# System

der

reinen und angewandten

# Mechanik

## fester Körper

Von

Johann Joseph Anton

J. J. A. Ide,

Doktor der Philosophie und Mitglied der physikalischen Gesellschaft zu Göttingen.

Erster Theil.

Berlin,

bei Heinrich Frölich. 1802.

Die

# Statik,

oder die

## Lehre vom Gleichgewichte fester Körper.

---

Erster Theil.

# Vorrede.

Die Mechanik verdient mit gleichem Rechte einen Platz in dem Gebiete der reinen Größenlehre, als man die Geometrie dahin zu rechnen gewohnt ist. Sie hat, wie diese, ihre eigenthümlichen Grundsätze, von denen kein einziger aus der trüben Quelle der Erfahrung geschöpft werden darf: so wenig, als man es sich je wird einfallen lassen, den eilften Grundsatz Euklids empirisch darthun zu wollen. Ihre Begriffe von Kraft und Bewegung sind eben der Evidenz fähig, als Raum und Ausdehnung, und das mechanische Bild vom festen Körper steht in Hinsicht auf Abstraktion und Bestimmtheit dem Körper des Geometers vollkommen zur Seite.

Dies alles haben unsere westlichen Nachbaren, die überhaupt einen feinern Sinn für schickliche Behandlung verrathen, schon längst gefühlt, und daher die Mechanik mit weit mehr Methode bearbeitet, als wir Deutschen zu thun pflegen. Sie stellen die Sätze derselben in ächter Reinheit dar, lassen sie genau in der systematischen Ordnung folgen, wie einer den andern herbeyführt, und geben ihnen sämmtlich die Allgemeinheit, deren sie nur immer fähig sind. In unsern deutschen Lehrbüchern der Mechanik ist man dagegen gleich beym Anfange gar zu ängstlich darauf bedacht, alles in das Gewand von Nutzanwendung einzuzwängen, wird dadurch genöthigt, den Zuschnitt zu kärglich zu machen, und verschließt sich so den Weg zu höhern Wahrheiten, die gerade an interessanten Folgen die fruchtbarsten sind.

Ich bin weit entfernt, für das bloß Spekulative zu stimmen. Die Mechanik läuft in so viele Zweige aus, die mit dem gemeinen Wohl innigst verflochten sind, daß man dem Stamme eine große Zierde raubt, wenn man ihn von diesen völlig entblößen will. Zudem gewinnen auch die allgemeinen Sätze der Theorie nur dann dem Lernenden ein wahres Interesse ab, wenn man sie mit der reichen Fülle ihrer Anwendungen in einige Verbindung setzt; erst durch die vielen nützlichen Folgen, die sich aus ihnen entwickeln lassen, bekommt man eine deutliche Ansicht von ihrem innern Werthe, und nur durch öftere Wiederhohlung derselben bey ihrem Gebrauche kann man mit ihnen vertrauter werden.

Solche und ähnliche Vorzüge sind ausschließend der gemischten Lehrmethode eigen, und erheben sie, sowohl für den Unterricht, als beym Selbststudium, weit über den bloß theoretischen Vortrag, sobald man dabey die Vorsicht gebraucht, unter der großen Zahl von Anwendungen die instruktivsten auszuwählen, sie so kurz abzufassen, als es die Umstände erlauben wollen, und alles sorgfältig zu vermeiden, was zu weit ins Detail führen könnte. Es hält in der That schwer, diesen Mittelweg, wie ich ihn bey Bearbeitung des vorliegenden Werkes mir vorgezeichnet habe, bis ans Ende mit gleicher Strenge und Beharrlichkeit zu verfolgen, und ich mag nicht entscheiden, ob nicht vielleicht subjektive Vorliebe für manchen besondern Gegenstand, vorzüglich solchen, wobey ich mir selbst überlassen war, mich zuweilen unvorsätzlich davon entfernt hat.

So viel von dem, was die Behandlung betrift. In Ansehung der Materien selbst habe ich noch einige Bemerkungen beyzufügen, wozu sich im Buche mir keine passende Gelegenheit darbot.

Die Verlegung der Kräfte auf beliebige Punkte ihrer Richtungen ist eine Eigenschaft des Gleichgewichts, die wegen ihrer zu großen Einfachheit selten beachtet, und in den meisten Systemen als unbedeutend übergangen wird. Gleichwohl beruhen doch auf ihr die beyden wichtigsten Sätze der Statik; die Zusammensetzung der Kräfte, und das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten; und von so manchen Aufgaben wird durch Zuziehung derselben die Auflösung beträchtlich abgekürzt, wovon ich nur hin und wieder einzelne Beyspiele gegeben habe. Dahin gehören: der schiefe Zug am Hebel §. 57., der krummlinigte Hebel §. 59., das Rad §. 97., und besonders im zweyten Theile: der Widerstand der Luft bey drehender Bewegung §. 269., wo der Vortheil, den sie gewährt, höchst auffallend ist.

Mehrere Anwendungen derselben zeigt Frisi in seiner Mechanik, *) der von ihr bey den schwersten Untersuchungen mit glücklichem Erfolge häufigen Gebrauch gemacht hat.

Die Lehre von der Vertheilung des Drucks, den Körper auf darunter liegende Punkte und Flächen ausüben, habe ich in einem eigenen Kapitel abgehandelt, weil sie der Theorie rechtmäßig angehört, und wegen ihrer vielfachen Anwendung auf Fälle des gemeinen Lebens von großer Wichtigkeit ist. Sie scheint bey den jetzigen Mechanikern wieder in Vergessenheit zu kommen, oder doch wenigstens, seitdem Delanges sie aufs Neue durch vergebliche Untersuchungen in Anregung brachte, aus dem Bezirke der sicheren Wahrheiten verbannt zu seyn. Dies Schicksal verdient sie aber auf keine Weise, und ich habe mich um

*) Frisii Op. math. P. II.

so eifriger bemühet, ihr Gerechtigkeit widerfahren zu lassen.

Die Spannung der biegsamen Fäden macht ebenfalls einen eigenen Gegenstand der reinen Mechanik aus, der von dem unsterblichen Euler, so wie der vorhergehende, und so viele andere, zuerst aus seinem Dunkel hervorgezogen, und durch die ihm eigene geistvolle Behandlung sogleich zur höchsten Klarheit erhoben wurde. Ihm sind darin die meisten Franzosen gefolgt, und haben zugleich, (was wohl nicht fehlen konnte) die Zahl der einfachen Maschinen mit einer neuen, der Seilmaschine (Machine funiculaire) bereichert. Bey uns hat bisher keiner das Gleichgewicht und die Bewegung biegsamer Körper in sein System aufgenommen; wenn ich etwa Herrn Bürja ausnehme, der davon in seiner Statik die ersten Gründe vorgetragen, aber doch dabey Eulers allgemeine Theorie nicht benutzt hat.

