Räder resp. einander gleich sind, und in welchem die Berührungspunkte der treibenden und getriebenen Räder eine ähnliche Lage haben.

Wenn die Anzahlen der Zähne und auch die Halbmesser aller treibenden Räder einander gleich sind; so hat man $n_1 = n_3 = n_5 = n_7 =$ etc. und $r_1 = r_3 = r_5 = r_7$ etc. Ebenso hat man, wenn auch die Anzahlen der Zähne und die Halbmesser der getriebenen Räder unter sich gleich sind, $n_2 = n_4 = n_6 =$ etc. und $r_2 = r_4 = r_6$ etc. Nimmt man zur Vereinfachung der Untersuchung an, daß der Angriffspunkt der treibenden Kraft



an dem ersten Rade zu dem Berührungspunkte $a$ dieses Rades mit dem ersten getriebenen Rade eine ganz ähnliche Lage habe, wie dieser Punkt $a$ zu dem Berührungspunkte $b$ des nächsten Paares, sodaß $a_1 = r_2$ ist, und daß der

Angriffspunkt des Nutzwiderstandes $P_2$ am letzten Rade ebenso gegen den Berührungspunkt des letzten Paares liege, wie dieser Punkt gegen den Berührungspunkt des vorhergehenden Paares liegt, daß also $a_2 = r_1$ ist; so hat man offenbar $L_1 = L_2 = L_3 = \ldots = L_{p+1}$ und (nach Gleichung 252) $N_1 = N_2 = \ldots = Np$.

Durch diese Substitutionen wird der Model (Gleichung 285), unter der Voraussetzung, daß alle Axen dieselben Dimensionen haben, von demselben Materiale gefertigt und in gleicher Weise geschmiert sind, wenn man beachtet, daß das System $p$ Paar ineinandergreifender Räder enthält,

$$U_1 = \left\{ 1 + \pi p \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \sin\varphi + (p+1) \frac{L_1 \varrho_1}{r_1 r_2} \sin\varphi_1 \right\} U_2 + N.S \quad \ldots.(289)$$

Der Werth von N (Gleichung 284) wird unter diesen Voraussetzungen

$$N = N_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right) + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-1} \right\}$$

oder

$$N = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \left\{ \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^p - 1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) - 1} \right\} N_1 \quad \ldots.(290)$$

## Das Räderwerk vom kleinsten Widerstande.

§. 242. Ein System von lauter gleichen treibenden und lauter gleichen getriebenen Rädern, wie es in dem vorhergehenden Paragraphe beschrieben ist, soll an dem letzten Rade eine bestimmte Nutzarbeit $U_2$ unter einer Geschwindigkeit hervorbringen, welche $m$ mal größer oder kleiner ist, als die, unter welcher die Arbeit $U_1$ der treibenden Kraft am ersten Rade verrichtet wird; man verlangt die Anzahl $p$ der Räderpaare zu kennen, bei welcher die durch den Raum S auszuübende Arbeit $U_1$ der treibenden Kraft ein Minimum wird.

Wenn allgemein $a_1$ und $a_2$ die perpendikularen Abstände von der ersten und letzten Axe sind, an welchen resp. die treibende Kraft $\mathbf{P}_1$ und der Nutzwiderstand $\mathbf{P}_2$ wirkt; so ist der Raum, welchen der Angriffspunkt von $\mathbf{P}_1$ bei Einer Umdrehung des ersten Rades beschreibt, $= 2\pi a_1$. Während sich aber das erste Rad Ein Mal umdrehet, drehet sich das letzte oder $2p$te Rad, nach Gleichung (236), $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^p$ mal herum. Ebenso viel mal bewegt sich nun auch der Angriffspunkt des Nutzwiderstandes $\mathbf{P}_2$ um die letzte Axe, beschreibt also einen Raum $= 2\pi a_2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^p$, während der Angriffspunkt der treibenden Kraft $\mathbf{P}_1$ den Raum $2\pi a_1$ beschreibt. Hieraus und aus der Forderung, daß die Geschwindigkeit der Nutzarbeit $m$ mal so groß oder so klein sein soll, als die Geschwindigkeit der Arbeit der treibenden Kraft, folgt

$$m = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^p.$$

Bei der symmetrischen Anordnung des Systemes §. 241 ist angenommen, daß $a_1 = r_2$ und $a_2 = r_1$, also $\frac{a_2}{a_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$ sei. Für diesen Fall hat man also

$$m = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p+1},$$

zu setzen. Hieraus folgt

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2} = m^{\frac{1}{p+1}}.$$

$$\frac{1}{n_2} = \frac{m^{\frac{1}{p+1}}}{n_1} \text{ und } \frac{1}{r_2} = \frac{m^{\frac{1}{p+1}}}{r_1}, \text{ mithin auch}$$

$$\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) = \frac{m^{\frac{1}{p+1}} + 1}{n_1} \text{ und } \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{m^{\frac{1}{p+1}}}{r_1^{\,2}}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Model (Gleichung 289), und setzt für N seinen Werth aus Gleichung (290); so kommt

$$U_1 =$$

$$\Big\} 1+\frac{\pi}{n_1}p\left(m^{\frac{1}{p+1}}+1\right)\sin\varphi+\left(\frac{L_1\varrho_1}{r_1{}^2}\right)(p+1)m^{\frac{1}{p+1}}\sin\varphi_1\Big\{\ U_2$$

$$+\left(\frac{m-m^{\frac{1}{p+1}}}{m^{\frac{1}{p+1}}-1}\right)N_1 . S \ldots . (291)$$

Es leuchtet ein, daß die Aufgabe durch denjenigen Werth von $p$ gelös't wird, welcher den Bedingungen $\frac{dU_1}{dp}=o$ und $\frac{d^2U_1}{dp_2}>0$ ein Genüge leistet. Die erste dieser beiden Bedingungen ergibt nach der Differenziation der vorstehenden Gleichung

$$\Big\} m^{\frac{1}{p+1}}\left[\frac{\pi}{n_1}\left(1-\frac{p\log m}{(p+1)^2}\right)\sin\varphi+\frac{L_1\varrho_1}{r_1{}^2}\left(1-\frac{\log m}{p+1}\right)\sin\varphi_1\right]+\frac{\pi}{n_1}\sin\varphi\Big\{\ U_2$$

$$+\frac{m^{\frac{1}{p+1}}(m-1)\log m}{(p+1)^2\left(m^{\frac{1}{p+1}}-1\right)^2}N_1 S=0 \ldots . (292)$$

Diese Gleichung kann durch eine Näherungsmethode für $p$ aufgelös't werden, wenn alle übrigen darin vorkommenden Größen gegeben sind. Differenziirt man dieselbe noch einmal, und erhält alsdann durch Substitution des Werthes von $p$ aus Gleichung (292) eine positive Größe; so erfüllt der für $p$ gefundene Werth beide Bedingungen eines Minimums der Funktion (291) und entspricht den Forderungen der vorliegenden Aufgabe.

Setzt man $\varphi_1=o$ und $N_1=o$, oder mit anderen Worten, vernachlässigt man den Einfluß aller Reibungen an den Axen der Räder; so reduzirt sich die Gleichung (292) auf

$$m^{\frac{1}{p+1}}\left(1-\frac{p\log m}{(p+1)^2}\right)\frac{\pi}{n_1}\sin\varphi+\frac{\pi}{n_1}\sin\varphi=0$$

oder, nach gehöriger Reduktion, auf

$$\frac{(p+1)^2}{p}\left(1+m^{-\frac{1}{p+1}}\right)=\log m \ldots . (293)$$

Nachdem diese Gleichung für $p$ aufgelös't wäre, hätte man, wenn die Auflösung eine irrationale Zahl ergäbe, für $p$ die zunächst liegende ganze Zahl zu nehmen. Aus dem gefundenen Werthe für $p$ und dem gegebenen Werthe für $m$ würde alsdann das anzunehmende Verhältniß der Anzahlen der Zähne oder der Halbmesser der treibenden Räder zu den Anzahlen der Zähne oder der Halbmesser der getriebenen Räder nach den Formeln

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{r_1}{r_2}=m^{\frac{1}{p+1}}$$

zu berechnen sein. Von den beiden Größen $r_1$ und $r_2$ könnte immerhin die Eine im voraus bestimmt sein, die andere aber ist von $p$ abhängig, und ergibt sich erst nach der Auflösung der Gleichung (293). Hieraus folgt, daß von den beiden Abständen, in welchen die treibende Kraft und der Nutzwiderstand von ihren Axen angebracht werden müssen, und welche hier resp. $r_2$ und $r_1$ sind, immer nur Einer im voraus gegeben sein dürfte, während der andere erst nach der Ermittelung des Werthes von $p$ bestimmt werden könnte.

Sollten jedoch die Abstände $a_1$ und $a_2$ der treibenden Kraft und des Nutzwiderstandes im voraus gegebene und von den Halbmessern der Räder unabhängige Größen sein; so hätte man nach dieser Bedingung die allgemeine Form des Models (285) einzurichten, alsdann, wie im Anfange dieser Untersuchung bemerkt ist,

$$m=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^p$$

darin zu substituiren und wie im Vorstehenden behuf Bestimmung von $p$ zu verfahren. Unter diesen letzteren und den übrigen Voraussetzungen des §. 241 würde man für den Model des Systemes die Formel

$$U_1=$$
$$\left\{1+\pi p\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi+\left(\frac{L_1}{a_1r_1}+(p-1)\frac{L_2}{r_1r_2}+\frac{L_{p+1}}{a_2r_2}\right)\varrho_1\sin\varphi_1\right\}U_2$$
$$+N.S$$

erhalten, worin

$$N=\frac{r_1}{a_1}\left\{N_1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)N_2+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2N_2+\ldots+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-2}N_2+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-1}N_p\right\}$$

$$=\frac{r_1}{a_1}\left\{N_1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left[1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-3}\right]N_2+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-1}N_p\right\}$$

$$=\frac{r_1}{a_1}\left\{N_1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left[\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-2}-1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)-1}\right]N_2+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{p-1}N_p\right\}$$

ist.

Vernachlässigte man auch hier alle Reibungen an den Axen der Räder, setzte also $\sin\varphi_1=o$ und $N=o$; so würde sich der Model auf die Gleichung

$$U_1=\left\{1+\pi p\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sin\varphi\right\}U_2$$

reduziren, und wenn man alsdann nach der obigen Beziehung

$$\frac{n_1}{n_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}m\right)^{\frac{1}{p}} \text{ und demnach}$$

$$\frac{1}{n_2}=\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}m\right)^{\frac{1}{p}}}{n_1} \text{ und}$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}m\right)^{\frac{1}{p}}+1}{n_1}$$

substituirte,

$$U_1=\left\{1+\frac{\pi}{n_1}p\left[\left(\frac{a_1}{a_2}m\right)^{\frac{1}{p}}+1\right]\sin\varphi\right\}U_2.$$

Differenziirt man diese Gleichung in Beziehung zu $p$; so ergibt sich unter den hier gemachten Voraussetzungen statt der Bedingung (293) die folgende,

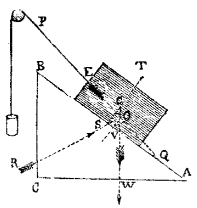
$$p\left[1+\left(\frac{a_1}{a_2}m\right)^{\frac{1}{p}}\right]=\log\left(\frac{a_1}{a_2}m\right)\ldots\ldots(293a)$$

## Die geneigte Ebene.

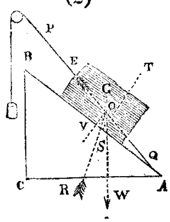
§. 243. AB sei die Oberfläche einer geneigten oder schiefen

Ebene, auf welcher ein Körper, dessen Schwerpunkt G und dessen Gewicht W ist, vermöge eines Druckes P im Gleichgewichte erhalten wird, der sich in beliebiger Richtung auf den Körper äußert und den man sich durch die Spannung eines Seiles erzeugt denken kann. OR sei die Richtung der Resultante von P und W und ST ein Perpendikel auf der geneigten Ebene im Punkte S, wo die Linie OR dieselbe durchschneidet.

(1)




(2)




Wenn sich die Richtung der Resultante OR auf der nach unten gekehrten Seite des Perpendikels ST unter einem Winkel OST, gleich dem Reibungswinkel, gegen das letztere neigt (wie in der Figur 1); so ist der Körper im Begriffe, aufwärts zu gleiten, und wenn sich jene Richtung auf der nach oben gekehrten Seite des Perpendikels unter einem Winkel OST, gleich dem Reibungswinkel, gegen dasselbe neigt (wie in der Figur 2); so ist der Körper im Begriffe, abwärts zu gleiten (§. 138). Die erstere Voraussetzung entspricht dem oberen und die letztere dem unteren Gränzzustande des Gleichgewichtes (§. 140).

In einer jeden dieser beiden Lagen ist der Widerstand der Ebene, welcher mit R bezeichnet werde, der Resultante von P und W gleich und gerade entgegengesetzt. Man hat also drei Kräfte P, W und R, welche sich im Gleichgewichte erhalten, und daher nach §. 14

$$\frac{P}{W} = \frac{\sin WOR}{\sin POR}.$$

Bezeichnet man den Neigungswinkel BAC der geneigten Ebene gegen den Horizont mit $\iota$, den Reibungswinkel OST mit $\varphi$ und den Neigungswinkel PQB der Richtung der Kraft P gegen die Ebene mit $\vartheta$, setzt dabei voraus, daß die in den Figuren dargestellten Durchschnitte in einer vertikalen und auf der geneigten Ebene perpendikular stehenden Ebene liegen; so hat man, wenn man **OV** perpendikular zu **AB** zieht,

in Fig. 1. $\mathbf{WOR}=\mathbf{WOV}+\mathbf{SOV}=\mathbf{BAC}+\mathbf{OST}=\iota+\varphi$,

$$\text{und } \mathbf{POR}=\mathbf{PQB}+\mathbf{OSQ}=\mathbf{PQB}+\frac{\pi}{2}-\mathbf{OST}=\frac{\pi}{2}+\vartheta-\varphi;$$

in Fig. 2. $\mathbf{WOR}=\mathbf{WOV}-\mathbf{SOV}=\mathbf{BAC}-\mathbf{OST}=\iota-\varphi$,

$$\text{und } \mathbf{POR}=\mathbf{PQB}+\mathbf{OSQ}=\mathbf{PQB}+\frac{\pi}{2}+\mathbf{OST}=\frac{\pi}{2}+\vartheta+\varphi;$$

also

$$\mathbf{WOR}=\iota\pm\varphi \text{ und } \mathbf{POR}=\frac{\pi}{2}+(\vartheta+\varphi),$$

worin die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem der Körper im Begriffe ist, aufwärts, wie in Fig. 1, oder abwärts, wie in Fig. 2, zu gleiten. Setzt man also voraus, daß der Winkel $\varphi$ positiv oder negativ genommen werde, jenachdem der Körper im Begriffe ist, nach oben oder nach unten zu gleiten; so hat man allgemein

$$\mathbf{WOR}=\iota+\varphi,\ \mathbf{POR}=\frac{\pi}{2}+(\vartheta-\varphi),$$

und demnach

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{W}}=\frac{\sin(\iota+\varphi)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta-\varphi\right)}=\frac{\sin(\iota+\varphi)}{\cos(\vartheta-\varphi)}, \text{ woraus}$$

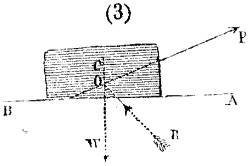
$$\mathbf{P}=\mathbf{W}\,.\,\frac{\sin(\iota+\varphi)}{\cos(\vartheta-\varphi)}\,\ldots\ldots(294)$$

folgt.

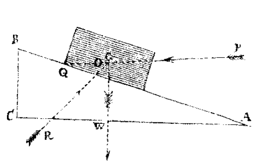
Wenn die Richtung der Kraft **P** der geneigten Ebene parallel, oder wenn $<\mathbf{PQB}=\vartheta=o$ ist; so wird die vorstehende Beziehung

$$\mathbf{P}=\mathbf{W}\,.\,\frac{\sin(\iota+\varphi)}{\cos\vartheta}\,\ldots\ldots(295)$$

(3)




(4)



Wenn $\iota = o$ ist, so wird die Ebene horizontal (Fig. 3) und die Beziehung zwischen P und W nimmt die Form

$$P = W . \frac{\sin \varphi}{\cos(\vartheta - \varphi)} \dots (296)$$

an.

Wenn gleichzeitig $\vartheta = o$ wäre; so hätte man $P = W \operatorname{tong} \varphi$, wie es nach §. 138 auch sein muß. Wenn der Winkel $PQB = \vartheta$ (Fig. 1) über $\frac{\pi}{2} + \varphi$ hinaus wächst und $= \pi - \vartheta'$ wird, worin $\vartheta'$ den Winkel PQA bezeichnet, der $< \frac{\pi}{2} - \varphi$ ist, wie in Fig. 4; so wird $\cos(\vartheta - \varphi) = \cos(\pi - \vartheta' - \varphi) = -\cos(\vartheta' + \varphi)$, worin $\cos(\vartheta' + \varphi)$ positiv bleibt, und die Beziehung (294) nimmt die Form

$$P = -W \frac{\sin(\iota + \varphi)}{\cos(\vartheta' + \varphi)} \dots (297)$$

an. Das negative Zeichen lehrt, daß die Kraft P, vermöge welcher der Körper die Ebene hinauf gleiten soll, in diesem Falle nach einer Richtung wirken muß, welche der bei Fig. 1 angenommenen entgegengesetzt ist, oder daß die Kraft P in diesem Falle in der Richtung PO einen Druck ausüben muß, während sie vorher in der Richtung OP einen Zug äußerte.

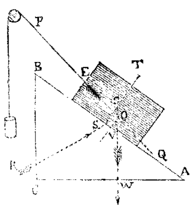
Wenn übrigens der Körper im Begriffe wäre, auf der Ebene herab zu gleiten, sodaß $\varphi$ negativ genommen werden müßte, und wenn außerdem $\varphi > \iota$ wäre; so würde $\sin(\iota + \varphi)$ in $\sin(\iota - \varphi) = -\sin(\varphi - \iota)$ übergehen, sodaß P alsdann wieder einen positiven Werth

$$P = W . \frac{\sin(\varphi - \iota)}{\cos(\vartheta' - \varphi)} \dots (298)$$

annähme, durch welchen die Kraft bestimmt ist, welche eben erfordert wird, um den Körper auf der Ebene herabzuziehen. Wäre in dem letzteren Falle $\iota = \varphi$; so ergäbe sich $P = o$, und der Körper würde unter diesen Umständen im Begriffe sein, ohne die Anwendung irgend einer anderen Kraft, als der seines Gewichtes, auf der Ebene herabzugleiten. Man sieht, daß in diesem Falle die Ebene unter dem Reibungswinkel gegen den Horizont geneigt ist.

## §. 244. Die Richtung der kleinsten Zugkraft.

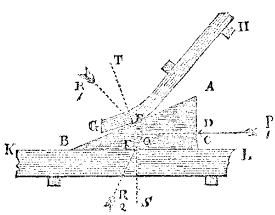
Von der unendlichen Menge der verschiedenen Richtungen, in welchen die Kraft **P** angebracht werden kann, um den Körper die geneigte Ebene hinauf zu bewegen, erfordert eine jede einen anderen Werth für diese Kraft, und man sieht, daß diejenige Richtung den kleinsten Werth für **P** zu diesem Zwecke erfordern wird, welche den Nenner des Bruches in Gleichung (294) am größtmöglichen oder welche $\vartheta - \varphi = o$ oder $\vartheta = \varphi$ macht, indem der




Zähler dieses Bruches von der Richtung der Kraft **P** unabhängig ist. Demnach entspricht die Richtung von **P** der des geringsten Zuges, wenn der Winkel **PQB** dem Reibungswinkel gleich wird, eine Beziehung, welche für einen jeden der im vorhergehenden Paragraphe untersuchten Fälle Gültigkeit hat.

## §. 245. Die bewegliche geneigte Ebene.

**ABC** stelle eine Verbindung zweier gegeneinander geneigter




Ebenen **AB** und **CB** dar, auf welche in der Richtung $\mathbf{P_1D}$, parallel zu **CB**, die Kraft $\mathbf{P_1}$ wirkt, und welche zwischen zwei widerstehenden Flächen **GH** und **KL** beweglich ist, von denen die Eine fest bleibt und die andere im Begriffe ist, dem Drucke der schiefen Ebene nachzugeben.

Wenn man sich die Resultanten der Widerstände der verschiedenen Punkte der beiden Ebenen **AB** und **CB** resp. durch $\mathbf{R_1}$ und $\mathbf{R_2}$ dargestellt denkt; so leuchtet ein, daß die Richtungen dieser Resultanten und der Kraft $\mathbf{P_1}$ in Ein und demselben Punkte **O** zusammentreffen werden (da eine jede dieser drei Kräfte der Resultante der beiden anderen gleich und entgegengesetzt ist) und daß, weil das System der schiefen Ebenen im Begriffe ist, auf einer jeden der beiden Flächen zu gleiten, die Richtung einer jeden der beiden erwähnten Resultanten mit der Perpendikularen auf den schiefen Ebenen einen Winkel einschließen wird, welcher dem entsprechenden Reibungswinkel gleich ist.

Sind demnach **ET** und **FS** Perpendikel auf den Ebenen **AB** und **CB** in den Durchschnittspunkten der Richtungen von $R_1$ und $R_2$ mit diesen Ebenen und $\varphi_1$, $\varphi_2$ die Reibungswinkel für diese Ebenen und die widerstehenden Flächen **GH** und **KL** respektive; so hat man $R_1ET = \varphi_1$ und $R_2FS = \varphi_2$.

Da die Kräfte $P_1, R_1, R_2$ einander das Gleichgewicht halten; so ist (§. 14)

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{\sin EOF}{\sin DOF} \text{ und } \frac{P_1}{R_2} = \frac{\sin EOF}{\sin DOE}.$$

Nun ist die Summe der vier Winkel des Vierecks **BEOF** gleich vier rechten; demnach

$$EOF = 2\pi - EBF - OEB - OFB,$$

d. i., da $EBF = \iota$, $OEB = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$, $OFB = \frac{\pi}{2} + \varphi_2$ ist,

$$EOF = \pi - \iota - \varphi_1 - \varphi_2.$$

Ebenso ist

$$DOE = 2\pi - ADO - AEO - DAE,$$

d. i., da $ADO = \frac{\pi}{2}$, $AEO = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, $DAE = \frac{\pi}{2} - \iota$ ist,

$$DOE = \frac{\pi}{2} + \iota + \varphi_1.$$

Da ferner **DO** parallel zu **CB** ist; so hat man

$$DOF = \pi - OFC,$$

d. i., weil $OFC = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ ist,

$$DOF = \frac{\pi}{2} + \varphi_2.$$

Hierdurch werden die obigen Beziehungen

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{\sin[\pi - (\iota + \varphi_1 + \varphi_2)]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)} = \frac{\sin(\iota + \varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\varphi_2}$$

und

$$\frac{P_1}{R_1}=\frac{\sin[\pi-(\iota+\varphi_1+\varphi_2)]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\iota+\varphi_1\right)}=\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\iota+\varphi_1)}.$$

Hieraus folgt:

$$P_1=R_1\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_2}\ \ldots\ldots(299)$$

$$P_1=R_2\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\iota+\varphi_1)}\ \ldots\ldots(300)$$

In den Richtungen $R_1E$ und $R_2F$ müßten nun von außen Kräfte gegen die Flächen GH und KL angebracht werden, wenn sie der Wirkung der Kraft $P_1$ nicht nachgeben sollten. Diese Kräfte könnten auch durch feste Hindernisse ganz oder zum Theil ersetzt werden. Nimmt man z. B. an, die Flächen GH und KL wären durch feste Hindernisse verhindert, sich parallel zu den Ebenen AB und CB zu bewegen, und es wäre ihnen nur gestattet, sich perpendikular zu diesen Ebenen zu bewegen, in diesen perpendikularen Richtungen TE und SF seien jedoch die Kräfte $P'_2$ und $P''_2$ wirksam, welche sich den Bewegungen widersetzten; so müßte $R_1$ die Resultante der Kraft $P'_2$ und des Widerstardes des festen Hindernisses in paralleler Richtung zu BA, und $R_2$ müßte die Resultante der Kraft $P''_2$ und des Widerstandes des festen Hindernisses in paralleler Richtung zu BC sein. Demnach müßte man haben

$$R_1=\frac{P'_2}{\cos R_1ET}=\frac{P'_2}{\cos\varphi_1}\ \text{und}\ R_2=\frac{P''_2}{\cos R_2FS}=\frac{P''_2}{\cos\varphi_2}.$$

Setzt man diese Werthe für $R_1$ und $R_2$ in die vorstehenden Gleichungen; so werden dieselben

$$P_1=P'_2\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1\,.\cos\varphi_2}\ \ldots\ldots(299\text{a})$$

$$P_1=P''_2\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\iota+\varphi_1)\,.\cos\varphi_2}\ \ldots\ldots(300\text{a})$$

In dem Falle, wo die Fläche GH dem Drucke der schiefen Ebene in perpendikularer Richtung nachgibt, während die Fläche KL fest bleibt, drückt der Model der schiefen Ebene ABC die Beziehung zwischen der Arbeit der treibenden Kraft $P_1$ und der Nutzarbeit aus, welche hier in der Überwindung der widerstehenden Kraft $P'_2$ besteht, (s. §. 148). Da nun in der Gleichung (299) der Koeffizient $\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2}$ für den Koeffizienten $\Phi_1$ der allgemeinen Gleichung (119) steht, und der Werth dieses Koeffizienten für den Fall, daß keine Reibungswiderstände vorhanden, also die Reibungswinkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ gleich null wären, in

$$\Phi_1(0) = \sin\iota$$

übergeht, sodaß man

$$P_1(0) = P'_2 \sin\iota$$

hat; so ergibt sich nach Gleichung (121) für den Model der geneigten Ebene in dem vorliegenden Falle

$$U_1 = U_2 \frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\iota \,.\, \cos\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2} \ldots . (301)$$

Wäre dagegen die Fläche GH fest, und gäbe KL dem Drucke in perpendikularer Richtung zu BC nach; so hätte man nach Gleichung (300)

$$\Phi_1 = \frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\iota+\varphi_1) \,.\, \mathrm{sos}\,\varphi_2}, \text{ also}$$

$$\Phi(0) = \mathrm{tang}\,\iota \text{ und } P_1(0) = P''_2 \,\mathrm{tang}\,\iota,$$

und der Model der geneigten Ebene würde für diesen Fall

$$U_1 = U_2 \frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}{\mathrm{tang}\,\iota \,.\, \cos(\iota+\varphi_1) \,.\, \cos\varphi_2} \ldots . (302)$$

Die Gleichungen (301) und (302) können resp. unter die Form

$$U_1 = U_2 \frac{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos^2\varphi_1} \Big\} 1 + \mathrm{tang}(\varphi_1+\varphi_2) \,.\, \cot\iota \Big\{ \text{ und}$$

$$U_1 = U_2 \frac{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1 \,.\, \cos\varphi_2} \Big\} \frac{1+\mathrm{tang}(\varphi_1+\varphi_2) \,.\, \cot\iota}{1-\mathrm{tang}\,\varphi_1 \,.\, \mathrm{tang}\,\iota} \Big\{$$

gebracht werden.

Da der Winkel $\iota$ nicht $> \frac{\pi}{2}$ werden kann; so ist der Werth von $U_1$, welcher einem gegebenen Werthe von $U_2$ entspricht, in dem ersten dieser beiden Fälle am kleinsten, wenn $\iota = \frac{\pi}{2}$ genommen wird. Im zweiten Falle erhält man ein Minimum des Werthes von $U_1$, wenn

$$\operatorname{tang}\iota = \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left\{ \sqrt{1 + \cot\varphi_1 . \cot(\varphi_1 + \varphi_2)} - 1 \right\}$$

oder auch ....(303)

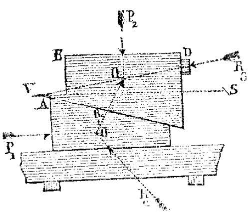
$$= \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2) \left\{ \sqrt{\frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1 . \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}} - 1 \right\}$$

ist.

Aus der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen für $U_1$, welche sich auf den Fall bezieht, wo die Hypotenuse der geneigten Ebene die treibende Fläche bildet, geht hervor, daß die durch die Reibungen verlorene Arbeit umso geringer ist, je größer der Neigungswinkel der schiefen Ebene oder je geringer der mechanische Vortheil ist, welchen man durch diese Vorrichtung als Keil gewöhnlich zu erreichen strebt.

§. 246. Ein System von zwei beweglichen geneigten Ebenen.

**A** und **B** seien zwei gleiche geneigte Ebenen, oder vielmehr zwei Verbindungen von je zwei gegeneinander geneigten Ebenen; **A** ruhe auf einer horizontalen Fläche und empfange durch die Wirkung der horizontalen Kraft $P_1$ eine gleitende Bewegung auf der Unterlage, indem dieselbe gleichzeitig der **B** eine Bewegung mittheilt, die sich vermöge eines in **D** angebrachten Hindernisses nur in vertikaler Richtung äußern kann und der sich in dieser Richtung die widerstehende Kraft $P_2$ entgegensetzt. Es soll eine Beziehung zwischen den Kräften $P_1$ und $P_2$ in dem Gränzzustande des Gleichgewichtes und der Model des Systemes angegeben werden.



Wenn $R_1$ der Druck der schiefen Ebene **A** gegen die schiefe Ebene **B** oder der Widerstand der letzteren gegen die erstere und $R_3$ der Widerstand des Hindernisses **D** gegen die Kathete von **B** ist; so erhält man die Beziehung zwischen $R_1$ und $P_1$ nach Gleichung (299), und da $R_1$, $R_3$, $P_2$ drei Kräfte im Gleichgewichte sind; so wird die Beziehung zwischen $R_1$ und $P_2$ (§. 14) durch

$$\frac{R_1}{P_2}=\frac{\sin P_2 Q R_3}{\sin R_1 Q R_3}$$

ausgedrückt. Nun neigt sich offenbar die Richtung $R_3 Q$ der Kraft $R_3$ gegen das Perpendikel auf der Kathete der schiefen Ebene **B** unter einem Winkel, welcher dem Reibungswinkel zwischen der Oberfläche dieser Kathete und dem Hindernisse **D** gleich kommt. Bezeichnet man diesen Reibungswinkel mit $\varphi_3$; so ist der Neigungswinkel von $R_3$ gegen die Kathete der Ebene **B** gleich $\frac{\pi}{2}-\varphi_3$, sodaß auch

$$P_2 Q R_3=\frac{\pi}{2}-\varphi_3$$

ist. Verlängert man die Linie $R_3Q$ bis zu ihrem Durchschnittspunkte **V** mit der Oberfläche der schiefen Ebene **A**, und zieht **VS** horizontal; so ist ferner

$$R_1QR_3=QVR_1+VR_1Q=R_3VS+SVA+VR_1Q=\varphi_3+\iota+\frac{\pi}{2}+\varphi_1,$$

worin $\iota$ die Neigung der beiden gleichen geneigten Ebenen gegen ihre horizontalen Grundflächen bezeichnet.

Substituirt man diese Werthe für die Winkel $P_2QR_3$ und $R_1QR_3$ in die vorstehende Beziehung; so kommt

$$\frac{R_1}{P_2}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_3\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\iota+\varphi_1+\varphi_3\right)}=\frac{\cos\varphi_3}{\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit der Gleichung (299) und löst dieselbe alsdann für $P_1$ auf; so ergibt sich

$$P_1=P_2\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)\,.\cos\varphi_3}{\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)\,.\cos\varphi_2}\ldots\ldots(304)$$

und demnach für den Model dieses Systemes, da hier

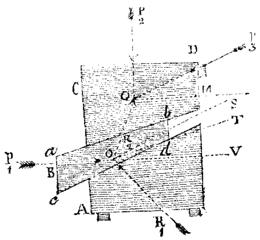
$$\Phi_1=\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)\,.\cos\varphi_3}{\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)\,.\cos\varphi_2},\text{ also}$$

$\Phi_1(0)=\operatorname{tang}\iota$ ist, (§. 152)

$$U_1=U_2\frac{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)\,.\cos\varphi_3}{\operatorname{tang}\iota\,.\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)\,.\cos\varphi_2}\ldots\ldots(305)$$

## §. 247. Ein System von drei geneigten Ebenen, von denen zwei beweglich und die dritte fest ist.

Die geneigte Ebene **A** in der seitstehenden Figur sei fest, die geneigte Ebene **B** (oder vielmehr die Verbindung der beiden schiefen Ebenen *ab* und *cd*), deren obere Fläche eine geringere Neigung gegen den Horizont hat, als die untere, sei auf **A** beweglich; endlich sei **C** eine dritte geneigte Ebene, welche auf **B** ruhet und an einer horizontalen Bewegung durch den Widerstand bei **D** verhindert wird, der es aber gestattet ist, längs dieses Widerstandes vertikal in die Höhe zu gleiten. Es soll eine Beziehung zwischen der horizontalen treibenden Kraft $\mathbf{P}_1$, welche auf **B** wirkt, und der vertikalen Kraft $\mathbf{P}_2$, welche gegen **C** wirkt, im Gränzzustande des Gleichgewichtes angegeben werden.




$\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ seien die Widerstände der Flächen, auf denen Bewegung stattfindet (s. die Figur), $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ die ihnen entsprechenden Reibungswinkel, $\iota_1$, $\iota_2$ resp. die Neigungen der unteren und oberen Berührungsflächen *dc* und *ba* von **B** gegen den Horizont.

