Poinsot's
Elemente der Statik,

als

Lehrbuch

für den öffentlichen Unterricht und zum Selbststudium.

Nach

der fünften Ausgabe

aus

dem Französischen übersetzt

von

Dr. J. G. Hartmann.

Berlin, bei August Rücker.

1831.

Vorwort.

Wir legen hier dem mathematischen Publicum eine Übersetzung der neuesten Ausgabe von Poinsot's „Statik" vor, und glauben deshalb keiner Rechtfertigung zu bedürfen, wenigstens bei Denjenigen nicht, die in diesem Zweige der Mathematik zu unterrichten haben, oder sich ihn durch Selbststudium bekannt machen wollen. Die Vorzüge dieses Lehrbuches vor ähnlichen sind längst allgemein anerkannt; einmal enthält es neue Principien, und zwar Principien, die in der Natur der Sache begründet sind. Bisher suchte man Alles auf Kräfte zurückzuführen, die in geraden Linien nach den Richtungen dieser Geraden auf die Angriffspuncte wirken, stellte die Zusammensetzung solcher Kräfte als das einzige statische

Princip auf und suchte alle andern Lehren der Mechanik aus diesen progressiv wirkenden Kräften abzuleiten, wenn wir uns anders dieses Ausdrucks bedienen dürfen; denn wenn man auch von Momenten sprach, so war das mehr ein analytischer Ausdruck, als daß man sich darunter eine besondere Classe von Kräften gedacht hätte. Um nun daraus die Rotationsbewegungen erklären zu können, sah man sich zu weitläufigen Demonstrationen und zu Hülfsmitteln des Calculs genöthigt, die einen großen Theil der schönsten mechanischen Lehren für die Elemente unzugänglich machten. Wie überhaupt beide Arten von Kraftwirkungen mit einander vergleichbar sein möchten, ist so wenig einzusehen, wie progressive und drehende Bewegung, gerade Linie und Winkel sich aus einander ermitteln lassen. Poinsot stellte die zweite Classe von Kraftwirkungen neben jener ersten als das zweite statische Grundprincip auf, indem er zeigte, daß die Kräftepaare (couple), wie er sie nennt, nicht ein besonderer Fall von Kräften, jenem ersten untergeordnet, sondern ein wesentliches Element sind, das den mechanischen Wissenschaften bisher fehlte; daß die Producte, welche man Momente nennt, nur das Maaß dieser eigenthümlichen Kraftwirkungen sind, und daß mithin ihre Betrachtung eben so nothwendig in die Statik gehört, als die der Momente nicht aus ihr verbannt werden kann. Er zeigte ihre Zusammensetzung, die der Zusammensetzung der einfachen Kräfte ganz analog ist, und eben so der Zusammensetzung der Rotationsbewegungen wie diese der Zusammensetzung der Transpositionsbewegungen entspricht. Da die Vereinigung beider Bewegungen an einem nicht als mathematischen Punct betrachteten Körper nothwendig ist, wenn wir uns überhaupt die Bewegung eines Körpers vorstellen wollen: so ist klar, daß das Parallelogramm der Kräfte und das Parallelogramm der Paare beide Principien sind, die zu einer vollständigen Betrachtuug der Bewegung nothwendig gehören, neben einander bestehen müssen und aus der Natur der Sache hervorgehen.

Dadurch nun (und das ist der zweite wesentliche Vortheil dieses Lehrbuches vor andern) hat Poinsot ein Feld der schönsten Untersuchungen geöffnet, indem durch sein Princip und seine Methode die verwickeltsten Lehren so elementar werden, daß sie ohne Bedenken zwischen den übrigen statischen Lehren verflochten und verstanden werden können. Durch ein ganz einfaches Raisonnement zeigt er ohne Hülfe von höhern Rechnungen die Euler'schen Sätze über die Summe der Momente eines Systems von Kräften in Bezug auf verschiedene Axen, löst das Paradoxon über die Roberval'sche Wage u. s. w.

Vorzüglich geeignet, die Vortrefflichkeit seiner Methode einzusehen, ist die Abhandlung, welche Poinsot im Jahre 1804 im Institute vorgelesen und den seitdem erschienenen Ausgaben seiner „Statik" als einen Anhang hinzugefügt hat; er zeigt darin auf ganz elementare Weise die Eigenschaften der unveränderlichen Ebene von Laplace, so wie die Theorie der größten Momente und Flächenräume, von denen er beweist, daß die meisten bisher über sie aufgestellten Lehrsätze weiter nichts sind, als Theoreme, die in den Definitionen selbst liegen, und die in sich zusammenfallen müssen, sobald ihnen das wahre Princip zum Grunde gelegt wird. — Eben so interessant ist seine Note, am Schlusse der Abhandlung, über die doppelte Bewegung der Himmelskörper. Statt daß man sich bisher bemühte, diese Erscheinung durch die Voraussetzung eines einzigen Stoßes zu erklären, den der Körper nach einer Richtung, die nicht genau durch seinen Schwerpunct geht, erlitten haben soll, zeigt Poinsot, daß diese Annahme nicht nur sehr unwahrscheinlich und mangelhaft ist, sondern auch daß die Erscheinung der doppelten Bewegung der Himmelskörper durchaus keiner Erklärung bedarf, indem sie die natürlichste und allgemeinste Bewegung aller Körper ist, und daß man im Gegentheile zu sehr particulairen Voraussetzungen seine Zuflucht nehmen müßte, falls die Himmelskörper neben der fortschreitenden Bewegung in ihrer Bahn nicht auch um ihre Axe rotirten.

Am wichtigsten ist die Abhandlung über die Theorie und Bestimmung des unbeweglichen Aequators im Weltsysteme, die gleichsam eine Fortsetzung der vorigen Abhandlung ist. Poinsot hat sie im März 1828 der Akademie vorgelegt, und sie der fünften Ausgabe seiner „Statik" vom Jahre 1830 beigefügt. Er zeigt darin, daß die Ebene, welche Laplace als die unveränderliche Ebene im Weltsysteme bezeichnet hatte, um darauf auch in den fernsten Zeiten die astronomischen Beobachtungen beziehen und sie so genau mit den frühern vergleichen zu können, in der That nicht unveränderlich ist, weil Laplace die einzelnen Planeten als massive Puncte betrachtet, in denen er sich die Gesammtmasse des Planeten mit seinen Trabanten vereinigt denkt, und so auf die Flächenräume keine Rücksicht nimmt, welche aus der

Rotation der Trabanten um ihre Hauptplaneten und aus der Rotation dieser Planeten selbst um ihre Axen entspringen; daß mithin diese Ebene zu dem Zwecke, die in verschiedenen Zeiten gemachten Beobachtungen am Himmel mit einander vergleichen zu können, nicht tauglich ist. Poinsot bestimmt dafür eine andere Ebene, wobei er auf jene Rotationen Rücksicht nimmt; er nennt sie den Aequator des Weltsystems und zeigt die Regeln, nach welchen man die Pole dieses Aequators findet u. s. w. Wie weit sich der Poinsot'sche Aequator von der Laplace'schen unveränderlichen Ebene entferne, erhellt zur Genüge aus der Bestimmung des Erstern, daß der Fehler des Letztern so bedeutend sei, als habe Laplace bloß für die Nichtbeachtung der Rotation der Sonne um ihre Axe, unter Voraussetzung einer gleichförmigen Dichtigkeit derselben, 25 Erdkugeln fortgelassen, die in gleicher Entfernung mit unserer Erde um die Sonne rotirten; dadurch weicht denn diese Ebene von dem Poinsot'schen Aequator in der Neigung gegen die Ekliptik um mehre Minuten, und in der Länge ihres aufsteigenden Knotens um mehre Grade ab u. s. w. Auffallend möchte es scheinen, daß Laplace und die andern großen Mathematiker, welche seine „himmlische

Mechanik" zergliederten, eine so bedeutende Größe übersahen, hätte nicht Poinsot zugleich gezeigt, daß der Grund dieses Irrthums einzig in der mangelhaften Theorie der Momente zu suchen sei. — So wichtig ist es, eine Lehre aus den richtigen Gesichtspuncten zu betrachten! —

Gern hätten wir diese Abhandlungen gleichfalls dem Lehrbuche in einer Übersetzung angehängt, allein sie würden das Werkchen um vier Bogen vergrößert und verhältnißmäßig eben so viel vertheuert haben, was wir uns des Umstandes wegen nicht erlauben zu dürfen glaubten, weil die gegenwärtige Übersetzung, wie das Original, den Zweck hat, als Lehrbuch bei öffentlichen Unterrichtsanstalten und für Anfänger zum Selbststudium benutzt zu werden, für die als solche jene Abhandlungen wohl überflüssig gewesen sein würden. Deshalb fielen denn auch die Vorreden des Verfassers fort, die sich zum größten Theile nur auf jene Abhandlungen beziehen.

Was die Übersetzung betrifft, so haben wir uns bemüht, Alles so kurz und klar wiederzugeben als möglich. Über den Ausdruck Kräftepaar dürfen wir uns nicht weiter rechtfertigen, weil er vom Verfasser gebraucht worden ist, und weil auch schon hin und wieder deutsche Gelehrte sich seiner bedient haben, obgleich er das Wesentliche des neuen Princips sehr wenig bezeichnen möchte.

Die Figuren sind auf drei Tafeln zusammengestellt, während sie im Originale deren vier einnehmen, um auch hier möglichst zu sparen.

In dem Inhaltsverzeichnisse sind mehre Artikel mit einem Sterne bezeichnet, und zwar hat sie der Verfasser für Diejenigen markirt, welche in die polytechnische Schule aufgenommen zu werden wünschen, weil die Kenntniß dieser Lehren von ihnen nicht verlangt wird. Da der Anfänger beim ersten Studium der Statik diese Lehren allenfalls ohne Unterbrechung des Zusammenhanges überschlagen kann, um sie später nachzuholen, so haben wir ihnen auch in der Übersetzung die Sternchen vorgesetzt.

Die fünfte Auflage vom Jahre 1830 erhielten wir erst, als das erste und ein Theil des zweiten Capitels gegenwärtiger Übersetzung schon abgedruckt waren. Der Verfasser hat in der neuen Ausgabe einige wichtige Vermehrungen eingeschaltet: in dem noch nicht abgedruckten Theile wurden sogleich diese Veränderungen dergestalt vorgenommen, daß die Übersetzung ganz mit der fünften Auflage übereinstimmt; in dem schon abgedruckten

Theile war dies nicht möglich. Um jedoch unsere Übersetzung auch hier ganz conform mit der neuesten Ausgabe zu machen, haben wir die Vermehrungen hinter diesem Vorworte sämmtlich als Zusätze abdrucken lassen, was um so leichter anging, weil sie, den einzigen Fall §. 60 betreffend abgerechnet, wirklich nur Zusätze sind. Zu §. 60 kommt der Zusatz hinzu, und für §. 61 der nach diesem Zusatze folgende §. 61, welcher einen neuen Beweis des betreffenden Satzes enthält. Dieses Beweises wegen war eine neue Figur nöthig, die unter Fig. 24* auf der dritten Tafel zu finden. Die dabeistehende Fig. 23* findet sich schon im Originale. Macht man diese einzige Abänderung und nimmt dann die unten folgenden Zusätze hinzu, so hat man eine völlig conforme Übersetzung mit der letzten Ausgabe der Poinsot'schen „Statik". In dem übrigen Theile sind die Zusätze gleich mit im Texte; außer einigen unbedeutenden Abänderungen sind diese folgende: §. 155 und §. 165 sind hinzugekommen; der vorletzte Absatz im §. 166 I ist fester bezeichnet, der letzte Absatz, sowie II und III desselben §. hinzugekommen; der vorletzte Absatz im §. 189 ist genauer bestimmt, und der letzte Absatz mit der wirklich angestellten Rechnung hinzugekommen. Will man sich diese

Abänderungen bemerken, so hat gegenwärtige Übersetzung durch Zufall den sonderbaren Vortheil, zwei Auflagen zugleich zu liefern und zu zeigen, wie sorgfältig der Verfasser an der Vervollkommnung eines so wichtigen Lehrbuches arbeite. Wir hoffen deshalb in dieser Beziehung um so eher Entschuldigung zu finden.

Berlin, im Mai 1831.

Der Übersetzer.

Zusätze zum I. und II. Capitel.

Zu §. 11 S. 10.

Nimmt man zur Darstellung dieser Kraft auf ihrer Richtung vom Puncte A aus eine bestimmte Länge AB, so wird immer diese Gerade nach der Seite hin von A aus aufgetragen gedacht, nach welcher der Punct A sich zu bewegen strebt. Sagt man also ganz einfach von einer Kraft, sie werde der Größe und Richtung nach durch eine bestimmte, vom Angriffspuncte ausgehende Gerade dargestellt: so wird dabei immer von selbst verstanden, daß die Kraft den Angriffspunct gegen den Endpunct der sie repräsentirenden Geraden zu zieht.

Man könnte umgekehrt auch annehmen, daß die durch AB dargestellte Kraft den Angriffspunct A abstieße und vom Endpuncte der Geraden AB zu entfernen suchte, und dieses ist allerdings gestattet, weil jene Bestimmung bloß conventionell ist. Hat man jedoch einmal die eine oder die andere Bestimmung gemacht, so muß man dieselbe auch für alle Kräfte der Figur anwenden, damit jede den richtigen Sinn erhalte, und die ausgesprochene Lehre vollkommen bestimmt sei.

Zu §. 16 S. 13.

Dieses Axiom ist die Basis der ganzen Statik. Man könnte es gleichsam als eine Definition oder als ein Postulat betrachten, das keines Beweises bedarf, weil es in dem Begriffe der Kraft als Größe, d. h. als vermehrungs- und verminderungsfähig, begründet ist. Wie sollte man sich auch einen Begriff machen von einer Kraft, die das Doppelte, Dreifache u. s. w. einer andern ist, wenn man sich diese Kraft nicht als die wirkliche Vereinigung von zwei, drei u. s. w. gleichen Kräften denken will, die denselben Punct nach demselben Sinne treiben? — Dieser Begriff ist dem Vorhergehenden überall stillschweigend untergelegt. Übrigens ist dieses Postulat das einzig nöthige der ganzen theoretischen Statik, denn alle folgenden Lehren sind im Grunde nur geometrische.

Zu §. 54. S. 39.

Umgekehrt kann man ein Paar in beliebig viele andere zerlegen, die mit ihm in derselben oder in Parallel-Ebenen liegen. Ein einziges ausgenommen, kann man selbst diese Paare beliebig annehmen, weil nur die Bedingung erfüllt sein muß, daß die Summe der nach einem Sinne wirkenden Paare, weniger der Summe der nach dem entgegengesetzten Sinne wirkenden, dem gegebenen Paare gleich ist.

Zu §. 59 S. 43.

Diese doppelte Beweisart beruht auf der zweifachen Art, wie man die Paare umbilden kann, ehe man sie zerlegt. Einmal gibt man ihnen dieselben Hebelarme mit neuen Kräften, und das andere Mal dieselben Kräfte mit neuen Hebelarmen.

Man könnte den Satz auch noch auf eine dritte Art beweisen, ohne die gegebenen Paare irgend zu verändern. Denn sind $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (Fig. 23*) die beiden Paare senkrecht auf die Ebene des Dreiecks ABC an den respectiven Hebelarmen AB und AC, und nehmen wir an, die Kräfte P und Q in B und C haben gleichen Sinn: so setzen sich diese Kräfte in eine einzige $P + Q$ von demselben Sinne zusammen, die in einem Puncte g der Geraden BC angreift, welchen man findet, wenn man BC im umgekehrten Verhältnisse von P zu Q theilt. Desgleichen setzen sich $-P$ und $-Q$ in eine Kraft $-(P+Q)$ zusammen, die in A angreift. Macht man also $P+Q=R$, so erhält man das resultirende Paar $(R, -R)$, welches an Ag in einer auf das Dreieck ABC senkrechten Ebene wirkt.

Jetzt ziehe man von g aus zu BC und AC zwei Parallelen und vollende so das Parallelogramm Algm; dann ist zu zeigen, daß sich die Momente der drei Paare, nämlich $P.AB$, $Q.AC$ und $R.Ag$ verhalten wie die Seiten Al, Am und die Diagonale Ag des Parallelogramms Algm. Setzt man für die Kräfte P, Q, R die ihnen proportionalen Geraden Cg, Bg, BC, so verhalten sich diese, wie die Producte $Cg.AB$, $Bg.AC$, $BC.Ag$. Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ist aber $Cg.AB = BC.AC$, und $Bg.AC = BC.Am$. Substituirt man diese beiden neuen Producte statt der zwei erstern, und läßt dann aus allen dreien den gemeinschaftlichen Factor BC weg: so erhält man die drei Momente Al, Am, Ag, womit unser Satz bewiesen ist.

Es ließen sich diese Beweisarten noch mehr verändern; jedoch gibt es eine einfachere Art, die Zusammensetzung der Paare darzustellen, wie aus folgendem Paragraph erhellt.

Zu §. 60 S. 43.

Die Lage verschiedener paralleler Paare kann also durch ein einziges Perpendikel auf alle Paare angegeben werden, welches gleichsam ihre gemeinschaftliche Axe ist.

Liegen die Paare in beliebigen Ebenen, so nimmt man der Deutlichkeit halber zuerst an, man habe sie in respective parallele Ebenen transponirt und auf denselben beliebigen Raumpunct versetzt, der so der gemeinschaftliche Mittelpunct aller Paare wird. Zieht man nun von diesem Puncte als Anfangspuncte Perpendikel auf die respectiven Ebenen: so ist die Lage der verschiedenen Paare durch Gerade gegeben, welche von demselben Puncte ausgehen, und dieselben Winkel mit einander einschließen als die Ebenen der gegebenen Paare.

Trägt man überdies vom Puncte A aus auf diesen Geraden die Längen AL, AM, AN u. s. w. auf, welche den respectiven Momenten dieser Paare, die wir durch L, M, N bezeichnen wollen, proportional sind: so reicht jede dieser bestimmten Geraden, wie z. B. AL, hin, um zugleich die Axe und Größe des correspondirenden Paares L darzustellen.

Soll nun diese Gerade AL auch noch den Sinn des Paares L angeben, was zur vollständigen Bestimmung desselben nothwendig ist: so braucht man nur eine ähnliche Convention zu machen wie bei den einfachen Kräften. Für eine in A angreifende, durch die Gerade AP repräsentirte Kraft besteht (nach §. 11) diese Convention darin, daß die Kraft von A nach P hin wirkt, oder von A nach P zieht. Für ein am Mittelpuncte A wirkendes Paar, dessen Axe und Größe durch die Gerade AL repräsentirt wird, wollen wir auf ähnliche Weise festsetzen, daß, wenn man sich in L stehend denkt und L als Nordpunct betrachtet, wo man A als Südpunct vor sich sieht, der Sinn des Paares oder der von ihm bewirkten Rotation von Osten nach Westen, oder von der Linken zur Rechten gerichtet ist, wie die scheinbare Bewegung der Sonne. Es ist dieses der Sinn, den wir gewöhnlich den rotirenden Instrumenten geben (wie z. B. den Schrauben beim Anziehen), und in diesem Sinne soll denn das Paar wirken, welches wir durch die Gerade AL repräsentiren.

Man könnte auch die umgekehrte Convention machen, wenn man nur den Sinn aller Paare in einer und derselben Figur und in der Darstellung desselben Lehrsatzes auf dieselbe Weise bestimmt.

Übrigens reicht eine der beiden Bestimmungsarten aus. Denn soll etwa in der Figur ein Paar L′ dargestellt werden, das dem Paare L entgegengesetzt ist: so geschieht dies gleichfalls durch eine Gerade AL′, die aber auf der andern Seite von A in der Verlängerten AL aufgetragen wird. Aus L′ betrachtet, rotirt dieses Paar von der Linken zur Rechten, aus L betrachtet aber von der Rechten zur Linken und ist also dem ersten Paare in der That entgegengesetzt.

Durch diese Bestimmungsart der Paare und der damit verbundenen Angabe ihres Sinnes geschieht die geometrische Darstellung von beliebig vielen auf einen Körper in beliebigen Ebenen wirkenden Paaren auf dieselbe Weise wie die von eben so vielen auf einen Punct wirkenden Kräften, und man wird sogleich sehen, daß auch ihre Zusammensetzung nach ganz ähnlichen Gesetzen geschieht. Alles beruht auf folgendem Lehrsatze, welcher die Stelle des Lehrsatzes II §. 55 vertritt und Parallelogramm der Paare genannt werden könnte.

§. 61 Seite 44.

Lehrsatz. Werden zwei Paare L und M (Fig. 24*) ihren Axen und Größen nach durch die beiden Seiten AL und AM eines Parallelogramms ALGM dargestellt: so setzen sich die Paare zu einem einzigen zusammen, das seiner Axe und Größe nach durch die Diagonale AG dieses Parallelogramms dargestellt wird.

Man ziehe von A aus in der Ebene des Parallelogramms ALGM zwei Gerade ll′ und mm′, welche zu AL und AM senkrecht und proportional sind und sich in A halbiren. Vollendet man dann die Parallelogramme Algm und Al′g′m′, so sind diese einander gleich und dem gegebenen Parallelogramme ähnlich. Mithin ist gg' senkrecht auf AG, zu AG proportional und in A halbirt.

Man bringe nun auf ll' und mm' als Hebelarme in senkrechten Ebenen auf die Figur zwei aus gleichen Kräften bestehende Paare $(P, -P)$ und $(P, -P)$ dergestalt, daß nach (§. 60) beide von der Linken zur Rechten zu drehen streben, wenn man sie nach einander aus den Puncten L und M betrachtet. Diese Paare können für diejenigen gesetzt werden, welche den Seiten AL und AM proportional sind, denn 1) liegen sie in senkrechten Ebenen auf diese Seiten, 2) sind ihre Momente diesen Seiten proportional, und 3) entsprechen ihre Sinne der festgesetzten Convention. Diese beiden Paare setzen sich aber offenbar in ein einziges zusammen, das durch die Diagonale AG repräsentirt wird; denn die beiden Kräfte P und P in l und m geben eine einzige parallele Kraft 2P von gleichem Sinne in c angreifend, wo c der Mittelpunct von lm und also auch die Mitte von Ag, ist. Desgleichen geben die Kräfte $-P$ und $-P$ in l' und m' eine einzige $-2P$ in c', dem Mittelpuncte von Ag' angebracht. Das resultirende Paar ist also $(2P, -2P)$ an cc', oder $(P, -P)$ an der doppelten Geraden gg' angebracht. Dieses Paar ist aber senkrecht und proportional zur Diagonale AG und sucht gleichfalls von der Linken zur Rechten zu rotiren, wenn es aus G betrachtet wird; womit denn unser Satz bewiesen ist.

Wir hätten diesen Satz aus einem der vorhergehenden ableiten können; wir zogen es jedoch vor, ihn an einer neuen Figur unmittelbar zu beweisen, damit man den relativen Sinn der drei Paare desto besser übersehen möge.

Zu §. 63 S. 45.

Bemerkung II. Ist allgemein φ der Winkel der beiden Seitenpaare oder ihrer Axen AL und AM, so hat man in dem Parallelogramme ALGM $AG^2 = AL^2 + AM^2 + 2\,AL\,.\,AM \cos\varphi$, und also $G^2 = L^2 + M^2 + 2\,LM \cos\varphi$, wo das resultirende Paar G durch die Seitenpaare L und M und den Neigungswinkel φ derselben ausgedrückt ist.

Wäre $\varphi = 0$, also $\cos\varphi = 1$: so wird $G = L + M$, was mit den frühern Lehren übereinstimmt, weil dann die Paare in derselben Ebene liegen und denselben Sinn haben, sich also zu einem Paare zusammensetzen, das gleich ihrer Summe ist.

Wäre $\varphi = 180°$, also $\cos\varphi = -1$: so ist $G = L - M$, wie gehörig; denn dann haben die Paare entgegengesetzten Sinn und setzen sich zu einem Paare zusammen, das ihrer Differenz gleich ist.

Bemerkung III. Von der Zerlegung zweier Paare geht man leicht fort zu der Zerlegung von beliebig vielen Paaren, und man erhält hier ganz analoge Sätze wie bei den einfachen Kräften. Wir glauben jedoch, nachstehendes Theorem wegen seiner häufigen Anwendung in der Mechanik besonders aussprechen und beweisen zu müssen.

Zu §. 105 S. 85.

Nimmt man an, daß die Kräfte P', P'', P'''.... nur Paare bilden: so findet jede Kraft P', die gegen die Axe der x unter einem gewissen Winkel α' geneigt ist, in dem Systeme eine gleiche Kraft, die aber um $180° + \alpha'$ gegen die Axe der x geneigt ist; zu jedem Gliede $P' \cos\alpha'$ findet sich also in der ersten Gleichung ein gleiches entgegengesetztes Glied. Dasselbe gilt von den beiden andern Gleichungen. Die drei erstern Gleichungen verschwinden mithin, und es bleiben nur die drei letztern, woraus folgt: zum Gleichgewichte von beliebig vielen auf einen Körper wirkenden Paaren ist nöthig und reicht hin, daß die Summe der senkrecht auf drei Axen zerlegten Paare in Bezug auf jede der Axen Null sei; ein Satz, der übrigens an sich eben so einleuchtend ist als der vorhergehende.

Übersicht des Inhalts.

Seite

Allgemeine Schlußfolge aus diesem Capitel.

(§. 68—§. 76.)

Capitel II.

(§. 77—§. 132.)

Capitel III.

Von den Schwerpuncten.

(§. 133 — §. 167.)

Capitel IV.

Von den Maschinen.

(§. 168 — §. 242.)

Einleitung.

§. 1.

I. Unsere Idee vom Körper macht nicht die Bewegung als eine Bedingung für die Existenz desselben nothwendig, und obgleich es vielleicht im ganzen unendlichen Raume kein einziges Körpertheilchen gibt, das selbst für die kleinste Zeitdauer in absoluter Ruhe wäre, so können wir uns dennoch einen Körper als ruhend denken.

Ruht ein Körper einmal, so kann er diesen seinen Zustand nicht eher verlassen, bis ihn irgend eine fremde Ursache darin stört, denn die Bewegung kann nur in einer einzigen Richtung vor sich gehen, und es gibt keinen Grund, warum sich der Körper mehr nach dieser als nach jeder andern Richtung bewegen sollte; er bewegt sich deshalb nach keiner Richtung, bleibt daher in Ruhe. Verläßt also ein Körper den Zustand der Ruhe, so muß nothwendig irgend eine Ursache vorhanden sein, welche ihn forttreibt. Diese Ursache, die wir nur aus ihrer Wirkung erkennen, mag *Kraft* genannt werden.

Mit dem Worte Kraft bezeichnen wir folglich weiter nichts, als die eine Bewegung erzeugende Ursache.

§. 2.

II. Ohne die Kraft an und für sich zu erkennen, begreifen wir gleichwohl recht gut, daß sie nach einer gewissen Richtung und mit einer gewissen Stärke (Intensität) wirke.

Von Jugend auf dringt sich uns die Idee von der Richtung und Intensität der Kraft auf. Das Gefühl der uns immer nach derselben Richtung hin treibenden Schwere, der Anblick eines freifallenden oder an einem Faden aufgehängten Körpers, der Gewichtsunterschied mehrer in die Hand genommener Körper, und eine Menge anderer Erscheinungen geben uns einen Begriff von der Richtung und Intensität der Kraft, der eben so fest begründet ist als der unserer eigenen Existenz.

Auf diese Weise ist klar, daß jede Kraft auf den Punct, auf welchen sie wirkt, nach einer gewissen Richtung und mit einer gewissen Intensität wirkt.

§. 3.

III. Stellen wir uns nun die Richtungen der Kräfte als gerade Linien, und ihre Intensitäten durch entsprechende, auf diesen geraden Linien abgeschnittene Längen vor, welche Längen in Zahlen angebbar sind: so können die Kräfte gleich jeder andern Größe, der Rechnung unterworfen werden. Hieraus entspringt denn die allgemeine Aufgabe, deren Lösung der Zweck der Mechanik ist:

Auf einen Körper oder auf irgend ein System von Körpern wirken gewisse gegebene Kräfte; man soll die Bewegung bestimmen, die der Körper oder das System von Körpern im Raume annehmen wird.

Oder umgekehrt: ein System von Körpern hat im Raume eine gegebene Bewegung; man soll das Verhältniß der auf dasselbe wirkenden Kräfte angeben.

Diese Aufgabe fällt streng genommen mit der vorigen zusammen.

§. 4.

Zur Lösung dieser allgemeinen Aufgabe fängt man damit an, den besondern Fall zu betrachten, wie die Verhältnisse der auf ein System wirkenden Kräfte beschaffen sein müssen, damit die Bewegung desselben gleich Null, oder mit andern Worten, damit das System im Gleichgewichte sei. Ist dieser besondere Fall einmal gelöst, so folgt daraus leicht jener allgemeine. Dies ist denn auch der Grund, weshalb man das Studium der Mechanik mit dem der Statik, oder mit der Wissenschaft des Gleichgewichts der Kräfte, anfängt.

Der zweite Theil der Mechanik behandelt dann die Aufgaben über die wirkliche Bewegung der Körper; er heißt Dynamik, oder Wissenschaft der Bewegung. Wir beschäftigen uns hier nur mit der Statik.

§. 5.

IV. Vorläufig ist zu bemerken, daß man in der eigentlichen Statik den wirklichen Einfluß der Kräfte auf die Materie, d. h. die verschiedenen ihr mitgetheilten Bewegungen, in Bezug auf Richtung und Intensität der Kräfte nicht zu beachten braucht, sondern daß es genug ist, sie als einfache gleichartige, mithin vergleichbare Größen zu betrachten und ihre gegenseitigen Verhältnisse für den Fall zu bestimmen, daß sie sich wechselseitig aufheben. Geht man von der Theorie des Gleichgewichts zu der Theorie der Bewegung über, so bedarf es neuer Principien zur Bestimmung der Kräfte denn indem man jetzt nur ihre Wirkungen im Auge hat, so muß man sie hierauf beziehen können; man muß z. B. wissen, ob eine doppelte Kraft demselben Körper eine doppelte Geschwindigkeit, ob dieselbe Kraft einem Körper von der doppelten Masse nur halb so viel Geschwindigkeit mittheilt u. s. w. Mögen indeß die Wirkungen der Kräfte beschaffen sein, wie sie wollen, mögen die Kräfte den sichtbaren Wirkungen proportional sein oder nicht: die Lehren der Statik hangen davon nicht ab, weil diese allein aus dem Vorhandensein mehrer Kräfte abgeleitet werden, die gar keine Wirkung hervorbringen, sondern sich gegenseitig vernichten, so daß der Zustand des Gleichgewichts als ein besonderer Moment des Zustandes der Bewegung erscheint, wo nämlich das Maaß der Kräfte durch ihre Wirkungen und die Wirkungen selbst verschwunden sind.

§. 6.

Streng genommen ist es einerlei, ob ein Körper sich im Gleichgewichte befindet, oder ob er ruht; denn ist die Wirkung der Kräfte ein für alle Mal vernichtet, oder wird sie jeden Augenblick vernichtet, falls die Kräfte sich immer wieder erzeugen, so läßt sich der im Gleichgewichte befindliche Körper durch eine gewisse gegebene Kraft eben so bewegen, als diese Kraft ihn bewegen würde, wenn er vorher geruht hätte. Indeß kann man Gleichgewicht von Ruhe insofern unterscheiden, als auf den ruhenden Körper keine Kraft wirkt, auf den im Gleichgewichte befindlichen jedoch mehre Kräfte wirken, die sich einander vernichten. Diese Verschiedenheit ist an und für sich gleich Null, tritt jedoch bei den Zuständen des Gleichgewichts hervor, welche uns die Natur darbietet; fast kein Körper ist hier streng im Gleichgewichte, und wenn er uns auch als ein solcher erscheint, so befindet er sich dennoch zwischen Kräften, die in fortwährendem Kampfe mit einander dem Körper bald nach dieser, bald nach jener Richtung hin eine unendlich geringe Bewegung mittheilen, und ihn diesen Augenblick in eine Lage bringen, welche er im folgenden wieder verläßt. Bei der mathematischen Betrachtung der statischen Probleme indeß muß man einen im Gleichgewichte befindlichen Körper als absolut ruhend betrachten. Und umgekehrt: ist ein Körper in Ruhe, oder wirken gewisse Kräfte auf ihn ein, so kann man beliebig viele sich gegenseitig vernichtende Kräfte auf ihn wirken lassen, ohne daß der Zustand des Körpers dadurch geändert würde.

Von diesem Satze werden wir bald zahlreiche Anwendungen machen.

§. 7.

V. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen gehen wir nun zu den Bedingungen des Gleichgewichts für irgend ein System von Körpern von unveränderlicher Form, auf welches beliebige, in gegebenen Puncten **a**, **b**, **c**, **d** .... angebrachte Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** .... wirken.

Wir nehmen dabei vorläufig an, die Körper, welche wir betrachten, seien nicht der Schwerkraft unterworfen, sondern existirten gleichsam für sich allein im Raume, so daß sie weiter keine Wirkung erleiden als die der Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** ....., die sich denn für den Fall des Gleichgewichts gegenseitig aufheben müssen.

Man wird dann nur die Bedingungen des Gleichgewichts für das einfache System der Angriffspuncte **a**, **b**, **c**, **d** .... zu finden brauchen, wenn man sich diese auf eine unveränderliche Weise mit einander verbunden vorstellt.

Denn bezeichnet man mit **a′**, **b′**, **c′**, **d′** .... dieselben Puncte **a**, **b**, **c**, **d** ...., wenn diese als durch starre, undehnbare gerade Linien mit einander verbunden gedacht werden, und nimmt man an, daß die Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** .... sie im Gleichgewichte erhalten: so müssen dieselben Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** .... auch das System im Gleichgewichte erhalten, denn man kann sich das System als in den Puncten **a′**, **b′**, **c′**, **d′** ... liegend vorstellen, welche Puncte mit **a**, **b**, **c**, **d** .... wirklich zusammenfallen; und da das System in dieser Lage in Ruhe bleibt, so besteht auch zwischen den Puncten a', b', c', d'..... Gleichgewicht. Es wird aber auch offenbar das Gleichgewicht dadurch nicht gestört werden, wenn man statt der Voraussetzung, a' fällt mit a, b' mit b, c' mit c u. s. w. zusammen, annimmt, die Puncte seien auf unveränderliche Weise mit einander verbunden, sodaß a sich nicht von a', b nicht von b' u. s. w. trennen kann. Hieraus folgt denn, daß die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den auf irgend ein System von Körpern wirkenden Kräften P, Q, R, S.... auch die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen denselben Kräften P, Q, R, S... sind, wenn diese als auf das einfache System der auf unveränderliche Weise unter einander verbundenen Angriffspuncte a, b, c, d.... wirkend gedacht werden.

Sucht man also das Verhältniß gewisser Kräfte, die an irgend einem festen Systeme im Gleichgewichte sind: so kann man von allen Körpern des Systems abstrahiren und nur die Angriffspuncte a, b, c, d.... selbst behalten, die man sich so mit einander verbunden denkt, daß sie ihre gegenseitigen Entfernungen nicht zu ändern vermögen.

Auf diese Weise entfernt sich aus unserer Aufgabe die Betrachtung des Gewichts und des Volumens der Körper, wodurch sie sich sehr vereinfacht.

In der Folge unterwirft man dann die Körper der Schwerkraft und sieht ihre gegenseitigen Gewichte als neue Kräfte an, zu denen man andere hinzubringen muß, um Gleichgewicht zu erhalten. Dadurch wenden sich die Resultate der Statik auf wirkliche Körper an, die sämmtlich von der Schwerkraft afficirt werden.

§. 8.

VI. Beim Gleichgewichte zwischen Kräften sind also nur drei Dinge zu berücksichtigen: die Intensitäten, die Richtungen und die Angriffspuncte der Kräfte, und es wird nur auf das Verhältniß dieser drei Dinge ankommen, wenn irgend ein System im Gleichgewichte sein soll. Man begreift nun jetzt schon, und man wird es bald deutlich sehen, wie diese Verhältnisse in Gleichungen dargestellt werden können, in welche die Intensitäten der Kräfte unmittelbar, die Richtungen derselben durch gewisse mit festen geraden Linien im Raume gebildete Winkel, und die Angriffspuncte mittelst ihre gegenseitigen Lagen bestimmender Coordinaten eingehen können.

So hat man denn die Aufgabe der Statik vor sich liegen und versetzt sich leicht auf den richtigen Standpunct der Dinge.

Man bemerke indeß, daß das Gesagte nur von einem im Raume frei schwebenden Körper, und nicht etwa von Körpern gilt, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, daß sie z. B. um ein festes Centrum oder eine feste Axe rotiren, oder daß sie gegen eine feste Oberfläche gelagert sein sollen u. s. w. Man wird in der Folge sehen, daß die Widerstände, die der Körper durch solche fremdartige Bedingungen erleidet, jedesmal durch entsprechende Kräfte ersetzt, und daß, nach der Substitution dieser Kräfte für jene Widerstände, die Körper immer als frei schwebend im Raume betrachtet werden können, so daß es unnütz sein würde, die Untersuchung durch Bedingungen der Art gleich bei der ersten Betrachtung zu erschweren.

§. 9.

VII. Zur Ermittelung des Ganges, den wir bei der Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichts einzuschlagen haben werden, denken wir uns einen Körper oder ein System, das durch gewisse beliebig gerichtete Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** .... im Gleichgewichte erhalten wird.

Da alle Kräfte im Gleichgewichte sind, so muß eine einzige von ihnen, z. B. **P**, der Wirkung aller übrigen, **Q**, R, S...., das Gleichgewicht halten. Die Wirkung dieser letzten ist also ganz gleich einer einzigen auf das System wirkenden Kraft, welche P entgegengesetzt ist und ihr das Gleichgewicht hält.

In der That verhält sich die Sache so, und man sieht dies völlig deutlich ein durch die Bemerkung des §. 6 und durch den Grundsatz §. 12, daß zwei gleiche einander entgegengesetzte Kräfte im Gleichgewichte sind. Denn nimmt man an, es werde auf das System eine Kraft P′ angebracht, die P gleich und ihr entgegengesetzt ist: so halten sich P und P′ das Gleichgewicht, vernichten sich also gegenseitig, und es wirken nur noch die Kräfte Q, R, S... auf das System. Auf der andern Seite hält P den Kräften Q, R, S.... das Gleichgewicht, sie vernichten sich also gegenseitig, und es wirkt nun nur noch die einzige Kraft P′ auf das System. Der Zustand des Körpers ist also beide Male völlig derselbe, mögen die Kräfte Q, R, S.... auf ihn wirken, oder mag bloß die Kraft P′ an ihm angebracht sein, die derjenigen Kraft, welche jenen das Gleichgewicht hält, gleich und entgegengesetzt ist.

Da demnach eine einzige Kraft auf einen Körper wirken kann wie mehre Kräfte zugleich, und diese völlig vertritt, so haben wir zuerst dahin zu trachten, die angebrachten Kräfte auf die möglichst kleinste Zahl zurückzuführen und vor allen Dingen das Gesetz dieser Reduction zu ermitteln. Die Bedingungen des Gleichgewichts unter allen diesen Kräften beschränken sich dann auf das Gleichgewicht der resultirenden, mit jenen gleichwirkenden Kräfte, und werden sich also leichter darstellen lassen.

§. 10.

Die Kraft, welche auf einen Körper eben so wirkt wie mehre vereinigte Kräfte zugleich, und welche also deren

Stelle vertreten kann, soll **Resultante** *) (**resultirende Kraft, Mittelkraft**) heißen. Es folgt also, daß, **wenn mehre Kräfte im Gleichgewichte sind, eine von ihnen jedesmal der Resultante aller übrigen gleich und entgegengesetzt ist.**

Die Kräfte, aus denen die Resultante erwächst, heißen **Seitenkräfte**. Das Gesetz, wonach man die Resultante mehrer Kräfte findet, heißt das Gesetz der **Zusammensetzung der Kräfte**. Dasselbe Gesetz umgekehrt, wenn für eine einzige Kraft mehre Kräfte substituirt werden, die dieselbe Wirkung hervorbringen, oder von denen jene erstere Kraft die Resultante ist, heißt **Zerlegung der Kräfte**.

Mit der Untersuchung dieser beiden Gesetze für den Zusammenhang der Resultante mit den Seitenkräften, welche streng genommen in eins zusammenfallen, beginnen wir also.

§. 11.

Der Abkürzung wegen werden wir in der Folge häufig solche Kräfte, deren Richtungen parallel sind, oder in einen und denselben Punct zusammenlaufen u. s. w., mit Parallelkräften, zusammenlaufenden Kräften u. s. w. bezeichnen.

---

*) Wir behalten hier das Wort **Resultante** bei, statt des sonst in deutschen Lehrbüchern der Statik üblichen: **mittlere Kraft** oder **Mittelkraft**, weil im letztern Ausdrucke ein Nebenbegriff liegt, dem die aus mehren Kräften resultirende Kraft nicht überall entspricht. Gern hätten wir auch statt des Wortes **Seitenkräfte** ein anderes gewählt, allein das mit Resultante analoge: **Componente**, wäre wohl zu gewagt gewesen.

Anm. d. Übers.

Wir wollen die Kräfte in der Regel durch die Buchstaben P, Q, R, S..., die auf die geraden Linien geschrieben werden, welche die Richtungen der Kräfte angeben, bezeichnen. Wenn nun ein Buchstabe wie A (Fig. 1) den Angriffspunct einer dieser Kräfte, z. B. P, anzeigt, so wollen wir immer annehmen, daß die Wirkung dieser Kraft von A nach P gerichtet ist, oder daß die Kraft von A nach P hin wirkt.

Erstes Capitel.

Abtheilung I.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

Grundsätze, Hülfssätze u. s. w.

§. 12.

Es ist einleuchtend, daß zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte an demselben Angriffspuncte sich das Gleichgewicht halten.

Eben so ist einleuchtend, daß zwei an den beiden Endpuncten einer geraden Linie von unveränderlicher Länge angebrachte gleiche und entgegengesetzte, in der Richtung dieser geraden Linie wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, weil hier wie im ersten Grundsatze, kein Grund vorhanden ist, warum die Bewegung mehr von der einen als von der andern Seite erfolgen sollte.

§. 13.

Folgesatz. Hieraus geht hervor, daß die Wirkung einer Kraft auf einen Körper sich nicht ändert, in welchem Puncte ihrer Richtung man sich dieselbe auch angebracht denkt, mag dieser Punct im Körper selbst oder darüber hinaus liegen, wenn er nur unveränderlich fest mit ihm verbunden ist.

Denn es wirke (Fig. 1) irgend eine Kraft P auf den Punct A eines beliebigen Körpers oder Systems, so wird, wenn man in der Richtung dieser Kraft einen unveränderlich festen Punct B nimmt, sodaß die Länge AB immer dieselbe bleibt, und auf diesen Punct zwei Kräfte P′ und — P′, die beide der Kraft P gleich sind und in der Richtung von AB wirken, der Punct A noch eben dieselbe Wirkung erleiden wie vorhin, weil P′ und — P′ sich gegenseitig vernichten. Betrachtet man aber P und die ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft — P′ in B, so vernichten sich beide gleichfalls; man kann sie also fortnehmen, und es wirkt nur noch die Kraft P′ auf den Körper, welche gleich P, aber in B angebracht ist. Der Punct A erleidet aber noch dieselbe Wirkung.

Man kann also eine Kraft in jedem Puncte ihrer Richtung anbringen, wenn nur der neue Angriffspunct mit dem vorigen durch eine starre undehnbare gerade Linie verbunden ist.

Bemerkung. Wenn wir in der Folge auf diese Weise die Angriffspuncte der Kräfte verändern, so setzen wir ein für alle Mal dabei voraus, daß die neuen Puncte mit den alten auf unveränderliche Weise verbunden sind, ohne dies jedesmal ausdrücklich zu bemerken.

§. 14.

Hülfssatz. Wirken zwei Kräfte P und Q (Fig. 2) auf einen Punct A unter irgend einem Winkel, so begreift man leicht, daß eine dritte Kraft R, wenn sie unter den nöthigen Bedingungen auf A wirkt, den beiden Kräften P und Q das Gleichgewicht halten kann. Denn durch die vereinte Wirkung der beiden Kräfte P und Q will der Punct A seinen Ort im Raume verlassen; er kann aber nur nach einer einzigen Richtung entweichen; bringt man also eine entsprechende Kraft in der dieser Richtung entgegengesetzten Richtung auf ihn an, so muß er ruhen.

Sind die drei Kräfte P, Q, R an dem Puncte A im

Gleichgewichte, so ist die Kraft R der Resultante der beiden andern Kräfte gleich und entgegengesetzt (§. 10). Es haben demnach zwei zusammenlaufende Kräfte P und Q eine Resultante.

Ferner muß die Resultante in der Ebene der Richtungen AP und AQ (Fig. 3) liegen, weil kein Grund vorhanden ist, warum sie in irgend einer Lage über dieser Ebene, und nicht zugleich auch in derselben Lage unter der Ebene liegen soll.

Endlich muß die Richtung der Resultante in den Winkelraum PAQ fallen, weil offenbar der Punct A sich nicht in dem Theile der Ebene über der Linie AQ nach D hin, und eben so wenig in dem Theile der Ebene über der Linie AP nach B hin, sondern nur in dem Winkelraume PAQ bewegen kann, wo denn die Richtung der Resultante ins Innere dieses Winkelraumes fallen muß.

§. 15.

Bemerkung. Nur in einem einzigen Falle läßt sich die Richtung der Resultante a priori bestimmen, wenn nämlich die Kräfte P und Q gleich sind, denn dann fällt sie offenbar in die Mitte zwischen AQ und AP, halbirt also den Winkel PAQ, weil kein Grund vorhanden ist, warum sie mit einer der Seitenkräfte einen kleinern Winkel einschließen sollte als mit der andern.

§. 16.

Fundamentalgrundsatz. Wirken die beiden Kräfte P und Q in derselben Richtung und nach demselben Sinne, so addiren sich die Kräfte und geben zur Resultante $P + Q$.

§. 17.

Folgesatz. Durch allmälige Verbindung von zwei Kräften erhält man die Resultante von beliebig vielen in gleicher Richtung und nach demselben Sinne wirkenden Kräften, welche gleich der Summe aller dieser Kräfte ist und nach derselben Richtung wirkt.

Ferner ist die Resultante von zwei ungleichen Kräften **P** und **Q**, die in derselben Richtung einander entgegengesetzt sind, gleich der Differenz der Kräfte **P** — **Q**, und wirkt nach dem Sinne der größern Kraft; denn man kann von der größern Kraft, welche **P** sein mag, einen Theil gleich **Q** wegnehmen, welcher der Kraft **Q**, weil er ihr gleich und entgegengesetzt ist, das Gleichgewicht hält, wo man folglich diese beiden Kräfte fortlassen kann, und wo dann der Punct nur noch durch die Differenz der beiden Kräfte **P** — **Q** nach dem Sinne der größern **P** getrieben wird.

Hieraus folgt allgemein: die Resultante von beliebig vielen in derselben Richtung wirkenden Kräften ist gleich dem Überschusse der Summe der nach dem einen Sinne wirkenden Kräfte über die Summe der nach dem entgegengesetzten Sinne wirkenden, und wirkt nach dem Sinne der größern Summe.

§. 18.

Bemerkung. Es sind dies einige von den elementarsten Sätzen, deren Wahrheit man a priori und fast auf den ersten Anblick erkennt. Der einfachste Fall von der Zusammensetzung der Kräfte und zugleich derjenige, wo die Resultante geradezu gefunden wird, ist offenbar derjenige, wo die Kräfte alle in derselben geraden Linie wirken. Wir fangen daher mit den Fällen der Zusammensetzung der Kräfte an, die sich unmittelbar auf diesen zurückführen lassen.

Zusammensetzung der in parallelen Richtungen wirkenden Kräfte.

§. 19.

Lehrsatz I. Zwei parallele, nach demselben Sinne wirkende, an den Enden A und B (Fig. 4) einer starren geraden Linie angebrachte Kräfte P und Q haben:

1) eine Resultante, und diese greift in einem Puncte der Linie AB zwischen den Puncten A und B an;

2) die Resultante ist den Kräften P und Q parallel und ihrer Summe P + Q gleich.

Beweis für 1. Man bringe an den Puncten A und B zwei beliebige, einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte M und N an, die in der Richtung von AB wirken. Die Wirkung dieser beiden Kräfte ist dann Null und hat folglich auf die Wirkung der beiden Kräfte P und Q keinen Einfluß. Die beiden Kräfte M und P am Puncte A haben aber eine Resultante S, die am Puncte A angebracht ist, und deren Richtung zwischen MA und PA fällt (§. 14). Eben so haben die Kräfte N und Q eine Resultante T, die auf B wirkt und in den Winkelraum QBN fällt. Bringt man nun die beiden Resultanten auf den Punct D an, wo ihre Richtungen sich schneiden: so ist offenbar die Resultante der beiden Kräfte S und T zugleich die Resultante der beiden Kräfte P und Q; diese ist aber auf D angebracht, muß also in den Winkelraum ADB fallen und geht daher durch irgend einen Punct C zwischen A und B, in welchen Punct man sie sich denn versetzt denken kann.

Beweis für 2. Um nun zu beweisen, daß die Resultante den Kräften P und Q parallel und ihrer Summe gleich ist, denke man sich die Kraft S im Puncte D wieder in zwei Seitenkräfte M′ und P′ zerlegt, die völlig den erstern M und P gleich und parallel sind; eben so T in N′ und Q′, die N und Q gleich und parallel sind. Die beiden Kräfte M′ und N′ sind dann gleich und einander entgegengesetzt, weil sie beide in demselben Puncte D zusammentreffen und mit der geraden Linie MN parallel sind; ihre Wirkung ist demnach Null. Es bleiben folglich nur die Kräfte P′ und Q′, die respective P und Q parallel und gleich sind. Diese beiden Kräfte wirken aber in einer und derselben geraden Linie nach einerlei Richtung, setzen sich deshalb zu einer einzigen Kraft R zusammen, die, obigen Lehren zufolge, gleich $P' + Q'$ oder gleich $P + Q$ sein muß.

§. 20.

Folgesatz I. Sind die beiden Kräfte P und Q (Fig. 5) gleich, so fällt der Angriffspunct der Resultante in die Mitte von AB. Denn nimmt man M und N gleich P und Q, so fällt die Resultante S in die Mitte des Winkelraumes MAP, weil $M = P$ (§. 15); da nun DC parallel zu AP, so ist Dreieck ACD gleichschenklig, und $CD = AC$. Eben so ist Dreieck BCD gleichschenklig, und $CD = BC$. Demnach auch $AC = CB$.

§. 21.

Folgesatz II. Es folgt daraus, daß die Resultante von beliebig vielen Kräften, die parallel, zwei und zwei gleich und symmetrisch in gleichen Entfernungen von der Mitte einer geraden Linie angebracht sind, gleich der Summe aller dieser Kräfte, ihnen parallel ist, und durch die Mitte der Angriffslinie geht. Denn verbindet man allmälig die gleichen Kräfte zu zwei und zwei, so wie sie auf der einen und andern Seite in gleichen Entfernungen von der Mitte der geraden Linie liegen: so gehen alle Resultanten durch denselben Punct und addiren sich hier, weil sie alle in einer und derselben Richtung nach demselben Sinne wirken.

§. 22.

Umgekehrt kann man jede auf eine gerade Linie wirkende Kraft P in beliebig viele Parallelkräfte zerlegen, die in verschiedenen Puncten der geraden Linie angebracht sind; nur müssen sie zu je zwei und zwei gleich sein und in gleichen Entfernungen von der Kraft P angreifen, und dann muß ihre Gesammtsumme so viel betragen als die Kraft P.

§. 23.

Lehrsatz II. Der Angriffspunct C der Resultante der beiden Parallelkräfte P und Q (Fig. 6), welche an den Enden A und B einer geraden unbiegsamen Linie AB wirken, theilt die gerade Linie AB im umgekehrten Verhältnisse von P und Q, sodaß $P : Q = BC : AC$ ist.

Mögen 1) die Kräfte P und Q commensurabel sein, d. h. sich wie zwei ganze Zahlen m und n zu einander verhalten.

Man theile AB im Puncte H so, daß die Theile im geraden Verhältnisse mit den Kräften P und Q stehen, also $AH : BH = P : Q$ und folglich auch $= m : n$. Auf der Verlängerung der unbiegsamen Linie AB nehme man $AG = AH$, und $BK = BH$, wo der Punct A die Mitte von GH, und der Punct B die Mitte von HK ist.

Da nun $P : Q = AH : BH$, so wird auch $P : Q = 2AH : 2BH$, d. h. die Kräfte P und Q werden sich verhalten wie die Geraden GH und HK. Da ferner die Gerade AH der Annahme zufolge m Theile, und BH n Theile enthält, so hat GH 2m, und HK 2n solcher Theile. Die Kraft P läßt sich nun in 2m gleiche und parallele Kräfte zerlegen, die in 2m Puncten auf der Geraden GH je zwei und zwei in gleichen Entfernungen von A angreifen (§. 22); und auf gleiche Weise Q in 2n parallele und gleiche Kräfte, die in 2n Puncten in beiderseitigen gleichen Entfernungen von B in der Geraden HK angreifen. Dann aber sind alle diese gleichen Kräfte gleichweit von einander entfernt und stehen je zwei und zwei gleichweit ab von der Mitte C der ganzen Linie GK; die gemeinschaftliche Resultante, welche dann auch die Resultante von P und Q ist, geht also nothwendig durch die Mitte der Linie GK.

Weil aber $GC = AB$, so nehme man den gemeinschaftlichen Theil AC fort, und man hat $BC = AG = AH$; ferner addire man beiderseits CH, so hat man $AC = BH$. Da nun $P : Q = AH : BH$, so ist auch

$$P : Q = BC : AC.$$

Mögen 2) die Kräfte P und Q incommensurabel sein.

Wir bemerken zuvor: fällt die Resultante zweier in A und B (Fig. 7) wirkender Kräfte P und Q in C, so wird die Resultante von P und einer Kraft $Q + I$, welche größer als Q ist, zwischen C und B fallen, d. h. der Angriffspunct der Resultante nähert sich dem Angriffspuncte der vergrößerten Kraft. Denn um die Resultante von P und $Q + I$ zu finden, kann man zuerst die Resultante von P und Q suchen, welche R sein soll und durch C geht, und dann die Resultante von R und I nehmen, die nach (§. 19) ihren Angriffspunct zwischen C und B haben muß.

Geht nun (Fig. 8) die Resultante der beiden incommensurablen Kräfte P und Q nicht durch den Punct C, der so gewählt ist, daß $P : Q = BC : AC$, so wird sie in einem andern Puncte entweder zwischen A und C, oder zwischen B und C durchgehen. Mag dieses zwischen A und C in G geschehen. Man theile die Linie AB in lauter gleiche Theile, die kleiner sind als CG, so wird wenigstens ein Theilpunct zwischen G und C fallen; mag dieser Punct mit I bezeichnet werden. Die beiden Geraden AI und BI sind dann commensurabel, und der Punct I kann als Angriffspunct der Resultante zweier Kräfte P und Q' betrachtet werden, die so beschaffen sind, daß $P : Q' = BI : AI$, wo also $Q' < Q$ sein muß, weil der Annahme zufolge $P : Q = BC : AC$. Geht aber die Resultante der beiden Kräfte P und Q′ durch I, so muß die der beiden Kräfte P und $Q > Q'$ zwischen I und B durchgehen und kann nicht in G fallen, was der Annahme widerspricht.

Eben so zeigt man, daß sie nicht zwischen C und B fallen kann; sie geht also nothwendig durch C.

§. 24.

Folgesatz I. Sind die drei Parallelkräfte P, Q, R (Fig. 9) an der geraden Linie AB im Gleichgewichte, so ist die eine von ihnen der Resultante der beiden andern gleich und entgegengesetzt. So z. B. ist Q, im umgekehrten Sinne genommen, die Resultante von P und R. Da P und Q nach demselben Sinne wirken, so ist $R = P + Q$, und folglich $Q = R - P$. Man hat also den Satz: wirken zwei Parallelkräfte nach entgegengesetztem Sinne, so ist die Resultante gleich ihrer Differenz und wirkt nach dem Sinne der größern.