Den Beschluß der Statik macht das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**, dem ich nach reiferer Ueberlegung keine schicklichere Stelle, als diese, anzuweisen hatte. Es setzt nemlich offenbar zu viele Kenntnisse voraus, als daß man es unter den ersten Sätzen der Statik gleich Anfangs mit Nutzen aufstellen könnte, und wenn man in einem Lehrbuche sogar das ganze System darauf gründen wollte, so wäre dies Verfahren gewiß eben so zweckwidrig, als die Demonstration der Elementarsätze der Geometrie durch Hülfe des Infinitesimal-Kalkuls. Seine Wichtigkeit bey höheren Untersuchungen zeigte zuerst **Lagrange** in seiner Mechanik, und erregte dadurch das allgemeine Verlangen nach einem gründlichen Beweise desselben. Den ersten Schritt hierzu that Fossombroni *); erreichte aber doch bey weitem nicht, was nach ihm Laplace mit weit geringerem Aufwande von Kalkul geleistet hat **). Ich habe seinen Beweis, so weit er die festen Körper betrifft, umständlich entwickelt, und zugleich den Gebrauch des Satzes in einzelnen Fällen zu zeigen gesucht.

Aus dem zweyten Theile will ich hier nur die beyden Hauptpunkte: d'Alemberts Princip, oder die Zurückführung der Bewegungsgesetze auf das Gleichgewicht, und die Umdrehung der Körper um freye Axen, ausheben.

Was ersteres betrift, so scheint dies noch zur Zeit sich nicht weit über Frankreichs Grenzen hinaus verbreitet zu haben. Weder Kästner, Karsten, noch sonst ein Deutscher Schriftsteller gedenken seiner auch nur mit einer Syl-

*) Sul princip. delle velocità virtuali.

**) Traité de mecanique céleste Tom. I. Liv. I.

be, und selbst Euler, der an der Erweiterung der Mechanik so thätigen Antheil nahm, fing erst bey seinen späteren Abhandlungen an, davon Gebrauch zu machen. Da ich diesen wichtigen Grundsatz beym jetzigen Zustande der Mechanik für ganz unentbehrlich halte, so habe ich vom fünften Kapitel an alles Nachfolgende darauf gegründet; stelle ihn aber unter der Form dar, die Euler ihm gegeben hat, und die mir natürlicher zu seyn scheint, als die ursprüngliche d'Alembertische; wodurch ich zu seiner Aufnahme einiges beyzutragen hoffe.

Eine einfache Ableitung aus ihm ist die Theorie des Beharrungszustandes (S. 128.), wovon man sich ohne seine Hülfe durchaus keine richtige Einsicht verschaffen kann. Auf diese Lehre habe ich das folgende Kapitel von den Arbeiten der Menschen und Thiere gebauet, und die längst adoptirte Formel (§. 133) der Empirie abgewonnen. Da die Untersuchungen

Borelli's, Parent's und Lambert's über eben den Gegenstand zu keinen Resultaten führen, und auch zum Theil auf Voraussetzungen beruhen, denen ich auf keine Weise beypflichten kann: so wird man es mir verzeihen, daß ich ihrer im Buche keine Erwähnung gethan habe.

Die Gesetze der Umdrehungen fester Körper um Axen lassen sich ebenfalls auf das Gleichgewicht zurückführen, wie ich §. 199. 240 u. f. gezeigt habe. Indeß wird doch dies Verfahren bey beweglichen Axen, wiewol es auch da noch vor allen sonst bekannten den Vorzug verdient, etwas komplicirt, und läßt sich des vielen Kalkuls wegen, der dabey unvermeidlich ist, nicht wohl in ein Lehrbuch aufnehmen. *) Das veranlaßte mich, einen ganz neuen Weg zu betreten, und von dem Grundsatze auszugehen, daß sich die Winkel-

*) S. Eulers Theoria motus corp. rigid. Cap. XV.

geschwindigkeiten, wie die geradlinigten, zusammensetzen und zerlegen lassen. Diese ungemein schöne Erfindung, die sich aus Italien herschreibt, macht die drehende Bewegung zu gleicher Behandlung fähig, als die fortrückende, und leitete mich auf die einfachste Art zu allen den wichtigen Sätzen, zu denen Euler durch das vorhin gedachte Verfahren gelangt ist.

Göttingen im Juni 1802.

J. J. A. Ide.

---

Inhalt

# Inhalt des ersten Theils.

## Erstes Kapitel. Allgemeine Betrachtung der Kräfte im Zustande des Gleichgewichts.

## Sechstes Kapitel. Vom Räderwerke.



## Siebentes Kapitel. Von der Schraube.

Achtes Kapitel. Vom Keile.



Neuntes Kapitel. Von der Cohäsion fester Körper.



Zehntes Kapitel. Von der Friktion.

Erstes

# Druckfehler im ersten Theile.

S. 63. Z. 15. statt $\int Yxd$, l. $\int Ydx$

— 85. — 10. st. Bülfinger, l. Leutmann.

— 104. — 1. von unten st. $- i$, l $= i$

— 111. — 11. st. Aepinus, l. Kraft

— 121. — 7. von unten st. daneben l. den eben

— 146. — 8. v. u. st. $\frac{1}{2}ds$, l. $\frac{1}{2}qds$

— 155. — 6. v. u. st. allemal, l. alle

— 164. — 5. v. u. st. $ds^2$, l. $d^2s$

— 177. — 9. v. u. st. $r + 70$, l. $r \cdot 70$.

— 230. — 2. st. vielförmige, l. keilförmige

— 248. — 14. st. $- \frac{1}{6}\xi\lambda a$, l. $- \frac{1}{6}\xi\lambda a^3$

— 281. — 11. st. $\frac{P'a'}{c'}$, l. $\frac{P'a'}{c'^2}$

— 309. — 4. v. u. st. $P$, l. $p$

— 341. — 15. 16. 17. und 1. v. u. st. $S$, l. $s$

Erstes Kapitel.

# Allgemeine Betrachtungen der Kräfte im Zustande des Gleichgewichtes.

## §. 1.

Unter Kraft versteht man im Allgemeinen jedes Bestreben, Bewegung hervorzubringen, es sey nun, daß Umstände sie zulassen, oder verhindern. Die gerade Linie, nach welcher eine Kraft den Körper, auf den sie wirkt, forttreibt, heißt ihre Richtung.