Da $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, ebenso wie $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, Kräfte im Gleichgewichte sind; so hat man

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{R}_2} = \frac{\sin \mathbf{R}_2\mathbf{O}\mathbf{R}_1}{\sin \mathbf{P}_1\mathbf{O}\mathbf{R}_1}, \quad \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{P}_2} = \frac{\sin \mathbf{P}_2\mathbf{Q}\mathbf{R}_3}{\sin \mathbf{R}_2\mathbf{Q}\mathbf{R}_3},$$

und wenn man diese beiden Gleichungen miteinander multiplizirt,

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{P}_2} = \frac{\sin \mathbf{R}_2\mathbf{O}\mathbf{R}_1 . \sin \mathbf{P}_2\mathbf{Q}\mathbf{R}_3}{\sin \mathbf{P}_1\mathbf{O}\mathbf{R}_1 . \sin \mathbf{R}_2\mathbf{Q}\mathbf{R}_3}.$$

Zieht man **OS** und **OT** resp. parallel zu den Oberflächen *cd* und *ab* von **B**, und **QM** horizontal; so ist

$$\mathbf{R}_2\mathbf{O}\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1\mathbf{OS} + \mathbf{QOT} - \mathbf{TOS}.$$

Man hat aber auch $\mathbf{R}_1\mathbf{OS} = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, da **OS** parallel *cb* ist, ferner $QOT = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$, da $OT$ parallel $ab$ ist, und $TOS =$ der Neigung der beiden Oberflächen von B gegeneinander oder $= \iota_1 - \iota_2$; demnach

$$R_2OR_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) - (\iota_1 - \iota_2) = \pi - (\iota_1 - \iota_2) - (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Ferner ist

$$P_2QR_3 = \frac{\pi}{2} - R_3QM = \frac{\pi}{2} - \varphi_3.$$

Verlängert man $P_1O$ bis $V$; so ist

$$P_1OR_1 = \pi - R_1OV = \pi - (R_1OS - SOV)$$
$$= \pi - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) - \iota_1\right] = \frac{\pi}{2} + \iota_1 + \varphi_1.$$

Endlich hat man

$$R_2QR_3 = OQM + MQR_3,$$

oder weil $MQR_3 = \varphi_3$ und

$$OQM = \pi - QOV = \pi - (QOT + TOV) = \pi - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) + \iota_2\right]$$
$$= \frac{\pi}{2} - \iota_2 + \varphi_2 \text{ ist,}$$

$$R_2QR_3 = \frac{\pi}{2} - \iota_2 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - (\iota_2 - \varphi_2 - \varphi_3).$$

Setzt man die Werthe für diese Winkel in die obige Beziehung; so wird dieselbe

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sin\left[\pi - (\iota_1 - \iota_2) - (\varphi_1 + \varphi_2)\right] \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \iota_1 + \varphi_1\right) \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\iota_2 - \varphi_2 - \varphi_3)\right]}$$

und hieraus folgt:

$$P_1 = P_2 \frac{\sin[(\iota_1 - \iota_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)] \cdot \cos\varphi_3}{\cos(\iota_1 + \varphi_1) \cdot \cos[\iota_2 - (\varphi_2 + \varphi_3)]} \dots (306)$$

Nach §. 152 erhält man also für den Model des vorliegenden Systemes, wenn man beachtet, daß hier

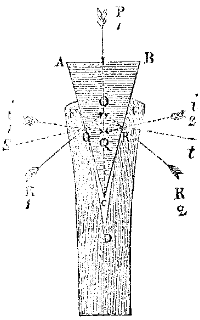
$$\Phi_1(o) = \frac{\sin(\iota_1 - \iota_2)}{\cos\iota_1 . \cos\iota_2}$$

ist,

$$U_1 = U_2 \frac{\cos\iota_1 . \cos\iota_2 . \sin(\iota_1 - \iota_2 + \varphi_1 + \varphi_2) . \cos\varphi_3}{\sin(\iota_1 - \iota_2) . \cos(\iota_1 + \varphi_1) . \cos(\iota_2 - \varphi_2 - \varphi_3)} \dots\dots (307).$$

## Der Keil, durch Druck getrieben.

§. 248. **ACB** sei ein gleichschenkliger Keil, dessen Winkel **ACB** durch $2\iota$ dargestellt werde. Derselbe werde durch den Druck $P_1$ in der Richtung seiner Mittellinie zwischen die beiden widerstehenden Flächen **DE** und **DF** getrieben, und $R_1$ und $R_2$ seien die Widerstände dieser Flächen gegen die wirkenden Seitenflächen **CA** und **CB** des Keiles, wenn der Letztere im Begriffe ist, vorzudringen. Es leuchtet ein, daß in diesem Augenblicke die Richtungen von $R_1$ und $R_2$ resp. gegen die Perpendikel $Gs$ und $Gt$ auf den Seitenflächen **CA** und **CB** des Keiles unter Winkeln geneigt sein werden, welche dem Reibungswinkel $\varphi$ gleich sind. Wenn nun dieser Reibungswinkel für die beiden Seiten des Keiles derselbe ist; so folgt, daß die Kräfte $R_1$ und $R_2$ gegen die Mittellinie des Keiles oder gegen die Richtung der Kraft $P_1$ gleich stark geneigt sind, sodaß nothwendig $R_1 = R_2$ und (nach §. 13)



$$P_1 = 2R_1 \cos\tfrac{1}{2}GOR$$

ist. Weil aber in dem Vierecke **CGOR** die Summe aller Winkel gleich vier rechten ist; so hat man

$$GOR = 2\pi - GCR - OGC - ORC,$$

oder, da $GCR = 2\iota$ und $OGC = ORC = \frac{\pi}{2} + \varphi$ ist,

$$GOR = \pi - (2\iota + 2\varphi), \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2}GOR = \frac{\pi}{2} - (\iota + \varphi).$$

Hierdurch wird die obige Beziehung

$$P_1 = 2 R_1 \sin(\iota + \varphi) \;\ldots.\; (308).$$

Die durch den Keil auseinanderzutreibende Masse widersteht auf jeder Seite in der Richtung $R_1 G$ oder $R_2 R$ welche unter dem Winkel $\varphi$ gegen das Perpendikel $Gs$ oder $Gt$ geneigt ist. Dieser Widerstand wird nun dadurch hervorgebracht, daß die Masse durch feste Hindernisse und durch eigene Kohäsion verhindert wird, sich parallel zu den Seiten $AC$ und $BC$ zu bewegen, und daß perpendikular zu den Seiten des Keiles, also in den Richtungen $sG$ und $tR$ Kräfte wirken, welche durch die Kohäsion und Elastizität der Masse $D$ hervorgerufen werden. Bezeichnet man eine jede dieser letzteren Kräfte in perpendikularen Richtungen zu den Seiten des Keiles mit $P_2$; so hat man offenbar, da $R_1$ oder $R_2$ die Resultante von $P_2$ und dem Widerstande des festen Hindernisses in paralleler Richtung zu der Seitenfläche ist,

$$R_1 = \frac{P_2}{\cos\varphi}.$$

Setzt man diesen Werth für $R_1$ in die vorstehende Gleichung; so wird dieselbe

$$P_1 = 2 P_2 \frac{\sin(\iota + \varphi)}{\cos\varphi}, \;\ldots.\; (308a)$$

und es folgt für den Model des Keiles (§. 152). da hier $\Phi_1(o) = \sin\iota$ ist, und der zu überwindende Nutzwiderstand durch $2P_2$ dargestellt wird,

$$U_1 = U_2 \frac{\sin(\iota + \varphi)}{\sin\iota . \cos\varphi}, \;\ldots.\; (309)$$

eine Formel, welche auch auf die Form

$$U_1 = U_2 (1 + \operatorname{tang}\varphi . \cot\iota)$$

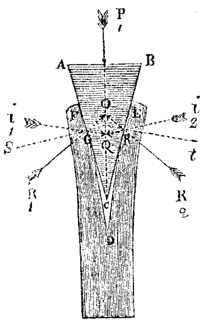
gebracht werden kann.

Die durch Reibung verlorene Arbeit ist demnach umso größer, je kleiner der Winkel des Keiles ist; dieser Verlust wird unendlich groß, wenn bei einem endlichen Werthe von $\varphi$ der Winkel $\iota$ unendlich klein wird.

§. 249. **Der Neigungswinkel der beiden Seiten des Keiles gegeneinander.**

Im Vorhergehenden wurde angenommen, der Druck $P_1$ gegen den Rücken des Keiles sei gerade so stark, um den Keil vorwärts zu treiben; nehmen wir jetzt an, dieser Druck sei gerade so groß, um den Keil in seiner Lage zu erhalten und sein Zurückspringen zu verhindern, nachdem er zwischen die beiden widerstehenden Flächen eingetrieben ist.

Da die beiden Seitenflächen des Keiles unter diesen Umständen eben im Begriffe sind, auf den widerstehenden Flächen rückwärts zu gleiten; so leuchtet ein, daß die Richtungen $i_1$ G und $i_2$ R der Widerstände der Letzteren gegen die Perpendikel G*s* und R*t* auf den Seitenflächen des Keiles unter Winkeln geneigt sein müssen, welche dem Reibungswinkel gleich kommen, so jedoch, daß diese Richtungen auf denjenigen Seiten der Perpendikel G*s* und R*t* liegen, welche den Richtungen $R_1$ G und $R_2$ R der früher betrachteten Widerstände entgegengesetzt sind.



Um die Gleichungen (308) und (308$^a$) auf diesen Fall anzuwenden, braucht man darin den Winkel $\varphi$ nur negativ zu nehmen. Hierdurch werden dieselben

$$P_1 = 2\,R_2 \sin(\iota - \varphi) \;\ldots.\; (310)$$

$$P_1 = 2\,P_2 \frac{\sin(\iota - \varphi)}{\cos\varphi} \;\ldots..\; (310a)$$

Solange $\iota$ größer ist, als $\varphi$, oder der Winkel C des Keiles größer ist, als das Doppelte des Reibungswinkels, ergibt die vorstehende Formel für $P_1$ einen positiven Werth, d. h. es ist in diesem Falle eine Kraft $P_1$ von dem Betrage $2\,R_1 \sin(\iota - \varphi)$ in der Richtung $P_1$ O erforderlich, um den Keil am Zurückspringen aus einer Lage, in die er bereits getrieben ist, zu verhindern, sodaß derselbe, wenn die Kraft $P_1$ ganz entfernt oder doch kleiner würde, als der Werth der vorstehenden Formel es verlangt, in eine frühere Lage zurückkehren würde. Ist dagegen $\iota$ keiner, als $\varphi$, oder der Winkel C des Keiles kleiner, als das

Doppelte des Reibungswinkels; so erhält man für $P_1$ einen negativen Werth, sodaß in diesem Falle eine Kraft in entgegengesetzter Richtung $OP_1$ angebracht werden müßte, um ein Zurückkehren des Keiles in eine frühere Lage zu bewirken. Hieraus folgt denn auch, daß wenn im letzteren Falle die Kraft $P_1$ ganz entfernt würde, der Keil in seiner Lage verharren würde, ohne zurückzuspringen, und daß er Dies auch dann noch thun würde, wenn man zwar die in der Richtung $OP_1$ wirkende Kraft nicht ganz entfernte, aber doch kleiner, als den negativen Werth der obigen Formel, annähme.

Diese Eigenschaft, in irgend einer Lage, in welche er einmal getrieben ist, zu verharren, wenn auch die treibende Kraft aufhört zu wirken, charakterisirt den Keil, und verschafft ihm einen großen Vorzug vor allen anderen durch Druck oder Stoß getriebenen Werkzeugen. Man sieht aber, daß es bei der Bildung eines Keiles, welcher zur Hervorbringung derartiger Effekte benutzt werden soll, als Grundsatz angesehen werden muß, daß der Neigungswinkel seiner Seiten gegeneinander kleiner sei, als das Doppelte des Reibungswinkels zwischen dem Materiale des Keiles und dem der Masse, in welche er getrieben werden soll.

## Der Keil, durch Stoß getrieben.

§. 250. Bei der gewöhnlichen Anwendung des Keiles wird derselbe dadurch getrieben, daß ein schwerer Körper mit einer größeren oder geringeren Geschwindigkeit in der Richtung der Mittellinie gegen seinen Rücken stößt. Bezeichnet man das Gewicht eines solchen Körpers mit $W$ und seine Geschwindigkeit mit $V$, wobei angenommen wird, daß sich ein jedes seiner Elemente mit derselben Geschwindigkeit bewege; so ist die in dem Körper angehäufte Arbeit, wenn er den Keil trifft, nach §. 66 durch $\frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2$ dargestellt. Diese ganze Arbeit wird nun auf den Keil und von dem Keile auf die Widerstände der Flächen entwickelt, welche sich der Bewegung desselben entgegensetzen. Nimmt man daher an, daß die Körper nach dem Stoße zur Ruhe kommen, vernachlässigt den Einfluß der Elastizität und der gegenseitigen Zusammendrückung an den Oberflächen des stoßenden Körpers und des Keiles, und setzt voraus, daß keine dauernde Zusammendrückung auf den Stoß folge; so ist die durch den Stoß entwickelte Arbeit die der treibenden Kraft, welche im Vorhergehenden durch $U_1$ dargestellt ist, und man hat

$$U_1 = \tfrac{1}{2}\frac{W V^2}{g},$$

indem es offenbar gleichgültig ist, ob die treibende Kraft ihre Arbeit $U_1$ gleichförmig und in endlichen Zeiträumen, wie bei einem konstanten Drucke, oder mit rasch veränderlicher Geschwindigkeit in einem sehr kleinen Zeitraume, wie bei einem Stoße, verrichtet. Setzt man daher diesen Werth für $U_1$ in die Gleichung (309); so erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{W V^2}{g} = U_2 \frac{\sin(\iota+\varphi)}{\sin\iota . \cos\varphi},$$

und hieraus für die geleistete Nutzarbeit

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\frac{W V^2}{g}\frac{\sin\iota . \cos\varphi}{\sin(\iota+\varphi)} \dots (311)$$

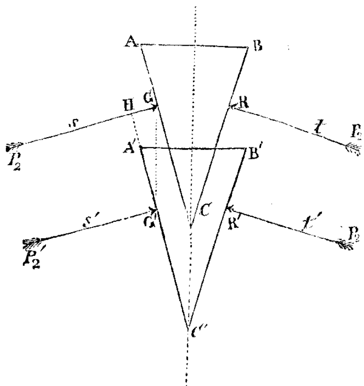
Durch diese Gleichung ist die Arbeit $U_2$ bestimmt, welche in der Überwindung der Widerstände der durch den Keil auseinander getriebenen Masse besteht, wenn ein Körper vom Gewichte $W$ mit einer Geschwindigkeit $V$ auf den Keil stößt. Diese Gleichung ergibt aber auch das Gewicht $W$, welches der stoßende Körper haben muß, um bei einer gegebenen Geschwindigkeit $V$ einen gegebenen Nutzeffect $U_2$ hervorzubringen, oder die Geschwindigkeit $V$, mit welcher ein Körper vom gegebenen Gewichte $W$ gegen den Keil stoßen muß, um einen gegebenen Betrag $U_2$ von Nutzarbeit zu erzeugen.*)

*) Wollte man die Tiefe $S_1$ bestimmen, um welche der Keil in die Masse eindringt, wenn er durch einen Körper vom Gewichte $W$ mit einer Geschwindigkeit $V$ gestoßen wird; so hat man, wenn $P_2$ den mittlern Widerstand bezeichnet, welchen die auseinanderzutreibende Masse in den perpendikularen Richtungen $sG$ oder $tR$ der Bewegung des Keiles entgegengesetzt, und wenn $S_2$ den Raum bezeichnet, welchen der Angriffspunkt $G$ oder $R$ dieses Widerstandes in paralleler Richtung zu $sG$ oder $tR$ beschreibt, während die Spitze des Keiles um $S_1$ vordringt,

$$U_2 = 2 P_2 . S_2 .$$

Den Einfluß, welchen die Elastizität und Zusammendrückbarkeit der Massen auf die Wirkung des Keiles äußern, wird man aus den Prinzipien ersehen, welche in dem sechsten Abschnitte entwickelt sind. Aus denselben geht hervor, daß wenn die Oberflächen des stoßenden Körpers und des Rückens des Keiles im Vergleich zu den Flächen, zwischen welche der Keil getrieben wird, sehr hart sind, der gegenseitige Druck zwischen den Stoßflächen sehr be-

---




Ist nun nach dem Stoße der Keil **ABC** in die Lage **A'B'C'** und der Berührungspunkt **G** oder **R** der Seitenfläche des Keiles mit der auseinanderzutreibenden Masse in die Lage **G'** oder **R'** gekommen, sodaß $GG' = CC' = S_1$ ist, und man fällt von **G'** auf die Richtung $s$**G** das Perpendikel **G'H**; so ist offenbar $GH = S_2$. Nun hat man aber

$$GH = GG' . \sin HG'G \text{ d. i.,}$$

$$S_2 = S_1 . \sin \iota;$$

demnach

$$U_2 = 2R . S_1 \sin \iota .$$

Setzt man diesen Werth für $U_2$ in Gleichung (311) und löst dieselbe für $S_1$ auf; so kommt

$$S_1 = \frac{W V^2}{4 g P_2} \frac{\cos\varphi}{\sin(\iota + \varphi)} .$$

Ist nun der Widerstand $P_2$, welchen die auseinanderzutreibende Masse auf jeder Seite des Keiles in perpendikularer Richtung $s$**G** oder $t$**R** leistet, aus der Erfahrung bekannt; so kann der gesuchte Werth für $S_1$ nach der vorstehenden Formel berechnet werden.

Für den Fall, daß der Winkel $\iota = o$ würde, also der Keil in ein rechtwinkliges Parallelepipedum überginge, welches von beiden Seiten einen normalen Druck $= P_2$ empfinge, ergäbe diese Formel

$$S_1 = \frac{W V^2}{4 g P_2 \operatorname{tang}\varphi} ,$$

oder auch

$$2 P_2 \operatorname{tang} \varphi . S_1 = \frac{W V_2}{2 g} .$$

Da tang $\varphi$ den Reibungskoeffizienten, mithin $2 P_2 \operatorname{tang} \varphi$ die in der Richtung des Stoßes zu überwindende Kraft, und $2 P_2 \operatorname{tang} \varphi . S_1$ die in dieser Richtung zu verrichtende Arbeit darstellt; so sieht man, daß das letztere Resultat schon **a priori** aufgestellt werden konnte. Die Nutzarbeit $U_2$ ist übrigens in diesem Falle gleich null, wie aus der Formel (311) hervorgeht, und auch von selbst einleuchtet, da in perpendikularer Richtung zu den parallelen Seitenflächen eines solchen Keiles keine Bewegung erfolgen und kein Nutzwiderstand $P_2$ überwunden werden kann.

deutend ist gegen den Widerstand, welcher sich der Bewegung des Keiles entgegensetzt. Vernachlässigt man daher den Letzteren gegen den Ersteren; so ist nach jenem Abschnitte die Arbeit, welche der Keil durch den Stoß empfängt, wenn man denselben als einen freien und ruhenden Körper ansieht, durch

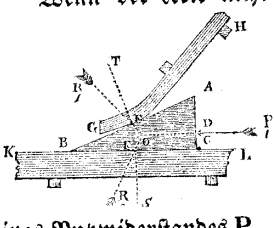
$$\frac{(1+e)^2 W_1{}^2 W_2 V^2}{2g(W_1+W_2)^2}$$

dargestellt, worin $W_1$ das Gewicht des stoßenden Körpers oder Hammers, $W_2$ das Gewicht des Keiles und $e$ das Maaß der Elastizität der Stoßflächen bezeichnet, sodaß der Werth dieser Größe gleich der Einheit wird, wenn die Elastizität vollkommen ist, und gleich null, wenn die Flächen ganz unelastisch sind. Setzt man den vorstehenden Ausdruck gleich $U_1$ (Gleichung 309) und vernachlässigt die Wirkung der Elastizität und Zusammendrückbarkeit der Fläche G und R, zwischen welche der Keil eingetrieben wird; so erhält man

$$U_2 = \frac{(1+e)^2 W_1{}^2 W_2 V^2}{2g(W_1+W_2)} \frac{\sin \iota . \cos \varphi}{\sin(\iota+\varphi)}.$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß die Nutzarbeit am größten sein wird, wenn unter sonst gleichen Umständen das Gewicht des Keiles gleich dem des Hammers ist, und wenn die Stoßflächen aus harten Metallen bestehen, für welche der Werth von $e$ der Einheit am nächsten kommt.

Wenn der Keil nicht gleichschenklich ist, sondern die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat, wie in der seitstehenden Figur; so wird die Beziehung zwischen der Arbeit $U_1$, welche sich durch den Stoß auf seinen Rücken entwickelt, und der Nutzarbeit $U_2$, welche sich in der Überwindung




eines Nutzwiderstandes $P_2$ in perpendikularer Richtung zu der Einen oder der andern seiner beiden Seitenflächen äußert, durch die Gleichungen (301) und (302) dargestellt. Substituirt man daher in dieselben unter der Voraussetzung, daß der Keil durch einen Stoß getrieben werde, für $U_1$ seinen Werthe $\frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2$ und löſ't sie für $U_2$ auf;

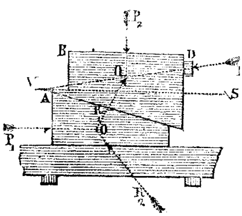
so erhält man für den Fall, daß die Seite **AB** des Keiles die treibende und die Fläche **GH** in perpendikularer Richtung zu **AB** beweglich, in einer jeden anderen aber unbeweglich ist, während die Fläche **KL** ganz fest bleibt,

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\frac{W V^2}{g}\,\frac{\sin\iota,\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)}, \ldots\ldots (312)$$

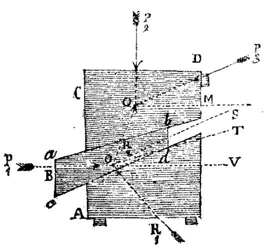
und für den Fall, daß die Seite **BC** des Keiles die treibende und die Fläche **KL** in perpendikularer Richtung zu **BC** beweglich, in einer jeden anderen aber unbeweglich ist, während die Fläche **GH** ganz fest bleibt,

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\frac{W V^2}{g}\,\frac{\tang\iota\cos(\iota+\varphi_1).\cos\varphi_2}{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2)} \ldots (313)$$

§. 251. Wenn die Gewalt des Keiles durch die Dazwischenkunft einer schiefen Ebene nutzbar gemacht wird, welche in perpendikularer Richtung zu der Richtung des Stoßes beweglich ist, wie Dies z. B. bei der Ölpresse stattfindet; so ergibt die Gleichung (305), wenn man darin für die Arbeit $U_1$ der treibenden Kraft die Hälfte der lebenden Kraft des stoßenden Körpers oder $\frac{1}{2}\frac{WV^2}{g}$ substituirt und dieselbe alsdann für $U_2$ auflöst,




$$U_2 = \tfrac{1}{2}\frac{W V^2}{g}.\frac{\tang\iota.\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_2).\cos\varphi_2}{\sin(\iota+\varphi_1+\varphi_2).\cos\varphi_3} \ldots\ldots (314)$$




Wenn die untere Seitenfläche des Keiles, ebenso wie die obere, gegen den Horizont geneigt ist, wie in der seitstehenden Figur; so ergibt eine ähnliche Substitution in Gleichung (307)

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\frac{W V^2}{g}\,\frac{\sin(\iota_1-\iota_2).\cos(\iota_1+\varphi_1).\cos(\iota_2-\varphi_2-\varphi_3)}{\cos\iota_1.\cos\iota_2.\sin(\iota_1-\iota_2+\varphi_1+\varphi_2)\cos\varphi_3} \ldots (315).$$

## Der mittlere Druck beim Stoße.

§. 252. Da die Gleichungen **311**, 312, 313, welches auch das Gewicht des stoßenden Körpers oder die Geschwindigkeit desselben sei, immer einen endlichen Betrag von Nutzbarkeit $U_2$ liefern, welcher in der Überwindung des Nutzwiderstandes in perpendikularer Richtung zu den Seitenflächen des Keiles besteht; so folgt, daß es in einem jeden solchen Falle einen gewissen mittleren Widerstand $P_2$ gibt, welcher vermöge des Stoßes durch einen gewissen Raum $S_2$ überwunden werden kann, sodaß man

$$P_2 S_2 = U_2 \text{ und mithin}$$

$$P_2 = \frac{U_2}{S_2} \text{ oder } S_2 = \frac{U_2}{P_2}$$

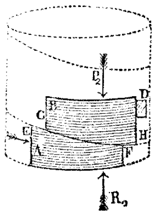
hat.

Wenn daher der Raum $S_2$ in Vergleich zu $U_2$ ungemein klein ist; so wird ein ungemein großer Nutzwiderstand $P_2$ durch diesen kleinen Raum vermöge des Stoßes überwunden werden können, wie schwach der Letztere auch sein mag. Hieraus erklärt sich der ungeheuere Druck, den ein Keil perpendikular zu seinen Seitenflächen auszuüben vermag, wenn er vermittelst eines Hammers getrieben wird. Die Fähigkeit, so bedeutende Widerstände durch den Stoß zu überwinden, kommt übrigens nicht dem Keile allein zu; sie gehört vielmehr allen Werkzeugen an, welche durch den Stoß wirken, und liegt im Wesen des Stoßes begründet. Die Wirkungen des Letzteren werden nur durch die Anwendung des Keiles bleibend gemacht, indem dieser die Eigenschaft besitzt, irgend eine Lage, in die er einmal getrieben ist, fortwährend beizubehalten und dadurch zu verhindern, daß die auseinandergetriebenen Flächen in Folge ihrer Elastizität ihre unsprüngliche Lage und Form wieder annehmen. Der obige Satz, daß ein nochso großer Widerstand durch irgend einen, wenn auch kleinen Raum überwunden werden könne, gilt mit gleichem Rechte von dem schwächsten direkten Stoße eines Hammers, wie von dem durch einen Keil fortgepflanzten; der Unterschied zwischen beiden besteht nur darin, daß die Fläche, welche unter dem Schlage des Hammers durch einen sehr kleinen, aber endlichen Raum ausweicht, nach dem Schlage in ihre frühere Lage wieder zurückkehrt, wenn die Gränzen der Elastizität nicht überschritten sind, wogegen der

Raum, welchen der Keil in Folge eines solchen Stoßes in der Richtung seiner Länge durchdringt, eine bleibende Trennung der Flächen bewirkt.

## Die Schraube.

§. 253. Denkt man sich ein System von zwei beweglichen geneigten Ebenen, wie es in §. 246 dargestellt ist, von denen eine jede nur eine sehr geringe Breite habe und demnach eine dünne, biegsame Platte bilde, und nimmt an, die Eine derselben,




z. B. **A**, werde um eine konvexe zylindrische Fläche gebogen, während die andere, **B**, um eine konkave zylindrische Fläche von demselben Durchmesser und derselben Axe gebogen wird; so stellen die geneigten Flächen **EF** und **GH** dieser Ebenen die Gänge zweier Schrauben dar, von denen die erstere die Schraubenspindel und die letztere die Schraubenmutter heißt. Denkt man sich nun das Gewinde **EF** fortgesetzt, sodaß mehrere Umwindungen oder ganze Schraubengänge entstehen, und nimmt alsdann an, der Zylinder, welcher dieses Gewinde enthält, werde durch die Wirkung der Kraft $P_1$, die an seinem Umfange angebracht ist, um seine Axe gedrehet, während der andere Zylinder mit dem Gewinde **GH** durch den Widerstand eines Hindernisses **D**, welches ihm übrigens gestattet, sich in der Richtung seiner Axe zu bewegen, an der Umdrehung um seine Axe behindert wird; so leuchtet ein, daß das Gewinde **EF** unter **GH** fortgleiten wird, während der Zylinder mit dem letzteren Gewinde eine Bewegung in der Richtung seiner Axe annimmt, daß aber die Bedingungen dieser gegenseitigen Wirkung der Oberflächen **EF** und **GH** der Schraubengewinde denen für die Berührungsflächen der beiden beweglichen geneigten Ebenen in §. 246 ganz ähnlich sind. Hiernach werden die Bedingungen für den Gränzzustand des Gleichgewichtes zwischen den Kräften $P_1$ und $P_2$ und der Model des Systemes in dem Einen, wie in dem anderen Falle, ganz dieselben sein, mit der einzigen Ausnahme, daß der Widerstand $R_2$ der Fläche, auf welcher die Ebene **A** ruhet (s. die Figur zu §. 246) in dem Falle der Schraube nicht bloß über die Basis dieser Ebene oder über die schmale Grundfläche der gekrümmten Platte A (s. die vorstehende Figur), sondern über die ganze untere Fläche des Zylinders, an welchem dieselbe befestigt ist, oder über einen zylindrischen Vorsprung vertheilt ist, welcher diesem Zylinder zu einem stehenden Zapfen dient.

Setzt man nun in Gleichung (304) $\varphi_2 = 0$; so erhält man diejenige Beziehung zwischen den Kräften $P_1$ und $P_2$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes, welche stattfinden würde, wenn an dem unteren Ende der Schraubenspindel gar keine Reibung vorhanden wäre. Hierauf beachte man, daß die Kraft $P_2$ genau gleich dem Drucke ist, mit welchem der Zapfen der Schraubenspindel gegen die Unterlage gepreßt wird, und daß demnach das Moment des Widerstandes, welchen die Reibung des stehenden Zapfens der Umdrehung des Zylinders entgegensetzt, (s. §. 177) durch $\frac{2}{3} P_2 \varrho \operatorname{tang} \varphi_2$ ausgedrückt wird, worin $\varrho$ den Halbmesser des Zapfens bezeichnet. Bemerkt man nun endlich, daß die Kraft, welche am Umfange der Spindel angebracht werden müßte, um diesen Widerstand zu überwinden, durch $\frac{2}{3} P_2 \frac{\varrho}{r} \sin \varphi_2$ dargestellt ist, worin $r$ den Halbmesser der Spindel bezeichnet, und daß diese Kraft zu der übrigen hinzuaddirt werden muß, welche dazu dient, die Reibungswiderstände zwischen den Schraubengängen, an der Oberfläche des Hindernisses D und den Nutzwiderstand $P_2$ zu besiegen; so erhält man für den Gesammtwerth der Kraft $P_1$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes

$$P_1 = P_2 \frac{\sin(\iota + \varphi_1) . \cos \varphi_3}{\cos(\iota + \varphi_1 + \varphi_3)} + \frac{2}{3} P_2 \frac{\varrho}{r} \operatorname{tang} \varphi_2.$$

Hierbei ist angenommen, daß die Kraft $P_1$ behuf Drehung der Schraube an dem Umfange der Letzteren angebracht sei; es ist jedoch üblich, dieselbe in einiger Entfernung von diesem Umfange an einem Hebelarme wirken zu lassen. Bezeichnet man die Länge eines solchen Hebelarmes, von der Axe der Schraube aus gerechnet, mit $a$; so würde eine an dem Endpunkte dieses Armes angebrachte Kraft $P_1$ an dem Umfange der Schraube einen Druck gleich $P_1 \frac{a}{r}$ hervorbringen. Setzt man daher diesen Ausdruck in der vorstehenden Gleichung an die Stelle von $P_1$, und löſ't dieselbe für $P_1$ auf; so ergibt sich für die Beziehung zwischen $P_1$ und $P_2$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes

$$P_1 = P_2 \left(\frac{r}{a}\right) \left\{ \frac{\sin(\iota + \varphi_1) . \cos\varphi_3}{\cos(\iota + \varphi_1 + \varphi_3)} + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\varrho}{r}\right) \operatorname{tang}\varphi_2 \right\} \ldots (316)$$

Nimmt man ebenso in dem Model (Gleichung 305) $\varphi_2 = 0$ an, und bestimmt hierdurch eine Beziehung zwischen der Arbeit der treibenden Kraft und dem geleisteten Nutzeffekte unter der Voraussetzung, daß auf die Reibung des stehenden Zapfens keine Arbeit verwendet sei, und addirt alsdann zu dem so erhaltenen Werthe von $U_1$ die Arbeit, welche zur Überwindung der Reibung des stehenden Zapfens erforderlich ist und welche nach Gleichung (189) für eine jede Umdrehung den Ausdruck $\tfrac{4}{3}\pi\varrho P_2 \operatorname{tang}\varphi_1$ und demnach für $n$ Umdrehungen den Ausdruck $\tfrac{4}{3}\pi n \varrho P_2$ hat; so ergibt sich die folgende allgemeine Gleichung für den Model, wobei sämmtliche schädliche Widerstände in Betracht gezogen sind,

$$U_1 = U_2 \frac{\sin(\iota + \varphi_1) \cos\varphi_3}{\operatorname{tang}\iota . \cos(\iota + \varphi_1 + \varphi_3)} + \tfrac{4}{3}\pi n \varrho P_2 \operatorname{tang}\varphi_2 .$$

Bezeichnet man die Höhe eines Schraubenganges, d. h. den Raum, welchen die Mutter **B** bei jeder Umdrehung der Schraube in der Richtung der Axe durchläuft, mit $\lambda$ und beachtet, daß

$$n\lambda P_2 = U_2, \text{ also } \tfrac{4}{3}\pi n \varrho P_2 \operatorname{tang}\varphi_2 = \tfrac{4}{3}\pi \frac{U_2}{\lambda} \varrho \operatorname{tang}\varphi_2$$

$= \tfrac{2}{3} . \dfrac{2\pi r}{\lambda} . \dfrac{\varrho}{r} . U_2 \operatorname{tang}\varphi_2$ und daß in diesem Ausdrucke $\dfrac{\lambda}{2\pi r} = \operatorname{tang}\iota$ oder $\dfrac{2\pi r}{\lambda} = \cot.\iota$ ist; so erhält man endlich für den Model der Schraube

$$U_1 = U_2 \left\{ \frac{\sin(\iota + \varphi_1) \cos\varphi_3}{\cos(\iota + \varphi_1 + \varphi_3)} + \frac{2\varrho}{3r} \operatorname{tang}\varphi_2 \right\} \cot\iota, \ldots . (317)$$

einen Ausdruck, den man nach §. 152 auch unmittelbar aus der Gleichung (316) hätte ableiten können, wenn man darin

$$\Phi_1 = \left(\frac{r}{a}\right) \left\{ \frac{\sin(\iota + \varphi_1) . \cos\varphi_3}{\cos(\iota + \varphi_1 + \varphi_3)} + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\varrho}{r}\right) \operatorname{tang}\varphi_2 \right\},$$

also

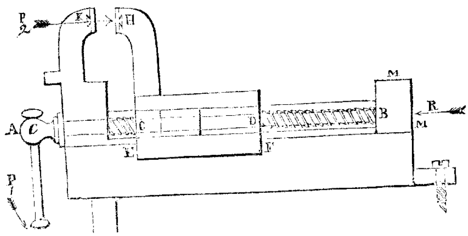
$$\Phi_1(0) = \left(\frac{r}{a}\right) \operatorname{tang}\iota$$

gesetzt und diesen Werth in die allgemeine Formel (121) substituirt hätte.

Es ist offenbar für den Effekt gleichgültig, in welchem Abstande von der Axe das Hinderniß D, welches sich der Umdrehung der Schraubenmutter entgegensetzt, angebracht werde, da die Größe dieses Widerstandes in die obigen Formeln nicht eintritt, und nur die durch den Winkel $\varphi_3$ bestimmte Richtung desselben darin erscheint, eine Richtung, welche bloß von der Beschaffenheit der widerstehenden Flächen und keineswegs von der Lage des widerstehenden Punktes abhängt. *)

## Anwendungen der Schraube.

**§. 254.** Die nebenstehende Figur stellt eine Anwendung der




*) Damit die vorstehenden Formeln vollkommene Richtigkeit haben, ist es erforderlich, daß alle auf die Schraube wirkenden Kräfte und Widerstände symmetrisch um die Axe vertheilt sind, sodaß dieselben lauter Kräftepaare bilden und in perpendikularer Richtung gegen die Axe keinen Druck äußern. Bei den Reibungswiderständen und dem Nutzwiderstande ist Dies fast immer der Fall; die treibende Kraft $P_1$ wirkt jedoch häufig an einem einzigen Hebelarme. Hierdurch entsteht auf die Axe der Schraube in ihren Lagern ein Druck R, welcher der Kraft $P_1$ gleich ist, weil der Widerstand R, den das Lager leistet, der Kraft $P_1$ gleich und entgegengesetzt sein muß, wenn man dieselbe parallel mit sich selbst an die Axe verlegt (§. 8). Die durch den Druck $R = P_1$ an der Axe der Schraube erzeugte Reibung kann genau so, wie dies in §. 154 und an ähnlichen anderen Stellen geschehen ist, in Rechnung gebracht werden, wenn man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$a P_1 = M + R \,.\, \varrho \sin\varphi = M + P_1 \varrho \sin\varphi, \text{ also}$$

$(a - \varrho \sin\varphi) P_1 = M$ und demnach

$$P_1 = \frac{M}{a - \varrho \sin\varphi}$$

setzt, worin M das Moment aller übrigen zu überwindenden Widerstände, d. i. nach Gleichung (316) die Größe

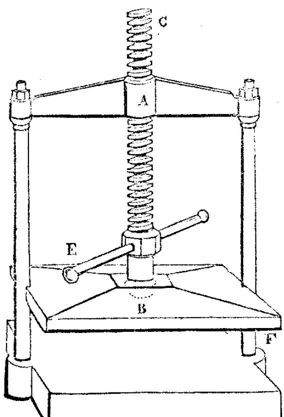
$$P_2 r \left\{ \frac{\sin(\iota + \varphi_1) \,.\, \cos\varphi_3}{\cos(\iota + \varphi_1 + \varphi_3)} + \tfrac{2}{3} \left(\frac{\varrho}{r}\right) \operatorname{tang} \varphi_2 \right\} \text{ bezeichnet.}$$

Man sieht übrigens, daß der Einfluß der in Rede stehenden Reibung nur Glieder von mehr, als Einer Dimension, in den Reibungskoeffizienten erzeugen kann und demnach vernachlässigt werden darf.