§. 25.

Sind zwei Kräfte P und R mit der Entfernung AC ihrer Angriffspuncte gegeben, und fragt man nach dem Angriffspuncte der Resultante Q, so schließt man: $P : Q = BC : AC$; also auch $P + Q : Q = BC + AC : AC$ oder $R : Q = AB : AC$, wodurch man AB und mithin den Punct B hat.

§. 26.

Bemerkung. Sind die beiden Kräfte P und R gleich, so wird die Resultante $Q = 0$, und die Entfernung $AB = \frac{R \cdot AC}{0}$, d. h. unendlich groß.

Wären P und R nicht gleich, sondern um eine sehr geringe Größe verschieden, so wird die Resultante Q, die gleich ist dieser Differenz, sehr klein, und $AB = \frac{R \cdot AC}{Q}$ sehr groß, weil der Nenner Q sehr klein ist. Je mehr sich also die beiden Kräfte der Gleichheit nähern, desto kleiner wird die Resultante, und desto größer die Entfernung ihres Angriffspunctes, sodaß, wenn die beiden Kräfte wirklich gleich werden, die Resultante Null ist, und ihr Angriffspunct unendlich weit entfernt liegt. Daraus scheint hervorzugehen, daß es für zwei gleiche, nach verschiedenem Sinne wirkende Parallelkräfte nicht eine einzige Resultante gibt.

§. 27.

Um jedoch diesen letzten Schluß ganz ins Klare zu bringen, wollen wir annehmen, es halte eine einzige Kraft R, wenn das sonst möglich ist, zweien Kräften P und — P das Gleichgewicht, die gleich und parallel sind und nach entgegengesetztem Sinne wirken.

Wie nun auch die Lage dieser einzigen Kraft in Bezug auf die beiden gegebenen sein mag, so gibt es für sie sogleich eine Lage in entgegengesetztem Sinne, die in Bezug auf dieselben Kräfte sich eben so verhält, weil auf beiden Seiten Alles gleich ist. Hält also eine Kraft R den Kräften P und — P das Gleichgewicht, so thut dies auch eine andere — R, die R gleich und parallel, aber entgegengesetzt ist. Man bringe diese Kraft — R hinzu und hebe sie, um das Gleichgewicht nicht zu stören, durch eine gleiche entgegengesetzte Kraft R′ auf, so ist zwischen den fünf Kräften R, P, — P, — R und R′ Gleichgewicht. Die drei Kräfte P, — P und — R sind aber im Gleichgewichte; es müßten also auch R und R′ im Gleichgewichte sein, was nicht möglich ist, weil diese beiden gleichen und parallelen Kräfte nach einerlei Sinne wirken (§. 19).

Die beiden Kräfte P und — P können demnach von einer einzigen Kraft nicht im Gleichgewichte gehalten werden, haben also nicht eine einzige Resultante.

Wir werden bald auf diese Art von Kräften zurückkommen, die bisher nur als ein besonderer Fall betrachtet worden sind; sie bilden den zweiten wesentlichen Theil unserer Elemente.

§. 28.

Folgesatz II. Sowie man zwei an zwei Puncten einer geraden Linie wirkende Parallelkräfte in eine einzige zusammensetzen kann, so kann man auch jede beliebige Kraft **R** (Fig. 6) an einem Puncte **C** einer unbiegsamen Geraden in zwei andere Kräfte **P** und **Q** zerlegen, die der Kraft **R** parallel sind und an zwei Puncten der Geraden wirken. Man braucht zu dem Zwecke **R** nur in zwei Kräfte zu theilen, die sich zu einander wie die Entfernungen **BC** und **AC** verhalten; um nun etwa **Q** zu finden, heißt es $\cancel{Q} : R \overset{:Q}{=} AB : AC$, worin **Q** allein unbekannt ist. **P** ist dann gleich $R - Q$.

Fiele (Fig. 10) der Angriffspunct der zu zerlegenden Kraft **R** nicht zwischen die gegebenen Angriffspuncte **A** und **B** der Seitenkräfte **P** und **Q**, welche gesucht werden: so hat man $R : Q = AB : AC$, wodurch man **Q** erfährt; **P** ist dann aber gleich $R + Q$.

§. 29.

Folgesatz III. Kennt man die Resultante zweier Parallelkräfte, so kann man leicht die Resultante von beliebig vielen, auf ein System von unveränderlicher Form wirkenden Parallelkräften finden.

Es seien z. B. die vier Parallelkräfte P, P', P'', P''' (Fig. 11) auf die vier Puncte **A**, **B**, **C**, **D** angebracht, die beliebig im Raume liegen, aber auf unveränderliche Weise unter einander fest sind. Betrachtet man die Kräfte zu zwei und zwei, so liegen diese immer in derselben Ebene. So kann man nun erst die Resultante **X** von **P** und P'

nehmen, welche $= P + P'$ sein wird und durch den Punct I geht; man findet diesen Punct, indem man AB im umgekehrten Verhältnisse von P und P′ theilt. Darauf verbindet man den Punct I mit dem Angriffspuncte der dritten Kraft C und sucht die Resultante von den beiden Parallelkräften X und P″, welche X′ sein wird $= X + P''$; den Punct F findet man, indem man die gerade Linie CI im umgekehrten Verhältnisse von X zu P″ theilt. Verbindet man endlich F mit dem Angriffspuncte D der vierten Kraft P‴, indem man DF im umgekehrten Verhältnisse von X′ zu P‴ theilt, so hat man G als den Angriffspunct der gemeinschaftlichen Resultante, die parallel zu X′ und P‴ und folglich parallel zu allen vier Kräften ist; ferner ist sie $= X' + P'''$, also gleich der Summe aller vier Kräfte.

Auf diese Weise findet man immer die Resultante von beliebig vielen Parallelkräften.

Wirken mehre von den Kräften P, P′, P″.... im entgegengesetzten Sinne, so sucht man erst die Resultante aller der Kräfte, die nach dem einen Sinne, dann die Resultante aller Kräfte, die nach dem entgegengesetzten Sinne wirken, und erhält so für alle die Kräfte zwei Parallelkräfte, die nach verschiedenem Sinne wirken, und deren Resultante man dann auf die früherhin angegebene Weise findet.

§. 30.

Man kann also im Allgemeinen die Lage und Größe der Resultante für beliebig viele Parallelkräfte bestimmen; sie **wird zu den Kräften parallel sein und an Größe den Überschuß der Summe der Kräfte nach einem Sinne über die Summe der Kräfte nach dem entgegengesetzten Sinne betragen.**

Wir sagen im Allgemeinen, denn es kann sich ereignen, daß die Resultante aus den Kräften nach dem einen Sinne gleich ist der Resultante aus den Kräften nach dem entgegengesetzten Sinne, ohne gerade die direct entgegengesetzte Richtung zu haben; und dann gibt es dem Obigen zufolge nicht eine einzige Resultante.

§. 31.

Folgesatz IV. Wir wollen annehmen, die Kräfte **P**, **P′**, **P″**, **P‴** kämen, mit Beibehaltung ihrer Größe, ihres Parallelismus und derselben Angriffspuncte **A**, **B**, **C**, **D**, in die Lagen p, p′, p″, p‴ im Raume.

Sucht man dann, mit Befolgung derselben Ordnung wie vorhin, die Resultanten, so geht zuerst die Resultante x von p und p′ durch denselben Punct **I** mit der Resultante **X** von **P** und **P′**, und ist **X** gleich. Sie geht durch denselben Punct **I**, weil die Linie **AB** gleichfalls im umgekehrten Verhältnisse von p zu p′ oder von **P** zu **P′**, wie vorhin, getheilt ist, und sie ist $= \mathbf{X}$, weil $\mathbf{P} + \mathbf{P}' = p + p'$. Eben so geht die Resultante x′ von p″ und x durch denselben Punct **F** mit der Resultante **X′** von **X** und **P″** und ist **X′** gleich, und so fort. Die gemeinschaftliche Resultante der vier Kräfte p, p′, p″, p‴ geht also durch denselben Punct mit der Resultante der vier Kräfte **P**, **P′**, **P″**, **P‴** und ist ihr gleich. Dieses gilt von beliebig vielen Kräften, woraus der bemerkenswerthe Satz folgt:

§. 32.

Betrachtet man irgend ein System von Parallelkräften, welche an den fest mit einander verbundenen Puncten **A**, **B**, **C**, **D** ..... wirken, und bringt man allmälig das System der Kräfte in andere Lagen, wobei jedoch die Kräfte dieselben Angriffspuncte, dieselbe Größe und ihren Parallelismus beibehalten: so schneiden sich die gemeinschaftlichen Resultanten, die man allmälig für jede dieser Lagen findet, alle in demselben Puncte.

Dieser Durchschnittspunct der allmäligen Resultanten heißt das Centrum der Parallelkräfte. Wir werden später bei Betrachtung der Schwerpuncte Gelegenheit haben, darauf zurückzukommen.

Man bemerke endlich auch noch, daß in dem vorigen Beweise die Kräfte nicht nothwendig dieselbe Größe beizubehalten brauchen, sondern daß es hinlänglich ist, wenn sie in jeder Gruppe proportional sind.

Zusammensetzung der Kräfte, deren Richtungen in demselben Puncte zusammenlaufen.

§. 33.

Lehrsatz III. Die Resultante zweier beliebigen Kräfte P und Q (Fig. 12), die an einem Puncte A unter einem Winkel wirken, hat die Richtung der Diagonale des Parallelogrammes ABCD, das von den beiden die Größe und Richtung der Kräfte P und Q angebenden geraden Linien AB und AC gebildet wird.

Zuerst wissen wir aus (§. 14), daß die Richtung der Resultante in die Ebene der Kräfte P und Q fällt; dann ist klar, daß sie im Puncte A angreifen muß, weil sie der Annahme zufolge auf den Punct A eben so wirken soll als die beiden Kräfte P und Q. Wir behaupten nun, sie geht durch den Endpunct D der Diagonale AD.

Nimmt man auf der verlängerten Linie BD das Stück $DG = CD$ und vollendet das Parallelogramm DGHC, dessen alle vier Seiten gleich sind, bringt dann in den Puncten G und H nach der Richtung GH zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte Q' und Q'' an, die beide $= Q$ sind: so ist einleuchtend, daß die Resultante der vier Kräfte P, Q, Q' und Q''

durch den Punct D gehen muß. Denn erstlich verhalten sich wegen $Q' = Q$ die beiden Parallelkräfte P und Q' wie AB zu AC oder wie die Geraden DG und DB, und folglich geht ihre Resultante S durch den Punct D (§. 23). Weil zweitens die Kräfte Q und Q'' gleich sind, so halbirt ihre verlängerte Resultante den Winkel CHG des Rhombus und geht auch durch den Punct D, welchen man sich als ihren Angriffspunct denken kann. Die gemeinschaftliche Resultante, welche die Resultante von S und T ist, geht also durch D.

Da nun die auf GH wirkenden Kräfte Q' und Q'' gleich und entgegengesetzt sind, so vernichten sie sich, und die Resultante der vier Kräfte P, Q, Q' und Q'' ist zugleich die Resultante der beiden Kräfte P und Q, welche also auch durch den Punct D gehen wird.

Da sie also durch den Punct A und D zugleich geht, so fällt sie mit der Diagonale AD zusammen.

§. 34.

Folgesatz. Hieraus folgt, daß man aus den gegebenen Richtungen der zwei Kräfte P und Q (Fig. 13) und der gegebenen Richtung der Resultante R das Verhältniß der Kräfte P und Q bestimmen kann. Dann nimmt man auf der Richtung der Resultante einen Punct D an und zieht aus ihm zwei Parallelen DB und DC zu den Richtungen der Kräfte, welche diese Richtungen in B und C schneiden: so ist nothwendig $P : Q = AB : AC$. Denn wäre dieses nicht der Fall, so müßte $P : Q = AB : AO$ sein, wo $AO \gtrless AC$ wäre, und dann wäre die Resultante der Kräfte P und Q nach der Diagonale AI eines Parallelogrammes AOIB gerichtet, welches von ABDC verschieden wäre, was gegen die Annahme ist.

§. 35.

Lehrsatz IV. Die Resultante zweier beliebigen, auf einen Punct A (Fig. 14) wirkenden Kräfte P und Q wird der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogrammes ABDC dargestellt, was von den die Größe und Richtung der Kräfte repräsentirenden Geraden AB und AC gebildet wird.

Wir haben schon bewiesen, daß die Richtung der Resultante in die Diagonale fällt; es bleibt uns also nur noch zu zeigen, daß sie auch der Größe nach durch die Diagonale dargestellt wird.

Sei R die Resultante, und denken wir sie uns in der Verlängerung der Diagonale auf den Punct A in einem ihrer Wirkung entgegengesetzten Sinne angebracht. Da die drei Kräfte P, Q, R an A im Gleichgewichte sind, so ist jede von ihnen, z. B. Q, der Resultante der beiden andern P und R gleich und entgegengesetzt. Die rückwärts verlängerte Richtung der Kraft Q ist folglich die Resultante der beiden Kräfte P und R. Zieht man also aus B zu AR die Parallele BG, welche die Verlängerte QA in G schneidet, und von G zu AP die Parallele GH, welche AR in H schneidet: so verhalten sich die Kräfte P und R wie die Seiten AB und AH des Parallelogrammes ABGH (§. 34). Die Linie AB stellt nun die Kraft P wirklich dar, folglich wird auch AH die Kraft R in der That darstellen. Wegen der Parallelen ist aber AH = BG = AD, und damit ist denn unser Satz bewiesen.

§. 36.

Folgesatz I. Da sich die drei Kräfte P, Q und R zu einander verhalten wie die Linien AB, AC und AD, und da in dem Parallelogramme ABCD die Seite AB = CD, so verhalten sich die drei Kräfte wie die Seiten CD, CA und AD des Dreiecks ACD. Diese Seiten selbst aber verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, und wegen der Parallelen ist Winkel CDA = Winkel BAD, und Winkel ACD das Supplement des Winkels BAC, hat also mit ihm gleichen Sinus; es ist folglich $P : Q : R = \sin CAD : \sin BAD : \sin BAC$.

Das heißt: wird die Resultante der beiden Kräfte P und Q durch den Sinus des von diesen beiden Kräften gebildeten Winkels dargestellt, so werden die beiden Kräfte P und Q respective durch die Sinus der zwischen ihren Richtungen und der Resultante liegenden Winkel dargestellt; oder: **jede der drei Kräfte P, Q, R verhält sich wie der Sinus des von den Richtungen der beiden andern Kräfte gebildeten Winkels.**

§. 37.

Hieraus, und noch besser aus der unmittelbaren Betrachtung des Parallelogrammes der Kräfte, erhellt, daß, wenn zwei Kräfte, unter einem Winkel, der nicht = 180° ist, auf einen und denselben Punct wirken, ihre Resultante nie gleich Null sein kann, so lange wenigstens nicht die Kräfte selbst gleich Null sind.

Denn ist keine von den beiden Kräften = 0, so kann man aus den ihre Richtung und Größe angebenden Geraden ein Parallelogramm construiren, dessen Diagonale die Richtung und Größe der Resultante angibt.

Wäre nur eine von ihnen = 0, so ist die zweite die Resultante, und folglich die Resultante nicht = 0, so lange nicht beide Kräfte zugleich = 0 sind.

Wäre der Winkel, unter welchem die beiden Kräfte auf den Punct wirken, = 180°, so sind die Kräfte einander entgegengesetzt, und die Resultante ist dann nicht nur = 0, wenn beide Kräfte zugleich $= 0$ sind, sondern auch, wenn sie einander gleich sind.

§. 38.

Folgesatz II. Man kann eine gegebene Kraft R immer in zwei andere Kräfte P und Q (Fig. 15) zerlegen, die nach den geraden Linien AP und AQ gerichtet sind, wenn nur diese Geraden mit der Richtung der gegebenen Kraft in dieselbe Ebene fallen und mit ihr in demselben Puncte zusammenlaufen. Denn nimmt man auf der Richtung der Kraft R ein Stück AD, das ihre Größe darstellt, und zieht dann durch D die Geraden DC und DB parallel zu AP und AQ, so erhält man das Parallelogramm ABDC, dessen Seiten AB und AC die verlangten Kräfte P und Q darstellen.

Will man ihre Größe unmittelbar berechnen, so dienen dazu die Verhältnisse

$$R : P = \sin BAC : \sin CAD$$

und $$R : Q = \sin BAC : \sin BAD,$$

in welchen beiden Gleichungen nur zwei unbekannte Größen P und Q vorkommen.

§. 39.

Wäre Winkel $BAC = 90°$, so hätte man (den Radius $= 1$ angenommen) $\sin BAC = 1$, $\sin CAD = \cos BAD$, $\cos CAD = \sin BAD$, und die beiden Verhältnisse würden nun

$$R : P = 1 : \cos BAD,$$

und $$R : Q = 1 : \cos CAD,$$

also $P = R \,.\, \cos BAD$ und $Q = R \,.\, \cos CAD$.

Zerlegt man also eine Kraft in zwei andere rechtwinklig auf einander gerichtete, so findet man jede dieser Kräfte durch das Product aus der gegebenen Kraft in den Cosinus des Winkels, den die Richtung dieser Kraft mit der Richtung der gegebenen Kraft einschließt.

Jede Seitenkraft wird also durch die Projection der Resultante auf ihre eigene Richtung dargestellt, und diese Projection heißt oft die nach dieser Richtung genommene Kraft. So ist also $R \,.\, \cos BAD = P$ die Kraft R in Bezug auf die Richtung AP.

§. 40.

Folgesatz III. Kann man die Resultante zweier auf einen Punct wirkenden Kräfte bestimmen, so kann man auch die Resultante beliebig vieler, auf denselben Punct A wirkenden Kräfte P, Q, R, S .... bestimmen, die beliebig im Raume gerichtet sind. Denn man nimmt erst zwei Kräfte P und Q, die denn in einer und derselben Ebene liegen müssen, und bestimmt ihre Resultante, wie vorhin gezeigt ist. Wäre diese X, so sucht man dann die Resultante von X und der dritten Kraft R, welche Y sein mag. Hierauf wird die Resultante Z zwischen Y und S gefunden, welche also die gemeinschaftliche Resultante der vier Kräfte P, Q, R, S ist; auf diese Weise fährt man fort, indem man immer die zuletzt gefundene Resultante mit einer der folgenden Kräfte verbindet.

Liegen alle Kräfte P, Q, R, S .... in derselben Ebene, so werden die allmäligen Resultanten X, Y, Z ...., und damit denn auch die gemeinschaftliche Resultante gleichfalls in dieser Ebene liegen.

Sind alle Kräfte im Gleichgewichte, so wird die gemeinschaftliche Resultante $= 0$ sein. Aus dieser allmäligen Zusammensetzung mehrer Kräfte um einen und denselben Punct erhellt dann auch, daß, wenn man im Raume ein Polygon entwirft, dessen successive Seiten den Kräften parallel und proportional sind, die gerade Linie, welche den Umriß vollendet und also das Polygon schließt, der gemeinschaftlichen Resultante aller Kräfte parallel und proportional ist, sodaß, wenn das Polygon sich selbst schließt, die Resultante $= 0$

ist, und die Kräfte um den Punct, auf welchen sie wirken, im Gleichgewichte sind.

Das folgende Theorem ist im Grunde nur ein einzelner Fall dieses eleganten Satzes; weil es jedoch in der Mechanik häufig vorkommt, so wollen wir es besonders aufstellen und beweisen.

§. 41.

Lehrsatz V. Werden die drei Kräfte X, Y, Z, die an demselben Puncte A (Fig. 16) im Raume wirken, durch die drei Geraden AB, AC, AD dargestellt, und vollendet man das Parallelepipedum A....F: so gibt die Diagonale AF dieses Parallelepipedums die Resultante der drei Kräfte.

Denn X und Y geben als die beiden Seiten des Parallelogramms ABGC zur Resultante die Kraft P, welche durch die Diagonale dieses Parallelogramms dargestellt wird. Dann ist, weil AD gleich und parallel zu GF ist, AGFD ein Parallelogramm, und folglich geben die beiden Kräfte P und Z zur Resultante eine Kraft R, welche die Diagonale dieses Parallelogramms, zugleich aber auch die Diagonale des Parallelepipedums ist.

§. 42.

Bemerkung. Es heißt hier wieder wie im (§. 37), daß, sobald die Kräfte X, Y, Z nicht in derselben Ebene liegen, sie nie zur Resultante Null geben können, so lange nicht jede von ihnen selbst Null ist.

Denn ist keine von ihnen Null, so kann man jedesmal das Parallelepipedum construiren, dessen Diagonale dann die Resultante der Größe und Richtung nach angibt. Wäre nur eine von ihnen Null, so haben die beiden andern, welche der Annahme nach nicht in eine Gerade zusammenfallen, eine Resultante.

Wären endlich zwei von ihnen zugleich Null, so ist die dritte selbst die Resultante, und die drei zusammenzusetzenden Kräfte **X**, **Y**, **Z** müssen also alle drei zugleich Null sein, wenn ihre Resultante Null sein soll.

§. 43.

Folgesatz **I.** Aus dem vorstehenden Lehrsatze, welchen man das Parallelepipedum der Kräfte nennen könnte, erhellt, daß sich eine Kraft R immer in drei andere zerlegen läßt, deren Richtungen mit drei im Raume gegebenen Geraden parallel sind, wenn nur nicht zwei dieser Geraden selbst parallel sind.

Denn nimmt man AF als Größe der Kraft R an und zieht durch den Angriffspunct A drei Gerade, welche respective den gegebenen Geraden parallel sind, legt dann durch A drei unbestimmte Ebenen **XY**, **YZ** und **XZ**, und eben so durch **F** drei andere, den vorigen respective parallele Ebenen: so bestimmen diese sechs Ebenen ein Parallelepipedum, dessen drei zusammenstoßende Kanten AB, AC, AD die drei Seitenkräfte **X**, **Y**, **Z** darstellen.

§. 44.

Folgesatz **II.** Ist das Parallelepipedum rechtwinklig, so hat man im Rectangel ADFG die Gleichung $AF^2 = AD^2 + AG^2$, und im Rectangel ABGC die Gleichung $AG^2 = AC^2 + AB^2$; substituirt man also für **AG** aus der zweiten Gleichung in die erste, so erhält man

$$AF^2 = AD^2 + AC^2 + AB^2$$

oder $$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Daraus folgt denn $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ als Werth der Resultante in einer Function der drei Seitenkräfte.

§. 45.

Will man die drei Seitenkräfte durch die Resultante und durch die mit ihr gebildeten Winkel ausgedrückt erhalten, und ist α der Winkel, welchen die Resultante R mit der Seitenkraft X macht: so hat man offenbar $AF : AB = 1 : \cos\alpha$, oder $R : X = 1 : \cos\alpha$, woraus $X = R\cos\alpha$ folgt.

Sind eben so β und γ die Winkel, welche die Resultante respective mit Y und Z bildet, so hat man auf gleiche Weise $Y = R\cos\beta$ und $Z = R\cos\gamma$. Daraus folgt denn: die respectiven Seitenkräfte sind die Producte der Resultante in die Cosinus der respectiven Winkel, welche die Richtung der Resultante mit den Richtungen der Seitenkräfte bildet.

§. 46.

Bemerkung. Da $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ war, so erhält man, wenn man für X, Y, Z die gefundenen Werthe $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$ setzt,

$$R^2 = R^2\cos\alpha^2 + R^2\cos\beta^2 + R^2\cos\gamma^2, \text{ oder}$$

$$R^2 = R^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2);$$

woraus folgt $1 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2$.

Es ist dies die bekannte Gleichung unter den drei Winkeln, welche eine Gerade mit drei rechtwinkligen Axen im Raume einschließt.

Abtheilung II.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare.

§. 47.

Der Abkürzung wegen nennen wir zwei Kräfte **P** und — **P** (Fig. 17), die gleich, parallel und entgegengesetzt sind, aber nicht an einem Puncte wirken, ein Kräftepaar oder schlechtweg ein Paar. Das gemeinschaftliche Perpendikel **AB** zwischen beiden Richtungen mag dessen Hebelarm, und das Product aus einer der Kräfte in den Hebelarm mag Moment des Paares heißen.

Wie auch die Wirkung eines Kräftepaares **P** und — **P** beschaffen sein mag, so wissen wir aus (§. 27), daß man ihr nie durch eine einzige Kraft, die man auf den Körper, an dem das Paar wirkt, anbringen mag, wie man will, das Gleichgewicht halten kann, daß folglich die Wirkung eines Paares sich nicht mit der Wirkung einer einzigen Kraft vergleichen läßt. Um diese neue Ursache der Bewegung, die gewissermaßen eine ganz besondere ist, zu unterscheiden, könnte man sie Energie nennen. Da, wie man leicht sieht, die Energie eines Paares durch ihr Moment gemessen wird, so kann man die letztere Benennung oft für die erstere substituiren, oder eine für die andere nehmen.

Die Zusammensetzung der Paare bildet den zweiten wesentlichen Theil dieser Principien der Statik, und wir werden im Verlaufe dieses Werkes eben so oft Gelegenheit haben, auf sie zurückzukommen, als auf die Zusammensetzung von Kräften. Die einfache und natürliche Weise, wie daraus die Gesetze des Gleichgewichts hervorgehen, rechtfertigt es hinlänglich, daß wir uns bei der Betrachtung eines einzelnen Falles aufzuhalten scheinen, wodurch wir vielleicht den allergeradesten Weg zum Ziele einschlagen.

Was hier über Paare gesagt wird, ist durchaus von ihrer Wirkung auf einen Körper unabhängig. Will man sich aber von dem respectiven Sinne der verschiedenen in derselben Ebene liegenden Paare eine deutliche Vorstellung machen, so denke man sich die Hebelarme in ihrer Mitte fixirt; dann strebt offenbar jedes Paar den Körper um den Mittelpunct seines Armes zu drehen, und man unterscheidet nun leicht den Sinn der Paare, indem die einen Paare den Körper nach diesem, die andern ihn nach dem entgegengesetzten Sinne zu drehen streben. Jedoch vergesse man nicht, daß kein Punct fixirt ist, so lange wir es wenigstens nicht ausdrücklich erinnern, und daß die rein zufällige Idee der Rotation nur zu einem Hülfsbilde dient.

§. 48.

Wir haben oben gesehen, daß eine Kraft in jeden Punct ihrer Richtung versetzt werden kann, wenn nur dieser Punct mit dem ersten Angriffspuncte auf unveränderliche Weise verbunden ist. Folgendes ist ein ganz ähnlicher, eben so wichtiger Satz für Paare, von dem wir im Folgenden häufig Gebrauch machen werden.

§. 49.

Hülfssatz. Ein jedes Kräftepaar kann beliebig in seiner Ebene oder auch in jede andere parallele Ebene versetzt und in dieser Ebene beliebig gedreht werden, ohne daß dadurch seine Wirkung auf den Körper, an dem es angebracht ist, verändert würde, wenn nur der neue Hebelarm mit dem ersten auf unveränderliche Weise verbunden ist.

Um diesen Satz leichter beweisen zu können, wollen wir ihn in zwei andere zerlegen.

Mag zuerst das Paar (P, $-P$) (Fig. 18) rechtwinklig auf AB wirken. Man nehme in der Ebene des Paares oder in jeder beliebigen Parallelebene beliebig eine AB gleiche und parallele Gerade CD; verbinde A und D, B und C durch gerade Linien: so liegen diese in derselben Ebene und schneiden sich in ihren respectiven Mittelpuncten. AB und CD sehen wir als auf unveränderliche Weise mit einander verbunden an.

Bringt man an der Geraden CD parallel zu den Kräften P und — P zwei einander entgegengesetzte, dem gegebenen Paare gleiche und also auch unter sich gleiche Paare (P′, — P′) und (P″, — P″) an, so vernichten sich diese beiden offenbar, es wird also durch sie die Wirkung des Paares (P, — P) nicht gestört. Eben so vernichten sich auch die Paare (P, — P) und (P″, — P″), denn da I der Mittelpunct von AB und BC zugleich ist, so geben die beiden auf AD wirkenden gleichen und parallelen Kräfte P und P″ eine Resultante, welche der Resultante der beiden auf AB wirkenden Kräfte — P und — P″ völlig gleich und entgegengesetzt ist. Man kann also die Paare (P, — P) und (P″, — P″) gegen einander fortlassen, und behält so nur das Paar (P′, — P′) auf CD angebracht, welches also mit dem gegebenen Paare (P, — P) dieselbe Wirkung hat. Auf diese Weise ist gleichsam das Paar (P, — P) parallel zu sich selbst versetzt, sodaß sein Hebelarm AB jetzt in der Lage CD liegt.

Es wirke zweitens das Kräftepaar (P, — P) (Fig. 19) rechtwinklig auf AB. Man ziehe in der Ebene dieses Paares unter einem beliebigen Winkel mit AB durch die Mitte von AB eine Gerade CD, sodaß CI = ID = AI = IB. Beide Geraden seien in dieser Lage unveränderlich mit einander befestigt.

Bringt man unter einem rechten Winkel auf CD zwei entgegengesetzte, unter sich und dem gegebenen Paare (P, — P) gleiche Paare (P′, — P′) und (P″, — P″) an, so vernichten sich die beiden Paare, und stören also die Wirkung des Paares (P, — P) nicht. Es vernichten sich aber auch die Paare (P, — P) und (P″, — P″), denn die beiden sich in G begegnenden Kräfte P und — P″, welche sich gleich sind, geben eine Resultante, die der Resultante der beiden gleichen sich in H begegnenden Kräfte — P und P″ gleich und entgegengesetzt ist. Man kann also die beiden Paare (P, — P) und (P″, — P″) gegen einander fortlassen, und es bleibt nur noch das Paar (P′, — P′) übrig auf CD angebracht, was ganz mit (P, — P) gleichwirkend ist, wodurch dieses also gleichsam parallel zu sich selbst versetzt ist, sodaß der Arm AB in der geneigten Lage CD liegt.

Aus diesen beiden Sätzen folgt denn, daß man jedes beliebige Paar in seiner Ebene oder in jeder andern parallelen Ebene in jede beliebige Lage versetzen kann, ohne die Wirkung desselben zu ändern; denn man kann es zuerst parallel zu seinen Kräften in die gegebene Ebene versetzen, sodaß die Mitte seines Hebelarmes in den gegebenen Punct fällt, und dann kann man es um diesen Punct so drehen, daß es die verlangte Lage hat; oder man kann es auch zuerst in seiner Ebene so drehen, daß seine Kräfte den verlangten Richtungen parallel sind, und es dann parallel zu seinen Kräften unmittelbar in die gewünschte Lage bringen.

Verwandlung der Kräftepaare; Maaß derselben.

§. 50.

Hülfssatz. Ein beliebiges, an dem Arme AB (Fig. 20) wirkendes Kräftepaar (P, — P) kann in ein anderes (Q, — Q) verwandelt werden, das denselben Sinn hat und auf den Arm BC wirkt, der von dem ersten verschieden ist, wenn nur $P : Q = BC : AB$ oder $P \,.\, AB = Q \,.\, BC$ ist, d. h. wenn die Momente der Paare gleich sind.

Verlängert man AB bis C und bringt auf BC parallel zu den Kräften P und — P zwei gleiche und entgegengesetzte Paare (Q, — Q) und (Q′, — Q′) an, so ist ihre Wirkung Null, und folglich die Wirkung des Paares (P, — P) dadurch nicht geändert. Nimmt man aber auf der andern Seite an, daß die Kräfte P und Q und also auch P und Q′ sich umgekehrt verhalten wie die Geraden AB und BC: so geht ihre Resultante, die $= P + Q'$ ist, durch B und vernichtet offenbar die entgegengesetzten Kräfte $-P-Q'$, die hier angebracht sind. Man kann also die vier Kräfte P, Q', $-P$, $-Q'$ fortlassen, und es bleibt dann nur das Paar $(Q, -Q)$ auf BC wirkend, welches also dem auf AB wirkenden Paare $(P, -P)$ substituirt werden kann.

§. 51.

Folgesatz. Daraus folgt, daß die Energien der Kräftepaare ihren Momenten proportional sind.

Denn zuerst ist klar, daß die Energien der beiden Paare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (Fig. 21), welche an den gleichen Hebelarmen AB und CD wirken, sich wie die Kräfte dieser Paare verhalten; stehen z. B. die Kräfte P und Q in dem Verhältnisse zu einander wie zwei ganze Zahlen, etwa 5 und 3: so kann man jede Kraft P und $-P$ in 5 gleiche, und eben so jede Kraft Q und $-Q$ in 3 gleiche Kräfte theilen, die alle unter sich gleich sind; das Paar $(P, -P)$ kann dann als die Summe von 5 gleichen Paaren von demselben Sinne, eines am andern angebracht, und eben so das Paar $(Q, -Q)$ als die Summe von 3 gleichen Paaren von demselben Sinne, eines an dem andern angebracht, betrachtet werden. Die Energien der Paare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ verhalten sich also wie 5 zu 3, oder wie P zu Q. Sind die Kräfte P und Q incommensurabel, so hilft man sich auf die bekannte Weise.

Es seien nun $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ zwei beliebige Paare, p sei der Arm des ersten, q der Arm des zweiten: dann ist das Paar $(Q, -Q)$, welches auf q wirkt, gleichwirkend mit dem Paare $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$, welches auf p wirkt, weil die beiderseitigen Momente gleich sind, indem das erste Qq und das zweite $\frac{q}{p}Q : p = Qq$ ist. Statt der zwei gegebenen Paare hat man also nun die beiden $(P, -P)$ und $(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q)$, die einen und denselben Hebelarm haben. Die Energien M und N dieser beiden Paare verhalten sich aber wie ihre Kräfte, man hat also $M : N = P : \frac{q}{p}Q$, oder $M : N = Pp : Qq$

§. 52.

Da die Energien zweier Paare sich verhalten wie ihre Momente, so sind die Momente das Maaß derselben; denn nimmt man als Energie-Einheit die Energie eines Paares, dessen beide Kräfte gleich sind der Krafteinheit, und dessen Hebelarm gleich ist der Längeneinheit: so wird die Energie des Paares $(P, -P)$ am Hebelarme p so oft die Energie-Einheit in sich enthalten, als das Moment $P \cdot p$ das Moment $1 \cdot 1$, oder die Einheit, in sich schließt.

§. 53.

Bemerkung. Um die Energien der Paare zu vergleichen, könnte man auch statt der Producte Pp, Qq der Kräfte in ihre rechtwinkligen Hebelarme die Producte der Kräfte in die zu ihren Richtungen geneigten Hebelarme nehmen, es müßte dann aber für alle Paare der Hebelarm denselben Winkel mit den Kräften bilden. Denn dann würden offenbar die geneigten Hebelarme den rechtwinkligen, und mithin auch die neuen Momente den alten proportional sein.

Wir werden uns zuweilen dieser neuen Momente als relatives Maaß der verschiedenen Paare bedienen, bemerken jedoch, daß nur die erstern Momente ein absolutes Maaß ihrer Energien sind.

Zusammensetzung der Kräftepaare, die in derselben Ebene oder in Parallelebenen liegen.

§. 54.

Lehrsatz I. Zwei beliebig in derselben Ebene oder in Parallelebenen liegende Paare lassen sich immer in ein Paar zusammensetzen, das gleich der Summe jener Paare, wenn sie nach demselben Sinne, oder gleich der Differenz derselben ist, wenn sie nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Zuerst kann man die beiden Paare in dieselbe Ebene, darauf die Kräfte in Parallelismus bringen, sie dann in zwei gleichwirkende verwandeln, welche einen und denselben Hebelarm haben, und sie endlich an einander anbringen.

Wären P und Q die zusammenzusetzenden Kräfte der beiden Paare, p und q die respectiven Hebelarme, und D die Länge des den verwandelten Paaren gemeinschaftlichen Hebelarmes: so kann man statt des Momentes Pp des Paares $(P, -P)$ das gleichwirkende Moment eines Paares $(P', -P')$ nehmen, wo $P'D = Pp$. Eben so substituirt man für das Moment Qq das Moment $Q'D$ eines gleichwirkenden Paares. Werden nun diese verwandelten Paare an einander an demselben Hebelarme D angebracht, so hat man ein einziges Paar $[(P' + Q'), -(P' + Q')]$, dessen Moment $(P' + Q')D$ oder $P'D + Q'D = Pp + Qq$ ist.

Das resultirende Moment ist also gleich der Summe der zusammenzusetzenden Momente *) oder auch gleich ihrer Differenz, je nachdem die an den Enden des Hebelarmes D wirkenden Kräfte einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben.

---

*) Man könnte sich auch hier des Ausdrucks: mittleres Moment und Seitenmomente, Seitenpaare bedienen.

Anm. des Übers.

Folgesatz. Durch diese Zusammensetzung je zweier Paare kann man denn auch beliebig viele auf irgend eine Weise in derselben Ebene oder in Parallelebenen liegende Paare zusammensetzen, und man erhält immer ein Paar, welches gleich ist der Summe der nach einem Sinne gerichteten Paare weniger der Summe der nach dem entgegengesetzten Sinne gerichteten Paare.

Zusammensetzung der Kräftepaare, die in beliebigen Ebenen liegen.

§. 55.

Lehrsatz II. Zwei beliebig in zwei sich unter irgend einem Winkel schneidenden Ebenen liegende Paare lassen sich immer in ein einziges Paar zusammmensetzen.

Und stellt man die Momente dieser Paare durch respectiv lange, unter dem Winkel der Ebenen gegen einander geneigte gerade Linien dar, und vollendet daraus das Parallelogramm: so gibt die Diagonale desselben das Moment des resultirenden Paares, und die Ebene dieses Paares theilt den Winkel der beiden gegebenen Ebenen eben so, wie die Diagonale des Parallelogramms den Winkel zwischen den beiden anliegenden Seiten theilt.

Mögen die beiden gegebenen Paare in den zwei sich in **AG** (Fig. 22.) schneidenden Ebenen **AGM** und **AGN** liegen, und nehmen wir an, man habe zuvor die beiden Paare in zwei andere respective gleichwirkende verwandelt, welche denselben Hebelarm haben.

Wo auch das Paar **(P, — P)** in der Ebene **AGM** liegen mag, so kann man es immer in dieser Ebene unter rechtem Winkel auf die Durchschnittslinie **AG** anbringen, sodaß sein Hebelarm **AB** in der Geraden **AG** liegt (§. 49). Eben so kann man das Paar (Q, — Q), wie es auch in der Ebene AGN liegen mag, unter rechtem Winkel auf AG anbringen, sodaß sein dem ursprünglichen gleicher Hebelarm mit AG in AB zusammenfalle.

Dann setzen sich die zwei in A angebrachten Kräfte P und Q in eine einzige R zusammen, die gleichfalls in A wirkt und durch die Diagonale des Parallelogramms QARP, wo AQ und AP die Kräfte Q und P darstellen, repräsentirt wird. Eben so setzen sich die Kräfte — P und — Q in eine einzige — R zusammen, die auf B wirkt und zu R parallel und ihr gleich ist. Man hat also statt der Paare (P, — P) und (Q, — Q) das einzige Paar (R, — R), das an demselben Hebelarme AB angebracht ist. Da diese drei Paare denselben Hebelarm haben, so sind ihre respectiven Energien den drei Kräften P, Q, R proportional. Stellt man also die Energien der beiden zusammenzusetzenden Paare durch die ihnen proportionalen Geraden AP und AQ dar, so gibt die Diagonale des Parallelogramms APRQ aus diesen Geraden die Energie des resultirenden Paares an. Nun messen aber die von den Geraden AP, AQ, AR gebildeten Winkel die Winkel der drei Ebenen mit einander; es theilt also die Ebene des resultirenden Paares den Winkel der beiden Ebenen eben so, wie die Diagonale AR den Winkel PAQ der anliegenden Seiten AP und AQ theilt, womit unser Satz bewiesen ist.

§. 56.

Folgesatz I. Man kann also immer beliebig viele, auf einen Körper auf beliebige Weise im Raume angebrachte Paare in ein einziges zusammensetzen; denn indem man immer je zwei und zwei mit einander verbindet, erhält man endlich ein einziges Paar, dessen Ebene und Energie bekannt ist, und welches mit allen gegebenen Paaren gleichwirkend sein wird.

§. 57.

Folgesatz II. Man kann auch ein Paar in zwei andere in gegebenen Ebenen liegende Paare zerlegen, wenn nur diese Ebenen und die Ebene des gegebenen Paares sich in einer Geraden schneiden (oder auch nur in parallelen Geraden, denn indem man die Ebene eines der Paare parallel zu sich selbst versetzt, was nach (§. 49) gestattet ist, vereinigt man die parallelen Durchschnitte immer in eine einzige Gerade).

Um diese Zerlegung zu bewirken, verfährt man umgekehrt, wie vorhin für die Zusammensetzung zweier Paare gezeigt ist, oder auch, man verfährt auf folgende sehr einfache Weise, von der wir hin und wieder Gebrauch machen werden.

§. 58.

Es sei **AZ** (Fig. 23.) der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Ebenen. Man ziehe durch sie beliebig eine Ebene **YAX**, welche jene drei respective in den Geraden **AY**, **AV**, **AX** schneidet. **ZAV** sei die Ebene des gegebenen Paares.

Wie auch das Paar (**P**, — **P**) in der Ebene **ZAV** liegen mag, so kann man es so legen, daß seine Kräfte parallel zum Durchschnitte **AZ** sind, und daß die Richtung einer dieser Kräfte, z. B. von — **P**, mit **AZ** selbst zusammenfällt. Dann wird die andere Kraft **P** die Linie **AV** in **B** schneiden, und man hat das Paar (**P**, — **P**), das auf irgend eine Weise an **AB** angebracht ist, wie man es in der Figur sieht. Man bilde nun nach den Richtungen **AY** und **AX** mit **AB** als Diagonale das Parallelogramm **BCAD** und bringe in **D** oder **C**, in **D** z. B., zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte **P′**, — **P′** an, die den Kräften **P** und — **P** des gegebenen Paares gleich und parallel sind. Die Wirkung wird dadurch nicht geändert. Statt des an **AB** wirkenden Paares (**P**, — **P**) kann man nun aber zwei andere nehmen, eines (P′, — P), welches auf AD in einer der gegebenen Ebenen ZAY wirkt, und das andere (P, — P′), welches auf AB parallel zu der andern gegebenen Ebene ZAX wirkt. Dieses Paar kann ferner parallel zu sich selbst in die Ebene ZAX auf AC = DB versetzt werden, und man hat dann statt des Paares (P, — P), das auf AB wirkt, zwei Paare (P′, — P) und (P, — P′), die aus den den ersten Kräften gleichen und parallelen Kräften bestehen und in den beiden gegebenen Ebenen an den Geraden AD und AC wirken.

§. 59.

Bemerkung. Wäre die Ebene YAX senkrecht auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt AZ der Ebenen der drei Paare gelegt, so würden die Kräfte dieser Paare senkrecht auf die Linien AY, AV, AX sein, und da die Kräfte gleich sind, so wären die Momente der Paare den Hebelarmen AD, AB, AC proportional. Nach dem eben Gesagten erhielte man dann wieder das Theorem (§. 55) und hätte also somit einen zweiten neuen Beweis dieses Lehrsatzes.

Einfachere Weise, die Lehrsätze über die Zusammensetzung der Paare darzustellen.

§. 60. (Fig. XV)

Statt die Lage eines Paares durch die Lage seiner Ebene zu bestimmen, dient dazu auch die Richtung irgend eines Lothes auf diese Ebene, welches wir Axe des Paares nennen wollen. Man kann ein Paar beliebig in seiner Ebene oder in jeder andern Parallelebene versetzen (§. 49), und man kennt offenbar die Lage dieses Paares, wenn man die Richtung seiner Axe kennt, denn indem man in einem beliebigen Puncte auf diese Axe eine lothrechte Ebene errichtet, hat man jedesmal die Ebene des gegebenen Paares. Dadurch läßt sich das eben bewiesene und auch das folgende Theorem in Worten und im Calcule viel bequemer darstellen.

§. 61. ([illegible] XVII.)

Es sei **ALGM** (Fig. 24) ein Parallelogramm, und es seien in den Seiten **AL**, **AM** und der Diagonale **AG** drei Ebenen senkrecht auf die Ebene des Parallelogramms errichtet. Liegen nun in den beiden ersten Ebenen zwei Paare, deren respective Momente durch die beiden Seiten **AL**, **AM** repräsentirt sind, so setzen sie sich nach (§. 58) in ein einziges zusammen, welches in der dritten Ebene liegt, und dessen Moment durch die Diagonale **AG** angegeben wird.

Zieht man ferner durch **A** in der Ebene des Parallelogramms drei Geraden **AL′**, **AG′**, **AM′** senkrecht zu den drei respectiven Geraden **AL**, **AG**, **AM**, so werden diese drei Linien respective senkrecht auf die Ebenen der drei Paare sein und dieselben Winkel bilden, wie die Linien **AL**, **AG**, **AM**; macht man also **AL′** = **AL**, **AG′** = **AG**, **AM′** = **AM**, so erhält man ein Parallelogramm **AL′G′M′**, das dem Parallelogramme **ALGM** völlig identisch ist.

Wir haben also den Satz: werden zwei in zwei respective auf die Seiten eines Parallelogramms **AL′G′M′** senkrechten Ebenen liegende Paare ihrer Größe nach durch die Längen **AL′**, **AM′** dieser Seiten ausgedrückt, so wird das resultirende Paar in der auf der Diagonale senkrechten Ebene liegen und der Größe nach durch die Länge **AG′** dieser Diagonale dargestellt sein.

Oder einfacher:

Werden zwei Paare den Axen und der Größe nach durch die zwei Seiten eines Parallelogramms dargestellt, so setzen sie sich in ein Paar zusammen, das der Axe und Größe nach durch die Diagonale dieses Parallelogramms dargestellt wird.

Um überdies den Sinn der drei Paare zu kennen, muß der Sinn jedes Paares oder die Rotation, die es zu bewirken strebt, so angenommen werden, daß, wenn man die beiden Seiten AL', AM' auf die Diagonale AG' bringt, die drei Rotationen auf diesen Axen alle nach demselben Sinne geschehen. Auf diese Weise werden denn die Geraden, welche in der Figur die Größe der Paare und die Axen derselben darstellen, auch ihren relativen Sinn angeben.

§. 62.

Ganz analog dem im (§. 37) Gesagten beweist man auch hier, daß zwei Paare in zwei sich schneidenden Ebenen oder in nicht parallelen Ebenen niemals ein resultirendes Paar geben können, das Null wäre, wenn nicht die beiden gegebenen Paare selbst beide zugleich Null sind.

§. 63.

Bemerkung. Sind die beiden zusammenzusetzenden Paare senkrecht auf einander, so sind es auch die Perpendikel auf diese Ebenen oder die beiden Axen AL', AM', und man hat in dem Rectangel $AL'G'M'$, $AG'^2 = AL'^2 + AM'^2$. Nennt man ferner die Winkel der Seiten AL' und AM' mit der Diagonale AG', α und β, so hat man $AL' = AG' \cos\alpha$, $AM' = AG' \cos\beta$.

Bezeichnet man also die drei respectiven Momente mit L, M, G, so hat man für das Moment G, $G^2 = L^2 + M^2$, also $G = \sqrt{(L^2 + M^2)}$, und für die Winkel, welche die Axe dieses Momentes mit den Axen der beiden andern Momente macht, $L = G \cos\alpha$ und $M = G \cos\beta$, also $\cos\alpha = \frac{L}{G}$, und $\cos\beta = \frac{M}{G}$.

§. 64.

Lehrsatz III. Drei Paare, welche ihren Axen und ihrer Größe nach durch die drei Kanten eines Parallelepipedums dargestellt werden, setzen sich immer in ein einziges Paar zusammen, das seiner Axe und Größe nach durch die Diagonale dieses Parallelepipedums gegeben ist.

Mag AG (Fig. 25) das Parallelepipedum sein, AL, AM, AN die Axen und Momente der drei Paare repräsentiren.

Die beiden durch die Seiten AL und AM des Parallelogramms ALOM repräsentirten Paare setzen sich in eins zusammen, das durch die Diagonale AO dieses Parallelogramms angegeben wird. Dann setzt sich dieses Paar mit dem durch AN dargestellten dritten der gegebenen Paare in ein Paar zusammen, welches durch die Diagonale AG des Parallelogramms ANGO dargestellt ist. Diese Diagonale ist aber zugleich die Diagonale des Parallelepipedums.

§. 65.

Man sieht hier wie (§. 42), daß drei in den drei Ebenen einer körperlichen Ecke wirkende Paare nie ein resultirendes Paar gleich Null haben können, so lange nicht alle drei Paare zugleich selbst Null sind.

§ 66.

Bemerkung. Ist das Parallelepipedum rechtwinklig, und sind L, M, N die zusammenzusetzenden, G das resultirende Moment, so ist $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$.

Sind λ, μ, ν die drei Winkel, welche die Diagonale oder vielmehr die Axe des resultirenden Paares mit den Axen der drei gegebenen Paare einschließt, so hat man:

$L = G \cos \lambda$; $M = G \cos \mu$; $N = G \cos \lambda$ oder $\cos \lambda = \frac{L}{G}$; $\cos \mu = \frac{M}{G}$, $\cos \nu = \frac{N}{G}$.

Soll man also das resultirende Moment aus den drei gegebenen Momenten, deren Axen rechtwinklig sind, berechnen so ist

$$G = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)};$$

und für die Winkel, $\cos\lambda = \dfrac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$,

$$\cos\mu = \frac{M}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},$$

$$\cos\nu = \frac{N}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}.$$

Will man umgekehrt ein Paar G in drei andere zerlegen, die in drei senkrecht auf einander stehenden Ebenen liegen, oder deren Axen rechtwinkelig zu einander sind: so hat man als respective Werthe der zusammenzusetzenden Momente $L = G\cos\lambda$, $M = G\cos\mu$, $N = G\cos\nu$, wo λ, μ, ν die drei Winkel sind, welche die Axe des gegebenen Paares mit den Axen der gesuchten zusammenzusetzenden Paare bildet.

§. 67.

Wir halten uns dabei nicht länger auf, bemerken nur noch, daß zwischen den sieben Größen L, M, N, G, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ vier Gleichungen Statt finden: $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$; $L = G\cos\lambda$, $M = G\cos\mu$, $N = G\cos\nu$, wodurch man, wenn drei von ihnen bekannt sind, die vier andern finden kann.

Man muß jedoch den Fall ausnehmen, wo die drei Winkel λ, μ, ν gegeben sind, denn aus ihnen kann man nur das Verhältniß der Momente L, M, N, G zu einander bestimmen.

Allgemeiner Schluß aus diesem Capitel.

Zusammensetzung beliebig im Raume gerichteter Kräfte.

§. 68.

Es seien beliebig viele Kräfte P, $P_{\prime}$, $P_{\prime\prime}$, ... auf beliebige Weise im Raume auf irgend einen freien Körper oder ein freies System angebracht.

Betrachten wir zuerst eine dieser Kräfte, z. B. P (Fig. 26), die in B angebracht ist. Man bringe im Puncte A in oder über dem Körper (nur auf unveränderlich feste Weise) zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte P', $-P'$ an, welche der Kraft P gleich und parallel sind: so kann sich dadurch in dem Systeme nichts ändern. Statt der Kraft P in B hat man nun aber die Kraft P' in A und das Paar $(P, -P')$ am Arme AB. Bringt man der größern Deutlichkeit halber dieses Paar in eine beliebige andere Parallelebene, so hat man in A nur noch die Kraft P', welche gleich und parallel zu P ist und betrachtet werden kann, als hätte man die Kraft P aus B in A versetzt.

Nimmt man eben diese Verwandlung mit allen andern auf das System wirkenden Kräften in Bezug auf denselben Punct A vor, so ist klar, daß sich in diesem Puncte alle Kräfte parallel zu sich selbst vereinigen, daß man aber überdies durch die Transposition eben so viele auf das System wirkende Paare erhält. Alle in A wirkenden Kräfte werden sich nun in eine einzige R (Fig. 27), und alle die Paare in ein einziges an einer gewissen Geraden BC wirkendes Paar $(S, -S)$ zusammensetzen.

Das heißt: beliebig viele auf beliebige Weise auf einen Körper wirkende Kräfte lassen sich immer auf eine einzige Kraft und ein einziges

Paar zurückführen, die im Allgemeinen in verschiedenen Ebenen liegen. x)

Im Vorbeigehen bemerken wir, daß die Größe, Richtung und der Sinn der Resultante immer dieselben sind, wo man auch den Punct A genommen haben mag. Verändert man die Lage dieses Punctes, so wird dadurch die Resultante R nur parallel zu sich selbst in einen andern Ort im Raume versetzt. Die Ebene und Energie des Paares (S, — S) ändern sich aber nothwendig.

§. 69.

Folgesatz I., welcher die Gesetze des Gleichgewichts für jedes freie System enthält.

Ein Paar kann nie durch eine einzige Kraft im Gleichgewichte erhalten werden, mag diese im Raume gerichtet sein, wie sie will. Es folgt also aus dem Gesagten, daß in dem Systeme nie Gleichgewicht sein kann, wenn nicht die Resultante R der Kräfte Null, und zugleich das Moment des resultirenden Paares (S, — S) Null ist.

Es müssen also alle auf ein System wirkenden, parallel zu sich selbst in irgend einen Punct des Systems oder des Raums transponirten Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und zugleich alle durch diese Transposition entstehenden Paare im Gleichgewichte sein.

§. 70.

Bemerkung. Es sind dies für irgend ein freies, unveränderliches System die beiden nothwendigen, aber auch hinreichenden Bedingungen, d. h. ohne sie findet kein Gleichgewicht Statt, und es findet nothwendig Gleichgewicht Statt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind.

Zur Entwickelung dieser beiden Bedingungen muß man auf den Werth der Resultante R und den Werth des resultiren-

x) Die Ebene des Paares wird im Allgemeinen gegen die Richtung der einzelnen Kraft geneigt sein.

den Paares (S, — S) mit Beibehaltung der Gesetze, welche die Resultante an die zusammenzusetzenden Kräfte, und das resultirende Paar an die zusammenzusetzenden Paare knüpfen, zurückgehen, dann die Kraft R und das Paar (S, — S) jedes gleich Null machen und die daraus für die auf das System wirkenden primitiven Kräfte entspringenden Bedingungen betrachten. Sie geben alsdann die Bedingungen des Gleichgewichts ausgedrückt durch die unmittelbar in der Aufgabe gegebenen Kräfte, und man hat so die Lösung des Problems, das uns hier vorliegt.

Diese ganze Entwickelung, welche, nach Feststellung der obigen Grundsätze, nur der Geometrie und dem Calcule anheimfällt, soll den Gegenstand des zweiten Capitels ausmachen.

§. 71.

Folgesatz II., welcher die nothwendigen Bedingungen enthält, worunter alle auf ein System wirkenden Kräfte, falls sie nicht im Gleichgewichte sind, eine einzige Resultante haben.

Es sind alle an einem Systeme wirkenden Kräfte auf die angeführte Weise auf eine einzige Kraft R und ein Paar (S, — S) zurückgeführt; wir wollen annehmen, diese Kraft ließe sich mit dem Paare in eine einzige Kraft vereinigen, oder es könne eine einzige Kraft R′ der Kraft R und dem Paare das Gleichgewicht halten.

Weil unter R, R′ und dem Paare (S, — S) Gleichgewicht sein soll, so müssen die beiden Kräfte R und R′ ein Paar bilden, das dem Paare (S, — S) gleichwirkend ist und in derselben Ebene oder in einer Parallelebene (was hier einerlei ist) liegt. Denn es können nur drei Fälle eintreten: entweder lassen sich die Kräfte R und R′ in eine einzige vereinigen, und dann kann diese Resultante nicht dem Paare (S — S,) das Gleichgewicht halten; oder sie vereinigen sich in eine Kraft und ein Paar, und dann lassen sich dieses Paar und das Paar (S, — S) in ein einziges vereinigen, welches mit der Kraft nicht im Gleichgewichte sein kann; oder endlich, sie vereinigen sich in ein Paar. Der letzte Fall ist der allein mögliche.