So ist das Fallen der Körper die Wirkung einer Kraft, die man die Schwere nennt, und deren Richtung vertikal niederwärts, oder nach einer auf den ebenen Boden senkrechten Linie geht. Ein Körper, der am Fallen gehindert wird, zeigt noch das Bestreben zu sinken durch sein Gewicht, das nach Verhältniß seiner Masse, oder der größern und geringern Menge materieller Theile, die er in sich enthält, verschieden ist. So wie nemlich die Masse eines Körpers durch Anhäufung fremder Theile zunimmt, vermehrt sich sein Gewicht; mehrere Körper, die man zugleich tragen will, erfordern die Vereinigung aller der Kräfte, die zu jedem, einzeln genommen, nöthig wären. Dies könnte die Verschiedenheit der Kräfte in Rücksicht ihrer Größe schon an sich deutlich machen; allein da auf diesen ersten Begriffen sehr vieles beruht, so wird eine nähere Entwicklung derselben nicht unnütz seyn.

§. 2.

**Gleiche** Kräfte heißen diejenigen, die auf einen und denselben Punkt nach einerley Richtung angebracht, dieselbe Wirkung hervorbringen, und also für einander substituirt werden können, ohne daß dadurch eine Aenderung verursacht wird.

§. 3.

**Zwey gleiche Kräfte, die auf einen materiellen Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirken, erhalten denselben in Ruhe.**

Gesetzt nemlich, der Punkt bewegte sich nach irgend einer Seite zu, so würde, wenn man die Kräfte verwechselte, eben diese Bewegung nach entgegengesetzter Seite erfolgen. Da nun die Verwechslung der Kräfte, ihrer Gleichheit zu Folge, die Wirkung derselben nicht abändert, so folgt, daß auch ohne diese Verwechslung, beyde Bewegungen des Punktes nach entgegengesetzten Richtungen statt finden müßten. Dies ist aber ein Widerspruch, und also kann der Punkt nach keiner Seite sich hinbewegen; er bleibt folglich in Ruhe.

§. 4.

Man sagt allgemein von Kräften, die in einer solchen Verbindung stehen, daß sie ihre Wirkungen gegen einander aufheben, sie stehen unter sich **im Gleichgewichte.** Die Lehre vom Gleichgewichte macht einen besondern Theil der Mechanik aus, den man die **Statik** nennt. Auf ihr beruhet die ganze übrige Theorie von den Kräften und ihren Wirkungen, weil sie dieselben gerade in dem Zustande betrachtet, der allein dazu passend ist, sie mit einander zu vergleichen, und unbekannte Kräfte aus bekannten zu bestimmen.

## §. 5.

**Wenn zwey Kräfte, P und Q, die nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, einander das Gleichgewicht halten, so müssen sie gleich groß seyn.**

Man nehme eine dritte Kraft $R = Q$ an, so kann man diese für Q substituiren, und es müssen folglich auch P und R noch mit einander im Gleichgewichte seyn (2). Da nun auch Q und R gegeneinander gebracht, sich im Gleichgewichte erhalten (3), so folgt, daß P und Q nach einerley Richtung dieselbe Wirkung ausüben, und also gleich groß sind (2).

## §. 6.

Zwey Kräfte, die nach einerley Richtung auf Einen Punkt zusammenwirken, vereinigen sich zu Einer Kraft nach eben der Richtung: denn da beyde Kräfte den Punkt nach dieser Richtung fortzutreiben streben, so kann er nach keiner andern als dieser fortgehen. Es muß also irgend eine Kraft geben, die eben das thut, was beyde in Verbindung bewirken, und diese ist ihnen zusammengenommen gleich.

## §. 7.

Hierauf gründet sich die Vereinigung zweyer und mehrerer Kräfte zu einem Ganzen, wobey aber allemal erforderlich ist, daß die einzelnen Theile nach gemeinschaftlicher Richtung und auf einerley Punkt wirken. Zugleich erhellet nun auch, was es heiße, eine Kraft Q sey n mal so groß, als eine andere P; sie ist es nemlich, wenn sie sich durch die Vereinigung von n Kräften hervorbringen läßt, deren jede = P ist. Gegenseitig ist $Q = \frac{1}{n} P$, wenn n Kräfte, wovon jede so groß als Q ist, erforderlich sind, um zusammengenommen eine Kraft = P zu geben.

## §. 8.

Wenn eine Kraft mit andern im Gleichgewichte steht, so ist ihre Wirkung zwar so lange aufgehoben, als das Gleichgewicht dauert, aber deshalb nicht vernichtet; man sagt daher sie übe gegen das, was ihr entgegenwirkt, einen **Druck** aus. Gewichte geben einen besondern Fall der Art.

## §. 9.

Ein solcher Druck kann auf zweyerley Art entstehen; entweder durch Kräfte, die nach entgegengesetzter Richtung streben, und dabey gleich sind (3), oder durch einen unbeweglichen Widerstand. Wenn nemsich eine Kraft auf etwas wirkt, das nicht weichen kann, so wird sie dadurch gehindert, eine Bewegung hervorzubringen, und artet so in einen Druck aus. Dieses Aufheben der Kraft setzt aber von Seiten des Widerstandes einen gleich großen Gegendruck voraus, so daß man unbewegliche Hindernisse als passive Kräfte zu betrachten hat, die sich nur da äußern, wo eine Kraft auf sie einwirkt, und dieser alsdann gerade so stark widerstehen, als sie von derselben gedrückt werden. Der Satz also: **daß jeder Druck allemal einen gleichen und entgegengesetzten veranlasse**, paßt auf beyde Fälle, wo Druck statt findet, und ist daher allgemein.

## §. 10.

**Wenn man zu gegebenen Kräften, zwischen denen Gleichgewicht statt findet, neue Kräfte hinzufügt, die ebenfalls unter sich im Gleichgewichte stehen, so wird dadurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben.**

Weil nemlich diese hinzukommenden Kräfte ihre Wirkung gegeneinander aufheben, so werden sie dadurch unfähig, auf die Verbindung der schon vorhandenen Kräfte auf irgend eine Art zu wirken, und es geschieht also durch ihr Hinzukommen nichts, was das Gleichgewicht stören könnte.

## §. 11.

**Wenn gegenseitig unter einer Verbindung von Kräften, die mit einander im Gleichge-**

wichte stehen, einige vorhanden sind, die für sich einander das Gleichgewicht halten, so kann man diese von den übrigen trennen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht unter den zurückbleibenden aufgehoben würde.