Schraube unter den in dem vorhergehenden Paragraphe angenommenen Umständen auf eine sehr bekannte Maschine, den sogenannten **Schraubstock**, dar. **AB** ist ein voller Zylinder, welcher die Schraubenspindel bildet, und innerhalb des Stückes **CD** befindet sich ein hohler Zylinder, welcher die Schraubenmutter enthält; die Mutter wird durch einen Falz am Stücke **CD** und durch einen entsprechenden Vorsprung an dem festen Gestelle der Maschine verhindert, sich mit der Spindel herumzudrehen, kann aber dessenungeachtet eine Bewegung in der Richtung ihrer Axe annehmen. Ein Vorsprung an dem Rahmen der Maschine bei **B**, gegen welchen sich der Zapfen der Spindel stemmt, widersetzt sich dem Bestreben der Letzteren, sich in der Längenrichtung zu bewegen. Der zu überwindende Nutzwiderstand $P_2$ ist zwischen den Backen **H** und **K** angebracht, und die treibende Kraft $P_1$ wirkt an einem Hebelarme, welcher sich mit der Spindel **AB** umdrehet.

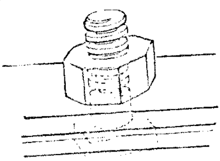
Es leuchtet ein, daß im Gränzzustande des Gleichgewichtes der Widerstand **R** gegen die Stirnfläche des Zapfens am Ende **B** der Spindel **AB** in paralleler Richtung zu der Axe der Schraube der Kraft $P_2$ gleich sein muß (§. 16), sodaß, wenn man sich das Stück **CD** fest und das Stück **BM** in der Längenrichtung der Schraube beweglich denkt, mit Hülfe dieses Instrumentes irgend ein gegebener Nutzwiderstand **R**, welcher sich der Bewegung des Stückes **BM** entgegensetzt, durch den konstanten Druck des Zapfens gegen dieses Stück überwunden werden kann.

Unter solchen Umständen wird die Schraube bei der gewöhnlichen **Schraubenpresse** angewendet. Das an dem Rahmen der Maschine befestigte Stück **A** enthält die Schraubenmutter; die Schraubenspindel **BC**, welche vermittelst einer an derselben befestigten Handhabe umgedrehet wird, drückt mit ihrem Zapfen am unteren Ende **B** gegen ein Stück **EF**, welches in vertikaler Richtung beweglich ist, und durch zwei feste vertikale Stücke so geführt wird, daß es an der Umdrehung der Schraube keinen Theil nehmen kann.



Die in §. 253 für den vorhergehenden Fall der Anwendung der Schraube auf den Schraubstock entwickelten Gleichungen gelten auch für den letzteren Fall der Schraubenpresse, wenn man darin $\varphi_3 = 0$ setzt, indem hier kein Maschinentheil, der sich längs der Axe bewegte, durch die Wirkung der schiefen Oberflächen der Schraubengänge gegen eine feste Fläche gepreßt wird. Das Stück **EF** wird zwar in Folge der Reibung an der Stirnfläche des stehenden Zapfens der Spindel seitwärts gegen seine Führungen gedrückt, und erzeugt dadurch bei seiner gleitenden Bewegung längs dieser Führungen einige Reibung; indessen ist dieselbe, da sie selbst erst das Resultat einer Reibung ist, unter allen Umständen eine Größe von zwei Dimensionen in Beziehung zu dem Reibungskoeffizienten, also stets so gering, daß sie gegen die übrigen Widerstände der Bewegung vernachlässigt werden kann.

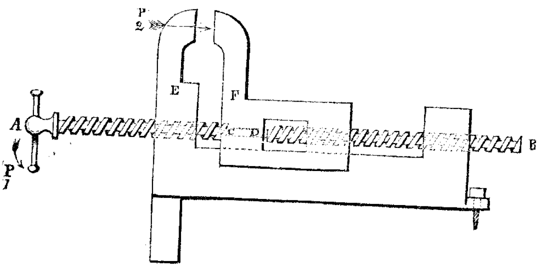
In §. 253 war angenommen, daß das Gewinde **A** auf der konvexen Fläche eines vollen Zylinders und das Gewinde **B** auf der konkaven Fläche eines hohlen Zylinders befestigt sei. Denkt man sich umgekehrt **A** auf einem hohlen und **B** auf einem vollen Zylinder befestigt; so werden sich die Bedingungen für das Gleichgewicht offenbar nicht ändern, wenn in diesem Falle die Schraubenspindel statt der Schraubenmutter gezwungen wird, sich in der Längenrichtung zu bewegen. Würde übrigens unter diesen Umständen die Bewegung der Spindel **B** in der Längenrichtung unterbrochen und dieselbe ganz fest gemacht, während gleichzeitig das Hinderniß für die Längenbewegung der Mutter **A** entfernt würde, sodaß sich diese auf jener frei drehen und bei Überwindung eines Nutzwiderstandes **R** der Länge nach fortbewegen könnte; so nimmt die Verbindung die bekannte Form der Schraube und Mutter an.



Um die Formeln des §s 253 auf diesen Fall anzuwenden, muß $\varphi_3 = 0$ gesetzt werden, und statt daß die Reibung am Endpunkte der Schraube (Gleichung 316) wie die eines vollen stehenden Zapfens angesehen wurde, muß sie nun wie die eines hohlen Zapfens betrachtet werden, indem man darauf (genau so wie in §. 253) die Formeln des §s 178 statt des §s 177 anwendet.

## Die Differenzialschraube.

§. 255. In dem Systeme der drei geneigten Ebenen aus §. 247 stelle man sich die **B** von einer viel größern Ausdehnung vor, als Dies in der dortigen Figur angenommen ist, sodaß die Dimension *ac* bedeutend größer wird, während die Neigungen der Oberflächen *ab* und *cd* gegen den Horizont unverändert bleiben, außerdem erhalte sie in perpendikularer Richtung zu *abdc* eine sehr geringe Dicke, sodaß sie eine dünne biegsame Platte bildet, deren obere und untere sehr schmale Ebenen *ab* und *cd*




gegen den Horizont geneigt sind. Denkt man sich diese Platte um einen vollen Zylinder gebogen; so werden die Kanten *ab* und *cd* die wirkenden Flächen der Gewinde zweier Schraubenspindeln bilden, deren verschieden geneigte Gänge um verschiedene Theile Ein und desselben Zylinders gewunden sind. Eine solche Vorrichtung ist in der nebenstehenden Figur dargestellt, worin das Gewinde der Einen Schraube um einen vollen Zylinder von **A** bis **C**, und das Gewinde einer anderen Schraube von verschiedener Neigung auf denselben Zylinder von **D** bis **B** gewunden ist.

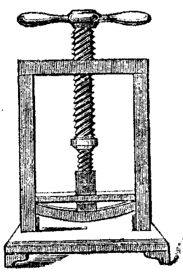
Nimmt man ferner an, die Ebenen **A** und **C** (s. §. 247) seien um zwei hohle zylindrische Flächen von denselben Durchmessern, wie der vorhin erwähnte volle Zylinder, gebogen und in den Stücken **E** und **F** enthalten, durch welche der volle Zylinder **AB** geht; so entstehen innerhalb der Stücke **E** und **F** zwei Schraubenmuttern, von denen die Eine dem Gewinde der Spindel zwischen **A** und **C** und die andere dem Gewinde dieser Spindel von **D** bis **B** entspricht. Wird nun das Stück **E** befestigt und das Stück **F** vermittelst einer Führung in der Längenrichtung beweglich gemacht, sodaß es dabei verhindert wird, an der

Umdrehung der Spindel Theil zu nehmen, und wird alsdann bei A eine Kraft $P_1$ angebracht, welche die Spindel um ihre Axe drehet; so wird diese Verbindung dem Systeme der drei geneigten Ebenen aus §. 247 ganz ähnlich sein, und man erhält für die Bedingungen des Gleichgewichtes genau dieselben Ausdrücke (306) und (307), wie in jenem Paragraphe, worin die treibende Kraft $P_1$ am Umfange der Spindel wirkend angenommen ist, und $P_2$ den Nutzwiderstand bezeichnet, welcher überwunden werden soll.

Die Erfindung der Differenzialschraube ist von de Prony und White aus Manchester in Anspruch genommen. Es kann vermittelst derselben eine verhältnißmäßig kleine Kraft einen ungeheueren Widerstand überwinden, wie Dies aus der Formel (306) hervorgeht. Diese Formel zeigt, daß der Nutzwiderstand $P_2$, welcher durch die Wirkung der Kraft $P_1$ überwunden werden kann, mehr von der Differenz, als der wirklichen Größe der Neigungswinkel $\iota_1$, $\iota_2$ der beiden verschiedenen Gewinde abhängt, sodaß derselbe ungemein vermehrt werden kann, wenn man den Gewinden sehr nahe dieselbe Neigung gibt. Bei Vernachlässigung aller Reibungen erhält man $P_2 = P_1 \dfrac{\cos\iota_1 . \cos\iota_2}{\sin(\iota_1 - \iota_2)}$, ein Ausdruck, welcher ungemein groß wird, wenn $\iota_1$ nahe gleich $\iota_2$ ist.

## Die Huntersche Schraube.

§. 256. Denkt man sich die Ebene B (§. 247) durch eine



horizontale Linie in zwei Theile getheilt, und den oberen Theil um die innere Fläche eines hohlen Zylinders und den unteren Theil um die äußere Fläche ebendesselben Zylinders gewunden; so entsteht ein hohler Zylinder, welcher an seinem inneren Umfange eine Schraubenmutter und an seinem äußeren Umfange eine Schraubenspindel darstellt. Ferner denke man sich die Ebene C um die äußere Fläche eines vollen Zylinders gebogen, welcher gerade den eben erwähnten hohlen Zylinder ausfüllt, und die Ebene A um die innere Fläche eines hohlen Zylinders gebogen, in welchen jener hohle

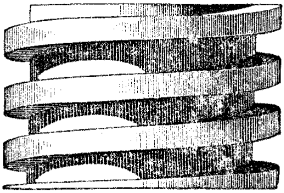
Zylinder mit seinem äußeren Schraubengewinde wie in eine Mutter hineinpaßt. Nun nehme man an, die letztere Mutter sei fest, der hohle Zylinder mit dem äußeren und inneren Gewinde gehe durch dieselbe hindurch, und nehme an seinem anderen Ende den vollen Zylinder als Spindel auf; diese letztere volle Spindel sei durch eine Führung verhindert, sich um ihre Axe zu drehen und könne sich nur in der Längenrichtung bewegen, und an dem hohlen Zylinder mit den doppelten Gewinden sei die treibende Kraft angebracht, welche denselben zu drehen und gleichzeitig die volle Spindel in der Richtung der Axe vorwärts zu treiben strebt. Die so erhaltene Vorrichtung, welche in der obigen Figur dargestellt ist, wurde von Hunter in dem 17ten Bande der Philosophical Transactions zuerst beschrieben, und ist unter dem Namen der Hunterschen Schraube bekannt. Die Theorie derselben stimmt mit der der Differenzialschraube überein; die Beziehung zwischen der darauf angebrachten treibenden Kraft und dem Nutzwiderstande ist durch Gleichung (306) und ihr Model durch Gleichung (307) gegeben.

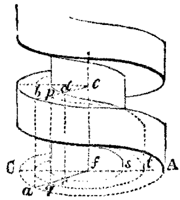
## Die Theorie der Schraube mit einem viereckigen Gewinde, wenn dabei auf die veränderliche Neigung des Gewindes in verschiedenen Abständen von der Axe Rücksicht genommen wird.

§. 257. Bei den vorstehenden Untersuchungen ist angenommen, daß die geneigte Ebene, welche durch ihre Umbiegung um einen Zylinder das Gewinde einer Schraube erzeugt, in perpendikularer Richtung zu der Axe nur sehr schmal sei. Unter dieser Voraussetzung ist es denn auch erlaubt, sich die Abstände aller Punkte dieser Ebene von der Axe des Zylinders als gleich zu denken, und behuf Ermittelung der Beziehung zwischen der treibenden Kraft und dem Widerstande den früheren Weg einzuschlagen.

Fassen wir jetzt den Fall in seiner Wirklichkeit ins Auge, indem wir die Oberflächenausdehnung der geneigten Ebene als endlich und die Abstände ihrer verschiedenen Elemente von der Axe als verschieden annehmen.

$mb$ sei ein Theil des viereckigen Gewindes einer Schraube, in welcher Form ein Perpendikel $be$ von einem Punkte $b$ der äußeren Kante des Gewindes auf die Axe $ef$ die Oberfläche des






Gewindes in seiner ganzen Tiefe $bd$ berührt. $AC$ sei eine Perpendikularebene zu der Axe, $af$ die Projektion von $be$ auf diese Ebene, $p$ irgend ein Punkt in $bd$ und $q$ die Projektion desselben; die Länge $ep$ werde mit $r$, der mittlere Halbmesser des Gewindes mit R, die Neigung der durch $p$ gehenden Schraubenlinie gegen die Ebene AC mit $\iota$, die Neigung der mittleren Schraubenlinie des Gewindes, deren Halbmesser R ist, mit J, die ganze Tiefe $bd$ des Gewindes mit 2T, die Höhe eines ganzen Schraubenganges mit L bezeichnet. Da die durch $p$ gehende Schraubenlinie durch die Umbiegung einer schiefen Ebene von der Neigung $\iota$ um einen Zylinder von dem Halbmesser $r$ entstanden gedacht werden kann, wobei die Basis dieser schiefen Ebene der Bogen $tq$ wird; so hat man $pq = tq . \mathrm{tang}\,\iota$.

Wächst aber der Winkel $Afa$ bis zu $2\pi$; so wird $pq$ gleich der Höhe L eines Schraubenganges, und $tq$ wird ein ganzer Kreis vom Halbmesser $r$; demnach hat man $L = 2\pi r . \mathrm{tang}\,\iota$, und da Dies für alle Werthe von $r$ gilt; so ist auch $L = 2\pi R . \mathrm{tang}\,J$. Setzt man die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen einander gleich, und lös't für $\mathrm{tang}\,\iota$ auf; so kommt

$$\mathrm{tang}\,\iota = \frac{R\,\mathrm{tang}\,J}{r} \ldots . (318)$$

Aus diesem Ausdrucke geht hervor, daß die Neigung eines viereckigen Schraubengewindes rasch zunimmt, sowie man sich von seiner äußeren Kante der Axe nähert, und daß dieselbe gleich einem rechten Winkel werden würde, wenn das Gewinde bis an die Axe träte. Denkt man sich die Oberfläche eines Schraubengewindes aus einer unendlichen Menge Schraubenlinien von ungemein schmaler Breite zusammengesetzt; so wird der Model einer jeden derselben durch Gleichung (317) als eine Funktion des entsprechenden Neigungswinkels $\iota$ ausgedrückt. Es ist nun eine Frage von vieler praktischer Wichtigkeit, zu bestimmen, wenn die Schraube nur in einem einzigen Punkte ihres Gewindes auf den Widerstand wirkte, in welchem Abstande von der Axe dieser Punkt liegen müßte, und wenn sich ihr Druck auf alle einzelnen Punkte der ganzen Tiefe des Gewindes vertheilte, wie es gewöhnlich der Fall ist, in wie fern die Bedingungen ihrer Wirkung durch die verschiedenen Neigungen des Gewindes in den verschiedenen Tiefen geändert werden.

Mit Übergehung der ersteren Untersuchung schreiten wir sogleich zu der letzteren.

Bezeichnet man den Widerstand in paralleler Richtung der Axe, welcher durch die Wirkung der Schraube überwunden werden soll, mit $P_2$; so leuchtet ein, daß der hierdurch auf das Gewinde erzeugte Druck derselbe ist, als ob der ganze zylindrische innere Theil der Spindel entfernt und der Widerstand $P_2$ auf einen Ring von der Breite $As = 2T$ angebracht wäre. Da die Oberfläche dieses Ringes durch $\pi(R+T)^2 - \pi(R-T)^2 = 4\pi RT$ dargestellt ist; so folgt, daß der Widerstand $P_2$ auf jede Flächeneinheit desselben einen Druck gleich $\frac{P_2}{4\pi RT}$ äußert. Stellt nun $\triangle r$ die sehr geringe Breite eines solchen Ringes dar, dessen Halbmesser $r$ ist, und welcher demnach als die Begränzung einer ungemein dünnen zylindrischen, durch den Punkt $p$ gehenden Fläche angesehen werden kann; so ist die Oberfläche dieses Ringes $= 2\pi r \triangle r$, und mithin der Druck auf denselben $= \frac{P_2 . 2\pi r \triangle r}{4\pi RT}$ $= \frac{P_2 r \triangle r}{2RT}$. Dies ist aber offenbar der Druck, welchen der elementare Theil des Gewindes auszuhalten hat, welcher durch $p$ geht, dessen Breite $\triangle r$ ist und welcher durch die Umbiegung einer schmalen Ebene von der Neigung $\iota$ um einen Zylinder von dem Halbmesser $r$ erzeugt angesehen werden kann. Hieraus folgt, daß die elementare Kraft $\triangle P_1$, welche am Hebelarme der Schraube angebracht werden muß, um diesen Theil des Widerstandes $P_2$ in paralleler Richtung zur Axe zu überwinden (Gleichung 316) durch

$$\triangle P_1 = \left(\frac{P_2 r \triangle r}{2RT}\right)\left(\frac{r}{a}\right) \Big\} \frac{\sin(\iota+\varphi_1).\cos\varphi_3}{\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)} + \tfrac{2}{3}\frac{\varrho}{r}\tang\varphi_2 \Big\{$$

dargestellt ist. Nimmt man nun $\triangle r$ und $\triangle P_1$ unendlich klein an, sodaß $\frac{\triangle P_1}{\triangle r}$ in den Differenzialkoeffizienten $\frac{dP_1}{dr}$ übergeht, und integrirt zwischen den Gränzen $r = R - T$ und $r = R + T$; so ergibt sich

$$P_1 = \frac{P_2}{2RTa}\int_{R-T}^{R+T} \Big\} \frac{\sin(\iota+\varphi_1).\cos\varphi_3}{\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)} r^2 + \tfrac{2}{3}\varrho r \tang\varphi_2 \Big\{ \, dr.$$

Nun ist

$$\frac{\sin(\iota+\varphi_1).\cos\varphi_3}{\cos(\iota+\varphi_1+\varphi_3)} = \frac{\tang\iota + \tang\varphi_1}{1 - \tang\varphi_1.\tang\varphi_3 - \tang\iota(\tang\varphi_1 + \tang\varphi_3)}$$

oder, da $\tang(\varphi_1+\varphi_3) = \frac{\tang\varphi_1 + \tang\varphi_3}{1 - \tang\varphi_1 . \tang\varphi_3}$ und daher

$$\tang\varphi_1 + \tang\varphi_3 = \tang(\varphi_1+\varphi_3)(1 - \tang\varphi_1 . \tang\varphi_3)$$

ist,

$$= \frac{\tang\iota + \tang\varphi_1}{(1 - \tang\varphi_1 . \tang\varphi_3)[1 - \tang\iota . \tang(\varphi_1 + \varphi_3)]}$$

oder, wenn man der Vereinfachung wegen mehr, als Eine Dimensionen von $\tang\varphi_1$ und $\tang\varphi_3$, vernachlässigt, und die Division ausführt,

$$= \tang\varphi_1 + \tang\iota + \tang(\varphi_1 + \varphi_3) . \tang^2\iota.$$

Hierdurch wird die obige Formel

$$P_1 =$$

$$\frac{P_2}{2RTa}\int_{R-T}^{R+T} \{ [\tang\varphi_1 + \tang\iota + \tang(\varphi_1+\varphi_3)\tang^2\iota] r^2 + \tfrac{2}{3}\varrho r \tang\varphi_2 \} dr \quad \dots (319)$$

Substituirt man hierin für $\tang\iota$ seinen Werth aus Gleichung (318); so kommt

$$P_1 = \frac{P_2}{2RTa}\int_{R-T}^{R+T}\left\{r^2 \operatorname{tang}\varphi_1 + Rr\operatorname{tang}J + R^2\operatorname{tang}^2 J.\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_3) + \tfrac{2}{3}\varrho r\operatorname{tang}\varphi_2\right\}dr.$$

Integrirt man nun wirklich und reduzirt; so erhält man

$$P_1 = \frac{P_2 R}{a}\left\{\operatorname{tang}J + \left(1+\tfrac{1}{3}\frac{T^2}{R^2}\right)\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}^2 J.\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_3) + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\varrho}{R}\right)\operatorname{tang}\varphi_2\right\}, \quad \ldots\ldots (320)$$

und hieraus ergibt sich nach Gleichung (121) für den Model

$$U_1 = U_2\left\{1 + \left[\left(1+\tfrac{1}{3}\frac{T^2}{R^2}\right)\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}^2 J.\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_3) + \tfrac{2}{3}\frac{\varrho}{R}\operatorname{tang}\varphi_2\right]\cot J\right\} \quad \ldots\ldots (321)$$

Setzt man das Differenzial dieses Ausdruckes von $U_1$ in Beziehung zu J gleich null; so findet man, daß die vortheilhafteste Neigung der mittleren Schraubenlinie eines viereckigen Gewindes durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}J = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{3}\frac{T^2}{R^2}\right)\operatorname{tang}\varphi_1 + \frac{2}{3}\frac{\varrho}{R}\operatorname{tang}\varphi_2}{\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_3)}}$$

bestimmt ist.

§. 258. Der Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie des viereckigen Gewindes überschreitet selten 7°, sodaß das Glied $\operatorname{tang}^2 J.\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_3)$ selten größer, als $0{,}015\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_3)$ ist, und demnach vernachlässigt werden kann. Ebenso kann man das Glied $\frac{1}{3}\left(\frac{T}{R}\right)^2\operatorname{tang}\varphi_2$ auslassen, da die Tiefe 2T des viereckigen Gewindes gewöhnlich zu etwa $\frac{1}{8}$ des Durchmessers angenommen wird, sodaß dieses Glied in der Regel den Werth $\frac{1}{192}$ $\operatorname{tang}\varphi_1$ nicht überschreitet.

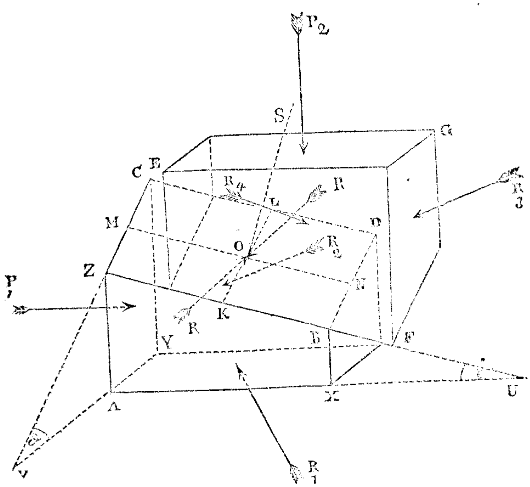
Unter diesen Vereinfachungen reduziren sich die vorstehenden Gleichungen, wenn man beachtet, daß $L = 2\pi R\operatorname{tang}J$ und daher $\operatorname{tang}J = \frac{L}{2\pi R}$ ist, auf

$$P_1 = \frac{P_2}{a} \left\{ \frac{L}{2\pi} + R \tang \varphi_1 + \tfrac{2}{3} \varrho \tang \varphi_2 \right\} \dots (322)$$

$$U_1 = U_2 \left\{ 1 + \frac{2\pi}{L} (R \tang \varphi_1 + \tfrac{2}{3} \varrho \tang \varphi_2) \right\} \dots (323)\ ^{*)}$$

---

*) Die früheren Untersuchungen beziehen sich sämmtlich auf den Fall, wo der Querschnitt des Schraubengewindes ein Rechteck bildet. Wenn es nicht auf sehr

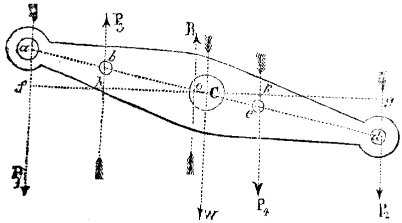



große Genauigkeit ankommt; so kann man die Formeln (316) und (317) auch auf Schrauben mit dreieckigen Gewinden anwenden. Will man indessen die Theorie solcher Schrauben elbstständig entwickeln; so kann Dies auf folgende Weise geschehen.

Man betrachte die beiden einander symmetrischen keilförmigen Körper **AB** und **EF**, welche auf der Fläche **CB** miteinander in Berührung sind. Die Winkel bei **A** seien sämmtlich rechte; die Ebene **CB** sei jedoch so gegen den Horizont geneigt, daß ihre Durchschnittslinien **ZB** und **ZC** mit den vertikalen Ebenen **XZ** und **YZ** resp. die Winkel $ZUA = \iota$ und $CVA = \vartheta$ bilden. Der untere Körper ruhe auf einer festen horizontalen Ebene; eine horizontale Kraft $P_1$ strebe denselben in paralleler Richtung zu **AX** fortzuschieben. Der obere Körper, gegen welchen der vertikale Widerstand $P_2$ wirkt, sei durch eine Kraft $R_3$, welche in einer zu **XZ** parallelen Ebene angebracht ist (und durch den Widerstand eines festen Punktes vertreten wird) verhindert, sich in paralleler Richtung zu **AX** zu bewegen, und demnach genöthigt, sich vertikal zu erheben. Außerdem seien (durch den Widerstand fester Punkte) in Ebenen, welche zu **YZ** parallel sind, gegen die Seitenflächen **YD** und **EF** der beiden Körper die Kräfte $R_2$ und $R_4$ angebracht, welche ein Ausweichen in einer Richtung parallel zu **AY** verhindere. Bezeichnet man den Widerstand der festen horizontalen Ebene **XY** mit $R_1$ und den Widerstand, welchen die Berührungsflächen **CF** der beiden Körper gegeneinander leisten mit **R**;

## Der Balancier der Dampfmaschine.

**§. 259.** $P_1, P_2, P_3, P_4$ seien resp. die Kräfte, welche durch die Stempelstange, die Kurbel- oder Treibstange, die Stange der



Luftpumpe und die Stange der Kaltwasserpumpe an dem Balancier einer Dampfmaschine angebracht sind, und man nehme die

---

so leuchtet ein, daß wenn sich die Körper im Gränzzustande des Gleichgewichtes befinden, an dem unteren die Kräfte $P_1, R, R_1, R_2$ und an dem oberen die Kräfte $P_2, R, R_3, R_4$ miteinander im Gleichgewichte sein müssen.

Sind nun $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ die Reibungswinkel für die Flächen, gegen welche resp. die Widerstände $R, R_1, R_2, R_3, R_4$ wirken; so folgt aus §. 141, daß alle diese Kräfte gegen die Normale auf den entsprechenden Flächen unter den Winkeln $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ geneigt sein müssen. Nachdem hiernach die Richtungen sämmtlicher Kräfte bestimmt sind, kann man eine jede in drei andere zerlegen, welche resp. den drei rechtwinkligen Axen $AX$, $AY$, $AZ$ parallel sind; die Bedingungen des Gleichgewichtes (s. den Anhang zum ersten Abschnitte) erfordern alsdann, daß die Komponenten dieser Kräfte in parallelen Richtungen zu einer jeden der drei Axen und für einen jeden der beiden Körper einander das Gleichgewicht halten.

Zur Bestimmung der Richtung des Widerstandes $R$ zwischen den Berührungsflächen der beiden Körper bemerkt man, daß dieselbe zuvörderst in der Oberfläche des Reibungskegels liegen und mit der Normalen $OS$ den Winkel $SOR = \varphi$ einschließen müsse. Denkt man sich durch den Angriffspunkt $O$ dieses Widerstandes die Linie $MN$ parallel zu $ZB$ gezogen, und durch diese Linie und die Normale $OS$ eine Normalebene $SON$ auf die Berührungsflächen gelegt; so muß die Durchschnittslinie dieser Normalebene mit dem Reibungskegel nothwendig die Richtung $OR$ des Widerstandes $R$ sein, weil die gleitende Bewegung der beiden Flächen aufeinander in der Richtung der Linie $MN$ erfolgt. Hieraus folgt, daß die Richtung des Widerstandes $R$ mit der Linie $MN$ oder auch mit $ZB$ einen Winkel $RON = \frac{\pi}{2} - \varphi$ bilden müsse. Da aber die Linie $KL$ auf $MN$ und auch auf der Normalen $OS$, mithin auf der Ebene $SON$ perpendikular steht; so sieht man ferner, daß die Richtung des Widerstandes $R$ gegen die Linie $KL$ oder $ZC$ unter einem rechten Winkel geneigt sein müsse. Aus diesen beiden Beziehungen lassen sich die Neigungswinkel der Linie $OR$ gegen die drei rechtwinkligen Axen $AX$, $AY$, $AZ$ leicht bestimmen. Bezeichnet man diese Winkel, welche die Linie $OR$ mit den positiven Richtungen der drei Axen einschließt, resp. mit $\alpha, \beta, \gamma$ und ebenso die Neigungswinkel der Linien $ZB$ und $ZC$ gegen die Axen resp. mit $\alpha', \beta', \gamma'$ und $\alpha'', \beta'', \gamma''$; so ist bekanntlich

Richtungen aller dieser Kräfte als vertikal an, was von der Wirklichkeit nur sehr wenig abweicht.

---

$$\cos \mathrm{RON} = \cos\alpha' \,.\, \cos\alpha + \cos\beta' \,.\, \cos\beta + \cos\gamma' \,.\, \cos\gamma,$$
$$\cos \mathrm{ROL} = \cos\alpha'' \,.\, \cos\alpha + \cos\beta'' \,.\, \cos\beta + \cos\gamma'' \,.\, \cos\gamma,$$
$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Macht man hierin die gehörigen Substitutionen, welche sich aus der Betrachtung der Figur leicht ergeben; so erhält man

$$\sin\varphi = \cos\iota \,.\, \cos\alpha - \sin\iota \,.\, \cos\gamma,$$
$$0 = \cos\vartheta \,.\, \cos\beta + \sin\vartheta \,.\, \cos\gamma,$$
$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{1-\sin^2\iota.\sin^2\vartheta}\left\{\sin\iota.\cos\vartheta\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\iota.\sin^2\vartheta}+\cos\iota.\sin\varphi\right\}\\
\cos\beta &= -\frac{\sin\vartheta}{1-\sin^2\iota.\sin^2\vartheta}\left\{\cos\iota\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\iota.\sin^2\vartheta}-\sin\iota.\cos\vartheta.\sin\varphi\right\}\\
\cos\gamma &= \frac{\cos\vartheta}{1-\sin^2\iota.\sin^2\vartheta}\left\{\cos\iota\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\iota.\sin^2\vartheta}-\sin\iota.\cos\vartheta.\sin\varphi\right\}
\end{aligned}\right\}(a)$$

Zerlegt man jetzt sämmtliche auf einen jeden der beiden Körper wirkenden Kräfte in ihre Komponenten nach parallelen Richtungen zu den drei Axen **A X**, **A Y**, **A Z**; so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen für den Gränzzustand des Gleichgewichtes (wenn man beachtet, daß hier $\beta$ einen stumpfen Winkel bezeichnet)

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= R\cos\alpha + R_1\sin\varphi_1 + R_2\sin\varphi_2,\\
R_2\cos\varphi_2 &= -R\cos\beta,\\
R_1\cos\varphi_1 &= R\cos\gamma,
\end{aligned}\right\} \text{(b) für den unteren Körper,}$$

$$\left.\begin{aligned}
R_3\cos\varphi_3 &= R\cos\alpha,\\
R_4\cos\varphi_4 &= -R\cos\beta,\\
P_2 + R_3\sin\varphi_3 + R_4\sin\varphi_4 &= R\cos\gamma
\end{aligned}\right\} \text{(c) für den oberen Körper.}$$

Hieraus folgt durch Elimination

$$P_1 = R(\cos\alpha + \cos\gamma \,.\, \tang\varphi_1 - \cos\beta\tang\varphi_2),$$
$$P_2 = R(\cos\gamma - \cos\alpha \,.\, \tang\varphi_3 + \cos\beta\tang\varphi_4),$$

und demnach

Die Stangen, vermittelst welcher die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ an dem Balancier angebracht sind, seien um Zapfen beweglich,

$$P_1 = P_2 \left\{ \frac{\cos\alpha + \cos\gamma . \tang\varphi_1 - \cos\beta . \tang\varphi_2}{\cos\gamma - \cos\alpha . \tang\varphi_3 + \cos\beta . \tang\varphi_4} \right\}, \ldots . (d)$$

worin für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die obigen Werthe zu substituiren sind.

Um den Model des Systemes zu erhalten; so bemerkt man, daß für $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ (mit Berücksichtigung der Werthe für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$)

$$P_1 = P_2 \tang\iota \ldots . (e)$$

wird, sodaß $\Phi_1(0) = \tang\iota$ und nach §. 152

$$U_1 = U_2 \frac{1}{\tang\iota} \left\{ \frac{\cos\alpha + \cos\gamma \tang\varphi_1 - \cos\beta . \tang\varphi_2}{\cos\gamma - \cos\alpha \tang\varphi_3 + \cos\beta . \tang\varphi_4} \right\} \ldots . (f)$$

ist.

Nimmt man nun an, die Breite $ZC$ der Ebene $CB$ sei sehr gering, und die beiden Körper $AB$ und $EF$ werden ebenso, wie Dies in §. 253 näher beschrieben ist, um einen vollen und einen hohlen Zylinder gewunden; so erhält man das System einer Schraube und einer Mutter mit einem Gewinde, dessen Neigung gegen den Horizont in tangentialer Richtung an die Schraubenlinie gleich $\iota$ ist und dessen Oberfläche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, welche fortwährend durch die Axe der Schraube und durch die Schraubenlinie geht und sich stets unter dem Winkel $\vartheta$ gegen die horizontale Ebene $XY$ oder unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ gegen die Axe der Schraube neigt.

Die Gleichungen für eine solche Schraube sind durch die vorstehenden Ausdrücke gegeben, jedoch ist dabei noch zu bemerken, daß die beiden Kräfte $R_2$ und $R_4$, welche in dem vorhin betrachteten Systeme durch äußere Hindernisse vertreten werden mußten, um die Abweichung der Körper in der Seitenrichtung zu verhüten, bei dem Systeme der Schraube durch die Kohäsion der Materie, aus welcher die Mutter und die Spindel bestehen, ersetzt werden. Hierdurch wird aber keine Reibung hervorgerufen, die Widerstände $R_2$ und $R_4$ sind vielmehr perpendikular gegen die Seiten oder parallel zu $AY$ gerichtet, und man hat $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_4 = 0$ zu setzen. Hierdurch reduziren sich die obigen Gleichungen auf

$$P_1 = P_2 \left\{ \frac{\cos\alpha + \cos\gamma \tang\varphi_1}{\cos\gamma - \cos\alpha \tang\varphi_3} \right\}.$$

$$U_1 = U_2 \left\{ \frac{\cos\alpha + \cos\gamma \tang\varphi_1}{\tang\iota(\cos\gamma - \cos\alpha \tang\varphi_3)} \right\}$$

Ferner ist bei der Anwendung auf die Schraube zu bemerken, daß sich die Reibung an der festen horizontalen Ebene $XY$ in die Reibung an der Stirnfläche eines stehenden Zapfens verwandelt. Setzt man daher in den vorstehenden Gleichungen zuvörderst $\varphi_1 = 0$, addirt dann aber auf der rechten Seite des Werthes von $P_1$ die Größe $\frac{2}{3} P_2 \frac{\varrho}{r} \tang\varphi_1$, welche nach §. 177 diesem Widerstande deren Mittelpunkte $a, d, b, e$ in derselben durch den Mittelpunkt **C** der Axe des Balanciers gehenden Linie liegen.