Erstens also müssen die beiden Kräfte R und R′ zusammen ein Paar bilden. Damit aber dieses Paar mit dem Paare (S, — S) im Gleichgewichte sei, muß jenes in derselben oder in einer Parallel-Ebene liegen, denn sonst lassen sich die beiden Paare immer in ein einziges vereinigen, das nicht $= 0$ sein kann (§. 62), wo man also kein Gleichgewicht erhielte. **Es muß also die Richtung der Resultante R parallel zur Ebene des resultirenden Paares (S, — S) sein. Folglich können alle auf ein System wirkenden Kräfte sich nicht auf eine einzige zurückführen lassen, wenn nicht die Resultante aller dieser in einen einzigen Punct parallel zu sich selbst transponirten Kräfte eine zu der Ebene des resultirenden Paares parallele Richtung hat, wo im Raume man auch den Punct zur Transposition der Kräfte genommen haben mag.**

Diese Bedingung ist nothwendig, und sie genügt auch im Allgemeinen; denn, falls wenigstens die Resultante R nicht Null ist, so kann man immer auf das System eine Kraft R′ wirken lassen, welche der R gleich, parallel und entgegengesetzt ist und mit ihr ein Paar (R, — R) gleichwirkend mit dem Paare (S, — S) und von entgegengesetztem Sinne bildet. Diese nach entgegengesetztem Sinne genommene Kraft ist dann die allgemeine Resultante.

Uebrigens kann man diese Resultante unmittelbar nehmen; denn wenn die Kraft R im Puncte A parallel zur Ebene des Paares (S, — S) ist, so kann man dies Paar immer in die Ebene von R transponiren, und dann lassen sich die drei in derselben Ebene liegenden Kräfte R, S und — S immer in eine einzige der R gleiche und parallele Kraft zusammensetzen, welche dann die gemeinschaftliche Resultante aller Kräfte sein wird.

§. 72.

Im Falle die Kraft R Null ist, hat man nicht eine einzige Resultante, weil alle Kräfte des Systems auf ein Paar (S, — S) zurückgeführt sind, welches sich nie in eine einzige Kraft vereinigen läßt. Zu der vorigen Bedingung also, daß die Kraft R parallel zur Ebene des Paares (S, — S) sein müsse, muß noch die besondere hinzugefügt werden, daß die Kraft R nicht Null sein darf, wenigstens wenn nicht Gleichgewicht vorhanden ist, in welchem Falle dann sowohl die Kraft R als das Paar = 0 sein wird, wo man also eine einzige Resultante annehmen könnte, die Null wäre, übrigens eine beliebige Lage und Richtung im Raume haben könnte.

§. 73.

Bemerkung I. Befindet sich das resultirende Paar (S, — S) (Fig. 28) nicht mit der Kraft R in Parallelebenen, so hat man nie eine einzige Resultante. Hier kann man nur das Paar (S, — S) parallel zu seiner Ebene transponiren, bis das Ende B oder C seines Hebelarmes in A fällt, wo sich dann die beiden Kräfte R und S im Puncte A in eine einzige T zusammensetzen, und wo also alle Kräfte des Systems auf zwei, nicht in derselben Ebene liegenden Kräfte T und — S zurückgeführt sind.

Hieraus erhellt denn sogleich, daß beliebig viele, auf beliebige Weise im Raume gerichtete Kräfte sich zum wenigsten auf zwei Kräfte zurückbringen lassen, die nicht in derselben Ebene liegen.

Diese Reduction kann auf unzählige Weisen geschehen, selbst mit Beibehaltung desselben Punctes A, worin die

Kräfte vereinigt werden. Denn das Paar (S, — S) läßt sich in unzählige andere gleichwirkende verwandeln, auch um seine Axe in eine beliebige Lage drehen, sodaß man also unzählig verschiedene Systeme der zwei resultirenden, nicht in derselben Ebene liegenden Kräfte erhalten kann.

Unter diesen Systemen kann man denn dasjenige auswählen, wo die eine Kraft senkrecht zur Ebene des Paares, und die andere parallel dazu ist; denn denkt man sich die Resultante R in zwei Kräfte zerlegt, in V senkrecht und in U parallel zur Ebene des Paares (S, — S), so setzen sich die Kraft U und das paralele Paar (S, — S) immer in eine einzige U′, gleich und parallel zu U zusammen, und alle angebrachten Kräfte sind also auf zwei Kräfte V und U′ zurückgeführt, die im Raume senkrecht auf einander gerichtet sind. Indeß hat diese Reduction, die übrigens eine Ausnahme erleidet, nicht mehr Nutzen als die vorige, und wir halten uns deshalb nicht länger dabei auf.

§. 74.

Bemerkenswerther ist der umgekehrte Satz: **zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte haben nie eine einzige Resultante**, weil man immer annehmen kann, daß diese beiden Kräfte aus einer andern Kraft und einem nicht parallelen Paare hervorgegangen sind.

Um jedoch den Satz unmittelbar zu beweisen, sei AB (Fig. 29) das gemeinschaftliche Perpendikel auf die Richtungen der beiden nicht in derselben Ebene liegenden Kräfte P und Q, von denen jedoch keine Null ist. Man transponire P parallel zu sich selbst von B in A, und man hat dann zwei Kräfte P′ und Q an demselben Puncte A, und ein Paar (P, — P) an AB. Die beiden Kräfte P′ und Q an A machen der Annahme zufolge einen gewissen Winkel mit einander, setzen sich also zu einer Kraft R zusammen, die in den Winkelraum QAP′ fällt. Diese Kraft R kann aber nicht parallel zu der Ebene des Paares ($P, -P'$) sein, weil sie mit dieser Ebene einen Winkel RAP' bildet, der nie Null sein kann, wenn nicht etwa Q Null ist, was der Annahme zufolge nicht der Fall sein soll. Es haben also (nach §. 71) zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte niemals eine einzige Resultante, ein Satz, den man gewöhnlich für evident hält, der indeß eines Beweises bedarf.

§. 75.

Es ist dies übrigens der einzige allgemeine Fall, wo man behaupten kann, daß Kräfte sich nicht auf eine einzige zurückführen lassen; denn sobald man auch nur drei Kräfte betrachtet, so können diese unserer Theorie zufolge eine einzige Resultante haben, selbst wenn die Richtungen dieser drei Kräfte im Raume sich nicht schnitten.

Mögen in der That die drei Kräfte P, Q, R der Art sein, wie wir sie annehmen, so daß sie zwei und zwei nicht in derselben Ebene liegen, oder daß, wenn zwei von ihnen in derselben Ebene liegen, die dritte mit keiner von ihnen in derselben Ebene liege.

Man nehme zwei dieser Kräfte P und Q, welche nicht in derselben Ebene liegen, und denke sie in einen und denselben Punct A auf der Richtung der dritten Kraft R transponirt. Diese beiden Kräfte P und Q setzen sich in eine einzige Kraft V zusammen und geben zwei Paare, welche sich in ein einziges ($S, -S$) zusammensetzen, dessen Ebene nicht durch die Richtung AV der Kraft V geht (§. 74).

Fiele nun die Resultante der beiden Kräfte V und R, welche an A wirken, in die Ebene des durch denselben Punct A gehenden Paares ($S, -S$), so würden sich die drei gegebenen Kräfte P, Q, R auf eine einzige zurückführen lassen (§. 71). Ohne aber die Richtung der Kraft R zu verändern, hat man ihre Größe und ihren Sinn der Art in der Gewalt, daß die Resultante V und R sich in die Ebene der beiden Kräfte um den Punct A drehen läßt, nach dem Durchschnitte dieser Ebene mit der Ebene des Paares (S, — S) gerichtet ist, und folglich in die Ebene des Paares selbst fällt. Richtet man also die Größe und den Sinn einer der drei Kräfte P, Q, R darnach ein, ohne ihre gegenseitige Lage ändern zu brauchen, so lassen sich immer die drei Kräfte im Allgemeinen auf eine einzige zurückführen.

Ich sage im Allgemeinen; denn es gibt einen besondern Fall, wo dies nicht geschieht, wenn nämlich P und Q ein gewisses Verhältniß zu einander haben, und man nur die dritte Kraft R ändern will oder darf; denn tritt der Fall ein, daß der Durchschnitt der Ebene VAR mit der Ebene des Paares die Richtung AR des dritten Paares ist, so kann die Resultante von V und R nicht die Richtung AR haben, ohne daß R unendlich groß wäre, was nicht möglich ist.

Aber auch in diesem Falle wird, sobald man das Verhältniß von P und Q, oder auch nur das Zeichen von einer dieser Kräfte ändert, das aus der Versetzung nach A resultirende Paare (S, — S) nicht mehr in die Richtung der dritten Kraft R fallen; denn ginge nun noch die Ebene des Paares durch dieselbe Gerade AR, so würde daraus folgen, daß AR der gemeinschaftliche Durchschnitt der beiden Ebenen wäre, worin die zusammenzusetzenden Paare des Paares (S, — S) liegen, daß also R in der Ebene von P und in der Ebene von Q zugleich liege, was wider die Annahme ist.

Liegen also von drei Kräften P, Q, R nicht mehr als höchstens zwei in derselben Ebene, so kann man diese drei Kräfte immer auf eine einzige zurückführen, ohne ihre Richtungen im Raume zu verändern.

Der einzige Fall, wo drei Kräfte durch ihre bloße Lage im Raume immer unzurückführbar auf eine einzige Kraft werden, ist der, wo, wenn die Kräfte zwei zu zwei betrachtet werden, nur zwei derselben nicht in derselben Ebene liegen.

§. 76.

Bemerkung II. Da es wohl keines Beweises bedarf, daß ein Paar um einen festen Punct, z. B. um den Mittelpunct seines Hebelarmes, nicht im Gleichgewichte sein kann, so hat man den Unterschied zwischen dem Gleichgewichte mehrer auf einen Körper, der um einen festen Punct rotiren soll, wirkender Kräfte, und dem Gleichgewichte mehrer auf eben diesen Körper wirkender Paare wohl zu merken.

Im ersten Falle muß nicht nothwendig die Resultante der Kräfte Null sein, sondern nur durch den festen Punct gehen, wo sie dann vernichtet wird.

Im zweiten Falle muß das aus den Paaren resultirende Paar in sich nothwendig Null sein, als wäre kein fester Punct im Körper vorhanden; denn ist das resultirende Paar nicht in sich Null, so transponire man es der größern Deutlichkeit halber, bis der Mittelpunct seines Hebelarmes in den festen Punct fällt, und dann können die beiden Kräfte offenbar um diesen Punct nicht im Gleichgewichte sein.

Eben so sind sie nicht im Gleichgewichte, selbst wenn in dem Körper eine feste Axe vorhanden ist, falls nicht die Ebene des Paares durch diese Axe geht, oder mit ihr parallel ist, was hier auf eins herauskommt (§. 49).

Wirken also mehre beliebig im Raume gerichtete Paare auf einen Körper oder ein System, welches der Bedingung, um einen festen Punct zu rotiren, unterworfen ist: so sind die Bedingungen des Gleichgewichts völlig dieselben, als wäre der Körper oder das System ganz frei.

Dasselbe findet für eine feste Axe Statt, wenn nur die Paare so liegen, daß nicht ihr resultirendes Paar zu der

Axe parallel ist, was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird, falls nicht alle Paare in Parallelebenen liegen, welche die feste Axe schneiden.

Zweites Capitel.

Bedingungen des Gleichgewichts.

§. 77.

Wir haben im (§. 68) gesehen, daß jede auf ein System in irgend einem Puncte **B** (Fig. 26) wirkende Kraft **P** in eine andere gleiche, parallele und gleich gerichtete Kraft **P′**, die an einem im Raume beliebig gewählten Puncte **A** angebracht ist, und in ein Paar (**P**, — **P**) verwandelt werden kann, das an **AB** wirkt, und dessen Energie durch das Moment **P . AI**, wo **AI** das Perpendikel aus dem Puncte **A** auf die Direction der Kraft **P** ist, gemessen wird; ferner, daß auf diese Weise das System von der Resultante aller der Kräfte, die sich gewissermaßen parallel zu sich selbst in den Punct **A** transponirt haben, und von dem resultirenden Paare aller der durch diese Transposition entspringenden Paare getrieben wird; endlich, daß für den Zustand des Gleichgewichts sowohl jene Resultante, als das Moment des resultirenden Paares Null sein müsse.

Wir könnten nun sogleich diese beiden Bedingungen für den allgemeinen Fall eines von beliebig vielen Kräften im Raume getriebenen Körpers oder Systems aufstellen und daraus nachher die Bedingungen des Gleichgewichts für alle einzelnen vorkommenden besondern Fälle ableiten. Weil jedoch unser Fortschreiten im Verlaufe dieses Capitels durchaus gleichförmig sein muß, oder vielmehr, weil alle Lehren desselben aus einem und demselben Principe hervorgehen: so wollen wir lieber erst einige besondere Fälle vornehmen, ehe wir die Frage allgemein betrachten. Uebrigens werden wir dabei Gelegenheit haben, mehre Lehren über die Momente mitzutheilen, von denen häufige Anwendung in der Statik gemacht wird.

Ist einmal das allgemeine Theorem für das Gleichgewicht aufgestellt, so ist die Sache abgethan, weil alle particulären Fälle in ihm enthalten sind.

I.

Vom Gleichgewichte der in derselben Ebene liegenden Parallelkräfte.

§. 78.

Mögen **P**, **P′**, **P″** ... (Fig. 30) die verschiedenen Parallelkräfte sein. Man fälle aus einem beliebig in ihrer Ebene angenommenen Puncte **A** ein gemeinschaftliches Perpendikel auf ihre Richtungen, welches diese respective in den Puncten **B**, **C**, **D** .... schneidet.

Betrachten wir nun zuerst die Kraft **P**; man bringe im Puncte **A** zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte **P** und **— P** an, die der erstern Kraft gleich und parallel sind, und man erhält dann statt der einfachen Kraft **P** in **B** eine gleiche und parallele Kraft **P** in **A**, und ein an **AB** wirkendes Paar (**P**, **— P**), dessen Moment **P . AB** ist. Eben so substituire man statt der Kraft **P′** in **C** eine gleiche, parallele und gleich gerichtete Kraft in **A**, und ein Paar (**P′**, **— P′**), das an **AC** wirkt, und dessen Moment **P . AC** ist. Eben so für **P″** u. s. w.

Versetzt man der größern Deutlichkeit halber alle Paare in dieselbe Ebene, so bleiben im Puncte A nur die Kräfte P, P′, P″......, die den ursprünglich gegebenen in B, C, D..... wirkenden Kräften gleich und parallel sind und denselben Sinn haben.

Für den Zustand des Gleichgewichts muß nun 1) die Resultante aller der in A angebrachten Kräfte in sich Null sein. Da aber alle diese Kräfte in derselben Richtung wirken, so ist ihre Resultante gleich ihrer Summe *), und demzufolge hat man

$$P + P' + P'' + \ldots\ldots = 0$$

als erste Bedingung des Gleichgewichts.

2) muß auch das aus allen Momenten der Paare resultirende Moment in sich Null sein. Dies resultirende Moment ist nun gleich der Summe aller zusammenzusetzenden Momente, weil alle Paare in derselben Ebene liegen. Bezeichnet man also der Kürze wegen mit p′, p″, p‴....... die respectiven Hebelarme AB, AC, AD......, so hat man als zweite Bedingungsgleichung für den Gleichgewichtszustand

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots = 0.$$

§. 79.

Bemerkung. Betrachtet man in der ersten Gleichung die Kräfte, welche nach einem Sinne wirken, als positiv, so sind offenbar die nach dem entgegengesetzten Sinne wirkenden negativ. Wir wollen für die Zukunft diejenigen Kräfte als positiv ansehen, welche wie P′ aufwärts von der Geraden AD wirken, und folglich als negativ die niederwärts von dieser Geraden wirkenden Kräfte, wie P, P″. Auf diese Weise ist denn der Satz allerdings richtig, daß

*) Über die Bedeutung des Wortes Summe, hier und im Folgenden, hat man die Bemerkung (§. 79) nachzusehen.

die Summe der Kräfte für den Zustand des Gleichgewichts Null sein müsse.

In Rücksicht der Zeichen der Momente Pp, $P'p'$ ...... in der zweiten Gleichung hat man zweierlei zu berücksichtigen, das Zeichen der Kraft, und das Zeichen des Hebelarmes.

Nimmt man an, die Kraft P verändere ihre Zeichen, bleibe aber auf derselben Seite von A, so wird das in Rücksicht auf den Punct A daraus entstehende neue Paar den entgegengesetzten Sinn mit dem vorigen Paare haben. Es verändert also das Moment Pp das Zeichen, wenn die Kraft P ihr Zeichen ändert.

Behielte dagegen die Kraft P ihr Zeichen, wirkte aber auf der andern Seite von A in B', so ist das in Rücksicht des Puncts A daraus hervorgehende neue Paar von entgegengesetztem Sinne mit dem erstern. Das Moment Pp ändert also sein Zeichen, wenn der Hebelarm p es ändert.

Nimmt man die auf der einen Seite von A, z. B. auf der rechten, liegenden Hebelarme als die positiven an, so sind die Hebelarme auf der linken Seite von A in Rücksicht auf den Punct A negativ; man kann also immer behaupten, daß die Summe der Momente für den Gleichgewichtszustand Null sein muß, wenn man nur den Kräften und Hebelarmen die richtigen Zeichen gibt.

§. 80.

Folgesatz. Sollen die Kräfte P, P', P'' .... nicht im Gleichgewichte sein, jedoch eine einzige Resultante R haben, so ist $-R$ eine Kraft, die ihnen das Gleichgewicht zu halten vermag. Die beiden vorigen Gleichungen müssen dann auch gelten, wenn man in sie $-R$ einführt. Man hat also einmal

$$P + P' + P'' + \ldots\ldots - R = 0$$

oder $R = P + P' + P'' + \ldots\ldots$

d. h. die Resultante ist gleich der Summe aller Seitenkräfte. Ein Satz, den wir sonst schon kennen.

Nennt man zweitens r die Entfernung der Resultante vom Puncte A, so hat man

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - Rr = 0$$

oder $Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots\ldots$

d. h. das Product aus der Resultante in ihre Entfernung r von irgend einem in der Ebene der Kräfte angenommenen Puncte A ist gleich der Summe der ähnlichen Producte aus den Seitenkräften in ihre respectiven Entfernungen von demselben Puncte.

Dividirt man die letzte Gleichung durch R und setzt dann statt R den Werth $P + P' + P'' + \ldots\ldots$, so erhält man

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots}{P + P' + P'' + \ldots\ldots}$$

Dadurch also erfährt man die Entfernung der Resultante vom Puncte A, und folglich auch ihre Lage, weil man überdies weiß, daß sie den Seitenkräften parallel sein muß.

§. 81.

Bemerkung. Die Producte Pp, $P'p'$, $P''p''\ldots\ldots$ sind das, was man gewöhnlich Momente der Kräfte nennt. Man verbindet jedoch da mit dem Worte Moment keine andere Idee als die eines einfachen, aus zwei die beiden Kräfte repräsentirenden Zahlen hervorgehenden Productes, während wir unter Moment das Maaß einer besondern Kraft, d. h. die Energie des Paares verstehen, welches aus der Kraft hervorgeht, wenn man diese parallel zu sich selbst in den Punct transponirt, von dem die Rede ist. Da indeß hier, wie in den meisten Werken über Statik, das Moment eine wirkliche Zahlengröße darstellt, so haben wir, trotz der Verschiedenheit der Idee, welche wir damit verbinden, das Wort Moment, das einmal der Gebrauch geheiligt hat, beibehalten, um so mehr, da dieses Wort unsere Idee besser ausdrückt als die gewöhnliche *).

Da wir übrigens nur von dem einfachen numerischen Producte einer Kraft in ihre Entfernung von einem Puncte, einer senkrechten Axe oder einer parallelen Ebene zu der Richtung der Kraft sprechen werden, so wollen wir dies denn auch durch Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punct, eine Axe oder Parallelebene bezeichnen, wodurch keine Zweideutigkeit entstehen kann, weil man sich unter diesem Producte das Moment des Paares denken kann, welches durch die zu sich selbst parallele Transposition der Kraft in den betreffenden Punct, die Axe oder die Parallelebene entstehen würde.

Dann kann man die Gleichung

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots.$$

so ausdrücken:

Die Summe der Momente beliebig vieler Parallelkräfte in Bezug auf irgend einen Punct ihrer Ebene ist gleich dem Momente ihrer Resultante in Bezug auf denselben Punct; und damit hat man dann das bekannte Theorem der Momente für Parallelkräfte, die in derselben Ebene liegen.

---

*) In dem lateinischen Worte momentum liegt der Begriff von Kraft, oder vielmehr der Begriff vom Vermögen einer Kraft im Verhältniß zu ihrer Stärke und Lage.

II.

Vom Gleichgewichte der Parallelkräfte, die auf verschiedene Puncte eines Körpers im Raume wirken.

§. 82.

Es seien P, P′, P″..... (Fig. 31) die verschiedenen Parallelkräfte. Man ziehe beliebig zwei Ebenen ZAY und ZAX parallel zu den Richtungen der Kräfte, welche sich in AZ schneiden und der größern Einfachheit wegen einen rechten Winkel mit einander bilden sollen. Betrachtet man nun zuerst die Kraft P in B, so fälle man ein Perpendikel BH auf die Durchschnittslinie AZ der beiden Ebenen und bringe in H zwei gleiche Kräfte P, — P an, welche der erstern Kraft gleich und parallel sind. Statt der in B wirkenden Kraft P hat man dann eine gleiche, parallele Kraft von demselben Sinne in H, und ein Paar (P, — P) an BH.

Verfährt man auf gleiche Weise mit den andern Kräften P′, P″..... und transponirt man der mehren Deutlichkeit halber jedes Paar in seiner Ebene, so hat man in der Axe AZ nur die Kräfte P, P′, P″....., welche respective den ursprünglichen Kräften gleich und parallel sind und mit ihnen denselben Sinn haben.

Die erste Bedingung für den Zustand des Gleichgewichts ist nun, daß die Resultante aller Kräfte in sich Null sei; da hier die Kräfte alle in einer einzigen Geraden wirken, so ist die Resultante gleich der Summe der Kräfte; man hat also

$$P + P' + P'' + \ldots\ldots = 0$$

Zweitens muß für den Zustand des Gleichgewichts das aus allen Momenten der Paare resultirende Moment Null sein. Indessen hat man dieses Moment hier nicht sogleich als

Summe der zusammenzusetzenden Momente, denn die Paare liegen weder in derselben Ebene, noch in Parallelebenen.

Um dasselbe zu finden, betrachte man zuerst das Paar (P, — P), welches in seiner ursprünglichen Lage an BH wirken mag. Man fälle vom Puncte B zwei Perpendikel BG und BI auf die beiden Ebenen ZAY und ZAX und vollende das Parallelogramm BGHI; dann zerlege man das Paar (P, — P) an der Diagonale dieses Parallelogramms in zwei andere, die aus gleichen Kräften bestehen, aber respective an den Seiten HI und GH des Parallelogramms wirken (§. 58). Nennt man nun x und y diese Linien HI und GH, oder die ihnen gleichen BG und BI, so ist das gegebene Moment $P.BH$ in zwei andere $P.x$ und $P.y$ zerlegt, die respective in den Ebenen ZAX und ZAY liegen.

Nennt man eben so x' und y' die beiden Perpendikel vom Angriffspuncte der Kraft P' auf die beiden Ebenen, so zerlegt sich das Moment des Paares $(P', -P')$ in zwei Momente $P'x'$, $P'y'$. Dasselbe gilt für die andern Paare.

Alle in der Ebene ZAX liegenden Momente setzen sich nun zu einem einzigen L zusammen, welches gleich der Summe $Px + P'x' + P''x'' + \ldots\ldots\ldots$; eben so setzen sich alle in der Ebene ZAY liegenden Momente zu einem einzigen M zusammen, welches gleich der Summe $Py + P'y' + P''y'' + \ldots\ldots$ ist; und diese beiden resultirenden Momente L und M setzen sich endlich zu einem einzigen Totalmomente G zusammen. Für den Zustand des Gleichgewichts muß also $G = 0$ sein. Da aber die beiden Momente L und M in zwei sich schneidenden Ebenen liegen, so kann ihre Resultante nicht Null sein, wenn nicht L und M jedes für sich Null sind (§. 62). Die zweite allgemeine Bedingung für den Zustand des Gleichgewichts, $G = 0$, erfordert also, daß $L = 0$, und $M = 0$ sei; es ist folglich

$$Px + P'x' + P''x'' + \ldots\ldots = 0$$
$$Py + P'y' + P''y'' + \ldots\ldots = 0$$

Man hat demnach für den **Gleichgewichtszustand einer Gruppe von Parallelkräften die drei Bedingungen: die Summe aller Kräfte muß Null sein, und die Summe der Momente in Bezug auf zwei zu ihren Richtungen parallele Ebenen muß für jede dieser Ebenen Null sein.**

§. 83.

Bemerkung. Positiv sind in den vorhergehenden Gleichungen die Kräfte, welche von unten nach oben; negativ also die von oben nach unten wirkenden.

In Bezug auf die Zeichen der Momente ist klar, daß sie sich ändern, wenn sich die Zeichen der Kräfte ändern. Auf der andern Seite sieht man jedoch auch, daß, wenn eine Kraft, P z. B., ohne ihr Zeichen zu ändern, in B′ auf der andern Seite der Ebene ZAX wirkt, dadurch das Paar den entgegengesetzten Sinn annimmt. Das Moment ändert folglich auch bloß dadurch sein Zeichen, daß der Hebelarm dasselbe ändert. Betrachtet man also in Bezug auf eine Ebene diejenigen Hebelarme als positiv, welche auf die eine Seite der Ebene fallen: so sind die auf der andern Seite der Ebene fallenden Hebelarme als negativ anzusehen, und der Satz, daß die Summe der Momente Null sein muß, hat immer seine Richtigkeit, wenn man nur den Kräften und Hebelarmen die gehörigen Zeichen gibt.

§. 84.

Folgesatz I. Nimmt man an, die Kräfte P, P′, P″ ...... wären nicht im Gleichgewichte, sondern hätten eine einzige Resultante R, so ist —R im Stande, ihnen das Gleichgewicht zu halten. Die drei vorigen Gleichungen gelten daher auch, wenn man darin $-R$ einführt. Man hat also zuerst

$$R = P + P' + P'' + \ldots\ldots,$$

wodurch man den Werth der Resultante erfährt.

Nennt man ferner p und q die respectiven Entfernungen dieser Resultante von den beiden Ebenen **ZAY** und **ZAX**, so hat man

$$Rp = Px + P'x' + P''x'' + \ldots\ldots,$$
$$Rq = Py + P'y' + P''y'' + \ldots\ldots;$$

und wenn man für R seinen Werth setzt,

$$p = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots\ldots}{P + P' + P'' + \ldots\ldots},$$
$$q = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \ldots\ldots}{P + P' + P'' + \ldots\ldots},$$

wodurch die Entfernung der Resultante von den beiden Ebenen und mithin ihre Lage im Raume gegeben ist; denn legt man durch die beiden gefundenen Entfernungen zwei Ebenen, die den erstern respective parallel sind, so muß die Richtung der Resultante in beide Ebenen zugleich, folglich in den gemeinschaftlichen Durchschnitt der beiden Ebenen fallen.

§. 85.

Die vorhergehenden Gleichungen geben zwei Sätze, die man dem gewöhnlichen Gebrauche gemäß so aussprechen kann:

Die Summe der Momente von beliebig vielen Parallelkräften in Bezug auf irgend eine zu ihren Richtungen parallele Ebene ist gleich dem Momente ihrer Resultante.

Die Entfernung der Resultante von dieser Ebene ist gleich dem Quotienten aus der Summe der Momente der Kräfte in die Summe der Kräfte selbst.

Vom Mittelpuncte der Parallelkräfte.

§. 86.

Folgesatz II. Da der Mittelpunct von Parallelkräften in der Richtung der Resultante liegt, so ist die Entfernung des Mittelpunctes von irgend einer zu den Kräften parallelen Ebene mit der Entfernung der Resultante von dieser Ebene identisch, also gleich der Summe der Momente in Bezug auf die Ebene, dividirt durch die Summe der Kräfte.

Will man die Entfernung des Mittelpunctes von einer beliebigen Ebene wissen, so lasse man die Kräfte, mit Beibehaltung ihrer Größe, ihres Parallelismus und ihrer Angriffspuncte, sich alle parallel zu dieser neuen Ebene drehen, und man hat dann als zweite Entfernung die Summe aller neuen Momente, dividirt durch die Summe aller Kräfte.

Verfährt man eben so für eine dritte Ebene und legt dann durch die drei gefundenen Entfernungen drei Ebenen respective parallel zu den drei anfänglichen Ebenen, so muß der Mittelpunct der Kräfte in den drei Ebenen zugleich, also in ihrem Durchschnittspuncte liegen.

§. 87.

Sind alle Kräfte gleich und von demselben Sinne, so geht der Ausdruck für die Entfernung des Mittelpunctes von irgend einer Ebene

$$\frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots.}{P + P' + P''\ldots..}$$

über in den Ausdruck

$$\frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots..}{P + P' + P'' + \ldots.} = \frac{x + x' + x''\ldots...}{n}$$

wo n die Anzahl der Parallelkräfte ist.

Hier ist also die Entfernung des Mittelpunctes gleich der Summe der Entfernungen aller Angriffspuncte, durch ihre Anzahl dividirt, oder, wie man sich sonst auch wohl ausdrückt, gleich der mittlern Entfernung aller Angriffspuncte. Im Falle also die Kräfte gleich sind, hangt die Lage des Mittelpuncts der Kräfte nur von der Figur ab, welche die Angriffspuncte unter einander bilden.

III.

Vom Gleichgewichte der in derselben Ebene nach beliebigen Richtungen wirkenden Kräfte.

§. 88.

Es seien P', P'', P''' .... (Fig. 32) die auf irgend eine Weise in derselben Ebene liegenden Kräfte. Von einem beliebigen Puncte A in dieser Ebene fälle man auf ihre respectiven Richtungen die Perpendikel AB, AC, AD ....., welche diese Richtungen in B, C, D .... schneiden. Diese Perpendikel mögen p', p'', p''' ..... heißen.

Offenbar kann die Kraft P' in eine andere Kraft, welche ihr gleich, parallel ist, denselben Sinn hat und in A wirkt, und in ein Paar, dessen Moment $P' . AB = P'p'$ ist, zerlegt werden. Eben so läßt sich die Kraft P'' zerlegen in eine gleiche, parallele, in A wirkende Kraft von demselben Sinne, und in ein Paar, dessen Moment $P'' . AC = P''p''$ sein wird. Dasselbe gilt für alle übrigen Kräfte.

Für den Zustand des Gleichgewichts muß nun die Resultante aller in A wirkenden Kräfte Null, und das resultirende Moment aller Momente $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$ ...... gleichfalls Null sein.

Der letzten Bedingung läßt sich leicht genügen, denn weil alle Paare in derselben Ebene liegen, so ist das resultirende

Paar gleich der Summe aller zusammenzusetzenden Paare; man hat demnach

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots\ldots = 0.$$

Um die zweite Bedingung darzustellen, denke man sich jede in A wirkende Kraft P', P'', P''' ...... in zwei andere Kräfte zerlegt nach zwei Geraden AX und AY, die sich in A in der Ebene der Kräfte schneiden. Nennt man X' und Y' die beiden Seitenkräfte für P' nach den respectiven Axen AX und AY; desgleichen X'' und Y'' analog für P''; X''' und Y''' für P''' u. s. w.: so setzen sich alle Kräfte X', X'', X''' ....., die in derselben Geraden AX liegen, in eine einzige Kraft $X = X' + X'' + X''' + \ldots$ zusammen; eben so alle Kräfte Y', Y'', Y''' ..... in eine einzige Kraft $Y = Y' + Y'' + Y''' + \ldots\ldots$ Diese beiden partiellen Resultanten geben dann eine einzige R, welche die Totalresultante ist. Für den Zustand des Gleichgewichts muß folglich $R = 0$ sein. Die beiden Kräfte X und Y wirken aber nach zwei sich schneidenden geraden Linien, ihre Resultante kann also nicht Null sein, wenn nicht jede von ihnen selbst Null ist (§. 37). Die Bedingung $R = 0$ schließt also die beiden $X = 0$ und $Y = 0$ in sich; man hat demnach

$$X' + X'' + X''' + \ldots\ldots = 0$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots\ldots = 0$$

Da die in A wirkenden Kräfte P', P'', P''' ..... den ursprünglichen, in der Ebene wirkenden Kräften völlig gleich und parallel sind, so ist es auch für die Seitenkräfte X', Y'; X'', Y''; X''', Y''' ..... ihrer Größe nach ganz einerlei, ob man jene Kräfte in A, oder ob man die ursprünglichen Kräfte P', P'', P''' .... jede an ihrem Orte zerlegt. Die Bedingungen des Gleichgewichts für beliebig viele, in derselben Ebene liegende Kräfte lassen sich also folgendermaßen aussprechen:

1) Die Summe der parallel zu zwei sich in

der Ebene schneidenden Axen zerlegten Kräfte muß in Bezug auf jede der Axen Null sein;

2) die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf irgend einen Punct der Ebene muß Null sein.

§ 89.

Ist die letzte Bedingung in Bezug auf irgend einen bekannten Punct, und sind die zwei andern Bedingungen gleichfalls in Bezug auf zwei bekannte Axen, die man immer als durch jenen Punct gehend annehmen kann, erfüllt, so ist Gleichgewicht vorhanden; und weil Gleichgewicht vorhanden ist, so finden dieselben Bedingungen für alle Puncte und alle Axen Statt, die man in der Ebene der Kräfte annehmen will.

§. 90.

Folgesatz. Sind die Kräfte P', P'', P''' ...... im Gleichgewichte, so ist eine von ihnen, P' z. B., der Resultante aller übrigen gleich und entgegengesetzt. Es war nun

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0;$$

also hat man $-P'p' = P''p'' + P'''p''' + \ldots\ldots$

d. h. das Moment der Resultante in Bezug auf irgend einen Punct in der Ebene der Kräfte ist gleich der Summe der Momente der Seitenkräfte in Bezug auf denselben Punct. Es ist dies das bekannte Theorem von den Momenten.

Fällt der Punct, in Bezug dessen man die Momente nimmt, und den man gewöhnlich Mittelpunct der Momente nennt, in die Richtung der Resultante $-P'$ selbst, so wird das Perpendikel $p' = 0$, mithin auch das Moment $-P'p' = 0$, und man behält

$$0 = P''p'' + P'''p''' + \ldots\ldots$$

In Bezug auf irgend einen Punct in der Richtung der

Resultante ist daher immer die Summe der Momente von beliebig vielen, in derselben Ebene liegenden Kräften gleich Null.

§. 91.

Bemerkung. In der zweiten Bedingungsgleichung für den Zustand des Gleichgewichts

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots\ldots = 0$$

müssen die Momente der nach einem Sinne wirkenden Paare von den Momenten der nach dem entgegengesetzten Sinne wirkenden Paare wohl unterschieden werden und entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Größerer Kürze und Deutlichkeit halber wollen wir jedoch dieser Gleichung eine andere Form geben.

Einfachere Weise, die vorhergehenden Bedingungen darzustellen.

§. 92.

Es seien B', B'', B''' ..... (Fig. 33) die Puncte, an denen unmittelbar die Kräfte P', P'', P''' ...... angebracht sind; x' und y' die Coordinaten AG' und $G'B'$ des Punctes B' in Bezug auf zwei beliebige Axen AX, AY; x'' und y'' die beiden analogen Coordinaten des Punctes B'' u. s. w. Man zerlege alle Kräfte P', P'', P''' .... parallel zu den beiden Axen AX und AY, und bezeichne die beiden Seitenkräfte von P' mit X' und Y', von P'' mit X'' und Y'' u. s. w., wie oben, und betrachte jetzt statt der gegebenen Kräfte P', P'', P''' ...... die beiden Gruppen X', X'', X''' .... und Y', Y'', Y''' .....

Werden nun die Parallelkräfte X', X'', X''' .... parallel zu sich selbst in die Axe AX transponirt, so geben sie eine Resultante gleich ihrer Summe; werden eben so die Parallelkräfte Y', Y'', Y''' ..... parallel zu sich selbst in die Axe **AY** transponirt, so geben sie gleichfalls eine Resultante gleich ihrer Summe.

Diese beiden partiellen Resultanten setzen sich zu einer Totalresultante in **A** zusammen, und nach der ersten allgemeinen Bedingung für das Gleichgewicht, wonach diese Resultante Null sein muß, erhält man wie oben die beiden Gleichungen:

$$X' + X'' + X''' + \ldots\ldots = 0$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots\ldots = 0$$

Darauf muß nun noch dargestellt werden, daß die Summe der Momente der von den Kräften in Bezug auf den Punct A gebildeten Momente Null sei. Bedenkt man, daß die Axe **AX** mit den Richtungen der Kräfte Y', Y''..... Winkel macht, die unter sich und auch den Winkeln gleich sind, welche die Axe **AY** mit den Richtungen der Kräfte X', X''.... bildet: so sieht man auf der Stelle, daß die Producte $X'y'$, $X''y''$....., $Y'x'$, $Y''x''$..... als das relative Maaß der Energien der Paare angesehen und für die Momente gesetzt werden können. Weil also die Summe der Momente Null sein muß, so hat man die Gleichung

$$X'y' + X''y'' + \ldots\ldots + Y'x' + Y''x'' + \ldots\ldots = 0.$$

Diese Gleichung tritt an die Stelle der vorhin aufgestellten

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots\ldots = 0,$$

enthält aber statt der aus dem Puncte **A** auf die respectiven Richtungen der Kräfte zu fällenden Perpendikel p', p'', p'''..... die Coordinaten der unmittelbaren Angriffspuncte der Kräfte in der Ebene. Überdies hat sie den Vorzug, daß die Glieder $X'y'$, $X''y''$.... $Y'x'$, $Y''x''$.... von selbst die gehörigen Zeichen annehmen, welche dem respectiven Sinne der Paare, deren Energien sie repräsentiren, zukommen, wenn man nur den Kräften und Coordinaten die richtigen Zeichen geben will.

Man kann, wie dies in der Geometrie geschieht, die auf der rechten Seite des Anfangspunctes liegenden Abscissen x',

x'' .... als positiv, mithin die auf der linken Seite liegenden als negativ, ferner die über der Abscissenaxe liegenden Ordinaten y', y'' .... als positiv, und also die unter der Abscissenaxe liegenden als negativ annehmen.

Was die Kräfte betrifft, so muß man offenbar in jeder Gruppe denjenigen Kräften entgegengesetzte Zeichen geben, welche einen entgegengesetzten Sinn haben.

Betrachtet man in der ersten Gruppe eine Kraft wie X'', welche nach der rechten Seite der Axe AY hin wirkt, und in der zweiten eine Kraft wie Y', welche niederwärts von der Axe AX wirkt: so geben diese beiden Kräfte offenbar in Bezug auf den Punct A Paare von gleichem Sinne, wenn die Coordinaten AH'' und AG' oder y'' und x' gleiche Zeichen haben. Die Kräfte der ersten Gruppe, welche nach der rechten Seite der Ordinatenaxe hin wirken, müssen folglich mit den Kräften der zweiten Gruppe gleiche Zeichen haben, welche niederwärts der Abscissenaxe wirken. Sind also die ersten positiv, so müssen es auch die zweiten sein. Auf diese Weise nehmen denn alle Momente, die in der vorhergehenden Gleichung mit denselben Zeichen geschrieben sind, ihre Zeichen nach dem respectiven Sinne der Paare an.

§. 93.

Betrachtet man in der ersten Gruppe X', X'', X''' ..... die Kräfte, welche rechtshin von der Ordinatenaxe wirken, oder gleichsam die Abscissen von ihren Angriffspuncten aus zu vergrößern streben, als positiv, und sollen auch in der zweiten Gruppe Y', Y'', Y''' ..... diejenigen Kräfte, welche aufwärts von der Abscissenaxe wirken, oder die Ordinaten von ihren Angriffspuncten aus zu vergrößern streben, als positiv angesehen werden: so muß man allen den sich auf diese Gruppen beziehenden Momenten das entgegengesetzte Zeichen geben. Die vorhergehende Gleichung nimmt dann die Form an:

$$X'y' + X''y'' + X'''y''' + \ldots\ldots - Y'x' - Y''x'' - Y'''x''' - \ldots\ldots = 0.$$

Wir werden in Zukunft diese Gleichung der vorigen vorziehen; in beiden Gruppen sind diejenigen Kräfte als positiv angesehen, welche die Coordinaten von ihren Angriffspuncten aus zu vergrößern, und diejenigen als negativ, welche eben diese Coordinaten zu verkleinern streben.

§. 94.

Folgesatz I. Ist der Coordinatenwinkel unter den Axen AX, AY (Fig. 34) ein rechter Winkel, so werden die Abscissen und Ordinaten selbst die Hebelarme der Paare, und die Momente $X'y'$, $X''y''$ ..... $Y'x'$, $Y''x''$ das absolute Maaß ihrer Energien.

Ist α' der Winkel, welchen die Richtung der Kraft P' mit der Abscissenaxe macht: so ist die zu dieser Axe parallele Seitenkraft $X' = P' \cos \alpha'$. Eben so $Y' = P' \sin \alpha'$.

Ist α'' der Winkel, welchen die Richtung der Kraft P'' mit der Abscissenaxe macht, so ist $X'' = P'' \cos \alpha''$, $Y'' = P'' \sin \alpha''$; und so für alle Kräfte. Die obigen Gleichungen werden also nun

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \ldots = 0$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \ldots = 0$$
$$P' [y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha'] + P'' [y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha''] + P''' [y''' \cos \alpha''' - x''' \sin \alpha'''] + \ldots\ldots = 0.$$

In diesen Gleichungen braucht man nicht die Zeichen der Kräfte, sondern nur die Zeichen der Abscissen und Ordinaten zu berücksichtigen. Man betrachtet alle Kräfte P', P'', P'''..... als durchaus positiv, und die Zeichen der Sinus und Cosinus geben den Seitenkräften $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$..... $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$..... die entsprechenden Zeichen, wie man leicht sieht, wenn man mit der Richtung einer Kraft, wie etwa P', um ihren Angriffspunct B' herum eine volle Umdrehung machen will.

Das ist denn die gewöhnliche Form, in der man die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts für beliebig gerichtete, in derselben Ebene liegende Kräfte aufstellt. Diese Gleichungen enthalten in ihrer einfachsten Form die ersten Data der Aufgabe, nämlich die Größe der Kräfte, die Richtungen derselben mittelst ihrer Winkel mit einer gegebenen geraden Linie, und ihre unmittelbaren Angriffspuncte mittelst der rechtwinkligen Coordinaten dieser Puncte. Wir hätten sie zuerst aufstellen und selbst die andern Gleichungen in Bezug auf schiefwinklige Axen übergehen können; weil man sie indeß manchmal unter der Bedingung beweist, daß die beiden Gruppen der Kräfte rechtwinklig zu einander sind, so mochten wir es nicht unterlassen, zu zeigen, daß diese Gleichungen nur ein particulärer Fall von denjenigen sind, welche man in Bezug auf schiefwinklige Coordinaten findet, und daß die Rechtwinkligkeit der Kräfte durchaus nicht nöthig ist. Wir werden auf diese Bemerkung noch einmal zurückkommen.

§. 95.

Folgesatz II. Wir wollen annehmen, die Kräfte P', P'', P'''.... wären nicht im Gleichgewichte, ließen sich aber auf eine einzige Resultante R zurückführen.

Dann werden die drei Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts gelten, wenn man die Kraft $-R$ in sie einführt.

Mag α der Winkel der Abscissenaxe mit der Richtung der Kraft R, und mögen x und y die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Richtung sein. Setzt man der Kürze halber

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots\ldots = X$$
$$P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + P'''\sin\alpha''' + \ldots\ldots = Y$$
$$P'[y'\cos\alpha' - x'\sin\alpha'] + P''[y''\cos\alpha'' - x''\sin\alpha'']$$
$$+ P'''[y'''\cos\alpha''' - x'''\sin\alpha'''] + \ldots\ldots = G,$$

so hat man erstens

$$X - R\cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad Y - R\sin\alpha = 0$$

woraus, weil $\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1$, folgt

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2)}}.$$

Dadurch hat man die Größe der Resultante und den Winkel α ihrer Richtung mit der Abscissenaxe.

Ferner ist dann zweitens

$$G - R(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = 0,$$

oder für $R\cos\alpha$ und $R\sin\alpha$ die Werthe X und Y gesetzt,

$$G - Xy + Yx = 0.$$

Da man auf diese Weise nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung der Coordinaten x und y erhält, so kann man eine von ihnen ganz beliebig nehmen. Setzt man z. B. $x = 0$, wo man die Ordinate der Resultante für den Anfangspunct erhält: so hat man $y = \frac{G}{X}$.

Setzt man $y = 0$, fragt man also nach der Entfernung x des Punctes, wo die Direction der Resultante die Abscissenaxe schneidet: so ist $x = -\frac{G}{Y}$.

Damit hat man denn alle Data zur Bestimmung der Größe und Lage der Resultante für beliebig viele, in derselben Ebene liegende Kräfte.

Daß man nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung der Coordinaten x und y des Angriffspunctes der Resultante findet, hat darin seinen Grund, weil die Resultante in jedem Puncte ihrer Richtung angebracht werden kann, weil also auch der Calcul alle diese Puncte nachweisen muß. Das thut er denn auch, indem er nur ihren geometrischen Ort angibt, da die Gleichung

$$G - Xy + Yx = 0$$

eigentlich nur die Gleichung der Richtung der Resultante ist

§. 96.

Bemerkung. Da in den drei bisher behandelten Aufgaben **I, II, III** alle Kräfte immer auf eine einzige Kraft **R** und ein einziges Paar (**S**, — **S**) zurückgeführt wurden, so gibt es immer eine einzige Resultante, falls nicht etwa **R** Null ist. Denn die Kraft **R** und das Paar (**S**, — **S**) liegen immer in derselben Ebene oder in Parallelebenen, haben folglich nach (§. 71) immer eine einzige Resultante. Damit also Parallelkräfte oder in derselben Ebene liegende Kräfte eine einzige Resultante haben, braucht nur die Bedingung erfüllt zu sein, daß die parallel zu sich selbst in irgend einen Punct transponirten Kräfte eine Resultante geben, die nicht in sich Null ist.

Ist diese Resultante Null, so sind alle Kräfte des Systems auf ein Paar zurückgeführt, dessen Ebene und Energie man kennt, und dem man nur dadurch das Gleichgewicht halten kann, daß man ein gleich starkes Paar von entgegengesetztem Sinne in derselben oder in einer beliebigen Parallelebene auf das System anbringt.

Wir gehen nun zu dem allgemeinsten Falle über.

IV.

Bedingungen des Gleichgewichts für beliebig im Raume gerichtete Kräfte.

§. 97.

Es seien **P′**, **P″**, **P‴** ... (Fig. 35) die verschiedenen Kräfte. Durch einen beliebig im Raume gewählten Punct **A** ziehe man drei beliebige Axen **AX**, **AY**, **AZ**, die nicht in derselben Ebene liegen, und zerlege jede Kraft in drei andere Kräfte, die diesen Axen respective parallel sind.

Seien X', Y', Z' die drei Seitenkräfte von P'; X'' Y'', Z'' die drei Seitenkräfte von P'', und so analog für die übrigen Kräfte. Statt der auf das System wirkenden Kräfte P', P'', P'''...... hat man nun drei Gruppen von Parallelkräften: X', X'', X'''....... parallel zur Axe AX; Y', Y'', Y'''..... parallel zur Axe AY; Z', Z'', Z'''....... parallel zur Axe AZ.

Transponirt man jetzt alle Kräfte parallel zu sich selbst in den Punct A, so vereinigt sich die erste Gruppe in der Axe AX zu einer einzigen Kraft X gleich der Summe aller Kräfte dieser Gruppe. Die zweite Gruppe vereinigt sich in der Axe AY zu einer einzigen Kraft Y gleich der Summe der Kräfte dieser Gruppe, und eben so die dritte Gruppe in der Axe AZ in eine Kraft Z gleich der Summe der Kräfte dieser dritten Gruppe. Diese drei partiellen Resultanten X, Y, Z geben nun eine einzige Kraft R, die in A wirkt und durch die Diagonale des Parallelepipedums dargestellt wird, welches von den drei die Kräfte der Größe und Richtung nach repräsentirenden Geraden gebildet ist.

Der ersten allgemeinen Bedingung des Gleichgewichts zufolge muß nun diese Resultante in sich Null sein. Die drei Kräfte X, Y, Z, deren Richtungen nicht in dieselbe Ebene fallen, können nie zur Resultante Null geben, wenn sie nicht selbst jede für sich Null sind (§. 42). Die Bedingung $R = 0$ macht also die drei Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ nothwendig; man hat folglich:

$$X' + X'' + X''' + \ldots\ldots = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots\ldots = 0,$$
$$Z' + Z'' + Z''' + \ldots\ldots = 0.$$

Sollen also beliebige Kräfte auf beliebige Weise an einem Körper oder Systeme von unveränderlicher Form im Gleichgewichte sein, so hat man zuerst die drei Bedingungen: die

Summe der parallel zu drei Axen im Raume zerlegten Kräfte muß Null sein in Bezug auf jede der drei Axen.

Als zweite Bedingung für den Zustand des Gleichgewichts muß das aus allen durch die Kräfte in Bezug auf den Punct A gebildeten Paaren resultirende Paar in sich Null sein. Entwickeln wir diese zweite Bedingung.

Es sei B′ der Angriffspunct der Kraft P′, mithin auch der Angriffspunct der drei Seitenkräfte X′, Y′, Z′, und x′, y′, z′ seien die drei Coordinaten AC, CH, HB′ dieses Punctes B′ in Bezug auf die drei Axen AX, AY, AZ. Eben so seien x″, y″, z″ die drei Coordinaten des Angriffspunctes B″ der drei Seitenkräfte X″, Y″, Z″ von P″; und so für alle andern Kräfte

Betrachtet man zuerst die Gruppe der Kräfte Z′, Z″, Z‴......., so erzeugt die in B′ angebrachte Kraft Z′ ein Paar (Z′, —Z′), das an AB′ wirkt, oder, wenn man sich die Kraft Z′ im Puncte H, wo ihre Richtung die Ebene YAX trifft, angebracht denkt, ein Paar (Z′, —Z′), wirkend an der Diagonale des Parallelogramms ACHD, was von den Seiten AC = x′ und AD = y′ gebildet wird. Dieses Paar kann nun in zwei andere Paare mit Kräften, die den erstern gleich und parallel sind, die aber in den Ebenen XAZ und YAZ an den respectiven Seiten AC und AD oder x′ und y′ wirken, zerlegt werden (§. 58).

Zerlegt man auf diese Weise alle die durch die Gruppe Z′, Z″, Z‴..... entstehenden Paare in zwei zu der Gruppe parallelen Ebenen, und auf ähnliche Weise auch alle die Paare, welche durch die beiden andern Gruppen entstehen in Bezug auf analoge Ebenen: so hat man dadurch alle Paare des Systems auf Paare zurückgeführt, welche in den drei Coordinatenebenen liegen.

In jeder Ebene geben nun die Paare ein resultirendes Paar, das gleich ist ihrer Summe. Man erhält also drei partielle resultirende Paare, die sich zu einem totalen resultirenden Paare zusammensetzen, welches dann für den Zustand des Gleichgewichts Null sein muß. Da aber diese drei resultirenden Paare in drei Ebenen liegen, welche eine körperliche Ecke bilden: so kann das aus ihnen hervorgehende Paar nicht anders Null sein, als wenn sie selbst jedes für sich Null sind (§. 65). Für jede der drei Coordinatenebenen muß folglich die Summe der Momente der Paare in sich Null sein.

In der Ebene YAZ liegen die Paare

$(Z', -Z'), (Z'', -Z''), (Z''', -Z'''), \ldots\ldots$, die an den respectiven Linien

$y', \quad y'', \quad y''' \ldots\ldots$ angebracht sind. Ferner die Paare

$(Y', -Y'), (Y'', -Y''), (Y''', -Y'''), \ldots\ldots$, die an den respectiven Linien

$z', \quad z'', \quad z''' \ldots\ldots$ angebracht sind.

Da die Axe AY mit den Richtungen der Kräfte Z', Z'', Z''' .... Winkel bildet, die unter sich, und die auch den Winkeln gleich sind, welche die Axe AZ mit den Richtungen der Kräfte Y', Y'', Y'''..... einschließt: so kann man die Producte $Z'y'$, $Z''y''$..... $Y'z'$, $Y''z''$..... als relatives Maaß der in der Ebene YAZ liegenden Paare für deren Momente nehmen. Weil nun die Summe dieser Momente Null sein muß, so hat man (§. 93)

$$Y'z' + Y''z'' + Y'''z''' + \ldots\ldots - Z'y' - Z''y'' - Z'''y''' - \ldots\ldots = 0.$$

Eben so findet man für die beiden andern Ebenen

$$Z'x' + Z''x'' + Z'''x''' + \ldots\ldots - X'z' - X''z'' - X'''z''' - \ldots\ldots = 0;$$

$$X'y' + X''y'' + X'''y''' + \ldots\ldots - Y'x' - Y''x'' - Y'''x''' - \ldots\ldots = 0.$$

Außer den bereits gefundenen drei Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts erhält man hier noch drei andere, welche den Satz geben: die Summe der Producte aus den der Ebene zweier Axen paral-

lelen Seitenkräften in ihre auf die dritte Axe bezogenen Coordinaten muß für jede der drei Ebenen Null sein.

§. 98.

In den vorhergehenden Gleichungen bestimmt man die Zeichen der Coordinaten, wie in der Geometrie, positiv in der Ecke **XAYZ** und negativ in der entgegengesetzten Ecke.

In Bezug auf die Kräfte sind in jeder Gruppe diejenigen als positiv anzusehen, welche die Coordinaten von ihren Angriffspuncten aus zu vergrößern, und diejenigen als negativ, welche sie zu verkleinern streben.

§. 99.

Bemerkung. Findet man, daß die sechs vorhergehenden Gleichungen für drei nicht in derselben Ebene liegende Axen gelten, so herrscht Gleichgewicht im Systeme, und damit gelten denn auch dieselben Gleichungen für alle möglichen Axen.

§. 100.

Folgesatz I. Wären die drei Axen **AX**, **AY**, **AZ** rechtwinklig zu einander, so sind die Coordinaten die Hebelarme der Paare, und die Producte $Z'y'$, $Y'x'$, $X'z'$..... die absoluten Ausdrücke ihrer Energien.

Nennt man α', β', γ' die drei Winkel der Richtung der Kraft P' mit den drei respectiven Axen **AX**, **AY**, **AZ**, oder vielmehr mit drei zu diesen Axen parallelen Geraden: so sind die drei Seitenkräfte von P' (§. 45)

$$X' = P' \cos\alpha',\ Y' = P' \cos\beta',\ Z' = P' \cos\gamma'.$$

Sind auf gleiche Weise α'', β'', γ'', α''', β''', γ'''..... die analogen Winkel für P'', P'''....., so findet man

$$X'' = P'' \cos\alpha'',\ Y'' = P'' \cos\beta'',\ Z'' = P'' \cos\gamma'' \text{ u. s. w.}$$

Die vorhergehenden Gleichungen werden dann

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots\ldots = 0$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \ldots\ldots = 0$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \ldots\ldots = 0$$
$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + P'''(z'''\cos\beta''' - y'''\cos\gamma''') + \ldots = 0$$
$$P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + P'''(x'''\cos\gamma''' - z'''\cos\alpha''') + \ldots = 0$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + P'''(y'''\cos\alpha''' - x'''\cos\beta''') + \ldots = 0$$

§. 101.

Bemerkung. Unter dieser Form stellt man gewöhnlich die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts auf. Sie enthalten ganz einfach die Größen der Kräfte P′, P″, P‴....., ihre Angriffspuncte durch rechtwinklige, auf drei Axen bezogene Coordinaten, und ihre Richtungen durch die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen einschließen.