Denn diese Kräfte sind für die andern so gut als nicht vorhanden, und können also zur Hervorbringung des Gleichgewichtes nichts beytragen, wenn es nicht zwischen den übrigen Kräften schon an sich statt findet.

## §. 12.

Fig. 1. Es sey ACB eine unbiegsame gerade Linie. An den Punkten A und B ziehen zwey gleiche Kräfte nach Richtungen Aa und Bb, die auf die Linie senkrecht sind, niederwärts; dagegen ziehe in C, der Mitte von AB, eine doppelt so große Kraft nach entgegengesetzter Richtung Cc aufwärts; ich behaupte, diese drey Kräfte werden einander gegenseitig das Gleichgewicht halten.

Beweis 1) Man nehme Anfangs nur die beyden gleichen, auf A und B wirkenden Kräfte an, und betrachte den Punkt C als fest, so daß die Linie ACB nicht weiter bewegbar bleibt, als daß sie sich um C drehen läßt.

2) Unter diesen Umständen stehen die beyden Kräfte im Gleichgewichte: denn zöge die eine den Punkt A herab, so würde aus gleichem Grunde auch die andere den Punkt B herabziehen. Dadurch würde aber, weil C nicht weichen kann, die Linie gebogen; gegen die Voraussetzung.

3) Beyde Kräfte streben vereinigt, den Punkt C nach ihrer gemeinschaftlichen Richtung fortzuziehen; er widersteht also mit der doppelten Kraft nach entgegengesetzter Richtung Cc.

4) Ist daher dieser Punkt beweglich, so erfordert das Gleichgewicht eine dritte Kraft nach Cc, doppelt so groß als jede der beyden andern: denn durch diese leidet der Punkt eben den Druck wie vorhin, und alles bleibt ungeändert.

5) Also halten genannte drey Kräfte einander an der Linie im Gleichgewichte.

## §. 13.

Fig. 1. 1) Es sey jetzt die Entfernung AC = 2 . CB; man mache EC = CB, so daß E die Länge des Arms AC halbirt, und lasse auf E und B nach den senkrechten Richtungen Ee und Bb zwey Kräfte, jede = 2P, wirken, so hält eine Kraft = 4P, nach Cc angebracht, ihnen das Gleichgewicht (§. 12.).

2) Man bringe ferner auf A und C zwey Kräfte, jede = P, nach den senkrechten Richtungen Aa und Cγ, und dagegen in E eine Kraft = 2P nach Eε an, so heben auch diese ihre Wirkung gegen einander auf, und das Gleichgewicht bleibt noch wie vorhin. (§. 10.)

3) Unter diesen Kräften heben sich nun die in E von selbst auf (1, 2), und man kann sie wegnehmen, ohne das Gleichgewicht dadurch zu stören (§. 11.). Eben so kann man der Kraft 4P, die nach Cc wirkt (1), den Theil P rauben, wenn man dagegen auch die

Kraft P, die nach C$\gamma$ angebracht war (2), fortnimmt.

4) Es bleiben also noch die Kräfte in A = P nach Aa; in B = 2P nach Bb, und in C = 3P nach Cc übrig, die mit einander im Gleichgewichte stehen. Von diesen Kräften verhalten sich, wie man sieht, die in A und B verkehrt wie die Entfernungen AC und BC, und die mittlere, nach entgegengesetzter Richtung, ist ihnen zusammen genommen gleich.

## §. 14.

Gesetzt, es sey für den Fall, wo AC = n . BC, und n irgend eine bestimmte ganze Zahl ist, erwiesen, daß an der Linie ACB die Kräfte P in A und nP in B, von der Summe beyder (n + 1) P, in C nach entgegengesetzter Richtung angebracht, im Gleichgewichte erhalten werden, so gilt der Satz auch für n + 1, mithin für jede ganze Zahl n.

Es sey nemlich AC = (n + 1) BC; man nehme wieder EC = BC, wie vorhin, so wird AE = n . BC. Bringt man daher auf A und C nach den Richtungen Aa und C$\gamma$ die Kräfte P und nP an, und setzt diesen in E nach E$\varepsilon$ ihre Summe (n + 1) P entgegen, so erhalten, der Annahme nach, diese drey Kräfte gegenseitig einander im Gleichgewichte. Auch bleibt das Gleichgewicht, wenn man noch in E und B zwey Kräfte, jede = (n + 1) P, nach Ee und Bb, und in C die Kraft (2n + 2) P nach Cc hinzufügt, weil auch diese für sich einander aufheben. Hier vernichten sich nun die gleichen und entgegengesetzten Kräfte in E, und wenn man von der Kraft nach Cc so viel abnimmt, als die Kraft nach C$\gamma$ in ihr aufhebt, so bleibt nach Cc noch $(n+2)$ P übrig; also sind wieder die Kräfte P und $(n+1)$ P in A und B mit der Kraft $(n+2)$ P in C nach entgegengesetzter Richtung, im Gleichgewichte.

Das angegebene Gesetz erstreckt sich also auch auf die nächste Zahl $n+1$, wenn man es für irgend ein n voraussetzt. Da es nun für $n=2$ bewiesen ist (§. 13.), so gilt es auch für $n=3$ u. s. f., also überhaupt für jede ganze Zahl.

## §. 15.

Man nehme jetzt an, die Entfernungen AC und BC haben das Verhältniß $m:n$ zweyer ganzen Zahlen zu einander, und setze $AC = m \cdot EC$, $BC = n \cdot EC$, so stehen zwey Kräfte P und $(m-1)$ P, die auf A und C nach Aa und C$\gamma$ angebracht werden, mit ihrer Summe mP, die man ihnen in E nach E$\epsilon$ entgegensetzt, im Gleichgewichte. Zu diesen Kräften kann man noch zwey andere Q und nQ in B und E, nach den Richtungen Bb und Ee hinzufügen, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn man dagegen nur auf den Punkt C die Summe beyder $=(n+1)$ Q nach entgegengesetzter Richtung Cc wirken läßt. Man setze nun $nQ = mP$, so heben sich die entgegengesetzten Kräfte in E einander auf, und zugleich wird die Kraft in $B = \frac{m}{n} \cdot P$, und die in C nach Cc gerichtete, =

$\frac{(n+1)\,mP}{n} = (m + \frac{m}{n})\,P$. Nimmt man von letzterer den Theil $(m - 1)\,P$ hinweg, den die nach $C\gamma$ gehende Kraft in ihr aufhebt, so bleibt nach $Cc$ noch die Kraft $(1 + \frac{m}{n})\,P$ übrig; also sind auch hier die beyden Kräfte $P$ und $\frac{m}{n}\,P$ nach $Aa$ und $Bb$, die im verkehrten Verhältnisse der Entfernungen $AC$ und $BC$ stehen, mit ihrer nach $Cc$ wirkenden Summe $(1 + \frac{m}{n})\,P$ im Gleichgewichte; wodurch sich das Gesetz (§. 14.) allgemein auf jedes Verhältniß der Entfernungen ausdehnt.