---

entspricht, wenn er durch eine am Umfange der Schraube oder an dem Hebelarme $r$ wirkende Kraft überwältigt werden soll; so ergibt sich

$$P_1 = \frac{P_2}{\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - \operatorname{tang}\varphi_3} + \tfrac{2}{3} P_2 \frac{\varrho}{r} \operatorname{tang}\varphi_1 \ldots\ldots (g)$$

Soll die treibende Kraft $P_1$ am Hebelarme $a$ wirken; so findet man leicht

$$P_1 = P_2 \left(\frac{r}{a}\right) \left\{ \frac{1}{\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - \operatorname{tang}\varphi_3} + \tfrac{2}{3} \frac{\varrho}{r} \operatorname{tang}\varphi_1 \right\} \ldots\ldots (h)$$

und

$$U_1 = U_2 \left\{ \frac{1}{\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - \operatorname{tang}\varphi_3} + \tfrac{2}{3} \frac{\varrho}{r} \operatorname{tang}\varphi_1 \right\} \cot\iota\,, \ldots\ldots (i)$$

worin

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \cos\vartheta \left\{ \frac{\cos\iota\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\iota\,.\sin^2\vartheta} - \sin\iota\,.\cos\vartheta.\sin\varphi}{\sin\iota\cos\vartheta\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\iota\,.\,\sin^2\vartheta} + \cos\iota\,.\sin\varphi} \right\} \ldots\ldots (k)$$

ist.

Bei der Bewegung einer solchen Schraube mit schiefem Gewinde äußert sich in perpendikularer Richtung rings um die Axe ein Druck $R_2$ und $R_4$, vermöge dessen die Spindel die Mutter auseinanderzutreiben und die Mutter die Spindel zusammenzudrücken strebt. Man erhält den Werth desselben aus den früheren Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht, wenn man die Reibungswinkel $\varphi_2$ und $\varphi_4 = 0$ setzt, da hier die Widerstände $R_2$ und $R_4$ ohne Reibung wirken. Dies ergibt

$$R_2 = -R\cos\beta = \frac{-P_1\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\gamma\operatorname{tang}\varphi_1},$$

oder da $-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \operatorname{tang}\vartheta$ ist,

$$R_2 = \frac{P_1\operatorname{tang}\vartheta}{\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + \operatorname{tang}\varphi_1} \ldots\ldots (l)$$

Aus dem raschen Wachsen dieses Werthes von $R_2$ mit dem Winkel $\vartheta$ oder mit dem Neigungswinkel der Generatrix der Schraubengänge gegen den Horizont erklärt sich die große Gewalt, mit welcher Holzschrauben die Masse des Holzes auseinandertreiben, in welche sie eingedrückt werden, selbst wenn ihre Spindel nicht konisch gebildet ist. Wenn man von allen Reibungen abstrahirt; so wird der Werth dieses Druckes

Bezeichnet man die Halbmesser dieser Zapfen mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, den Halbmesser der Axe des Balanciers mit $\varrho$ und die Reibungswinkel für die Oberflächen dieser Zapfen und dieser Axe in ihren Lagern mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi$; so leuchtet ein, daß wenn sich der Balancier durch das Übergewicht der Kraft $P_1$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes befindet, ein jeder Zapfen oder eine jede Axe im Begriffe ist, sich in ihren Lagern zu drehen, und daß demnach die Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, R$, wovon $R$ den Widerstand des Lagers der Axe des Balanciers bezeichnet, nicht durch die Mittelpunkte ihrer entsprechenden Zapfen oder Axen gehen, sondern um perpendikulare Abstände davon entfernt sein werden, welche resp. durch $\varrho_1 \sin\varphi_1$, $\varrho_2 \sin\varphi_2$, $\varrho_3 \sin\varphi_3$, $\varrho_4 \sin\varphi_4$ und $\varrho \sin\varphi$ dargestellt sind.

Ferner leuchtet ein, daß die Richtung der Kraft $P_1$ an derjenigen Seite des Mittelpunktes $a$ ihres Zapfens liegen wird, welche dem Mittelpunkte des Balanciers zugekehrt ist, da der Einfluß der Reibung an diesem Zapfen in einer Verminderung der Wirkung der Kraft $P_1$ behuf Drehung des Balanciers besteht. Ebenso begreift man, daß die Richtungen der Kräfte $P_2$, $P_3$, $P_4$ weiter von dem Mittelpunkte des Balanciers entfernt sein müssen, als die Mittelpunkte ihrer Zapfen, da die Reibung an diesen Zapfen den Widerstand, welchen die darauf angebrachten Kräfte der Drehung des Balanciers entgegensetzen, zu vermehren strebt. Endlich erhellet, daß der Widerstand $R$ des

---

$$R_2 = P_1 \frac{\tang \vartheta}{\tang \iota} \ldots . (m) \text{ während}$$

$$P_1 = P_2 \tang \iota \ldots . (n)$$

wird. Man sieht, daß jener Druck $R_2$ zwischen der Mutter und der Spindel direkt mit der Tangente des Neigungswinkels der Generatrix des Gewindes gegen den Horizont und indirekt mit der Tangente des Neigungswinkels des Gewindes selbst gegen den Horizont wächst. Übrigens begreift man, daß der vorstehende Werth von $R_2$ die Summe aller Pressungen darstellt, welche sich rings um die Axe in der Richtung der Halbmesser äußern. Wäre demnach die Länge der Spindel, soweit sie in der Mutter enthalten ist, gleich $l$; so würde der Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche der Spindel in der Richtung der Halbmesser

$$\frac{R_2}{2 r \pi . l} = P_1 \frac{\tang \vartheta}{2 \pi r l . \tang \iota} \ldots . (o)$$

betragen, ein Werth, der mit der Länge $l$ in direktem Verhältnisse abnimmt. —

Axenlagers des Balanciers seine Richtung an derselben Seite des Mittelpunktes C, wie die Kraft $P_1$, hat, da derselbe der Resultante aller auf den Balancier wirkenden Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, und diese Resultante für sich allein den Balancier in derselben Richtung, wie die Kraft $P_1$, herumdrehen würde.

Nun sei $Ca = a_1$, $Cd = a_2$, $Cb = a_3$, $Ce = a_4$, und wenn man die Horizontale $fCg$ zieht, Winkel $aCf = \vartheta$. Ferner bezeichne W das Gewicht des Balanciers, welches durch den Mittelpunkt seiner Axe wirkend gedacht wird.

Da $P_1, P_2, P_3, P_4, W, R$ Kräfte im Gleichgewichte sind; so hat man nach dem Principe der Gleichheit der Momente, wenn man diese Momente in Beziehung zu dem Punkte 0 nimmt,

$$P_1 . \overline{of} = P_2 . \overline{og} + P_3 . \overline{oh} + P_4 . \overline{ok} + W . \overline{oC}.$$

Es ist aber $of = Cf - Co = a_1 \cos\vartheta - \varrho_1 \sin\varphi_1 - \varrho \sin\varphi$, $og = Cg + Co = a_2 \cos\vartheta + \varrho_2 \sin\varphi_2 + \varrho \sin\varphi$, $oh = Ch - Co$ $= a_3 \cos\vartheta + \varrho_3 \sin\varphi_3 - \varrho \sin\varphi$, $ok = Ck + Co = a_4 \cos\vartheta + \varrho_4 \sin\varphi_4 + \varrho \sin\varphi$; demnach

$$P_1[a_1 \cos\vartheta - (\varrho_1 \sin\varphi_1 + \varrho \sin\varphi)] = P_2[a_2 \cos\vartheta + (\varrho_2 \sin\varphi_2 + \varrho \sin\varphi)]$$
$$+ P_3[a_3 \cos\vartheta + (\varrho_3 \sin\varphi_3 - \varrho \sin\varphi)] + P_4[a_4 \cos\vartheta + (\varrho_4 \sin\varphi_4 + \varrho \sin\varphi)]$$
$$+ W \varrho \sin\varphi \ldots . (324)$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $\vartheta$ und beachtet, daß $a_1 \vartheta$ den vom Angriffspunkte der Kraft $P_1$ beschriebenen Raum und demnach $P_1 a_1 \vartheta$ die Arbeit $U_1$ dieser Kraft darstellt, daß in gleicher Weise $P_2 a_2 \vartheta$ die Arbeit $U_2$ der Kraft $P_2$, $P_3 a_3 \vartheta$ die Arbeit $U_3$ der Kraft $P_3$, $P_4 a_4 \vartheta$ die Arbeit $U_4$ der Kraft $P_4$ und daß $a_1 \vartheta$ sehr nahe den Raum $S_1$ darstellt, welchen der Endpunkt der Stempelstange bestrebt; so erhält man

$$U_1 \left[\cos\vartheta - \left(\frac{\varrho_1 \sin\varphi_1 + \varrho \sin\varphi}{a_1}\right)\right] = U_2\left[\cos\vartheta + \left(\frac{\varrho_2 \sin\varphi_2 + \varrho \sin\varphi}{a_2}\right)\right]$$
$$+ U_3\left[\cos\vartheta + \left(\frac{\varrho_3 \sin\varphi_3 - \varrho \sin\varphi}{a_3}\right)\right] + U_4\left[\cos\vartheta + \left(\frac{\varrho_4 \sin\varphi_4 + \varrho \sin\varphi}{a_4}\right)\right]$$
$$+ W S_1 \left(\frac{\varrho}{a_1}\right) \sin\varphi, \ldots . (325)$$

eine Gleichung worin der Model des Balanciers besteht.

Die Form dieser Gleichung vereinfacht sich sehr, wenn man $\cos\vartheta = 1$ setzt, was ohne Herbeiführung eines erheblichen Fehlers immer geschehen kann, da in der Praxis der Winkel $\vartheta$ niemals $20^0$ überschreitet, und demnach $\cos\vartheta$ niemals um mehr, als 0,060307 von der Einheit abweicht, wenn man ferner die Reibungskoeffizienten für alle Zapfen und Axen einander gleich, also $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$ annimmt, mit dem Koeffizienten von $U_1$ dividirt und Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{a_1}$, etc. vernachlässigt. Hierdurch erhält man nach gehöriger Reduktion

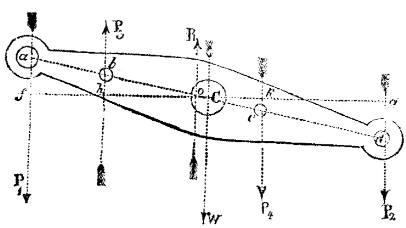
$$U_1 = U_2\left[1+\left(\frac{\varrho+\varrho_1}{a_1}+\frac{\varrho+\varrho_2}{a_2}\right)\sin\varphi\right]+U_3\left[1+\left(\frac{\varrho+\varrho_1}{a_1}-\frac{\varrho-\varrho_3}{a_3}\right)\sin\varphi\right]$$

$$+U_4\left[1+\left(\frac{\varrho+\varrho_1}{a_1}+\frac{\varrho+\varrho_4}{a_4}\right)\sin\varphi\right]+WS\left(\frac{\varrho}{a_1}\right)\sin\varphi \; \ldots . (326)$$

## §. 260. Die beste Lage der Axe des Balanciers.

$a$ sei die Länge $ad$ des Balanciers und $x$ der Abstand $aC$ des Mittelpunktes seiner Axe von dem Ende, an welchem die treibende Kraft wirkt.

Wenn der Einfluß der Lage der Axe auf den Kraftaufwand behuf Öffnung der Ventile, Bewegung der Pumpen und Über-



windung der vom Gewichte des Balanciers erzeugten Reibung vernachlässigt wird, und diese Lage nur unter der Bedingung bestimmt werden soll, daß ein gegebener Betrag von Nutzarbeit $U_2$ auf die Treibstange durch den kleinstmöglichen Betrag $U_1$ von Arbeit der treibenden Kraft auf die Stempelstange hervorgebracht werde; so kann man die letzten drei Glieder der Gleichung (326) als konstant betrachten und $=A$ setzen. Hierdurch wird jene Gleichung, wenn man beachtet, daß darin $a_1 = x$ und $a_2 = a - x$ ist,

$$U_1 = \left[1 + \left(\frac{\varrho + \varrho_1}{x} + \frac{\varrho + \varrho_2}{a - x}\right) \sin\varphi\right] U_2 + A.$$

Die vortheilhafteste Lage der Axe ist nun durch denjenigen Werth von $x$ bestimmt, welcher diese Funktion zu einem Minimum macht. Man findet denselben, wenn man den Differenzialkoeffizienten des Ausdruckes $\frac{\varrho + \varrho_1}{x} + \frac{\varrho + \varrho_2}{a - x}$ in Beziehung zu $x$ gleich null setzt. Dies ergibt

$$-\frac{\varrho + \varrho_1}{x^2} + \frac{\varrho + \varrho_2}{(a - x)^2} = 0,$$

oder, wenn man mit $x^2 (a - x)^2$ multiplizirt,

$$(\varrho + \varrho_2) x^2 - (\varrho + \varrho_1)(a - x)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$[x\sqrt{\varrho + \varrho_2} + (a - x)\sqrt{\varrho + \varrho_1}][x\sqrt{\varrho + \varrho_2} - (a - x)\sqrt{\varrho + \varrho_1}] = 0,$$

oder, wenn man mit dem Faktor $x\sqrt{\varrho + \varrho_2} + (a - x)\sqrt{\varrho + \varrho_1}$, welcher stets absolut positiv ist, und nicht $=0$ werden kann, dividirt,

$$x\sqrt{\varrho + \varrho_2} - (a - x)\sqrt{\varrho + \varrho_1} = 0.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{\varrho + \varrho_2}{\varrho + \varrho_1}}} \quad \ldots . (327)$$

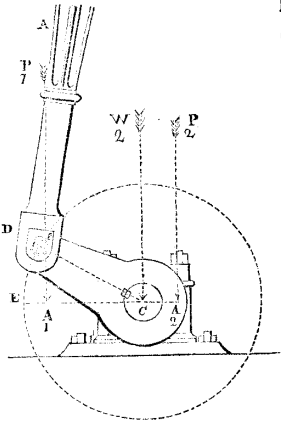
Wenn $\varrho_2 > \varrho_1$, so ist $\sqrt{\frac{\varrho + \varrho_2}{\varrho + \varrho_1}} > 1$ und $x < \frac{1}{2} a$; in diesem Falle muß die Axe also dem Angriffspunkte der treibenden Kraft näher gelegt werden, als dem des Nutzwiderstandes. Wenn $\varrho_2 < \varrho_1$, so ist $x > \frac{1}{2} a$ und die Axe muß dem Angriffspunkte des Nutzwiderstandes näher, als dem der treibenden Kraft, gelegt werden.

§. 261. Im §. 168 ist gezeigt worden, daß eine Maschine, welche sich, wie der Balancier einer Dampfmaschine, unter der Einwirkung zweier gegebener Kräfte um eine feste Axe drehet, mit dem geringsten Kraftaufwande getrieben wird, wenn beide Kräfte auf derselben Seite der Axe angebracht sind. Dieses Prinzip wird bei den gewöhnlichen Dampfmaschinen, welche die Wirkung der treibenden Kraft vermittelst eines Balanciers fortpflanzen, offenbar nicht beobachtet; es wird jedoch erfüllt bei den Maschinen, welche mit Crowther's Parallelbewegung arbeiten, und bei den kürzlich von Seaward eingeführten Schiffs-Dampfmaschinen, welche unter dem Namen der Gorgonen bekannt sind. Es ist in der That schwer, die Anwendung des Balanciers mit irgend einem anderen Grunde, als dem, zu vertheidigen, daß derselbe einigermaßen das Schwungrad bei der Ausgleichung der Bewegung des Kurbelarmes unterstütze (s. die Abhandlung über die ausgleichende Kraft des Balanciers von Coriolis im dreizehnten Bande des Journals der École polytechnique), eine Betrachtung, welche sich übrigens nicht auf die Pumpmaschinen ausdehnen läßt, wo niemals ein Schwungrad angebracht wird. In allen Fällen erhöhet die Anwendung des Balanciers die Kosten der Konstruktion der Maschine, und vermehrt durch sein eigenes Gewicht bedeutend die schädlichen Widerstände, welche sich der Bewegung der Maschine entgegensetzen.

## Die Kurbel.

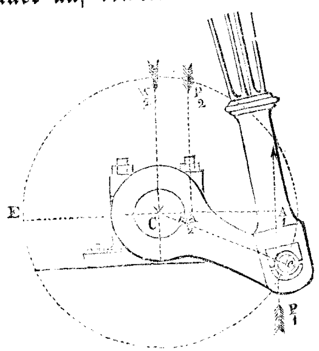
§. 262. **Der Model für die Kurbel, wenn die Richtung des Widerstandes der der treibenden Kräfte parallel ist.**

**CD** sei der Kurbelarm und **AD** die Treibstange. Um die Untersuchung zu vereinfachen, nehme man an, die Treibstange befinde sich fortwährend in ihrer vertikalen Lage, da der aus dieser Voraussetzung hervorgehende Fehler die Bedingungen der Aufgabe nur hinsichtlich der Reibung beeinträchtigt, und aus Gliedern von wenigstens zwei Dimensionen des Reibungskoeffizienten und der sehr geringen Winkelabweichung der Treibstange von der vertikalen Richtung besteht. Denkt man sich das Gewicht des Kur-




belarmes CD, welches durch dessen Schwerpunkt wirkt, nach §. 16 in zwei Kräfte zerlegt, von denen die Eine $W_2$ im Mittelpunkte C seiner Axe und die andere im Mittelpunkte $c$ der Axe, welche den Kurbelarm mit der Treibstange verbindet, wirksam ist; so sei die Summe aus der letztern Kraft und dem Gewichte der Treibstange durch $W_1$ dargestellt. Ferner bezeichne $P_2$ einen Widerstand, welcher sich der Umdrehung der Kurbel entgegensetzt und in irgend einem Augenblicke hinreichend sein würde, um die durch die Treibstange fortgepflanzte treibende Kraft $P_1$ im Gleichgewichte zu erhalten, und zur Vereinfachung der Untersuchung setze man die Richtung des Widerstandes $P_2$ als vertikal und nach unten gekehrt voraus. Endlich sei $Cc = a$, $CA_1 = a_1$, $CA_2 = a_2$, $cCW_2 = \vartheta$, die Halbmesser der Axen C und $c$ resp. $= \varrho_1$ und $\varrho_2$, die entsprechenden Reibungswinkel $= \varphi_1$ und $\varphi_2$, das ganze Gewicht des Kurbelarmes und der Treibstange $W_1 + W_2 = W$.

Da sich der Kurbelarm im Gränzzustande des Gleichgewichtes befindet; so ist der perpendikulare Abstand der Richtung des Widerstandes seines Axenlagers von dem Mittelpunkte seiner Axe $= \varrho_1 \sin \varphi_1$ (s. §. 153). Dieser Widerstand ist gleich der Resultante aller auf den Kurbelarm wirkenden Kräfte, also $= P_1 \pm (P_2 + W)$, worin $P_1 > P_2 + W$ vorausgesetzt wird und worin das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, jenachdem die Richtung von $P_1$ nach unten oder nach oben gekehrt ist, oder jenachdem sich der Kurbelarm nach unten (wie in der obigen Figur) oder nach oben (wie in der nebenstehenden Figur bewegt.




Hieraus folgt, daß das Moment des Widerstandes des Axenlagers gegen die Axe der Kurbel durch $[P_1 \pm (P_2 + W)] \varrho_1 \sin\varphi_1$ ausgedrückt ist.

Nun halten sich die Kräfte $P_1$, $P_2$ und der eben erwähnte Widerstand im Gleichgewichte; nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente hat man daher, wenn man beachtet, daß die treibende Kraft durch $P_1 \pm W_1$ dargestellt wird, jenachdem sich der Kurbelarm nach unten oder nach oben bewegt,

$$(P_1 \pm W_1) a_1 = P_2 a_2 + [P_1 \pm (P_2 + W)] \varrho_1 \sin\varphi_1.$$

Da aber die Axe $c$, welche die Treibstange mit dem Kurbelarme verbindet, im Begriffe ist, sich auf ihren Lagern zu drehen; so geht die Richtung der Kraft $P_1$ nicht durch den Mittelpunkt dieser Axe, sondern ist von derselben um einen Abstand $= \varrho_2 \sin\varphi_2$ entfernt, ein Abstand, welcher nach derjenigen Seite des Mittelpunktes $c$ gemessen werden muß, welche dem Punkte $C$ zugekehrt ist, da die Reibung an der Axe $c$ die Wirkung der Kraft $P_1$ behuf Umdrehung des Kurbelarmes zu vermindern strebt. Hiernach hat man

$$a_1 = a \sin\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2 \ldots (328)$$

Substituirt man diesen Werth für $a_1$ in die vorhergehende Gleichung; so kommt

$$(P_1 \pm W_1)(a \sin\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2) = P_2 a_2 + [P_1 \pm (P_2 + W)] \varrho_1 \sin\varphi_1 \ldots (329)$$

und nach gehöriger Reduktion

$$P_1 [a \sin\vartheta - \varrho_1 \sin\varphi_1 - \varrho_2 \sin\varphi_2]$$
$$= P_2 [a_2 \pm \varrho_1 \sin\varphi_1] \pm W \varrho_1 \sin\varphi_1 \mp W_1 (a \sin\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2).$$

Dies ist die Beziehung, welche zwischen $P_1$ und $P_2$ im Gränzzustande des Gleichgewichtes besteht. Bezeichnet man nun mit $\triangle\vartheta$ einen sehr kleinen, von dem Kurbelarme beschriebenen Bogen; so stellt $a_2 \triangle\vartheta$ den Raum dar, durch welchen der Widerstand $P_2$ während dieser Zeit überwunden wird, und $P_2 a_2 \triangle\vartheta$ ist das Inkrement $\triangle U_2$ der Nutzarbeit, welches bei der Beschreibung dieses kleinen Winkels von der Kurbel geleistet wird. Multiplizirt man daher die vorstehende Gleichung mit $a_2 \triangle\vartheta$; so ergibt sich

$$P_1 a_2 [a \sin\vartheta - \varrho_1 \sin\varphi_1 - \varrho_2 \sin\varphi_2] \triangle\vartheta$$
$$= [a_2 \pm \varrho_1 \sin\varphi_1] \triangle U_2 \pm W a_2 \varrho_1 \sin\varphi_1 \triangle\vartheta \mp W a_2 (a \sin\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2) \triangle\vartheta \quad \ldots . (330)$$

und hieraus erhält man, wenn man $\triangle\vartheta$ unendlich klein annimmt, sodaß $\frac{\triangle U_2}{\triangle\vartheta} = \frac{dU_2}{d\vartheta}$ wird, und zwischen den Gränzen $\vartheta = \Theta$ und $\vartheta = \pi - \Theta$ integrirt, darauf durch $a_2$ dividirt,

$$P_1 [2 a \cos\Theta - (\pi - 2\Theta)(\varrho_1 \sin\varphi_1 + \varrho_2 \sin\varphi_2)]$$
$$= \left[1 \pm \frac{\varrho_1}{a_2} \sin\varphi_1\right] U_2 \pm W (\pi - 2\Theta) \varrho_1 \sin\varphi_1 \mp W_1 [2 a \cos\Theta - \varrho_2 (\pi - 2\Theta) \sin\varphi_2] \quad \ldots . (331)$$

Nun bemerkt man, daß $2a\cos\Theta$ die Projektion des Weges auf die vertikale Richtung von $P_1$ darstellt, welchen der Angriffspunkt $c$ dieser Kraft beschreibt, während der Kurbelarm aus der Lage $\Theta$ in die Lage $\pi - \Theta$ übergeht, sodaß $P_1 . 2a\cos\Theta$ (§. 52) die Arbeit $U_1$ darstellt, welche die treibende Kraft $P_1$ auf die Kurbel entwickelt, während ihr Arm aus der Einen Lage in die andere übergeht, oder während die Nutzarbeit $U_2$ hervorgebracht wird. Setzt man demnach in der vorstehenden Gleichung $P_1 = \frac{U_1}{2 a \cos\Theta}$; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$U_1 \left[1 - \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \Theta}{\cos\Theta}\right) \left(\frac{\varrho_1}{a} \sin\varphi_1 + \frac{\varrho_2}{a} \sin\varphi_2\right)\right]$$
$$= \left[1 \pm \frac{\varrho_1}{a_2} \sin\varphi_1\right] U_2 \pm W (\pi - 2\Theta) \varrho_1 \sin\varphi_1 \mp W_1 [2 a \cos\Theta - \varrho_2 (\pi - 2\Theta) \sin\varphi_2], \quad \ldots . (332)$$

eine Gleichung, durch welche der Model der Kurbel resp. für die niedergehende oder aufsteigende Bewegung des Kurbelarmes bestimmt ist, jenachdem man die oberen oder die unteren Zeichen nimmt.

Addirt man die beiden durch diese Gleichung dargestellten Werthe zusammen, bezeichnet mit $U_1$ die Gesammtarbeit von $P_1$ und mit $U_2$ die Gesammtarbeit von $P_2$, während der Kurbelarm eine ganze Umdrehung macht, ferner mit $u_1$ die Arbeit von $P_2$ beim Niedergange und mit $u_2$ die beim Aufgange, sodaß $u_1 + u_2 = U_2$ ist; so erhält man (wenn man in den beiden Werthen der

Gleichung (332) zuvörderst resp. $u_1$ und $u_2$ an die Stelle von $\mathbf{U}_2$ setzt, und dann die Addition ausführt)

$$\mathbf{U}_1\left[1-\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\Theta}{\cos\Theta}\right)\left(\frac{\varrho_1}{a}\sin\varphi_1+\frac{\varrho_2}{a}\sin\varphi_2\right)\right]=\mathbf{U}_2+(u_1-u_2)\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1 \quad \ldots.(333)$$

In dieser Formel besteht der Model der Kurbel, wenn die Richtungen der treibenden Kraft und des Nutzwiderstandes als **vertikal** angenommen werden, und wenn vorausgesetzt wird, daß der Kurbelarm bei einer jeden halben Umdrehung die Wirkung der treibenden Kraft erst dann empfängt, wenn er sich unter einem Winkel $\Theta$ gegen die Vertikale neigt, und daß die Wirkung dieser Kraft auf den Kurbelarm dann schon wieder aufhört, wenn derselbe einen gleichen Winkel mit der Vertikalen auf der entgegengesetzten Seite einer durch den Mittelpunkt seiner Axe gehenden Horizontalen einschließt, sodaß er sich unter der Wirkung der treibenden Kraft immer nur um einen Winkel gleich $\pi-2\Theta$ drehet.

Bei der doppelt wirkenden Dampfmaschine ist $u_1-u_2=0$; bei der einfach wirkenden ist $u_1=0$. Die auf die Reibung an der Kurbel zu verwendende Arbeit ist demnach bei der letzteren Maschine geringer, als bei der ersteren, wenn der Widerstand $\mathbf{P}_2$, wie in der letzteren Figur, an der Seite des aufsteigenden Bogens angebracht ist.

Wenn der Kurbelarm die Wirkung der treibenden Kraft **fortwährend** empfängt; so hat man $\Theta=0$ und der Model wird für die **doppelt wirkende Maschine**

$$\mathbf{U}_1\left[1-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho_1}{a}\sin\varphi_1+\frac{\varrho_2}{a}\sin\varphi_2\right)\right]=\mathbf{U}_2,$$

oder wenn man mit dem Koeffizienten von $\mathbf{U}_1$ dividirt, und Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$, vernachlässigt,

$$\mathbf{U}_1=\left\{1+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho_1}{a}\sin\varphi_1+\frac{\varrho_2}{a}\sin\varphi_2\right)\right\}\mathbf{U}_2 \quad \ldots.(334)$$

Da der Model die Größe $\mathbf{W}$ oder das Gewicht der Kurbel nicht enthält; so leuchtet ein, daß solange $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ vertikal wirken und $P_1 > P_2 + W$ ist, das Gewicht der Kurbel mit der Treibstange keinen Einfluß auf die zur Bewegung erforderliche Arbeit der treibenden Kraft hat, indem die Reibung durch dieses Gewicht bei dem Aufgange der Treibstange um ebenso viel vermindert wird, wie sie beim Niedergange vermehrt wird.

Ferner begreift man, daß wenn die Reibung, welche dem Gewichte der Kurbel entspricht, vernachlässigt wird, der vorhin für den Fall abgeleitete Model, wo die Richtungen der Kräfte $P_1$ und $P_2$ vertikal sind, auch auf jeden anderen Fall Anwendung findet, wo die Richtungen dieser Kräfte parallel sind.

Die Bedingung $P_1 > P_2 + W$ findet offenbar in jeder anderen Lage des Kurbelarmes statt, wenn sie in der horizontalen Lage obwaltet.

In dieser Lage ist aber für den Aufgang des Kurbelarmes bei Vernachlässigung der Reibungen (Gleichung 329)

$$P_1 a = P_2 a_2 + W_1 a, \text{ also } P_1 \frac{a}{a_2} = P_2 + W_1 \frac{a}{a_2},$$

und daher $P_1 \frac{a}{a_2} > P_2$. Die vorstehende Bedingung, deren Erfüllung bloß für das Aufsteigen des Armes nothwendig ist, findet daher immer statt, wenn man

$$P_1 > \frac{a}{a_2} P_1 + W \text{ oder}$$

$$P_1 \left(1 - \frac{a}{a_2}\right) > W$$

hat. Hierzu ist es vor allen Dingen erforderlich, daß $a_2 > a$, oder daß der Widerstand in einem perpendikularen Abstande von der Axe angebracht sei, welcher größer ist, als die Länge des Kurbelarmes. Außerdem findet sich diese Bedingung in den meisten Fällen der Anwendung der Kurbel wirklich erfüllt.

§. 263. Wollte man jedoch den Model für den Fall bestimmen, wo $P_1$ nicht in jeder Lage $> P_2 + W$ ist; so bemerke man zuvörderst, daß die obige Bedingung auf den Model (Gleichung 332) nur beim Aufsteigen des Kurbelarmes Einfluß hat, daß es ferner eine gewisse Lage des Armes im aufsteigenden Halbkreise gibt, in welcher die durch die Formel $P_1 - (P_2 + W)$ ausgedrückte

Resultante den Werth null annimmt und alsdann durch $(P_2+W)-P_1$ dargestellt wird, und daß endlich, wenn der Kurbelarm sich weiter erhoben und eine gleiche Neigung gegen die Vertikale auf der entgegengesetzten Seite der durch seine Axe gehenden Horizontalen angenommen hat, der Werth jener Resultante wiederum durch null geht und darauf durch die erste Formel dargestellt wird. Der Werth des in Rede stehenden Neigungswinkels kann dadurch bestimmt werden, daß man in der Gleichung (329) $P_1$ für $P_2+W$ substituirt, und dieselbe, unter Beibehaltung der unteren Zeichen, für $\vartheta$ auflös't. Bezeichnet man diesen Winkel mit $\vartheta_1$; so kann man die Gleichung (330) für den aufsteigenden Halbkreis von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=\vartheta_1$ integriren, indem man die Arbeit des Widerstandes $P_2$ durch diesen Winkel mit $u_1$ bezeichnet; darauf kann man die Zeichen aller derjenigen Glieder, welche $\varrho_1 \sin\varphi_1$ enthalten, umkehren, was einer Umänderung der Formel von dem Falle, wo der resultirende Druck auf die Axe $=P_1-(P_2+W)$ ist, auf den Fall, wo dieser Druck $=(P_2+W)-P_1$ ist, entspricht, und alsdann die Gleichung (330) zwischen den Gränzen $\vartheta=\vartheta_1$ und $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ integriren, indem man die Arbeit des Widerstandes $P_2$ durch diesen Winkel mit $u_2$ bezeichnet. Die Gesammtarbeit $U_2$ von $P_2$ im aufsteigenden Halbkreise wird hiernach durch $2(u_1+u_2)$ dargestellt sein. Um diese Summe zu bestimmen, dividire man das erste Integral durch den Koeffizienten von $u_1$, das zweite durch den von $u_2$, addire die erhaltenen Gleichungen, und multiplizire die entstehende Summe mit 2. Wird der so erhaltene Model für den aufsteigenden Halbkreises zu dem Model des absteigenden Halbkreises addirt; so ergibt sich der Model für eine ganze Umdrehung des Kurbelarmes.

## Die todten Punkte der Kurbel.

§. 264. Wenn die Gleichung (329) für $P_1$ aufgelös't wird; so kommt

$$P_1=$$

$$P_2\left\{\frac{a_2\pm\varrho_1\sin\varphi_1}{a\sin\vartheta-\varrho_1\sin\varphi_1-\varrho_2\sin\varphi_2}\right\}\pm\frac{W\varrho_1\sin\varphi_1-W_1(a\sin\vartheta-\varrho_2\sin\varphi_2)}{a\sin\vartheta-\varrho_1\sin\varphi_1-\varrho_2\sin\varphi_2}.$$

In derjenigen Lage des Kurbelarmes, in welcher

$$\sin\vartheta = \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1 + \varrho_2 \sin\varphi_2}{a} \ldots . (335)$$

wird, nimmt also die treibende Kraft, welche zur Überwindung irgend eines gegebenen Widerstandes $\mathbf{P}_2$ erforderlich ist, einen unendlichen Werth an. Diese Lage, in welcher keine endliche, in der Richtung der Teibstange wirkende Kraft hinreichend ist, um den Kurbelarm aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung zu versetzen, heißt ein todter Punkt.

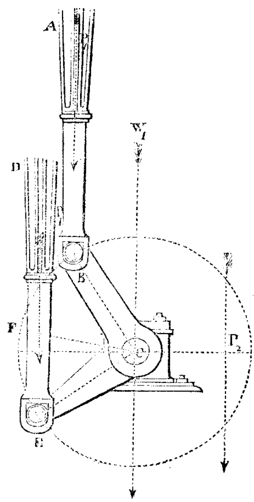
Da es vier Werthe von $\vartheta$ gibt, welche der Gleichung (335) ein Genüge leisten, zwei im absteigenden und zwei im aufsteigenden Halbkreise; so enthält die Kurbel überhaupt vier todte Punkte. Da übrigens ein jeder Werth von $\mathbf{P}_1$ zwischen den beiden höchsten und den beiden tiefsten dieser Lagen in allen Fällen ungemein groß ist; so entspricht eine jede beliebige Lage des Kurbelarmes zwischen den beiden ersteren oder den beiden letzteren und auch eine jede Lage in einiger Entfernung zu beiden Seiten dieser Gränzen in praktischer Beziehung einem todten Punkte.

## Die doppelte Kurbel.

§. 265. Bei dieser Kurbel, sowie sie von einer Dampfmaschine in Bewegung gesetzt wird, sind an Ein und derselben Axe zwei Arme rechtwinklig gegeneinander befestigt, von denen ein jeder den Druck des Dampfes aus einem besonderen Zylinder empfängt. Dieser Druck wird einem jeden Arme durch die entsprechende Stempelstange vermittelst eines Balanciers und einer Treibstange, wie bei den Schiffs-Dampfmaschinen, oder vermittelst einer Führung der Stempelstange zwischen sogenannten Koulissen und einer Treibstange, wie bei den Lokomotiven, mitgetheilt.

In einem jeden Falle kann man die Bedingungen für das Gleichgewicht und die Bewegung unter der Voraussetzung entwickeln, daß die Treibstangen fortwährend einander parallel bleiben, und die darauf wirkenden Kräfte in Ein und derselben Ebene liegen, ohne dadurch die Resultante merklich zu beeinträchtigen.