Da man gewohnt ist, den rechtwinklig wirkenden Kräften eine gewisse Unabhängigkeit der Wirkung zuzuschreiben, die ihnen gleichwohl nicht mehr zukommt, als den unter einem beliebigen Winkel wirkenden Kräften, falls dieser nur nicht $= 0$ ist: so dürfen wir wohl bemerken, daß die Gleichungen des Gleichgewichts in Bezug auf rechtwinklige Axen eine einfache Folge der Gleichungen für beliebige schiefwinklige Axen sind, und daß folglich das Princip der Unabhängigkeit unter den Wirkungen der rechtwinkligen Kräfte ganz und gar nicht in ihre Demonstration vermischt werden darf.

Übrigens bemerken wir auch, daß man aus diesem wenig bestimmten Principe durch ein ganz einfaches Raisonnement in einen sehr groben Irrthum gerathen könne; betrachtet man z. B. zwei Gruppen rechtwinkliger Kräfte, die in derselben Ebene liegen, und nimmt man an, daß die Wirkungen der beiden Gruppen von einander unabhängig sind, so folgt daraus, daß, wenn das System im Gleichgewichte ist, jede

Gruppe für sich im Gleichgewichte sein müsse, was doch nicht der Fall ist.

Dasselbe gilt für drei im Raume rechtwinklige Gruppen von Kräften, die ein System im Gleichgewichte halten können, ohne daß deshalb jede Gruppe oder auch nur eine einzige von ihnen für sich im Gleichgewichte wäre.

In diesen beiden Fällen müßte man also von jenem Principe nur einen beschränkten Gebrauch machen und die Unabhängigkeit der Wirkungen nur in Bezug auf die Transpositionsbewegungen, welche die Kräfte dem Systeme mittheilen können, betrachten, oder man müßte es nur anwenden, im Falle man zwei Gruppen hat, von denen die eine aus Kräften senkrecht auf dieselbe Ebene, die andere aus beliebig in dieser Ebene liegenden Kräften besteht, in welchem Falle allein die Unabhängigkeit der Wirkungen absolut Statt findet. Da indeß diese Unabhängigkeit auch Statt finden würde, wenn die erste Gruppe mit der Ebene der zweiten einen beliebigen Winkel, der nur nicht Null sein darf, bildet: so folgt, daß sie nicht deshalb Statt findet, weil die Gruppen einen rechten Winkel, sondern bloß, weil sie irgend einen Winkel mit einander bilden. Jedenfalls also fällt das Raisonnement, wodurch man beweisen will, daß das in Rede stehende Princip deshalb gelte, weil die Kräfte einen rechten Winkel mit einander bilden, in sich selbst zusammen, weil es wirklich grundlos ist.

§. 102.

Folgesatz II. Den drei letztern Gleichungen des Gleichgewichts läßt sich eine einfachere Form geben, wenn man statt der Coordinaten der Angriffspuncte die kürzesten Abstände der Richtungen der Kräfte von drei rechtwinkligen Axen einführt.

In der That kann man in der ersten Gleichung für das Glied $P'(z' \cos\beta' - y' \cos\gamma')$, welches die Summe der

Momente der beiden Kräfte $P'\cos\beta'$ und $P'\cos\gamma'$ in Bezug auf den Punct angibt, wo ihre Ebene die Axe x schneidet, ein anderes Glied setzen, welches das Moment ihrer Resultante in Bezug auf denselben Punct angibt (§. 90).

Da die beiden Kräfte $P'\cos\beta'$ und $P'\cos\gamma'$ rechtwinklig auf einander sind, so hat man für das Quadrat ihrer Resultante $P'^2\cos\beta'^2 + P'^2\cos\gamma'^2$ oder $P'^2(\cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2)$, oder, weil $\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$, auch $P'^2(1 - \cos\alpha'^2)$, welches $= P'^2 \sin\alpha'^2$ ist.

Die Resultante ist also $P' \sin\alpha'$. Ist nun p' die Entfernung dieser Resultante von der Axe der x, so hat man als Moment der Resultante $P'p'\sin\alpha'$, welches dann für $P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma')$ substituirt werden kann. Desgleichen findet man $P''p''\sin\alpha''$, $P'''p'''\sin\alpha'''$ ..... für die folgenden Glieder dieser Gleichung, wenn man mit p'', p''' die analogen Entfernungen der Resultanten von der Axe der x bezeichnet. Die erste jener drei letztern Gleichungen des Gleichgewichts wäre daher

$$P'p'\sin\alpha' + P''p''\sin\alpha'' + P'''p'''\sin\alpha''' + \ldots\ldots = 0.$$

Offenbar sind p', p'', p''' ..... die kürzesten Abstände der Kräfte P', P'', P''' .... von der Axe der x; denn setzt man die Kraft $P'\sin\alpha'$, die in einer auf diese Axe senkrechten Ebene liegt, mit der Kraft $P'\cos\alpha'$, welche auf dieser Ebene senkrecht ist, zusammen, so erhält man als Resultante die Kraft P', welche im Raume liegt. Die Kraft $P'\sin\alpha'$ ist also nur die Projection der Kraft P' auf eine zur Axe der x perpendiculäre Ebene, folglich ist auch die kürzeste Entfernung p' dieser Projection von der Axe x die kürzeste Entfernung der Kraft P' von derselben Axe.

Bezeichnet man mit q', q'', q'''...... und mit r', r'', r'''...... die kürzesten Abstände der Kräfte P', P'', P'''.... von den respectiven Axen der y und z, so findet man für die beiden andern Gleichungen eben so

$$P'q' \sin\beta' + P''q'' \sin\beta'' + P'''q''' \sin\beta''' + \ldots = 0$$
$$P'r' \sin\gamma' + P''r'' \sin\gamma'' + P'''r''' \sin\gamma''' + \ldots = 0$$

§. 103.

Die Projection einer Kraft auf eine Ebene, multiplicirt mit der Entfernung derselben von einer auf diese Ebene senkrechten Axe, nennt man gewöhnlich das **Moment** der Kraft in Bezug auf die Axe. Auf diese Weise lassen sich die drei Gleichungen so aussprechen:

Für den Zustand des Gleichgewichts muß die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede der drei Axen Null sein.

§. 104.

Folgesatz III. Nimmt man in den sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen die Kräfte P', P'', P''' ..... alle als parallel, oder alle als in derselben Ebene liegend u. s. w. an, und setzt man dann statt der Coordinaten x', y', z'..... und der Winkel α', β', γ' ...... die diesen Annahmen entsprechenden Werthe, so erhält man die vorhin für diese besondern Fälle gefundenen Gleichungen wieder, und zieht dann daraus auch dieselben Folgerungen.

§. 105.

Sollen z. B. die Richtungen der Kräfte P', P'', P'''.... alle in demselben Puncte zusammenlaufen, und soll dieser Punct als Anfangspunct der Coordinaten angesehen werden: so sind die Cosinus der Winkel α', β', γ'..... den respectiven Coordinaten x', y', z'..... der Angriffspuncte proportional, so daß

$$x' : y' = \cos\alpha' : \cos\beta'; \quad x' : z' = \cos\alpha' : \cos\gamma' \text{ u. s. w.}$$

oder
$$y' \cos\alpha' - x' \cos\beta' = 0$$
$$x' \cos\gamma' - z' \cos\alpha' = 0$$

u. s. w.

Die drei letztern Bedingungsgleichungen verschwinden auf diese Weise von selbst, und man behält nur die drei erstern, woraus dann hervorgeht, daß es für das Gleichgewicht eines freien, von beliebig vielen Kräften im Raume getriebenen Punctes nöthig und hinreichend ist, daß die Summe der nach drei durch diesen Punct gezogenen Axen zerlegten Kräfte in Bezug auf jede der Axen Null sei; ein Satz, den man übrigens schon unmittelbar kennt.

Untersuchung der Resultante aller Kräfte P′, P″, P‴...., wenn diese Kräfte nicht im Gleichgewichte sind und sich auf eine einzige Resultante zurückführen lassen.

§. 106.

Folgesatz IV. Wir nehmen an, die Kräfte P', P'', P'''..... wären nicht im Gleichgewichte, und eine Kraft $-R$ sei fähig, wenn dies möglich ist, ihnen das Gleichgewicht zu halten, R also ihre Resultante.

Die sechs vorhin gefundenen Gleichungen müssen dann gelten, wenn man $-R$ in sie einführt.

Es seien α, β, γ die drei Winkel, welche die Richtung der Resultante mit den drei Coordinatenaxen macht. Setzt man dann noch der Kürze halber

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots\ldots = X,$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \ldots\ldots = Y,$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \ldots\ldots = Z,$$

so hat man zuvörderst die drei Gleichungen

$$X - R\cos\alpha = 0, \quad Y - R\cos\beta = 0, \quad Z - R\cos\gamma = 0.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung, daß $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist,

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

als Größe der Resultante. Für die drei Winkel ihrer Richtung mit den drei Axen ist

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}.$$

Nennt man ferner die drei Coordinaten irgend eines Punctes der Richtung der Resultante x, y, z, und setzt man

$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'')$$
$$+ P'''(z'''\cos\beta''' - y'''\cos\gamma''') + \ldots\ldots = L,$$
$$P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'')$$
$$+ P'''(x'''\cos\gamma''' - z'''\cos\alpha''') + \ldots\ldots = M,$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'')$$
$$+ P'''(y'''\cos\alpha''' - x'''\cos\beta''') + \ldots\ldots = N,$$

so hat man

$$L - R(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0,$$
$$M - R(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0,$$
$$N - R(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0;$$

oder auch

$$L - Yz + Zy = 0,$$
$$M - Zx + Xz = 0,$$
$$N - Xy + Yx = 0.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen zwei der Unbekannten x, y, z, so gelangt man zu der Gleichung

$$XL + YM + ZN = 0,$$

welche keine unbekannte Größe mehr enthält und das Verhältniß angibt, das unter den partiellen Resultanten X, Y, Z und den drei partiellen resultirenden Momenten L, M, N Statt finden muß, damit die drei vorhergehenden Gleichungen auf einmal bestehen können, damit folglich die Kräfte des Systems eine einzige Resultante haben können.

§. 107.

Findet diese Bedingungsgleichung Statt, so treten die Werthe der drei Coordinaten x, y, z unter der Form $\frac{0}{0}$

auf; denn da die Resultante in jedem beliebigen Puncte ihrer Richtung angebracht sein kann, so kann der Calcul einen dieser Puncte nicht mehr bestimmen als den andern; er kann deshalb nur ihren geometrischen Ort geben, und die drei vorhergehenden Gleichungen sind auch nur die Gleichungen der drei Projectionen der Resultante auf die Coordinatenebenen. Die eine dieser Gleichung muß also eine nothwendige Folge der beiden andern sein, und man hat eigentlich nur zwei Gleichungen zwischen den drei unbestimmten Größen x, y, z, weshalb sie sich denn auch in der Form $\frac{0}{0}$ zeigen müssen.

§. 108.

Man wird daher eine dieser drei Größen willkührlich annehmen, und daraus dann mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen die beiden andern bestimmen.

Setzt man z. B. $x = 0$, wo also der Punct gesucht wird, in welchem die Richtung der Resultante die Verticalebene YAZ trifft: so sind die beiden Coordinaten dieses Punctes

$$y = \frac{N}{X} \qquad \text{und } z = \frac{-M}{X}.$$

Setzt man $y = 0$, so ist

$$x = \frac{-N}{Y} \qquad \text{und } z = \frac{L}{Y}.$$

Setzt man $z = 0$, so hat man

$$x = \frac{M}{Z} \qquad \text{und } y = \frac{-L}{Z}.$$

Betrachtet man also den Punct, wo die Richtung der Resultante die Ebene der beiden Axen schneidet, so findet man die respectiven Entfernungen dieses Punctes von den beiden Axen, wenn man die respectiven Summen der Momente der Kräfte, in Bezug auf diese Axen, durch die Summe der Kräfte, nach der dritten Axe genommen, dividirt.

Man hat also nun alle nöthigen Data zur Bestimmung der Größe der Resultante und ihrer Lage im Raume, wenn alle auf das System wirkenden Kräfte sich auf eine einzige Resultante zurückführen lassen, und dies wird immer der Fall sein, wenn die Bedingungsgleichung $XL + YM + ZN = 0$ erfüllt ist, und die drei Resultanten X, Y, Z nicht zugleich Null sind; denn wären diese drei Kräfte Null, dann lassen sich offenbar die Kräfte P', P'', P'''..... auf drei Paare zurückführen, deren Energien durch L, M, N ausgedrückt werden, und diese Paare können dann immer nur wieder auf ein anderes Paar zurückgeführt werden.

Auch die vorhergehenden Rechnungen zeigen dieses, jedoch auf eine weniger deutliche Weise; denn im Falle X, Y, Z Null sind, ergeben die obigen Gleichungen, daß die Schnittpuncte der Resultante mit den Coordinatenebenen in einer unendlich weiten Entfernung vom Anfangspuncte liegen, wo dann eine weitere Erklärung unmöglich ist, und woraus nur hervorgeht, daß in diesem Falle die Annahme einer einzigen Resultante unstatthaft ist.

Allgemeine Reduction der Kräfte.

§. 109.

Folgesatz V. In jedem Falle aber lassen sich alle auf ein System wirkende Kräfte auf eine einzige, durch den Anfangspunct gehende Kraft und ein Paar zurückführen, dessen Ebene und Energie leicht zu bestimmen ist. Diese Reduction läßt in keinem Falle einen Zweifel übrig.

Als Resultante der in den Anfangspunct transponirten Kräfte findet man

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

Für die drei Winkel α, β, γ ihrer Richtung mit den drei Axen erhält man

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Repräsentiren ferner L, M, N respective die drei resultirenden Paare, welche in den drei auf die Axen der x, y, z senkrechten Ebenen liegen, und ist G das Moment des aus ihnen resultirenden Paares, so erhält man

$$G = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}$$

und für die Winkel λ, μ, ν, welche ein Perpendikel auf die Ebene des Paares oder die Axe des Paares mit den drei Axen x, y, z respective einschließen,

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

§. 110.

Folgesatz VI. Will man direct ausdrücken, daß die Kräfte P', P'', P''' .... eine einzige Resultante haben, so müßte man nach dem im ersten Capitel (§. 71) Gesagten darstellen, daß die Resultante R und das resultirende Paar in Parallelebenen liegen, oder, was damit einerlei ist, daß die Axe des Paares senkrecht auf die Richtung der Resultante sei.

Sind nun α, β, γ die drei Winkel der Richtung der Kraft R mit den drei Axen der x, y, z; und λ, μ, ν die analogen Winkel der Axe des Paares mit denselben drei Axen, so lehrt die Geometrie *), daß die beiden Geraden im Raume auf einander rechtwinklig sind, wenn folgender Gleichung genügt ist:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Setzt man statt der Cosinus die oben gefundenen Werthe und multiplicirt dann die ganze Gleichung mit RG, so erhält man

$$XL + YM + ZN = 0$$

wie vorhin.

*) Vergleiche §. 113.

Dabei muß immer vorausgesetzt werden, daß die Kraft R nicht Null ist, oder daß

$$\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} > 0,$$

eine Bedingung, welche nur erfordert, daß **X**, **Y** und **Z** nicht zu gleicher Zeit Null sind.

Diese Bedingung, welche uns der Calcul bei der Untersuchung der allgemeinen Resultante aufstellt, ist also weiter nichts als der Ausdruck der Bedingung, welche wir geradezu im ersten Capitel fanden, damit nämlich die Kräfte, die nicht im Gleichgewichte sind, sich zu einer einzigen Kraft zusammensetzen können.

§. 111.

Bemerkung. Als Bedingung für den Fall, daß beliebige Kräfte sich auf eine einzige zurückführen lassen, haben wir die drei bestimmten Gleichungen aufgestellt:

$$(A.)\begin{cases} X(Y'z'+) - Y(X'z'+) = 0, \\ Y(Z'x'+) - Z(\cancel{X'z'}+) = 0, \\ Z(X'y'+) - X(Z'y'+) = 0, \end{cases}$$ Y'x'

welche nicht, wie man sieht, die Gleichungen der Richtung der Resultante (§. 106) sind, worin aber **X**, **Y**, **Z** dieselben Werthe wie dort haben, und wo der Kürze halber die Summe der Producte $Y'z' + Y''z'' + \ldots\ldots$ durch $(Y'z'+)$, die Summe der Producte $(X'z' + X''z'' + \ldots\ldots)$ durch $(X'z'+)$ u. s. w. ausgedrückt ist.

Diese drei Gleichungen sind aber zu gleicher Zeit zu eng und zu weit: sie können alle drei erfüllt sein, ohne daß man eine einzige Resultante hat, und es kann eine einzige Resultante geben, ohne daß den drei Gleichungen, und selbst nur einer von ihnen Genüge geschieht.

Es erhellt dieses an und für sich von selbst durch die Vergleichung dieser Gleichungen mit der vorhin aufgestellten; indessen kann man sich davon auch Rechenschaft ablegen, wenn man ihre Bedeutung untersucht und das

Raisonnement verfolgt, durch welches man sie gefunden hat.

Denn nachdem man alle auf ein System wirkenden Kräfte auf drei Gruppen von Parallelkräften zu den drei Coordinatenaxen, und diese drei Gruppen wieder auf drei partielle Resultanten **X**, **Y**, **Z** parallel zu denselben Axen zurückgeführt hat, nimmt man an, daß die drei Kräfte sich in demselben Puncte schneiden müssen, damit sie sich zu einer einzigen zusammensetzen können; dazu stellt man dann dar, daß die partiellen Resultanten, zwei zu zwei genommen, gleichweit entfernt sind von der Ebene, die zu ihnen parallel ist, und das gibt die Gleichungen (A), denen zufolge die drei Kräfte in der That in einen einzigen Punct zusammenlaufen müssen und folglich eine einzige Resultante haben.

Dabei aber übergeht man 1) den Fall, wo die drei Gruppen nicht auf drei respective einfache Kräfte, sondern nur auf drei Paare zurückgeführt werden können. Hier sind die drei partiellen Resultanten Null; den Gleichungen geschieht also Genüge, und dennoch hat man nicht eine einzige Resultante, sondern ein resultirendes Paar. Die Gleichungen sind also zu weit.

Auf der andern Seite verlangen die Gleichungen 2) zu viel und sind zu eng; denn gesetzt, die drei Gruppen ließen sich auf drei einfache Kräfte zurückführen, so ist offenbar nicht nothwendig, daß sich diese, um eine einzige Resultante zu geben, alle drei in demselben Puncte schneiden; es brauchen sich nur zwei von ihnen in demselben Puncte zu treffen, und die dritte irgendwo der Richtung ihrer Resultante zu begegnen. Und auch das ist nicht einmal durchaus nothwendig; denn die drei Kräfte **X**, **Y**, **Z** können auf eine einzige zurückführbar sein, ohne daß sich ihre Richtungen irgendwo im Raume begegnen, wie wir geradezu im (§. 75) gesehen haben.

Soll unser Calcul dasselbe ergeben, so sei **a** die kürzeste

Entfernung der Y von Z, b die der Z von X, und c die der X von Y. Ferner wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, die Axe der x falle in die Richtung der Geraden a, und die Axe der z in die der Kraft Z. In dieser Voraussetzung ist $L = 0$, $M = -Xc$, und $N = Xb - Ya$, und die Gleichung $XL + YM + ZN = 0$ verwandelt sich in

$$XYc - YZb + YZa = 0.$$

Dieser Gleichung genügen aber drei Kräfte X, Y, Z in einer unendlichen Anzahl von verschiedenen Verhältnissen, und diese haben dann auch alle eine einzige Resultante, mögen die gegenseitigen Abstände a, b, c ihrer Richtungen im Raume beschaffen sein, wie sie wollen.

Da man nur eine einzige Gleichung hat, so kann man sogar zwei der Kräfte rein willkührlich annehmen, und die dritte daraus mittelst der Gleichung bestimmen.

Nimmt man z. B. an, die beiden Kräfte X und Z wären durch die Geraden a und c dargestellt, so wird die dritte Kraft $Y = \frac{b}{2}$. Auf diese Weise hat man also unter andern drei Kräfte, welche in den drei Kanten eines rechtwinkligen Rhomboides, von denen zwei und zwei nicht parallel sind und nicht zusammenstoßen, wirken, und eine einzige Resultante geben, die, wie man auf den ersten Blick sieht, durch die Mitte der kürzesten Entfernung b zwischen den den Geraden a und c proportionalen Kräften X und Z gehen muß.

Man könnte eine Unzahl anderer Beispiele anführen, und man darf immer zwei Kräfte rein nach Belieben annehmen, nur nicht in dem einzigen Verhältnisse, daß dadurch die dritte Kraft unendlich wird.

Was übrigens hier für drei rechtwinklige Kräfte im Raume gesagt ist, gilt auch für Kräfte, die zu drei beliebigen schiefwinkligen Axen parallel sind; denn untersucht man in Bezug auf diese schiefwinkligen Axen, auf gleiche Weise wie im

(§. 106), die allgemeine Bedingung für eine einzige Resultante, so findet man eine Gleichung, die ganz der vorhin aufgestellten ähnlich ist, und die für den Fall unserer drei Kräfte gleichfalls $XYc - XZb + YZa = 0$ gibt. Es fließen also aus ihr auch dieselben Folgerungen, mit der Bemerkung, daß in dieser Gleichung a, b, c nicht mehr die gegenseitigen Abstände der drei schiefwinkligen Kräfte X, Y, Z, sondern die geraden Linien jedesmal zwischen zwei Kräften parallel zur dritten Kraft sind.

Würden von den drei Linien a, b, c zwei Null, ohne daß es auch die dritte wäre, so behielte die Gleichung nur ein einziges Glied, welches nicht anders Null werden kann, als wenn eine der drei Kräfte Null ist; d. h. liegen drei reelle endliche Kräfte der Art, daß die Richtung einer derselben die Richtungen der beiden andern nicht in einer Ebene liegenden Kräfte schneidet, so sind diese drei Kräfte nicht auf eine einzige Resultante zurückführbar; ein Satz, der völlig mit dem (§. 75) Gesagten übereinstimmt.

Um also auf unsern Gegenstand zurückzukommen, so ist klar, daß von den drei Gleichungen (A), die schon vor unserer Theorie aufgestellt sind, keine einzige für die in Rede stehende Bedingung nothwendig ist, und daß sie zugleich der Aufgabe, die hier betrachtet wird, fremd sind. Wir haben indessen über diese Gleichungen noch eine eben so interessante Bemerkung zu machen.

Addirt man sie, was wegen ihrer Symmetrie leicht angeht, und was selbst der Verfasser derselben gethan hat, so gibt ihre Summe genau unsere Gleichung $XL + YM + ZN = 0$. Durch Zufall hat man auf diese Weise die eigentliche Gleichung gefunden, ohne sie indessen als solche zu erkennen; es lag gewiß sehr nahe, daß die Summe dieser drei Größen Null sein könne, ohne daß eine einzige von ihnen selbst Null sei, und daß man also eine einzige Resultante erhalten könne, ohne daß eine der drei als nothwendig erachteten Gleichungen wirklich Statt finde. Daraus hätte denn die Folgerung gezogen werden können, daß sie selbst nicht nothwendige Bedingungen sind, und daß sie sammt der mangelhaften Analyse, wodurch sie gefunden wurden, hätten verworfen werden sollen. Indessen wußte man nicht die allgemeine Bedingung für eine einzige Resultante genau aufzustellen.

Obgleich seitdem diese Analyse durch die von uns im (§. 106) gegebene verbessert worden ist, so hielten wir dennoch diese kleine Abschweifung nicht für überflüssig, einmal, weil sie über einen wichtigen Punct der Zusammensetzung der Kräfte helleres Licht verbreitet und die Falschheit der Voraussetzung zeigt, auf die man sich stützte; dann aber vorzüglich deshalb, weil man diesen Fehlschluß noch nicht aufgegeben hat, und weil er wieder in ein berühmtes Werk aufgenommen worden ist, woraus der Verfasser der Gleichungen (A) ihn entlehnt zu haben scheint.

§. 112.

Folgesatz VII. Hat man die Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, so ist das Moment des resultirenden Paares Null, und die auf das System wirkenden Kräfte setzen sich in eine einzige Kraft R zusammen, deren Richtung durch den Anfangspunct der Coordinaten geht.

Da das Moment G nicht Null sein kann, wenn nicht die drei partiellen resultirenden Momente L, M, N zugleich Null sind: so müßte man, wenn man ausdrücken wollte, daß beliebige Kräfte sich zu einer einzigen durch einen bestimmten Punct gehenden Kraft zusammensetzen lassen, unter der Voraussetzung, daß dieser Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten angenommen ist, die drei Gleichungen $L = 0$, $M = 0$ und $N = 0$ aufstellen.

§. 113.

Bemerkung. Wir schließen diesen allgemeinen Artikel mit einem wichtigen Lehrsatze über die Methode, Kräfte nach einer gegebenen Richtung, und ihre Momente in Bezug auf eine gegebene Axe zu bestimmen, wenn man die Kräfte und deren Momente schon in Bezug auf drei rechtwinklige Axen kennt.

Zuvor beweisen wir jedoch den geometrischen Satz, auf welchen wir uns in (§. 110) stützten, und dessen wir uns hier noch einmal bedienen wollen.

Mögen zwei beliebige gerade Linien auf irgend eine Weise im Raume liegen. Es seien α, β, γ die drei Winkel der erstern mit drei Coordinatenaxen; λ, μ, ν die analogen Winkel der zweiten mit denselben Axen. Ist dann ϑ der Winkel der beiden Geraden mit einander, so hat man

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

Denn transponirt man der Vereinfachung wegen die beiden geraden Linien parallel zu sich selbst in den Anfangspunct, so bleiben die Winkel α, β, γ, λ, μ, ν und der Winkel ϑ dieselben. Man nehme auf der ersten Geraden vom Anfangspuncte an eine beliebige Länge d, deren Endpunct die Coordinaten x, y, z hat. Eben so nehme man auf der zweiten Geraden vom Anfangspuncte an eine andere beliebige Länge D, deren Endpunct die Coordinaten X, Y, Z hat. Verbindet man nun die beiden Endpuncte durch eine Gerade H, so hat man ein Dreieck mit den drei Seiten d, D, H; und weil ϑ der Winkel zwischen den Seiten d, D dieses Dreiecks ist, so hat man bekanntlich

$$H^2 = d^2 + D^2 - 2dD\cos\vartheta.$$

Es ist aber

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$
$$H^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2.$$

Substituirt man diese Werthe in die erste Gleichung, reducirt sie und entwickelt $\cos\vartheta$, so hat man

$$\cos\vartheta = \frac{x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z}}{d\mathrm{D}}$$

$$\text{oder } \cos\vartheta = \frac{x}{d}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{D}} + \frac{y}{d}\,\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{D}} + \frac{z}{d}\,\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{D}};$$

es ist aber offenbar

$$\frac{x}{d} = \cos\alpha,\ \frac{y}{d} = \cos\beta,\ \frac{z}{d} = \cos\gamma;$$

und eben so

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{D}} = \cos\lambda,\ \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{D}} = \cos\mu,\ \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{D}} = \cos\nu;$$

also ist $\quad \cos\vartheta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$

Sollen die beiden Geraden d und D rechtwinklig zu einander sein, so braucht man nur $\cos\vartheta = 0$ zu setzen und hat dann

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0$$

welche Gleichung in (§. 110) vorausgesetzt worden ist.

§. 114.

Wir verwandeln nun die Buchstaben λ, μ, ν in α', β', γ' und betrachten eine Kraft R, die nach der Richtung der erstern Geraden wirkt. Wird diese Kraft in Bezug auf die zweite Gerade bestimmt oder auf sie projicirt, und nennt man die Projection R′, so ist $\mathrm{R}' = \mathrm{R}\cos\vartheta$, oder, wenn für $\cos\vartheta$ der gefundene Werth gesetzt wird,

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R}\cos\alpha\cos\alpha' + \mathrm{R}\cos\beta\cos\beta' + \mathrm{R}\cos\gamma\cos\gamma'$$

Es sind aber $\mathrm{R}\cos\alpha$, $\mathrm{R}\cos\beta$ und $\mathrm{R}\cos\gamma$ die drei Seitenkräfte der Kraft R nach den drei Axen; bezeichnet man diese also mit X, Y, Z, so hat man einfacher

$$\mathrm{R}' = \mathrm{X}\cos\alpha' + \mathrm{Y}\cos\beta' + \mathrm{Z}\cos\gamma'$$

d. h., *soll eine Kraft, deren Seitenkräfte nach drei rechtwinkligen Axen bekannt sind, nach einer Richtung bestimmt werden, die von ihrer* eigenen verschieden ist, so nimmt man die Summe der Seitenkräfte, nachdem man jede mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit der neuen Richtung einschließt, multiplicirt hat.

Ganz analog kann man in der Geometrie, wenn man eine Linie auf eine andere projiciren will, sie erst auf drei rechtwinklige Axen, diese drei Projectionen darauf auf die gegebene Axe projiciren und dann diese neuen Projectionen zusammenfassen.

§. 115.

Betrachtet man auf ähnliche Weise ein Paar, dessen Moment durch ein Stück G seiner Axe dargestellt ist, und sind die aus der Zersetzung des Moments nach drei rechtwinkligen Axen hervorgehenden respectiven Momente L, M, N, so ist klar, daß man wie oben zur Bestimmung des Momentes G in Bezug auf eine neue Axe, welche mit den drei erstern die Winkel λ', μ', ν' bildet, nur die Summe der Seitenmomente L, M, N, multiplicirt in die respectiven Cosinus dieser Winkel, zu nehmen braucht, so daß, wenn G' der relative Werth von G ist,

$$G' = L\cos\lambda' + M\cos\mu' + N\cos\nu'.$$

Dieses gibt uns das Theorem: die Summe der Momente von beliebig vielen Kräften, in Bezug auf irgend eine Axe, ist gleich der Summe der Momente, in Bezug auf drei rechtwinklige Axen, respective multiplicirt mit den Cosinus der Winkel, welche diese drei Axen mit der gegebenen neuen Axe einschließen.

Bedingungen des Gleichgewichts,

wenn ein Körper oder ein System, worauf Kräfte wirken, nicht völlig frei im Raume, sondern durch irgend ein Hinderniß bedingt ist.

Wir betrachten bei dieser Untersuchung nur drei Hauptfälle, auf welche sich die andern, wie wir später sehen werden, leicht zurückführen lassen.

I.

Vom Gleichgewichte eines Körpers, der sich um einen festen Punct nach allen Richtungen frei drehen kann.

Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines freien Körpers oder Systems sind, wie wir vorhin gefunden haben,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

§. 116.

Wir nehmen nun an, es sei in dem Systeme ein fester Punct vorhanden, und man habe ihn zum Anfangspuncte der Coordinaten gewählt. Daß hier Gleichgewicht herrschen könne, wenn auch jene sechs Bedingungsgleichungen nicht erfüllt sind, ist einleuchtend; denn obgleich der feste Punct an und für sich nicht die mindeste Wirkung hervorzubringen im Stande ist, so kann er doch die Wirkung der Kräfte vernichten, deren Resultante auf ihn gerichtet ist, und so die Stelle neuer Kräfte im Systeme vertreten.

Wie auch die Kräfte beschaffen sein mögen, deren Stelle ein fester Punct durch seinen Widerstand vertritt, so viel ist von selbst klar, daß sie alle durch diesen Punct gehen müssen, daß man sie sich also hier als in eine einzige Kraft zusammengesetzt, und folglich statt des festen Punctes eine einzige Kraft r vorstellen kann, deren Stelle der Widerstand des Punctes vertritt, wo dann das System sich als völlig frei im Raume betrachten läßt.

Die sechs vorhin angeführten Gleichungen werden demnach auch hier gelten, wenn man nur die neue Kraft r in sie einführt.

Da diese Kraft unmittelbar im Anfangspuncte angebracht ist, so gibt sie drei neue Seitenkräfte x, y, z nach den drei Axen, und kein neues Paar in den drei Ebenen. Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht sind mithin

$$X + x = 0,\quad Y + y = 0,\quad Z + z = 0,$$
$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0.$$

Die drei partiellen Resultanten X, Y, Z können demzufolge beliebige Werthe haben. Denn nimmt man den Widerstand des festen Punctes nach jeder Richtung als unbegrenzt an, so können die drei Kräfte x, y, z beliebige Werthe und beliebige Zeichen haben, und da sie sich dann immer gewissermaßen den drei Kräften X, Y, Z, die ihnen entgegengesetzt und an demselben Puncte angebracht sind, gleich machen, so geschieht den drei erstern Gleichungen immer Genüge.

Es müssen aber ferner die drei partiellen resultirenden Momente L, M, N immer Null sein, woraus erhellt, daß **es für das Gleichgewicht eines um einen festen Punct rotirenden Körpers nothwendig ist und hinreicht, wenn die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf drei durch diesen Punct gezogene rechtwinklige Axen für jede dieser drei Axen Null ist.**

§. 117.

Sind alle auf den Körper wirkenden Kräfte parallel, so kann man durch den festen Punct zwei zu ihren Richtungen parallele Ebenen legen und alle Paare in diesen Ebenen zerlegen. Es ist dann für das Gleichgewicht des Systems hinreichend, wenn die Summe der Momente in Bezug auf zwei auf diese Ebenen senkrechte Axen Null ist.

Sind alle Kräfte in derselben Ebene mit dem festen Puncte, so liegen alle in Rücksicht dieses Punctes gebildeten Paare gleichfalls in dieser Ebene, und es genügt dann, wenn die Summe der Momente rücksichtlich einer einzigen auf diese Ebene senkrechten Axe Null ist.

§. 118.

Bemerkung. Wir haben gesehen, daß die drei Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$, welche allgemein das Gleichgewicht eines Systems bedingen, sonst auch (§. 112) den Umstand ausdrücken, daß die angebrachten Kräfte eine einzige, durch den festen Punct gehende Resultante haben. Hätte man daher von dieser Folgerung als von einem Princip ausgehen wollen, d. h., hätte man es zuerst als Grundsatz aufstellen wollen, daß die Kräfte um einen festen Punct nicht im Gleichgewichte sein können, wenn sie nicht eine einzige, nach dem Puncte gerichtete Resultante haben: so würde daraus umgekehrt als ein Folgesatz hervorgegangen sein, daß für den Zustand des Gleichgewichts die drei Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$ Statt finden müssen, wodurch man also zu demselben Resultate gelangt wäre.

Von dem Drucke, den die Kräfte auf den festen Punct ausüben.

§. 119.

Folgesatz. Obgleich wir voraussetzten, daß der Widerstand des festen Punctes nach allen Seiten hin unbegrenzt sein solle: so wird dieser doch nur, wenn die gegebenen Kräfte an ihm gegenseitig im Gleichgewichte sind, eines begrenzten, bestimmten Widerstandes bedürfen. Nimmt man diesen bestimmten Widerstand im umgekehrten Sinne, so hat man den Druck, den der Punct von den Kräften des Systems erleidet.

Um also diesen Druck zu bestimmen, braucht man nur die Kraft $-r$ zu berechnen. Aus den obigen Gleichungen ergeben sich die drei Seitenkräfte derselben $-x$, $-y$, $-z$ nach den drei Axen:

$$-x = X, \quad -y = Y, \quad -z = Z$$

Der Druck ist also gleich der Resultante aller Kräfte des Systems, die parallel zu sich selbst in den festen Punct transponirt sind.

Man hätte diesen Schluß auch ohne weitere Rechnung machen können, denn der feste Punct kann nur von den parallel zu sich selbst in ihn transponirten Kräften und von den durch diese Kräfte in Bezug auf den festen Punct gebildeten Paaren einen Druck erleiden; da aber diese Paare an und für sich im Gleichgewichte sein müssen, d. h. auch dann im Gleichgewichte sein würden, wenn der Körper völlig frei wäre, so geht daraus hervor, daß sie auf den festen Punct nicht drücken können, daß dieser folglich nur von der Resultante jener Kräfte einen Druck erleidet.

II.

Vom Gleichgewichte eines Körpers, der um eine zwei feste Puncte verbindende Axe rotiren kann.

§. 120.

Es seien A und B (Fig. 36) die beiden festen Puncte. Wir wollen AB als eine der drei Axen, z. B. als Abscissenaxe, und den festen Punct A als Anfangspunct der Coordinaten annehmen.

Wie auch die Kräfte beschaffen sein mögen, deren Stelle die beiden Puncte durch ihren Widerstand vertreten, so kann man sie immer als auf zwei Kräfte r und r′ zurückgeführt ansehen, die unmittelbar an diesen Puncten angebracht sind, und auf diese Weise für die beiden festen Puncte A und B die beiden respectiven Kräfte r und r′, welche ihre Widerstände vertreten, substituiren, wo dann das System als ganz frei im Raume betrachtet werden muß.

Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht werden also auch Statt finden, wenn man in sie die neuen Kräfte r und r′ einführt.

Die Kraft r wirkt unmittelbar an A, gibt also die drei Seitenkräfte x, y, z nach den drei Axen, und kein Paar in den Ebenen.

Die Kraft r′, welche an B angebracht ist, gibt drei Seitenkräfte x′, y′, z′, die erste in der Abscissenaxe, die beiden andern in den respectiven Ebenen XY, XZ. Wird die erste Kraft x′, welche in die Abscissenaxe fällt, in den Anfangspunct transponirt, so gibt sie kein Paar; werden aber die beiden andern Kräfte y′, z′ in den Anfangspunct transponirt, so geben sie zwei Paare, die in den respectiven, an der Rotationsaxe befindlichen Ebenen XY, XZ liegen; und die

Momente dieser Paare sind, wenn man $AB = a$ setzt, $y'a$, $z'a$.

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts werden daher

$$X + x + x' = 0, \quad Y + y + y' = 0, \quad Z + z + z' = 0,$$
$$L = 0, \quad M + z'a = 0, \quad N - y'a = 0.$$

Den fünf Größen X, Y, Z, M, N kann man also beliebige Werthe geben; denn nimmt man den Widerstand der beiden festen Puncte als unbegrenzt nach allen Richtungen an, so können die Größen x, y, z, x', y', z' beliebige Werthe und Zeichen haben, und man wird den drei erstern und zwei letztern Gleichungen immer genügen können.

Zum Gleichgewichte der auf das System wirkenden Kräfte muß aber immer die Bedingung $L = 0$ erfüllt sein, woraus erhellt, daß sich die Bedingungen des Gleichgewichts eines um eine feste Axe rotirenden Körpers darauf zurückführen lassen, daß die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf diese Axe Null sei.

§. 121.

Bemerkung. Sind die beiden Puncte A und B nicht nach allen Richtungen hin fest, sondern können sie sich in der Geraden AB fortbewegen, wie wenn man sie sich verbunden und in einen unendlich engen Canal AB eingeschlossen dächte: so sind ihre Widerstände x und x' in der Richtung der Abscissenaxe in sich Null, und man hat dann noch die Gleichung $X = 0$, so daß also, wenn sich der Körper in der Richtung der Rotationsaxe fortbewegen kann, zu der oben aufgestellten Bedingung noch die hinzukommt, daß die Summe der parallel zu dieser Axe zerlegten Kräfte in sich Null sein muß.

Vom Drucke der Kräfte auf die zwei festen Puncte.

§. 122.

Folgesatz. Da diese Druckkräfte nichts anders sind als die wirklichen Widerstände r und r′ der beiden festen Puncte, nach entgegengesetztem Sinne genommen: so hat man zur Bestimmung ihrer Seitenkräfte $-x$, $-y$, $-z$, $-x'$, $-y'$, $-z'$, welche den drei Axen parallel sind, die fünf Gleichungen

$$X+x+x'=0,\quad Y+y+y'=0,\quad Z+z+z'=0,$$
$$M+z'a=0,\quad N-y'a=0.$$

Da es in diesen fünf Gleichungen sechs unbekannte Größen gibt, so scheint es auf den ersten Anblick, als ließen sich die Druckkräfte $-r$ und $-r'$ nicht bestimmen, oder wenigstens, als könnte man eine von den sechs Seitenkräften nach Belieben annehmen. Bemerkt man indeß, daß die beiden unbekannten Größen $-x$ und $-x'$ nur in der ersten Gleichung auftreten: so sieht man ein, daß die vier anderen unbekannten Größen durch die vier übrigen Gleichungen völlig bestimmt sind. In der That erhält man aus den beiden letztern auf der Stelle

$$-y'=\frac{-N}{a},\quad -z'=\frac{M}{a};$$

und, wenn man diese Werthe in die zweite und dritte Gleichung substituirt,

$$-y=\frac{Ya+N}{a},\quad -z=\frac{Za-M}{a}.$$

Die Unbestimmtheit erstreckt sich also nur auf die beiden Seitenkräfte $-x$ und $-x'$, deren Summe nur durch die Gleichung $X+x+x'=0$ gegeben ist.

Die beiden Kräfte $-y$, $-z$, welche senkrecht auf die Rotationsaxe im Puncte A sind, setzen sich in eine einzige zusammen $\sqrt{(y^2+z^2)}$, welche senkrecht auf dieselbe Axe ist, und mit den Axen der y und z Winkel einschließt, deren Cosinus respective

$$\frac{-Y}{\sqrt{(Y^2+Z^2)}}, \quad \frac{-Z}{\sqrt{(Y^2+Z^2)}}.$$

Eben so setzen sich die beiden Kräfte $-Y'$, $-Z'$, senkrecht auf die Rotationsaxe im Puncte B, in eine einzige, gleichfalls auf diese Axe senkrechte Kraft $\sqrt{(Y'^2+Z'^2)}$ zusammen, welche mit den Axen der y und z Winkel einschließt, deren Cosinus respective

$$\frac{-Y'}{\sqrt{(Y'^2+Z'^2)}}, \quad \frac{-Z'}{\sqrt{(Y'^2+Z'^2)}}.$$

Die beiden Normalpressungen auf die Axe in den respectiven Puncten A und B sind dadurch der Größe und Richtung nach fest bestimmt, und folglich können die absoluten Druckkräfte $-\mathbf{r}$ und $-\mathbf{r}'$ weiter keine Unbestimmtheit in sich schließen, als daß man sie so wählen muß, daß, wenn jede von ihnen in zwei andere, eine nach der Axe, die andere senkrecht auf sie, zerlegt wird, die beiden Normalkräfte die eben gefundenen Werthe und Richtungen haben, die beiden in der Axe liegenden Kräfte aber eine constante Summe gleich **X** bilden.

§. 123.

Um einzusehen, woher diese Unbestimmtheit komme, die von der Unbestimmtheit der nöthigen Widerstände X, X', welche die festen Puncte A und B in der Richtung der sie verbindenden Geraden zu leisten haben, abhängt, braucht man nur zu bedenken, daß die beiden Puncte, die man sich als durch einen unbiegsamen Faden mit einander verbunden denken kann, sich einander einen gegenseitigen Stützpunct gewähren, so daß jeder von ihnen, entweder durch sich selbst, oder durch Hülfe des andern, immer die zum Gleichgewichte nöthige Widerstandskraft hat, wenn nur die Summe der beiden Widerstände hinreichend groß ist. Man kann deshalb auch nicht von dem Calcule verlangen, daß er etwas geben soll, was nicht wirklich vorhanden ist; denn für die beiden Widerstandskräfte kann er deshalb keine besondern Werthe nachweisen, weil beide theilweise oder gänzlich von einem Puncte in den andern übergehen und sich zu einer und derselben Widerstandskraft vereinigen.

III.

Vom Gleichgewichte eines sich gegen eine starre Ebene lehnenden Körpers.

§. 124.

Mag diese Ebene die Ebene der xy oder die Horizontalebene sein, und nehmen wir zuerst an, der Körper stütze sich gegen sie nur in einem einzigen Puncte A, den wir als Anfangspunct der Coordinaten betrachten.

Es erhellt von selbst, daß, wenn eine Kraft einen Punct gegen eine Ebene drückt, diese Kraft immer in zwei andere Kräfte, die eine senkrecht auf die Ebene, die andere in die Ebene fallend, zerlegt werden kann. Die erste wird nothwendig durch den Widerstand der Ebene vernichtet, weil kein Grund vorhanden ist, weshalb sie den Punct nach der einen und nicht nach der andern Seite zugleich bewegen sollte, weshalb sie ihn denn gar nicht seitwärts treibt. Die zweite wirkt aber mit ihrer ganzen Kraft, weil ihre Wirkung nicht durch das Vorhandensein einer Ebene geschwächt oder vernichtet werden kann, längs derer sie wirkt. Die widerstehende Ebene kann folglich nur die Kräfte vernichten, die senkrecht auf sie wirken; ihr Widerstand kann deshalb auch nur solche Kräfte ins System hineinbringen.

Ist also z die vorhandene Resistenz des Stützpunctes in der Axe der z, so sind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Aus den drei letztern geht hervor (§. 112), daß die auf den Körper wirkenden Kräfte sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen müssen, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten, also durch den Stützpunct geht.

Die beiden erstern Gleichungen zeigen, daß diese Resultante vertical oder senkrecht auf die feste Ebene sein muß.

Die dritte Gleichung $Z + z = 0$ lehrt, daß diese Resultante Z einen beliebigen Werth haben könne, wenn nur ihr Zeichen dem des Widerstandes z der Ebene entgegengesetzt ist. Nimmt man also an, wie wir es für die Zukunft thun wollen, daß der Körper über der Ebene der xy liegt: so darf die Kraft z nicht positiv sein, weil sie sonst, strebend, den Körper über die Ebene in die Höhe zu heben, gar keinen Widerstand leisten würde, und die Ebene als zum Gleichgewichte gar nicht vorhanden betrachtet werden müßte, wo denn die Bedingungen des Gleichgewichts gelten würden, die wir oben für den Fall eines völlig freien Systems fanden.

§. 125.

Mag sich nun der Körper noch gegen einen zweiten Punct B stützen. Wir nehmen AB zur Axe der x und den Punct A zum Anfangspuncte der Coordinaten an.

Der Punct A gibt einen Widerstand Z in der Axe der z selbst. Der Punct B erzeugt einen Widerstand z' in der Ebene der xz und gibt in dieser Ebene ein Paar, dessen Moment $z'a'$ ist, wenn man $AB = a'$ setzt.

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts sind also

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z+z+z'=0,$$
$$L=0,\quad M+z'a'=0,\quad N=0.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß den beiden Bedingungen $XL+YM+ZN=0$ und $\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}>0$ genügt ist (letzterer, weil die beiden Widerstandskräfte z und z' nicht beide zugleich Null sein können, und also die Kraft Z, da z und z' dieselben Zeichen haben, immer reell bleiben muß), daß also die auf das System wirkenden Kräfte eine einzige Resultante haben müssen.

Die beiden ersten Gleichungen zeigen, daß diese Resultante vertical, also senkrecht auf die feste Ebene sein muß; die dritte, daß sie jeden beliebigen Werth haben kann, wenn sie nur nicht positiv ist.

Für die Werthe der beiden Coordinaten p und q des Punctes O, wo die Richtung der Resultante die Horizontalebene trifft, hat man nach (§. 108)

$$p=\frac{M}{Z},\quad q=\frac{-L}{Z};$$

und, statt L, M, Z ihre Werthe aus den eben aufgestellten Gleichungen gesetzt,

$$p=a'\frac{z'}{z+z'},\quad q=0.$$

Da $q=0$, so schneidet die Richtung der Resultante die Horizontalebene in der Abscissenaxe, oder, was dasselbe ist, in der Verbindungslinie der beiden Stützpuncte. Weil ferner $p=a'.\frac{z'}{z+z'}$, und $\frac{z'}{z+z'}$ jedesmal <1 ist, so muß p immer $<a'$ sein, also die Richtung der Resultante immer zwischen die beiden Stützpuncte A und B fallen.

§. 126.

Mag sich endlich der Körper gegen die Ebene in noch beliebig vielen andern Puncten C, D..... stützen, die alle auf derselben Seite rücksichtlich der als Abscissenaxe betrachteten geraden Linie AB liegen mögen. Wir behalten für die Puncte A und B die vorigen Bezeichnungen, und nennen a'', b'' die beiden Coordinaten des Punctes C; a''', b''' die des Punctes D u. s. w.

Wird die Widerstandskraft z'' des Punctes C in den Anfangspunct transponirt, so gibt sie da zwei Paare in den Verticalebenen XZ, YZ, deren Momente $z''a''$, $z''b''$ sind. Die Widerstandskraft z''' des Punctes D gibt gleichfalls zwei Paare in denselben Ebenen, deren Momente $z'''a'''$, $z'''b'''$ sind u. s. w. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts sind demnach

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z+z+z'+z''+z'''+\ldots..=0,$$
$$L-z''b''-z'''b'''-\ldots..=0,\quad M+z'a'+z''a''+z'''a'''+\ldots..=0,$$
$$N=0.$$

Aus diesen Gleichungen erhellt zugleich wieder, wie im vorigen Paragraphe, daß alle am Systeme wirkenden Kräfte auf eine einzige Kraft zurückführbar sein müssen, die senkrecht auf die feste Ebene ist und nicht positiv sein darf.

Ferner muß die Richtung der Resultante die Ebene im Innern des von den Puncten A, B, C, D..... gebildeten Polygons schneiden; denn ist q, wie vorhin, die Ordinate des Schnittpunctes O der Resultante mit der Horizontalebene, so hat man $q=\frac{-L}{Z}$, und, für L und Z ihre Werthe gesetzt,

$$q=\frac{z''b''+z'''b'''+\ldots\ldots}{z+z'+z''+z'''+\ldots..}$$

Die Kräfte z, z', z'', z'''.... u. s. w. sind alle positiv, und die Ordinaten b'', b'''.... haben alle dasselbe Zeichen, weil der Annahme zufolge alle Puncte C, D..... auf derselben Seite der Abscissenaxe liegen; q hat also mit diesen Ordinaten einerlei Zeichen, und daher liegt der Punct O mit den Puncten C, D..... auf derselben Seite der Verbindungslinie AB. Da man nun zur Abscissenaxe auch jede andere Gerade AC, BD......, welche zwei Stützpuncte verbindet und die andern alle auf derselben Seite liegen hat, wählen könnte, so muß der Punct O mit den übrigen Stützpuncten auf dieselbe Seite von jeder dieser Geraden und also nothwendig ins Innere des von ihnen gebildeten Polygons fallen.

§. 127.

Vom Drucke der Resultante aus den Kräften eines Systems auf die verschiedenen Stützpuncte.

Folgesatz. Diese Druckkräfte sind die nach entgegengesetztem Sinne genommenen Widerstände z, z', z'', z'''......, deren die Stützpuncte für den Zustand des Gleichgewichts bedürfen. Zu ihrer Bestimmung dienen also die drei Gleichungen

$$Z + z + z' + z'' + z''' + \ldots\ldots = 0,$$
$$L - b''z'' - b'''z''', - \ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$M + a'z' + a''z'' + a'''z''' + \ldots\ldots = 0.$$

Da man nur drei Gleichungen erhält, mit der einzigen Bedingung, daß alle unbekannten Größen z, z', z'', z'''...... positiv sein müssen: so sind die verschiedenen, auf die Ebene ausgeübten Druckkräfte unbestimmt, wenn mehr als drei Stützpuncte vorhanden sind, oder wenn im Falle dreier Stützpuncte diese in einer geraden Linie liegen. Denn nimmt man an, daß der dritte Punct C mit den beiden andern A und B in die Abscissenaxe fällt, so wird die Ordinate b'' Null, die Unbekannte z'' verschwindet aus der Gleichung $L - b''z'' = 0$, es bleiben also nur zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten z, z', z'', die deshalb denn auch unbestimmt sind.

In diesem Falle kann man daher eine einzige, und im allgemeinen Falle so viele Druckkräfte beliebig annehmen, als Stützpuncte über drei vorhanden sind. Aus den beliebig angenommenen bestimmen sich dann die übrigen durch die vorstehenden Gleichungen, und wenn unter den verschiedenen Voraussetzungen der Calcul nur keine positive Druckkraft gibt, so ist das Problem immer richtig gelöst.

§. 128.

Bemerkung. Die Theorie zeigt hier auf einer Seite, daß die Druckkräfte unbestimmt sind, wenn es mehr als drei Stützpuncte gibt. Betrachtet man dagegen auf der andern Seite einen sich gegen eine Ebene in beliebig vielen Puncten lehnenden und von einer Normalkraft auf diese Ebene im Gleichgewichte gehaltenen Körper **a priori**, so scheint es, als müsse jeder Berührungspunct wirklich gepreßt werden, und, wenn dies der Fall ist, als müsse er mit einer bestimmten Kraft gepreßt werden, was absurd sein würde und einen Widerspruch gibt, der sich auf den ersten Anblick nicht ganz leicht heben zu lassen scheint.

Indeß wollen wir nicht mit d'Alembert daraus schließen, daß die Theorie zur Lösung des betrachteten Problems nicht ausreiche; im Gegentheile ist dieses durch die Voraussetzung in sich unbestimmt, und man kann nicht vom Calcule verlangen, daß er von dieser Unbestimmtheit frei sein soll.

Der Annahme zufolge betrachten wir einen Körper von durchaus unveränderlicher Form; man kann also die Berührungspuncte desselben als durch eine völlig unbiegsame, auf den festen Puncten **A**, **B**, **C**, **D**..... ruhende Ebene vereinigt ansehen. Hat man nun mehr als drei Stützpuncte, oder auch nur drei, die aber in einer geraden Linie liegen: so läßt sich leicht einsehen, daß gewisse Theile von den durch die Ebene auf diese Puncte ausgeübten Druckkräften gegenseitig von einigen dieser Puncte auf die übrigen übertragen werden können, so daß man weder sie selbst bestimmen, noch angeben kann, auf welche Puncte vorzugsweise sie ausgeübt werden, ohne die Voraussetzung einer völligen Unbiegsamkeit der die Puncte des Körpers verbindenden Ebene zu vernichten.

Um uns verständlicher zu machen, wollen wir ein Beispiel wählen. Gesetzt, man habe (Fig. 37) einen Körper, der auf drei in einer geraden Linie liegenden Puncten ruht; wir wollen uns diese durch einen starren, unbiegsamen, auf den drei Puncten A, B, C ruhenden Faden vereinigt denken. Weiß man nun auch, daß dieser Faden in den drei respectiven Puncten A, B, C von drei parallelen Normalkräften P, Q, R gedrückt wird: so folgt daraus noch nicht, daß die auf die Stützpuncte ausgeübten Druckkräfte auch wirklich respective den P, Q, R gleich sind, weil es jedesmal gestattet ist, sich in den beiden äußersten Kräften P und R zwei Theile u und u′ zu denken, die durchaus nicht weiter auf die Stützpuncte A und C drücken. Nimmt man diese beiden Theile im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen AB und CB vom Puncte B, so können sie, weil der Faden völlig unbiegsam sein soll, auf den Stützpunct B drücken, und sich da mit der Kraft Q verbinden. Auf diese Weise ist hier eine unbestimmte Druckkraft $u + u'$ vorhanden, die ganz in B oder in ihren Theilen u und u′ auf die Puncte A und C fallen kann, ohne daß sich bestimmen läßt, wie groß sie an sich ist, noch wohin sie vorzugsweise fällt, wenn man nicht die Voraussetzung einer völligen Unbiegsamkeit des die Berührungspuncte des Körpers verbindenden Fadens vernichten will.

§. 129.

Übrigens ist diese Unbestimmtheit ganz der Art, wie die im (§. 123) erläuterte. Für den Fall, daß man mehr als drei Stützpuncte, oder auch nur drei hat, welche aber in einer geraden Linie liegen, sind nämlich die Druckkräfte oder Widerstände, deren die Stützpuncte zum Gleichgewichtszustande bedürfen, aus keinem andern Grunde unbestimmt, als weil die zwischenliegenden Stützpuncte den anliegenden von ihrer Resistenz mittheilen können, so daß sich bei vollkommen fester Verbindung der Stützpuncte ihre einzelnen Widerstände von denen, die sie wechselseitig unter sich austauschen, nicht mehr unterscheiden lassen.

Deshalb zeigt denn auch die Theorie, daß man, wenn nur die individuellen Resistenzen der Puncte zusammen den oben aufgestellten Gleichungen genügen, die Druckkräfte auf jede beliebige, durch die Gleichungen gestattete Weise über die einzelnen Stützpuncte vertheilen könne, und daß jeder Stützpunct entweder in der eigenen Resistenz allein oder in der Mithülfe der von andern Stützpuncten entlehnten Resistenz den nöthigen Widerstand finde, dessen er zur Vernichtung der auf ihn wirkenden Druckkraft bedarf.