Es ist nemlich klar, daß auch irrationale Verhältnisse hierunter begriffen sind, weil man jedes irrationale Verhältniß $m:n$ als ein rationales ansehen kann, dessen Glieder $m$ und $n$ unendlich sind, oder dem man sich dadurch ins Unendliche nähern kann, daß man eins von ihnen $n$, ins Unendliche wachsen läßt.

## §. 16.

Fig. 1. **Gegenseitig folgt, daß wenn zwischen drey Kräften $P$, $Q$ und $R$, die an einer unbiegsamen geraden Linie $AB$ nach senkrechten Richtungen $Aa$, $Bb$, $Cc$ ziehen, Gleichgewicht statt findet, die beyden äußern $P$ und $Q$ zusammen genommen so groß als die mittlere $R$ seyn, und sich verkehrt wie die Entfernungen $AC$ und $BC$ verhalten müssen.**

**Beweis** 1) Die Kräfte P und Q, da sie der Kraft R das Gleichgewicht halten, wirken auf den Punkt C mit einer Kraft = R nach entgegengesetzter Richtung $C\gamma$. Wenn man also die Kraft R wegnimmt, und statt ihrer den Punkt C befestigt, so übt derselbe als unbeweglicher Widerstand einen Druck = R nach Cc aus (§. 9.), und das Gleichgewicht bleibt nach wie vor.

2) Man bringe auf die Punkte A und B nach den entgegengesetzten Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ zwey neue Kräfte M und N an, die das Verhältniß BC : AC zu einander haben, so wird durch diese das Gleichgewicht nicht aufgehoben, weil sie wegen des festen Punktes C für sich im Gleichgewichte stehen.

3) Setzt man nun M = P, so heben sich beyde einander auf, folglich müssen dann auch Q und N einander aufheben, und, da sie entgegengesetzte Richtung haben, gleich groß seyn.

4) Substituirt man also für M und N in der Proportion (2) die gleichen Kräfte P und Q, so erhält man:

$$P : Q = BC : AC.$$

5) Man betrachte nunmehr wieder den Punkt C als beweglich, und alle drey Kräfte P, Q und R gegeneinanderwirkend. Das zwischen ihnen statt findende Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man auf die Punkte A und B nach den Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ zwey andere Kräfte, so groß als P und Q, und auf C nach $C\gamma$ ihre Summe P + Q anbringt; auch bleibt es noch,

wenn die sich aufhebenden Kräfte in A und B weggenommen werden, wodurch das Gleichgewicht auf die beyden Kräfte R und $P + Q$ zurückgeführt wird.

6) Da diese nun entgegengesetzte Richtung haben, so hat man $R = P + Q$, als die zweyte Bedingung des Gleichgewichts.

## Vertheilung der Last auf zwei Punkte.

### §. 17.

**Aufgabe.** Die Kräfte P und Q ziehen an der unbiegsamen Linie AcB bey A und B nach den senkrechten Richtungen Aa und Bb; man sucht den Punkt C, wo ihre Summe $P + Q$ nach entgegengesetzter Richtung angebracht werden muß, um beiden das Gleichgewicht zu halten.

**Auflösung.** 1) Es sey die Länge $AB = a$, $AC = x$, so ist $BC = a - x$, und folglich nach den Bedingungen des Gleichgewichtes $P(a - x) = Qx$ (§. 16.).

2) Also $Pa = (P + Q)x$, und daher $AC = x = \frac{Pa}{P + Q}$, $BC = a - x = \frac{Qa}{P + Q}$

### §. 18.

Gesetzt, zwey Menschen, deren Kräfte sich wie $m : n$ verhalten, sollen auf einer Stange oder Tragbohre von gegebener Länge AB, eine Last tragen, so hat man aus vorigem §. die Auflösung der Frage, auf welchen Punkt diese Last angebracht werden muß, damit sie zwischen beyden, ihren Kräften gemäß, vertheilt werde. Die Kräfte, die sie dabey anwenden, sind nemlich vertikal aufwärts gerichtet, und müssen der Last, die vertikal niederwärts zieht, an der Stange das Gleichgewicht halten; wir erhalten also diesem zu Folge

$$AC = \frac{ma}{m+n}, \text{ und } BC = \frac{na}{m+n}$$

## §. 19.

Eine Frage derselben Art ist, wie stark zwey Unterlagen bey A und B gedrückt werden, die vermittelst einer unbiegsamen Stange oder dergleichen eine Last O tragen, welche an dieser irgendwo in C aufgehängt ist.

Hier vertreten die Unterlagen die Stelle zweyer vertikal aufwärts gerichteten Kräfte, die der Last O das Gleichgewicht halten, indem sie nach dieser Richtung einen Druck ausüben. Der gesuchte Druck also, den sie leiden, ist jenem gleich und entgegengesetzt. Nennt man daher P den Druck, der auf A kommt, Q den, der auf B kommt, und die Entfernungen $AC = f$, $BC = g$, so hat man:

$$Pf = Qg, \quad P + Q = O.$$

Man multiplicire in letzterer Gleichung allenthalben durch g, und substituire dann für Qg den Werth Pf, so bekommt man: $P(f+g) = Og$, also:

$$P = \frac{Og}{f+g} \text{ und eben so } Q = \frac{Of}{f+g}$$

## Der geradlinigte Hebel.

§. 20.

Die unbiegsame Linie ACB bekommt den Namen eines **geradlinigten Hebels**, wenn sie in irgend einem Punkte C befestigt ist, so daß sie sich um denselben nach Gefallen drehen läßt. Der feste Punkt C heißt sein **Ruhepunkt**; auch wohl, wenn man die Kräfte als Gewichte betrachtet, der **Unterstützungspunkt**, die **Unterlage**.

§. 21.