Man nehme an, die beiden Kurbelarme seien von derselben




Länge $a$, die treibenden Kräfte seien für beide Arme gleich $P_1$ und die Bezeichnungen der übrigen hierbei in Betracht kommenden Größen seien dieselben, wie in dem früheren Falle einer einfachen Kurbel. Betrachtet man zuvörderst den in der vorstehenden Figur dargestellten Fall, wo beide Kurbelarme auf derselben Seite des Mittelpunktes $C$ liegen, und bezeichnet den Winkel $W_1CB$ mit $\vartheta$, also den Winkel $W_1CE$ mit $\frac{\pi}{2}+\vartheta$; so folgt auf demselben Wege, wie in §. 262, daß der perpendikulare Abstand der Richtung der treibenden Kraft der Treibstange $AB$ vom Mittelpunkte $C$ der Kurbel (Gleichung 328) durch $a \sin\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2$ und der perpendikulare Abstand der treibenden Kraft der Treibstange $DE$ durch $a \sin\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right) - \varrho_2 \sin\varphi_2 = a\cos\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2$ dargestellt ist. Nun sei $a_1$ der perpendikulare Abstand von der Axe $C$, in welcher eine einzige Kraft gleich $2P$ angebracht werden müßte, um auf die Drehung der Kurbel dieselbe Wirkung zu äußern, wie sie durch die vorstehenden beiden Kräfte zusammen hervorgebracht wird; alsdann hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$2P_1 a_1 = P_1(a\sin\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2) + P_1(a\cos\vartheta - \varrho_2 \sin\varphi_2)$$

und hieraus

$$a_1 = \tfrac{1}{2}a(\sin\vartheta + \cos\vartheta) - \varrho_2 \sin\varphi_2.$$

Da $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also auch $\sin\vartheta + \cos\vartheta$ $= \sqrt{2}\left(\sin\vartheta \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos\vartheta \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)$ ist; so folgt, daß dieser Ausdruck für $a_1$ auch unter die Form

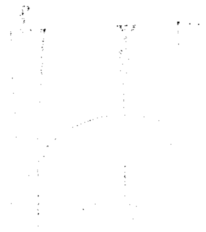
$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) - \varrho_2 \sin\varphi_2$$

gebracht werden kann, und man sieht, daß derselbe mit dem Werthe von $a_1$ der Gleichung (328) übereinstimmt, wenn man in der letzteren Gleichung $\frac{a}{\sqrt{2}}$ für $a$ und $\vartheta + \frac{\pi}{4}$ für $\vartheta$ an die Stelle setzt. Hieraus folgt, daß die Bedingungen für das Gleichgewicht der doppelten Kurbel in dem Gränzzustande und demnach auch die Form des Models für die Zeit, wo sich beide Arme an Ein und derselben Seite des Mittelpunktes der Axe befinden, genau dieselben, wie die einer einfachen Kurbel sind, bei welcher die Richtung des Armes den rechten Winkel **BCE** halbirt und bei welcher die Länge des Armes gleich der Länge eines jeden Armes der doppelten Kurbel, dividirt durch $\sqrt{2}$, ist.

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel $\mathbf{W_1CF}$ dieses eingebildeten Kurbelarmes gegen die Vertikale $\mathbf{W_1C}$ mit $\vartheta_1$; so werden beide Arme der doppelten Kurbel von der Lage, wo $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}$ ist, bis zu der, wo $\vartheta_1 = \pi - \frac{\pi}{4}$ ist, auf Ein und derselben Seite des Mittelpunktes **C** liegen. Substituirt man daher in den beiden in der Formel (331) enthaltenen Gleichungen $\frac{\pi}{4}$ für $\Theta$ und $\frac{a}{\sqrt{2}}$ für $a$, addirt alsdann diese beiden Gleichungen zusammen; so stellt das Zeichen $2\mathbf{U_2}$ in der entstehenden Gleichung die gesammte Nutzarbeit dar, welche von der Kurbel geleistet ist, während sich beide Arme in dem ab- und aufsteigenden Halbkreise an Ein und derselben Seite des Mittelpunktes befanden, während $\mathbf{P_1}$ die S u m m e der treibenden Kräfte der beiden Kurbelarme bezeichnet, und man hat

$$2\mathbf{P_1}\left[a - \frac{\pi}{2}\left(\varrho_1 \sin\varphi_1 + \varrho_2 \sin\varphi_2\right)\right] = 2\mathbf{U_2} \ldots . (336)$$

Da die Richtungen der beiden gleichen und parallelen in den Treibstangen wirkenden Kräfte bei der Beschreibung der anderen beiden Quadranten einer ganzen Umdrehung auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen; so wird der resultirende Druck auf die Axe der Kurbel durch $\mathbf{P_2} + \mathbf{W}$, anstatt durch $\mathbf{P_1} \pm (\mathbf{P_2} + \mathbf{W})$ dargestellt, während die Bedingungen für das Gleichgewicht im Gränzzustande in den übrigen Beziehungen



dieselben bleiben, d. h. dieselben, als wenn die Kraft $P_1$ (die Summe der treibenden Kräfte der beiden Treibstangen) an einem eingebildeten Arme, dessen Länge $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und dessen Lage CF ist, angebracht wäre. Diese Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn man in der Gleichung (329) das Doppelzeichen von $(P_2 + W)$ unterdrückt und dafür das einfache Zeichen $+$ setzt, gleichzeitig aber den Werth von $P_1$ auf der rechten Seite, welcher in $\varrho_1 \sin\varphi_1$ multiplizirt ist, $= 0$ annimmt. Hierdurch wird das in $-\varrho_1 \sin\varphi_1$ multiplizirte Glied auf der linken Seite der Gleichung (330) verschwinden, und das Doppelzeichen in dem ersten und zweiten Gliede auf der rechten Seite in das positive übergehen. Integrirt man nach diesen Substitutionen die Gleichung (330), zuerst zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{4}$ und dann zwischen den Gränzen $\frac{3\pi}{4}$ und $\pi$; so wird das Zeichen $U_2$ offenbar die Nutzarbeit während eines jeden der beiden Theile einer halben Umdrehung des eingebildeten Kurbelarmes darstellen, während welcher die beiden wirklichen Arme der Kurbel nicht auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen. Außerdem leuchtet ein, daß das Integral jener Gleichung zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{4}$ mit dem Integrale zwischen den Gränzen $\frac{3\pi}{4}$ und $\pi$ identisch ist. Nimmt man daher das zuerst erwähnte Integral doppelt; so erhält man

$$2P_1 a_2\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\varrho_2\sin\varphi_2\right]=[a_2+\varrho_1\sin\varphi_1]2U_2$$

$$+\frac{\pi}{2}Wa_2\varrho_1\sin\varphi_1 \mp 2W_1a_2\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\varrho_2\sin\varphi_2\right].$$

Dividirt man diese Gleichung durch $a_2 + \varrho_1 \sin\varphi_1$ oder durch $a_2\left(1+\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1\right)$ und vernachlässigt Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$; so ergibt sich

$$2P_1\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1\right)-\frac{\pi}{4}\varrho_2\sin\varphi_2\right]=2U_2+\frac{\pi}{2}W\varrho_1\sin\varphi_1$$

$$\mp 2W_1\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1\right)-\frac{\pi}{4}\varrho_2\sin\varphi_2\right],$$

worin $2U_2$ die Nutzarbeit beim Niedergange oder Aufgange des eingebildeten Kurbelarmes bezeichnet, jenachdem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, während $P_1$ die Summe der in den beiden Treibstangen wirkenden treibenden Kräfte darstellt. Nimmt man daher die Summe der beiden in der vorstehenden Gleichung enthaltenen Werthe, und bezeichnet mit $4U_2$ die gesammte Nutzarbeit, welche in dem ab- und aufsteigenden Halbkreise während derjenigen Perioden einer ganzen Umdrehung verrichtet wird, wo sich die beiden Arme auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes befinden; so erhält man

$$4P_1\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1\right)-\frac{\pi}{4}\varrho_2\sin\varphi_2\right]=4U_2+W\pi\varrho_1\sin\varphi_1,$$

oder da $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist,

$$2P_1\left[a(\sqrt{2}-1)-a(\sqrt{2}-1)\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1-\frac{\pi}{2}\varrho_2\sin\varphi_2\right]=4U_2+W\pi\varrho_1\sin\varphi_1.$$

Addirt man diese Gleichung zu der Gleichung (336), und bezeichnet die gesammte bei einer ganzen Umdrehung des eingebildeten Kurbelarmes geleistete Nutzarbeit mit $U_2$; so kommt

$$2P_1\left[a\sqrt{2}-a(\sqrt{2}-1)\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1-\frac{\pi}{2}(\varrho_1\sin\varphi_1+2\varrho_2\sin\varphi_2)\right]$$
$$=U_2+W\pi\varrho_1\sin\varphi_1,$$

worin $P_1$ für die Summe der beiden treibenden Kräfte steht.

Stellt man nun mit $U_1$ die gesammte Arbeit dar, welche von den treibenden Kräften während einer ganzen Umdrehung des eingebildeten Kurbelarmes verrichtet wird; so hat man

$4\frac{a}{\sqrt{2}}P_1 = U_1$, da $2\frac{a}{\sqrt{2}}$ die Projektion des von dem Endpunkte dieses Armes während eines Niederganges oder eines Aufganges beschriebenen Raumes bezeichnet (§. 52). Hieraus folgt also $2P_1 = \frac{U_1\sqrt{2}}{2a} = \frac{U_1}{a\sqrt{2}}$, und wenn man diesen Werth für $2P_1$ in die vorstehende Gleichung substituirt,

$$U_1 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\varrho_1}{a}\sin\varphi_1 + \frac{2\varrho_2}{a}\sin\varphi_2\right)\right\}$$
$$= U_2 + W\pi\varrho_1\sin\varphi_1 \ldots\ldots (337)$$

In dieser Formel besteht der Model der doppelten Kurbel, wenn die Richtungen der treibenden Kräfte und des Widerstandes vertikal sind. Wird die aus dem Gewichte der Kurbel hervorgehende Reibung vernachlässigt, und demzufolge $W=0$ gesetzt; so stellt diese Gleichung den Model der doppelten Kurbel für beliebige Richtungen der treibenden Kräfte dar, wofern nur die Richtung des Widerstandes denselben parallel ist. Dividirt man durch den Koeffizienten von $U_1$, und vernachlässigt Glieder von mehr, als Einer Dimension in $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$; so nimmt der Model die Form

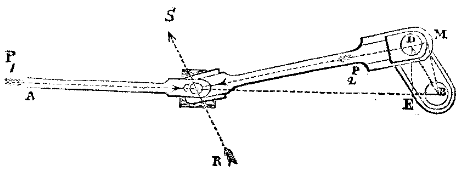
$$U_1 = \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{\varrho_1}{a_2}\sin\varphi_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\varrho_1}{a}\sin\varphi_1 + \frac{2\varrho_2}{a}\sin\varphi_2\right)\right\} U_2$$
$$+ W\pi\varrho_1\sin\varphi_1 \ldots\ldots (338)$$

an.

## Die Kurbelführung.

§. 266. Bei einigen der wichtigsten Anwendungen der Dampfmaschine empfängt die Kurbel ihre stetige Umdrehungsbewegung durch die Treibstange direkt von der abwechselnden geradlinigen Bewegung der Stempelstange, ohne Vermittlung eines Balanciers oder einer Parallelbewegung, indem das Eine Ende der Treibstange mit dem Ende der Stempelstange verbunden ist und der schräge Druck, welcher aus dieser Verbindung hervorgeht, von einem Maschinenstücke aufgenommen wird, welches sich in der Richtung der Stempelstange zwischen festen Führungen oder Koulissen bewegt, eine Einrichtung, wie sie namentlich bei den Lokomotiven vorkommt.

Bezeichnet man die Länge **CD** der Treibstange mit $b$, die Länge **BD** des Kurbelarmes mit $a$, und stellt in der folgenden Figur mit $P_1$ und $P_2$ resp. den Druck in der Richtung der Stempelstange und der Treibstange dar; so ist die Linie **RS**, welche die Richtung des Widerstandes **R** der Koulisse im Gränz-




zustande des Gleichgewichtes bei dem Übergewichte der treibenden Kraft $P_1$ darstellt, gegen ein Perpendikel auf der Richtung der Koulisse oder auf der Richtung der Bewegung der Stempelstange unter einem Winkel geneigt, welcher nach §. 141 dem Reibungswinkel für die Berührungsflächen zwischen den Koulissen gleichkommt.

Da ferner $P_1$, $P_2$, **R** Kräfte im Gleichgewichte sind; so hat man

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sin P_1 C S}{\sin P_2 C S}.$$

Setzt man den Winkel $BCD = \vartheta$ und den Reibungswinkel zwischen den Koulissen $= \varphi$; so ist $P_1 CS = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $P_2 CS = \frac{\pi}{2} + \varphi - \vartheta$, und daher

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\vartheta - \varphi)\right]} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\vartheta - \varphi)} \quad \ldots . (339)$$

Bezeichnet man den Winkel **DBC** mit $\vartheta_1$, und nimmt an, daß $P_2$ konstant bleibe, während $P_1$ nach den Bedingungen des Gränzzustandes des Gleichgewichtes variire; so hat man

$$\triangle U_1 = P_1 \,.\, \triangle \overline{AC} = - P_1 \,.\, \triangle \overline{BC},$$

oder da $P_1 = P_2 \dfrac{\cos(\vartheta - \varphi)}{\cos\varphi}$ und $BC = a\cos\vartheta_1 + b\cos\vartheta$,

also $\triangle \overline{BC} = - a\sin\vartheta_1 \triangle \vartheta_1 - b\sin\vartheta \triangle \vartheta$ ist,

$$\triangle U_1 = P_2 \frac{\cos(\vartheta - \varphi)\,(a\sin\vartheta_1 \triangle\vartheta_1 + b\sin\vartheta \triangle\vartheta)}{\cos\varphi}.$$

Ferner hat man

$$\triangle U_2 = P_2 (\triangle \overline{AC}) \cos\vartheta$$

$$= - P_2 (\triangle \overline{BC}) \cos\vartheta = P_2 (a\sin\vartheta_1 \triangle\vartheta_1 + b\sin\vartheta \triangle\vartheta)\cos\vartheta.$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt, wenn man $\triangle\vartheta_1$ und $\triangle\vartheta$ unendlich klein annimmt,

$$U_1 = \frac{P_2}{\cos\varphi} \Big\} a \int_0^\pi \sin\vartheta_1 . \cos(\vartheta - \varphi) d\vartheta_1 + b \int_0^0 \sin\vartheta . \cos(\vartheta - \varphi)\vartheta \Big\{,$$

$$U_2 = P_2 \Big\} a \int_0^\pi \sin\vartheta_1 . \cos\vartheta . d\vartheta_1 + b \int_0^0 \sin\vartheta . \cos\vartheta . d\vartheta \Big\{.$$

Das zweite Integral verschwindet in einer jeden dieser beiden Gleichungen für die demselben angehörigen Gränzen, und da man $\sin\vartheta = \dfrac{a}{b}\sin\vartheta_1$, also $\cos\vartheta = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}\sin^2\vartheta_1}$ hat; so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$U_2 = P_2 a \int_0^\pi \sin\vartheta_1 . \cos\vartheta . d\vartheta_1 = P_2 a \int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\vartheta_1} . \sin\vartheta_1 . d\vartheta_1$$

$$= - P_2 \frac{a^2}{b} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + \cos^2\vartheta_1} . d(\cos\vartheta_1).$$

Wendet man behuf Integration dieses Ausdruckes die Reduktionsformel

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p.dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+np} + \frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

an; so erhält man

$$\int (a+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{1}{2}x(a+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int (a+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}},$$

d. i. nach einer bekannten Formel

$$\int \sqrt{a+x^2}.dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{a}{2}\log(x+\sqrt{a+x^2}) + \text{const.}$$

Setzt man hierin $\frac{b^2}{a^2}-1$ an die Stelle von $a$, $\cos\vartheta_1$ an die Stelle von $x$, nimmt alsdann das Integral zwischen den Gränzen $\pi$ und $0$, und beachtet, daß $\cos\pi = -1$ und $\cos 0 = 1$ ist; so erhält man

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)+\cos^2\vartheta}.d(\cos\vartheta_1) = -\frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\log\frac{b+a}{b-a},$$

und demnach

$$U_2 = P_2\frac{a^2}{b}\left\{\frac{b}{a} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\log\left(\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}.$$

Ferner hat man

$$U_1 = \frac{P_2 a}{\cos\varphi}\int_0^\pi \sin\vartheta_1 . \cos(\vartheta-\varphi).d\vartheta_1$$

$$= P_2 a\int_0^\pi \sin\vartheta_1 . \cos\vartheta.d\vartheta_1 + P_2 a\tang\varphi\int_0^\pi \sin\vartheta . \sin\vartheta_1 . d\vartheta_1,$$

d. i. nach dem vorstehenden Werthe für $U_2$ und der Beziehung $\sin\vartheta = \frac{a}{b}\sin\vartheta_1$

$$U_1 = U_2 + P_2\frac{a^2}{b}\tang\varphi\int_0^\pi \sin^2\vartheta_1 . d\vartheta_1.$$

Da nun nach einer bekannten Reduktiosformel:

$$\int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \,.\, \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \,.\, dx,$$

$$\int \sin^2 \vartheta_1 \,.\, d\vartheta_1 = -\frac{\sin\vartheta_1 \,.\, \cos\vartheta_1}{2} + \tfrac{1}{2} \int d\vartheta_1 = -\frac{\sin\vartheta_1 \,.\, \cos\vartheta_1}{2} + \tfrac{1}{2}\vartheta_1 + \text{const.}$$

ist; so hat man

$$\int_0^\pi \sin^2 \vartheta_1 \,.\, d\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ und daher}$$

$$U_1 = U_2 + P_2 \frac{a^2}{b} \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} \varphi.$$

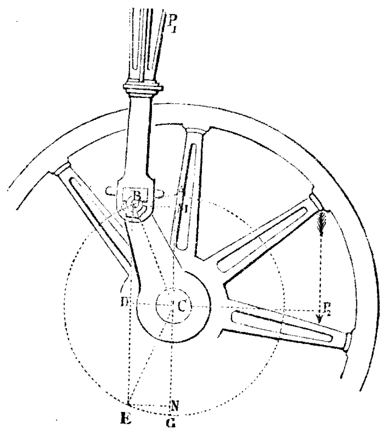
Eliminirt man zwischen diesem Ausdrucke für $U_1$ und dem vorhergehenden für $U_2$ die Größe $P_2$; so ergibt sich für den Model der Kurbelführung

$$U_1 = \left\{ 1 + \frac{\pi \operatorname{tang} \varphi}{\frac{2b}{a} + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \log \left(\frac{b+a}{b-a}\right)} \right\} U_2 \ldots . (340)$$

## Das Schwungrad.

### §. 267. Die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades.

$P_1$ sei eine konstante Kraft, welche vermittelst einer Treibstange auf den Kurbelarm CB einer Axe wirkt, an welcher ein



Schwungrad befestigt ist. Man nehme an, die Richtung dieser Kraft bleibe sich fortwährend parallel, und stelle durch $P_2$ einen konstanten Widerstand dar, welcher sich der Umdrehung der Axe mit dem Schwungrade entgegensetzt, und welcher aus dem zu überwindenden Nutzwiderstande und den zwischen der Axe des Schwungrades und dem Operator auftretenden schädlichen Widerständen der Maschine besteht. Ferner sei der Winkel

$$ACB = \vartheta, CB = a, CP_2 = a_2.$$

Da die Projektion des Weges, welchen der Angriffspunkt B der Kraft $P_1$ zurücklegt, während der Kurbelarm CB den Winkel ACB beschreibt, auf die Richtung der Kraft $P_1$ gleich AM ist; so folgt, daß die von der Kraft $P_1$ in dieser Zeit auf die Kurbel entwickelte Arbeit gleich $P.\overline{AM}$ oder gleich $P_1 a (1 - \cos\vartheta)$ ist. Während aber der Kurbelarm sich um den Winkel $\vartheta$ drehet, wird der Widerstand $P_2$ durch die Länge eines Kreisbogens überwunden, welcher denselben Winkel $\vartheta$ überspannt und die Linie $CP_2 = a_2$ zum Halbmesser hat, d. i. durch den Raum $a_2\vartheta$, sodaß, bei Vernachlässigung der Reibung der Kurbel selbst, $P_2 a_2 \vartheta$ die Arbeit darstellt, welche gleichzeitig zur Überwindung der Widerstände der Bewegung verwendet ist. Hieraus folgt, daß der Überschuß der Arbeit der treibenden Kraft über die auf die Widerstände verwendete Arbeit bei einer Drehung der Kurbel um den Winkel ACB durch

$$P_1 a (1 - \cos\vartheta) - P_2 a_2 \vartheta. \quad \ldots \quad (341)$$

ausgedrückt ist.

Nun bezeichnet $2aP_1$ die Arbeit, welche die treibende Kraft $P_1$ bei einem jeden Auf- oder Niedergange der Treibstange oder bei einem jeden Hin- oder Hergange des Stempels in dem Zylinder einer Dampfmaschine entwickelt, und $2\pi a_2 P_2$ die Arbeit, welche bei einer jeden Umdrehung des Schwungsrades auf den Widerstand verwendet wird. Stellt daher $m$ die Anzahl der wirksamen Hin- und Hergänge dar, welche der Stempel unter der Wirkung des Dampfes in dem Zylinder zu machen hat, während das Schwungrad eine ganze Umdrehung vollendet, und nimmt man an, daß die Bewegung der Maschine ihren periodisch gleichförmigen Zustand angenommen habe (§. 146); so hat man

$$2 m a \mathrm{P}_1 = 2\pi a_2 \mathrm{P}_2$$

oder

$$a_2 \mathrm{P}_2 = \frac{m}{\pi} a \mathrm{P}_1 \ldots . (342).$$

Setzt man diesen Werth von $a_2 \mathrm{P}_2$ in die Gleichung (341); so erhält man für den Überschuß der Arbeit der treibenden Kraft über die auf den Widerstand verwendete Arbeit während der Drehung des Kurbelarmes um den Winkel $\vartheta$ den Ausdruck:

$$\mathrm{P}_1 a \left(1 - \cos\vartheta - \frac{m\vartheta}{\pi}\right) \ldots . (343)$$

Dieser Überschuß ist nun nach §. 145 gleich der ganzen Arbeit, welche bei der Beschreibung des Winkels $\vartheta$ in den verschiedenen in Bewegung begriffenen Theilen der Maschine angehäuft wird. Man nehme an, diese ganze Arbeit werde in dem Schwungrade allein angehäuft, indem man die Dimensionen desselben von einer solchen Beschaffenheit voraussetzt, daß dasselbe im Stande ist, die Bewegung der Maschine selbst dann auszugleichen, wenn sich gleichzeitig gar keine Arbeit in den übrigen Maschinentheilen anhäufte, oder wenn die Gewichte der übrigen in Bewegung begriffenen Elemente oder ihre Geschwindigkeiten verhältnißmäßig so gering wären, daß die darin angehäufte Arbeit im Vergleich zu der im Schwungrade angehäuften Arbeit während derselben Zeit ungemein klein sein würde (s. §. 151). Bezeichnet alsdann J das Trägheitsmoment des Schwungrades, $\mu$ das Gewicht eines Kubikfußes des Materiales, aus welchem dasselbe besteht, $\alpha_1$ die Winkelgeschwindigkeit desselben in dem Augenblicke, wo sich der Kurbelarm in der Lage **CA** befindet, und $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit desselben in dem Augenblicke, wo der Kurbelarm in die Lage **CB** gelangt; so ist $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{J}\mu}{g}(\alpha^2 - \alpha_1{}^2)$ der Ausdruck für die in dem Schwungrade zwischen jenen beiden Lagen des Kurbelarmes angehäufte Arbeit (§. 75), und man hat

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{J}\mu}{g}(\alpha^2 - \alpha_1{}^2) = \mathrm{P}_1 a \left(1 - \cos\vartheta - \frac{m\vartheta}{\pi}\right)$$

oder

$$\alpha^2 - \alpha_1{}^2 = \frac{2 P_1 a g}{\mu J} \left(1 - \cos\vartheta - \frac{m\vartheta}{\pi}\right) \dots . (344).$$

## §. 268. Die Lagen der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades.

Nimmt man an, die Bewegung der Maschine habe ihren periodisch gleichförmigen Zustand erreicht, sodaß die bei einer jeden Umdrehung von der treibenden Kraft geleistete Arbeit der auf die Widerstände verwendeten Arbeit gleich ist; so wird die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades immer zu demselben Werthe zurückkehren, sobald das Schwungrad wieder in dieselbe Lage kommt, oder der Werth von $\alpha_1$ in Gleichung (344) wird konstant und der von $\alpha$ wird eine Funktion des Winkels $\vartheta$ werden. Hieraus folgt, daß $\alpha$ seinen kleinsten oder größten Werth annimmt, wenn jene Funktion von $\vartheta$ ein Minimum oder ein Maximum wird, und man erhält zur Bestimmung des kleinsten Werthes von $\alpha$ die Bedingungen:

$$\frac{d(\alpha^2)}{d\vartheta} = o \text{ und } \frac{d^2(\alpha^2)}{d\vartheta^2} > o,$$

und zur Bestimmung des größten Werthes von $\alpha$ die Bedingungen

$$\frac{d(\alpha^2)}{d\vartheta} = o \text{ und } \frac{d^2(\alpha^2)}{d\vartheta^2} < o.$$

Da aber nach Gleichung (344)

$$\frac{d(\alpha^2)}{d\vartheta} = \sin\vartheta - \frac{m}{\pi} \text{ und } \frac{d^2(\alpha^2)}{d\vartheta^2} = \cos\vartheta,$$

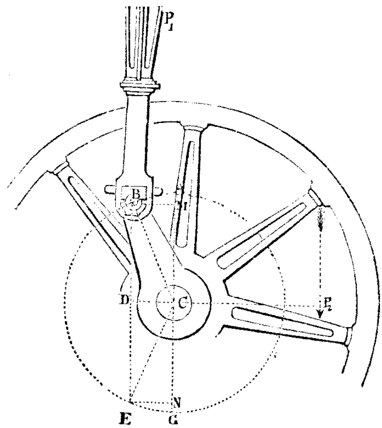
so ist

$$\frac{d(\alpha^2)}{d\vartheta} = o, \text{ wenn}$$

$$\sin\vartheta = \frac{m}{\pi} \dots (345)$$

ist.

Diese Gleichung wird offenbar durch zwei Werthe von $\vartheta$ erfüllt, von denen der Eine der Nebenwinkel des anderen ist, sodaß, wenn $\eta$ den Einen darstellt, $\pi - \eta$ den anderen ergibt. Außerdem sieht man, daß durch diese beiden Werthe von $\vartheta$ der Werth $\cos\vartheta$ des zweiten Differenzialkoeffizienten von $\alpha^2$ entgegengesetzte Zeichen erhält, indem derselbe Ein Mal positiv oder $> o$ und Ein Mal negativ oder $< o$ wird. Der Eine Werth von $\vartheta$ entspricht also einem Minimum und der andere einem Maximum von $\alpha$.




Nimmt man daher den Winkel **ACB** so, daß sein Sinus gleich $\frac{m}{\pi}$ (Gleichung 345) ist; so wird die Lage **CB** des Kurbelarmes einem Minimum der Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades entsprechen, und nimmt man den Winkel **ACE** gleich dem Nebenwinkel **BCG** von **ACB** oder auch den Winkel **GCE** gleich dem Winkel **ACB**; so wird **CE** die Lage des Kurbelarmes sein, welche einem Maximum der Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades angehört.

## §. 269. Die größte Abweichung der Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades.

Wenn $\alpha_2$ die kleinste Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades in der Lage **CB** des Kurbelarmes und $\alpha_3$ die größte Winkelgeschwindigkeit in der Lage **CE** des Kurbelarmes bezeichnet;

so ist $\frac{\mu J}{2g}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)$ die in dem Schwungrade zwischen jenen beiden Lagen angehäufte Arbeit. Dieselbe muß dem Überschusse der von der treibenden Kraft bei dem Übergange des Kurbelarmes aus der Einen in die andere Lage geleisteten Arbeit über die in derselben Zeit von den Widerständen verzehrte Arbeit gleich sein, und ist demnach durch die Differenz der Werthe der Formel (343) dargestellt, wenn man darin nacheinander die beiden durch Gleichung (345) bestimmten Werthe $\pi - \eta$ und $\eta$ für $\vartheta$ substituirt. Da nun diese Differenz gleich

$$P_1 a \left(1 - \cos(\pi - \eta) - 1 + \cos\eta - \frac{m(\pi - \eta - \eta)}{\pi}\right)$$

oder

$$= P_1 a \left[2\cos\eta - m\left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]$$

ist; so hat man

$$\frac{\mu J}{2g}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) = P_1 a \left[2\cos\eta - m\left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]$$

und daher

$$\alpha_3^2 - \alpha_2^2 = \frac{2 P_1 g a}{\mu J}\left[2\cos\eta - m\left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right], \quad \ldots . \quad (346)$$

in welcher Gleichung $\eta$ den Winkel bezeichnet, dessen Simus $\frac{m}{\pi}$ ist, sodaß man auch $\cos\eta = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\pi}\right)^2}$ hat.

§. 270. **Bestimmung der Dimensionen des Schwungrades unter der Bedingung, daß seine Winkelgeschwindigkeit in keinem Augenblicke der Umdrehung sich von dem mittleren Werthe über gewisse gegebene Gränzen hinaus entferne.**

Wenn N die mittlere Anzahl der Umdrehungen ist, welche das Schwungrad in der Minute macht; so bezeichnet $\frac{N}{60}$ die mittlere Anzahl der Umdrehungen oder der Theile Einer Umdrehung, welche dasselbe in der Sekunde vollendet, und $\frac{N}{60} 2\pi$ oder $\frac{N\pi}{30}$

stellt den mittleren Raum, welchen ein Punkt des Schwungrades, der um die Längeneinheit von der Umdrehungsaxe entfernt liegt, in der Sekunde beschreibt, oder die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades dar. Sollen nun die Dimensionen des Schwungrades von der Art sein, daß seine Winkelgeschwindigkeit in keinem Augenblicke der Umdrehung um mehr, als $\frac{1}{n}$, von jenem mittleren Werthe abweicht, d. h. von der Art, daß der größte Werth $\alpha_3$ seiner Winkelgeschwindigkeit gleich $\frac{N\pi}{30}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ und der kleinste Werth $\alpha_2$ derselben gleich $\frac{N\pi}{30}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ist; so muß man

$$\alpha_3{}^2-\alpha_2{}^2=(\alpha_3+\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)=\frac{2\pi N}{30}\cdot\frac{2\pi N}{30.n}=\frac{\pi^2 N^2}{15^2.n}$$

haben.

Substituirt man diesen Werth in Gleichung (346); so kommt

$$\frac{\pi^2 N^2}{15^2 n}=\frac{2P_1 g a}{\mu J}\left[2\cos\eta-m\left(1-\frac{2\eta}{\pi}\right)\right].$$

Bezeichnet nun $\mathbf{H}_1$ die Anzahl der Arbeitseinheiten, welche in der Minute auf den Stempel entwickelt werden, sodaß, wenn $\mathbf{H}$ die Stärke der Maschine in Pferdekräften von $510^{\text{Pfd.}\times F.}$ in der Sekunde oder von $30600^{\text{Pfd.}\times F.}$ in der Minute darstellt, $\mathbf{H}_1=30600\mathbf{H}$ ist; so muß offenbar $\mathbf{H}_1=Nm.2P_1 a$ sein, weil $Nm$ die Anzahl der Hin- und Hergänge des Stempels in der Minute und $2P_1 a$ die bei einem jeden Hin- und Hergange des Stempels geleistete Arbeit bezeichnet. Demnach hat man

$$2P_1 a=\frac{\mathbf{H}_1}{Nm},$$

und wenn man diesen Werth für $2P_1 a$ in die vorhergehende Gleichung einführt,

$$\mu J=\frac{15^2 g}{\pi^2}\left[2\cos\eta-m\left(1-\frac{2\eta}{\pi}\right)\right]\frac{\mathbf{H}_1 n}{N^3 m}\ldots(347).$$

Stellt man durch $k$ den Drehungshalbmesser des Schwungrades und durch $\mathbf{M}$ sein Volum dar; so hat man nach §. 80

$Mk^2 = J$ und daher $\mu Mk^2 = \mu J$. Hierin ist aber $\mu M$ gleich dem Gewichte des Schwungrades, und man hat daher, wenn man dieses Gewicht mit W bezeichnet,

$$W = \frac{15^2 g}{\pi^2}\left[2\cos\eta - m\left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]\frac{H_1\, n}{N^3 mk^2}.$$

Setzt man hierin für $\pi$ und $g$ ihre Werthe ($g = 31{,}2644$); so ergibt sich

$$W = 712{,}743\left[2\cos\eta - m\left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]\frac{H_1\, n}{N^3 mk^2} \cdots (348).$$

Ist die Stärke der Maschine in Pferdekräften von $510^{\text{Pfd.}} \times F.$ in der Sekunde oder $30600^{\text{Pfd.}} \times F.$ in der Minute gegeben; so hat man in dieser Formel

$$H_1 = 30600\, H$$

zu setzen, wodurch sich dieselbe in

$$W = 21809925\left[2\cos\eta - m\left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]\frac{H\, n}{N^3 mk^2} \cdots\cdots (348^a)$$

verwandelt.

Wenn der Einfluß der in den Armen des Schwungrades sich anhäufenden Arbeit auf die ausgleichende Kraft desselben unberücksichtigt gelassen und nur die in dem Kranze desselben sich anhäufende Arbeit in Betracht gezogen wird; so hat man nach §. 86 $Mk^2 = J = 2\pi bc R (R^2 + \frac{1}{4}c^2)$, worin $b$ die Breite des Kranzes in paralleler Richtung zur Axe, $c$ die Höhe und $R$ den mittleren Halbmesser desselben bezeichnet. Nach der ersten Guldinschen Regel (§. 38) hat man aber $2\pi bc R = M$; demnach $k^2 = R^2 + \frac{1}{4}c^2$, und wenn man diesen Werth für $k^2$ in Gleichung (348) substituirt,

$$W = 712{,}743\left[\frac{2}{m}\cos\eta - \left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]\frac{H_1\, n}{N^3 (R^2 + \frac{1}{4}c^2)} \cdots (349)$$

Wenn die Höhe $c$ des Kranzes (wie es gewöhnlich der Fall ist) im Verhältniß zu dem mittleren Halbmesser des Rades klein ist, und demgemäß $\frac{1}{4}c^2$ gegen $R^2$ vernachlässigt werden kann; so wird die vorstehende Gleichung

$$W = 712{,}743\left[\frac{2}{m}\cos\eta - \left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right]\frac{H_1\, n}{N^3 R^2} \cdots (350)$$

oder, wenn man die Stärke der Maschine in Pferdekräften ausdrücken will,

$$W = 21809925 \left[\frac{2}{m} \cos \eta - \left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right] \frac{Hn}{N^3 R^2} \quad \ldots\ldots \quad (350^a).$$

Hierdurch ist das Gewicht eines Schwungrades in Pfunden gegeben, wenn man dessen mittleren Halbmesser **R** im voraus bestimmt und die Bedingung gestellt hat, daß dasselbe, an einer Maschine von **H** Pferdekräften angebracht, welche in der Minute **N** Umdrehungen macht, keine größere Abweichung der Winkelgeschwindigkeit, als $\frac{1}{n}$ ihres mittleren Werthes, zulasse. Man bemerkt, daß das Gewicht des Schwungrades mit dem Kubus der Anzahl der Kolbenzüge in der Minute im umgekehrten Verhältnisse steht, sodaß eine Maschine von gleicher Pferdekraft, welche noch einmal soviel Kolbenzüge, als eine andere, macht, durch ein Schwungrad von einem Achtel des Gewichtes dieselbe Beständigkeit der Bewegung erhalten würde.