Nicht so verhält es sich, wenn nur zwei Stützpuncte oder drei nicht in einer geraden Linie liegende vorhanden sind. In diesem Falle sind die Resistenzen bestimmt und müssen dies sein; denn weil sich hier jeder Stützpunct seitwärts von dem andern, oder im zweiten Falle seitwärts von der die beiden andern verbindenden geraden Linie allein befindet, so kann er offenbar nur seine eigne Resistenz haben und von den benachbarten Stützpuncten keine entlehnen, wenn die eigene nicht zureicht.

§. 130.

Der so eben von uns zergliederte Scheinwiderspruch ist um so auffallender, weil bei den in der Natur vorkommenden Körpern die auf die verschiedenen Berührungspuncte ausgeübten Druckkräfte nothwendig in jedem Falle bestimmt sein müssen.

Hier aber sind alle Körper mehr oder weniger biegsam und elastisch. Werden sie einer gegen den andern in verschiedenen, in derselben Ebene liegenden Puncten gedrückt, so vertheilt sich der Totaldruck auf besondere Weise vermöge dieser physischen Eigenschaften und der im (§. 127) aufgestellten Gleichungen, denen die einzelnen Druckkräfte immer genügen müssen. Um also hier die Bedingungsgleichungen zu finden, muß man auf jene physischen Eigenschaften Rücksicht nehmen, wo man denn eben so viele Gleichungen, als Berührungspuncte vorhanden sind, erhalten muß und so die einzelnen Druckkräfte erfährt. Es ist das eine scharfsinnige Untersuchung, die wir hier, weil sie das in Gebiet der Physik gehört, nicht weiter berühren.

§. 131.

Was wir vom Gleichgewichte eines sich gegen eine einzige Ebene lehnenden Körpers gesagt haben, läßt sich leicht auf einen Körper anwenden, der sich gegen mehre Ebenen zugleich stützt. Jede der Ebenen erzeugt in den verschiedenen Berührungspuncten Normalkräfte auf seine Oberfläche; führt man diese unbestimmten neuen Kräfte in die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts ein, so erhält man die Bedingungen, die von den ursprünglich angebrachten Kräften erfüllt sein müssen.

§. 132.

Lehnt sich der Körper in verschiedenen Puncten gegen eine oder mehre krumme Oberflächen, so kann man statt der krummen Oberflächen die an sie in den Berührungspuncten gelegten Tangentialebenen nehmen. Kennt man also die Gleichungen der krummen Oberflächen, so sucht man daraus die Gleichungen der Tangentialebenen oder der Normalen auf die verschiedenen Berührungspuncte, führt darauf in die

Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts so viele nach diesen Normalen gerichtete, unbestimmte Kräfte ein, als es Berührungspuncte gibt, und hat so die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Drittes Capitel.

Von den Schwerpuncten.

Bisher haben wir auf die Schwerkraft der Körper keine Rücksicht genommen; wir wollen nun diese allgemeine Eigenschaft der Materie betrachten und die bisher aufgestellten Principien des Gleichgewichts auf solche Körper anwenden, wie sie in der Natur vorkommen.

I.

Definition und allgemeine Theorie über die Bestimmungen der Schwerpunte.

§. 133.

Schwere oder Schwerkraft heißt die unbekannte Ursache, welche die durch kein Hinderniß aufgehaltenen Körper gegen die Erde niedertreibt.

Da die Schwere Bewegung erzeugt, so muß sie als eine Kraft betrachtet werden.

Die Schwerkraft durchdringt die feinsten Theile der Körper und wirkt auf alle ihre Moleceule ganz gleichförmig; denn die Erfahrung zeigt, daß im leeren Raume beliebige Körper von ungleichen Massen, eine Bleikugel z. B. und eine leichte Flaumfeder, von derselben Höhe mit derselben Geschwindigkeit herunterfallen, woraus folgt, daß die Moleeule des fallenden Körpers so niedersinken, als lägen sie ohne weitere Verbindung neben einander. Auf diese Weise afficirt die Schwerkraft alle Molecule des Körpers, und zwar jedes gleichmäßig.

Die Intensität der Schwerkraft jedoch ist nicht ganz dieselbe für Molecule an verschiedenen Orten der Erdkugel; sie variirt auf der Oberfläche der Erde vom Äquator an, wo sie am kleinsten, bis zum Pole, wo sie am größten ist; auch nimmt sie in demselben Abstande vom Äquator mit der weitern Entfernung der Molecule vom Mittelpuncte der Erdkugel ab, und zwar dergestalt, daß diese Abnahme dem Quadrate der Entfernung des Körpers vom Erdcentrum proportional ist. Die gewöhnlich in der Statik betrachteten Molecule der Körper liegen jedoch weder in so verschiedenen Abständen vom Äquator, noch vom Mittelpuncte der Erde, daß hier eine Veränderlichkeit der Schwerkraft merklich werden könnte, weshalb man denn auch die Schwere in der Statik als eine constante Kraft zu betrachten berechtigt ist.

Die Richtung der Schwerkraft wird genau durch die eines im Gleichgewichte befindlichen Lothes oder durch ein Perpendikel auf eine ruhige Wasserfläche dargestellt.

Diese Richtung heißt für den Ort, wo sie betrachtet wird, die Vertikalrichtung, und jede auf sie senkrechte Ebene wird Horizontalebene genannt.

Da die Oberfläche der Erde oder vielmehr des Meeres sehr nahe eine Kugeloberfläche ist, so schneiden sich auch die Richtungen der Schwere nahe im Erdcentrum. So wie man also auf der Erde fortgeht, ändert sich die Verticale und die Horizontalebene; in der Statik indeß sind die Entfernungen in der Regel gegen den Erdhalbmesser, der nahe 860 geographische Meilen *) lang ist, so unbedeutend, daß zwei wenig von einander entfernte Verticalen, welche ihren

*) 1500 Lieues, die geographische Meile nahe zu $1\frac{3}{4}$ Lieue gerechnet.

Schnittpunct in einer so großen Entfernung haben, ohne merklichen Fehler als parallel angesehen werden können.

Wir betrachten deshalb alle gleichen Molecule eines schweren Körpers als von kleinen Kräften getrieben, die gleich, parallel und von demselben Sinne sind, und wir können dann auf die aus der Schwere hervorgehenden Kräfte das anwenden, was früher über Parallelkräfte gesagt ist, die an mehren, auf unveränderliche Weise unter einander verbundenen Puncten wirken.

§. 134.

Wir haben also erstens den Satz: die Resultante aller Parallelkräfte der Schwere ist dieser selbst parallel, mithin vertical.

Zweitens: die Resultante ist gleich der Summe dieser Kräfte.

Die Größe dieser Resultante nennt man das Gewicht eines Körpers; dieses ist folglich der Anzahl der den Körper bildenden Molecule oder der Quantität seiner Materie, welche man seine Masse nennt, proportional. Man hat demnach den Ausdruck Schwere oder Schwerkraft von dem Worte Gewicht wohl zu unterscheiden. Schwerkraft ist die Ursache, welche die Körper gegen die Erde treibt; Gewicht ist die besondere aus ihr für jeden Körper resultirende Kraft, die der Masse des Körpers proportional und der Kraft, welche ihn am Fallen hindert, gleich ist.

§. 135.

Da es drittens für an verschiedenen Puncten angebrachte Parallelkräfte einen Mittelpunct, d. h. einen einzigen Punct gibt, worin sich die successiven Resultanten dieser Gruppe von Kräften schneiden, wenn man sie allmälig in andere Lagen bringt: so gibt es für einen schweren Körper auch immer einen einzigen Punct, durch den fortwährend die Richtung seiner Gewichtskraft geht, wenn der Körper allmälig verschiedene Lagen gegen die Horizontalebene erhält, weil in den verschiedenen Lagen die Gewichtskräfte, welche die einzelnen Molecule treiben, dieselben bleiben, in denselben Puncten wirken und immer parallel sind.

Dieser einzige Punct, durch welchen immer die Gewichtskraft ihre Richtung hat, wie auch der Körper gegen die Horizontalebene liegen mag, heißt der **Schwerpunct** des Körpers.

§. 136.

Ist der Schwerpunct eines Körpers fest, so befindet sich der Körper in jeder beliebigen Lage um ihn im Gleichgewichte; bringt man also den Körper um diesen Punct in irgend eine Lage und läßt dann weiter keine Kraft auf ihn wirken, so bleibt er in dieser Lage; denn die Resultante der Gewichtskräfte geht immer durch den festen Punct, wo sie vernichtet wird. Aus diesem Grunde ist in vielen Lehrbüchern der Statik für den Schwerpunct die Definition aufgestellt: der Schwerpunct eines Körpers ist ein dergestalt liegender Punct, daß, wenn man sich ihn fest denkt, der Körper in allen möglichen Lagen um ihn im Gleichgewichte bleibt. Indessen ist es naturgemäßer, a priori zu zeigen, daß es für jeden Körper immer einen solchen Punct gibt, und mithin, daß jeder Körper einen Schwerpunct hat, ehe man den Schwerpunct selbst definirt.

§. 137.

Da der Schwerpunct eines Körpers mit dem Mittelpuncte aller auf die Molecule des Körpers wirkenden parallelen Gewichtskräfte zusammenfällt, und da alle diese Kräfte einander gleich sind, so folgt aus (§. 87), daß **die Entfernung des Schwerpunctes von irgend einer Ebene gleich** ist der mittlern Entfernung aller Molecule des Körpers von derselben Ebene. Die Lage des Schwerpunctes in einem Körper hangt also durchaus nicht von der Schwerkraft, sondern nur von der Weise ab, wie die Molecule des Körpers gegen einander liegen.

Deshalb haben einige Geometer statt der Benennung Schwerpunct die Benennung Mittelpunct der Masse oder Mittelpunct der Figur vorgezogen; wir behalten den erstern Ausdruck, weil er gebräuchlicher ist und die von diesem Puncte in der Statik zu machende Anwendung mehr bezeichnet.

§. 138.

Statt aller der auf die Molecule des Körpers wirkenden Gewichtskräfte kann man immer ihre allgemeine, genau dieselbe Wirkung erzeugende Resultante substituiren und so den Schwerpunct eines Körpers als den Punct ansehen, worin die ganze Masse des Körpers concentrirt ist. Berücksichtigt man also in statischen Untersuchungen das Gewicht der Körper, so läßt sich jeder Körper als auf seinen Schwerpunct zurückgeführt, und dieser als von einer Kraft getrieben betrachten, welche der Gewichtskraft parallel und gleich ist. Verbindet man darauf diese neuen Kräfte mit den unmittelbar auf den Körper angebrachten, so findet man die Bedingungen des Gleichgewichts nach den in den vorigen Capiteln aufgestellten Principien ganz so, als wären die Körper gar nicht von der Schwerkraft afficirt.

Es kommt also hier nur darauf an, die Schwerpuncte der verschiedenen Körper oder Systeme von Körpern zu bestimmen.

§. 139.

Kann man den Körper oder das System als aus Theilen bestehend betrachten, von denen man die Schwerpuncte und respectiven Gewichte schon kennt: so bestimmt sich daraus leicht der Schwerpunct des Körpers oder Systems.

Denn da der Schwerpunct nur der Angriffspunct der allgemeinen Resultante aus den auf alle Molecule des Körpers wirkenden Gewichtskräften ist, so kann man zur Bestimmung des Schwerpunctes erst die respectiven Puncte aufsuchen, worin die partiellen Resultanten der auf jeden einzelnen Körper wirkenden Kräfte angreifen, und dann den Angriffspunct der aus diesen einzelnen Resultanten hervorgehenden allgemeinen Resultante bestimmen.

Kennt man also schon die respectiven Schwerpuncte der einzelnen Körper, so braucht man sich nur auf diese Puncte Parallelkräfte angebracht vorzustellen, die den respectiven Gewichten dieser Körper gleich sind, und man findet darauf den Schwerpunct des Systems ganz auf die Weise wie den Mittelpunct von Parallelkräften. Zu dieser Untersuchung bedient man sich denn entweder der allmäligen Zusammensetzung der Kräfte (§. 29), oder der Theorie der Momente (§. 86).

Da die Entfernung des Mittelpunctes der Parallelkräfte von einer Ebene gleich ist der Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf diese Ebene, dividirt durch die Summe aller Kräfte, so hat man den Satz:

Die Entfernung des Schwerpunctes eines beliebigen Körpersystems von einer Ebene ist gleich der Summe der Momente ihrer Gewichte in Bezug auf diese Ebene, dividirt durch die Summe aller Gewichte; oder, weil die Massen den Gewichten proportional sind, **gleich der Summe der Momente der Massen dividirt durch die Summe der Massen selbst**, wo man unter Moment einer Masse das Product dieser Masse in die Entfernung ihres Schwerpunctes von der betrachteten Ebene versteht.

Berechnet man so die Entfernungen des Schwerpunctes von drei beliebigen Ebenen, die man der Einfachheit wegen rechtwinklig auf einander annehmen kann: so findet man die Lage des Schwerpunctes im Raume.

§. 140.

Sind alle Massen eines Systems unter einander gleich, so ist die Entfernung des Schwerpunctes des Systems von einer beliebigen Ebene gleich der mittlern Entfernung der Schwerpuncte aller dieser Körper von der Ebene.

§. 141.

Geht die Ebene, auf welche die Momente bezogen werden, durch den Schwerpunct des Systems, so ist die Entfernung des Schwerpunctes von dieser Ebene Null. Man hat also den Satz: die Summe der Momente der Massen in Bezug auf eine durch den Schwerpunct des Systems gehende Ebene ist immer Null.

Oder mit andern Worten: die Summe der Momente der Massen auf der einen Seite dieser Ebene ist immer der Summe der Momente der Massen auf der andern Seite der Ebene gleich.

Umgekehrt: ist die Summe der Momente der Massen in Bezug auf eine Ebene Null, so geht die Ebene durch den Schwerpunct des Systems, weil dann die Entfernung des Schwerpunctes von der Ebene Null ist.

§. 142.

Daraus folgt: liegen die Schwerpuncte der einzelnen Körper in derselben Ebene, so liegt auch der Schwerpunct des Systems in dieser Ebene; und liegen die Schwerpuncte der Körper in einer geraden Linie, so liegt auch der Schwerpunct des Systems in dieser geraden Linie.

Denn im ersten Falle, wo die Schwerpuncte der Körper in derselben Ebene liegen, sind die Momente ihrer Massen in Bezug auf diese Ebene alle Null; die Entfernung des Schwerpunctes des Systems in Bezug auf diese Ebene ist demnach auch Null, und der Schwerpunct liegt mithin in derselben Ebene.

Legt man im zweiten Falle durch die Gerade, in welcher alle Schwerpuncte der Körper liegen, zwei beliebige Ebenen, so liegen die Schwerpuncte zugleich in beiden Ebenen; der Schwerpunct des Systems muß also auch in beiden Ebenen zugleich liegen, liegt also in ihrem Durchschnitte, welcher die gegebene Gerade ist.

Übrigens scheinen diese beiden Sätze an sich evident zu sein, wenn man den Schwerpunct des Systems aus der allmäligen Zusammensetzung der in den respectiven Schwerpuncten der einzelnen Körper angebrachten Kräfte oder Gewichte hervorgehen läßt.

§. 143.

Liegen alle Schwerpuncte der einzelnen Körper in derselben Ebene, so ist die Ebene des Schwerpunctes des Systems bekannt, und man braucht zur Ermittelung seiner Lage nur noch seine Entfernungen von zwei andern Ebenen zu bestimmen. Nimmt man der Einfachheit wegen diese Ebenen beide senkrecht auf die erste, so sind die Entfernungen der verschiedenen Schwerpuncte von diesen Ebenen die Entfernungen derselben von den Schnittlinien der beiden Ebenen mit der erstern Ebene.

Zieht man also in der Ebene der Schwerpuncte verschiedener Körper zwei beliebige, nur nicht parallele, gerade Linien oder Axen, so findet man die respectiven Abstände des Schwerpunctes des Systems von diesen Axen, wenn man die respectiven Summen der Momente aller Massen, in Bezug auf diese Axen, durch die Summe aller Massen dividirt.

Dabei muß man für jede Axe die auf einer Seite derselben liegenden Momente der Massen als positiv, und die auf der andern als negativ betrachten.

Auf diese Weise findet man, in welchen Entfernungen und auf welcher Seite rücksichtlich der beiden Axen der Schwerpunct des Systems liegt, und zieht man nun in den gefundenen Abständen zu den Axen zwei parallele, gerade Linien, so liegt der Schwerpunct in ihrem Durchschnittspuncte.

§. 144.

Liegen die Schwerpuncte aller Körper in derselben geraden Linie, so liegt der Schwerpunct des Systems in einer bereits bekannten Geraden, und man braucht dann nur noch seinen Abstand von einer einzigen Ebene zu wissen. Nimmt man diese senkrecht auf die Linie der Schwerpuncte, so fallen die Entfernungen der respectiven Schwerpuncte von dieser Ebene mit ihren Entfernungen von dem Puncte, wo die Ebene die Gerade schneidet, zusammen.

Haben also mehre Körper ihre respectiven Schwerpuncte in derselben geraden Linie, so ist die Entfernung des Schwerpunctes des Systems von einem beliebigen Puncte dieser Geraden gleich der Summe der Momente der Massen in Bezug auf diesen Punct, dividirt durch die Summe aller Massen.

Dabei sind alle in Rücksicht des Punctes auf einer Seite liegenden Momente der Massen als positiv, und alle auf der andern Seite liegenden als negativ zu betrachten.

Man weiß nun, in welcher Entfernung und auf welcher Seite rücksichtlich des gewählten Punctes der Schwerpunct des Systems liegt, und trägt man von dem Puncte aus nach dieser Seite hin eine Länge gleich der gefundenen Entfernung auf der Geraden ab, so ist ihr Endpunct der Schwerpunct des Systems.

§. 145.

Man sieht hieraus, wie leicht sich der Schwerpunct eines Körpers oder Systems bestimmen läßt, wenn man die Schwerpuncte der verschiedenen dasselbe bildenden Körper kennt. Es bleibt uns nun noch übrig, zu zeigen, wie man die Schwerpuncte der Körper finde, die sich nicht auf solche Weise zerlegen lassen.

Da man einen Körper immer als eine Vereinigung von materiellen Puncten betrachten kann, die ihre eigenen Schwerpuncte sind, so läßt sich in der That die vorhergehende Methode auf jeden Körper anwenden, und man findet allgemein die Entfernung seines Schwerpunctes von einer Ebene, wenn man die Summe der Momente aller Molecule des Körpers in Bezug auf diese Ebene durch die Summe aller Molecule, oder (was dasselbe ist) durch die Totalmasse des Körpers dividirt. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe hangt jedoch mit der Integralrechnung zusammen; man findet davon fast in allen Lehrbüchern der Mechanik einzelne Anwendungen, die weiter keinen Schwierigkeiten unterworfen sind, als denen der Integralrechnung selbst.

Da es indessen sehr schöne elementare Betrachtungen gibt, vermöge deren man die Schwerpuncte für die meisten der Körper, welche in der Geometrie behandelt werden, findet: so wollen wir uns auf diese beschränken; wir erreichen dadurch unseren vorliegenden Zweck und entfernen uns nicht von den Elementen.

§. 146.

Nach (§. 137) hangt die Lage des Schwerpunctes eines Körpers nur von der Art ab, wie die Molecule des

Körpers gegen einander gelagert sind. Sie hangt also von zwei Stücken ab:

1) von der Figur des Körpers oder des Raumes, den dieser einnimmt;

2) von der relativen Dichtigkeit der einzelnen Theile.

Bleiben Figur und Volumen eines Körpers unverändert, und entfernen sich in einem Theile des Körpers die Molecule von einander, wofür sie sich denn in einem andern Theile desto mehr anhäufen: so sind offenbar die auf sie wirkenden Kräfte nicht mehr auf dieselbe Weise vertheilt, die Lage der gemeinschaftlichen Resultante, und mithin auch die Lage des Schwerpunctes des Körpers ändert sich also. Bei der Bestimmung dieses Punctes hat man daher nicht bloß die Figur des Körpers, sondern auch das Gesetz zu berücksichtigen, wonach in seiner ganzen Ausdehnung die Dichtigkeit variirt.

Nimmt man der Einfachheit wegen zuerst an, daß die Körper völlig gleichartig oder in allen ihren Puncten gleich dicht sein sollen: so hangt die Lage des Schwerpunctes nur noch von der Figur ab, und die Untersuchung des Schwerpunctes wird dann eine ganz einfache geometrische Aufgabe.

Unter dieser Voraussetzung einer völlig gleichförmigen Dichtigkeit bestimmt man denn gewöhnlich die Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körper, die geometrisch genau beschreibbar sind, und die man als in allen ihren Puncten einer gleichförmigen Gewichtskraft unterworfen ansieht. Auf den ersten Anblick scheint dies Problem eben nicht praktisch zu sein; es nimmt jedoch in der Statik die Stelle ein, wie in der Geometrie die Quadratur der Flächen und die Cubatur der Körper. So wie die Resultate der Geometrie in der Anwendung um so genauer sind, je mehr sich die betrachteten Figuren den geometrischen nähern: so liegen auch hier die Schwerpuncte um so genauer an der ihnen von der

Theorie angewiesenen Stelle, je gleichförmiger die Materie des Körpers vertheilt, und je regelmäßiger seine Figur ist.

II.

Vom Schwerpuncte der Figuren.

§. 147.

Hülfssatz. Ist in einer Figur ein Punct der Art vorhanden, daß eine durch ihn beliebig gelegte Ebene die Figur in zwei völlig symmetrische Hälften theilt: so ist dieser sogenannte Mittelpunct der Figur ihr Schwerpunct.

Denn da eine beliebig durch den Mittelpunct der Figur gelegte Ebene die Figur in zwei völlig symmetrische Hälften theilt, so ist kein Grund vorhanden, warum der Schwerpunct, der nur ein einziger Punct ist und bloß von der Figur abhangt, mehr auf der einen Seite dieser Ebene als auf der andern liegen sollte; er wird also in der Ebene liegen. Er muß mithin zugleich in allen Ebenen liegen, die durch den Mittelpunct der Figur gezogen werden können, wird also in diesem Puncte liegen, weil dieser der einzige allen Ebenen gemeinschaftliche Punct ist.

§. 148.

Daraus folgt:

1) der Schwerpunct einer geraden Linie liegt in ihrem Mittelpuncte;

2) der Schwerpunct der Fläche eines beliebigen Parallelogramms ist der Schnittpunct seiner beiden Diagonalen oder der Mittelpunct einer dieser Diagonalen;

3) der Schwerpunct eines soliden Parallelepipedums ist

der Schnittpunct seiner vier Diagonalen oder der Mittelpunct einer dieser Diagonalen.

Auch könnte man daraus schließen, daß der Schwerpunct des Umfanges oder der Fläche eines Kreises der Mittelpunct des Kreises ist; daß der Schwerpunct der Oberfläche oder der Solidität einer Kugel im Mittelpuncte der Kugel liegt; daß der Schwerpunct der Oberfläche oder Solidität eines Cylinders mit parallelen Grundflächen der Mittelpunct seiner Axe ist u. s. w.

Vor allem aber merke man sich die drei vorhin aufgestellten Folgesätze für die Schwerpuncte der geraden Linie, des Parallelogramms und des Parallelepipedums, weil diese Figuren als die Elemente aller übrigen angesehen werden können.

§. 149.

Aufgabe I. Man soll den Schwerpunct des Umfanges eines beliebigen Polygons und im Allgemeinen einer Vereinigung von beliebig im Raume verbundenen geraden Linien finden.

Man betrachte jede gerade Linie als in ihrem Schwerpuncte, folglich in ihrem Mittelpuncte concentrirt, und man hat dann nur noch eine Vereinigung von Puncten zu betrachten, die ihren Gewichten nach durch die geraden Linien repräsentirt werden, deren Mittelpuncte sie sind.

Man findet also den Schwerpunct dieses Systems durch die allmälige Zusammensetzung dieser Gewichtskräfte, oder durch die Theorie der Momente, wie oben gelehrt ist.

§. 150.

In manchen Fällen lassen sich die Schwerpuncte durch besondere Betrachtungen leichter bestimmen, als durch diese allgemeine Methode.

Soll man z. B. den Schwerpunct eines Dreiecksumfanges finden, so verbinde man die Mittelpuncte der drei Seiten durch drei gerade Linien, wodurch man ein Dreieck erhält, das dem gegebenen ähnlich ist; halbirt man darauf die Winkel dieses Dreiecks durch gerade Linien, so schneiden sich diese im gesuchten Schwerpuncte.

Mit andern Worten: der Schwerpunct eines Dreiecksumfanges ist der Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises in das von den drei Geraden gebildete Dreieck, welche die Mittelpuncte der Seiten des gegebenen Dreiecks verbinden.

§. 151.

Aufgabe II. **Man soll den Schwerpunct der Fläche irgend eines Polygons, und im Allgemeinen der Fläche eines Systems von ebenen, geradlinigen, auf irgend eine Weise im Raume verbundenen Figuren finden.**

Da alle Polygone in Dreiecke zerlegt werden können, so wollen wir zuerst untersuchen, wie man den Schwerpunct eines beliebigen Dreiecks bestimme. Hat man diese Bestimmung gemacht, so nimmt man alle Schwerpuncte der das vorliegende System bildenden Dreiecke und hat so nur ein System von gegebenen Puncten, deren respective Gewichte von den Flächen der Dreiecke repräsentirt werden, von denen sie die Schwerpuncte sind. Die Aufgabe löst sich also dann wie die vorhergehende.

Vom Schwerpuncte eines Dreiecks.

§. 152.

Es sei ABC (Fig. 38) das gegebene Dreieck. Wir betrachten seine Fläche als aus unendlich vielen, zur Basis BC parallelen Streifen zusammengesetzt. Eine Gerade nun aus dem Scheitel A des Dreiecks auf die Mitte D der Basis wird alle diese Streifen halbiren; ihre respectiven Schwerpuncte liegen folglich in der Geraden AD, und demnach wird auch der Schwerpunct ihres Systems, also der Schwerpunct des Dreiecks in dieser geraden Linien liegen.

Auf dieselbe Weise zeigt man, daß der Schwerpunct des Dreiecks auch in der Geraden BE, welche den Scheitelpunct des Winkels B mit der Mitte E der gegenüberstehenden Seite AC verbindet, liegen müsse.

Der Schwerpunct liegt also in den beiden Geraden AD und BE zugleich, also in ihrem Durchschnittspuncte G.

Verbindet man die Puncte D und E durch eine Gerade DE, so ist DE, weil D und E die respectiven Mittelpuncte von CB und CA sind, parallel zu AB und $= \frac{1}{2}$AB. Ist aber DE $= \frac{1}{2}$AB, so ist auch DG, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DGE und AGB, gleich der Hälfte der homologen Seite AG.

Man hat also DG $= \frac{1}{3}$AD, und AG $= \frac{2}{3}$AD.

Der Schwerpunct der Fläche eines beliebigen Dreiecks liegt demnach in der Geraden, die aus einem der drei Winkelspitzen nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite gezogen ist, und zwar $\frac{1}{3}$ der Länge dieser Geraden von der Basis und $\frac{2}{3}$ derselben von dem Scheitelpuncte des Dreiecks ab.

Der vorstehende Beweis ist so natürlich und so einfach, daß wir ihn nicht übergehen zu dürfen glaubten; die möglichste Schärfe kann man ihm durch die bekannte, in den Elementen der Geometrie so häufig angewendete Methode geben; wir überlassen dies indeß dem Leser und geben dafür noch einen neuen Beweis, der an Genauigkeit nichts zu wünschen übrig läßt.

§. 153.

Aus dem Mittelpuncte D der Basis BC des Dreiecks ABC (Fig. 39) ziehe man respective parallel zu den beiden andern Seiten die Geraden DE und DF, welche diese Seiten in E und F schneiden; dadurch zerfällt das gegebene Dreieck in ein Parallelogram AEDF und zwei Dreiecke DEC und DFB, die unter sich gleich und dem ersten Dreiecke ähnlich sind.

Das Moment des Dreiecks ABC in Bezug auf irgend eine in seiner Ebene gezogene gerade Linie ist also gleich der Summe der Momente des Parallelogramms und der beiden Dreiecke.

Es sei a die Fläche eines der letztern Dreicke, so wird 4a die Fläche des Dreiecks ABC. Nennt man also x die Entfernung des Schwerpunctes dieses Dreiecks von der Basis BC, so ist 4ax sein Moment in Bezug auf die Basis.

Ist h die Höhe des Dreiecks, so ist $\frac{h}{2}$ die Entfernung des Schwerpunctes des Parallelogramms von der Basis. Da nun seine Fläche $= 2a$, so ist sein Moment $2a\,\frac{h}{2} = ah$.

Endlich haben die beiden Dreiecke BFD und DEC ihren Schwerpunct offenbar in gleichen Entfernungen von der Basis; bezeichnet man also diese Entfernung mit x', so ist die Summe ihrer Momente $= 2ax'$.

Man hat also nun die Gleichung $4ax = ah + 2ax'$, oder, wenn man mit 4a dividirt,

$$x = \frac{1}{4}h + \frac{x'}{2}.$$

Wollte man nun mit Archimedes voraussetzen, daß in ähnlichen Dreiecken auch die Schwerpuncte auf ähnliche Weise liegen, so hätte man, weil die Dimensionen des Dreiecks **BFD** oder **DEC** die Hälften von den Dimensionen des Dreiecks **ABC** sind, $x' = \frac{x}{2}$, und substituirte man diesen Werth in die Gleichung, so fände sich

$$x = \frac{h}{3},$$

woraus denn hervorginge, daß der Schwerpunct eines Dreiecks über jeder Seite in einem Abstande gleich dem dritten Theile der Höhe der gegenüberstehenden Winkelspitze über dieser Seite liegt, wodurch man also wieder in den vorher bestimmten Punct gelangt.

Man kann jedoch zu diesem Schlusse ohne eine weitere Voraussetzung kommen. Wir haben für das Dreieck **ABC**

$$x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2}$$

gefunden, wo x die Entfernung seines Schwerpunctes von der Basis **BC**, und x' die Entfernung des Schwerpunctes des Dreiecks **BFD** von der Basis **BD** ist. Wiederholte man nun im Dreiecke **BFD** die im Dreiecke **ABC** vorgenommene Construction, und nennt man x'' die dem x' analoge Entfernung, so ist, weil die Höhe des neuen Dreiecks zweimal kleiner ist, als die des gegebenen Dreiecks,

$$x' = \frac{1}{4}.\frac{h}{2} + \frac{x''}{2}.$$

Durch allmälige Wiederholung derselben Construction findet man eben so

$$x'' = \frac{1}{4}.\frac{h}{4} + \frac{x'''}{2},$$

$$x''' = \frac{1}{4}.\frac{h}{8} + \frac{x^{\text{IV}}}{2},$$

u. s. w.

wo x''', x^{IV} .... die Abstände der Schwerpuncte der successiven Dreiecke von der Basis bezeichnen. Diese Abstände werden immer kleiner, und der letzte von ihnen kann kleiner als jede gegebene Größe werden, weil er immer kleiner ist als die Höhe des ihm zugehörigen Dreiecks.

Substituirt man nun allmälig in die erste Gleichung für x', x'', x'''...... ihre Werthe, so findet man

$$x = \frac{h}{4} + \frac{h}{4.4} + \frac{h}{4.4.4} + \ldots\ldots \text{ ins Uneddliche,}$$

woraus $x = \frac{h}{3}$ folgt.

§. 154.

Bemerkung. Liegen die Schwerpuncte von drei gleichen Massen in den drei respectiven Winkelspitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 38), so fällt der Schwerpunct dieser drei Körper mit dem Schwerpuncte des Dreiecks zusammen.

Denn um den Schwerpunct der drei Körper zu finden, hat man zuerst den Schwerpunct zweier von ihnen, z. B. von B und C, zu nehmen, welcher im Mittelpuncte D von BC liegt, darauf D und A durch eine Gerade DA zu verbinden, und diese Gerade im Puncte G im umgekehrten Verhältnisse von 2 zu 1 zu theilen.

Auf dieselbe Weise wird aber auch der Schwerpunct des Dreiecks ABC gefunden.

Hieraus und aus (§. 140) folgt, daß der Abstand des Schwerpunctes eines Dreiecks von einer beliebigen Ebene im Raume gleich ist der mittlern Entfernung der drei Winkelspitzen des Dreiecks von derselben Ebene.

§. 155.

Schwerpunct des Trapezes.

Verlängert man die beiden Seiten eines Trapezes, bis sie sich schneiden, so erhält man an demselben Scheitelpuncte zwei ähnliche Dreiecke, deren Basen die Basen des Trapezes sind. Da eine aus dem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte nach der Mitte der untern Basis gezogene gerade Linie auch die obere Basis halbirt, so geht sie durch die Schwerpuncte beider Dreiecke, und folglich auch durch den Schwerpunct des Trapezes, welches die Differenz beider Dreiecke ist. Der Schwerpunct des Trapezes liegt also in der Verbindungslinie der Mittelpuncte beider parallelen Basen; man braucht also nur noch seinen Abstand von einer der Basen, oder das Verhältniß der Abstände von beiden Basen zu bestimmen.

Es seien x der unbekannte Abstand des Schwerpunctes von der untern Basis, H und h die Höhen der beiden ähnlichen Dreiecke. Bezeichnet H^2 die Fläche (oder das Gewicht) des größern Dreiecks: so ist h^2 die Fläche des kleinern Dreiecks, und $H^2 - h^2$ die Fläche des Trapezes. Das Moment des ersten Gewichtes in Bezug auf die untere Basis ist also $H^2 . \frac{H}{3}$, des zweiten $h^2(\frac{h}{3} + H - h)$, und des dritten $(H^2 - h^2)\,x$. Setzt man also das erstere dieser Momente der Summe der beiden andern gleich, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$3(H^2 - h^2)x = H^3 - 3h^2H + 2h^3.$$

Sucht man eben so den Abstand y des Schwerpunctes von der obern Basis, oder bemerkt man, daß y gleich $(H - h)$ ist, wenn man x davon nimmt: so hat man

$$3(H^2 - h^2)y = h^3 - 3H^2h + 2H^3.$$

Vergleicht man beide Gleichungen und läßt auf der einen Seite den gemeinschaftlichen Factor $3(H^2 - h^2)$, auf der andern $(H - h)^2$ weg, so erhält man

$$x : y = H + 2h : h + 2H,$$

oder, wenn man statt der Höhen H und h die ihnen proportionalen Basen B und b nimmt,

$$x : y = B + 2b : b + 2B,$$

woraus denn der Satz folgt:

Der Schwerpunct eines Trapezes liegt in der

Geraden durch die Mittelpuncte der beiden Grundlinien, und theilt diese Gerade in zwei Stücke, die sich verhalten wie die Summe der einen Grundlinie + der doppelten zweiten, zu der Summe dieser Grundlinie + der doppelten ersten.

Durch Construction findet man den Schwerpunct also leicht auf folgende Weise: man verlängere die eine Grundlinie rechts um die Länge der zweiten, und diese links um die Länge der ersten, verbinde die Endpuncte der so verlängerten Linien durch eine Gerade, so schneidet diese die Gerade durch die Mittelpuncte der Grundlinien in dem Schwerpuncte des Trapezes.

Zu bemerken ist hierbei, daß das Verhältniß nicht von der Höhe des Trapezes abhangt, sondern nur von dem Verhältnisse der Grundlinien, so daß jenes Verhältniß für alle möglichen Trapeze mit proportionalen Grundlinien dasselbe bleibt.

Sind die Basen gleich, so ist $x = y$, wie gehörig, weil dann das Trapez ein Parallelogramm wird, und weil in diesem der Schwerpunct von beiden Grundlinien gleichweit absteht.

Ist eine der Grundlinien b Null, so ist $y = 2x$. Das Trapez wird dann ein Dreieck, dessen Basis B, und in welchem der Schwerpunct zweimal weiter von der Basis als vom Scheitelpuncte entfernt ist.

§. 156.

Aufgabe III. Man soll den Schwerpunct der Solidität eines beliebigen Polyeders, und im Allgemeinen eines Systems von beliebig im Raume liegenden Polyedern finden.

Da sich jedes Polyeder in dreiseitige Pyramiden zerlegen läßt, so wollen wir zuerst zeigen, wie man den Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide bestimme. Nimmt man darauf die Schwerpuncte aller der Pyramiden zusammen, in die das System zerfällt ist: so hat man wieder nur den Schwerpunct eines Systems von Puncten zu suchen, die ihrem Gewichte nach durch die respectiven Pyramiden, deren Schwerpuncte sie sind, dargestellt werden, und das Problem löst sich dann auf die Weise, wie vorhin gelehrt ist.

Vom Schwerpuncte der Pyramide.

§. 157.

Es sei **ABCD** (Fig. 40) eine beliebige dreiseitige Pyramyde. Betrachtet man sie als aus einer unendlichen Menge von Parallelstreifen zu der Basis **BCD** bestehend und zieht dann aus der Ecke nach einem beliebigen Puncte der Grundfläche eine gerade Linie, so schneidet diese die Streifen und die Basis selbst in ähnlich liegenden Puncten. Geht daher diese Gerade durch den Schwerpunct **I** der Grundfläche, so geht sie auch durch alle Schwerpuncte der Parallelstreifen. Der Schwerpunct des Systems von Parallelstreifen, und mithin auch der Schwerpunct der Pyramide, muß daher in der Geraden **AI** liegen.

Aus denselben Gründen muß auch der Schwerpunct der Pyramide in der Geraden **CH** liegen, welche aus der Ecke **C** nach dem Schwerpuncte **H** der gegenüberstehenden Seitenfläche gezogen ist. Er wird also im Schnittpuncte **G** der beiden geraden Linien liegen.

Auf diese Weise müssen sich also die beiden Geraden **AI** und **CH** nothwendig schneiden, und man kann dieses ohne Einmischung des Schwerpunctes auf folgende Art beweisen. Zieht man **CI**, so schneidet diese die Seite **BD** in ihrem Mittelpuncte **E**, weil **I** der Schwerpunct des Dreiecks **BCD** ist. Aus demselben Grunde muß auch **AH** die Seite **BD** in **E** halbiren; die beiden Geraden **AI** und **CH** liegen also in derselben Ebene, in der Ebene des Dreiecks AEC, und schneiden sich demnach nothwendig.

Bedenkt man nun, daß EI = $\frac{1}{3}$EC, und EH = $\frac{1}{3}$EA (§. 152), so ist eine Gerade IH zwischen I und H der Kante AC parallel und gleich $\frac{1}{3}$AC. Ist aber IH = $\frac{1}{3}$AC so ist auch wegen Ähnlichkeit der Dreiecke IGH und AGC die Seite IG gleich dem dritten Theile ihrer homologen Seite GA; d. h. IG ist = $\frac{1}{4}$IA, und AG = $\frac{3}{4}$IA.

Der Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide liegt also in der geraden Linie, die aus einer der Ecken nach dem Schwerpuncte der gegenüberstehenden Basis gezogen ist, und zwar $\frac{1}{4}$ der Länge dieser Linie von der Basis und $\frac{3}{4}$ derselben von dem Scheitelpuncte der Ecke entfernt.

§. 158.

Bemerkung. Dieser Satz läßt sich ganz auf ähnliche Weise zeigen, wie vorhin für das Dreieck geschehen ist.

Zu dem Zwecke betrachten wir jedoch zuvor das dreiseitige Prisma ABCabc (Fig. 41). Durch den Mittelpunct E der Seite AB seiner Basis ABC ziehe man zwei Ebenen EFf und EDd respective parallel zu den Seitenflächen BCcb und ACca, und zerlege so das Prisma in zwei andere Prismen und ein Parallelepipedum.

Ist nun a die Solidität von einem der beiden gleichen Prismen, so ist 4a die Solidität des gegebenen Prisma, und 2a die Solidität des Parallelepipedums.

Nennt man x den Abstand des Schwerpunctes des großen Prisma von der Seitenfläche BAab, so ist 4ax sein Moment in Bezug auf diese Ebene. Es sei auf gleiche Weise für die beiden kleinen Prismen x′ der Abstand ihrer Schwerpuncte von derselben Ebene (welcher Abstand für beide derselbe sein muß), so ist 2ax′ die Summe ihrer Momente.

Ist endlich h die Höhe der Kante Cc über der Parallelebene $BAab$, so ist das Moment des Parallelepipedums $2a\frac{h}{2}$ oder ah. Man hat also $4ax = ah + 2ax'$, woraus folgt $x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2}$. Verfährt man nun Schritt vor Schritt wie im (§. 153), so findet man gleichfalls $x = \frac{h}{3}$.

Der Schwerpunct eines dreiseitigen Prisma liegt also in Bezug auf jede Seitenfläche in dem dritten Theile der Höhe der zu dieser Seitenfläche parallelen Kante. Daraus folgt denn sofort, daß er in der Geraden Gg liegt, welche die Schwerpuncte der beiden Grundflächen mit einander verbindet. Ferner liegt er im Mittelpuncte dieser Geraden; denn theilt man das Prisma durch Parallelebenen zur Grundfläche in eine beliebige Anzahl gleicher Prismen, so wird der Schwerpunct O ihres Systems um so näher an dem Mittelpuncte I von Gg liegen, je näher in jedem partiellen Prisma der Schwerpunct an den Mittelpunct der mit der Geraden Gg in diesem Prisma correspondirenden geraden Linie fällt. So gering aber auch die Länge eines Prisma sein mag, so muß doch sein Schwerpunct immer im Innern des Prisma selbst liegen. Da man nun die Länge des Prisma kleiner annehmen kann als jede gegebene Größe, so wird auch die Entfernung der Puncte O und I kleiner sein als jede beliebige Größe, also O mit I zusammenfallen.

§. 159.

Wir kehren nun zu der dreiseitigen Pyramide $ABCD$ (Fig. 42) zurück.

Man lege durch den Mittelpunct L von AC eine Schnittfläche LMK parallel zur Grundfläche BCD, und eine Schnittfläche LEF parallel zur Seitenfläche ABD. Man ziehe

KH parallel zu LE und verbinde E und H durch die Gerade EH.

Dadurch ist die Pyramide in zwei gleiche Prismen, eins mit der Basis EDH, und das andere mit der Basis LEF, und in zwei dreiseitige Pyramiden ALMK und LCEF zerlegt, die einander gleich und der gegebenen Pyramide ähnlich sind.

Wir setzen nun das Moment der Totalpyramide in Bezug auf die Grundfläche BCD der Summe der Momente der zwei Prismen und der zwei Partialpyramiden in Bezug auf dieselbe Ebene gleich.

Ist a die Solidität von einer der Partialpyramiden, so ist 8 a die Solidität der großen Pyramide, und nennt man nun x die Entfernung ihres Schwerpunctes von der Basis, so ist 8 ax ihr Moment.

Ist h die Höhe der ganzen Pyramide, so hat das Prisma mit der Basis EDH seinen Schwerpunct in der Höhe $\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2}$ über der Basis, und da seine Solidität 3 a ist, so wird sein Moment $3a\frac{h}{4}$. Das zweite Prisma mit der Basis LEF hat seinen Schwerpunct in der Höhe $\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2}$ über der Basis BCD (§. 157); seine Solidität ist 3 a, also sein Moment $3a\frac{h}{6}$.

Ist endlich x' die Höhe des Schwerpunctes der Pyramide LCEF über der Basis BCD, so ist die Höhe des Schwerpunctes der Pyramide ALMK offenbar $x' + \frac{h}{2}$; die Summe der Momente dieser beiden Pyramiden wird also $ax' + a(x' + \frac{h}{2}) = \frac{ah}{2} + 2ax'$. Man hat also nun

$$8\,ax = \frac{3\,ah}{4} + \frac{3\,ah}{6} + \frac{ah}{2} + 2\,ax';$$

und reducirt man und dividirt dann durch $8a$, so ist

$$x = \frac{7}{32}h + \frac{x'}{4}.$$

Nimmt man nun an, daß ähnliche Pyramiden ihre Schwerpuncte in ähnlich liegenden Puncten haben: so wird, weil die Dimensionen der Pyramide **LCEF** zweimal kleiner sind als die der Pyramide **ABCD**,

$$x' = \frac{x}{2},$$

und substituirt man diesen Werth in die vorige Gleichung, so ist

$$x = \frac{1}{4}h.$$

Daraus erhellt, daß in jeder dreiseitigen Pyramide der Schwerpunct über jeder Seitenfläche $\frac{1}{4}$ der Höhe der gegenüberstehenden Ecke über dieser Seitenfläche liegt; woraus denn leicht folgt, daß er in dem oben bestimmten Puncte liegen muß.

Man kann jedoch diese letztere Folgerung auch wieder ohne irgend eine Voraussetzung beweisen. Denn denkt man sich in der kleinen Pyramide LCEF dieselbe Construction wie in der großen Pyramide ABCD ausgeführt, und ist x'' die mit x' analoge Entfernung, so wird, weil die Höhe der neuen Pyramide die Hälfte von der Höhe h der alten Pyramide beträgt,

$$x' = \frac{7}{32}\cdot\frac{h}{2} + \frac{x''}{4};$$

wiederholt man dieselbe Construction, so findet man eben so

$$x'' = \frac{7}{32}\cdot\frac{h}{2^2} + \frac{x'''}{4},$$

$$x''' = \frac{7}{32}\cdot\frac{h}{2^3} + \frac{x^{\text{IV}}}{4} \text{ u. s. w.}$$

wo x''', x^{IV} ...... die allmäligen Abstände der Schwerpuncte der Pyramiden von der Grundfläche sind. Diese Abstände werden aber immer kleiner, und endlich kleiner als jede gegebene Größe, weil sie immer kleiner sind als die Höhen der Pyramiden, wozu sie gehören. Substituirt man also in die erste Gleichung für x', x'', x''', x^{IV} ..... die Werthe, so ist

$$x = \frac{7}{32} h \left(1 + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2^2 4^2} + \frac{1}{2^3 4^3} + \ldots\right)$$

woraus unser Satz folgt

$$x = \frac{1}{4} h.$$

Bemerkung. Denkt man sich in den vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide vier gleiche Massen angebracht, so fällt der Schwerpunct dieser vier Körper mit dem Schwerpuncte der Pyramide zusammen.

Denn um den Schwerpunct der vier Körper zu finden, hat man zuerst den von dreien unter ihnen zu nehmen, welcher in den Schwerpunct der Seitenfläche fällt, in deren Winkelspitzen die drei Körper liegen (§. 154); verbindet man darauf den Schwerpunct des vierten Körpers mit diesem Puncte, so muß man die Verbindungslinie von der Seitenfläche aus im umgekehrten Verhältnisse von 3 zu 1 theilen; dadurch gelangt man denn aber zugleich in den Schwerpunct der Pyramide.

Hieraus folgt: der Abstand des Schwerpunctes einer dreiseitigen Pyramide von einer beliebigen Ebene im Raume ist gleich dem mittlern Abstande ihrer vier Ecken von dieser Ebene.

Dieselbe Eigenschaft hat auch das dreiseitige Prisma.

§. 160.

Allgemeine Bemerkung. Um den Schwerpunct eines Polyeders zu bestimmen, braucht man es nicht im=

mer nothwendig in dreiseitige Pyramiden zu zerfällen, sondern gelangt dazu oft auf einfacherem Wege.

So z. B. ist der Schwerpunct eines beliebigen Prisma mit parallelen Grundflächen der Schwerpunct einer in gleichen Entfernungen von beiden Grundflächen gezogenen parallelen Schnittfläche, oder der Mittelpunct der die beiden Schwerpuncte der Grundflächen verbindenden geraden Linie.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich so leicht direct führen, oder aus dem, was wir über das dreiseitige Prisma gesagt haben, ableiten, daß wir uns dabei nicht aufhalten.

§. 161.

Betrachtet man einen beliebigen Cylinder mit parallelen Grundflächen als ein Prisma, dessen Grundfläche ein Polygon von unendlich vielen Seiten ist, so hat man den Satz: der Schwerpunct des Cylinders ist der Mittelpunct der die Schwerpuncte der beiden Grundflächen verbindenden geraden Linie.

§. 162.

Aus dem Obigen ist klar, daß der Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide in den Schwerpunct der Schnittfläche fällt, die parallel zur Basis in $\frac{1}{4}$ der Höhe des Scheitelpunctes von der Grundfläche gezogen ist.

Dieser Satz läßt sich auch auf eine beliebige Pyramide ausdehnen. Denn theilt man die Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke und legt dann durch diese Diagonalen und den Scheitelpunct der Pyramide Ebenen, so zerfällt die gegebene Pyramide in eben so viele dreiseitige Pyramiden als die Grundfläche in Dreiecke. Alle diese Pyramiden haben dieselbe Höhe mit der gegebenen Pyramide; ihre Soliditäten sind also der Grundfläche oder auch beliebigen, in gleicher Höhe gezogenen parallelen Schnittflächen proportional. Legt man folglich durch alle Pyramiden eine Ebene parallel zur Grundfläche in $\frac{1}{4}$ der Höhe des gemeinschaftlichen Scheitelpunctes von der Grundfläche, so fallen ihre Schwerpuncte mit den Schwerpuncten der correspondirenden dreieckigen Schnittflächen zusammen, und weil nun ihre Soliditäten (oder ihre Gewichte) diesen Schnittflächen proportional sind, so ist auch der Schwerpunct des Systems von Pyramiden der Schwerpunct aller Dreiecke oder des aus diesen hervorgehenden Polygons.

Zieht man aber eine gerade Linie vom Scheitelpuncte durch den Schwerpunct des Polygons, so geht diese durch den Schwerpunct der Grundfläche und wird von der Ebene des Polygons so getheilt, daß 3 Theile nach dem Scheitelpuncte und 1 Theil nach der Grundfläche zu fallen.

Der Schwerpunct einer Pyramide mit beliebiger Grundfläche liegt also in der aus dem Scheitelpuncte nach dem Schwerpuncte der Grundfläche gezogenen geraden Linie, und zwar $\frac{1}{4}$ der Länge dieser Geraden von der Grundfläche und $\frac{3}{4}$ derselben von dem Scheitelpuncte ab.

§. 163.

Betrachtet man den Kegel als eine Pyramide, deren Basis ein Polygon von unendlich vielen Seiten ist, so hat man den Satz: der Schwerpunct eines Kegels mit beliebiger Grundfläche liegt in der Geraden, welche seinen Scheitelpunct mit dem Schwerpuncte der Grundfläche verbindet, $\frac{1}{4}$ der Länge dieser Geraden von der Grundfläche und $\frac{3}{4}$ derselben von dem Scheitelpuncte ab.

§. 164.

Schwerpunct der abgekürzten Pyramide.

Es ist klar, daß der Schwerpunct der abgekürzten Pyramide in der Verbindungslinie zwischen den Schwerpuncten ihrer beiden Grundflächen liegt. Denn denkt man sich die

Pyramide ergänzt, so ist die abgeschnittene Pyramide der ganzen Pyramide ähnlich; die Gerade von dem Scheitel der ganzen Pyramide nach dem Schwerpuncte der einen Grundfläche der abgekürzten Pyramide geht also auch durch den Schwerpunct der andern Grundfläche, mithin durch die Schwerpuncte beider Pyramiden, und also auch durch den Schwerpunct der abgekürzten Pyramide, die gleich der Differenz jener beiden ist. Man braucht also nur noch den Abstand des Schwerpunctes von einer der Grundflächen, oder, wenn man will, das Verhältniß beider Abstände zu bestimmen.

Es seien x die Entfernung des Schwerpunctes von der untern Grundfläche, H und h die Höhen der beiden ähnlichen Pyramiden. Ist H^3 das Volumen oder Gewicht der ganzen Pyramide, so ist h^3 das Gewicht der kleinen, und $H^3 - h^3$ das der abgekürzten; die drei Momente dieser Gewichte in Bezug auf die untere Basis werden also $H^3 . \frac{H}{4}$, $H^3 (\frac{h}{4} + H - h)$ und $(H^3 - h^3)x$. Setzt man das erste der Summe der beiden andern gleich, so hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$4(H^3 - h^3)x = H^4 - 4h^3H + 3h^4.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Entfernung y des Schwerpunctes von der obern Grundfläche

$$4(H^3 - h^3)y = h^4 - 4H^3h + 3H^4.$$

Vergleicht man beide Gleichungen und läßt die gemeinschaftlichen Factoren weg, so erhält man

$$x : y = H^2 + 2Hh + 3h^2 : h^2 + 2hH + 3H^2.$$

In ähnlichen Pyramiden verhalten sich die Quadrate der Höhen wie die Grundflächen der Pyramiden; sind diese also B und b, so kann man für H^2, B, für h^2, b und für Hh, $\sqrt{(Bb)}$ setzen; man hat dann

$$x : y = B + 2\sqrt{(Bb)} + 3b : b + 2\sqrt{(Bb)} + 3B.$$

§. 165.

Daraus also hat man den Satz: der Schwerpunct einer abgekürzten Pyramide (oder auch eines abgekürzten Kegels) liegt in der Geraden durch die Schwerpuncte ihrer beiden Grundflächen, und schneidet diese Gerade in zwei Stücke, die sich verhalten wie die erste Basis + der doppelten geometrischen Proportionale aus beiden Basen + der dreifachen zweiten Basis, zu der zweiten Basis + der doppelten Proportionale + der dreifachen ersten Basis.

Übrigens ist klar, daß man hier die Grundflächen nicht selbst zu messen braucht (denn das möchte weitläufig und im Falle einer krummen Grundlinie selbst schwierig sein), sondern daß man nur drei ihnen proportionale Größen zu nehmen, also in den beiden ähnlichen Grundflächen des gegebenen Truncus nur zwei homologe Seiten A und a, ihre Quadrate A^2 und a^2, und das Rectangel Aa zu bestimmen hat.

In der obigen Proportion hangt das Verhältniß von x zu y nicht von der Höhe des Truncus, sondern nur vom Verhältnisse der Grundflächen ab; es bleibt also für alle möglichen abgekürzten Pyramiden und Kegel mit proportionalen Grundflächen dasselbe.

Sind die beiden Grundflächen gleich, so ist $x = y$, und man hat dann ein Prisma oder einen Cylinder, dessen Schwerpunct gleichweit von den beiden Grundflächen absteht.

Ist eine der Grundflächen b Null, so hat man $3x = y$ als Abstand des Schwerpunctes von der Grundfläche B; der Truncus wird dann eine abgekürzte Pyramide oder ein abgekürzter Kegel, worin der Schwerpunct dreimal weiter von der Grundfläche als von dem Scheitelpuncte absteht.

Wir könnten noch mehre Beispiele anführen; allein das Gesagte reicht zu unserm Zwecke hin. Wir schließen deshalb dieses Capitel mit einigen bemerkenswerthen Eigenschaften der Schwerpuncte.

Allgemeine Eigenschaften der Schwerpuncte.

§. 166.

I. Sind mehre beliebig im Raume gerichtete Kräfte P, Q, R, S..... (Fig. 43) im Gleichgewichte um denselben Punct A, so müssen bekanntlich diese Kräfte in Bezug auf irgend eine durch diesen Punct gehende Axe AX gleichfalls im Gleichgewichte sein.

Werden also die Kräfte durch Theile AP, AQ, AR, AS...... ihrer Directionen dargestellt, so muß die Summe ihrer Projectionen Ap, Aq, Ar, As..... auf die Axe AX Null sein, wobei man die auf die eine Seite von A fallenden Projectionen als positiv, und die auf die andere Seite fallenden als negativ betrachtet. Zieht man nun durch den Punct A eine Ebene MN senkrecht auf AX, so geben die Projectionen Ap, Aq, Ar, As...... die Abstände der Endpuncte der Kräfte von der Ebene AN an. Weil also ihre Summe Null sein muß, so ist auch die mittlere Entfernung dieser Puncte von der Ebene MN Null.

Sind daher beliebig viele Kräfte um einen Punct im Gleichgewichte, so ist dieser der Schwerpunct der gleich gewichtigen Körper oder Massen, die an den Endpuncten der die Kräfte ihrer Intensität und Richtung nach repräsentirenden geraden Linien angebracht sind.