Die Bedingungen des Gleichgewichts zweyer Kräfte am Hebel, sind bloße Folgerungen aus dem, was bereits vorgetragen ist. Da nemlich die Befestigung des Punktes C statt der Kraft R dient (§. 16. 1.), so fällt diese aus der Betrachtung weg, und die allgemeinern Sätze des §. 15 und §. 16. lauten hier folgendermaßen:

1. **Zwey Kräfte P und Q, die an den Punkten A und B eines Hebels nach senkrechten Richtungen Aa und Bb ziehen halten einander das Gleichgewicht, wenn P : Q = BC : AC d. i. wenn sie sich verkehrt, wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte verhalten;** und umgekehrt

2) **wenn am Hebel die Kräfte P und Q miteinander im Gleichgewichte seyn sollen, so muß P : Q = BC : AC seyn.**

**3. Der Ruhepunkt C leidet von den beyden Kräften einen Druck $P+Q$ nach einer Richtung $C\gamma$, die ebenfalls senkrecht auf den Hebel ist, und übt folglich einen gleichen Gegendruck aufwärts nach $Cc$ aus.**

§. 22.

Aus der Proportion $P : Q = BC : AC$ erhält man die Gleichung $P . AC = Q . BC$, welche näher zu erkennen giebt, wonach man eigentlich die Wirkung der Hebelkräfte zu schätzen habe. Gesetzt nemlich, die Kraft P sey an sich kleiner als Q, so kann demungeachtet das Produkt $P . AC > Q . BC$ seyn, und in diesem Falle müßte also Q dennoch vermehrt werden, um unter diesen Umständen der Kraft P das Gleichgewicht zu halten. Man sieht daher, daß die Wirkung einer Kraft am Hebel allein auf das Produkt aus ihr in die Entfernung derselben vom Ruhepunkte ankomme. Dies Produkt heißt das **Moment** der Kraft.

§. 23.

**Bey der unbiegsamen Linie, woran sich gegenseitig drey Kräfte das Gleichgewicht halten, kann man jede derselben so betrachten, als sey sie die Gegenkraft, welche das Gleichgewicht bewirkt. Man nehme die Kraft bey B für diese an, so folgt, daß die andern beyden in Verbindung so auf den Punkt B wirken müssen, als eine Kraft es thun würde, die jener gleich, und nach entgegengesetzter Richtung $B\beta$ angebracht wäre. Befestigt man also den Punkt B, mit Weglassung der**

Kraft Q, so leidet derselbe einen Druck $=$ Q nach der Richtung $B\beta$, und setzt diesem einen gleichen Druck entgegen; wirkt also durch seine Festigkeit eben das, was vorhin die Kraft that, so daß das Gleichgewicht dadurch nicht unterbrochen wird. Dies bildet eine zweyte Art von Hebel, der in B seinen Ruhepunkt hat, und an welchem die Kräfte P und R nach den entgegengesetzten Richtungen Aa und Cc sich im Gleichgewichte erhalten. Man nennt ihn den **einarmigen Hebel.**

## §. 24.

Aus $P : Q = BC : AC$ folgt:

$$P : (P + Q) = BC : AB.$$

Setzt man hierinn für $P + Q$ seinen Werth R, so erhält man folgende Gleichung: $P \,.\, AB = R \,.\, BC$.

Also sind auch beym einarmigen Hebel im Falle des Gleichgewichtes die Produkte aus den Kräften in die Entfernungen vom Ruhepunkte, oder die Momente der Kräfte einander gleich.

## §. 25.

Fig. 1. **In einem Systeme von Kräften, die unter sich im Gleichgewichte stehen, kann man ohne Verletzung desselben mehreren von diesen Kräften eine einzige substituiren, wofern diese so beschaffen ist, daß sie nach entgegengesetzter Richtung angebracht, den erwähnten Kräften das Gleichgewicht halten würde.**

Beweis 1) Es seyen die Kräfte P und Q, die zu einem Systeme mehrerer im Gleichgewichte stehender Kräfte

Kräfte gehören, und auf die Punkte A und B nach den Richtungen Aa und Bb wirken, mit einer fremden nach Cc gerichteten Kraft R für sich im Gleichgewichte, so halten auch dieselben Kräfte P, Q, R, oder drey andere, die ihnen gleich sind, nach den entgegengesetzten Richtungen A$\alpha$, B$\beta$ und C$\gamma$ auf die Punkte A, B und C angebracht, einander das Gleichgewicht.

2) Man bringe diese drey letztern in der angegebenen Verbindung auf das System an, so wird durch sie das Gleichgewicht nicht gestört (§. 10.). Da aber zwey von ihnen den Kräften P und Q gleich und entgegengesetzt sind, so heben sie sich mit diesen auf, und das Gleichgewicht bleibt also auch noch, wenn beyde Paare aus dem Systeme weggenommen werden.

3) Alsdann bleibt aber bloß die Kraft R nach der Richtung C$\gamma$ zurück, die also noch eben so auf das System wirkt, als es vorhin die Kräfte P und Q thaten, folglich ihnen als gleichgültig substituirt werden kann.

4) Es sind hier nur zwey Kräfte aus dem Systeme genommen, und so vorgestellt, als wirkten sie am freyen Hebel. Man sieht aber, daß beydes auf die Sache selbst keinen Einfluß hat, und daß der Beweis von mehrern Kräften, die in jedem andern Zusammenhange stehen, sich eben so führen läßt.

## §. 26.

Von einer Kraft, die einer oder mehreren andern Kräften substituirt werden kann, ohne daß dadurch das

Gleichgewicht verletzt würde, sagt man, sie sey ihnen **äquipollent.** Es können auch mehrere Kräfte zugleich andern äquipollent seyn, wofern sie nur die Eigenschaft haben, jenen das Gleichgewicht zu halten, wenn man sie nach entgegengesetzter Richtung auf eben die Punkte anbringt. Aequipollente Kräfte sind in der Mechanik eben so zu betrachten, als bey Gleichungen Ausdrücke verschiedener Art, die einerley Werth haben; sie können für einander gesetzt werden, ohne daß die Wirkung, auf der hier alles allein beruhet, dadurch verändert würde.

## Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Hebel.

### §. 27.

Wenn auf der einen Seite eines Hebels ACB, der in C seinen Unterstützungspunkt hat, mehrere Kräfte P, P′, P″ ... die wir als Gewichte ansehen wollen, in den Entfernungen f, f′, f″ u. s. f. von C angebracht sind, so ist eine einzige Kraft V auf der andern Seite vermögend, ihnen allen das Gleichgewicht zu halten. Man denke sich nemlich diese Kraft in so viele Theile p, q, r u. s. f. getheilt, als einzelne Gewichte vorhanden sind, so daß der Theil p auf das Gewicht P, q auf P′ u. s. f. verwandt werden kann, so wird zwischen der ganzen Kraft V und dem Systeme von Gewichten Gleichgewicht statt finden, wenn es zwischen den einzelnen Theilen der Kraft und den Gewichten, jedes besonders genommen, statt hat (§. 10.).