Wenn man in Gleichung (347) für **J** seinen Werth $2\pi b c \mathbf{R}^3$ oder $2\pi \mathbf{K} \mathbf{R}^3$ (worin **K** den Querschnitt $bc$ des Kranzes bezeichnet) substituirt, und annimmt, daß das Schwungrad aus Gußeisen von mittlerer Qualität, wovon der Kubikfuß etwa 480 ℔ wiegt, bestehe; so erhält man durch Reduktion

$$\left.\begin{aligned} R^3 &= 0{,}236326 \left[\frac{2}{m} \cos \eta - \left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right] \frac{H_1 n}{N^3 K} \\ &= 7231{,}575 \left[\frac{2}{m} \cos \eta - \left(1 - \frac{2\pi}{\pi}\right)\right] \frac{H n}{N^3 K} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (351)$$

Durch diese Formel ergibt sich der mittlere Halbmesser **R** eines Schwungrades, dessen Kranz einen gegebenen Querschnitt **K** hat und welches, an einer Maschine von **H** Pferdekräften und **N** Umdrehungen in der Minute angebracht, keine größere Abweichung der Winkelgeschwindigkeit, als $\frac{1}{n}$ ihres mittleren Werthes, zuläßt. Umgekehrt findet man auch aus dieser Formel den Querschnitt **K**, wenn unter den vorstehenden Bedingungen der mittlere Halbmesser **R** gegeben ist.

§. 271. In den obigen Gleichungen stellt $m$ die Anzahl der wirksamen oder derjenigen Kolbenzüge während Einer Umdrehung des Schwungrades dar, bei welchen der Stempel den Druck des Dampfes empfängt, und $\eta$ bezeichnet den Winkel, dessen Sinus $\frac{m}{\pi}$ ist.

Nimmt man nun an, die Axe des Schwungrades bilde die Verlängerung der Axe der Kurbel, sodaß sich beide mit derselben Winkelgeschwindigkeit drehen, wie es gewöhnlich der Fall ist, und betrachtet das Schwungrad für die einfach wirkende, die doppelt wirkende und für die doppelt wirkende Maschine mit einer doppelten Kurbel einzeln; so erhält man

1) für die einfach wirkende Maschine, wo der Stempel nur Einen wirksamen Zug macht, während das Schwungrad eine ganze Umdrehung vollendet, $m = 1$ und daher $\sin\eta = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183098 = \sin 18^0 33'$. Hieraus folgt $\cos\eta = 0{,}9480460$, $\frac{\eta}{\pi} = \frac{18^0 33'}{180^0} = 0{,}103055$ und $1 - \frac{2\eta}{\pi} = 0{,}793888$; mithin

$$\left[\frac{2}{m}\cos\eta - \left(1 - \frac{2\eta}{\pi}\right)\right] = 1{,}102203.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichungen (350), (350a) und (351); so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} W = 785{,}5873 \frac{H_1 n}{N^3 R^2}, \; R = \frac{0{,}638642}{N} \sqrt[3]{\frac{H_1 n}{K}}, \; K = 0{,}2605 \frac{H_1 n}{N^3 R^3}, \\ \text{oder} \\ W = 24038971 \frac{H n}{N^3 R^2}, \; R = \frac{19{,}9755}{N} \sqrt[3]{\frac{H n}{K}}, K = 7970{,}6655 \frac{H n}{N^3 R^3}, \end{array}\right\} \ldots (352)$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt unter den obigen Bedingungen das Gewicht W eines Schwungrades für die einfach wirkende Maschine in Pfunden, wenn dessen mittlerer Halbmesser **R** im voraus bestimmt ist, wobei das Material des Schwungrades nach Belieben angenommen werden kann. Die zweite Gleichung ergibt den mittleren Halbmesser **R** des Schwungrades in Fußen, wenn der Querschnitt **K** desselben (in Quadratfußen) gegeben ist, und das Rad aus Gußeisen gefertigt wird. Die dritte Gleichung ergibt den Querschnitt K des Kranzes in Quadratfußen, wenn der mittlere Halbmesser R gegeben ist, und das Schwungrad aus Gußeisen besteht.

2) Bei der doppelt wirkenden Maschine macht der Stempel bei einer jeden Umdrehung des Schwungrades zwei wirksame Züge. Man hat daher in diesem Falle $m=2$ und $\sin\eta = \frac{2}{\pi} = 0{,}636619 = \sin 39^\circ 32'$; mithin $\cos\eta = 0{,}7712549$, $\frac{\eta}{\pi} = \frac{39^\circ 32'}{180^\circ} = 0{,}21963$ und $\left(1-\frac{2\eta}{\pi}\right) = 0{,}56074$, und hieraus folgt

$$\left[\frac{2}{m}\cos\eta - \left(1-\frac{2\eta}{\pi}\right)\right] = 0{,}21051.$$

Setzt man diesen Werth wieder in die Gleichungen (350), (350a) und (351); so werden dieselben

$$\left.\begin{array}{l} W = 150{,}0395\,\frac{H_1\, n}{N^3 R^2},\ R = \frac{0{,}3678}{N}\sqrt[3]{\frac{H_1\, n}{K}},\ K = 0{,}0497\,\frac{H_1\, n}{N^3 R^3}, \\ \text{oder} \\ W = 4591208\,\frac{H\, n}{N^3 R^2}, R = \frac{11{,}5036}{N}\sqrt[3]{\frac{H\, n}{K}}, K = 1522{,}3187\,\frac{H n}{N^3 R^3}, \end{array}\right\} \ldots (353)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für die doppelt wirkende Maschine das Gewicht des Schwungrades in Pfunden, der mittlere Halbmesser desselben in Fußen und der Querschnitt des Kranzes in Quadratfußen.

3) Für die mit zwei Zylindern und einer doppelten Kurbel arbeitende Maschine hat man in §. 265 gesehen, daß die Bedingungen für die Wirkung der beiden Arme der doppelten Kurbel genau dieselben sind, als wenn der Gesammtdruck, welcher sich auf ihre Endpunkte äußert, an einem einzigen Kurbelarme und in einer einzigen Treibstange angebracht wäre; die Länge dieses Kurbelarmes würde dann $\frac{a}{\sqrt{2}}$ statt $a$ sein, und die Richtung desselben würde in die Halbirungslinie des Winkels fallen, welchen die Arme der doppelten Kurbel miteinander einschließen.

Aus den Gleichungen (350) und (351) geht aber hervor, daß die Dimensionen des Schwungrades von der Länge des Kurbelarmes vollkommen unabhängig sind, und es leuchtet ein, daß die Dimensionen eines Schwungrades für die doppelte Kurbel eben so, wie für die einfache Kurbel, durch die Gleichungen bestimmt sind, welche auf den Fall einer doppelt wirkenden Maschine Anwendung finden. Demnach hat man für ein Schwungrad, welches im Stande ist, der Bewegung einer Maschine mit einer doppelten Kurbel die nöthige Gleichmäßigkeit zu verleihen, die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} W=150{,}0395\frac{H_1 n}{N^3 R^2},\ R=\frac{0{,}3678}{N}\sqrt[3]{\frac{H_1 n}{K}},\ K=0{,}0497\frac{H_1 n}{N^3 R^3}, \\ \text{oder} \\ W=4591208\frac{H n}{N^3 R^2},\ R=\frac{11{,}5036}{N}\sqrt[3]{\frac{H n}{K}},\ K=1522{,}3187\frac{H n}{N^3 R^3}, \end{array}\right\}\ldots(354)$$

Hierbei ist zu bemerken, daß $H_1$ die Gesammtarbeit bezeichnet, welche durch die Dampfkraft beider Zylinder in der Minute entwickelt wird, und daß ebenso $H$ die Gesammtstärke der Maschine für beide Zylinder in Pferdekräften darstellt: wäre also der Druck auf einen jeden Stempel $=P_1$, und demnach der Gesammtdruck auf beide Stempel $=2P_1$; so würde man $H_1 = Nm.4P_1 a$ haben (§. 270).

## §. 272. Die Reibung des Schwungrades.

Wenn $W$ das Gewicht des Schwungrades und $\varphi$ den Reibungswinkel für die Oberfläche seiner Axe und seiner Lager bezeichnet; so stellt $\tang\varphi$ den Reibungskoeffizienten (§. 138) und $W\tang\varphi$ den Widerstand dar, welcher sich in Folge der Reibung an der Axe der Bewegung des Schwungrades entgegensetzt. Während nun das Letztere Eine Umdrehung macht, wird jener Widerstand durch einen Raum überwunden, welcher dem Umfange dieser Axe gleich, also $=2\pi\varrho$ ist, wenn man mit $\varrho$ den Halbmesser dieser Axe bezeichnet. Die Arbeit, welche bei einer jeden ganzen Umdrehung des Schwungrades auf die Reibung an seiner Axe verwendet wird, ist also gleich $2\pi\varrho W\tang\varphi$, und wenn $N$ die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche das Schwungrad in Einer Minute vollendet, sodaß $2N$ die Anzahl der Hin- und Hergänge darstellt, welche der Stempel in Einer Minute macht; so hat man für die Anzahl der Arbeitseinheiten, welche in jeder Minute auf die Reibung an der Axe des Schwungrades verwendet wird, den Ausdruck $2\pi N W \varrho \operatorname{tang}\varphi$, oder wenn man diese Arbeitsgröße in Pferdekräften von $30600^{\text{Pfd.}\times\text{F}}$ in der Minute darstellen will, den Ausdruck $\frac{2\pi N W \varrho \operatorname{tang}\varphi}{30600}$. Substituirt man in diesen Werth von

$$\left.\begin{array}{ll} 2\pi N W \varrho \operatorname{tang}\varphi & \text{in Arbeitseinheiten} \\ \text{oder } \dfrac{2\pi N W \varrho \operatorname{tang}\varphi}{30600} & \text{in Pferdekräften} \end{array}\right\} \ldots (355)$$

aus den Gleichungen (352), (353] und (354) für **W** das Gewicht des Schwungrades, welches erforderlich ist, um der Maschine den verlangten Grad von Beständigkeit zu geben; so erhält man für die Arbeitsgröße, welche durch die Reibung des Schwungrades verloren geht, resp. bei der einfach wirkenden Maschine, bei der doppelt wirkenden Maschine und bei der doppelt wirkenden Maschine mit einer doppelten Kurbel die Werthe

$$\left.\begin{array}{l} 4935{,}99\dfrac{H_1 n \varrho \operatorname{tang}\varphi}{N^2 R^2},\ 942{,}7259\dfrac{H_1 n \varrho \operatorname{tang}\varphi}{N^2 R^2},\ 942{,}7259\dfrac{H_1 n \varrho \operatorname{tang}\varphi}{N^2 R^2} \\ \hfill \text{in Arbeitseinheiten} \\ \text{oder} \\ 4935{,}99\dfrac{H n \varrho \operatorname{tang}\varphi}{N^2 R^2},\ 942{,}7259\dfrac{H n \varrho \operatorname{tang}\varphi}{N^2 R^2},\ 942{,}7259\dfrac{H n \varrho \operatorname{tang}\varphi}{N^2 R^2} \\ \hfill \text{in Pferdekräften} \end{array}\right\} \ldots (356)$$

Bei der doppelt wirkenden Maschine mit einer doppelten Kurbel und mit zwei Zylindern bezeichnet $H_1$ oder H die Gesammtstärke, welche durch den Druck des Dampfes in beiden Zylindern entwickelt wird.

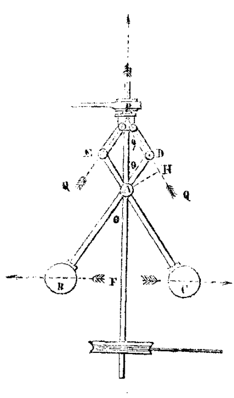
## Der Model der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

§. 273. Wenn $S_1$ den Raum bezeichnet, welchen der Kolben der Maschine in irgend einer gegebenen Zeit durchläuft, und

$a$ den Halbmesser der Kurbel, W das Gewicht des Schwungrades und $\varrho$ den Halbmesser der Axe des Letzteren darstellt; so ist $2a$ die Länge eines jeden Kolbenzuges, $\frac{S_1}{2a}$ die Anzahl der Kolbenzüge in jener Zeit und $2\pi\varrho W \tan g\varphi . \frac{S_1}{2a}$ oder $\pi W S_1 \frac{\varrho}{a} \tan g \varphi$ die Arbeit, welche während jener Zeit auf die Reibung des Schwungrades verwendet wird. Addirt man diesen Ausdruck zu der Gleichung (334), welche die Arbeit darstellt, die auf die Kurbel entwickelt werden muß, um einen gegebenen Betrag $U_2$ von Nutzarbeit (unabhängig von der auf die Reibung des Schwungrades zu verwendenden Arbeit) hervorzubringen; so erhält man den Gesammtbetrag der Arbeit, welche von der treibenden Kraft geleistet werden muß, um vermittelst der Kurbel jenen gegebenen Betrag von Nutzarbeit zu erzeugen. Bezeichnet man daher diesen Gesammtbetrag der Arbeit der treibenden Kraft mit $U_1$; so erhält man in dem Falle, wo die Richtungen der treibenden Kraft und des Widerstandes auf die Kurbel einander parallel sind (Gleichung 334) und die Reibung an der Kurbelführung vernachlässigt wird, für den Model der Kurbel mit dem Schwungrade an der doppelt wirkenden Maschine

$$U_1 = \left\{ 1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho_1}{a}\sin\varphi_1 + \frac{\varrho_2}{a}\sin\varphi_2\right) \right\} U_2 + \pi W S_1 \frac{\varrho}{a} \tan g\varphi \ldots (357)$$

## Der Regulator.




§. 274. Dieses Instrument ist in der seitstehenden Figur unter der Form dargestellt, wie es bei den Dampfmaschinen gewöhnlich angewendet wird. **BD** und **CE** sind Stäbe, welche bei **A** mit der vertikalen Welle **AF** und bei **D** und **E** mit den Stäben **DP** und **EP** durch Gelenke verbunden sind; die letzteren Stäbe sind an ihren oberen Enden mit einer Muffe **P** vergliedert, welche die Oberfläche der Welle genau umschließt und auf derselben beweglich ist;

an den unteren Enden B und C tragen die Stäbe BD und CE schwere Kugeln. Sobald nun die Welle von der in Bewegung begriffenen Maschine eine gewisse Umdrehungsgeschwindigkeit empfängt, welche der der Maschine immer proportional ist; so werden die Stäbe BD und CE, welche gleichzeitig um die Welle schwingen, in Folge ihrer eigenen Zentrifugalkraft und der der Kugeln auseinandergetrieben, die Kugeln heben sich und die Muffe P gleitet an der Welle herab, indem sie das Ende eines Hebels mit sich zieht, dessen Bewegung den Zutritt der treibenden Kraft zu dem Rezeptor der Maschine dadurch regulirt, daß er entweder bei einer Dampfmaschine das Zuleitungsventil verschließt und den Zutritt des Dampfes zu dem Zylinder vermindert, oder bei einem Wasserrade die Schützöffnung verschließt und das Zuströmen des Wassers zu dem Rade vermindert.

Bezeichnet man mit

P den Druck des Endpunktes des Hebels gegen die Muffe, mit
Q die Spannung, welche hierdurch in einem jeden der Stäbe DP und EP in der Richtung seiner Länge hervorgebracht wird, mit
W das Gewicht einer jeden Kugel, mit
$w$ das Gewicht eines jeden der Stäbe BD und CE, mit
$\mu$ das Gewicht einer jeden Längeneinheit dieser Stäbe, mit
$a$ die Länge AB, mit
$b$ die Länge AD, mit
$c$ die Länge DP, mit
$\vartheta$ den Winkel FAB, mit
$\vartheta_1$ den Winkel APD und mit
$\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit der Welle AF;

so leuchtet ein, daß auf einen jeden der Stäbe BD und CE, z. B. auf BD, folgende Kräfte wirken: das Gewicht der Kugel und das des Stabes selbst in vertikaler Richtung, die Zentrifugalkraft der Kugel und die des Stabes in horizontaler Richtung, die Spannung Q des Stabes DP und der Reibungswiderstand der Axe A des Stabes BD. Nun ist die Zentrifugalkraft der Kugel (s. Gl. 102) gleich $\frac{W}{g}\alpha^2.\overline{FB} = \frac{W}{g}\alpha^2 a \sin\vartheta$ und ihr Moment in Beziehung zu dem Punkte A gleich $\frac{W}{g}\alpha^2 a^2 \sin\vartheta . \cos\vartheta$. Die

Zentrifugalkraft des Stabes BD bringt dieselbe Wirkung hervor, als wenn sein ganzes Gewicht in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre (§. 124), dessen Abstand von A durch $\frac{1}{2}(a-b)$ dargestellt ist, sodaß die Zentrifugalkraft dieses Stabes durch $\frac{1}{2}\frac{w}{g}\alpha^2(a-b)\sin\vartheta$ und deren Moment in Beziehung zum Punkte A durch $\frac{1}{4}\frac{w}{g}\alpha^2(a-b)^2\sin\vartheta\,.\cos\vartheta$ ausgedrückt wird. Im Ganzen hat man daher für die Summe der Momente der Zentrifugalkräfte der Kugel und des Stabes den Ausdruck $\frac{\alpha^2}{g}[Wa^2+\frac{1}{4}w(a-b)^2]\sin\vartheta.\cos\vartheta$.

Nun ist ferner

$$w=\mu(a+b)\text{; demnach } Wa^2+\tfrac{1}{4}w(a-b)^2=$$

$$Wa^2+\tfrac{1}{4}\mu(a^2-b^2)(a-b)=\left[W+\tfrac{1}{4}\mu\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(a-b)\right]a^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$W_1=W+\tfrac{1}{4}\mu\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(a-b)\text{; } \ldots (358)$$

so stellt $\frac{\alpha^2}{g}W_1a^2\sin\vartheta.\cos\vartheta$ die Summe der Momente der Zentrifugalkräfte der Kugel und des Stabes in Beziehung zum Punkte $A$ dar.

Die Summe der Momente der Gewichte der Kugel oder des Stabes in Beziehung zu demselben Punkte ist offenbar durch $Wa\sin\vartheta+w\frac{1}{2}(a-b)\sin\vartheta$

$$=\left[Wa+\tfrac{1}{2}\mu(a^2-b^2)\right]\sin\vartheta=\left[W+\tfrac{1}{2}\mu a\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]a\sin\vartheta,$$

oder wenn man

$$W_2=W+\tfrac{1}{2}\mu a\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\ldots\ldots (359)$$

setzt, durch $W_2a\sin\vartheta$ dargestellt.

Endlich ist das Moment von Q in Beziehung zum Punkte A:

$$Q.\overline{AH}=Qb\sin(\vartheta+\vartheta_1).$$

Nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente hat man also, wenn man beachtet, daß die Zentrifugalkräfte der Kugel und des Stabes eine Bewegung in entgegengesetzter Richtung von derjenigen zu bewirken streben, welche durch deren Gewichte und durch die Kraft Q erstrebt wird, und wenn man den Reibungswiderstand an der Axe A vernachlässigt,

$$\frac{\alpha^2}{g} W_1 a^2 \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta = Q b \sin(\vartheta + \vartheta_1) + W_2 a \sin\vartheta.$$

Nun ist P die Resultante der beiden Kräfte Q, die in den Richtungen der Stäbe PD und PE wirken, welche den Winkel $2\vartheta_1$ miteinander einschließen; demnach hat man (Gleichung 13)

$$P = 2Q \cos\vartheta_1$$

und

$$Q \sin(\vartheta + \vartheta_1) = \tfrac{1}{2} P \frac{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}{\cos\vartheta_1} = \tfrac{1}{2} P (\sin\vartheta + \cos\vartheta \cdot \tang\vartheta_1).$$

Da aber $b$ und $c$ zwei Seiten des Dreiecks APD sind, welche den Winkeln $\vartheta_1$ und $\vartheta$ gegenüber liegen; so ist

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta} = \frac{b}{c}, \text{ und daher } \cos\vartheta_1 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2} \sin^2\vartheta};$$

folglich auch

$$Q \sin(\vartheta + \vartheta_1) = \tfrac{1}{2} P \left\{ \sin\vartheta + \frac{b}{c} \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2} \sin^2\vartheta}} \right\}.$$

Substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung, dividirt durch $\sin\vartheta$ und setzt $1 - \cos^2\vartheta$ für $\sin^2\vartheta$; so ergibt sich

$$\frac{\alpha^2}{g} W_1 a^2 \cos\vartheta = \tfrac{1}{2} P b \left\{ 1 + \frac{b}{c} \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \cos^2\vartheta}} \right\} + W_2 a \quad (360)$$

Wird diese Gleichung, welche für $\cos\vartheta$ vom vierten Grade ist, für diese Veränderliche aufgelöst; so ergibt sich die Neigung der Stäbe bei einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit der Welle. In den gewöhnlichen Fällen ist jedoch die Neigung der beiden

Stäbe **BD** und **CE** gegeben, und es wird die Länge derselben oder das Gewicht der Kugeln gesucht, sodaß jene Neigung unter den gegebenen Bedingungen stattfinden kann. In diesen Fällen müssen für $W_1$ und $W_2$ ihre Werthe aus den Gleichungen (358) und (359) in die vorstehende substituirt und diese für $a$ oder W aufgelös't werden.

Die Werthe von $b$ und $c$ sind durch die Lage bestimmt, zu welcher die Muffe bei der gegebenen Neigung der Stäbe **BD** und **CE** oder bei dem gegebenen Werthe des Winkels $\vartheta$ an der Welle herabsinken soll. Bezeichnet man den Abstand **AP** dieser Lage der Muffe vom Punkte **A** mit $h$, so hat man $h = b\cos\vartheta + c\cos\vartheta_1$, d. i.

$$h = b\cos\vartheta + c\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}\sin^2\vartheta} \;\ldots\; (361)$$

Aus dieser Gleichung und der vorhergehenden kann der Werth von Einer der Größen $b$ oder $c$ nach den gegebenen Bedingungen bestimmt werden, wenn der Werth der anderen beliebig angenommen wird.

Wenn N die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche das Schwungrad in der Sekunde macht, und $\gamma$ N die Anzahl der Umdrehungen, welche die Welle des Regulators in derselben Zeit vollendet; so ist $2\pi\gamma N$ der Raum $\alpha$, welchen ein um die Längeneinheit von der Axe dieser Welle abstehender Punkt in der Sekunde beschreibt, oder die Winkelgeschwindigkeit dieser Welle. Setzt man diesen Werth für $\alpha$ in die Gleichung (360), und nimmt $b = c$ an; so erhält man

$$\frac{4\pi^2\gamma^2 N^2}{g} W_1 a^2 \cos\vartheta = Pb + W_2 a \ldots (362)$$

und nach Gleichung (361)

$$h = 2b\cos\vartheta \;\ldots\; (363).$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\cos\vartheta$, und lös't die sich ergebende Gleichung für $h$ auf; so kommt

$$h = \frac{bg(Pb + W_2 a)}{2\pi^2\gamma^2 a^2 W_1} \cdot \frac{1}{N^2} \;\ldots\; (364).$$

Die vorstehende Gleichung bezieht sich auf den Gränzzustand des Gleichgewichtes, wo die Zentrifugalkraft der Kugeln und Stäbe die Muffe herabzuziehen strebt; für den andern Gränzzustand, wo die Gewichte der Kugeln und Stäbe die Muffe zu heben streben, würde man in der früheren aus dem Prinzipe der Gleichheit der Momente entstandenen Gleichung nur Q mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen haben, wodurch auch P in Gleichung (360) das Zeichen umkehren und die Gleichung (364) sich in

$$h = \frac{bg(-\mathrm{P}b + \mathrm{W}_2 a)}{2\pi^2\gamma^2 a^2 \mathrm{W}_1} \cdot \frac{1}{\mathrm{N}^2} \ldots (364^a)$$

verwandeln würde.

$\mathrm{P}(1+\frac{1}{m})$ und $\mathrm{P}(1-\frac{1}{m})$ seien nun die beiden Werthe von P, welche den beiden Gränzzuständen des Gleichgewichtes des von der Muffe bewegten Hebels entsprechen (§. 140), und $\mathrm{N}(1+\frac{1}{n})$ und $\mathrm{N}(1-\frac{1}{n})$ seien die zugehörigen Werthe von N, sodaß eine Veränderung der Geschwindigkeit um $\frac{1}{n}$ von der mittleren Anzahl N der Umdrehungen jedenfalls eine Bewegung der Muffe entweder nach der Einen oder nach der anderen Seite mit sich führt. Es leuchtet ein, daß wenn die ersteren oder die letzteren dieser Werthe für P und N resp. in die Gleichungen (364) oder $364^a$) substituirt werden, die entsprechenden Werthe von $h$ einander gleich sein müssen, weil bei einer Variation des Druckes P von $\mathrm{P}(1+\frac{1}{m})$ bis $\mathrm{P}(1-\frac{1}{m})$ und bei der zugehörigen Veränderung der Geschwindigkeit N von $\mathrm{N}(1+\frac{1}{n})$ bis $\mathrm{N}(1-\frac{1}{n})$ die Muffe ihre Lage unverändert beibehält. Setzt man demnach diese Werthe von $h$ einander gleich; so kommt nach gehöriger Reduktion

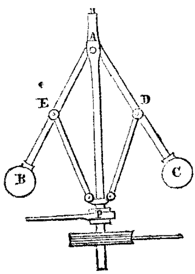
$$\frac{\mathrm{W}_2 a}{\mathrm{P}b} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m}.$$

Durch diese Gleichung ist die Beziehung zwischen den Größen $\mathrm{W}_2$, $a$, P, $m$ ausgedrückt, welche stattfinden muß, damit eine Veränderung der Umdrehungsgeschwindigkeit um mehr, als den $n$ten Theil derselben, eine Bewegung des Ventiles herbeiführt. Vernachlässigt man $\frac{1}{n}$, als sehr klein im Vergleich zu $n$; so ergibt sich

$$n = 2\left(\frac{W_2 a}{P b} + \frac{1}{m}\right) \text{ oder } \frac{1}{n} = \frac{1}{2\left(\frac{W_2 a}{P b} + \frac{1}{m}\right)},$$

welcher letztere Ausdruck diejenige Abweichung der Umdrehungsgeschwindigkeit darstellt, welche hinreichend ist, um das Ventil in Bewegung zu setzen. In diesem Ausdrucke besteht das wahre Maaß für die Empfindlichkeit des Regulators.

§. 275. Die Gelenke **E** und **D** sind zuweilen, wie in der seitstehenden Figur, auf den Armen **AB** und **AC**, anstatt, wie in der vorhergehenden Figur, auf deren Verlängerungen angebracht. Man begreift leicht, daß alle Formeln des vorhergehenden Paragraphes auch auf diesen Fall Anwendung finden, nachdem man zuvor in den beiden Gleichungen (358) und (359) $b = o$ gesetzt hat, wodurch dieselben resp.




$$W_1 = W + \tfrac{1}{4}\mu a \;\ldots\; (358^a)$$

$$W_2 = W + \tfrac{1}{2}\mu a \;\ldots\; (359^a)$$

werden.

Bei dieser Rechnung ist die Zentrifugalkraft der Stäbe **EP** und **DP** außer Acht gelassen.*)

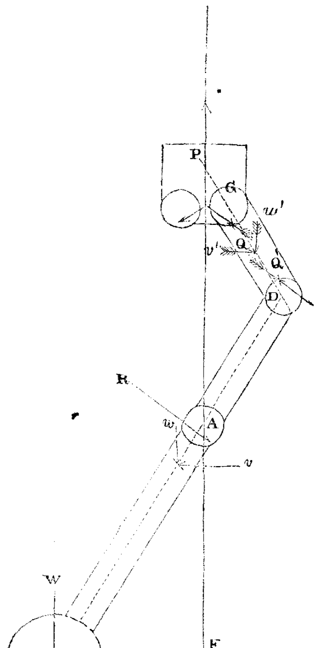
---

*) Wenn man bei den Untersuchungen des §s 274 auch die Reibungen an den Umdrehungsaxen der Stäbe bei **P**, **D** und **A** und die Wirkung der Zentrifugalkraft und des Gewichtes der Stäbe **P D** berücksichtigen will; so erhält man sehr verwickelte Formeln. Obgleich dieselben für die praktische Anwendung von keinem wesentlichen Nutzen sind; so wird es doch nicht unzweckmäßig sein, die allgemeinen Bedingungen unter diesen Voraussetzungen zu entwickeln, um dadurch den Weg anzudeuten, welchen man bei dergleichen Systemen, deren Theile miteinander vergliedert und um zylindrische Axen drehbar sind, einzuschlagen hat, wenn man eine Beziehung zwischen den an solchen Systemen angebrachten Kräften im Gränzzustande des Gleichgewichtes unter Berücksichtigung der Reibungen aufstellen will.

## Das Wagenrad.

276. Welches auch die Art des Widerstandes ist, welcher sich der Bewegung eines Wagenrades entgegensetzt; so leuchtet

---




Zu diesem Ende bemerkt man, daß ein jedes der drei Stücke, die Muffe **P**, der Stab **GD** und der Stab **DB**, ein System für sich bildet, an welchem die darauf angebrachten Kräfte und die zwischen den Lagern und Zapfen der Axen **G**, **D** und **A** auftretenden Widerstände miteinander im Gleichgewichte sein müssen. Betrachtet man den Regulator in demjenigen Gränzzustande des Gleichgewichtes, wo sich die Kugeln **B** vermöge ihrer Zentrifugalkraft heben und die Muffe herabziehen, sodaß sich also bei der Drehung der Stäbe **GD** und **DB** um ihre Axen der Winkel **FPD** vergrößert und der Winkel **PDB** verkleinert, so sei

**P** der Druck des Hebels gegen die Muffe in vertikaler Richtung nach oben,

**Q** der Widerstand zwischen der Axe und ihrem Lager bei **G**,

**Q'** der Widerstand zwischen der Axe und ihrem Lager bei **D**,

**R** der Widerstand zwischen der Axe und ihrem Lager bei **A**,

$w'$ und $v'$ das Gewicht und die Zentrifugalkraft des Stabes **GD**,

$w$ und $v$ das Gewicht und die Zentrifugalkraft des Stabes **DB**,

$\mu$ das Gewicht der Längeneinheit dieses Stabes,

**W** und **V** das Gewicht und die Zentrifugalkraft der Kugel **B**,

$\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit der Welle **PF**,

$a$ die Länge **AB**,

$b$ die Länge **AD**,

$c$ die Länge **DP**,

$h$ die Länge **AP**,

$\varrho'$ und $\varphi'$ der Halbmesser und der Reibungswinkel für eine jede der Axen bei **G** und **D**,

$\varrho$ und $\varphi$ der Halbmesser und der Reibungswinkel für die Axe bei **A**,

$\vartheta$ der Winkel **FAB**,

$\vartheta_1$ der Winkel **APD**,

$\eta$ und $\eta'$ der Winkel, welchen resp. die Richtung der Kraft Q und Q' mit der Vertikalen **PF** bildet,

$\varepsilon$ der Winkel, welchen die Richtung der Kraft **R** mit dieser Vertikalen bildet.

Nimmt man an, bei **G** und **D** befinde sich der Zapfen an dem Stabe **GD** und das Lager resp. in der Muffe **P** und in dem Stabe **DB**, und bei **A** drehe sich der Stab **DB** um eine an der Welle befestigte zylindrische Axe; so werden die Kräfte **P**, **Q** und **Q**, welche sich an der Muffe im Gleichgewichte erhalten müssen, durch die in der vorstehenden Figur an der Muffe angegebenen, unbefiederten Pfeile dargestellt; auf eine ähnliche Weise sind die Kräfte **Q**, **Q'**, $w'$, $v'$, ein, daß derselbe gleichbedeutend ist mit einem wirklichen oder eingebildeten Hindernisse, oder mit einer Erhöhung in der Fahr-

---

welche sich an dem Stabe **GD** im Gleichgewichte erhalten müssen, durch befiederte Pfeile und die Kräfte Q', R, $w$, $v$, **W**, **V**, welche sich an dem Stabe **DB** im Gleichgewichte erhalten müssen, durch unbefiederte Pfeile dargestellt.

Hiernach hat man nun zuvörderst für die Kräfte, welche miteinander an der Muffe im Gleichgewichte sein müssen

$$2\,Q \cos \eta = P \,.\,.\,.\,.\,(a)$$

Hinsichtlich der Kräfte Q, Q', $w'$, $v'$, welche miteinander an dem Stabe **GD** im Gleichgewichte sein müssen, bemerkt man, daß die Richtungen der Kräfte Q und Q' mit den Halbmessern, welche von den Mittelpunkten **G** und **D** der entsprechenden Axen nach den Angriffspunkten dieser Kräfte gezogen werden, den Reibungswinkel $\varphi$ einschließen müssen, da sich der Stab im Gränzzustande des Gleichgewichtes befinden soll. Zerlegt man nun die Kraft Q in eine horizontale $Q \sin\eta$ und in eine vertikale $Q \cos\eta$ und ebenso die Kraft Q' in die horizontale $Q' \sin\eta'$ und in die vertikale $Q' \cos\eta'$; so ergeben sich zuvörderst folgende beiden Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der vorstehenden Kräfte

$$Q \sin\eta = Q' \sin\eta' + v' \,.\,.\,.\,.\,(b)$$

$$Q \cos\eta = Q' \cos\eta' + w' \,.\,.\,.\,.\,(c)$$

Um nun das Prinzip der Gleichheit der Momente für die auf den Stab **GD** wirkenden Kräfte in Anwendung zu bringen; so nehme man die Momente dieser Kräfte in Beziehung zu dem Angriffspunkte der beiden Kräfte $w'$ und $v'$, sodaß die Momente für diese letzteren verschwinden. Nimmt man alsdann zu mehrerer Vereinfachung an, daß der Mittelpunkt der Axe **G** in der Vertikalen **PF** liege, beachtet ferner, daß der Angriffspunkt der Kraft Q in demjenigen Theile des Umfanges der Axe **G** liegen wird, welcher der Welle **PF** zugekehrt ist, während der Angriffspunkt der Kraft Q' in demjenigen Theile des Umfanges der Axe **D** liegen wird, welcher von der Welle **PF** abgekehrt ist, und daß sich die Richtungen der beiden Kräfte Q und Q' in Ein und demselben Punkte der Resultante von $w'$ und $v'$ durchschneiden müssen; so erhält man leicht für den perpendikularen Abstand der Richtung der Kraft Q von der Mitte der Linie **GD** $\frac{a}{2}\sin(\vartheta_1 - \eta) + \varrho' \sin\varphi'$ und für den der Kraft Q' von der Mitte derselben Linie $\frac{a}{2}\sin(\eta' - \vartheta_1) - \varrho' \sin\varphi' = -\left[\frac{a}{2}\sin(\vartheta_1 - \eta') + \varrho' \sin\varphi'\right]$, und mithin nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$Q\left[\frac{a}{2}\sin(\vartheta_1 - \eta) + \varrho' \sin\varphi'\right] = -\,Q'\left[\frac{a}{2}\sin(\vartheta_1 - \eta') + \varrho' \sin\varphi'\right] \ldots (d)$$

Endlich erhält man für die an dem Stabe **DB** wirkenden Kräfte Q', R, $w$, $v$, **W**, **V**, wenn man auch die Kraft **R** in die horizontale $R \sin\varepsilon$ und in die vertikale $R \cos\varepsilon$ zerlegt,

$$R \sin\varepsilon = Q' \sin\eta' + V + v \,.\,.\,.\,.\,(e)$$

und

$$R \cos\varepsilon + W + w = Q' \cos\eta' \ldots (f)$$

bahn, über welche das Rad fortwährend gehoben werden muß. Denn wie leicht auch das Material der Fahrbahn dem Drucke

---

Das Prinzip der Gleichheit der Momente ergibt für diese Kräfte, wenn man ihre Momente in Beziehung zu dem Punkte A nimmt, und dabei berücksichtigt, daß die Richtung von R mit dem Halbmesser der Axe A den Reibungswinkel $\varphi$ bildet,

$$R\varrho \sin\varphi + W a \sin\vartheta + w \cdot \tfrac{1}{2}(a-b)\sin\vartheta + Q' b \sin(\vartheta + \eta')$$
$$= V a \cos\vartheta + v \cdot \tfrac{1}{2}(a-b)\cos\vartheta \; \ldots \; (g).$$

Zwischen den Winkeln $\vartheta$ und $\vartheta_1$ hat man, wie in §. 274, die Beziehung

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta} = \frac{b}{c} \quad \ldots . \; (h).$$

Eliminirt man aus den vorstehenden acht Gleichungen die sieben Größen $Q$, $Q'$, $R$, $\eta$, $\eta'$, $\varepsilon$, $\vartheta_1$; so bleibt eine Beziehung zwischen denselben Elementen und einigen anderen gegebenen Größen, wie die Gleichung (360), zurück.