Und umgekehrt, betrachtet man ein beliebiges System gleicher Massen, und zieht von ihren verschiedenen Schwerpuncten nach dem Schwerpuncte des Systems gerade Linien, so sind die der Größe und Richtung nach durch die Geraden dargestellten Kräfte im Gleichgewichte, weil die mittlere Entfernung der Kräfte von einer beliebigen, durch den Schwerpunct gehenden Ebene und folglich auch die Summe der

Kräfte, nach einer beliebigen, durch den Schwerpunct gehenden Axe genommen, Null ist.

Hieraus folgt, daß, wenn drei Kräfte an einem Puncte im Gleichgewichte sind, dieser Punct der Schwerpunct des von den drei Geraden gebildeten Dreiecks ist, welche die Endpuncte der die Kräfte der Größe und Richtung nach repräsentirenden Geraden mit einander verbinden, weil der Schwerpunct des Dreiecks mit dem Schwerpuncte dreier Körper zusammenfällt, deren Schwerpuncte in den drei Winkelspitzen des Dreiecks liegen.

Eben so folgt daraus, daß, wenn vier Kräfte um einen Punct im Gleichgewichte sind, dieser Punct der Schwerpunct einer von den sechs Geraden gebildeten dreiseitigen Pyramide ist, welche die Endpuncte der die Kräfte der Größe und Richtung nach repräsentirenden vier Geraden verbinden.

Umgekehrt sind drei Kräfte im Gleichgewichte, welche durch die Abstände der Winkelspitzen eines beliebigen Dreiecks von dem Schwerpuncte des Dreiecks repräsentirt werden; und eben so vier Kräfte im Gleichgewichte, welche durch die Abstände der vier Ecken einer beliebigen dreiseitigen Pyramide von dem Schwerpuncte der Pyramide dargestellt werden.

Folgendes ist jedoch eine mehr allgemeine Folgerung. Nimmt man an, alle die gleichen Molecule eines Körpers von beliebiger Figur würden gegen einen und denselben Punct durch Kräfte hingetrieben, welche ihren Entfernungen von diesem Puncte proportional sind, und ist dann Gleichgewicht unter ihnen: so ist jener Punct der Schwerpunct des Körpers.

Und umgekehrt: ist der Punct, gegen welchen hin die Molecule von Kräften getrieben werden, die ihren Abständen von diesem Puncte proportional sind, der Schwerpunct des Körpers: so sind die Kräfte im Gleichgewichte, und die Attractionen können durchaus keine Bewegung erzeugen.

Dieses ist der Fall mit unserer Erde, wenn sie als eine gleichförmige Kugel betrachtet wird; denn wird nach dem Newton'schen Gesetze ein außerhalb der Erde liegende Molecul im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates seiner Entfernung vom Mittelpuncte angezogen, so wird im Innern derselben jedes Molecul nur im Verhältnisse der einfachen Entfernung angezogen. Alle die aus der Schwerkraft entspringenden Kräfte halten sich also um den Mittelpunct der Erde das Gleichgewicht.

Übrigens stellen wir diesen Folgesatz nur als das mathematische Resultat einer einfachen Hypothese, und nicht als einen Beweis des Gleichgewichts des Erdkörpers zufolge der verschiedenen Gewichte aller seiner Theile auf; offenbar findet dies Gleichgewicht in der Natur aus einem viel allgemeinern Grunde Statt, der weder von dem Verhältnisse, noch der Richtung der Gravitationskräfte abhangt. Denn rührt das Gewicht jedes Moleculs der Erde aus der Attraction der andern Molecule auf dasselbe her, so ist, weil die Wirkung zwischen zwei gleichen Theilen dieselbe ist und von einem auf den andern ausgeübt wird, das Gewicht jedes Moleculs die Resultante von unzählig vielen Kräften, deren jede eine gleiche und entgegengesetzte in dem Systeme findet; und folglich müssen alle diese Resultanten oder alle Gewichte im Gleichgewichte sein, wie auch die Form und Zusammenstellung unserer Erdkugel und selbst das Attractionsgesetz unter den Theilen der Materie beschaffen sein mag.

II. Es sei $M+1$ die Anzahl der um den Punct A im Gleichgewichte befindlichen Kräfte, und betrachten wir immer $M+1$ gleiche, an den Endpuncten der die Kräfte repräsentirenden Geraden angebrachte Körper oder massive Puncte.

Da der Punct A der Schwerpunct aller Körper ist, so ist klar, daß, wenn die Gerade PA von einem dieser Körper nach dem Puncte A um den Mten Theil AG ihrer Länge verlängert wird, der Punct G .er Schwerpunct der übrigen M Körper sein wird. Da aber alle Kräfte P, Q, R, S..... im Gleichgewichte sind, so ist eine von ihnen P der Resultante der M übrigen Q, R, S.... gleich und entgegengesetzt. Man hat also folgende Lehrsätze:

1) Die Resultante von M durch eben so viele von demselben Puncte A ausgehende Geraden repräsentirten Kräften geht durch den Schwerpunct G der M gleichen Körper, die man sich auf den Endpuncten dieser Geraden angebracht denkt, und die Größe der Resultante wird durch die Mfache Entfernung AG des Angriffspunctes der Kräfte von dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte dargestellt.

Ziehen sich also die gleichen Molecule eines Körpers oder Systems von beliebiger Figur im Verhältnisse ihrer gegenseitigen Entfernungen an, so strebt jedes Molecul des Körpers gegen den Schwerpunct im Verhältnisse seines Abstandes von demselben; denn stellt man die Attractionskräfte durch die Entfernungen dar, welche die M gleichen Puncte des Systems trennen, so erhält man für jeden eine Totalattraction gleich seiner (M—1)fachen Entfernung vom Schwerpuncte der M—1 übrigen Puncte, oder, was dasselbe ist, gleich seiner Mfachen Entfernung vom Schwerpuncte aller M Puncte des ganzen Systems.

Auch ist klar, daß bei diesem Attractionsgesetze Körper von beliebiger Figur genau so auf einander wirken, als wären ihre Massen bloße Puncte und so zu sagen in ihren eigenen Schwerpuncten concentrirt; was nach Newton's Gesetze nur für gleichförmig dichte Kugeln, oder für Körper, aus Kugelschichten bestehend, gilt, deren jede gleichförmig dicht ist.

2) Hat man M gleiche, beliebig zusammengestellte Körper, so findet man ihren Schwerpunct G, wenn man von ihnen eben so viele gerade

Linien nach einem beliebigen Raumpuncte A zieht, diese ganz wie Kräfte zusammensetzt und von A aus den Mten Theil der resultirenden Geraden abschneidet.

Nimmt man an, der Punct A verändere seine Lage im Raume, so werden die von diesem Puncte ausgehenden, die Kräfte repräsentirenden Geraden ihre Größe und Richtung ändern, die Resultanten der verschiedenen Gruppen der in demselben Puncte zusammenlaufenden Kräfte gehen jedoch immer durch denselben Punct G; und dasselbe wird Statt finden, wenn der Punct A fest ist, die Lage des Systems aber auf irgend eine Art verändert wird.

Der Punct G, der bei gewichtigen Körpern der Mittelpunct der gleichen und parallelen Gravitationskräfte ist, wird also auch der Mittelpunct der Kräfte sein, welche in einem beliebigen Raumpuncte zusammenlaufen und den Entfernungen der Molecule von diesem Puncte proportional sind.

Ist also der Schwerpunct eines Körpers fest, so werden die solchen zusammenlaufenden Kräften unterworfenen Körper in allen beliebigen Lagen um den festen Punct im Gleichgewichte sein. Die Molecule streben nun, wie oben bei der als eine gleichförmig dichte Kugel angenommenen Erde, gegen den Mittelpunct im Verhältnisse der einfachen Entfernungen; ist also ein Körper im Innern dieser Kugel um seinen Schwerpunct im Gleichgewichte, so bleibt er in allen Lagen um diesen Punct im Gleichgewichte. Nicht so verhält sich die Sache außerhalb der Kugel, wo die Attraction sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält; ist der Körper z. B. ein gerader Cylinder, der vom Mittelpuncte seiner Axe getragen wird, so kann er nur dann im Gleichgewichte sein, wenn diese Axe horizontal oder vertical ist.

Da in der Natur die Gravitationskräfte weder genau parallel sind, noch genau zusammenlaufen, noch genau das genannte Verhältniß haben, so hat man strenge genommen in einem gewichtigen Körper keinen Schwerpunct, d. h. einen einzigen Punct, um welchen in allen Lagen des Körpers die Gravitationskräfte im Gleichgewichte sind. Bei den wenig ausgedehnten Körpern indeß, welche wir auf der Erde betrachten, hat der genannte Punct diese Eigenschaft ziemlich genau und ohne merklichen Irrthum.

III. Was wir so eben von mehren gleichen massiven Puncten und von Kräften, die durch ihre Abstände von demselben Raumpunete dargestellt werden, gesagt haben, läßt sich auch ganz natürlich auf ein System von ungleichen Körpern oder Puncten anwenden, deren Massen m, m', m''.... sind; denn man braucht nur jeden der Körper, m z. B., als eine Gruppe von m gleichen Puncten zu betrachten, und für die auf diesen Körper wirkende Kraft $m$mal die Entfernung seines Schwerpunctes von dem betrachteten Puncte zu nehmen.

Sind also r, r', r'' die Abstände der Schwerpuncte dieser Körper m, m', m''.... von dem gemeinschaftlichen Raumpuncte A, und setzt man $m+m'+m''+\ldots\ldots = M$, so wird der Schwerpunct aller dieser Körper in der Richtung der Resultante der Kräfte mr, $m'r'$, $m''r''$......, und zwar um den Mten Theil der sie repräsentirenden Geraden, von A ab liegen.

Es seien R diese Entfernung des Punctes G von A; X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten desselben auf A als Anfangspunct bezogen; desgleichen seien x, y, z; x', y', z'..... die Coordinaten von m, m'....... Dann werden mx, my, mz; $m'x'$, $m'y'$, $m'z'$..... die Seitenkräfte von mr, $m'r'$....., und MX, MY, MZ die Seitenkräfte der Resultante MR sein. Man erhält also

$$MX = mx + m'x' + m''x'' + \ldots,$$
$$Y = my + m'y' + m''y'' + \ldots,$$
$$MZ = mz + m'z' + m''z'' + \ldots.$$

Quadrirt man diese Gleichungen, addirt sie und bemerkt, daß

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$
u. s. w.

so findet man $M^2 R^3 = m^2 r^2 + m'^2 r'^2 + m''^2 r'' + \ldots\ldots + 2mm'(xx' + yy' + zz') + \ldots. + 2mm''(xx'' + yy'' + zz'') + \ldots\ldots +$ u. s. w.

Statt des Gliedes $2mm'(xx' + yy' + zz')$ kann man nach (§. 113) setzen $2mr . m'r' . \cos\varphi$, wo φ den Neigungswinkel der Geraden r und r' bezeichnet; desgleichen für die übrigen doppelten Producte; man erhält also den bekannten Satz:

Das Quadrat der Resultante von beliebig vielen auf einen Punct wirkenden Kräften ist gleich der Summe der Quadrate dieser Kräfte + den doppelten Producten aus je zweien von ihnen und dem jedesmaligen Neigungswinkel dieser beiden Kräfte.

Man kann auch die Glieder $2mm'(xx' + yy' + zz')$ noch auf eine andere Weise umformen; denn bezeichnet α den Abstand von m und m', so ist $\alpha^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, und folglich $2(xx' + yy' + zz') = r^2 + r'^2 - \alpha^2$. Ist eben so β der Abstand von m und m'', so hat man $2(xx'' + yy'' + zz'') = r^2 + r''^2 - \beta^2$ u. s. w. Man erhält also nun für die Resultante MR den Ausdruck

$$MR = m^2 r^2 + m'^2 r'^2 + m''^2 r''^2 + \ldots. + mm'(r^2 + r'^2 - \alpha^2) + \ldots. + mm''(r^2 + r''^2 - \beta^2) + \ldots. + \text{u. s. w.}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist r^2 multiplicirt mit $m^2 + mm' + mm'' + \ldots = m(m + m' + m'' + \ldots)$

$= mM$; eben so r^2 mit $m'M$ u. s. w. Man erhält also endlich die merkwürdige Gleichung

$$M^2 R^2 = M\Sigma(mr^2) - \Sigma(mm'\alpha^2),$$

wo $\Sigma(mr^2)$ die Summe der Producte der Massen in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte vom Puncte A, und $\Sigma(mm'\alpha^2)$ die Summe der Producte aus je zweien von ihnen in die Quadrate der gegenseitigen Entfernungen von diesen Schwerpuncten bezeichnet.

Aus dieser Formel, in welcher nur die gegenseitigen Abstände der Körper und ihre Abstände von einem beliebigen Puncte A im Raume enthalten sind, findet man die Entfernung R des Schwerpunctes G von dem Puncte A; sucht man ihn also in Bezug auf drei Puncte, so hat man seine Lage im Raume.

Ändert der Punct A seine Lage, so ändern sich R, r, r', r''.....; allein die gegenseitigen Abstände α, β, γ.... der verschiedenen Körper ändern sich der Annahme nach nicht, und das Glied $\Sigma(mm'\alpha^2)$ ist constant. Weil also $M\Sigma(mr^2) = \Sigma(mm'\alpha^2) + M^2R^2$, so folgt, daß der Punct A, für welchen $\Sigma(mr^2)$ den kleinsten Werth hat, der Punct ist, wo $R = 0$, und daß mithin dieser Punct der Schwerpunct G des ganzen Systems ist.

Der Schwerpunct eines Systems von Körpern hat also die Eigenschaft, daß die Summe der Producte der Massen in die Quadrate der Entfernungen ihrer respectiven Mittelpuncte von diesem Puncte ein Minimum, kleiner als für jeden andern Raumpunct ist.

Was den Werth des Minimums von $\Sigma(mr^2)$ betrifft, so erhellt aus der obigen Gleichung, worin $R = 0$ gesetzt wird, daß er gleich der Summe der Producte ist, welche man erhält, wenn man die Massen je zwei und zwei mit einander und mit dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernungen multiplicirt und das Resultat durch die Gesammtmasse des Systems dividirt; man erhält daraus ein zweites Theorem, das in vielen Fällen nützlich sein kann.

Bleibt der Punct **A** bei Veränderung seiner Lage immer auf einer um den Schwerpunct des Systems beschriebenen Kugel, so ist R constant, und $\Sigma(mr^2)$ kann sich nicht ändern, obgleich die einzelnen Entfernungen r, r', r''..... sich verändern. Dasselbe würde Statt finden, wenn der Punct **A** fest wäre, und das System sich auf irgend eine Weise um seinen Schwerpunct drehte.

Der Schwerpunct eines Systems hat also auch noch die Eigenschaft, daß, wenn es beliebig um ihn gedreht wird, die Summe der Producte der Massen in die Quadrate ihrer Abstände von einem festen Puncte immer dieselbe bleibt.

Nimmt man an, wie wir es oben gethan haben, daß die Massen m, m', m''..... unter sich und der Einheit gleich sind, so ist M ihre Anzahl, und die obige Gleichung erhält die einfache Form

$$M\Sigma(r^2) = \Sigma(\alpha^2) + M^2R^2.$$

Sie läßt sich auf jedes System anwenden, wenn man sich die verschiedenen Körper in lauter gleiche Theile getheilt denkt.

Ist $R = 0$, so hat man $M\Sigma(r^2) = \Sigma(\alpha^2)$, woraus das geometrische Theorem folgt: die Summe der Quadrate der gegenseitigen Abstände von M gleichen Puncten ist gleich der Mfachen Summe der Quadrate ihrer Abstände von dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte.

Hieraus erhellt, daß die Summe der Quadrate der sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide gleich ist der vierfachen Summe der Quadrate der Abstände ihrer Ecken vom Schwerpuncte der Pyramide, weil dieser Schwerpunct mit dem

Schwerpuncte von vier gleichen, in den Ecken der Pyramide angebrachten Körpern zusammenfällt u. s. w.

In dem Vorhergehenden haben wir nur ein System von unveränderlicher Form betrachtet, worin alle Puncte so mit einander verbunden sind, daß ihre gegenseitigen Abstände sich nicht ändern können. Aus dem eben Gesagten erhellt, daß, wenn die Figur des Systems veränderlich ist, jedoch so, daß die Summe der Quadrate der gegenseitigen Abstände der Körper dieselbe bleibt, auch die Summe der Quadrate ihrer Abstände vom Schwerpuncte dieselbe bleiben wird, und umgekehrt.

Wir gehen jedoch zu andern Eigenschaften der Schwerpuncte fort.

§. 167.

IV. Es sei **ABC** (Fig. 44) eine beliebige, um eine Axe in ihrer Ebene dergestalt rotirende krumme Linie, daß alle ihre Puncte immer in gleichen Entfernungen von der Axe bleiben: so erzeugt die Curve eine sogenannte Umwälzungsoberfläche.

Um ihre Fläche zu bestimmen, bemerke man, daß jedes Element **ds** der erzeugenden Curve die Oberfläche eines abgekürzten Kegels bildet, dessen Flächenraum gleich ist dem Producte der Seite **ds** in den Umfang des Kreises, welchen der Mittelpunct oder der Schwerpunct **i** dieser Seite um die Axe **PZ** beschreibt.

Nimmt man also alle Elemente gleich groß an, so ist die ganze Oberfläche gleich der Summe der Elemente, multiplicirt mit dem mittlern der von ihren Schwerpuncten beschriebenen Kreisumfängen.

Der Halbmesser dieses mittleren Kreisumfanges ist aber der mittlere Abstand aller Curvenpuncte von der Rotationsare, oder (§. 140) die Entfernung des Schwerpunctes von dieser Are. Man hat also den Satz:

Der Flächenraum einer Umwälzungsoberfläche ist gleich der Länge ihrer Generatrix, multiplicirt mit dem Umfange des von ihrem Schwerpuncte um die Rotationsare beschriebenen Kreises.

Rotiren auf gleiche Weise mehre in derselben Ebene liegende Curven um eine Are in dieser Ebene, so ist die Summe der erzeugten Oberflächen gleich dem Producte aus der Summe der Generatricen in den Umfang des vom Schwerpuncte ihres Systems beschriebenen Kreises.

Dabei ist jedoch zu bemerken, daß, wenn die Generatrix oder die Generatricen nicht ganz auf derselben Seite der Aren liegen, der vorhergehende Ausdruck nur die Summe der von den auf einer Seite der Are liegenden Theilen erzeugten Flächen, weniger der Summe der von den auf der andern Seite der Are liegenden Theilen erzeugten Flächen gibt.

Die Theorie der Schwerpuncte läßt sich auch auf die Cubatur der Umwälzungskörper anwenden, und man sieht ohne Schwierigkeit, daß das Volumen eines durch Umwälzung erzeugten Körpers gleich ist dem Flächeninhalte der erzeugenden Durchschnittsfläche, multiplicirt mit dem Umfange des von ihrem Schwerpuncte beschriebenen Kreises.

Denn rotirt das Rectangel **bcde** (Fig. 45) um die zu einer seiner Seiten **bc** parallele Are **PZ**, so ist der durch diese Umwälzung erzeugte Körper gleich der Differenz zweier Cylinder von gleicher Höhe, von denen der eine zum Halbmesser die Entfernung **ca** der Seite **cd** von der Are, und der andere zum Halbmesser die Entfernung **ba** der Seite **bc** von derselben Are hat. Nennt man also π das Verhält=

niß des Kreisumfanges zum Durchmesser, so ist die Solidität dieses Körpers $(\pi.ac^2 - \pi.ab^2)cd$. Substituirt man $ca - cb$ für ab, so wird dieser Ausdruck $\pi(2ac.bc - bc^2)cd$ oder $bc.cd \times 2\pi(ac - \frac{bc}{2})$. Der letzte Ausdruck ist aber das Product aus dem Rectangel bcde in den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser das Mittel aus den Halbmessern ca und ba, oder den Abstand des Schwerpunctes des Parallelogramms von der Umwälzungsaxe ist.

Denkt man sich also nun die erzeugende Fläche in unendlich viele solche kleine Rectangel eingetheilt, so ist der ganze Umwälzungskörper gleich der Summe aller dieser Rectangel oder gleich dem Inhalte der Fläche ZMN, multiplicirt mit dem Umfange des mittlern der von den Schwerpuncten um die Axe beschriebenen Kreise. Dieser mittlere Kreis hat aber zum Halbmesser die mittlere Entfernung aller Puncte von der Axe, oder die Entfernung des Schwerpunctes von der Axe, womit also unser Satz bewiesen ist.

Durch eine ähnliche Schlußfolge ließe sich auch darthun, daß, wenn irgend ein von einer Curve geschlossener Flächenraum sich im Raume dergestalt bewegt, daß seine Ebene immer (in demselben Puncte) senkrecht auf eine beliebige Curve doppelter Krümmung steht, die Solidität des erzeugten Körpers gleich ist dem Producte aus der erzeugenden Fläche in die Länge der Curve, welche ihr Schwerpunct beschreibt.

Wir verweilen jedoch nicht beim Beweise dieses Satzes, den man so gut wie die vorhergehenden aus den bekannten Formeln für die Schwerpuncte ableiten könnte. Eben so machen wir keine besondere Anwendung von dieser Theorie auf die Oberflächen und Körper, welche die Geometrie unmittelbar bestimmen kann. Es war nur unsere Absicht, den merkwürdigen Zusammenhang unter Betrachtungen zu zeigen, die auf den ersten Blick einander so fremd zu sein scheinen, die sich aber, wie alle der Mathematik unterworfenen Aufgaben, an einander schließen und sich gleichsam mit einander verschmelzen, wenn man auf einen Augenblick die Ideen und Namen vergessen will, woran der besondere Gegenstand jeder einzelnen Aufgabe erinnert.

Viertes Capitel.

Von den Maschinen.

§. 168.

Man definirt die Maschinen gewöhnlich dadurch, daß man sie Instrumente nennt, die zur Fortpflanzung der Wirkung einer Kraft bestimmt sind.

Aus diesem allgemeinen Gesichtspuncte betrachtet sind denn auch alle Körper in der Natur Maschinen, weil sie fähig sind, die Wirkung der auf sie wirkenden Kräfte fortzupflanzen. Wirken aber die Kräfte durch das Zwischenmittel eines vollkommen freien Körpers oder Systems eine auf die andere zurück, so können sie nicht im Gleichgewichte sein, wenn nicht die oben aufgestellten Bedingungen erfüllt sind; mittelst der eigentlichen Maschinen indessen kann man beliebige Kräfte ins Gleichgewicht bringen, die nicht jenen Bedingungen genügen. Dadurch also hat man ein charakteristisches Unterscheidungsmittel der Maschinen von den übrigen Körpern, und man könnte die Maschinen daher definiren, daß man sie Instrumente nennt, mittelst derer man Kräfte von beliebigen Größen und Richtungen ins Gleichgewicht bringen kann.

Lassen sich aber Kräfte, die an einem völlig freien Körper nicht im Gleichgewichte sein können, durch eine Maschine ins Gleichgewicht bringen, so folgt daraus, daß die Körper, welche die Maschinen bilden, nicht völlig frei, sondern durch Hindernisse beschränkt sind, welche sie abhalten, der Bewegung zu folgen, die die Kräfte ihnen mitzutheilen suchen und wirklich mittheilen würden, falls sie frei wären. Man gelangt so zu der Definition: **Maschinen sind im Allgemeinen solche Körper oder Systeme, die in ihren Bewegungen durch gewisse Hindernisse gehemmt sind.**

Wie nun Kräfte von beliebigen Größen an solchen Körpern im Gleichgewichte sein können, ist leicht einzusehen, denn es brauchen nur die Resultanten Null zu sein; dazu ist aber weiter nichts nöthig, als daß ihre Richtungen auf das Hinderniß zulaufen, welches sie dann durch seinen Widerstand vernichtet. So z. B. kann an einem Körper, der sich um einen festen Punct dreht, eine nicht so große Kraft einer andern sehr großen das Gleichgewicht halten, wenn sie gegen letztere nur so angebracht ist, daß die Resultante beider Kräfte durch den festen Punct geht. Daraus erhellt denn auch, daß eine geringe Kraft für sich einer größern nicht das Gleichgewicht halten kann, was in sich unmöglich ist, sondern daß sie gleichsam dazu dient, die Wirkung der größern, mit ihrer eigenen verbunden, auf ein unüberwindliches Hinderniß abzuleiten.

Hält man irgend einer Kraft an einer Maschine das Gleichgewicht, so muß man im Grunde dazu mehr Kraft anwenden, als zur directen Vernichtung der gegebenen Kraft durch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft nöthig wäre, wenn man den Widerstand des Hindernisses als eine Kraft ansieht. Da jedoch diese Widerstände an und für sich keine Bewegung hervorzubringen im Stande sind, und nur zur Vernichtung fremder Bewegung dienen, so geschieht durch sie kein wirklicher Aufwand von Kraft; wir werden daher auch auf sie keine weitere Rücksicht nehmen. Übrigens lassen sich auch in der Theorie der Maschinen die Hindernisse als die Stellvertreter von Kräften betrachten, die den durch sie vernichteten Kräften gleich und entgegengesetzt sind; substituirt man also für sie die Kräfte, welche ihre wirklichen Resistenzen ausdrücken, so hat man nicht mehr bloß zwischen den ursprünglich angebrachten Kräften, sondern zwischen diesen und den Resistenzen Gleichgewicht, und auf diese Weise fallen denn die Gesetze für das Gleichgewicht der Maschinen mit denen für das Gleichgewicht völlig freier Körper zusammen.

In dieser Rücksicht haben wir am Ende des zweiten Capitels die Gesetze des Gleichgewichts für Körper aufgestellt, die verschiedenen einzelnen Bedingungen unterworfen sind. Wer das dort Gesagte sich eigen gemacht hat, der wird der Sache nach hier wenig Neues mehr finden; denn jener Artikel enthält die allgemeinste Theorie des Gleichgewichts der drei einfachen Maschinen, worauf sich alle andere leicht zurückführen lassen. Für diejenigen indeß, die eine Theorie der Maschinen auf eine mehr elementare Weise verlangen, geben wir die folgenden Details.

§. 169.

Die einfachen Maschinen lassen sich auf drei zurückführen, die man rücksichtlich der Beschaffenheit des Hindernisses, wodurch ihre Bewegung bedingt ist, in folgender Ordnung betrachten kann: der Hebel, das Rad und die geneigte Ebene.

In der ersten Maschine ist das Hinderniß ein fester Punct, um welchen sich der Körper nach allen Richtungen frei drehen kann.

In der zweiten ist das Hinderniß eine feste Axe, um welche alle Puncte des Körpers in Parallelebenen frei rotiren können.

In der dritten ist das Hinderniß eine starre Ebene, gegen welche sich der Körper lehnt, und auf der er frei heruntergleiten kann.

Da man diese letzte Maschine zuerst nur in Bezug auf schwere Körper betrachtet hat, die auf Ebenen im Gleichgewichte gehalten werden, welche gegen den Horizont geneigt sind: so hat man ihr den Namen **geneigte Ebene** — planum inclinatum — gegeben.

Wir wollen diese und einige andere sich auf sie beziehende, häufig in Anwendung gebrachte Maschinen der Reihe nach betrachten; dabei abstrahiren wir von den verschiedenen physischen Ursachen, welche auf das Gleichgewicht Einfluß haben können, wie z. B. von der Reibung der Körper gegen einander und der Steifigkeit der Seile, durch welche die Wirkung der Kräfte auf verschiedene Puncte der Maschinen fortgepflanzt wird. Wir nehmen an, die Wirkung der Kraft geschehe in der Axe des Seils, woran sie angebracht ist, so daß die Seile als vollkommen biegsame und undehnbare Fäden betrachtet werden; man wird dann leicht entscheiden können, wann und wie man die Dicke der Seile zu berücksichtigen habe. Übrigens werden wir weiter unten auf diese Art von Instrumenten, die man wohl zu den Maschinen rechnet und **Seilmaschinen** nennt, zurückkommen und so viel davon anführen, als zu unserm Zwecke nöthig ist.

Der Hebel.

§. 170.

Es seien an zwei Puncten A und B (Fig. 46) eines Hebels AFB von beliebiger Form zwei beliebige Kräfte P und Q entweder unmittelbar oder an Schnüren angebracht, F sei der feste Punct, um den sich der Hebel frei drehen kann, und den man gewöhnlich **Unterstützungspunct** nennt; man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts, wobei man vorläufig vom Gewichte des Hebels abstrahirt.

Man fälle vom Puncte F auf die Richtungen der Kräfte P und Q zwei Perpendikel FH und FI, welche die nöthigenfalls verlängerten Richtungen in den Puncten H und I schneiden; man betrachte diese Puncte als unveränderlich fest mit den Puncten A und B, und denke sich die Kräfte unmittelbar in ihnen angebracht.

Auf den Punct F bringe man zwei einander entgegengesetzte Kräfte P′ und — P an, die beide der Kraft P gleich und parallel sind; desgleichen zwei entgegengesetzte Kräfte Q′ und — Q, die beide der Q gleich und parallel sind. Der Zustand des Hebels wird dadurch nicht verändert. Statt der beiden anfänglichen Kräfte P und Q hat man nun 1) zwei Kräfte P′ und Q′, die den Kräften P und Q respective gleich und parallel sind und denselben Sinn haben, die jedoch im Puncte F angebracht sind; 2) zwei Paare (P, — P) und (Q, — Q) an den Hebelarmen FH und FI.

Die Resultante der beiden Kräfte P′ und Q′ wird nun von dem Widerstande des Unterstützungspunctes vernichtet, wenn der Hebel unveränderlich mit diesem Puncte verbunden ist, so daß er nur eine Rotationsbewegung um ihn vorzunehmen im Stande ist. Das aus den beiden Paaren (P, — P) und (Q, — Q) resultirende Paar kann nicht durch den festen Punct vernichtet werden (§. 76); damit also Gleichgewicht vorhanden sei, muß dieses resultirende Paar in sich Null, oder die zusammenzusetzenden Paare (P, — P) und (Q, — Q) müssen gleich stark und einander entgegengesetzt sein. Dazu ist einmal nöthig, daß die beiden Paare in Parallelebenen, hier also, weil die Ebenen sich im Puncte F schneiden, in derselben Ebene liegen; dann, daß ihre Momente P.FH und Q.FI gleich sind; und endlich, daß sie den Hebel nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Zum Gleichgewichte des Hebels reicht also hin und ist nöthig, 1) daß die beiden auf ihn wirkenden Kräfte P und Q in derselben Ebene mit dem Unterstützungspuncte liegen; 2) daß ihre Momente in Bezug auf diesen Punct gleich sind;

3) daß sie nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Für die Gleichheit der Momente $P.FH = Q.FI$ kann man auch die Proportion $P:Q = FI:FH$ nehmen, d. h. die Kräfte müssen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen vom Unterstützungspuncte stehen.

Vom Drucke auf den Unterstützungspunct.

§. 171.

Für den Fall des Gleichgewichts kann der Unterstützungspunct nur den Druck der beiden unmittelbar in ihm angebrachten Kräfte erleiden; denn die Paare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ sind für sich auch dann im Gleichgewichte, wenn der Hebel gar nicht unterstützt würde, aus ihnen kann also kein Druck auf den Unterstützungspunct hervorgehen.

Der Druck auf den Unterstützungspunct des Hebels ist also gleich dem Drucke, den die beiden Kräfte ausüben würden, wenn sie mit Beibehaltung ihrer Stärke und Richtung parallel zu sich selbst in den Unterstützungspunct transponirt würden.

§. 172.

Vollendet man aus den die Kräfte P' und Q' repräsentirenden Geraden FP' und FQ' das Parallelogramm $FQ'RP'$, so stellt die Diagonale FR den Druck R auf den Unterstützungspunct dar. Ist also der Widerstand dieses Punctes nicht unbegrenzt, so bestimmt man daraus, von welcher Größe er sein müsse, um die Wirkung der am Hebel angebrachten Kräfte P und Q aushalten zu können.

Da die Kräfte P' und Q' den Kräften P und Q respective gleich und parallel sind und denselben Sinn mit ihnen haben, so repräsentiren die drei Seiten und die drei Winkel des Dreiecks FRQ′ oder des Dreiecks FRP′ die sechs bei einem Hebel vorkommenden Größen, nämlich die beiden Kräfte P und Q, den Druck auf den Unterstützungspunct, und die gegenseitigen Neigungen der Richtungen dieser drei Kräfte.

Kennt man also drei dieser sechs Größen, worunter jedoch wenigstens eine der Kräfte P, Q, R sein muß: so findet man daraus die drei übrigen durch Auflösung des Dreiecks FRQ′.

§. 173.

Das Gesagte gilt für jede beliebige Figur des Hebels und jede beliebige Anordnung der Kräfte P und Q und des Unterstützungspunctes.

Sind die Kräfte P und Q (Fig. 47) parallel, so kann man durch den Unterstützungspunct ein gemeinschaftliches Perpendikel IH auf ihre Richtungen fällen, und die Kräfte müssen sich dann umgekehrt verhalten wie die zwischen ihren Richtungen und dem Unterstützungspuncte liegenden Theile FH und FI.

Der Druck auf den Unterstützungspunct ist dabei gleich der Summe der Kräfte P + Q oder gleich ihrer Differenz P — Q, je nachdem die Kräfte einerlei Sinn haben (Fig. 47) oder nicht (Fig. 48).

Ist der Hebel geradlinig, so sind die Stücke FH und FI den Stücken AF und BF proportional. Letztere sind die Entfernungen der Angriffspuncte der Kräfte von dem Unterstützungspuncte auf dem Hebel selbst genommen, oder die eigentlichen Hebelarme; man hat also den Satz: zum Gleichgewichte des geradlinigen Hebels müssen die Kräfte sich umgekehrt wie ihre Hebelarme verhalten.

§. 174.

Betrachtet man die eine der beiden am Hebel wirkenden Kräfte, z. B. P, als diejenige, die der Maschine Bewegung mittheilen will, und nennt sie vorzugsweise Kraft; die andere Q dagegen als die, welche überwunden werden soll, und nennt sie Last: so lassen sich in Bezug auf die Lage des Unterstützungspunctes gegen die Kräfte mehre Arten von Hebeln unterscheiden.

Fällt der Unterstützungspunct zwischen die Kraft und Last (Fig. 47), so hat man den Hebel erster Art, wo die Kraft um so mehr im Vortheile ist, oder um so kleiner zu sein braucht, je länger ihr Hebelarm AF ist.

Fällt die Last zwischen den Unterstützungspunct und die Kraft (Fig. 48), so hat man den Hebel zweiter Art, wo die Kraft immer im Vortheile gegen die Last ist.

Fällt endlich die Kraft zwischen den Unterstützungspunct und die Last (Fig. 49), so hat man den Hebel dritter Art, wo die Kraft immer im Nachtheile gegen die Last ist.

Diese verschiedenen Arten von Hebeln sind jedoch in Bezug auf das Gleichgewicht nicht verschieden. Mögen Kraft und Last gegen einander und gegen den Unterstützungspunct liegen, wie sie wollen: so müssen, wenn man sie beide parallel zu sich selbst in den Unterstützungspunct transponirt, die daraus entstehenden beiden Paare immer gleichen Werth und entgegengesetzten Sinn haben, so daß für die Theorie jene Unterschiede wegfallen und nur im Ausdrucke zur Abkürzung benutzt werden können.

§. 175.

Es sollen (Fig. 50) auf einen Hebel beliebig viele Kräfte P, Q, R..... wirken, die alle mit dem Unterstützungspuncte F in einer und derselben Ebene liegen. Zieht man aus F auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel FH, FI, FK....., und verwandelt man jede Kraft P in eine andere gleiche und parallele Kraft von demselben Sinne in F angebracht, und in ein Paar (P, —P), das zum Hebelarme die Entfernung FH dieser Kraft vom Unterstützungspuncte hat: so wird auch wieder die Resultante aller auf den Punct F transponirten Kräfte von der Resistenz dieses Punctes vernichtet; das resultirende Paar muß also in sich Null sein, eben so als wäre der Hebel völlig frei. Daraus folgt, daß die Summe der Momente $P.FH + Q.FI + R.FK + \ldots..$ Null sein müsse, wobei alle die Momente der Kräfte, welche den Hebel nach dem einen Sinne zu drehen streben, als positiv, und die, welche ihn nach dem entgegengesetzten Sinne zu drehen streben, als negativ betrachtet werden.

Eben so wird auch der Druck auf den Unterstützungspunct ganz derselbe sein, als wären alle Kräfte, mit Beibehaltung ihrer Größe und ihres Sinnes, parallel zu sich selbst in diesen Punct transponirt.

§. 176.

Liegen die Kräfte P, Q, R.... in verschiedenen Ebenen, und transponirt man sie alle in den festen Punct parallel zu sich selbst: so müssen gleichfalls alle dadurch entstehenden Paare im Gleichgewichte, oder das resultirende Paar muß in sich Null sein.

Um jedoch diese Bedingung des Gleichgewichts auszudrücken, bedarf es dreier Gleichungen, welche angeben, daß die Summe der Momente der Kräfte, in Bezug auf drei sich im Unterstützungspuncte schneidende Axen im Raume, für jede der drei Axen Null sei (§. 65).

Diese drei Axen können beliebig durch den Unterstützungspunct gezogen werden; nur dürfen sie nicht in derselben Ebene liegen, weil dann die drei Gleichungen nicht mehr das Gleichgewicht der Kräfte bedingen würden.

Da die aus der Transposition der Kräfte in den festen Punct entspringenden Paare für sich im Gleichgewichte sein müssen, so folgt daraus, daß die in verschiedenen Puncten des Hebels angebrachten Kräfte sich auf dieselben Kräfte zurückführen lassen müssen, die aber parallel zu sich selbst im Unterstützungspuncte vereinigt sind. Demnach kann man das allgemeine Gesetz für das Gleichgewicht des Hebels so aussprechen: die auf ihn wirkenden Kräfte müssen eine einzige Resultante haben, welche durch den festen Punct geht; ein Satz, der für sich evident zu sein scheint, und den man gewöhnlich als Grundsatz aufstellt, um die obigen Bedingungen (§. 116 — 118) daraus abzuleiten.

§. 177.

Wir haben bisher vom Gewichte des Hebels abstrahirt. Will man dasselbe berücksichtigen, so hat man es als eine neue, in seinem Schwerpuncte vertical wirkende Kraft zu betrachten und diese dann nach den früher aufgestellten Principien mit den übrigen Kräften zu verbinden, als wäre der Hebel ohne Gewicht. Auf diese Weise muß, wenn z. B. alle Kräfte und die Richtung des Gewichts des Hebels mit dem Unterstützungspuncte in derselben Ebene liegen, die Summe aller Momente, mit Einschluß desjenigen des Gewichts, für den Zustand des Gleichgewichts Null sein.

Will man also einen Hebel anwenden, dessen Gewicht auf den Gleichgewichtszustand keinen Einfluß haben soll: so muß man ihn so einrichten, daß die Verticallinie aus seinem Schwerpuncte in den Unterstützungspunct fällt. In diesem Falle ist denn das Moment des Gewichts Null, und man hat nur die Momente der angebrachten Kräfte zu berücksichtigen.

§. 178.

Wir haben vorausgesetzt, daß der Unterstützungspunct F des Hebels nach keiner Seite hin entweichen könne, so daß der Hebel nur um ihn rotiren kann. Um sich im Innern eines Körpers einen solchen Punct zu verschaffen, steckt man gewöhnlich einen unbiegsamen Bolzen oder Cylinder von irgend einem Durchmesser durch ihn. Der um diesen Cylinder rotirende Körper verhält sich ganz so, als rotirte er um die als starre, gerade Linie betrachtete Axe des Cylinders, und alle Puncte eines senkrecht auf die Axe gemachten ebenen Durchschnittes, der in dem Cylinder einen Kreis bildet, rotiren um den Mittelpunct dieses Kreises.

Bei einer solchen Einrichtung kann denn allerdings der Hebel nicht nach allen Richtungen hin frei um den festen Punct rotiren; liegen aber alle auf ihn wirkenden Kräfte in einer auf die Rotationsaxe senkrechten Ebene, so bleiben die Gesetze des Gleichgewichts völlig dieselben. Übrigens könnte man auch in den Hebel eine feste Kugel bringen, die ihn wenigstens in vier Puncten dergestalt berührte, daß diese vier Puncte als die Berührungspuncte einer ihrer Oberfläche umschriebenen Pyramide angesehen werden können. Der um diese Kugel rotirende Hebel läßt sich dann als um ihren Mittelpunct rotirend betrachten.

Am häufigsten ruht jedoch der Hebel bloß auf einer festen Unterlage, wie (Fig. 46, 47, 48), und dann reichen, abgesehen von der Reibung, die obigen Bedingungen zum Gleichgewichte nicht hin. Hier müssen die Kräfte nicht bloß eine einzige, durch den Unterstützungspunct gehende Resultante geben, sondern die Richtung der Resultante muß auch normal auf die Berührungsfläche des Hebels mit der Unterlage sein; denn ist sie gegen die Tangentialebene dieser Oberfläche geneigt, so läßt sie sich immer in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine senkrecht, die andere parallel zu dieser Ebene ist; die erstere wird von der Unterlage vernichtet, die zweite behält aber ihre Wirkung und läßt den Hebel auf der Unterlage fortgleiten, wie wir bei der Betrachtung der geneigten Ebene sehen werden.

Die Wage.

§. 179.

Die gewöhnliche Wage ist ein Hebel erster Art, dessen Endpuncte an Fäden zwei Schalen tragen, in welche die ihrem Gewichte nach zu vergleichenden Körper gelegt werden. Man richtet diese Maschine gewöhnlich so ein, daß ihr Schwerpunct in die Verticale durch den Unterstützungspunct F (Fig. 51) fällt, und daß die Arme FA und FB des Wagebalkens völlig gleich sind. Halten sich nun zwei Körper in den Wagschalen das Gleichgewicht, so ist man versichert, daß sie gleiches Gewicht haben und mithin eine gleiche Quantität Materie enthalten. Nimmt man also das Gewicht eines Körpers als Einheit an, so bestimmt man die respectiven Massen verschiedener Körper dadurch, daß man angibt, wie vielen Gewichtseinheiten sie das Gleichgewicht halten.

Zur Richtigkeit einer Wage wird also zuvörderst nöthig sein, daß ihr Schwerpunct in die Verticale durch den Unterstützungspunct fällt.

Damit die Wage diese Eigenschaft besitze, muß sie für sich, wenn die Wagschalen leer sind, im Gleichgewichte sein; ist dies nicht der Fall, so rectificirt man sie leicht dadurch, daß man ein zum Gleichgewichte erforderliches Gewicht an einer der Schalen oder an einem der Arme des Wagebalkens befestigt.

Zweitens muß der Unterstützungspunct den Wagebalken in zwei völlig gleiche Hälften theilen: eine Bedingung, die sehr wesentlich ist.

Um die Wage in dieser Hinsicht zu prüfen, bringt man zwei Körper in den Schalen ins Gleichgewicht, und verwechselt sie darauf mit einander. Sind die Arme gleich, so wird auch jetzt noch Gleichgewicht vorhanden sein, weil dann die im Gleichgewichte befindlichen Körper gleich sind und sich mithin, ohne das Gleichgewicht zu stören, verwechseln lassen.

Sind die Arme aber ungleich, so muß bei der Verwechselung das Gleichgewicht gestört werden, weil die im Gleichgewichte befindlichen Gewichte sich umgekehrt verhalten wie die Längen der Arme, durch die Verwechselung also das größere Gewicht an den längern Arm kommt und demnach aus doppeltem Grunde das andere überwiegt.

Die Wage ist in diesem Falle falsch und kann nur durch Veränderung des Unterstützungspunctes oder eines der Aufhängepuncte der Schalen rectificirt werden.

Dessenungeachtet läßt sich eine solche Wage zur Bestimmung des wahren Gewichtes eines Körpers gebrauchen, wenn man nur zwei Versuche anstellt. Es sei P das unbekannte Gewicht, x der eine, y der andere Arm des Wagebalkens; man lege zuerst P in die Schale an dem Arme x. Braucht man nun A Gewicht in der andern Schale zum Gleichgewichte, so ist

$$Px = Ay.$$

Legt man jetzt P in die Schale an dem Arme y, und braucht man B Gewicht in der andern Schale zum Gleichgewichte, so ist

$$Py = Bx.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen, so erhält man $P^2 = AB$, also $P = \sqrt{(AB)}$. Das wahre Gewicht des Körpers ist also die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beiden Gewichten, denen der Körper nach einander in den beiden Schalen das Gleichgewicht hält.

Die Schnellwage.

§. 180.

Die Schnellwage ist gleichfalls ein geradliniger Hebel erster Art, dessen Arme FA und FB (Fig. 52) aber ungleich sind.

An dem Endpuncte A des kürzern Armes wird der Körper aufgehängt, dessen Gewicht Q bestimmt werden soll; man befestigt ihn da mittelst eines Hakens, oder legt ihn in eine Wagschale, die wie bei der gemeinen Wage frei im Puncte A aufgehängt ist. Am andern Arme FB der Schnellwage läßt sich ein bekanntes Gewicht p hin- und herschieben, so daß es, wenn man es in die richtige Entfernung FI vom Unterstützungspuncte I bringt, dem auf der andern Seite wirkenden Körper das Gleichgewicht hält.

Bemerkt man sich auf solche Weise in jedem Puncte I des Hebelarmes FB in Zahlen das Verhältniß der beiden Kräfte Q und p, wenn diese im Gleichgewichte sind: so erhält man ein bequemes Instrument, wodurch man das Gewicht verschiedener Körper mittelst eines einzigen, zur Einheit genommenen Gewichtes p bestimmen kann. Man braucht dann nur in jedem Falle den Punct I aufzusuchen, wohin man das sogenannte Laufgewicht p schieben muß, damit es mit dem Gewichte Q im Gleichgewichte sei, und findet dann hier das Verhältniß von Q zu p oder das gesuchte Gewicht des Körpers.

Ist die Schnellwage der Art eingerichtet, daß der Schwerpunct der ganzen Maschine (des Wagebalkens und der Schale) in den Unterstützungspunct F fällt: so ist das Gesetz des Gleichgewichts zwischen den beiden Kräften dasselbe, als wäre die Wage ganz ohne Gewicht; es muß sich dann Q zu p verhalten wie die Arme FI zu FA, und in diesem Falle ist die Construction einer Schnellwage, die Eintheilung nämlich, ohne weitere Schwierigkeit.

Fällt aber der Schwerpunct der ganzen Maschine rechts oder links von dem Unterstützungspuncte: dann steht Q zu p nicht mehr in dem Verhältnisse von FI zu FA, sondern dieses Verhältniß muß um eine gewisse, vom Gewichte V der Maschine und dem Abstande dieses Gewichtes V vom Unterstützungspuncte abhangende Größe vermehrt oder vermindert werden. Die Eintheilung der Schnellwage muß danach verschieden ausfallen; indeß ist leicht zu sehen, daß die Theilpuncte dennoch auf dieselbe Weise liegen müssen, nur wird der Anfangspunct oder Nullpunct der Theilung nicht mehr in den Unterstützungspunct, sondern um eine gewisse, leicht bestimmbare Entfernung vor oder hinter ihn in O (Fig. 53) fallen.

§. 181.

Man kann jedoch auch eine Schnellwage, ohne Gewicht und Schwerpunct derselben zu kennen, auf folgende, sich natürlich und leicht aus der Theorie der Paare ergebende Weise sehr genau eintheilen.

Es sei anfänglich die Wagschale leer, oder das Gewicht Q Null; man schiebe das Laufgewicht p rechts oder links vom Unterstützungspuncte nach O so weit, bis der Wagebalken AB horizontal ist. In dieser Lage geht der Schwerpunct des ganzen Systems mit Inbegriff des Laufgewichts p durch den Punct F, wo sich das Gewicht der ganzen Maschine vernichtet. Der Punct O ist also der Nullpunct der Eintheilung, weil hier das Gewicht Q Null sein muß.

Bringt man nun in die Wagschale ein Gewicht $p' = p$, so hört das Gleichgewicht auf, wird jedoch wieder hergestellt, wenn man das Laufgewicht um eine entsprechende Weite fortschiebt. Vermehrt man auf solche Weise in der Wagschale das Gewicht, so muß das Laufgewicht auf der andern

Seite des Wagebalkens um die nöthige Länge desselben fortrücken, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Denkt man sich nun das Gewicht p′ parallel zu sich selbst aus A in den Unterstützungspunct F transponirt, so wird es hier vernichtet, und es bleibt nur ein Paar (p′, — p′), das an FA = r wirkt, und dessen Moment p′r ist. Das in die Wagschale gelegte Gewicht p′ erzeugt also auf dieser Seite des Wagebalkens ein Paar oder ein Moment pr; man muß also auf der andern Seite ein gleiches entgegengesetztes Paar (—p, +p) anbringen, das denselben Hebelarm r hat. Dieses Paar darf man auf die Gerade OH = r versetzen, wo dann — p die ihr gleiche und entgegengesetzte p vernichtet, und wo nur die Kraft + p bleibt, die gewissermaßen nur das um die Länge OH = r fortgeschobene Laufgewicht ist. Daraus geht hervor, daß man für jedes in die Wagschale gelegte Gewicht p das Laufgewicht um die constante Länge r des kleinern Armes der Schnellwage weiterschieben muß, und daß man, wenn man einen Theil von p in die Wagschale legt, auch das Laufgewicht um denselben Theil von r fortrücken muß.

Von dem auf obige Weise bestimmten Nullpuncte O der Eintheilung hat man also gleiche Theile r auf dem Wagebalken abzutragen und diese Puncte mit 0, 1, 2, 3, 4, 5...... zu bezeichnen. Markirt man dann etwa noch zwischen diesen Puncten Zehntheile, Hunderttheile, so läßt sich mit dem Instrumente das Gewicht der abzuwägenden Körper in Decimaltheilen des Laufgewichts angeben.

Die Schnellwage kann in vielen Fällen nützlich angewendet werden, wo man die gemeine Wage nicht brauchen kann, weil sie verschiedene Gewichtsstücke erfordert, während bei der Schnellwage nur ein einziges nöthig ist.

Dazu hat sie den Vortheil, daß der Unterstützungs- oder Aufhängepunct vom Gewichte der abzuwägenden Körper nicht so stark gedrückt wird. Bei der gemeinen Wage beträgt dieser Druck 2 Q, das Doppelte vom Gewichte des abzuwägenden Körpers; bei der Schnellwage nur $Q + p$, oder wenn man das Laufgewicht p zum Totalgewichte der Maschine rechnet, nur Q, also nur halb so viel wie vorhin.

Man kann die Construction der Schnellwage auf verschiedene Arten abändern, wenn man statt des Laufgewichtes den abzuwägenden Körper oder den Aufhängepunct verschiebbar macht; wir halten uns indeß dabei nicht auf, weil allen diesen Constructionen dasselbe Princip zum Grunde liegt.

Die Quadrantenwage.

§. 182.

Zum Abwägen kann man sich auch eines Winkelhebels **ACB** (Fig. 54) bedienen, der um einen festen Punct **C** drehbar ist, und dessen Arme **CA** und **CB** einen rechten Winkel mit einander bilden. Man nennt solche Wagen Quadrantenwagen.

Der Einfachheit wegen mag der Arm **CB**, an dem das zu bestimmende Gewicht aufgehängt wird, über den Unterstützungspunct **C** hinaus um eine gleiche Länge **CB′** verlängert sein, so daß der Schwerpunct von **BB′** genau in den Mittelpunct **C** fällt; das Gewicht des Hebelarmes **CB** wird dann durch das entgegengesetzte von **CB′** in allen Lagen um den Punct **C** vernichtet und braucht nicht weiter in Betracht gezogen zu werden. Der Arm **CA** dagegen hält mit seinem Gewichte und dem, das etwa sonst noch an ihm befestigt ist, dem abzuwägenden Körper das Gleichgewicht; in der Regel macht man diesen Arm **CA**, die sogenannte Nadel oder Zunge, aus einer so gewichtigen Materie, daß die aus seinem Gewichte im Schwerpuncte resultirende Kraft allein die Stelle des Gegengewichts vertritt. Mag p das Gewicht der Nadel mit Inbegriff des etwa noch an ihr befestigten Gewichts, und der Punct **G** in dem Abstande **CG** vom Unterstützungspuncte der Schwerpunct von p sein.

Im freien Zustande fällt die Nadel CA in die Verticale CO, und der Arm CB ist horizontal; hängt man aber in B ein Gewicht Q auf, so neigt sich der Arm CB gegen die Verticale, und die Nadel CA entfernt sich von ihr; die Entfernung BH des Gewichts Q vom Unterstützungspuncte wird also kleiner, und die Entfernung GI der Kraft p von demselben Puncte größer. Damit der Winkelhebel im Gleichgewichte sein kann, muß er eine solche Lage annehmen, daß die Momente $Q.BH$ und $p.GI$ gleich werden.

Ist nun $\varphi = ACO$ der Winkel der Nadel mit der Verticale, $R = CG$ der Abstand ihres Schwerpunctes vom Angriffspuncte, und $r = CB$ die Länge des Hebelarmes, an dem der Körper aufgehängt ist: so ist $GI = R \sin \varphi$ und $BH = r \cos \varphi$. Statt der Gleichung $Q.BH = p.GI$ hat man demnach $p.R \sin \varphi = Q.r \cos \varphi$, oder

$$\tang \varphi = \frac{r.Q}{R.p}.$$

In diesem Ausdrucke sind die drei Größen r, R, p constant; man hat also den Satz: die Tangente des Neigungswinkels der Nadel ist dem Gewichte des zu wägenden Körpers proportional.

Bringt man daher zwischen der Verticale CO und der Horizontale CM einen aus C beschriebenen Kreisquadranten an, den die Nadel von der Verticale aus zu durchlaufen hat: so lassen sich leicht auf diesem Kreisbogen die den Gewichten correspondirenden Zahlen bestimmen.

Denn zieht man an den Kreisbogen in O die unbestimmte Tangente OT, und hängt man in B das Gewicht auf, das als Einheit betrachtet werden soll: so hebt sich die Nadel um einen gewissen Kreisbogen OA; verlängert man die Richtung der Nadel, bis sie die Linie OT in a schneidet: so repräsentirt Oa die Tangente des Kreisbogens, der zur Gewichtseinheit gehört. Man braucht also nur von O aus auf der Geraden OT lauter gleiche Theile Oa abzuschneiden und die Theilpuncte mit dem Centrum C durch gerade Linien zu verbinden; wo diese Geraden den Quadranten schneiden, schreibt man die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4..... Zur Unterabtheilung theilt man OT in Decimaltheile und findet dann durch dieselbe Construction auf dem Kreisbogen die Puncte, welche den Decimaltheilen der Gewichtseinheit entsprechen.

§. 183.

So klein auch das Gewicht p der Nadel sein mag, so erhellt doch aus der Proportion $Q:p = R \tan \varphi : r$, daß dieses Gewicht immer einem beliebig großen Gewichte Q das Gleichgewicht halten kann, weil die Tangente von φ unendlich groß werden kann. Die Quadrantenwage ist also von einem ausgedehntern Gebrauche als die Schnellwage, und dient in einem kleinen Raume zum Abwägen der größten Lasten.

Da sich indeß die Tangente des Bogens φ für gleiche Grade nicht auch um gleiche Theile vermehrt, sondern immer kleiner wird: so weichen die Eintheilungen der Wage für gleiche Gewichtszunahmen der Last immer weniger von einander ab; soll also die Maschine die Gewichtsunterschiede in der Höhe genau angeben, so darf das Gewicht der Nadel nicht zu klein sein. Deshalb bringt man denn auch zum Abwägen bedeutender Lasten an der Nadel ein gewisses Gewicht an, um sie im mittlern Theile des Quadranten zu erhalten, wo die Ungleichheiten des Gewichts in der Eintheilung merklicher hervortreten.

Die Rolle.

§. 184.

Das Gleichgewicht der Rolle läßt sich ganz einfach auf das des Hebels zurückführen.

Die Rolle ist ein kreisförmiges Rad ABK (Fig. 55), welches in einer Zwinge CN um eine Axe C beweglich ist. Über einen Theil AB ihres Umfanges ist ein Seil PABQ geschlagen, an dessen Enden zwei Kräfte P und Q wirken. Zieht man an die äußersten Berührungspuncte zwei Halbmesser CA und CB, so kann man sich die Kräfte an dem Winkelhebel ACB angebracht denken, dessen Arme einander gleich sind. Damit also Gleichgewicht entstehe, müssen die Kräfte P und Q gleich sein.