Es sey A der Punkt, worauf die Kraft V angebracht werden muß, und $AC = u$, so ist vermöge der Voraussetzung des Gleichgewichtes zwischen den einzelnen Theilen:

$pu = Pf$, $qu = P'f'$ u. s. f. also:
$(p + q + r ..) u = Pf + P'f' + P''f''$ u. s. f.
oder, da $p + q + r + .. = V$ ist:
$Vu = Pf + P'f' + P''f'' ...$

woraus erhellet, daß das Moment dieser Kraft = der Summe der Momente aller der einzelnen Gewichte seyn muß, denen gemeinschaftlich sie das Gleichgewicht hält.

## §. 28.

Es ist also auch mehreren Gewichten, die auf einer Seite des Ruhepunktes in verschiedenen Entfernungen von demselben hängen, ein einziges Gewicht an eben dem Hebelarme äquipollent, wenn sein Moment der Summe ihrer einzelnen Momente gleich ist (§. 25.).

## §. 29.

Aufgabe. Es sind an dem einen Arme eines Hebels die Gewichte P, P', P'' u. s. f. in den Entfernungen f, f', f'' u. s. f., und am andern die Gewichte Q, Q', Q'' u. s. f. in den Entfernungen g, g', g'' u. s. f. vom Ruhepunkte befindlich; man fragt, unter welchen Bedingungen beyde Seiten einander das Gleichgewicht halten werden.

Auflösung 1) Es sey den Gewichten P, P', P'' u. s. f. eine Kraft M in der Entfernung a vom Ruhepunkte äquipollent, so hat man $Ma = Pf + P'f' + P''f'' + \ldots$ (§. 28.)

2) Eben so ist auch, wenn man annimmt, es sey die Kraft N in der Entfernung b vom Ruhepunkte den Gewichten Q, Q', Q'' u. s. f. äquipollent:

$$Nb = Qg + Q'g' + Q''g'' + \text{u. s. f.}$$

3) Herrscht nun zwischen den Gewichten P, P', P''.. und Q, Q', Q''.. Gleichgewicht, so findet dies auch zwischen den Kräften M und N statt, weil man diese jenen substituiren kann, und dem zu Folge ist $Ma = Nb$, also auch

$$Pf + P'f' + P''f'' + \ldots = Qg + Q'g' + Q''g'' + \ldots$$

4) Die Summe der Momente der einzelnen Gewichte muß daher auf der einen Seite so groß seyn, als auf der andern, wenn sie einander aufwiegen sollen.

## Gemeinschaftlicher Schwerpunkt mehrerer Kräfte an einer unbiegsamen Linie.

### §. 30.

Die vorhin angestellte Betrachtung des Gleichgewichtes mehrerer Kräfte am Hebel bezieht sich auf die Voraussetzung eines festen Punktes, und kann daher nicht geradezu auf den Fall angewandt werden, wenn der Hebelarm frey ist, und bloß durch die gegenseitige Wirkung der Kräfte in Ruhe erhalten werden muß. Wir wollen zu dieser Absicht nun ein anderes Verfahren wählen, welches allgemeiner ist, und zugleich auch zu den weitern Untersuchungen in der Folge den Weg eröffnen wird.

Fig. 2. Wir wollen mit zweyen Kräften P und P′ den Anfang machen, die an der geraden Linie AG auf die Punkte M und N nach den senkrechten Richtungen Mm und Nn angebracht sind, und von einer dritten Kraft S nach entgegengesetzter Richtung Gg im Gleichgewichte erhalten werden. Die Entfernungen der Punkte M und N von einem willkührlichen Anfangspunkte A seyen $= x$, und $x'$; die Entfernung $Ag = f$, so haben wir $MG = f - x$, $GN = x' - f$, also nach den Erfordernissen des Gleichgewichtes

$$P(f-x) = P'(x'-f), \text{ und } S = P + P'$$

Erstere Gleichung giebt $(P + P')\, f = Px + Px'$, daher hat man $f = \frac{Px + Px'}{P + P'}$, die Entfernung von A in der die Summe der beyden Kräfte P und P′ angebracht werden muß, um ihnen das Gleichgewicht zu halten, oder ihnen äquipollent zu seyn, je nachdem man ihr die entgegengesetzte oder dieselbe Richtung giebt, welche die Kräfte haben.

## §. 31.

Fig. 2. Es seyen jetzt drey Kräfte P, P′, P″ auf die Punkte M, N und O der geraden Linie AG in den Entfernungen $x$, $x'$, $x''$ von A angebracht, und eine vierte Kraft S, die auf den Punkt G nach entgegengesetzter Richtung Gg wirkt, halte ihnen zusammen das Gleichgewicht. Den erstern beyden P und P′ ist ihre Summe in irgend einem Punkte der geraden Linie äquipollent, und man kann sie daselbst statt der einzel-

nen Kräfte P und P′ substituiren, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Es sey H dieser Punkt, so hat man für denselben: $AH = \frac{Px + P'x'}{P + P'}$.

Jetzt bleiben also nur noch die beyden Kräfte $P + P'$ nach Hh und $P''$ nach Oo übrig, denen die Kraft S nach Gg das Gleichgewicht halten muß. Diesem zu Folge ist $S =$ ihrer Summe, oder $= P + P' + P''$, und $(P + P' + P'')\, f = (P + P') \cdot \frac{Px + P'x'}{P + P'}$ $+ P''x'' = Px + P'x' + P''x''$, folglich:

$$f = \frac{Px + P'x' + P''x''}{P + P' + P''}.$$

## §. 32.

Hieraus läßt sich schon schließen, wie für mehrere Kräfte die zum Gleichgewichte erforderliche Gegenkraft, und der Punkt G auf den sie angebracht werden muß, bestimmt werde. Nennt man nemlich $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)} \ldots P^{(n)}$ die vorhandenen Kräfte, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \ldots x^{(n)}$ die Entfernungen der Punkte von A in der geraden Linie, S die Gegenkraft, f die Entfernung AG, so sieht man leicht, daß

$$S = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} \ldots + P^{(n)} \text{ und}$$

$$Sf = P^{(1)}x^{(1)} + P^{(2)}x^{(2)} + P^{(3)}x^{(3)} \ldots + P^{(n)}x^{(n)}$$

seyn werde.