Vernachlässigt man das Gewicht und die Zentrifugalkraft des Stabes GD, setzt also $w'$ und $v'$ gleich null; so ergibt sich aus den Gleichungen ($b$) und ($c$)

$$\eta' = \eta \text{ und } Q' = Q.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung ($d$); so findet man, daß derselben nur dann ein Genüge geleistet werden kann, wenn man

$$\frac{a}{2}\sin(\vartheta_1 - \eta) + \varrho' \sin\varphi' = 0$$

hat, sodaß die Richtungen der Kräfte Q und Q' durch die Mitte der Linie GD gehen und in Einer geraden Linie liegen. Hieraus folgt zur Bestimmung des Winkels $\eta$

$$\sin(\vartheta_1 - \eta) = -\frac{2\varrho' \sin\varphi'}{a},$$

oder wenn man wegen der Kleinheit dieser Größe

$$\frac{2\varrho' \sin\varphi'}{a} = \sin\frac{2\varrho'\varphi'}{a}$$

setzt,

$$\vartheta_1 - \eta = -\frac{2\varrho'}{a}\varphi'$$

oder

$$\eta = \vartheta_1 + \frac{2\varrho'}{a}\varphi' \quad \ldots . \; (i)$$

Quadrirt man die Werthe von $R\sin\varepsilon$ und $R\cos\varepsilon$ aus ($e$) und ($f$) und addirt dieselben; so kommt des Rades nachgeben mag; so wird sich doch fortwährend, in Folge seiner Kompression vor dem Rade, ein Hinderniß von sehr

---

$$R = \sqrt{(Q \sin\eta + V + v)^2 + (Q \cos\eta - W - w)^2},$$

und wenn man diesen Werth für R in die Gleichung ($g$) substituirt,

$$\varrho \sin\varphi \sqrt{(Q\sin\eta + V + v)^2 + (Q\cos\eta - W - w)^2} + [Wa + \tfrac{1}{2}w(a-b)]\sin\vartheta$$
$$+ Q\, b \sin(\vartheta + \eta) = [V a + \tfrac{1}{2} v (a-b)] \cos\vartheta.$$

Setzt man hierin aus Gleichung ($a$) den Werth

$$Q = \frac{P}{2\cos\eta}, \text{ ferner } w = \mu (a+b),$$

$$V = \frac{W}{g} \alpha^2 a \sin\vartheta, v = \tfrac{1}{2} \frac{w}{g} \alpha^2 (a-b) \sin\vartheta = \tfrac{1}{2} \frac{\mu}{g} \alpha^2(a^2-b^2) \sin\vartheta,$$

und setzt der Kürze wegen

$$W_1 = W + \tfrac{1}{4}\mu \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(a-b),$$

$$W_2 = W + \tfrac{1}{2}\mu\, a \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

$$W_3 = W + \mu\, a \left(1 + \frac{b}{a}\right);$$

so verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{\alpha^2}{g} W_1 a^2 \sin\vartheta \,.\, \cos\vartheta$$
$$= \tfrac{1}{2} P b \frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta} + W_2 a \sin\vartheta + \varrho \sin\varphi \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}P \operatorname{tang}\eta + \frac{\alpha^2}{g} W_2 a \sin\vartheta\right)^2 + (\tfrac{1}{2}P - W_3)^2} \quad \ldots \text{(k)}$$

Nimmt man an, daß $b = c$ sei; so wird $\vartheta_1 = \vartheta$, und man hat

$$\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta} = \sin\vartheta + \cos\vartheta \,.\, \operatorname{tang}\eta = \sin\vartheta + \cos\vartheta \operatorname{tang}\left(\vartheta + \frac{2\varrho'}{a}\varphi'\right)$$

$$= \sin\vartheta + \cos\vartheta \left\{\frac{\operatorname{tang}\vartheta + \operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'}{1 - \operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'}\right\} = \sin\vartheta + \sin\vartheta \left\{\frac{1 + \dfrac{\operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'}{\operatorname{tang}\vartheta}}{1 - \operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'}\right\}$$

geringer Höhe bilden, welches sich der Bewegung des Rades widersetzt.

---

oder, wenn man mehr, als Eine Dimension von tang $\frac{2\varrho'}{a}\varphi'$, vernachlässigt,

$$\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta}=\sin\vartheta+\sin\vartheta\left(1+\frac{\operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'}{\operatorname{tang}\vartheta}+\operatorname{tang}\vartheta.\operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'\right)$$

$$=\sin\vartheta\left[2+\frac{\operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'}{\sin\vartheta\,.\cos\vartheta}\right]$$

oder auch, wenn man wegen der Kleinheit von $\frac{2\varrho'}{a}\varphi'$, $\operatorname{tang}\frac{2\varrho'}{a}\varphi'=\frac{2\varrho'}{a}\operatorname{tang}\varphi'$

setzt,

$$\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta}=2\sin\vartheta\left[1+\frac{\varrho'\operatorname{tang}\varphi'}{a\sin\vartheta\cos\vartheta}\right].$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung ($k$), setzt für tang $\eta$ unter dem Wurzelzeichen tang $\vartheta$, weil tang $\vartheta$ von tang $\eta$ nur durch Glieder unterschieden ist, welche in Beziehung zu $\varrho'$ sin $\varphi'$ wenigstens vom ersten Grade sind, und weil die Wurzelgröße außerdem noch einmal in die sehr kleine Größe $\varrho\sin\varphi$ multiplizirt ist; so erhält man, wenn man mit sin $\vartheta$ dividirt,

$$\frac{\alpha^2}{g}W_1\,a^2\cos\vartheta$$

$$=Pb+W_2a+\frac{Pb}{a\sin\vartheta\cos\vartheta}\varrho'\sin\varphi'+\varrho\sin\varphi\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}P}{\cos\vartheta}+\frac{\alpha^2}{g}W_2a\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}P-W_3}{\sin\vartheta}\right)^2} \quad \ldots\ldots (l)$$

oder wenn man die Quadratwurzel nach dem Ponceletschen Lehrsatze näherungsweise entwickelt,

$$\frac{\alpha^2}{g}W_1\,a^2\cos\vartheta=P\,b+W_2\,a+\frac{P\,b}{a\sin\vartheta\,.\cos\vartheta}\varrho'\sin\varphi'$$

$$+\left[0{,}96\left(\frac{\frac{1}{2}P}{\cos\vartheta}+\frac{\alpha^2}{g}W_2\,a\right)+0{,}4\left(\frac{\frac{1}{2}P-W_1}{\sin\vartheta}\right)\right]\varrho\sin\varphi \ldots\ldots (m)$$

Endlich kann man

$$h=2\,b\cos\vartheta,$$

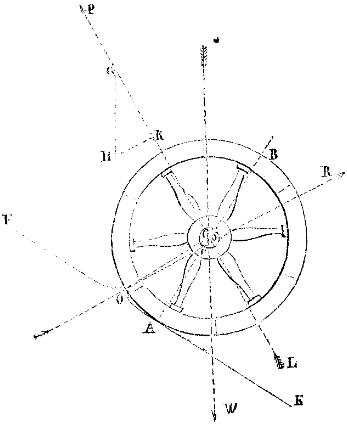
also

$$\cos\vartheta=\frac{h}{2b} \text{ und } \sin\vartheta=\sqrt{1-\frac{h^2}{4b^2}}$$

etzen. Hierdurch erhält man eine Gleichung, welche die Stelle der Gleichung

## §. 277. Der zweirädrige Wagen.

**AB** sei Eines der beiden Räder eines zweirädrigen Wagens, **EF** eine geneigte Ebene, welche dasselbe im Begriffe ist zu ersteigen, und **O** eine feste Erhöhung in der Oberfläche der geneigten Ebene, welche soeben von dem Rade überschritten wird.




Man begreift, daß der Wagen mit der Axe und das Rad zwei getrennte Systeme bilden, an welchen die darauf angebrachten Kräfte für sich im Gleichgewichte sein müssen, sodaß, wenn das Gewicht der Belastung des Rades **AB** mit $W_1$, die entsprechende Zugkraft mit **P**, der Widerstand zwischen der

---

(364) in §. 274 vertritt, nachdem man darin $\alpha = 2\pi\gamma N$ gesetzt und dieselbe für $h$ aufgelös't hat.

Die vorstehenden Formeln beziehen sich auf den oberen Gränzzustand des Gleichgewichtes, in welchem die Zentrifugalkräfte der Kugeln **B** oder Stäbe **BD** die Muffe herabzuziehen streben. Untersucht man auf eine ähnliche Weise den Fall, wo sich das System in dem unteren Gränzzustande des Gleichgewichtes befindet, in welchem die Wirkungen der Gewichte der Kugeln **B** und der Stäbe **BD** die Muffe zu heben streben; so findet man, daß sich die Richtungen der Kräfte Q, Q′ und **R** in die entgegengesetzten verwandeln, und daß man alle vorhergehenden Formeln beibehalten kann, wenn man darin die Größen $w', v', w, v$, **W**, **V** und demnach auch die Größen $W_1$, $W_2$, $W_3$ mit entgegengesetzten Zeichen nimmt. Hierdurch würde also die Gleichung (m) in

$$-\frac{\alpha^2}{g} W_1 a^2 \cos\vartheta = P b - W_2 a$$

$$+\frac{Pb}{a\sin\vartheta\cos\vartheta}\varrho'\sin\varphi' + \left[0{,}96\left(\frac{\frac{1}{2}P}{\cos\vartheta} - \frac{\alpha^2}{g}W_2 a\right) + 0{,}4\left(\frac{\frac{1}{2}P + W_1}{\sin\vartheta}\right)\right]\varrho\sin\varphi \quad \ldots . \text{(n)}$$

übergehen.

Wollte man diese Gleichungen, nachdem man darin $\alpha = 2\pi\gamma N$ gesetzt hätte, ebenso behandeln, wie die Gleichung (364) s. §. 274; so hätte man in der Gleichung (m) $P\left(1+\frac{1}{m}\right)$ für **P** und $N\left(1+\frac{1}{n}\right)$ für **N**, in der Gleichung (n) dagegen $P\left(1-\frac{1}{m}\right)$ für **P** und $N\left(1-\frac{1}{n}\right)$ für **N** zu setzen und alsdann die Größe $h$, welche in beiden Gleichungen denselben Werth haben

**Axe des Wagens und der Büchse des Rades mit $R_1$, ferner das Gewicht des Rades mit $W_2$ und der Widerstand des Hinder=**

---

müßte, zu eliminiren. Man könnte durch die obigen Gleichungen sehr genäherte Werthe erhalten, wenn man zuvörderst aus der Gleichung (364) ohne Berücksichtigung aller Reibungen den Werth von $h$ berechnete und diesen als eine konstante Größe in diejenigen Glieder der beiden Gleichungen (m) und (n) substituirte, welche in die sehr kleinen Größen $\varrho' \sin \varphi'$ und $\varrho \sin \varphi$ multiplizirt sind. Ein durch dieses Verfahren entstehender Fehler würde, wie leicht zu erachten, immer von einer höheren Dimension, als der ersten, in $\varrho' \sin \varphi'$ und $\varrho \sin \varphi$ sein. Setzt man demnach nach Gleichung (364)

$$\frac{b\,g\,(\mathrm{P}\,b + \mathrm{W}_2\,a)}{2\,\pi^2\,\gamma^2\,a^2\,\mathrm{W}_1} \cdot \frac{1}{\mathrm{N}^2} = \frac{2\,b\,g\,(\mathrm{P}\,b + \mathrm{W}_2\,a)}{\alpha^2\,\gamma^2\,a^2\,\mathrm{W}_1} = h_1$$

und der Kürze wegen die Verhältnisse

$$\frac{h_1}{2\,b} = i_1 \text{ und } \sqrt{1 - \frac{h_1{}^2}{4\,b^2}} = \frac{\sqrt{4\,b^2 - h_1{}^2}}{2\,b} = i_2\,;$$

so verwandeln sich die Gleichungen (m) und (n), wenn man auch $\alpha = 2\,\pi\,\gamma\,\mathrm{N}$ setzt, worin $\mathrm{N}$ die Anzahl der Umdrehungen des Schwungrades in der Sekunde und $\gamma\mathrm{N}$ die Anzahl der Umdrehungen der vertikalen Welle des Regulators in derselben Zeit bezeichnet, in

$$\pm \frac{2\pi^2\gamma^2\mathrm{N}^2}{bg}\,\mathrm{W}_1\,a^2 . h = \mathrm{P}\,b \pm \mathrm{W}_2\,a + \frac{\mathrm{P}\,b}{a\,i_1\,i_2}\,\varrho' \sin \varphi'$$
$$+ \left[0{,}96\left(\frac{\mathrm{P}}{2 i_1} \pm \frac{4\pi^2\gamma^2\mathrm{N}^2}{g}\mathrm{W}_2 a\right) + 0{,}4\left(\frac{\frac{1}{2}\mathrm{P} \mp \mathrm{W}_1}{i_2}\right)\right] \varrho \sin \varphi \;\ldots\; \text{(o)}$$

Hieraus folgt

$$h = \frac{b\,g}{2\,\pi^2\,\gamma^2\,a^2\,\mathrm{W}_1} \left\{ \pm \mathrm{P} \left[ b + \frac{(0{,}2 i_1 + 0{,}48 i_2)\varrho \sin\varphi + \frac{b}{a}\varrho' \sin\varphi'}{i_1\,i_2} \right] + \mathrm{W}_2\,a - \frac{0{,}4}{i_2}\mathrm{W}_1\,\varrho \sin \varphi \right\} \left\{ \frac{1}{\mathrm{N}^2} + 1{,}92\,\frac{\mathrm{W}_2\,b}{\mathrm{W}_1\,a}\,\varrho \sin\varphi \right. \;\ldots\; \text{(p)}$$

in welcher Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem sich die Muffe im Begriffe befindet, nach unten oder nach oben zu gleiten. Substituirt man hierin, ebenso wie in §. 274, unter Beibehaltung des oberen Zeichens $\mathrm{P}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ für $\mathrm{P}$ und $\mathrm{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ für $\mathrm{N}$ und unter Beibehaltung des untern Zeichens $\mathrm{P}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ für $\mathrm{P}$ und $\mathrm{N}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ für $\mathrm{N}$, und setzt die für $h$ sich ergebenden Werthe einander gleich; so kommt nisses O mit $R_2$, bezeichnet würde, die Kräfte $P_1, W_1, R_1$ und die Kräfte $R_1, W_2, R_2$ einander das Gleichgewicht halten müßten.

Da die strenge Betrachtung dieser Bedingungen zu sehr verwikkelten Rechnungen führt; so kann man zur Erlangung von praktischen Formeln von der Voraussetzung ausgehen, daß das Rad gewichtlos sei, daß dagegen sein Gewicht $W_2$ zu dem Gewichte $W_1$ der Belastung addirt werden könne. Setzt man unter diesen Annahmen das Gesammtgewicht des Rades mit seiner Belastung $W_1 + W_2 = W$ und den Widerstand zwischen der Axe und der Büchse $= R$; so erhellet, daß die Kräfte $P, W, R$ miteinander im Gleichgewichte sein müssen, und daß die Richtung des Widerstandes zwischen der Axe und der Büchse mit dem Widerstande des Hindernisses O zusammenfallen muß. Da aber die Oberfläche der Büchse des Rades im Begriffe ist, auf der Axe zu gleiten; so wird sich die Richtung des Widerstandes R gegen einen Halbmesser der Axe, welcher nach dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte der

---

$$\frac{W_2\, a - \frac{0,4}{i_2} W_1\, \varrho \sin\varphi}{P\left[b + \frac{(0,2\, i_1 + 0,48\, i_2)\, \varrho \sin\varphi + \frac{b}{a}\varrho' \sin\varphi'}{i_1 i_2}\right]} = \tfrac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m},$$

und wenn man $\frac{1}{n}$ gegen $n$ vernachlässigt,

$$n = 2\left\{\frac{W_2\, a - \frac{0,4}{i_2} W_1\, \varrho \sin\varphi}{P\left[b + \frac{(0,2\, i_1 + 0,48\, i_2)\, \varrho \sin\varphi + \frac{b}{a}\varrho' \sin\varphi'}{i_1\, i_2}\right]} + \frac{1}{m}\right\}$$

Durch den Werth von $\frac{1}{n}$ ist derjenige Theil der Umdrehungsgeschwindigkeit dargestellt, um welchen dieselbe nicht variiren darf, ohne das Ventil in Bewegung zu setzen. Da der vorstehende Werth von $n$ offenbar kleiner ist, als der Werth von $n$ aus §. 274, bei welchem die Reibungen außer Acht gelassen sind, und mithin hier der Werth von $\frac{1}{n}$ größer ist, als dort; so sieht man, daß die Wirkungen der Reibungen eine Schwächung der Empfindlichkeit des Regulators zur Folge haben, was schon a priori erwartet werden konnte. —

Büchse und der Axe gezogen wird, unter dem Reibungswinkel neigen (§. 141). Zieht man daher durch den Punkt O, in welchem das Hinderniß in der Fahrbahn die Felge des Rades berührt, die Linie OR dergestalt, daß wenn $c$ ihr Durchschnittspunkt mit dem Umfange der Axe ist, der Winkel C$c$R dem Reibungswinkel $\varphi$ gleichkommt; so wird diese Linie sowol die Richtung des Widerstandes des Hindernisses O wie die des Widerstandes zwischen der Axe und der Büchse darstellen.

Wenn nun diese Linie OR von der durch C gehenden Vertikalen CW oder von der Richtung des Gewichtes W im Punkte $s$ geschnitten wird; so ist es zum Bestehen des Gleichgewichtes zwischen den drei Kräften P, W und R nothwendig, daß die Richtung der Zugkraft P durch jenen Durchschnittspunkt $s$ gehe. Nimmt man an, daß Dies wirklich statt finde, so stelle die Vertikale GH das Gewicht W dar. Zieht man alsdann durch H die Linie HK parallel zu OR; so wird diese Linie (nach demselben Maaßstabe) den Widerstand R und die Linie GK wird die Zugkraft P darstellen (§. 14.) Demnach hat man

$$\frac{P}{W}=\frac{GK}{GH}=\frac{\sin GHK}{\sin GKH}=\frac{\sin GHK}{(\sin PGH-GHK)}=\frac{\sin WsO}{\sin(PsW-WsO)}$$

Bezeichnet man mit

$r$ den Halbmesser des Rades, mit

$\varrho$ den der Axe, mit

$\eta$ den Winkel ACO, mit

$\iota$ den Neigungswinkel der Fahrbahn gegen den Horizont, oder auch den Winkel ACW, mit

$\vartheta$ den Neigungswinkel der Richtung der Zugkraft P gegen die Fahrbahn, mit

$\alpha$ den Winkel CO$s$ und mit

$b$ die Länge des Bogens AO;

so ist $\quad WsO=WCO+COs \quad =\iota+\eta+\alpha.$

Da ein von C auf die Linie OR gefälltes Perpendikel sowol $=CO.\sin COs=r\sin\alpha$, wie $=Cc.\sin Ccs=\varrho\sin\varphi$ ist; so hat man zur Bestimmung des Winkels $\alpha$ die Gleichung

$$r\sin\alpha=\varrho\sin\varphi$$

oder

$$\sin\alpha=\frac{\varrho}{r}\quad....(365)$$

Ferner ist $PsW = \pi - WsL = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \iota - \vartheta\right) = \frac{\pi}{2} + \iota + \vartheta$; folglich

$$PsW - WsO = \frac{\pi}{2} - (\eta + \alpha - \vartheta),$$

und nach der obigen Beziehung

$$P = W \frac{\sin(\iota + \eta + \alpha)}{\cos(\eta + \alpha - \vartheta)} \quad \ldots. \ (366)$$

Wenn die Richtung der Zugkraft der Fahrbahn parallel, also $\vartheta = o$ ist; so hat man

$$P = W[\sin\iota + \cos\iota \tan(\eta + \alpha)] \quad \ldots. \ (367)$$

Für den Fall, daß sowol die Fahrbahn, wie die Richtung der Zugkraft horizontal, also $\vartheta = \iota = o$ ist, reduzirt sich dieser Ausdruck auf

$$P = W \tan(\eta + \alpha) \quad \ldots. \ (368)$$

Bei Rädern von den üblichen Dimensionen und auf gewöhnlichen Straßen ist ACO oder $\eta$ immer ein sehr kleiner Winkel, ebenso $\alpha$ (Gleichung 365); demnach kann man $\tan(\eta + \alpha)$ sehr nahe $= \eta + \alpha$ setzen. Nun ist aber

$$\eta = \frac{b}{r}; \ \ldots. \ (369)$$

substituirt man daher diesen und den Werth von $\alpha$ oder $\sin \alpha$ aus Gleichung (365) in (368); so kommt

$$P = W \cdot \frac{b + \varrho \sin \varphi}{r} \quad \ldots. (370)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet **P** die Hälfte der zum Fortschaffen des ganzen Fuhrwerkes erforderliche Kraft, wenn **W** das halbe Gewicht des Fuhrwerkes mit der Belastung und mit Einem Rade bezeichnet. Stellt man jedoch unter **W** das Gewicht des ganzen Fuhrwerkes mit den beiden Rädern dar; so ist **P** die gesammte zum Fortschaffen desselben nothwendige Kraft.

§. 278. Der Werth des Bogens **A** zwischen dem niedrigsten Punkte, zu welchem das Rad in der Straße einsinkt, und der

Spitze des Hindernisses O, welches dasselbe in jedem Augenblicke überschreitet, muß für eine jede besondere Fahrbahn zuvor ermittelt werden. Nun scheinen aber die Versuche von Coulomb und die neuerdings angestellten Versuche von Morin (s. die Mittheilung derselben in §. 281a) die Thatsache herauszustellen, daß auf horizontalen Straßen von gleichförmiger Beschaffenheit und von demselben Materiale die Zugkraft P, wenn ihre Richtung horizontal ist, im geraden Verhältnisse mit der Last W und im umgekehrten mit dem Halbmesser R des Rades variirt; es folgt also (Gleichung 370), daß der Bogen $b$ konstant bleibt, oder daß derselbe sich nicht ändert, was auch das Gewicht der Belastung oder die Dimensionen des Rades sein mögen. Dieser Umstand erklärt sich daraus, daß wenn auch das Rad unter einer größeren Last tiefer einsinkt, das wiederstehende Hinderniß unter dem stärkeren Drucke des Rades doch eher nachgibt, und daß bei einem größeren Durchmesser das Rad wegen der größeren Fläche, welche sich dem Drucke darbietet, nicht so tief einsinkt, als bei einem kleineren Durchmesser, sodaß in beiden Fällen die Länge des Bogens $b$ immer unverändert bleibt. Die Konstante $b$ kann demnach als ein Maaß für die Widerstandsfähigkeit der Straße angesehen und der Model ihres Widerstandes genannt werden.

Wenn der mittlere Werth dieses Models für eine Straße von gegebener Beschaffenheit bestimmt ist; so findet man den Werth von $\eta$ aus Gleichung (369) und mit Hülfe dieses Werthes die Beziehung zwischen der Zugkraft und der Last für jene Straße unter allen Umständen; denn da der Bogen $b$ für eine jede Last auf dieser Straße derselbe bleibt, solange die Zugkraft eine parallele Richtung behält; so folgt, daß jener Bogen auch dann noch unverändert bleiben wird, wenn die Straße unter sonst gleichen Umständen ein Gefälle besitzt, indem die Wirkung des Gefälles mit einer Veränderung der Last gleichbedeutend ist. Demnach kann man dieselbe Substitution für $\tang(\eta+\alpha)$ in Gleichung (367), wie in Gleichung (368) vornehmen, und erhält dadurch

$$\mathrm{P}=\mathrm{W}\left[\sin\iota+\left(\frac{b+\varrho\sin\varphi}{r}\right)\cos\iota\right]\ldots.(371)$$

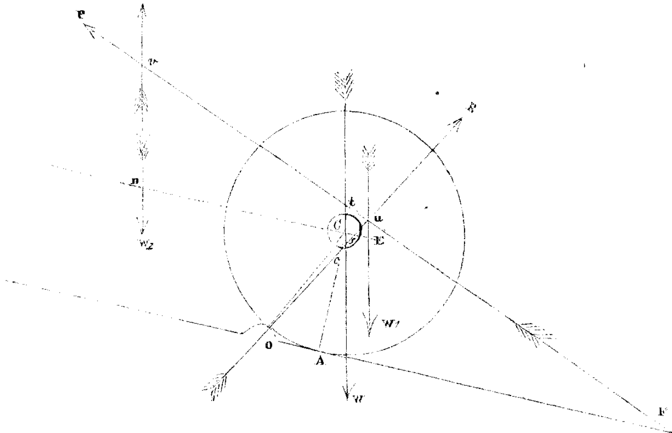
§. 279. **Die vortheilhafteste Richtung der Zugkraft bei einem zweirädrigen Wagen.**

Diese Richtung ist offenbar diejenige, durch welche der Nenner in Gleichung (366) den größten Werth annimmt; dieselbe ist mithin durch die Gleichung

$$\vartheta = \eta + \alpha = \frac{b + \varrho \sin \varphi}{r} \dots (372)$$

bestimmt.*)

*) Die obigen Formeln sind unter der Voraussetzung entwickelt, daß die Richtung der Zugkraft **P** durch den Punkt *s* gehe (§. 277) in welchem die Vertikale **CW** von der Linie **OR** geschnitten wird. Die Linie **OR** war von




dem Punkte **O** aus so gezogen, daß sie mit dem Halbmesser **C***c* der Axe einen Winkel **C***c***R** $= \varphi$ bildete (eine Konstruktion, welche man dadurch ausführen kann, daß man die Linie **OR** tangent an einen Kreis zieht, welcher aus **C** mit dem Halbmesser $\varrho \sin \varphi$ beschrieben ist). Ginge nun die Richtung **FP** der Zugkraft **P** nicht durch den Punkt *s*, sondern schnitte die Vertikale **CW** in irgend einem anderen Punkte *t* und die Linie **OR** in dem Punkte *u*; so könnte zwischen den drei Kräften **P**, **W** und **R** auf keinen Fall Gleichgewicht stattfinden. Da die Resultante von **P** und **R** durch den Punkt *u* geht; so muß auch die dritte Kraft, welche mit **P** und **R** im Gleichgewichte sein soll, durch diesen Punkt *u* gehen. Ist daher **D** derjenige Punkt an dem Gestelle des Wagens, in welchem dasselbe von dem Zugthiere getragen wird; so muß man das Gewicht **W** der Belastung in zwei andere $W_1$ und $W_2$ zerlegen, von welchen das erstere durch den Punkt *u* oder **E** und das andere durch den Punkt **D** in vertikaler Richtung wirkt. Das Gewicht $W_1$ muß sich alsdann mit den beiden Kräften **P** und **R** in

## §. 280. Der vierrädrige Wagen.

Wenn $W_1$, $W_2$ die Belastungen bezeichnen, welche resp. die Vorder- und Hinterräder mit Einschluß ihrer eigenen Gewichte

---

Gleichgewicht setzen, und das Gewicht $W_2$ ist von dem Zugthiere im Punkte **D** zu tragen.

Bezeichnet man die Länge der Linie **CE** mit $x$ und die der Linie **CD**, welche gegeben ist, mit $l$, ferner den Abstand **C**$t$ des Punktes $t$, in welchem die Richtung von **P** die Vertikale **WC** schneidet, vom Mittelpunkte **C** der Axe mit $h$; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

$$x W_1 = l W_2,$$

da außerdem

$$W_1 + W_2 = W$$

sein muß; so folgt

$$W_1 = W \frac{l}{l+x} \text{ und } W_2 = \frac{x}{l+x}.$$

Zur Bestimmung des Werthes von $x$ hat man zuvörderst, wenn man die übrigen Bezeichungen des §s 277 beibehält, für den Abstand **C**$s$ des Punktes $s$, in welchem die Linie **OR** die Vertikale **WC** schneidet, und durch welchen die Richtung der Zugkraft gehen müßte, wenn das Zugthier nicht noch außerdem in der Richtung $v$**D** einen Druck erleiden sollte, vom Mittelpunkte **C**

$$\overline{Cs}\,.\sin(\iota+\eta+\alpha) = \varrho \sin\varphi,$$

also

$$Cs = \frac{\varrho \sin\varphi}{\sin(\iota+\eta+\alpha)},$$

und daher

$$ts = h + \frac{\varrho \sin\varphi}{\sin(\iota+\eta+\alpha)}.$$

Ferner ist

$$\frac{tu}{ts} = \frac{\sin tsu}{\sin tus} = \frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)},$$

also

$$\overline{tu} = \overline{ts}\,.\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)} = \left[h + \frac{\varrho\sin\varphi}{\sin(\iota+\eta+\alpha)}\right]\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)};$$

endlich, wenn man sich durch $u$ mit **EC** eine Parallele gezogen denkt

$$\frac{CE}{tu} = \frac{\sin utW}{\sin tCE} = \frac{\sin utW}{\sin ECW} = \frac{\cos(\iota+\vartheta)}{\cos\iota};$$

mithin

$$x = CE = \overline{tu}\,.\frac{\cos(\iota+\vartheta)}{\cos\iota} = \left[h + \frac{\varrho\sin\varphi}{\sin(\iota+\eta+\alpha)}\right]\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)}.\frac{\cos(\iota+\vartheta)}{\cos\iota}.$$

zu tragen haben, und $r_1$, $r_2$ ihre Halbmesser, $\varrho_1$, $\varrho_2$ die Halbmesser ihrer Axen und $\varphi_1$, $\varphi_2$ die den Letzteren entsprechenden

---

Da man nun ebenso, wie in §. 277,

$$P = W_1 \frac{\sin(\iota + \eta + \alpha)}{\cos(\eta + \alpha - \vartheta)}$$

findet; so hat man nach der obigen Gleichung für $W_1$

$$P = W\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)} \cdot \frac{l}{l + \left[h + \frac{\varrho \sin\varphi}{\sin(\iota+\eta+\alpha)}\right]\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)} \cdot \frac{\cos(\iota+\vartheta)}{\cos\iota}},$$

oder wenn man wirklich dividirt, und Glieder von mehr, als Einer Dimension aus den fast immer sehr kleinen Größen $\frac{h}{l}$ und $\frac{\varrho \sin\varphi}{l}$, vernachlässigt,

$$P = W\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)} \left\{1 - \frac{h\sin(\iota+\eta+\alpha) + \varrho\sin\varphi}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta)} \cdot \frac{\cos(\iota+\vartheta)}{\cos\iota}\right\}.$$

In dieser Gleichung können dieselben Substitutionen vorgenommen werden, wie Dies in Gleichung (366) geschehen ist. Man bemerkt, daß die Zugkraft **P** für diesen Fall geringer ist, als diejenige, welche erforderlich sein würde, wenn die Richtung des Zuges (bei derselben Neigung $\vartheta$) durch den Punkt $s$ ginge. Übrigens hat hier das Zugthier in der Richtung $v\,W_2$ einen Druck $W_2 = W\frac{x}{l+x}$ auszuhalten, welcher, wenn er mit der aufzuwendenden Zugkraft **P** zusammengesetzt wird, eine Kraft erzeugt, deren Richtung $sv$ ist. Hieraus sieht man, daß die Resultante der von dem Zugthiere zur Fortsetzung des Fuhrwerkes zu leistenden Kräfte immer durch den Punkt $s$ geht, welcher in vertikaler Richtung um $\frac{\varrho \sin\varphi}{\sin(\iota+\eta+\alpha)}$ unter dem Mittelpunkte C der Axe liegt. Sieht man daher den Punkt $v$ und die Richtung $vs$, welche mit der Fahrbahn einen Winkel $= \vartheta_1$ einschließe, als bekannt an; so kann man die Zugkraft $P_1$, welche in der Richtung $sv$ erforderlich sein würde, nach der Formel

$$P_1 = W\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta_1)}$$

berechnen. Zerlegt man darauf diese in zwei Kräfte **P** und $W_2$, von denen die erstere **P** in die Richtung **FP** und die zweite in die vertikale Richtung **D**$v$ fällt; so ergibt die erstere

$$P = P_1\frac{\cos(\iota+\vartheta_1)}{\cos(\iota+\vartheta)} = W\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta_1)} \cdot \frac{\cos(\iota+\vartheta_1)}{\cos(\iota+\vartheta)}$$

die verlangte Zugkraft in der Richtung **FP** und die zweite

$$W_2 = P_1\frac{\sin(\vartheta_1-\vartheta)}{\cos(\iota+\vartheta)} = W\frac{\sin(\iota+\eta+\alpha)}{\cos(\eta+\alpha-\vartheta_1)} \cdot \frac{\sin(\vartheta_1-\vartheta)}{\cos(\iota+\vartheta)}$$

Reibungswinkel darstellen; so hat man für den Fall, daß die Richtung der Zugkraft der Straße parallel ist, wenn man diese Kraft der Summe der Zugkräfte für die Vorder- und Hinterräder gleich setzt (nach Gleichung 371)

$$P = W_1\left[\sin\iota + \left(\frac{b+\varrho_1 \sin\varphi_1}{r_1}\right)\cos\iota\right] + W_2\left[\sin\iota + \left(\frac{b+\varrho_2 \sin\varphi_2}{r_2}\right)\cos\iota\right]$$

oder

$$P = (W_1+W_2)\sin\iota + b\left(\frac{W_1}{r_1}+\frac{W_2}{r_2}\right)\cos\iota + \left[W_1\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)\sin\varphi_1 + W_2\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)\sin\varphi_2\right]\cos\iota \quad \ldots . (373)\ ^{*)}$$

---

den von dem Zugthiere noch außerdem auszuhaltenden vertikalen Druck in der Richtung $v\,W_2$. —

*) Wenn man diesen Fall eines Wagens mit vier Rädern genauer untersucht; so findet man, daß wenn die Richtung der Zugkraft nicht etwa die Mittellinie der beiden Vorder- und Hinterräder zwischen ihren Axen durchschneidet, diese Richtung keineswegs willkürlich angenommen werden kann, ohne daß die Zugthiere noch außerdem in vertikaler Richtung einen Druck auszuhalten hätten. Denn wenn $s_1$ und $s_2$ resp. die Punkte sind, welche um

$$C_1 s_1 = s_1 = \frac{\varrho_1 \sin\varphi_1}{\sin(\iota + \eta_1 + \alpha_1)}$$

und

$$C_2 s_2 = s_2 = \frac{\varrho_2 \sin\varphi_2}{\sin(\iota + \eta_2 + \alpha)},$$

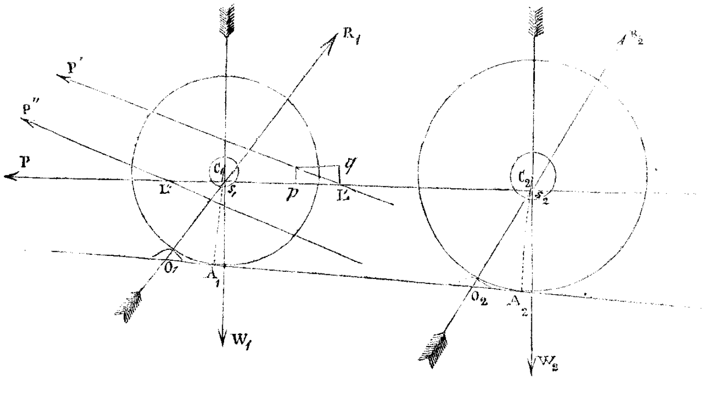
worin

$$\alpha_1 = arc\sin\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\sin\varphi_1\right),\ \alpha_2 = arc\sin\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\sin\varphi_2\right)$$

und

$$\eta_1 = \frac{b}{r_1},\ \eta_2 = \frac{b}{r_2},$$

ist (s. §. 277 und die Note zu §. 279) unter den Mittelpunkten $C_1$ und $C_2$ der Vorder-



## §. 281. Die in dem Wagenrade angehäufte Arbeit.

Wenn J das Trägheitsmoment des Rades in Beziehung zu seiner Axe und M sein Volum darstellt; so wird $Mr^2 + J$ sein

---

und Hinterräder liegen, also $O_1 s_1 R_1$ und $O_2 s_2 R_2$ die Richtungen, in welchen die Büchsen der Räder gegen die Axen Widerstand leisten müssen; so sieht man, daß wenn die Zugkraft P mit den vier Kräften $W_1, R_1, W_2, R_2$ im Gleichgewichte sein soll, vorausgesetzt, daß sie die Linie $s_1 s_2$ nicht zwischen den Punkten $s_1$ und $s_2$ durchschneide, ihre Richtung nothwendig durch diese Punkte gehen und mit der Linie $s_1 s_2$ zusammenfallen müsse. Die Neigung $\vartheta_1$ dieser Linie $s_2 s_1$ gegen die Fahrbahn $A_2 A_1$ ist offenbar durch die Beziehung

$$\text{tang}\,\vartheta_1 = \frac{(r_2 - s_2) - (r_1 - s_1)}{a}$$

bestimmt, worin $a$ den Abstand $A_2 A_1$ der Berührungspunkte der beiden Räder mit der Fahrbahn oder auch sehr nahe die Mittellinie $C_2 C_1$ bezeichnet. Hierbei ist angenommen, daß die Linie $s_2 s_1$ eine Neigung gegen die Fahrbahn $A_2 A_1$ nach vorn habe, da die Hinterräder der vierrädrigen Fuhrwerke gewöhnlich höher sind, als die Vorderräder. Demnach würde die in der Richtung $s_2 s_1$ erforderliche Zugkraft nach Gleichung (366), wenn man darin $-\vartheta_1$ für $+\vartheta$ setzt,

$$P = W_1 \frac{\sin(\iota + \eta_1 + \alpha_1)}{\cos(\eta_1 + \alpha_1 + \vartheta_1)} + W_2 \frac{\sin(\iota + \eta_2 + \alpha_2)}{\cos(\eta_2 + \alpha_2 + \vartheta_1)}$$

sein.