Die Belastung des Mittelpunctes C der Rolle ist dieselbe, als wären beide Kräfte parallel zu sich selbst in C transponirt (§. 171). Stellen also CP′ und CQ′ die Größe der Kräfte dar, und vollendet man das Parallelogramm PCQ′R, so ist die Diagonale CR desselben die Belastung des Punctes C.

Verbindet man die Puncte A und B durch eine gerade Linie, so ist das Dreieck ABC gleichschenklig und dem Dreiecke P′CR ähnlich; man hat also

$$P' \text{ oder } P : R = AC : AB.$$

Jede der beiden an dem Seile wirkenden Kräfte P und Q verhält sich demnach zum Drucke auf die Axe der Rolle, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des vom Seile umschlungenen Kreisbogens.

§. 185.

Wird die Axe, statt befestigt zu sein, von einer Kraft gehalten, die dem Drucke auf sie gleich und entgegengesetzt ist, und wird das Ende des Seils AF (Fig. 56), statt von der Kraft P gezogen zu werden, befestigt: so kann sich dadurch im Gleichgewichte der Rolle nichts ändern, und das Seil wird vor wie nach auf gleiche Weise gespannt sein.

Die Kraft Q wird also zu der Kraft, welche die Axe der Rolle hält, noch in demselben Verhältnisse stehen wie vorhin.

Betrachtet man also ein Gewicht P, das an der Zwinge CN im Centrum der Rolle aufgehängt ist, so hat man den Satz: die Kraft Q, welche das Gewicht zu heben strebt, verhält sich zu diesem Gewichte wie der Halbmesser der Rolle zu der Sehne des vom Seile umschlungenen Bogens der Rolle.

Ist dieser Bogen der dritte Theil des Halbkreises, so ist seine Sehne gleich dem Halbmesser, die Kraft Q also gleich dem Gewichte P.

Sind die beiden Theile des Seils parallel (Fig. 57), so ist die Sehne AB der Kreisdurchmesser, die Kraft also nur die Hälfte von der Belastung des Mittelpunctes. Dies ist der günstigste Fall für die Kraft, weil der Durchmesser die größte aller Kreissehnen ist.

Das Rad an der Welle.

§. 186.

Rad im Allgemeinen heißt, wie wir schon früher gesagt haben, jeder Körper von beliebiger Figur, dem weiter keine Bewegung verstattet ist als die Rotation um eine feste Axe.

Was man indeß in der Maschinenlehre Rad an der Welle nennt, ist ein Cylinder, an dessen Grundflächen zwei andere Cylinder von kleinerm Durchmesser befestigt sind, die mit ihm dieselbe Axe haben und Zapfen heißen.

Diese Zapfen liegen auf festen Unterlagen, Pfannen, F und H (Fig. 58); dreht sich der Cylinder um seine Zapfen, so befindet er sich ganz in dem Zustande, als wenn er um seine als starre gerade Linie betrachtete Axe rotirte.

Die zu überwindende Last oder das zu hebende Gewicht Q ist an einem Seile befestigt, welches sich auf die Welle aufwickelt, während eine Kraft P diese umdreht. Die Kraft

P bewegt die Welle entweder an einem Seile CP, das von einem auf die Axe des Cylinders senkrecht stehenden und mit dem Cylinder fest verbundenen Rade CB tangential abtritt, oder an einem unter rechtem Winkel durch den Cylinder gehenden Arme, oder an einer Kurbel u. s. w.

Die Maschine erhält nach dem Zwecke, wozu sie angewendet werden soll, und nach ihrer Lage verschiedene Benennungen. Gewöhnlich heißt sie Rad an der Welle, wenn die Axe der Welle horizontal, und Haspel, wenn diese vertical ist, und die Kraft an Armen auf sie wirkt. Was jedoch auch der Zweck der Maschine, wie sie aufgestellt, und auf welche Weise sie in Bewegung gesetzt sein mag, die Bedingungen des Gleichgewichts bleiben bei ihr immer dieselben. Wir betrachten sie deshalb nun in der Lage, wie sie (Fig. 58) darstellt, wo die Axe der Welle horizontal, mithin die Ebene des Rades vertical sein mag; die Kraft P soll in irgend einem Puncte C tangential auf das Rad, und die Last Q in einer zum Rade parallelen Ebene nach einer verticalen Tangente auf die Oberfläche der Welle oder vielmehr auf den Umfang des durch den Berührungspunct D in die Welle gemachten Kreisschnittes DIO wirken.

Es soll nun das Verhältniß der Kraft zur Last für den Zustand des Gleichgewichts, und dann der Druck der Zapfen auf die Pfannen F und H ermittelt werden.

Mag B das Centrum des Rades, A das Centrum des Kreisdurchschnittes DIO sein. Man ziehe die Halbmesser CB und DA, welche auf die respectiven Kräfte P und Q senkrecht sein werden.

Transponirt man die Kraft Q parallel zu sich selbst aus D in A, so entspringt aus ihr eine Kraft Q′, gleich und parallel der Q und von demselben Sinne, und ein Paar (Q, — Q), dessen Hebelarm der Halbmesser DA der Welle ist. Transponirt man eben so die Kraft P aus C nach B, so entsteht gleichfalls aus ihr eine Kraft P′, gleich und parallel der P und von demselben Sinne, und ein Paar (P, — P), dessen Hebelarm der Halbmesser CB des Rades ist.

Die beiden Kräfte P′ und Q′ wirken nun auf zwei Puncte der festen Axe, werden also von ihrer Resistenz vernichtet.

Die beiden Paare (P, — P) und (Q, — Q) müssen aber mit einander im Gleichgewichte sein; denn transponirt man das Paar (Q, — Q) in die Ebene des Paares (P, — P), was gestattet ist, so setzen sich beide Paare in eins zusammen, das denn niemals um den Punct B des Rades im Gleichgewichte sein kann. Das resultirende Paar muß folglich in sich Null, oder die beiden entgegengesetzten Paare (P, — P) und (Q, — Q) müssen gleich sein. Auf diese Weise erhält man also die Bedingungsgleichung $P.CB = Q.DA$, oder $P:Q = DA:CB$.

Für den Gleichgewichtszustand eines Rades an der Welle muß also die Kraft zur Last sich verhalten wie der Wellenhalbmesser zum Radhalbmesser.

Von dem Drucke auf die Unterstützungspuncte.

§. 187.

Da die Paare (P, — P) und (Q, — Q) für sich im Gleichgewichte sind, so können nur die Kräfte P′ und Q′ die Axe und mithin auch die Unterstützungspuncte belasten. Daraus geht hervor: der von den auf das Rad an der Welle wirkenden Kräften auf die Unterstützungspuncte ausgeübte Druck ist völlig derselbe, als wären die Kräfte in ihren auf die Axe senkrechten Ebenen parallel zu sich selbst in die Axe transponirt.

Um die Belastung auf jeden einzelnen Unterstützungspunct zu finden, zerlege man die Kraft Q′ in zwei andere parallele, in den respectiven Puncten F und H angebrachte Kräfte q und q′, und eben so P in zwei andere parallrle, in denselben Puncten wirkende Kräfte p und p′. Die Resultante von p und q gibt dann die Größe und Richtung des Druckes auf F, und die Resultante von p′ und q′ die Größe und Richtung des Druckes auf H.

Wir haben von dem Gewichte der Maschine abstrahirt. In der Regel ist der Maschinenkörper in Bezug auf seine Axe durchaus symmetrisch, und der Schwerpunct fällt in die Axe selbst. Dann bleibt das Verhältniß zwischen Last und Kraft dasselbe, die Belastungen der Unterstützungspuncte ändern sich jedoch. Um jede einzeln zu bestimmen, betrachte man das ganze Gewicht der Maschine als eine Verticalkraft V, in ihrem Schwerpuncte G angebracht, zerlege sie in zwei andere parallele, in den Puncten F und H angebrachte Kräfte g und g′; die Resultante von p, q und g gibt dann den Druck auf F, und die Resultante von p′, q′ und g′ den Druck auf H, so daß man die kleinsten Widerstände kennt, welche die Unterstützungspuncte leisten müssen, wenn sie nicht von der vereinten Wirkung der Kräfte P und Q und des Gewichtes V der ganzen Maschine fortgerissen werden sollen.

§. 188.

Bei unserer Betrachtung ist vorausgesetzt, daß die Seile DQ und CP ohne Dicke sind; in der Wirklichkeit haben sie immer einen gewissen Durchmesser, und dadurch kann das obige Verhältniß zwischen Last und Kraft merklich geändert werden. Denkt man sich die Kräfte in den Axen der Seile wirkend, so werden ihre respectiven Hebelarme um die Halbmesser der Seile vergrößert; es verhält sich also jetzt nicht mehr Kraft zur Last, wie der Wellenhalbmesser zum Radhalbmesser, sondern die Kraft P zur Last Q, wie der Halbmesser der Welle + dem Halbmesser des Seiles DQ zu dem Halbmesser des Rades + dem Halbmesser des Seiles CP.

Sind die Halbmesser der Seile DQ und CP den Halbmessern der Welle und des Rades proportional, so bleibt obiges Verhältniß, als wirkten Kraft und Last tangential auf Rad und Welle an unendlich dünnen Seilen.

§. 189.

Wirken auf ein Rad an der Welle beliebig viele Kräfte in auf die Axe senkrechten Ebenen, so läßt sich jede Kraft in eine andere gleiche und parallele Kraft von demselben Sinne und an der Axe wirkend, und in ein Paar verwandeln, dessen Hebelarm der Abstand der Kraft von der Axe ist. Alle auf die Axe transponirten Kräfte werden von dem Widerstande der Axe vernichtet; damit also Gleichgewicht bestehe, braucht nur das aus allen Paaren resultirende Paar in sich Null zu sein. Da alle Paare in parallelen Ebenen liegen, so ist das resultirende gleich ihrer Summe; als Bedingung des Gleichgewichts muß folglich die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die Axe Null sein, wobei man die Momente negativ nimmt, deren Kräfte nach entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Die Belastungen der Unterstützungspuncte sind offenbar dieselben, als würden alle Kräfte mit Beibehaltung ihrer auf die Axe senkrechten Ebenen parallel zu sich selbst in die Axe transponirt.

Liegen die Kräfte an der Welle in beliebigen Ebenen, so kann man jede von ihnen in zwei andere zerlegen, die eine parallel, die andere senkrecht zur festen Axe. Transponirt man dann die Parallelkräfte auf die Axe, so wird ihre Resultante von der Längenresistenz, und das resultirende Paar von der Transversalresistenz der Axe vernichtet. Man hat also zum Gleichgewichte der Welle nur noch die Gruppe von Kräften zu betrachten, welche in senkrechten Ebenen auf die feste Axe liegen; welche Betrachtung auf den vorigen Fall zurückkommt.

Nennt man also die Kräfte P, P′, P″....., ihre Neigungswinkel gegen die Axe w, w′, w″...., und ihre kürzesten Abstände von derselben p, p′, p″....., so hat man für den Zustand des Gleichgewichts

$$Pp \sin w + P'p' \sin w' + P''p'' \sin w'' + \ldots = 0,$$

welches die im (§. 120) aufgestellte Bedingungsgleichung ist.

Die Axe der Welle erleidet einen Druck: 1) von den auf sie transponirten Seitenkräften $P \sin w$, $P' \sin w'$, $P'' \sin w''$....; 2) von der Resultante der Parallelkräfte $P \cos w$, $P' \cos w'$, $P'' \cos w''$....., welche die Welle in der Richtung ihrer Länge fortzuziehen strebt; und 3) von dem aus letztern Kräften resultirenden Paare, das aus zwei gleichen, auf die Axe senkrechten Kräften besteht, welche auf diese in einander entgegengesetztem Sinne wirken.

Von der geneigten Ebene.

§. 190.

Wirkt ein Punct normal gegen eine starre, unbiegsame Ebene, so muß er im Gleichgewichte bleiben, weil kein Grund vorhanden ist, warum er sich in der Ebene, mit der er nach allen Seiten rechte Winkel einschließt, mehr nach dieser als nach jeder andern Seite bewegen sollte; durch die Ebene hindurch kann er sich übrigens nicht bewegen, weil sie als vollkommen starr angenommen wird.

Umgekehrt kann der Punct nicht im Gleichgewichte sein, wenn nicht seine Druckkraft normal auf die Ebene ist; denn ist sie nicht normal, so läßt sie sich jedesmal in zwei andere Kräfte zerlegen, in eine senkrecht auf die Ebene, und in eine in die Ebene fallende; die erste wird von der Ebene aufgehoben, die zweite behält jedoch ihre volle Wirkung, weil sie nicht durch das Vorhandensein einer Ebene vernichtet werden kann, längs derer sie wirkt. Es wird also auch kein Gleichgewicht bestehen können.

Dasselbe gilt von einem Puncte, der sich gegen eine krumme Oberfläche lehnt, weil man durch den Berührungspunct eine Tangentialebene legen und dann den Punct als auf diese Ebene wirkend betrachten kann. Damit also Gleichgewicht Statt finde, muß die Richtung der Druckkraft im Berührungspuncte normal auf diese Ebene sein, und dies ist der Grund, warum zum Gleichgewichte eines auf einer Unterlage ruhenden Hebels nicht nur erfordert wird, daß die Resultante durch die Unterlage gehe, sondern auch, daß sie senkrecht sei auf das Berührungselement des Hebels mit der Unterlage.

§. 191.

Aus dem Gesagten ist also klar, daß, wenn ein Körper auf einer starren Ebene im Gleichgewichte ist, die Ebene nur solche Kräfte vernichten kann, deren Richtungen normal auf die verschiedenen Berührungspuncte sind, und daß ihre Resistenz folglich auch nur solche Kräfte erzeugen könne.

Stützt sich also (Fig. 59) ein Körper von beliebiger Figur, auf den irgend welche Kräfte **P**, **Q**, **R**...... wirken, nur in einem einzigen Puncte **O** gegen eine Ebene, so kann er nur dann im Gleichgewichte sein, wenn alle auf ihn wirkenden Kräfte mit einer einzigen Kraft **N** im Gleichgewichte sind, welche normal auf den Punct **O** ist und seine Resistenz darstellt. Die Bedingungen des Gleichgewichts für einen Körper, der sich nur in einem einzigen Puncte gegen eine Ebene stützt, sind demnach: 1) alle auf ihn wirkende Kräfte müssen eine einzige Resultante haben; 2) die Richtung dieser Resultante muß normal auf die Ebene sein; 3) sie muß durch den Berührungspunct gehen.

Diese drei Bedingungen sind dieselben, wie wir sie oben für das Gleichgewicht eines Hebels aufstellten, der nur auf einem einzigen Unterstützungspuncte ruht. Wir hätten sie durch dieselbe Schlußfolge finden und auch gleichfalls so aussprechen können: alle parallel zu sich selbst in den Berührungspunct transponirten Kräfte müssen hier eine einzige Resultante geben, die normal auf die Ebene ist, und alle entstehenden Paare müssen ein resultirendes Paar geben, das in sich Null ist.

§. 192.

Berührt der Körper die Ebene in mehren Puncten A, B, C, D.... (Fig. 60), so erzeugt jeder Berührungspunct einen in diesem Puncte auf die Ebene normalen Widerstand. Da aber alle diese Widerstandskräfte parallel und von gleichem Sinne sind, so geben sie immer eine einzige Resultante, deren Richtung nothwendig ins Innerer des von den Puncten A, B, C, D..... gebildeten Polygons fällt. Die auf den Körper wirkenden Kräfte müssen also mit dieser Resultante im Gleichgewichte sein, woraus man den Satz hat: stützt sich ein Körper gegen eine Ebene in mehren Puncten, so ist zum Gleichgewichte erforderlich, daß die auf ihn wirkenden Kräfte sich zu einer einzigen zusammensetzen lassen, welche normal auf die Ebene ist, und deren Richtung ins Innere des von den Berührungspuncten gebildeten Polygons fällt.

Daraus erhellt, daß, wenn der Körper sich auf eine begrenzte Oberfläche stützt, die Resultante die Ebene in einem Puncte dieser Oberfläche schneiden müsse.

Vom Drucke auf die Ebene.

§. 193.

Stützt sich der Körper nur in einem einzigen Puncte gegen die Ebene, so folgt aus dem Gesagten, daß der von den Kräften auf die Ebene ausgeübte Druck gleich ist ihrer Resultante.

Ruht der Körper in zwei Puncten A und B (Fig. 61) auf der Ebene, so zerlegt sich die Resultante N, deren Richtung die Verbindungslinie der Stützpuncte A und B schneidet, in zwei Parallelkräfte p und q, welche die respectiven Druckkräfte auf A und B sind.

Ist O der Punct, wo die Resultante N die Gerade AB schneidet, so hat man für den Druck p auf den Punct A die Proportion $N : p = AB : BA$, und für den Druck q auf den Punct B die Proportion $N : q = AB : AO$. Repräsentirt also die Gerade AB die Resultante oder den Totaldruck, so werden die einzelnen Druckkräfte auf die beiden Stützpuncte umgekehrt durch ihre Abstände von dem Totaldrucke dargestellt.

Ruht der Körper auf drei Puncten A, B, C (Fig. 62), so muß die Resultante N durch einen Punct O im Innern des Dreiecks ABC gehen (§. 192). Zieht man aus einem Dreieckswinkel, z. B. aus A, nach O eine gerade Linie und verlängert diese, bis sie die gegenüberstehende Seite in I schneidet: so läßt sich die Kraft N in zwei Parallelkräfte p und n zerlegen, die in A und I angebracht sind. Ferner läßt sich die Kraft n wieder in zwei Parallelkräfte q und r zerlegen, die in B und C wirken. Die drei Kräfte p, q, r geben dann die drei respectiven Druckkräfte auf die Puncte A, B, C.

Vollendet man die drei Dreiecke BOC, AOC und AOB an dem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte O und mit den respectiven Basen BC, AC und AB, und stellt dann die Fläche des Dreiecks ABC den Totaldruck in O dar, so geben die respectiven Flächen der auf den Seiten dieses Dreiecks ABC gebildeten Dreiecke BOC, AOC, AOB die einzelnen Druckkräfte auf die den jedesmaligen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte A, B, C.

Denn die Kraft N in O verhält sich zur Kraft p in A wie AI zu OI. Die Dreiecke BAC und BOC haben dieselbe Basis BC; ihre Flächen verhalten sich also wie ihre Höhen, oder wie die unter gleichem Winkel gegen die Basen geneigten geraden Linien AI und OI; folglich ist $N : p = \triangle\ ABC : \triangle\ BOC$. Auf gleiche Weise ist $N : q = \triangle\ ABC : \triangle\ AOC$, und $N : r = \triangle\ ABC : \triangle\ AOB$.

§. 194.

Stützt sich der Körper gegen die Ebene in mehr als drei Puncten oder auch nur in drei Puncten, die in derselben Geraden liegen: so sind die einzelnen Druckkräfte auf diese Puncte unbestimmt, weil man dann die Kraft N auf unzählige Weisen in Parallelkräfte zerlegen kann, die in diesen Puncten angreifen.

Die einzelnen Druckkräfte brauchen dann nur den beiden Bedingungen zu genügen: 1) müssen sie alle mit dem Totaldrucke denselben Sinn haben; 2) müssen sie sich zu einer einzigen Kraft zusammensetzen lassen, die dem Totaldrucke gleich und in O angebracht ist. Die letztere Bedingung erfordert drei Gleichungen, von denen die erste angibt, daß die Summe der Druckkräfte gleich ist dem Totaldrucke, und von denen die beiden letztern ausdrücken, daß die Summe der Momente der einzelnen Druckkräfte in Bezug auf zwei beliebige Axen in der Ebene der Stützpuncte gleich ist dem Momente des Totaldrucks in Bezug auf dieselben Axen (§. 84 — 127).

§. 195.

Soll das Gleichgewicht eines Körpers ermittelt werden, der sich zu gleicher Zeit gegen mehre Ebenen lehnt: so erzeugt jede Ebene in den verschiedenen Berührungspuncten mit dem Körper Widerstandskräfte, die denselben Sinn haben und senkrecht auf die Ebene sind, die sich also jedesmal in eine einzige, auf die Ebene senkrechte Kraft zusammensetzen lassen. Alle auf den Körper wirkende Kräfte müssen also immer mit diesen verschiedenen Widerstandskräften im Gleichgewichte sein, deren es jedesmal so viele geben wird, als Ebenen vorhanden sind. Sollen daher Kräfte einen gegen mehre Ebenen sich stützenden Körper im Gleichgewichte halten können, so müssen sie sich auf so viele Kräfte zurückführen lassen, als Ebenen vorhanden sind; diese Kräfte müssen normal auf die respectiven Ebenen sein, und jede von ihnen muß ins Innere des von den Berührungspuncten gebildeten Polygons fallen.

§. 196.

Stützt sich also ein Körper nur gegen zwei Ebenen, etwa in zwei Puncten, und wirkt nur eine einzige Kraft oder mehre Kräfte, die eine einzige Resultante haben, auf ihn, so muß diese Kraft oder Resultante sich in zwei andere Kräfte zerlegen lassen in Normalrichtungen auf die beiden Ebenen durch die Berührungspuncte. Die beiden Normalen müssen sich folglich in einem Puncte der Richtung der Druckkraft schneiden und in derselben Ebene mit ihr liegen. Außerdem muß diese Kraft in den Winkelraum der beiden Normalen fallen, welcher dem der beiden Ebenen entgegengesetzt ist, und ihre Wirkung muß gegen diesen Winkel gerichtet sein, damit die beiden Seitenkräfte in den Normalen den Körper gegen die Ebenen, also nach entgegengesetztem Sinne der Widerstandskräfte dieser Ebenen, treiben können.

§. 197.

Stützt sich der Körper in drei Puncten gegen drei verschiedene Ebenen, so muß die Druckkraft sich auf drei andere Kräfte zurückführen lassen, die nach den auf die Ebenen in den Berührungspuncten gezogenen Normalen gerichtet sind.

Daraus folgt jedoch nicht, daß die drei Normalen in demselben Puncte der Richtung der Druckkraft zusammenlaufen, und nicht einmal, daß sich zwei der vier Richtungen der Kräfte schneiden müssen; denn drei sich nicht schneidende Kräfte können eine einzige Resultante haben, und eine einzige Kraft kann nach drei Richtungen zerlegt werden, die weder sich selbst, noch die Richtung der Resultante schneiden (§. 75).

Anwendung der Theorie auf einige Beispiele.

§. 198.

In dem Gesagten ist die ganze Theorie des Gleichgewichts der Körper enthalten, die sich gegen Ebenen lehnen. Wir wollen davon einige einfache Anwendungen machen.

Es stütze sich (Fig. 63) ein Körper von beliebiger Form in beliebig vielen Puncten, oder mit einer begrenzten Grundfläche, gegen eine starre Ebene **LDK**, und es wirken zwei Kräfte **P** und **Q** auf ihn, die ihn auf der Ebene im Gleichgewichte erhalten.

Nach (§. 192) müssen **P** und **Q** eine einzige, auf die

Ebene normale Resultante N geben, ihre Richtungen also irgendwo, etwa in F, zusammenlaufen und in einer auf die Ebene LDK senkrechten Ebene liegen. Überdies muß die Richtung der Resultante die Ebene LDK in einem Puncte der Berührungsfläche des Körpers oder im Innern des von den Berührungspuncten gebildeten Polygons schneiden.

Wir nehmen an, alle diese Bedingungen wären erfüllt, und wollen das Verhältniß der beiden Kräfte P und Q, und des auf die Ebene ausgeübten Druckes N suchen.

Da die beiden Kräfte P und Q eine einzige, auf die Ebene normale Resultante geben, so müssen sie sich umgekehrt verhalten wie die Sinus ihrer Winkel PFN und QFN mit der aus F auf die Ebene gefällten Normale FN, weil nach (§. 36) die Seitenkräfte immer im umgekehrten Verhältnisse der Sinus der Winkel stehen, welche ihre Richtungen mit den Richtungen der Resultante einschließen; es ist daher

$$Q : P = \sin PFN : \sin QFN.$$

Für die Resultante ist überdies

$$P : N = \sin QFN : \sin PFQ.$$

Jede der drei Kräfte P, Q, N wird also durch den Sinus des von den Richtungen der beiden andern Kräfte gebildeten Winkels dargestellt.

Alle Aufgaben über das Verhältniß der drei Kräfte P, Q, N und über ihre Richtungen kommen also auf die Auflösung eines Dreiecks zurück, dessen drei Seiten die Größen der Kräfte P, Q, N, und dessen drei Winkel die gegenseitigen Neigungen ihrer Richtungen ausdrücken.

§. 199.

Stellt die Kraft P das Gewicht des Körpers dar, so ist seine Richtung FP vertical und geht durch den Schwerpunct des Körpers.

Zieht man die Horizontalebene LDH, welche die erste Ebene in LD schneidet: so ist die Ebene LDH, gegen welche sich der Körper lehnt, die sogenannte geneigte Ebene (das Planum inclinatum). Die Ebene der Kräfte P und Q ist einerseits senkrecht auf die geneigte Ebene, weil sie durch die Normale FN geht, andererseits senkrecht auf die Horizontalebene, weil sie durch die Verticale FP geht; sie schneidet demnach die beiden Ebenen in zwei geraden Linien AB und AC, welche beide senkrecht auf die Durchschnittslinien LD sind und den Winkel der beiden Ebenen oder den Neigungswinkel des Planum inclinatum gegen den Horizont zwischen sich einschließen.

Wir wollen die Horizontalebene einfach durch die Horizontallinie AC (Fig. 64), und die geneigte Ebene durch die gegen AC geneigte Linie AB darstellen. Von einem beliebigen Puncte B der Geraden AB fällen wir auf AC ein Perpendikel BC und bezeichnen in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC die Hypotenuse AB mit dem Namen der Länge der geneigten Ebene, die Kathete BC mit Höhe, und AC mit Basis derselben.

Da FP senkrecht auf AC, so ist Winkel PFN = Winkel BAC; statt der Proportion $Q : P = \sin PFN : \sin QFN$ hat man also

$$Q : P = \sin BAC : \sin QFN.$$

Ist die Kraft Q bloß ihrer Größe nach gegeben, so findet man aus dieser Proportion, worin nur $\sin QFN$ unbekannt ist, den Winkel, unter dem sie wirken muß, wenn sie P im Gleichgewichte halten soll. Da nun jedem Sinus zwei Winkel, welche die Supplemente von einander sind, zukommen, so kann die Kraft Q der Last P auf doppelte Weise das Gleichgewicht halten, indem sie entweder mit der Normale auf die geneigte Ebene den aus obiger Proportion sich ergebenden Winkel QFN oder den Winkel Q'FN einschließt, welcher das Supplement von QFN ist.

Kennt man den Winkel QFN, den die Kraft mit der Normale einschließt, so ergibt sich die Größe der Kraft Q aus eben dieser Proportion.

§. 200.

Soll die Kraft Q in Bezug auf die Last P den kleinsten Werth haben, so muß der Sinus des Winkels QFN seinen größten Werth haben, weil die Kraft immer im umgekehrten Verhältnisse zum Sinus dieses Winkels steht; der Winkel selbst muß also ein rechter sein. Dann ist die Kraft senkrecht auf die Normale FN oder parallel zur geneigten Ebene.

In diesem Falle ist der Winkel QFN = dem Winkel ACB (Fig. 68), und die obige Proportion wird $Q : P = \sin BAC : \sin ACB$. Im Dreieck ABC sind aber die Sinus der Winkel A und C den gegenüberliegenden Seiten BC und AB proportional; man hat also

$$Q : P = BC : AB.$$

Daraus folgt der Satz: i s t d i e K r a f t p a r a l l e l z u r g e n e i g t e n E b e n e, s o v e r h ä l t s i e s i c h z u d e m G e w i c h t e d e s v o n i h r i m G l e i c h g e w i c h t e g e h a l t e n e n K ö r p e r s w i e d i e H ö h e d e r g e n e i g t e n E b e n e z u r L ä n g e d e r s e l b e n.

§. 201.

Ist demnach ein gewichtiger Körper auf einer geneigten Ebene sich selbst überlassen, so gleitet er von ihr nur mit seiner im Verhältnisse der Höhe zur Länge der geneigten Ebene verminderten Gewichtskraft herab. Das so verminderte Gewicht heißt das r e l a t i v e G e w i c h t des Körpers, in Bezug auf das a b s o l u t e G e w i c h t desselben, wo er frei in der Verticale niederfallen kann. Wird also das absolute Gewicht eines Körpers durch die Länge der geneigten Ebene dargestellt, so ist die Höhe sein relatives Gewicht; oder wird das absolute Gewicht durch den Sinus des rechten Winkels oder durch die Einheit repräsentirt, so stellt der Sinus des Neigungswinkels der geneigten Ebene sein relatives Gewicht dar. Ist dieser Neigungswinkel Null, oder die Ebene horizontal, so wird das relative Gewicht Null, der Körper ruht also, wie gehörig; ist der Neigungswinkel gleich dem dritten Theile eines rechten Winkels, so ist das relative Gewicht gleich der Hälfte des absoluten; und ist endlich der Neigungswinkel selbst ein rechter, die Ebene also vertical, so fallen absolutes und relatives Gewicht zusammen.

Um im Allgemeinen die relativen Gewichte auf verschiedenen geneigten Ebenen zu vergleichen, hat man nur die Sinus ihrer Neigungswinkel zu vergleichen.

Gibt man zwei verschiedenen geneigten Ebenen (Fig. 66) dieselbe Höhe BC, aber verschiedene Längen, so verhalten sich die relativen Gewichte umgekehrt wie die Längen AB und BD, denn sie stehen im geraden Verhältnisse mit den Sinus der Neigungswinkel A und D, und diese verhalten sich im Dreiecke ABD wie die gegenüberstehenden Seiten BD und AB.

Hat man also auf den beiden geneigten Ebenen zwei gewichtige Körper M und N an einem über eine Rolle in B geschlagenen Seile mit einander dergestalt in Verbindung gesetzt, daß die von der Rolle abtretenden Theile des Seiles den respectiven Ebenen parallel sind: so können diese Körper nur dann im Gleichgewichte sein, wenn ihre Massen den Längen AB und BD der geneigten Ebenen, worauf sie ruhen, porportional sind.

§. 202.

Ist die Kraft Q (Fig. 67) horizontal gerichtet und also zur Basis AC der geneigten Ebene parallel, so ist der Winkel QFN dem Winkel ABC gleich; man hat also

$$Q : P = \sin BAC : \sin ABC$$

$$\text{oder } Q : P = BC : AC.$$

Ist also die Kraft horizontal, so verhält sie sich zur Last, welche sie auf der geneigten Ebene im Gleichgewichte halten soll, wie die Höhe zur Basis der geneigten Ebene.

§. 203.

Soll die Kraft gegen die Last den größten Werth haben, so muß der Winkel QFN Null sein. Die Kraft Q ist dann senkrecht auf die geneigte Ebene, und die Proportion

$$Q : R = \sin BAC : \sin QFN \text{ gibt } Q = \frac{P.\sin BAC}{0} = \infty.$$

Strenge genommen, gibt es also kein Größtes der Kraft, und der Ausdruck zeigt nur, daß sie, so groß sie auch sein mag, doch nie den gewichtigen Körper auf der geneigten Ebene am Hinabgleiten hindern kann, wenn sie senkrecht auf diese Ebene wirkt. In der Natur sehen wir freilich täglich das Gegentheil, allein hier haben auch die polirtesten Oberflächen eine Menge von Unebenheiten, die in einander greifen und den Körper am freien Fortgleiten hindern. Diese Eigenschaft der Körper und den daraus entspringenden Widerstand, den man Kraft der Reibung nennt, haben wir in unserer Theorie nicht berücksichtigt.

§. 204.

Liegt ein gewichtiger Körper auf mehren geneigten Ebenen zugleich, so betrachtet man sein Gewicht als eine im Schwerpuncte des Körpers angebrachte Verticalkraft, und findet dann die Bedingungen des Gleichgewichts nach dem, was in (§. 195) gesagt ist, sowie auch die respectiven Druckkräfte auf die Unterstützungspuncte, wenn diese sonst nicht unbestimmt sind.

Im einfachsten Falle, wo der Körper in zwei Puncten I und O (Fig. 68) auf zwei geneigten Ebenen HI und HO liegt, müssen nach (§. 196) die beiden Normalen IA und OA auf diese Ebenen in einem Puncte A der Verticale AP zusammenlaufen, die durch den Schwerpunct G des Körpers geht und die Richtung seines Gewichts angibt. Da überdies das Gewicht P des Körpers in zwei andere Kräfte nach diesen Normalen zerlegbar sein muß, so müssen beide in derselben Ebene mit GP, also in derselben Verticalebene liegen.

Diese Bedingungen reichen zum Gleichgewichte hin. Nimmt man auf der Richtung des Gewichtes einen Theil AD, welcher die Größe des Gewichts repräsentirt, und vollendet man dann mit AD als Diagonale, nach den Richtungen AI und AO, das Parallelogramm ABCD, so ist P in zwei andere Kräfte zerlegt, die durch die Seiten AB und AC des Parallelogramms dargestellt sind. Diese beiden Kräfte werden respective von den geneigten Ebenen vernichtet und sind zugleich die Werthe der einzelnen Druckkräfte.

Die Ebene der beiden Normalen IA und OA ist zu gleicher Zeit senkrecht auf die beiden geneigten Ebenen, also senkrecht auf ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt; sie ist aber auch vertical, weil sie durch die Verticale GP geht; der gemeinschaftliche Durchschnitt der beiden geneigten Ebenen muß also senkrecht auf eine Verticalebene sein und ist mithin horizontal. Ein gewichtiger Körper kann daher zwischen zwei geneigten Ebenen nicht im Gleichgewichte sein, wenn ihre Durchschnittslinie nicht horizontal ist; ein Satz, der an sich evident zu sein scheint.

Die Schraube.

§. 205.

Die **Schraube** ist eine Maschine, die sich auf den Hebel und die geneigte Ebene zugleich bezieht. Man betrachtet an ihr im Allgemeinen das Gleichgewicht eines Körpers, der eine doppelte Bewegung anzunehmen im Stande ist, indem er sich um eine feste Axe dreht und längs dieser Axe gleichförmig auf einer geneigten Ebene hinabgleitet.

Um jedoch die Einrichtung dieser Maschine besser beleuchten zu können, wollen wir zuvor einen geraden Cylinder ABCD (Fig. 68) betrachten, der auf eine Ebene abgewickelt werden soll. Die abgewickelte Fläche ist ein Rectangel BEMC, dessen Grundlinie BE der Länge des Cylinderumfanges gleich ist und durch $2\pi r$ ausgedrückt werden kann, wenn r den Halbmesser des Cylinders, und π das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser bezeichnet.

Man theile die Seite BC in lauter gleiche Theile BR, RQ, QP....., mache $EG = BR$, $GH = EG = HK = KL$ u. s. w. und ziehe die Geraden BG, RH, QK......

Wickelt man jetzt das Rectangel BEMC wieder auf den Cylinder, so bilden die Geraden BG, RH, QK..... auf der Oberfläche des Cylinders eine continuirliche Curve, welche man **Schraubenlinie** nennt; die erste Gerade BG bildet einen Theil der Schraubenlinie, der in B anfängt, in R aufhört, wo die Gerade RH die Schraubenlinie fortsetzt u. s. w. Jeder solcher Theil der Schraubenlinie, dessen beiden Enden in derselben Generatrix endigen, und der so einen ganzen Umgang um den Cylinder macht, heißt eine **Schraubenwindung**; der Zwischenraum zwischen zwei benachbarten Windungen, auf der Länge der Generatrix gemessen, der zwischen allen Windungen sich gleich bleibt, heißt **Schraubenweite**.

Da die Schraubenlinie bei Abwickelung des Cylinders eine Reihenfolge von parallelen, geraden Linien ist, so besitzt sie die charakteristische Eigenschaft, gegen die verschiedenen Generatricen, die sie auf der Oberfläche des Cylinders schneidet, gleich geneigt zu sein; ist also der Cylinder vertical, so hat sie gegen den Horizont in allen ihren Puncten gleiche Neigung, und ein Punct a, der auf der Schraubenlinie liegt, und der als auf der Tangente an diesen Punct der Curve liegend betrachtet werden kann, verhält sich ganz so, als ruhte er in a′ auf einer geneigten Ebene QHK, deren Basis $QH = 2\pi r$, und deren Höhe HK gleich der Schraubenweite ist, die wir mit h bezeichnen wollen.

§. 206.

Wird also nun der Punct a mit einer Verticalkraft p gegen die Schraubenlinie gedrückt, und zugleich von einer tangential auf den Cylinder wirkenden Horizontalkraft f am Hinabgleiten auf der Schraubenlinie gehindert, so hat man (§. 202)

$$f : p = HK : QH,$$

$$\text{oder } f : p = h : 2\pi r.$$

Man ziehe durch a eine Horizontallinie ao, welche in o die als fest angenommene Axe des Cylinders schneidet, verlängere sie unbestimmt und betrachte sie als einen unbiegsamen, um den festen Punct o beweglichen Hebel.

Statt unmittelbar im Puncte a eine Horizontalkraft f zum Zurückhalten des Punctes auf der Schraubenlinie anzubringen, kann man auch eine andere Parallelkraft q in irgend einem Puncte des Hebels bo nehmen, und diese Kraft wird auf den Punct a denselben Druck hervorbringen als die Kraft f, wenn sie zu ihr im umgekehrten Verhältnisse der Hebelarme bo und ao steht, oder wenn, $bo = R$ gesetzt und ao durch seinen Werth r bezeichnet,

$$q:f = r:R.$$

Vorhin aber war $\quad f:p = h:2\pi r;$

man hat also, der Reihe nach multiplicirt und gehoben,

$$q:p = h:2\pi R,$$

d. h., die Horizontalkraft q wird sich zur Verticalkraft p, welche den Punct a gegen die Schraubenlinie drückt, verhalten, wie die Schraubenweite zu dem Umfange des Kreises, den die Kraft q um die Axe des Cylinders zu beschreiben strebt.

Zu bemerken ist hier, daß der Halbmesser r des Cylinders oder der Abstand der Schraubenlinie von der Axe aus der Proportion verschwunden ist. Es wird also unter der Kraft q und der Last p immer dasselbe Verhältniß Statt finden, wie auch der Durchmesser des Cylinders, worauf die Schraubenlinie beschrieben ist, beschaffen sein mag, wenn nur die Schraubenweite dieselbe bleibt.

Übrigens übersehe man nicht, daß wir nur deshalb einen verticalen Cylinder gewählt haben, um uns bestimmter und kürzer ausdrücken zu können; daß aber das Gesagte von einer Verticalkraft p und einer Horizontalkraft q auch dann gilt, wenn man allgemein eine zur Axe des Cylinders parallele Last und eine Kraft wählt, die in einer auf die Axe senkrechten Ebene in dem Abstande R von der Axe wirkt.

§. 207.

Darnach werden sich nun Definition und Bedingungen des Gleichgewichts für die Schraube leicht aufstellen lassen.

Die Schraube (Fig. 70 und 71) (Schraubenspindel) ist ein gerader Cylinder, umwunden von einem vorspringenden Faden, welcher durch die Ebene eines Dreiecks oder eines Parallelogramms oder irgend einer beliebigen Figur gebildet wird, die, mit ihrer Basis auf eine Generatrix gestützt, um die Axe des Cylinders herumgeht, wobei sie längs einer auf dessen Oberfläche gezogenen Schraubenlinie niedersteigt. Alle Puncte des Schraubenfadens können demzufolge als Puncte von Schraubenlinien betrachtet werden, welche auf Cylindern von derselben Axe, aber von verschiedenen Halbmessern beschrieben sind. Alle diese Schraubenlinien haben offenbar dieselbe Weite, und diese ist die Schraubenweite.

Die Schraubenmutter entsteht auf dieselbe Weise. Denken wir uns einen Körper von beliebiger Form, der von dem Cylinder durchbohrt ist: so wird das Dreieck oder Parallelogramm, welches auf dem Cylinder den Schraubenfaden erzeugt, in diesem Körper einen Einschnitt oder eine Furche erzeugen, die dem Schraubenfaden völlig gleich ist, und die dieser genau ausfüllen muß. Dieses Stück kann man als die Form der Schraubenspindel ansehen; es heißt Schraubenmutter.

Ist nun eines von den beiden Stücken fest, so ist das andere dergestalt mit dem festen Stücke verbunden, daß es sich nur um die Axe der Spindel drehen und zugleich an dem festen Stücke wie auf einer geneigten Ebene niedergehen kann. Es gibt deshalb für die Kräfte, die sich an dem beweglichen Stücke das Gleichgewicht halten sollen, besondere Beziehungen, die von seiner Verbindung mit dem festen Stücke abhangen, und welche die Bedingungen des Gleichgewichts für die Schraube geben.

In der Regel läßt man nur zwei Kräfte auf das bewegliche Stück wirken, eine P parallel zur Axe, welche dasselbe niedertreibt und um die Axe zu drehen bemüht ist, eine andere Q in einer auf die Axe senkrechten Ebene, welche an einem Hebelarme dasselbe nach entgegengesetztem Sinne in die Höhe treibt. Um uns bestimmt ausdrücken zu können, mag die Schraubenmutter (Fig. 70) beweglich, und die Spindel fest sein; das Verhältniß der Kraft zur Last bleibt indessen ungeändert, wenn die Spindel beweglich, und die Mutter fest ist.

Ruhte die Mutter nur in einem einzigen Puncte auf dem Faden der Spindel, und nennt man h die Schraubenweite, R den Hebelarm oder den Abstand der Kraft von der Axe, so ist nach dem Obigen

$$Q : P = h : 2\pi R.$$

Mag sich nun die Mutter in beliebig vielen Puncten gegen den Faden der Spindel lehnen, so kann man sich ihren Widerstand P immer in eben so viele parallele Kräfte p, p′, p″, p‴..... in diesen verschiedenen Puncten zerlegt denken, und die Kraft Q in eben so viele Kräfte q, q′, q″, q‴..... theilen, von denen jede der entsprechenden Kraft von p, p′, p″..... das Gleichgewicht hält, und man hat dann immer

$$q : p = h : 2\pi R,$$
$$q' : p' = h : 2\pi R,$$
$$q'' : p'' = h : 2\pi R,$$
u. s. w.

folglich auch $q + q' + q''..... : p + p' + p''..... = h : 2\pi R$,

oder $Q : P = h : 2\pi R.$

Man hat also den Satz: zum Gleichgewichte der Schraube muß die Kraft, welche die Mutter zu drehen bemüht ist, sich zur Last, welche in der Richtung der Axe drückt, verhalten, wie die Schraubenweite zum Umfange des Kreises, den die Kraft zu beschreiben strebt.

Die Kraft ist also zum Gleichgewichthalten der Last oder zum Zusammendrücken in der Richtung der Schraubenaxe um so mehr im Vortheile, je größer ihre Entfernung von der Axe, und je kleiner die Schraubenweite ist.

Der Keil.

§. 208.

Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma AF (Fig. 72), welches man mit einer seiner Kanten zwischen zwei Widerstand leistende Körper schiebt, damit es seitwärts auf sie wirke und sie aus einander zu treiben suche.

Die Kante EF, womit der Keil eindringt, heißt Schneide, die beiden an ihr liegenden Seitenflächen ADFE und BCFE heißen Seiten, und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche ABCD Rücken des Keils.

Auf den Rücken des Keils übt man einen Stoß aus mittelst eines Hammers oder eines beliebigen andern Körpers. Wie auch die Richtung dieses Stoßes beschaffen sein mag, so kann man sich ihre Wirkung sofort in zwei andere Kräfte zerlegt denken, von denen die eine senkrecht auf den Rücken des Keils, die andere parallel zu diesem ist. Die erste behält ihre ganze Wirkung auf den Keil, die zweite wirkt nicht auf ihn, sondern strebt nur den Hammer auf dem Rücken des Keils fortzuschieben.

Wir nehmen deshalb an, die Kraft wirke ursprünglich senkrecht auf den Rücken des Keils, und bestimmen daraus einfach die Wirkungen, welche die beiden Hindernisse davon senkrecht auf die Seiten des Keils zu erleiden haben.

Man lege durch die Richtung der Kraft P (Fig. 73) senkrecht auf die Kanten des Keils eine Schnittfläche MNO, so repräsentirten die Gerade MN den Rücken, und die Geraden MO und NO die beiden Seiten des Keils. Von einem auf der Richtung der Kraft angenommenen Puncte A ziehe man zwei Perpendikel AB und AC auf die Seiten MO und NO und vollende aus dem die Kraft P der Größe und Richtung nach repräsentirenden Stücke AD als Diagonale das Parallelogramm ABDC.

Die durch AD dargestellte Kraft P ist auf diese Weise in zwei andere Kräfte Q und R zerlegt, welche durch AB und AC repräsentirt werden und die senkrecht auf die Seiten MO und NO ausgeübten Wirkungen angeben.

Man hat also $P:Q:R = AD:AB:AC$, oder wenn man BD statt AC setzt,

$$P:Q:R = AD:AB:BD.$$

Die drei Kräfte verhalten sich wie die drei Seiten des Dreiecks ABD. Da dies Dreieck nun dem Dreiecke MNO ähnlich ist, weil die drei Seiten AD, AB, BD respective senkrecht auf die drei Seiten MN, MO, NO sind: so hat man

$$P:Q:R = MN:MO:NO.$$

Daraus folgt der Satz: wird die Kraft durch die Länge des Keilrückens dargestellt, so geben die Seiten des Keils die Kräfte, die aus ihr auf diese Seiten resultiren.

Ist das Dreieck MNO gleichschenklig, so sind Q und R gleich, und die Kraft P verhält sich zu jeder von ihnen wie der Rücken des Keils zu einer der Seiten, die man hier Länge des Keils nennen kann.

Daraus erhellt, daß bei gleichen Kräften die Wirkung des Keils um so bedeutender ist, je kleiner der Rücken im Verhältnisse zur Länge des Keils ist.

Von einigen zusammengesetzten Maschinen.

§. 209.

Bisher haben wir immer nur einen einzelnen Körper betrachtet, der in seinen Bewegungen durch verschiedene Hindernisse bedingt ist und die sogenannten einfachen Maschinen bildet. Wir wollen gegenwärtig eine Vereinigung mehrer einfacher Maschinen betrachten, die mittelst ihrer gegenseitigen Verbindung eine auf die andere zurückwirken, und die man zusammengesetzte Maschinen nennt.

Wirken auf eine zusammengesetzte Maschine nur zwei Kräfte, so ist klar, daß die einfache Maschine, auf welche unmittelbar die eine der Kräfte wirkt, diese Wirkung der zweiten einfachen Maschine, womit sie verbunden ist, nach den Gesetzen des Gleichgewichts mittheilt; diese wieder theilt sie der dritten Maschine mit, und so fort bis zur letzten einfachen Maschine, welche sie der zweiten Kraft oder Last, die sie zu überwinden hat, mittheilt. Auf diese Weise läßt sich denn immer das Verhältniß von Kraft zur Last durch eine Reihe von Verhältnissen, die sich aus den Gesetzen des Gleichgewichts der Zwischenmaschinen ergeben, leicht bestimmen, wie wir an einigen sehr einfachen Beispielen zeigen wollen.

Wir müssen jedoch bemerken, daß die folgenden Aufgaben in natürlicher Verbindung mit dem allgemeinsten Principe der Statik stehen, nämlich einen Theil von der weit ausgedehnten Theorie bilden, worin man die Gesetze des Gleichgewichts für Systeme sucht, deren Figur nach bestimmten gegebenen Bedingungen veränderlich ist. Die beiden dieser Theorie zur Basis dienenden Grundsätze sind die folgenden:

1) Ist ein System von Puncten im Gleichgewichte, so muß jeder Punct für sich im Gleichgewichte sein, vermöge der auf ihn unmittelbar wirkenden Kräfte und vermöge der Widerstände und Gegenwirkungen, die er von den andern Puncten des Systems erleidet.

2) Zwei Puncte können auf einander nur in der geraden Linie wirken, welche sie verbindet, und die Wirkung ist der Gegenwirkung immer gleich und entgegengesetzt.

Mit diesen beiden Grundsätzen und mit den bekannten Bedingungen des Gleichgewichts ist man im Stande, die Bedingungen des Gleichgewichts eines beliebigen Systems von Körpern aufzustellen, wenn man nur die aus ihrer gegenseitigen Verbindung entspringenden Widerstände zu bestimmen weiß; denn sind sie bestimmt, so braucht man sie nur mit den in der Aufgabe unmittelbar gegebenen Kräften zu verbinden, und die Bedingungen des Gleichgewichts für jeden Körper sind dann dieselben, als wäre er völlig frei im Raume.

Obgleich wir hier, ohne die Grenzen dieses Werkes zu überschreiten, den Gegenstand nicht in seiner ganzen Allgemeinheit betrachten können, so wollen wir dennoch die Bedingungen des Gleichgewichts für einige häufig in den Künsten angewendete veränderliche Systeme aufstellen, die man gewöhnlich in den Elementen der Statik betrachtet, weil bei ihnen die Gegenwirkungen der einzelnen Körper auf einander sehr leicht zu bestimmen sind und nur eine Kenntniß der Zusammensetzung der Kräfte nebst den beiden eben aufgestellten Grundsätzen erfordern.

Die Seile.

§. 210.

Wir wollen zuerst ein Seilpolygon, d. h. eine Vereinigung von Puncten, die durch vollkommen biegsame und undehnbare Seile verbunden sind, betrachten.

Wirken drei Kräfte P, Q, R (Fig. 74) auf einen Punct A in den Axen dreier Seile AP, AQ, AR, und soll Gleichgewicht bestehen, so muß bekanntlich jede der drei Kräfte der Resultante der beiden andern gleich und entgegengesetzt sein.

1) müssen also die Axen der drei Seile in derselben Ebene liegen, und 2) die Kräfte sich so zu einander verhalten, daß jede durch den Sinus des Winkels dargestellt werden kann, den die Richtungen der beiden andern Kräfte mit einander bilden. Zum Gleichgewichte muß also sein

$$P : Q : R = \sin QAR : \sin PAR : \sin PAQ.$$

§. 211.

Sind die Endpuncte der Seile AQ und AR fest, so geben die Werthe von Q und R aus der eben aufgestellten Proportion die Wirkungen, welche diese festen Puncte von der Kraft P erfahren, oder die Zugkräfte der Seile AQ und AR an.

Diese Zugkräfte werden also um so größer, je stumpfer der Winkel QAR ist, und unendlich groß, wenn QAR gleich zwei Rechten wird.

Ein in gerader Linie ausgespanntes, in zwei Puncten befestigtes Seil muß demzufolge von der kleinsten transversal auf dasselbe wirkenden Kraft zerrissen werden, falls es sich nicht ausdehnen kann, oder seiner Länge nach einen unbegrenzten Widerstand leistet.

§. 212.

Die vorhin für das Gleichgewicht der drei Kräfte P, Q, R aufgestellten Bedingungen setzen voraus, daß der Punct A an jedem der Seile unveränderlich fest sei, oder daß der die Seile verbindende Knoten sich nicht verschieben könne. Kann sich indeß der Punct A auf dem Seile RAQ (Fig. 75) verschieben, z. B. an einem auf das Seil gesteckten unendlich kleinen Ringe: dann reichen die vorigen Bedingungen nicht mehr hin, sondern es muß nun noch überdies die Richtung der Kraft P den von den beiden Theilen des Seils gebildeten Winkel halbiren.

Denn besteht Gleichgewicht, und befestigt man zwei beliebige Puncte F und F′ in den Seilen: so ist der Punct A offenbar in demselben Falle, als könnte er sich in einer Ellipse, deren Brennpuncte F und F′, und deren Radien Vectoren AF und AF′ sind, frei bewegen. Damit also der Punct A durch die Kraft P an dieser Curve im Gleichgewichte sei, muß die Kraft auf die Tangente an diesen Punct der Ellipse senkrecht gerichtet sein (§. 190) und somit den von den Vectoren gebildeten Winkel FAF′ halbiren.

Bei einem beweglichen Knoten müssen auf diese Weise die beiden Theile des Seiles, auf denen der Knoten verschiebbar ist, gleich stark gespannt sein.

§. 213.

Zugleich erhellt, daß, wenn der Punct A (der Ring) fest ist, die beiden an dem durch den Ring gehenden Seile QAR wirkenden Kräfte Q und R für den Zustand des Gleichgewichts gleich sein müssen, und daß der von den beiden Kräften auf den Punct A ausgeübte Druck nach einer Richtung gehen müsse, welche den von den beiden Theilen des Seiles gebildeten Winkel halbirt.

Zur Bestimmung des Verhältnisses des Druckes P zum Zuge des Seiles Q hat man, wenn α der halbe Winkel QAR ist,

$$P:Q = \sin 2\alpha : \sin\alpha,$$

oder $P:Q = 2\cos\alpha : 1.$

Die auf den Punct A ausgeübte Druckkraft ist also gleich dem Producte aus der Zugkraft des Seiles in den doppelten Cosinus des halben Winkels QAR.

§. 214.

Wir wollen nun mehre Puncte A, B, C, D (Fig. 76) betrachten, die durch Seile AB, BC, CD mit einander verbunden sind und auf die Kräfte N, P, Q, R, S, T mittelst anderer Seile, jedoch dergestalt wirken, daß jeder Knotenpunct A, B, C, D der Vereinigungspunct von nur drei Kräften ist.

Ist das ganze System im Gleichgewichte, so muß jeder Punct für sich im Gleichgewichte sein, vermöge der auf ihn wirkenden Kräfte und der Zugkräfte der benachbarten Seile. Der Punct A z. B., der unmittelbar nur mit dem Puncte B verbunden ist, muß durch die Kräfte N und P und durch die Zugkraft des Seiles AB im Gleichgewichte sein, denn die andern Puncte C, D können nur vermöge des Seiles AB auf ihn zurückwirken.

Die drei Seile AN, AP, AB müssen also in derselben

Ebene liegen; und ist **X** die Spannkraft des Seiles AB, so muß

$$N : P = \sin PAB : \sin NAB, \text{ und}$$

$$P : X = \sin NAB : \sin NAP \text{ sein.}$$

Auf gleiche Weise muß der Punct **B** von der Kraft **Q** und den Spannkräften der Seile **BA** und **BC** im Gleichgewichte gehalten werden, denn die Wirkung des Punctes **A** auf den Punct **B** ist der Wirkung des Punctes **B** auf den Punct **A** völlig gleich und entgegengesetzt. Diese Spannkraft war **X**; es sei **Y** die Spannkraft des Seiles **BC**, so hat man

$$X : Q = \sin QBC : \sin ABC;$$

$$Q : Y = \sin ABC : \sin QBA.$$

Auf dieselbe Weise wird man für den Punct **C** erhalten

$$Y : R = \sin RCD : \sin BCD,$$

$$R : Z = \sin BCD : \sin BCR.$$

Eben so wird man für den Punct **D** zwei Proportionen finden, und so fort für alle etwa noch folgenden Puncte.

Multiplicirt man der Reihe nach eine entsprechende Anzahl dieser Proportionen mit einander, so findet man das Verhältniß von einer dieser Kräfte zu irgend einer andern Kraft oder Spannung; multiplicirt man z. B. die drei erstern, so hat man das Verhältniß von **N** zu **Q**; die vier ersten, von **N** zu der Spannkraft **Y** u. s. w.

§. 215.

Halbiren die verlängerten Richtungen der Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** die respectiven Winkel **NAB**, **ABC**, **BCD**, **CDT** des Seilpolygons, so werden die Seile **AN**, **AB**, **BC**, **CT**, **DT** gleich stark gespannt sein, weil man dann aus den obigen Proportionen findet

$$N = X, \quad X = Y, \quad Y = Z, \quad Z = T$$

Sind überdies 2α, 2β, 2γ, 2δ die Winkel des Polygons, so ergibt sich aus denselben Proportionen

$$P:Q:R:S = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : \cos\delta.$$

Es sind also die in den Winkelpuncten des Polygons wirkenden Kräfte den Cosinus dieser halben Winkel proportional.

Substituirt man mithin für die Kräfte P, Q, R, S die festen Puncte A, B, C, D, über welche das Seil NABCDT fortgeht: so werden erstens die beiden an den Enden des Seiles ziehenden Kräfte N und T gleich sein, und zweitens wird das Seil auf jeden Punct im Verhältnisse des Cosinus der Hälfte des in diesem Puncte vom Seile gebildeten Winkels drücken, weil jeder der festen Puncte A, B, C, D die Stelle einer Kraft vertritt, deren Richtung eben diesen Winkel halbirt (§. 213).

§. 216.

Sind die beiden an einander stoßenden Seiten AB und BC gleich, so ist der Cosinus des zwischen ihnen enthaltenen Winkels durch das Verhältniß einer der Seiten zum Durchmesser des durch die drei Puncte A, B, C gehenden Kreises ausgedrückt. Sind also alle Seiten eines Seilpolygons gleich, so werden sich die Kräfte P, Q, R, S umgekehrt zu einander verhalten, wie die Durchmesser der verschiedenen Kreise, von denen jeder durch die drei benachbarten Winkelpuncte des Polygons geht.

Betrachtet man also eine Curve als ein Polygon von unendlich vielen gleichen Seiten, so wird jeder der Kreise ein Krümmungskreis an einen Punct der Curve.

Eine in sich selbst zurückkehrende oder an zwei Enden befestigte Seilcurve, an der in den äquidistanten Puncten unendlich viele Normalkräfte wirken und sich im Gleichgewichte halten, ist folglich durchaus gleichförmig gespannt, und jede auf die Curve normale Kraft steht im umgekehrten Verhältnisse zum Krümmungshalbmesser auf ihren Angriffspunct.

Ein einfaches Beispiel zu diesem Gleichgewichte gibt ein

Faden, der von zwei Kräften auf den Umfang einer festen Curve gespannt wird, weil hier jeder Punct der festen Curve die Stelle einer Kraft vertritt, deren Richtung in die Normale der Curve fällt. Ist der Faden also im Gleichgewichte, so ist die Spannung überall dieselbe, und jeder Punct der festen Curve erleidet einen Druck nach der Normale im umgekehrten Verhältnisse zum Krümmungshalbmesser.

§. 217.

Ist das Seilpolygon **NABCDT** durch die Kräfte **N**, **P**, **Q**, **R**, **S**, **T** im Gleichgewichte, und denkt man sich nun die Figur fest, so daß die Puncte **A**, **B**, **C**, **D** ihre gegenseitigen Abstände nicht mehr ändern können: so wird offenbar auch noch Gleichgewicht bestehen; weil aber jetzt die Kräfte **N**, **P**, **Q**, **R**, **S**, **T** an einem Systeme von unveränderlicher Form im Gleichgewichte sind, so ist jede dieser Kräfte der Resultante aller übrigen gleich und entgegengesetzt; es haben also diese übrigen Kräfte eine Resultante. Da nun aber diese Resultante ganz dieselbe ist, als wenn sich alle Seitenkräfte in irgend einem Puncte ihrer Richtung parallel zu sich selbst vereinigt hätten, so hat man den Satz: *jedes Seil wird von der auf dasselbe wirkenden Kraft so gespannt, als es gespannt sein würde von der Resultante aller übrigen Kräfte, die man parallel zu sich selbst auf dasselbe transponirt hätte.*

§. 218.

Liegen die beiden äußersten Seile **AN** und **DT** in derselben Ebene, so haben die Kräfte **N** und **T** eine Resultante, und diese muß nach dem eben Gesagten der Resultante **V** aller übrigen Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** gleich und entgegengesetzt sein, als wäre das Polygon von unveränderlicher Form. Die in den Winkelpuncten des Polygons angebrachten Kräfte P, Q, R, S müssen also eine Resultante haben, die durch den Schnittpunct O der beiden verlängerten äußersten Seile geht. Sind also die Enden N und T dieser Seile fest, so erhält man sofort die Wirkungen auf diese beiden Puncte oder die Spannkräfte der Seile AN und DT, wenn man im Puncte O die Resultante V in zwei Kräfte N und T nach den Richtungen der Seile zerlegt.

Eben so findet man die Spannkräfte von zwei beliebigen, in derselben Ebene liegenden Seilen, wenn man die Resultante aus den auf die Zwischenknoten wirkenden Kräften nach den Richtungen dieser beiden Seile in dem Puncte, wo sie einander schneiden, zerlegt, weil, wenn das Seilpolygon im Gleichgewichte ist, auch jeder beliebige Theil desselben für sich im Gleichgewichte sein muß, vermöge der auf den Theil wirkenden Kräfte und der Spannkräfte seiner beiden äußersten Seile.

§. 219.

Haben alle Kräfte P, Q, R, S parallele Richtungen (Fig. 77), so gelten für die Kräfte und Spannungen der Seile dieselben Beziehungen wie vorhin (§. 214); allein es bedarf jetzt zum Gleichgewichte noch einer Bedingung mehr, es müssen nämlich alle Kräfte P, Q, R, S und alle Polygonseiten in derselben Ebene liegen, weil um jeden Knoten die Seile in derselben Ebene liegen müssen (§. 210), und weil, wenn das Seil BQ parallel zu AP ist, die Ebene PAB der drei ersten Seile zugleich die Ebene ABQ der drei folgenden Seile ist u. s. w.

Unter dieser Voraussetzung ist $\sin PAB = \sin QBA = \sin QBC = \sin RCB \ldots$; die Proportionen (§. 214) zeigen folglich, daß die allmäligen Spannungen N, X, Y, Z, T im umgekehrten Verhältnisse zu den Sinus der Winkel der Seiten mit der Richtung der Parallelkräfte P, Q, R, S stehen, und daß auf diese Weise jede Spannkraft durch die Secante ihres Neigungswinkels zu einem Perpendikel auf die Kräfte repräsentirt wird.

Man könnte diesen Satz, wie in (§. 218), auch aus der unmittelbaren Vergleichung der Spannungen zweier beliebigen Seiten ableiten, die immer in derselben Ebene liegen müssen.

Um jedoch bequemere und einfachere Ausdrücke zu erhalten, sollen alle Kräfte auf das Polygon vertical wirken, und eine von den Seiten des Polygons horizontal sein.

Will man nun die Spannung t einer beliebigen Seite mit der Spannung a der horizontalen Seite, von der man ausgeht, vergleichen, so denke man sich diese beiden Seiten verlängert, bis sie sich schneiden, und in diesem Puncte eine Verticalkraft V angebracht, welche gleich ist der Summe der auf die Zwischenknoten wirkenden Kräfte und die beiden Spannkräfte a und t im Gleichgewichte hält.

Nennt man dann φ den Neigungswinkel der Spannkraft t gegen die Horizontale a, so ist

$$t:a = 1:\cos\varphi$$

$$\text{oder} \quad t = a\sec\varphi,$$

d. h., beim Gleichgewichte eines Seilpolygons, worauf Verticalkräfte wirken, ist die Spannung jeder Seite der Secante des Neigungswinkels dieser Seite gegen den Horizont proportional.

Ferner hat man

$$t:V = 1:\sin\varphi,$$

in welcher Proportion die Spannung einer beliebigen Seite durch den Neigungswinkel dieser Seite gegen die Horizontalseite und durch die Summe der Parallelkräfte zwischen diesen beiden Seiten ausgedrückt ist.

Endlich erhält man als eine Folge aus den beiden Proportionen

$$V : a = \sin\varphi : \cos\varphi,$$

$$\text{oder} \quad V = a \tang\varphi;$$

woraus sich folgender Satz in Bezug auf die Figur ergibt, die das Polygon durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte annimmt: die Tangente des Neigungswinkels jeder Seite gegen den Horizont ist der Summe der am Umfange des Polygons wirkenden Kräfte, von der tiefsten Seite an bis zu der betrachteten, proportional.

Von der Kettenlinie.

§. 220.

Ein gewichtiges Seil läßt sich als ein Faden betrachten, an dem, auf seine ganze Länge vertheilt, unendlich viele kleine Gewichte wirken, oder als ein Faden, der in allen seinen Puncten kleine Verticalkräfte, mithin Parallelkräfte hat. Wird also dies Seil in zwei festen Puncten S und T (Fig. 78) gehalten, so kann es nicht im Gleichgewichte sein, wenn es nicht gänzlich in eine Verticalebene fällt. Es bildet dann ein Seilpolygon von unendlich vielen Seiten, oder vielmehr eine continuirliche Curve, welche Kettenlinie heißt.

Um die Wirkungen zu finden, welche das Seil auf die beiden es festhaltenden Puncte S und T ausübt, ziehe man in diesen Puncten zwei Tangenten SO und TO an die Curve, welche gleichsam die Verlängerungen der äußersten Seiten des Seilpolygons sind, bringe dann in O eine Kraft gleich der Resultante aller auf das Seil wirkenden Kräfte, also gleich dem Totalgewichte des Seiles, an und zerlege sie nach den Richtungen der Tangenten OS und OT in zwei andere Kräfte, so geben diese die respectiven Belastungen der beiden Aufhängepuncte (§. 218).

Eben so findet man die Spannung des Seiles an einem beliebigen Puncte, wenn man sich diesen fest denkt und die Belastung auf ihn von dem Theile des Seiles, das unter ihm im Gleichgewichte ist, bestimmt.

Ist t die Spannkraft in einem beliebigen Puncte M des Seiles, a die Spannkraft im tiefsten Puncte B, V das Gewicht des Curvenbogens s zwischen diesen Puncten, und φ der Winkel der Tangente an den obersten Punct des Bogens s mit dem Horizonte: so hat man unter diesen vier Größen dieselben Gleichungen wie (§. 219).

Aus der ersten dieser Gleichungen $t = a \sec \varphi$ erhellt, daß für ein im Gleichgewichte befindliches gewichtiges Seil die Spannkraft in einem beliebigen Puncte der Secante des Neigungswinkels der Curve gegen den Horizont proportional ist.

Aus der zweiten Gleichung $V = t \sin \varphi$ geht hervor, daß die Spannkraft im Endpuncte eines beliebigen Bogens der Curve gleich ist dem Gewichte dieses Bogens, dividirt durch den Sinus des Neigungswinkels der Curve in diesem Puncte gegen den Horizont.

Man übersehe nicht, daß diese Gleichungen immer Statt finden, wie ungleichförmig auch das gewichtige Seil sein mag.

Ist das Seil gleichförmig, so läßt sich das Gewicht V des Bogens s durch die Länge dieses Bogens ausdrücken, und die dritte jener Gleichungen wird dann $s = a \operatorname{tang} \varphi$, womit man eine einfache Gleichung der Kettenlinie zwischen den Coordinaten s und φ hat.

Die Kettenlinie ist also eine Curve, bei der die Tangente ihres Neigungswinkels gegen eine horizontale Axe im geraden Verhältnisse mit der Länge des Curvenbogens, vom tiefsten Puncte an gerechnet, steht.

Die Curve hat also rechts und links der durch den Anfangspunct gehenden Verticalaxe zwei völlig gleiche Arme, die sich wie die Arme der Parabel ins Unendliche ausdehnen.

§. 221.

Was hier von einem gewichtigen Seile oder von einem Systeme kleiner gewichtiger Körper, die durch einen unausdehnbaren Faden verbunden sind, gesagt worden ist, läßt sich auch auf mehre kleine Kugeln anwenden, die sich eine gegen die andere lehnen und gewölbartig neben einander erhalten. Sie müssen dann die Figur einer umgekehrten Kettenlinie annehmen; denn sind alle diese wechselseitig für einander undurchdringlichen Kugeln vermöge ihres Gewichts oder auf sie wirkender Verticalkräfte im Gleichgewichte, so müssen sie auch im Gleichgewichte bleiben, wenn diese Kräfte alle nach entgegengesetztem Sinne zu wirken anfangen, und man die Kugeln zwei und zwei durch einen undehnbaren Faden verbindet; dann muß aber der Faden eine umgekehrte Kettenlinie bilden, die Kugeln haben also auch im ersten Falle diese Figur.

Der Flaschenzug.

§. 222.

Man hat (Fig. 79) ein System beweglicher Rollen A, A′, A″. Die erste A trägt an ihrer Zwinge ein Gewicht **P**, und um sie ist ein Seil geschlagen, dessen eines Ende in **F** fest, und dessen zweites Ende an der Zwinge der zweiten Rolle A′ befestigt ist. Um diese zweite Rolle ist wieder ein Seil geschlagen mit einem in **F′** befestigten Ende; das zweite Ende ist an die Zwinge der dritten Rolle A″ gebunden, und so fort, bis zu der letzten Rolle, um welche ein Seil geschlagen ist, das mit dem einen Ende in **F″** fest ist und am andern Ende von einer Kraft **Q** gezogen wird.

Ist das ganze System im Gleichgewichte, so ist jede Rolle vermöge der auf sie wirkenden Kräfte oder Spannungen für sich im Gleichgewichte.

Sind also r, r', r'' die respectiven Halbmesser der Rollen, c, c', c'' die Sehnen der von den Seilen umschlungenen Bogen, X die Spannung des ersten Seils, Y die des zweiten, so hat man für das Gleichgewicht der Rolle A (§. 185)

$$X : P = r : c;$$

eben so für die Rolle A'

$$Y : X = r' : c';$$

für die Rolle A''

$$Q : Y = r'' : c''.$$

Multiplicirt man der Reihe nach, so wird

$$Q : P = r.r'.r'' : c.c'.c'',$$

d. h., die Kraft verhält sich zur Last, wie das Product aus den Halbmessern der Rollen zu dem Producte aus den Sehnen der von den Seilen umschlungenen Bogen.

§. 223.

Sind alle Seile parallel (Fig. 80), so werden die Sehnen die Durchmesser $2r$, $2r'$, $2r''$, und man erhält, wenn man die beiden letzten Glieder durch das Product $r.r'.r''$ dividirt,

$$Q : P = 1 : 2^3.$$

Man hat demnach den Satz: die Kraft verhält sich allgemein zur Last, wie die Einheit zu einer Potenz der Zahl 2, deren Exponent die Anzahl der Rollen ist.

Es ist dieses der günstigste Fall für die Kraft, weil hier das Product der Sehnen c, c', c'' am größten ist, indem sie zu Durchmessern werden.

Wäre bei jeder Rolle der vom Seile umschlungene Bogen dem sechsten Theile des Umfanges gleich, so wären die Sehnen dieser Bogen gleich den Halbmessern der respectiven Rollen, die Kraft also gleich der Last.

§. 224.

Der Flaschenzug ist ein System von Rollen (Fig. 81, 82, 83), die in einer einzigen Zwinge entweder auf besondern Axen (Fig. 81, 82) oder auf derselben Axe (Fig. 83) mit einander verbunden sind.

Es seien von zwei solchen Flaschenzügen der eine fest, der andere beweglich. An dem Ende der einen Zwinge sei ein Seil befestigt, und dieses gehe von hier aus um alle einzelnen Rollen, bis es mit dem andern Ende von der letzten Rolle abtritt, wo eine Kraft Q an ihm wirken mag, die ein am beweglichen Flaschenzuge aufgehängtes Gewicht im Gleichgewichte erhält.

Nimmt man an, wie dies gewöhnlich ohne merklichen Fehler geschehen kann, daß alle Theile des Seiles parallel sind, so verhält sich die Kraft zur Last wie die Einheit zur Anzahl der den beweglichen Flaschenzug tragenden Seile, denn da alle Rollen von einem und demselben Seile umschlungen sind, und jede für sich im Gleichgewichte sein muß, so sind alle Theile des Seiles gleich stark gespannt. Man kann sich also das Gewicht P als von eben so vielen gleichen und parallelen Kräften getragen denken, als es Seile gibt, die von einem Flaschenzuge zum andern gehen, und demzufolge verhält sich denn die Spannung von jedem einzelnen dieser Seile oder die Kraft Q zum Gewichte P, wie die Einheit zur Anzahl dieser Seile.

Im Falle der Figur 81 ist daher die Kraft der sechste Theil der Last, im Falle der Figur 82 ist sie nur der fünfte Theil der Last, weil hier ein Seil weniger vorhanden ist.

§. 225.

Betrachten wir endlich ein System von Rädern an Wellen A, A′, A″ (Fig. 84), die auf einander wirken, wie die Figur zeigt. r, r′, r″ sollen die respectiven Halbmesser der Wellen, R, R′, R″ der Räder sein. Das tangential auf die erste Welle wirkende Seil trägt ein Gewicht **P**, und das Seil an dem Rade zu dieser Welle wird nicht unmittelbar von einer Kraft gezogen, sondern ist an der Welle des zweiten Rades **A′** befestigt. Eben so zieht an dem Rade dieser Welle ein Seil, welches an der Welle des dritten Rades **A″** befestigt ist, und so fort bis zum letzten Rade, an dessen Umfange die Kraft **Q** wirkt.

Ist das System im Gleichgewichte, so ist jedes Rad mit seiner Welle vermöge der am Rade und an der Welle wirkenden Spannkraft der Seile für sich im Gleichgewichte. Nennt man also **X** die Spannkraft des Seiles zwischen den beiden ersten Rädern, **Y** die Spannkraft des Seiles zwischen den beiden folgenden Rädern, so hat man (§. 186)

$$X : P = r : R,$$
$$Y : X = r' : R',$$
$$Q : Y = r'' : R'';$$

multiplicirt man der Reihe nach, so ist

$$Q : P = r.r'.r'' : R.R'.R''.$$

Daraus folgt der Satz: **die Kraft verhält sich zur Last, wie das Product aus den Halbmessern der Wellen zum Producte aus den Halbmessern der Räder.**

Das gezähnte Rad.

§. 226.

Nähert man die Räder im vorigen Paragraph einander dergestalt, daß das erste Rad die Welle des zweiten, das zweite die Welle des dritten u. s. w. berührt, und greift dann jedes Rad in die zugehörige Welle des folgenden Rades so ein, daß es nicht ohne die Welle und umgekehrt sich drehen kann: so kann man die Seile fortlassen, welche vorhin das System mit einander verbanden, und behält immer noch dasselbe Verhältniß zwischen Kraft und Last.

Um jedes Rad in die Welle des folgenden eingreifen zu lassen, schneidet man in ihren Umfängen (Fig. 85) Zähne von gleicher Dicke aus, die zwischen einander fassen, so daß jedes Rad zugleich die folgende Welle mit umtreiben muß. Das Rad heißt in diesem Falle ein gezähntes Rad, und die Welle ein Getriebe.

Für das Gleichgewicht zweier Kräfte, die mittelst gezähnter Räder auf einander wirken, hat man also den Satz: die Kraft muß sich zur Last verhalten wie das Product der Halbmesser der Getriebe zu dem Producte der Halbmesser der gezähnten Räder.

Die Hebewinde.

§. 227.

Die einfache Hebewinde (Fig. 86) hat ein Getriebe, welches man um seine Axe mittelst einer Kurbel umdreht; das Getriebe greift in eine starre gezähnte Stange, so daß seine Rotation die Stange in der Richtung ihrer Länge bewegt. Widersteht also eine Last der Bewegung dieser gezähnten Stange: so kann man diese Last als eine Kraft ansehen, die senkrecht auf den Endpunct des Halbmessers des Getriebes wirkt, und hat so den Satz: **die Kraft an der Kurbel verhält sich zur Last in der Richtung der gezähnten Stange, wie der Halbmesser des Getriebes zum Halbmesser der Kurbel.**

Je kleiner also der Halbmesser des Getriebes zum Halbmesser der Kurbel ist, desto bedeutender ist der Effect der Hebewinde.

Will man ohne Vermehrung des Hebelarmes der Kurbel und ohne Verminderung des Halbmessers des Getriebes die Kraft der Hebewinde vermehren, so läßt man das Getriebe nicht unmittelbar auf die gezähnte Stange wirken, sondern bringt zwischen beide noch ein gezähntes Rad, dessen Getriebe dann in die Stange eingreift. Für den Zustand des Gleichgewichts muß dann die Kraft an der Kurbel sich zur Last in der Richtung der gezähnten Stange verhalten, wie das Product aus den Halbmessern der beiden Getriebe zum Producte des Halbmessers des Rades in den Halbmesser der Kurbel.

Die Schraube ohne Ende.

§. 228.

Denkt man sich eine Schraube, welche um ihre Axe beweglich ist, und deren Faden in die Zähne eines Rades eingreift, welches gegen sie immer dieselbe Lage behält: so hat man die sogenannte Schraube ohne Ende (Fig. 87).

Ist sie im Gleichgewichte, so muß die an der Kurbel angebrachte Kraft Q sich zur Kraft f, womit der Schraubenfaden gegen den Radzahn wirkt, wie die Schraubenweite h zum Kreisumfange $2\pi R$ verhalten, wo R der Halbmesser der Kurbel ist; man hat also

$$Q : f = h : 2\pi R.$$

Ist nun mit diesem Rade vom Halbmesser **A** eine Welle vom Halbmesser a an derselben Axe verbunden, und an dieser Welle ein Gewicht P aufgehängt, so hat man

$$f : P = a : A.$$

Multiplicirt man die beiden Proportionen, so wird

$$Q : P = ah : 2\pi R.A.$$

Die Kraft verhält sich demnach zur Last, wie das Product aus der Schraubenweite in den Halbmesser der Welle zum Producte aus dem Halbmesser des gezähnten Rades in den Umfang des Kreises, den die Kraft beschreibt.

Das sogenannte Knie, eine neue Maschine.

§. 229.

Diese Maschine besteht aus zwei Stangen oder starren geraden Linien AO und BO (Fig. 88 und 89), die in A durch ein Charnier verbunden sind, worin sie sich wie die Füße eines Cirkels bewegen. Das Ende A der einen Stange ist in einem Charniere an einer andern starren Stange AC befestigt, so daß AO gleichsam einen Hebel bildet, dessen Unterstützungspunct der Punct A ist; das Ende B der zweiten Stange ruht auf der Stange AC, oder vielmehr, es wird in einem Falze AC gehalten, längs dessen es frei auf- und niedergleiten kann.

Aus der Einrichtung der Maschine geht hervor, daß, wenn eine Kraft den Arm AO um A dreht und so den Punct O der Axe nähert, sich das Charnier bei O öffnen muß, und der Punct B, sich von A entfernend, in dem Falze AC fortgleitet. Bringt man also in B eine gehörige Kraft nach entgegengesetztem Sinne an, so wird sie der Kraft an AO das Gleichgewicht halten, und in dem Verhältnisse dieser beiden Kräfte besteht das Gesetz der Maschine, welches offenbar an die Theorie des Hebels und der geneigten Ebene geknüpft ist.

Statt die Kraft P unmittelbar am Arme AO anzubringen, läßt man sie gewöhnlich auf einen fest mit ihm verbundenen Griff mn wirken; mittelst dieses Griffes mn wirkt eine Kraft auf das Knie, um in B längs des Falzes den gewünschten Druck oder Effect Q zu erhalten.

Mag daher die Kraft P auf den Punct n senkrecht auf den Abstand An dieses Punctes von A wirken, welches ihre günstigste Lage ist, und beschränken wir die ganze Figur auf die Geraden OA, OB, AC, An, welche alle mit den Richtungen der angebrachten Kräfte in derselben Ebene liegen.

Sucht man zuerst, welche Wirkung X die Kraft P, die den Hebel AO um den Punct A zu drehen strebt, auf den Punct O, und folglich auch auf den Punct B in der Richtung OB erzeugt: so erhellt aus der Theorie des Hebels, daß $P:X = Ah:An$ ist; oder wenn $An = r$, $AO = a$, und mithin $Ah = a \sin O$, wo O der Winkel des Knies ist, gesetzt wird,

$$P:X = a \sin O : r.$$

Die Kraft X wirkt nun auf eine geneigte Ebene und verhält sich zur Kraft Q, welche den Punct B längs dieser Ebene im Gleichgewichte hält, wie der Halbmesser zum Cosinus des Neigungswinkels OBA; wird dieser Winkel daher durch B bezeichnet, so hat man

$$X:Q = 1 : \cos B;$$

und multiplicirt man die beiden Proportionen Glied vor Glied, so ist

$$P:Q = a \sin O : r \cos B,$$

in welcher Gleichung das gesuchte Gesetz des Gleichgewichts für das Knie enthalten ist.

§. 230.

Man könnte die vorige Untersuchung auch auf eine sehr einfache und mehr der allgemeinen Methode (§. 209) entsprechenden Weise führen. Ist das System im Gleichgewichte, so muß auch jeder Theil desselben vermöge der auf ihn wirkenden Kräfte und der Gegenwirkungen von den übrigen Theilen für sich im Gleichgewichte sein. Der Hebel **OA** muß daher von der Kraft **P** und der Wirkung **X** des Punctes **B** auf den Punct **O**, die nur in der Richtung **BO** Statt finden kann, im Gleichgewichte gehalten werden. Man hat also

$$P : X = a \sin O : r.$$

Eben so muß auch der Punct **B** von der Kraft **Q**, die längs der Ebene **BA** auf ihn wirkt, und von der Gegenwirkung des Punctes **O**, die ihn in der Richtung **OB** gegen diese Ebene drückt, im Gleichgewichte gehalten werden, so daß der Theorie der geneigten Ebene zufolge

$$X : Q = 1 : \cos B.$$

Multiplicirt man beide, so erhält man die obige Proportion wieder; aus ihr folgt

$$Q = \frac{P . r . \cos B}{\alpha . \sin O}$$

als Werth des von der Kraft **P** bewirkten Effectes **Q**.

§. 231.

Bemerkung. Sowie der Winkel **B** kleiner wird, wird der Winkel **O** des Knies größer; der Factor $\cos B$ in dem obigen Ausdrucke von **Q** wächst also immer mehr der Einheit zu, und der Factor $\sin O$ nimmt immer mehr gegen Null hin ab, und zwar können sich beide diesen Grenzen beliebig nähern. Da nun **Q** mit $\cos B$ im geraden, mit $\sin O$ im verkehrten Verhältnisse steht, so muß **Q** aus doppeltem Grunde größer werden, sowie sich die Schenkel des Knies der geraden Linie nähern, und wird unendlich groß, wenn sie diese Grenze erreichen; sie vermehrt sich also unaufhörlich und übt in der Richtung des Falzes selbst einen Druck aus, der jeden gegebenen Druck übersteigen kann.

Auch ist klar, daß die Kraft um so mehr im Vortheile ist, je kleiner der Schenkel $AO = a$, und je länger der Hebelarm $An = r$ ist. Aus diesem letzten Grunde wird es immer vortheilhaft sein, bei gleicher Länge des Griffes mn, ihn so nahe als möglich am Drehpuncte des Knies anzubringen.

Wirkt die Kraft P nicht senkrecht auf die Linie An, sondern unter irgend einem Winkel in derselben Ebene, so hat man für den Hebelarm r den Abstand der Kraft von dem festen Puncte zu nehmen.

Wirkten auf den Hebel AO mehre Kräfte: so nimmt man in der obigen Gleichung statt des Momentes Pr die Summe der Momente aller dieser Kräfte.

Das gleichschenklige Knie.

§. 232.

Ist das Dreieck AOB gleichschenklig, und also Winkel A = Winkel B, so ist Winkel O das Supplement von $2B$, und folglich hat man $\sin O = 2 \sin B \cos B$. Die obige Proportion für das Gleichgewicht wird also jetzt

$$P : Q = 2 a \sin B : r.$$

Will man lieber den Winkel O des Knies im Ausdrucke haben, so ist B das Complement von $\frac{O}{2}$, also $\sin B = \cos \frac{O}{2}$, oder, wenn man $\frac{O}{2} = \varphi$ setzt, $\sin B = \cos \varphi$; man erhält also dann als einfachen Ausdruck für das Gesetz des Gleichgewichts

$$P : Q = 2 a \cos \varphi : r.$$

Statt der Sinus oder Cosinus kann man auch lauter in der Figur hervortretende gerade Linien nehmen, denn $2 a \sin B = 2 a \cos \varphi$ ist in (Fig. 89) $= 2\,OI = 2f$, wo f der Sinus Versus oder die sogenannte Sagitta eines Kreisbogens durch die drei Puncte A, O, B ist. Will man den Na=

men Sagitta des Knies für die Linie OI beibehalten, so läßt sich das Gesetz des Gleichgewichts kurz so aussprechen:

Für den Zustand des Gleichgewichts des gleichschenkligen Knies muß sich die Kraft, welche den ersten Schenkel um seinen festen Endpunct zu drehen strebt, zur Last, die sich dem beweglichen Ende des zweiten Schenkels in der Richtung des Falzes entgegenstellt, verhalten, wie die doppelte Sagitta des Knies zum Hebelarme, an welchem die Kraft wirkt.

§. 233.

Wir haben von dem Gewichte der Maschine abstrahirt, dieses läßt sich jedoch leicht mit in Betracht ziehen. Die Axe oder der Falz AC ist als fest angenommen worden, sein Gewicht G kann also auf das Gleichgewicht keinen Einfluß haben, sondern vermehrt nur den Druck auf die Unterstützung. Das Gewicht des ersten Schenkels AO, welches wir durch 2p darstellen wollen, kommt der Wirkung der Kraft zu Gunsten; nimmt man z. B. an, daß die Axe AC vertical, und der Schenkel AO von gleichförmiger Dicke ist, so daß sein Schwerpunct in die Mitte fällt, so fügt das Gewicht 2p zum Momente der Kraft noch das Moment pf hinzu. Das Gewicht 2p des zweiten Schenkels, der dem ersten gleich sein und dessen Schwerpunct gleichfalls in seine Mitte fallen soll, kann in zwei gleiche Kräfte p zerlegt werden, von denen die eine in O, die andere in B im entgegengesetzten Sinne von Q wirkt. Die erste Kraft p in einem Abstande f vom festen Puncte vermehrt das Moment der Kraft um das Moment pf, und die zweite in B angebrachte Kraft Q vermindert die Last Q um p.

Die Gleichung des Gleichgewichts, welche $P.r = Q.2f$ war, wird also unter Berücksichtigung des Gewichts der Maschine

$$Pr + pf + pf = (Q - p)\,2f,$$

oder $\quad Pr = (Q - 2p)\,2f,$

woraus hervorgeht, daß das Gewicht der Maschine, in der Lage, welche wir ihr gegeben haben, den Effect Q um eine Größe 2p vermehrt, welche dem halben Gewichte der beiden beweglichen Schenkel des Knies gleich ist.

Von dem Drucke auf die Stützpuncte.

§. 234.

Den Druck auf die feste Axe AC, sowohl von den Kräften als von dem Gewichte der Maschine, berechnet man auf folgende Weise.

Erstlich erleidet diese Axe im Puncte B einen Druck von einer senkrechten Kraft V, der Resultante aus X und Q—p, deren Werth $(Q - p)\cot\varphi$ ist.

Zweitens hat der feste Punct A einen Druck auszuhalten von dem Gewichte G der Stange AC und von der Resultante aller auf AO wirkenden Kräfte, wenn diese parallel zu sich selbst in den Punct A versetzt werden. Zerlegt man nun erst jede dieser Druckkräfte in zwei andere, von denen die eine in der Axe AC, die andere senkrecht auf sie gerichtet ist: so findet man als Seitenkräfte von P die Kräfte $P\cos w$ und $P\sin w$, wo w der Neigungswinkel von P gegen AC ist; als Seitenkräfte von X die Kräfte $(Q - p)$ und V; für die beiden in A versetzten Gewichte 2p und p endlich die Kraft 3p nach der Axe AC gerichtet. Der Punct A wird also nach der Richtung der Axe AC einen Druck $G + P\cos w - Q + 4p$, und senkrecht auf die Axe den Druck $P\sin w + (Q - p)\cot\varphi$ auszuhalten haben. Auf diese Weise wird der Totaldruck auf den festen Punct der Größe nach durch $\surd(\alpha^2 + \beta^2)$ ausgedrückt und unter einem Winkel gegen die Axe AC geneigt sein, dessen Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ ist.

Man weiß also nun, mit welcher Kraft die Axe sowohl in A als B gehalten werden muß, wenn sie die vereinte Wirkung der auf das Knie wirkenden Kräfte und des Gewichtes der Maschine soll aushalten können.

§. 235.

Ich glaubte, diese neue Maschine ausführlicher betrachten zu müssen, weil sie mir eine sinnreiche Erfindung zu sein scheint, und ihre Theorie noch nirgends gegeben ist. Sie ist fast gänzlich mit der Schraube einerlei Art, läßt sich jedoch leichter construiren; man kann sie auf dieselbe Weise wie jene anwenden, um mit einer mittelmäßigen Kraft einen sehr bedeutenden Druck hervorzubringen, oder andere Körper fest an einander zu pressen.

Ueber ein altes Paradoxon der Statik in Bezug auf die Theorie der Momente.

§. 236.

Das Gesetz des Hebels heißt, wie wir oben gesehen haben, und wie man schon sehr lange gewußt hat: die Kräfte müssen sich umgekehrt wie ihre Abstände vom Unterstützungspuncte verhalten, oder die Momente müssen gleich sein.

Man hat nun aber eine besondere, von Roberval angegebene Maschine, die eine Art von Hebel bildet, woran sich zwei gleiche Gewichte das Gleichgewicht halten, obgleich man sie an beliebigen ungleichen Hebelarmen aufhängt. Daraus geht denn für die Theorie der Momente eine Art von Widerspruch hervor, den man durch eine besondere Zerlegung der Kräfte zu heben gesucht hat, dessen richtige Erklärung man jedoch noch nicht gefunden zu haben scheint. (Man sehe in der „Encyclopédie“ den Artikel levier von d'Alembert.)

Es ist bald zu zeigen, daß dieser Gleichgewichtsfall nicht dem allgemeinen Gesetze des Hebels zuwider ist, denn die

Roberval'sche Maschine ist nicht ein wirklicher Hebel, ein Körper oder eine Linie, die starr und um einen einzigen festen Punct beweglich ist, sondern vielmehr ein System von veränderlicher Form, in welchem zwei feste Puncte vorhanden sind. Es ist daher auch nicht zu verwundern, wenn hier ein anderes Gesetz des Gleichgewichts gilt als bei dem einfachen Hebel. Durch die bloße Unterscheidung von einfachen und zusammengesetzten Maschinen, wie wir sie im Vorigen aufgestellt haben, verschwindet der Widerspruch; allein man hatte bisher noch keine genaue Definition einer Maschine, und vorzüglich keine klare Vorstellung von den Momenten, Kräften einer besondern Art, welche erst die Kräftepaare zur Evidenz gebracht und gleichsam in der ganzen Mechanik sichtbar hervorgehoben haben. Mit der Theorie der Paare ausgerüstet, bietet die Roberval'sche Maschine nicht die mindeste Schwierigkeit dar; denn wo zwei feste Puncte in einem Körper vorhanden sind, da kann es sehr gut möglich sein, daß jedes der aus den Kräften entspringenden Paare einzeln durch die Resistenz dieser Puncte vernichtet wird, und daß bei einer solchen Maschine das Verhältniß der Momente ganz willkührlich ist. In der That ist dies hier der Fall, wie wir gleich zeigen werden, und dieser besondere Fall des Gleichgewichts enthält keinen Widerspruch, sondern bestätigt vielmehr aufs Neue unsere Principien; ich gehe deshalb dazu fort, aus der Theorie der Paare für ihn einen Beweis aufzustellen, der deutlich und vielleicht der einzig strenge von allen bisher aufgestellten Beweisen ist.

Die Roberval'sche Wage.

§. 237.

Man denke sich vier Stangen, die zwei zu zwei gleich und parallel sind und ein Parallelogramm ABab (Fig. 90 und 91) bilden. Die Seiten dieses Parallelogramms seien um die Winkelpuncte A, B, a, b wie um Charniere beweglich, und die Mittelpuncte F und f der beiden Seiten AB und ab fest. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, die beiden festen Puncte fielen in dieselbe Verticale Ff. Man erhält auf diese Weise eine Maschine, die aus zwei gleichen und parallelen, mit einander verbundenen Wagebalken besteht, welche in derselben Verticalebene liegen, und deren gegenseitige Bewegungen um die festen Puncte an einander geknüpft sind, ohne sich irgend zu schaden; denn dreht sich AB z. B. um seinen festen Punct F: so dreht sich zugleich ab um seinen festen Punct f in demselben Sinne und um dieselbe Winkelgröße, und das Parallelogramm ABab nimmt alle möglichen Formen an, wobei es seine Winkel ändert, die Länge seiner Seiten aber beibehält.

Werden nun an einem dieser Hebel, etwa AB, in beliebigen Puncten desselben oder auch in seiner Verlängerung zwei Kräfte angebracht, die sich im Gleichgewichte erhalten: so müssen diese sich nothwendig umgekehrt verhalten wie ihre Entfernungen vom Unterstützungspuncte F, gerade als wäre der Hebel völlig frei und allein vorhanden; denn der Hebel ist wirklich frei, weil der andere ihm nur folgt und gleichsam seine Bewegung wiederholt, ohne sie im mindesten zu stören. Die Momente um diesen festen Punct müssen also im Gleichgewichte sein, und darin liegt nichts, was der Theorie im mindesten widerspräche.

Bringt man nun aber die Kräfte oder Gewichte P und Q nicht an einem der Hebel, sondern das eine P an einer unter rechtem Winkel unveränderlich fest mit der Verbindungsstange Bb der beiden Hebel verbundenen Stange KI, und das andere Q eben so an einer Stange GH, die auf gleiche Weise mit Aa verbunden ist, an: so halten sich die beiden gleichen Gewichte P und Q immer das Gleichgewicht, wie lang auch die Stangen IK und GH, an denen die Gewichte aufgehängt sind, sein mögen. Dieses eben ist es, was wir als einen natürlichen Folgesatz aus unserer Theorie der Momente ableiten wollen.

Man transponire die Kraft P parallel zu sich selbst aus I nach K in die Gerade Bb, und man erhält ein Kräftepaar (P — P), dessen Hebelarm IK ist. Dieses Paar wird aber durch die festen Puncte vernichtet; denn es kann erstens in ein anderes aequivalentes verwandelt werden, dessen Hebelarm gleich ist dem Abstande mn der beiden Hebel AB und ab, und dann kann, weil der Annahme nach der Arm KI unveränderlich fest mit Bb verbunden ist, dieses verwandelte Paar (P′, — P′) in seiner Ebene gedreht und genau in die Lage von Bb gebracht werden. In dieser Lage ist die eine Kraft P′ gegen den festen Punct F, die andere — P′ gegen den festen Punct f gerichtet, und das Paar wird vernichtet, wie auch sein Moment P′.mn oder P.IK beschaffen sein mag. Auf dieser Seite bleibt also nur die Kraft P, welche in den Punct K transponirt ist.

Auf gleiche Weise kann die Kraft Q parallel zu sich selbst aus G nach H transponirt, und das dadurch entstehende Paar (Q, — Q) in ein anderes (Q′, — Q′) verwandelt werden, welches an Aa wirkt und durch die Resistenz der beiden festen Puncte gleich dem vorigen vernichtet wird.

Es bleiben also nur die beiden Kräfte P und Q, welche aber jetzt in den Puncten K und H, oder auch in B und A angebracht sind und zum Gleichgewichte des Wagebalkens AB nothwendig gleich sein müssen. Die einzige Bedingung für das Gleichgewicht der Roberval'schen Wage ist also die Gleichheit der Gewichte, mögen ihre Abstände von den festen Puncten sein, welche sie wollen.

Diese Maschine ist gleichsam für die einfachen Kräfte das, was der Hebel für die Paare oder Momente ist. Zum Gleichgewichte des Hebels können die Kräfte in einem beliebigen Verhältnisse stehen, wenn nur die Momente gleich sind; bei der Roberval'schen Wage dagegen müssen die

Kräfte gleich sein, und das Verhältniß der Momente ist willkührlich.

§. 238.

Übrigens ist die vorliegende Maschine nur ein besonderer Fall eines allgemeinern Satzes. Statt der beiden Wagebalken AB und ab kann man zwei gleiche und parallele Hebel nehmen, deren Unterstützungspuncte nicht mehr in der Mitte ihrer Längen liegen, sondern diese Längen nur in einem beliebigen, bei beiden aber in demselben Verhältnisse theilen. Auch brauchen die Kräfte P und Q an den Stangen IK und GH nicht parallel zu sein, sondern können eine beliebige Richtung im Raume haben. Man beweist dann ganz auf dieselbe Weise, daß, wenn die beiden Kräfte parallel zu sich selbst auf die Endpuncte B und A eines der beiden Hebel der Maschine transponirt werden, die daraus entspringenden Paare einzeln von dem festen Puncte vernichtet werden, daß also zum Gleichgewichte nur die Bedingung erfüllt zu sein braucht, daß die beiden Kräfte in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen, welches nicht von ihren Abständen vom Puncte F, sondern nur von den Abständen dieses Punctes von zwei, durch die Endpuncte des Hebels gezogenen Parallelen zu den Kräften abhangt. Sind also die Kräfte einmal an der Maschine im Gleichgewichte, so kann man sie parallel zu sich selbst transponiren, wohin man will, ohne das Gleichgewicht zu stören. Sie wirken immer auf dieselbe Weise auf einander; nur die Größe der vernichteten Paare, und mithin der Druck, welchen die festen Puncte in der Richtung der beiden Hebel nach entgegengesetztem Sinne zu tragen haben, ändert sich.

Im Falle z. B. P und Q parallel sind, erleidet der Punct F, außer dem Drucke $P+Q$ wie beim gewöhnlichen Hebel, noch einen Druck $P'-Q'$ in der Richtung des

Hebels, welcher $= \frac{P.KI}{mn} - \frac{Q.GH}{mn}$ ist, und der andere Punct f einen gleichen und parallelen Druck nach entgegengesetztem Sinne, so daß man auf der Verbindungsaxe der Puncte F und f ein Paar erhält, dessen Moment P.KI — Q.GH, also die Differenz der Momente der angebrachten Kräfte ist, welches die Maschine umzuwerfen sucht.

§. 239.

Zu bemerken ist auch noch, daß es in voriger Untersuchung nicht nöthig ist, die Stangen KI und GH rechtwinklig auf Aa und Bb und in der Mitte dieser Linien anzunehmen; sie können unter beliebigen Winkeln, und wo man will, angebracht, nur müssen sie unveränderlich fest mit Aa und Bb verbunden sein.

§. 240.

Ferner könnte man statt der Hebel AB und ab zwei gleiche und parallele Räder mit Wellen nehmen, deren beide Axen in F und f projicirt sein mögen. Sind die correspondirenden Halbmesser der beiden Räder und der beiden Wellen durch die parallelen Stangen Bb und Aa verbunden, welche in den Charnieren B, b, A, a beweglich sind: so hat man eine der Roberval'schen Wage ganz ähnliche Maschine, woran die beiden Gewichte P und Q, wenn sie einmal im Gleichgewichte sind, auch immer im Gleichgewichte bleiben, in welchen Entfernungen man sie an den Armen KI und GH aufhängen mag.

§. 241.

Denkt man sich endlich, die festen Axen dieser beiden Räder wären die Axen zweier gleicher Schrauben, und eine Kraft P wirke auf die Muttern: so wird die Wirkung dieser Kraft zur Forttreibung der Schraube sich nicht ändern, so lang auch der Arm **KI**, an welchem sie wirkt, sein mag, und sie bleibt immer dieselbe, als wirkte die Kraft ganz einfach in paralleler Richtung im Puncte **B**.

§. 242.

Wir könnten nun auch noch andere Maschinen vornehmen; sie enthalten jedoch nichts Neues, was in den Elementen einen Platz verdiente; die bisherigen Anwendungen mögen daher genügen. Der Hauptzweck der beiden letzten Capitel war, die Grundsätze, die wir in den beiden ersten Capiteln aufstellten und entwickelten, durch einige sehr einfache Beispiele zu bestätigen. Dabei glaubten wir auch, den Weg zeigen zu müssen, den man zur Auffindung der Bedingungen des Gleichgewichts für jede beliebige Maschine einzuschlagen hat; es kann dies, nach dem, was im 209ten und in den folgenden Paragraphen gesagt ist, nie mit Schwierigkeiten verbunden sein, vorzüglich, wenn auf die Maschine nur zwei Kräfte wirken.

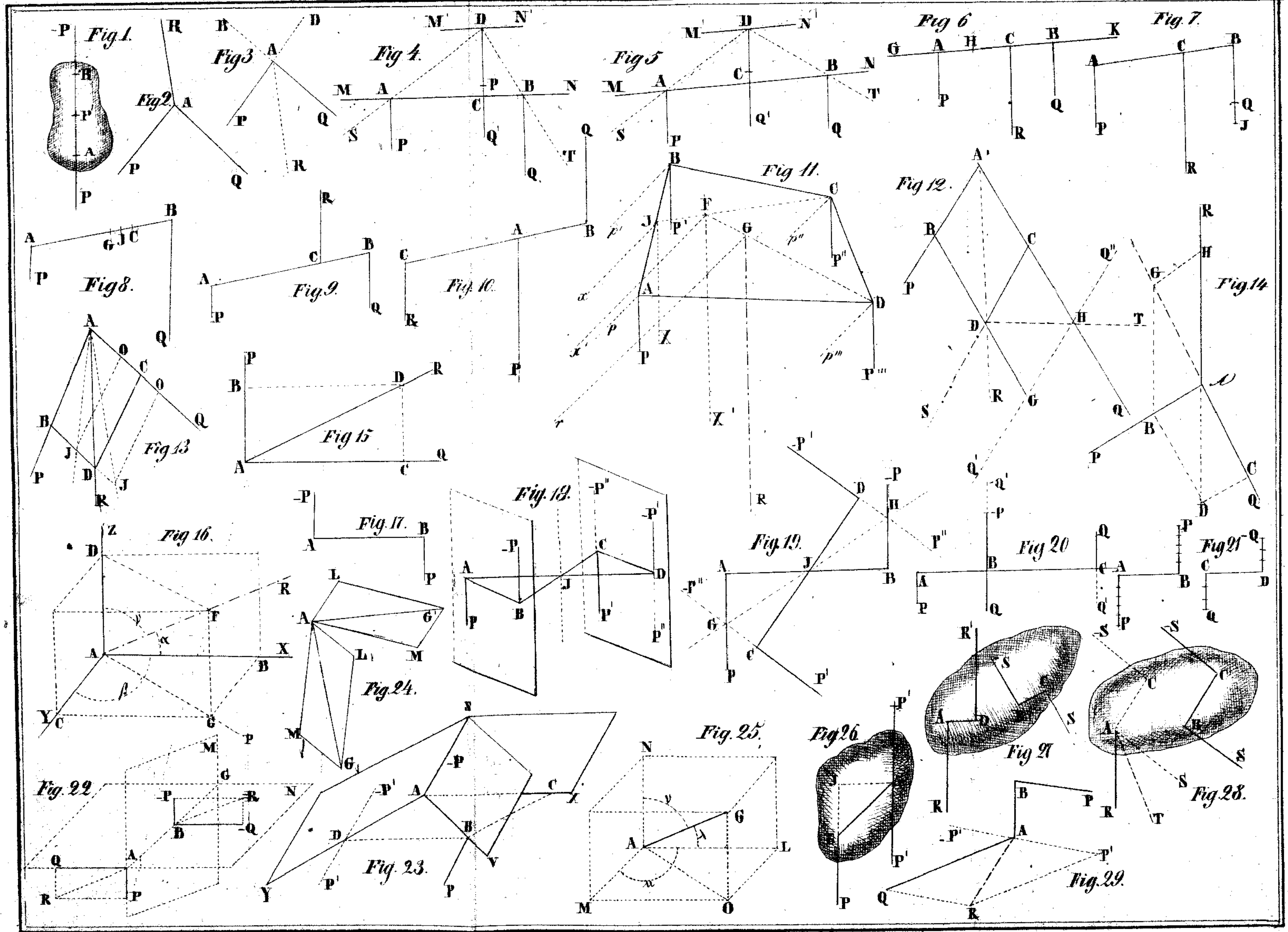
Fig 1.
Fig 2.
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 6.
Fig 7.
Fig 8.
Fig 9.
Fig 10.
Fig 11.
Fig 12.
Fig 13.
Fig 14.
Fig 15.
Fig 16.
Fig 17.
Fig 18.
Fig 19.
Fig 20.
Fig 21.
Fig 22.
Fig 23.
Fig 24.
Fig 25.
Fig 26.
Fig 27.
Fig 28.
Fig 29.

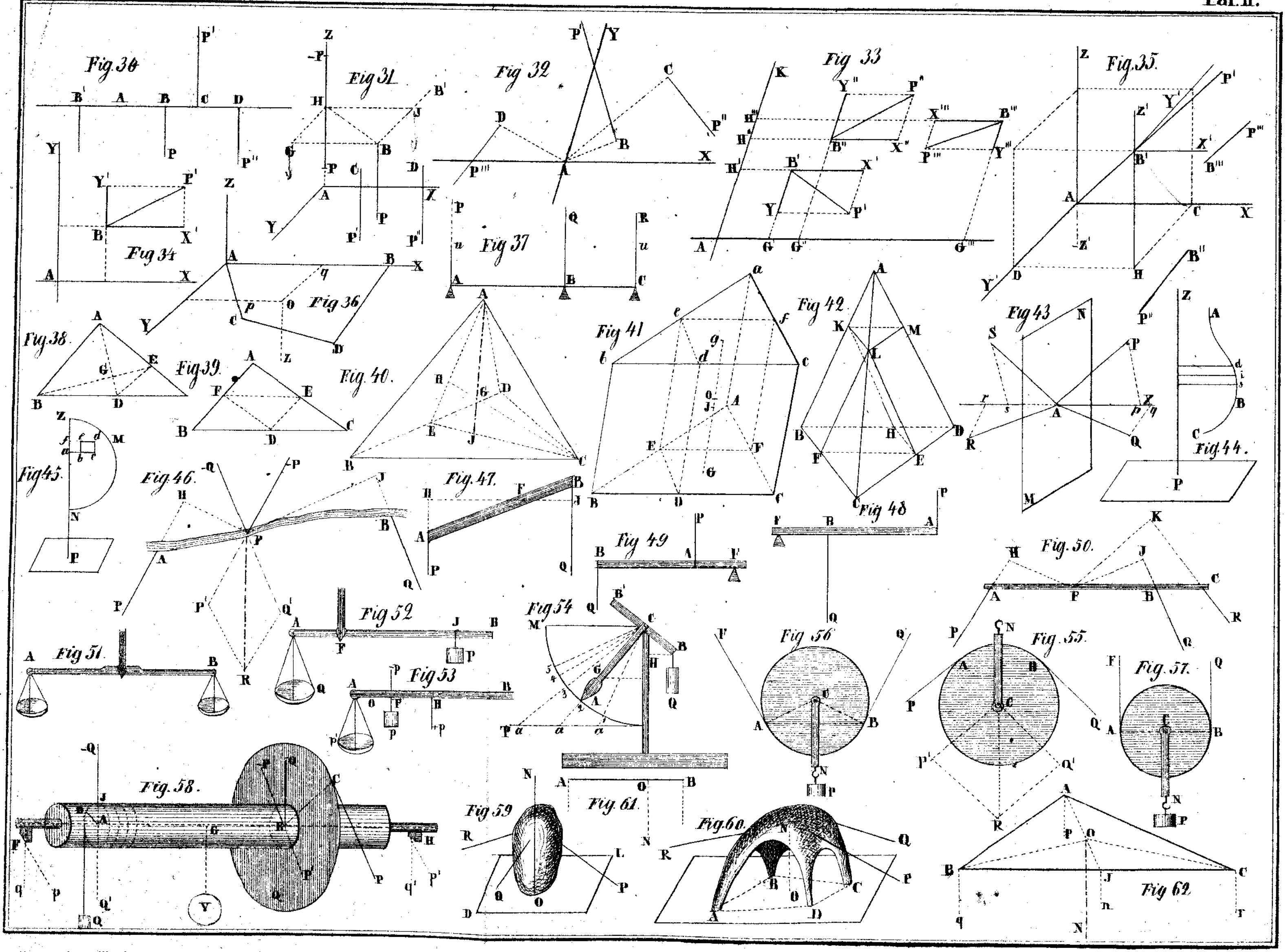
Fig 30
Fig 31
Fig 32
Fig 33
Fig 34
Fig 35
Fig 36
Fig 37
Fig 38
Fig 39
Fig 40
Fig 41
Fig 42
Fig 43
Fig 44
Fig 45
Fig 46
Fig 47
Fig 48
Fig 49
Fig 50
Fig 51
Fig 52
Fig 53
Fig 54
Fig 55
Fig 56
Fig 57
Fig 58
Fig 59
Fig 60
Fig 61
Fig 62

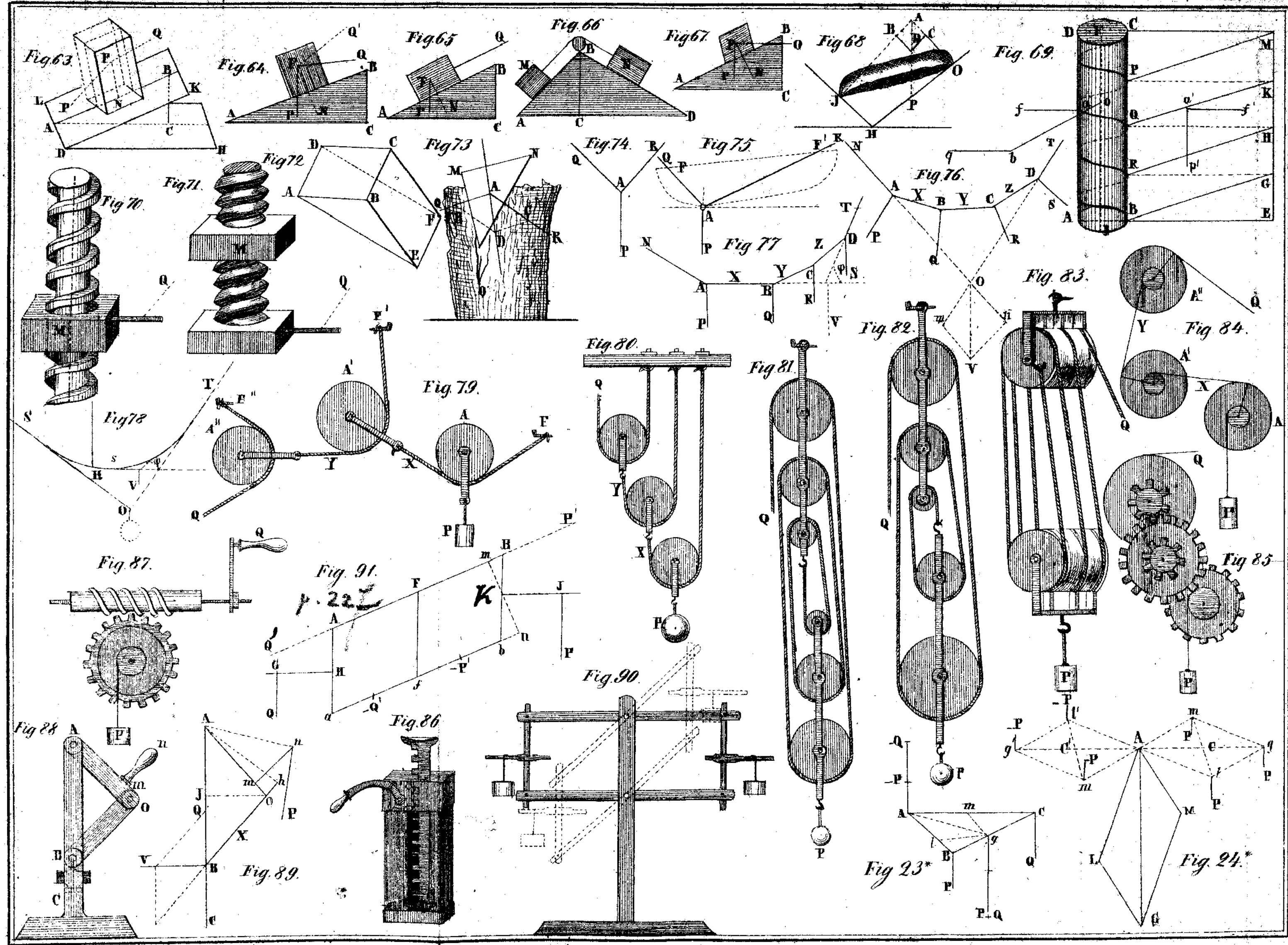
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
p. 22
Fig. 23*
Fig. 24*