Fiele nun aber die an dem Fuhrwerke angebrachte Zugkraft nicht mit der Linie $s_2 s_1$ zusammen; so sind drei Fälle zu unterscheiden: 1) wenn die Richtung dieser Kraft die Linie $s_2 s_1$ zwischen den beiden Punkten $s_1$ und $s_1$ oder in Einem derselben, durchschnitte,

2) wenn dieselbe die Linie $s_2 s_1$ vor dem Punkte $s_1$ und

3) wenn sie die Linie $s_2 s_1$ hinter dem Punkte $s_2$ durchschnitte.

Was den ersten Fall betrifft; so sieht man, daß eine in der Richtung L′ P′ wirkende Kraft immer im Stande ist, den vier Kräften $W_1$, $R_1$, $W_2$, $R_2$ das Gleichgewicht zu halten. Denn wenn man den Abstand des Punktes L′ von der Vertikalen $C_1 W_1$ mit $c_1$, den von der Vertikalen $C_2 W_2$ mit $c_2$ und die Neigung der Richtung L′ P′ gegen die Fahrbahn $A_1 A_2$ in dem Sinne, wie diese Neigung früher genommen wurde, mit $\vartheta$ bezeichnet; so kann man sich die Kraft P in zwei andere $p$ und $q$ zerlegt denken, von denen die erstere $p$ in die Richtung $s_2 s_1$ fällt und die letztere $q$ mit der vertikalen Richtung $C_1 W_1$ der Schwere parallel ist. Die Kraft $q$ wird sich nun nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente auf die Punkte $C_1$ und $C_2$ zerlegen und daselbst einem Theile $w_1$ von dem Gewichte $W_1$ und einem Theile $w_2$ von dem Gewichte $W_2$ das Gleichgewicht halten, während sich die Kraft $p$ mit den Gewichten $W_1 - w_1$, $W_2 - w_2$ und den Widerständen $R_1, R_2$ in Gleichgewicht setzen wird. Demnach hat man also

$$p = (W_1 - w_1) \frac{\sin(\iota + \eta_1 + \alpha_1)}{\cos(\eta_1 + \alpha_1 + \vartheta_1)} + (W_2 - w_2) \frac{\sin(\iota + \eta_2 + a_2)}{\cos(\eta_2 + \alpha_2 + \vartheta_2)}$$

und nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente

**Trägheitsmoment in Beziehung zu demjenigen Punkte seines Umfanges darstellen, um welchen dasselbe in jedem Augenblicke seiner Bewegung im Begriffe ist, sich zu drehen (§. 79).**

---

$$w_1 = q\,\frac{c_2}{c_1 + c_2} = q\,\frac{c_2}{c},$$

$$w_2 = q\,\frac{c_1}{c_1 + c_2} = q\,\frac{c_1}{c},$$

wenn man $c_1 + c_2$ oder den horizontalen Abstand der Vertikalen $C_1 A_1$ und $C_2 A_2$ von einander mit $c$ bezeichnet. Nun findet man aber leicht, daß die Komponenten $p$ und $q$ von $P$ resp.

$$p = P\,\frac{\cos(\iota + \vartheta)}{\cos(\vartheta_1 - \iota)} \text{ und } q = P\,\frac{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}{\cos(\vartheta_1 - \iota)}$$

sind. Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, und löst dieselbe für $P$ auf; so ergibt sich für den Werth der gesuchten Zugkraft in der Richtung $L'P'$, wenn man die Koeffizienten

$$\frac{\sin(\iota + \eta_1 + \alpha_1)}{\cos(\eta_1 + \alpha_1 + \vartheta_1)} \text{ und } \frac{\sin(\iota + \eta_2 + \alpha_2)}{\cos(\eta_2 + \alpha_2 + \vartheta_1)},$$

welche in Beziehung zu dem Neigungswinkel $\vartheta$ der Zugkraft gegen die Straße, konstant sind, resp. mit $A_1$ und $A_2$ bezeichnet,

$$P = (A_1 W_1 + A_2 W_2)\,\frac{\cos(\vartheta_1 - \iota)}{\cos(\iota + \vartheta) + \left(\frac{A_1 c_2 + A_2 c_1}{c}\right)\sin(\vartheta + \vartheta_1)}.$$

Dieser Werth von $P$ ist kleiner, als der Werth $A_1 W_1 + A_2 W_2$, welchen man erhält, wenn die Zugkraft in der Richtung $s_2 s_1$ wirkt; derselbe wird ein Minimum, wenn der Nenner des vorstehenden Bruches ein Maximum wird. Dieses findet für denjenigen Werth des Winkels $\vartheta$ statt, welcher durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\left(\frac{A_1 c_2 + A_2 c_1}{c}\right)\cos\vartheta_1 - \sin\iota}{\left(\frac{A_1 c_2 + A_2 c_1}{c}\right)\sin\vartheta_1 + \cos\iota},$$

gegeben ist. Wenn die Vorder- und Hinterräder einander gleich sind; so wird $A_1 = A_2$, $\vartheta_1 = 0$, und der vorstehende Werth von $\operatorname{tang}\vartheta$, welcher einem Minimum der Zugkraft entspricht, reduzirt sich auf

$$\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang}(\eta + \alpha), \text{ sodaß}$$

$$\vartheta = \eta + \alpha$$

**wird, wie bei einem zweirädrigen Wagen** (§. 279).

Bezeichnet daher $\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades um diesen Punkt in irgend einem Augenblicke, U die in diesem Augenblicke in dem Rade angehäufte Arbeit und $\mu$ das Gewicht

---

Für den zweiten und dritten Fall, wo die Richtung der Zugkraft **P** die Mittellinie $s_1 s_2$ vor dem Punkte $s_1$ oder hinter dem Punkte $s_2$ durchschneidet, nimmt die Aufgabe gewissermaaßen eine unbestimmte Form an. Zuvörderst leuchtet ein, daß wenn $L''P''$ die Richtung der Zugkraft ist, zwischen den Kräften **P**, $W_1$, $R_1$, $W_2$, $R_2$ nur dann Gleichgewicht eintreten kann, wenn das Zugthier in der vertikalen Richtung $P''P$ von oben nach unten einen Druck ausüben kann. Nennt man diesen Druck $w_3$; so muß die vertikale Theilkraft von **P** $q = P\dfrac{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}{\cos(\vartheta_1 - \iota)}$ auf die drei Punkte **P**, $C_1$ und $C_2$ vertheilt werden, und die Theilkraft $p = P\dfrac{\cos(\iota + \vartheta)}{\cos(\vartheta_1 - \iota)}$ in der Richtung der Linie $s_2 s_1$ muß den Kräften $W_1 - w_1$, $R_1$, $W_2 - w_2$, $R_2$ das Gleichgewicht halten. Setzt man, wie in der Note zu §. 279, $s_1 P = l$, und $L'' s_1 = c_1$, $L'' s_2 = c_2$, $C_1 C_2 = c_2 - c_1 = c$; so hat man zur Bestimmung der Größen $w_1$, $w_2$, $w_3$ die Gleichung

$$w_1 + w_2 + w_3 = q,$$

und nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente, wenn man die Momente dieser Kräfte für den Punkt $L''$ nimmt

$$(l - c_1) w_3 = c_1 w_1 + c_2 w_3.$$

Da sich zu der Bestimmung der drei unbekannten Größen $w_1$, $w_2$, $w_3$ nur zwei Gleichungen darbieten; so sieht man, daß die Vertheilung der Kraft $q$ auf die drei Punkte P, $C_1$ und $C_2$ eine unbestimmte Aufgabe einschließt. In der Wirklichkeit geht diese Vertheilung wegen der Biegsamkeit der Verbandstücke zwischen diesen Punkten zwar ganz bestimmt vor sich; will man sich jedoch nicht in die verwickelten Untersuchungen über die Wirkung der Elastizität dieser Stücke einlassen; so kann man der Kürze wegen annehmen, die Vertheilung gehe in der Art vor sich, daß die beiden Kräfte $w_1$ und $w_2$ sich umgekehrt zu einander verhalten, wie die Abstände $c_1$ und $c_2$.

Unter dieser Voraussetzund ergeben die beiden vorstehenden Gleichungen, wenn man damit die Beziehung $c_1 w_1 = c_2 w_2$ verbindet,

$$w_1 = q\frac{c_2(l - c_1)}{c_1(l - c_1) + c_2(l + c_2)}, \quad w_2 = q\frac{c_1(l - c_1)}{e_1(l - c_1) + c_2(l + c_2)}$$

und für den Druck, welchen das Zugthier in vertikaler Richtung von unten nach oben erleidet und in dieser Richtung von oben nach unten außer der Zugkraft P noch hervorbringen muß,

$$w_3 = q\frac{2 c_1 c_2}{c_1(l - c_1) + c_2(l + c_1)}.$$

Substituirt man den vorstehenden Werth von $w_1$ und $w_2$ in die frühere allgemeine Gleichung; so erhält man nach gehöriger Entwickelung den gesuchten Werth für die Zugkraft P. Derselbe wird mit dem früheren ganz übereinstimeiner jeden Kubikeinheit seiner Masse; so hat man nach §. 75 $U = \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{\mu}{g}(Mr + J) = \frac{1}{2}\frac{\mu}{g}M(\alpha r)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}J$. Stellt man ferner mit V die Geschwindigkeit der Axe des Rades dar; so ist $\alpha r = V$ und daher

$$U = \frac{1}{2}\frac{\mu}{g}MV^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\mu}{g}J.$$

Da $\alpha$ offenbar die Winkelgeschwindigkeit des Rades sein würde, wenn sein Mittelpunkt fest wäre und sein Umfang sich mit derselben Geschwindigkeit umdrehete, wie er es bei der rollenden Bewegung des Rades thut; so folgt, daß die gesammte in dem rollenden Rade angehäufte Arbeit gleich der Summe von der ist, welche in demselben angehäuft sein würde, wenn es sich nur mit seiner fortschreitenden Bewegung bewegt hätte, und der, welche in demselben angehäuft sein würde, wenn es sich nur mit seiner Umdrehungsbewegung bewegt hätte. Bezeichnet man den Drehungshalbmesser (§. 80) mit $k$; so ist $J = Mk^2$ und demnach

---

men, wenn man in jener Gleichung $\frac{c_1(l - c_1) + c_2(l + c_2)}{l - c_1}$ an die Stelle von $c$ setzt.

Endlich sieht man leicht ein, daß wenn die Richtung der Zugkraft **P** die Linie $s_1 s_2$ hinter dem Punkte $s_2$ schneidet, das Zugthier in der vertikalen Richtung **P″ P** von oben nach unten einen Druck $= w_3$ auszuhalten oder einen solchen in entgegengesetzter Richtung von unten nach oben hervorzubringen hat. Die Kräfte $w_1$, $w_2$, $w_3$ werden hier durch dieselben Ausdrücke, wie in dem eben betrachteten Falle dargestellt, wenn die Größen $c_1$, $c_2$ und $l$ ähnliche Bedeutungen beibehalten.

Aus diesen Untersuchungen und denen der Note zu §. 279 geht hervor, daß resp. bei einem zwei- oder vierrädrigen Wagen die Richtung der Zugkraft durch den Punkt $s$ oder durch irgend einen Punkt der begränzten Linie $s_1 s_2$ gehen müsse, wenn die Zugthiere in den Punkten, wo sie das Gestell des Wagens tragen, keinen vertikalen Druck erleiden sollen, und daß die vortheilhafteste Neigung der Zugkraft gegen die Fahrbahn sehr nahe $= \eta + \alpha$ ist, worin $\eta$ und $\alpha$ diejenigen Werthe aus den Gleichungen (369) und (365) bezeichnen, welche man erhält, wenn man darin die Mittelwerthe der Dimensionen der Vorder- und Hinterräder substituirt; daß endlich die Zugthiere einen vertikalen Druck von oben nach unten oder von unten nach oben auszuhalten haben, jenachdem die Richtung der Zugkraft bei einem zweirädrigen Wagen die Linie $O s R$ jenseit oder diesseit des Punktes $s$ und bei einem vierrädrigen Wagen die Linie $s_1 s_2$ jenseit des Punktes $s_2$ oder diesseit des Punktes $s_1$ durchschneidet. Die Punkte $s$ fallen nicht mit den Mittelpunkten der Axen zusammen, sondern liegen um $\frac{\varrho \sin \varphi}{\sin(\iota + \eta + \alpha)}$ unter derselben.

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu}{g} M \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) V^2 \ldots . (374)$$

Die in dem Rade angehäufte Arbeit ist also dieselbe, als wenn sich dasselbe nur mit einer fortschreitenden Bewegung, aber mit einer größeren, durch $\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) V^2$ dargestellten Geschwindigkeit bewegt hätte.

## §. 281a. Versuche von Morin über die Bewegung der Fuhrwerke.

1) Die Zugkraft steht mit der Belastung in geradem und mit dem Halbmesser des Rades in ungekehrtem Verhältnisse.
2) Auf einer gepflasterten oder auf einer sehr festen macadamisirten Straße ist der Widerstand von der Breite der Radfelgen unabhängig, wenn dieselbe mehr als 3 bis 4 Zoll beträgt.
3) Bei der Bewegung der Zugthiere im Schritte ist die Zugkraft unter sonst gleichen Umständen für Wagen mit Federn und ohne Federn dieselbe.
4) Auf gepflasterten und festen macadamisirten Straßen wächst die Zugkraft mit der Geschwindigkeit, indem die Zunahme der Zugkraft den Zunahmen der Geschwindigkeit über eine Geschwindigkeit von 3,18 Fuß in der Sekunde oder $\frac{1}{2}$ Meile in der Stunde proportional sind. Die gleichen Zunahmen der Zugkraft, welche hiernach gleichen Zunahmen der Geschwindigkeit entsprechen, sind um so geringer, je weicher die Fahrbahn und je weniger starr das Fuhrwerk oder je besser dasselbe in Federn gehängt ist.
5) Auf weichen Erdwegen oder auf Sand oder Rasen, oder auf Straßen, welche frisch und etwas hoch mit Kies bedeckt sind, ist die Zugkraft von der Geschwindigkeit unabhängig.
6) Auf einem guten, dicht zusammengearbeiteten Pflaster von behauenen Steinen beträgt die Zugkraft im Schritte nicht mehr, als $\frac{3}{4}$ von der, welche unter sonst gleichen Umständen auf der besten macadamisirten Steinbahn erforderlich ist; im Trabe ist sie derselben gleich.
7) Die Abnutzung der Fahrbahn ist in allen Fällen größer, je

kleiner die Halbmesser der Räder sind, auch ist sie für Wagen ohne Federn größer, als für Wagen mit Federn.

## Von dem Zustande der beschleunigten oder verzögerten Bewegung einer Maschine.

§. 282. Nimmt man an, die auf den Rezeptor einer Maschine verrichtete Arbeit $U_1$ sei größer, als die Summe der an dem Operator hervorgebrachten Nutzarbeit $U_2$ und der auf die schädlichen Widerstände der Maschine verwendeten Arbeit; so hat man nach Gleichung (117)

$$U_1 = AU_2 + BS_1 + \frac{1}{2g}(V^2 - V_1{}^2)\Sigma w\lambda^2,$$

worin $V_1$ und $V$ resp. die Geschwindigkeit des Rezeptors der Maschine im Anfange und am Ende der Entwickelung der Arbeit $U_1$ und $\Sigma w\lambda^2$ den Koeffizienten für die Gleichmäßigkeit der Bewegung bezeichnet. Stellt man nun mit $S_1$ den Raum dar, durch welchen die Arbeit $U_1$, und mit $S_2$ den Raum, durch welchen die Arbeit $U_2$ verrichtet wird, und differenziirt die vorstehende Gleichung in Beziehung zu $S_1$; so erhält man

$$\frac{dU_1}{dS_1} = A\frac{dU_2}{dS_2}\cdot\frac{dS_2}{dS_1} + B + \frac{1}{g}V\frac{dV}{dS_1}\Sigma w\lambda^2.$$

Es ist aber $\frac{dU_1}{dS_1} = P_1$ (§. 51), wenn $P_1$ die treibende Kraft darstellt; ferner $\frac{dU_2}{dS_2} = P_2$, wenn $P_2$ den Nutzwiderstand darstellt; ferner $V\frac{dV}{dS_1} = V\frac{dV}{dt}\cdot\frac{dt}{dS_1} = V\cdot\frac{dV}{dt}\cdot\frac{1}{V} = \frac{dV}{dt} = f$ (Gleichung 72), wenn $f$ den Zuwachs an Geschwindigkeit darstellt, welchen der Rezeptor in der Sekunde empfängt (§. 95). Bezeichnet man daher das Verhältniß $\frac{dS_2}{dS_1}$ zwischen den Räumen, welche resp. der Operator und der Rezeptor in Ein und derselben unendlich kleinen Zeit beschreibt, mit $L$; so hat man

$$P_1 = ALP_2 + B + \frac{f}{g}\Sigma w\lambda^2 \ldots \quad (375)$$

und hieraus folgt für die wirkliche Zunahme der Geschwindigkeit des Rezeptors in der Sekunde, wenn die Kräfte $P_1$ und $P_2$ konstant sind, oder, im Fall diese Kräfte veränderlich sind, für die Zunahme der Geschwindigkeit, welche in irgend einer gegebenen Sekunde stattfinden würde, wenn jene Kräfte während der Dauer dieser Sekunde die Werthe behielten, welche sie im Anfange derselben besaßen,

$$f = g \cdot \frac{P_1 - ALP_2 - B}{\Sigma w \lambda^2} \ldots . (376)$$

§. 283. Bestimmung des Koeffizienten für die Gleichmäßigkeit der Bewegung.

$\Sigma w \lambda^2$ stellt die Summe der Gewichte aller in Bewegung begriffenen Massentheilchen der Maschine dar, nachdem ein jedes derselben in das Quadrat des Verhältnisses seiner Geschwindigkeit zu der des Operators multiplizirt ist, eine Summe, welche (§. 151) der Koeffizient für die Gleichmäßigkeit der Bewegung genannt ist.

Besteht nun die Maschine aus mehreren Theilen oder Elementen, welche sich um feste Axen drehen, und sind $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die Perpendikel von diesen Axen auf die Richtungen, in welchen diese Elemente die treibende Kraft von den ihnen in der Reihe unmittelbar vorhergehenden empfangen, ebenso $b_1$, $b_2$, $b_3 \ldots$ die Perpendikel von denselben Axen auf die Tangenten der gemeinschaftlichen Berührungsflächen dieser Elemente in den Punkten, wo sie den zunächst folgenden die treibende Kraft mittheilen; so leuchtet ein, daß während der erste Rezeptor den sehr kleinen Raum $\triangle S_1$ beschreibt, der Berührungspunkt zwischen dem $p$ ten und $(p+1)$ ten Elemente oder Maschinentheile in jener Reihe einen Raum beschreiben wird, welcher durch

$$\frac{b_1 b_2 \ldots b_p}{a_1 a_2 \ldots a_p} \triangle S_1$$

dargestellt ist. Hieraus folgt, daß der Raum, welchen ein um die Längeneinheit von der Axe des $p$ ten Maschinenelementes abstehendes Massentheilchen in derselben Zeit beschreibt, wo der Rezeptor den Raum $\triangle S_1$ durchläuft, durch

$$\frac{1 . b_1 b_2 \ldots a_{p-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p} \triangle S_1,$$

und der Raum, welchen ein in der Entfernung $\varrho$ von der Axe dieses Maschinenelementes liegendes Massentheilchen beschreibt, während der Rezeptor den Raum $\triangle S_1$ durchläuft, durch

$$\frac{1 . b_1 b_2 \ldots b_{p-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p} . \varrho \triangle S_1,$$

mithin das Verhältniß $\lambda$ dieses Raumes zu dem von dem Rezeptor beschriebenen Raume durch

$$\lambda = \left(\frac{1 . b_1 b_2 \ldots b_{p-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p}\right) \varrho$$

ausgedrückt wird.

Die Summe $\Sigma w \lambda^2$ kann daher für dieses Eine Maschinenelement durch

$$\left(\frac{1 . b_1 b_2 \ldots b_{p-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p}\right)^2 \Sigma w \varrho^2$$

dargestellt werden.

Bezeichnet man nun mit $J_p$ das Trägheitsmoment des $p$ ten Maschinenelementes und mit $\mu_p$ das Gewicht einer jeden Kubikeinheit seiner Masse; so wird jener Theil des Werthes von $\Sigma w \lambda^2$, welcher von diesem Elemente abhängt, durch

$$\left(\frac{1 . b_1 b_2 \ldots b_{p-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p}\right)^2 J_p \mu_p$$

dargestellt.

Da sich das Vorhergehende von einem jeden anderen Elemente der Maschine sagen läßt; so hat man für den allgemeinen Ausdruck des Koeffizienten für die Gleichmäßigkeit der Bewegung in dem vorausgesetzten Falle

$$\Sigma w \lambda^2 = \Sigma \left(\frac{1 . b_1 b_2 \ldots b_{p-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p}\right)^2 J_p \mu_p \ldots . (377)$$

Der Werth von L in Gleichung (375) und (376) ist offenbar

$$L = \frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \ldots . (378)$$

§. 284. **Bestimmung des Druckes in dem Berührungspunkte irgend zweier Elemente einer Maschine, welche eine beschleunigte oder verzögerte Bewegung besitzt.**

Bezeichnet man mit $p_1$ den Druck in dem Berührungspunkte des ersten und zweiten Elementes, mit $p_2$ den im Berührungspunkte des zweiten und dritten Elementes der Maschine u. s. f.; so hat man nach Gleichung (375), wenn man beachtet, daß $\mathbf{P}_1$ und $p_1$ Kräfte sind, welche an Ein und demselben Elemente angebracht sind, daß man daher in diesem Falle den Koeffizienten $\Sigma w \lambda^2$ nur für dieses einzige Element zu nehmen hat, sodaß derselbe durch $\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \mu_1 \mathbf{J}_1$ dargestellt wird, während $\mathbf{L}$ in diesem Falle $= \frac{b_1}{a_1}$, und wenn man die Reibung vernachlässigt, also $\mathbf{A}=1$ und $\mathbf{B}=0$ setzt,

$$\mathbf{P}_1 = \frac{b_1}{a_1} p_1 + \frac{f}{g} \; \frac{\mu_1 \mathbf{J}_1}{a_1{}^2}$$

ist. Substituirt man hierin den Werth von $f$ aus Gleichung (376) und lös't die Gleichung für $p_1$ auf; so erhält man

$$p_1 = \frac{a_1}{b_1} \left\} \mathbf{P}_1 - \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \mu_1 \mathbf{J}_1 \left(\frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{L}\mathbf{P}_2}{\Sigma w \lambda^2}\right) \right\{ , \ldots . (379)$$

worin der Werth von $\mathbf{L}$ durch Gleichung (378) und der Werth von $\Sigma w \lambda^2$ durch Gleichung (377) bestimmt ist.

Verfährt man ebenso mit dem zweiten Maschinenelemente, indem man beachtet, daß die auf dieses Element angebrachten Kräfte $p_1$ und $p_2$ sind; so hat man

$$p_1 = \frac{b_2}{a_2} p_2 + \frac{f_1}{g} \; \frac{\mu_2 \mathbf{J}_2}{a_2{}^2},$$

worin die Größe $f_1$, welche die Geschwindigkeitszunahme des Angriffspunktes von $p_1$ in der Sekunde darstellt, offenbar gleich $\frac{b_1}{a_1} f$ ist. Substituirt man daher in die vorstehende Gleichung den Werth von $f$ aus Gleichung (376); so wird dieselbe

$$p_1 = \frac{b_2}{a_2} p_2 + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{P_1 - LP_2}{a_2{}^2 \Sigma w \lambda^2} \mu_2 J_2,$$

und hieraus folgt, wenn man für $p_1$ den Werth aus Gleichung (379) setzt und alsdann für $p_2$ auflöst,

$$p_2 = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \left\{ P_1 - \left[ \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \mu_1 J_1 + \left(\frac{1 . b_1}{a_1 a_2}\right)^2 \mu_2 J_2 \right] \left( \frac{P_1 - LP_2}{\Sigma w \lambda^2} \right) \right\} \quad \ldots . (380)$$

Auf eine ähnliche Weise findet man für den Druck in dem Berührungspunkte zwischen dem dritten und vierten Maschinenelemente

$$p_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3} \left\{ P_1 - \left[ \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \mu_1 J_1 + \left(\frac{1 . b_1}{a_1 a_2}\right)^2 \mu_2 J_2 + \left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{b_1 b_2}{a_2 a_3}\right)^2 \mu_3 J_3 \right] \left( \frac{P_1 - L P_2}{\Sigma w \lambda^2} \right) \right\}$$

u. s. f. für die übrigen Elemente der Maschine.

Man erkennt leicht, daß wenn in den Gleichungen (375) und (376) für **A** und **B** Werthe angenommen werden, welche die Koeffizienten des Models in Beziehung zu den einzelnen Elementen der Maschine und zu der *ganzen* Maschine darstellen, der Einfluß der Reibung durch ein dem vorstehenden ganz ähnliches Verfahren in die Rechnung hätte mit eingeschlossen werden können.

---

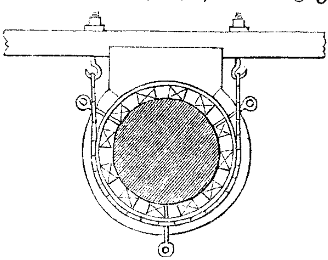
# Zusätze zum dritten Abschnitte.

## Messung der von der treibenden Kraft auf eine Maschine ausgeübten Arbeit.

*Die dynamometrische Bremse.* Es ist zuweilen von Wichtigkeit, durch ein direktes Verfahren die Größe der Arbeit zu messen, welche die treibende Kraft an einer Maschine während einer Periode hervorbringt, wo sich die Maschine mit einer bekannten gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt. Die Instrumente, welche man zu diesem Zwecke gewöhnlich anwendet, gründen sich auf das von de Prony zuerst angegebene Prinzip, nach welchem man an dem Umfange der Welle, welche die Wirkung der treibenden Kraft unmittelbar empfängt, nachdem ihre Verbindung mit den übrigen Maschinentheilen gelös't ist, einen so starken Druck und demzufolge eine so starke Reibung erzeugt, daß die Welle genau dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit annimmt, mit welcher sie sich vorher während der Arbeit der Maschine bewegte.

Die von dieser Welle auf die Maschine fortgepflanzte Arbeit ist alsdann offenbar gleich der Arbeit, welche erforderlich ist, um die eben gedachte Reibung am Umfange der Welle zu überwinden.

In der seitstehenden Figur ist die von Egen verbesserte dynamometische Bremse dargestellt. Dieselbe besteht aus einem eisernen Ringe, welcher vermittelst einiger Schrauben nach der Axe der Welle zentrirt und alsdann durch Keile, welche zwischen seinem innern Umfange und der Oberfläche der Welle eingetrieben werden, auf der Letzteren befestigt wird. Um diesen Ring wird eine eiserne Kette von platten Gliedern gelegt und mit ihren Enden über zwei Haken gehängt, welche durch einen längeren Hebelarm gesteckt und oberhalb mit Schrauben und Muttern versehen sind, sodaß dieselben nach Gefallen stärker oder schwächer angezogen werden können. Der Hebel ruhet vermittelst eines Kissens auf dem eisernen Ringe und kann an dem Einen seiner beiden Enden durch Gewichte beliebig beschwert werden.



Hat man nun die eben beschriebene Bremse auf der von den übrigen Maschinentheilen getrennten Welle befestigt und durch allmählige Vermehrung oder Verminderung des aufgehängten Gewichtes und durch gleichzeitiges Anziehen oder Nachlassen der Kette die gewünschte Geschwindigkeit der Welle hervorgebracht; so sei

$a$ der äußere Halbmesser des eisernen Ringes der Bremse,
$b$ der horizontale Abstand des Schwerpunktes des an dem Hebel aufgehängten Gewichtes,
$W$ die Größe dieses Gewichtes,

**F** der Betrag der an dem Umfange des Ringes erzeugten Reibung,
$n$ die Anzahl der Umdrehungen, welche die Welle in der Minute macht.

Da zwischen dem Gewichte **W** und der Reibung **F** offenbar Gleichgewicht stattfinden muß; so hat man nach dem Prinzipe der Gleichheit der Momente zuvörderst

$$\mathrm{F}a = \mathrm{W}b.$$

Das Gewicht der Bremse selbst kommt hierbei nicht in Betracht, da dieselbe in Beziehung zu einer durch die Axe der Welle gelegten Vertikalebene symmetrisch ist.

Da ferner der äußere Umfang des Ringes in der Minute den Raum $n.2\pi a$ durchläuft; so ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Reibung **F** an jenem Umfange während Einer Minute zu überwinden $= n2\pi a.\mathrm{F}$, d. i. wegen der obigen Beziehung $= n.2\pi b\mathrm{W}$. Dieses ist nun auch der Werth der Arbeit, welcher von der Welle in der Minute auf die Maschine fortgepflanzt werden muß, wenn die Erstere mit der Maschine in Verbindung gesetzt ist und sich mit der angenommenen Geschwindigkeit drehet. Man hat daher für die von der Welle in der Sekunde übergeführte Arbeit $\frac{n2\pi b\mathrm{W}}{60} =$

$$\frac{n\pi}{30} b\mathrm{W},$$

ein Werth, welcher sich durch Beobachtung der Größen **W**, $b$ und $n$ unmittelbar berechnen läßt.

## Allgemeine Bemerkungen über die Wirkung der treibenden Kräfte.

Wenn **P** den Druck bezeichnet, mit welchem irgend eine treibende Kraft auf den Rezeptor einer Maschine einwirkt, und **V** die Geschwindigkeit des Angriffspunktes dieser Kraft ist; so stellt

$$\mathrm{U} = \mathrm{PV}$$

die Arbeit der treibenden Kraft in der Zeiteinheit dar. Ist nun die treibende Kraft Eine von den zur Bewegung von Maschinen sich eignenden Naturkräften; so lehrt die Erfahrung, daß die Größen **P** und **V** voneinander abhängig sind, und daß es zwischen den Werthen dieser Größen immer eine bestimmte Beziehung gibt, für welche das Produkt **PV** ein Maximum wird. Diese Beziehung ist zugleich von dem Wesen der Kraft und der Natur der Maschine abhängig, und kann in jedem speziellen Falle ermittelt werden. Um von einer gegebenen treibenden Kraft den größtmöglichen Nutzeffekt zu erhalten, ist es demnach nothwendig, die Konstruktion der Maschine dergestalt einzurichten, daß die eben erwähnte Beziehung zwischen **P** und **V**, welche dem Maximum des Produktes **PV** entspricht, realisirt werde.

Wenn die Kräfte der Menschen und Thiere zur Bewegung von Maschinen verwendet werden; so ist bei der Bestimmung ihrer Leistungen als drittes Element noch die tägliche Arbeitszeit zu berücksichtigen. Bezeichnet man dieselbe mit **T**; so kommt es darauf an, die Konstruktion der Maschine dergestalt einzurichten, und den Betrieb derselben so zu reguliren, daß die tägliche Leistung oder das Produkt

$$\mathbf{PVT}$$

ein größtmögliches werde.

Da die gemeinschaftlichen Werthe dieser drei Größen **P**, **V** und **T** bei animalischen Motoren von mancherlei Elementen abhängig sind, welche sich der strengen mathematischen Betrachtung entziehen; so muß man sich behuf der Beurtheilung der günstigsten Verhältnisse mit allgemeinen Näherungswerthen begnügen, welche sich als mittlere Resultante aus den Beobachtungen der Praxis ergeben haben. Diese Werthe sind in der Tabelle **VII** am Ende dieses Werkes zusammengestellt.

# Druckfehler.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 21 | Zeile | 9 | von unten | lies | $P'$ statt $A'$. |
| » | 21 | » | 8 | » » | » | $P''$ » $A''$. |
| » | 58 | » | 8 | » » | » | $\pi$ » $2\pi$. |
| » | 220 | » | 10 | von oben | » | von $v_1$ und $V_1$ statt und $v_1$ von $V_1$. |
| » | 422 | » | 5 | von unten | » | $\frac{1}{r_4} \pm \frac{1}{r_5}$ statt $\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}$. |
| » | 422 | » | 4 | » » | » | $\frac{1}{r_{2p}} \pm \frac{1}{a_2}$ statt $\frac{1}{r_{2p}} + \frac{1}{a_2}$. |
| » | 423 | » | 16 | von oben | » | $\varrho_{p+1}$ statt $\varrho_{+p1}$. |