Um dies allgemein zu zeigen, setze man, es sey diese Vermuthung für irgend eine Anzahl von n Kräften bereits gerechtfertigt. Man bringe sodann noch eine

Kraft $P^{(n+1)}$ auf die Linie in der Entfernung $x^{(n+1)}$ von A an, und nenne $S'$, $f'$ die veränderten Werthe, welche S und f dadurch bekommen, so daß jetzt $S'$ die Kraft ist, welche allen den Kräften $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)} \ldots P^{(n+1)}$ das Gleichgewicht hält. Da nun S vorhin mit $P^{(1)}$, $P^{(2)} \ldots P^{(n)}$ im Gleichgewichte war, so ist sie ihnen nach entgegengesetzter Richtung $G\gamma$ angebracht, äquipollent, und kann für sie, ohne Verletzung des Gleichgewichtes, substituirt werden, wodurch das Gleichgewicht auf die drey Kräfte S, $P^{(n+1)}$ und $S'$ gebracht wird. Daraus folgt nun

$$S' = S + P^{(n+1)}$$

$$S'f' = Sf + P^{(n+1)} . x^{(n+1)} \text{ (§. 30.)}$$

oder, wenn man für S und Sf ihre Werthe substituirt

$$S' = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} \ldots + P^{(n+1)}$$

$$S'f' = P^{(1)} x^{(1)} + P^{(2)} x^{(2)} \ldots + P^{(n+1)} . x^{(n+1)}.$$

Also erstreckt sich das Gesetz jedesmal auf $n + 1$ Kräfte, wenn man es für n Kräfte voraussetzt, und gilt folglich, weil es für 2 und 3 Kräfte erwiesen ist, auch für 4, 5 Kräfte u. s. f. und überhaupt für jede beliebige Anzahl.

## §. 33.

Wenn daher an einer unbiegsamen geraden Linie mehrere Kräfte, so viel derer auch seyn mögen, nach senkrechten Richtungen ziehen, so giebt es allemal einen Punkt in derselben, worauf die Summe derselben nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält, oder wenn man sie nach derselben

Richtung ziehen läßt, ihnen äquipollent ist. Man nennt ihn den **gemeinschaftlichen Schwerpunkt** der Kräfte.

## Physischer Hebel.

### §. 34.

Aus dem, was §. 22. vom Hebel gesagt ist, sieht man die Möglichkeit, wie man einer Last durch eine viel geringere Kraft das Gleichgewicht halten könne. Es läßt sich also mit einem kleinen Gewichte vermittelst des Hebels ein größeres aufwiegen, und folglich durch das kleinere schätzen, wie groß es seyn müsse. In der Anwendung kommt nur dabey noch in Betracht, daß der Hebelarm, damit er das Erforderniß der Unbiegsamkeit erfülle, eine körperliche Dicke haben muß, und folglich vermöge seines Gewichtes auf das Gleichgewicht der an ihm befindlichen Kräfte Einfluß hat.

### §. 35.

Fig. 1. Wir wollen setzen, der Hebel AB sey seiner ganzen Länge nach von gleicher Dicke, so kann man ihn als eine gerade Linie betrachten, die allenthalben mit gleichen Gewichten beschwert ist. Um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller dieser unendlich kleinen Gewichte zu finden, lasse man den Anfangspunkt (§. 32.) in die Mitte C der Linie fallen; alsdann ist die Summe der Produkte $Px$ auf beyden Seiten derselben gleich groß, und entgegengesetzt, folglich die Summe aller $Px$ längst dem ganzen Hebel $= 0$, mithin auch $f = 0$.

Der Schwerpunkt des Hebels fällt daher in die Mitte desselben, und man kann ihn also als eine Linie ansehen, in deren Mitte sein ganzes Gewicht vereinigt ist.

## §. 36.

Fig. 3. Es sey nun der Hebel AOB in O unterstützt, und in horizontaler Lage, so daß die Gewichte P und Q, welche in M und F einander aufwiegen, nach senkrechten Richtungen $M\mu$ und $F\varphi$ wirken. Man setze die ganze Länge des Hebels $AB = a$, sein Gewicht $= G$, das man als eine Kraft anzusehen hat, die in C, der Mitte von AB angebracht ist; außerdem sey $MO = f$, $OF = g$, $OB = b$, so ist $CO = \frac{1}{2} a - b$, und man bekommt daher folgende Gleichung (§. 29.):

$$Pf + G(\tfrac{1}{2} a - b) = Qg.$$

## §. 37.

Die Länge des andern Armes AO ist $= a - b$, also beyder Unterschied $= a - 2b$. Nennt man diesen d, so wird:

$$Pf + \tfrac{1}{2} Gd = Qg.$$

Man sieht hieraus, daß der Einfluß, den das Gewicht des Hebels auf das Gleichgewicht der an ihm befindlichen Kräfte hat, sich nach dem Unterschiede der Hebelarme in Ansehung ihrer Längen richtet. Beym gleicharmigen Hebel kommt also dies Gewicht gar nicht in Betracht, und man hat für denselben $Pf = Qg$, wie beym mathematischen Hebel.

## §. 38.

Ist die Last im Endpunkte B aufgehängt, so wird $g = b$, folglich $Pf + \frac{1}{2} Gd = Qb$. Dieser Fall findet bey der sogenannten **Schnellwage** statt, welche dazu dient, mit einem bekannten Gewichte P, das sich auf dem längern Arme AO hin und her schieben läßt, jede noch so große Last Q abzuwiegen. Man nennt P bey ihr das **Laufgewicht**.

## §. 39.

Für $P = 0$ wird $Qb = \frac{1}{2} Gd$, also $Q = \frac{Gd}{2b}$, wodurch das Gewicht bestimmt wird, das ohne Gegengewicht bloß auf die Ueberwucht des längern Armes AO verwandt werden muß. Dies läßt sich leicht durch einen Versuch finden, und kann daher als eine bekannte Größe in die Gleichung hineingebracht werden. Man setze es $= H$, so erhält man $Hb = \frac{1}{2} Gd$, also:

$Pf = (Q - H) b$, und wenn man den Quotienten $\frac{P}{b}$, der hier beständig ist, A nennt, so wird $Q = Af + H$.

Das Gewicht Q besteht also aus zwey Theilen, dem veränderlichen Af, der sich wie f verhält, und dem unveränderlichen H, und kann daher nach dieser Formel sehr leicht berechnet werden.

## §. 40.

Gegenseitig wird $f = \frac{(Q - H) b}{P}$, oder, wenn man $\frac{Q}{P} = m$, und $\frac{Hb}{P} = c$ setzt, so giebt dies für f den einfachen Ausdruck $mb - c$, nach dem sich auf dem Arme AO folgendermaaßen eine Scale zur Angabe des Gewichtes entwerfen läßt.

Fig. 4. Man schneide auf einer Linie DA von unbestimmter Länge von D aus die Stücke b, 2b, 3b u. s. f. ab, welches die Punkte 1, 2, 3, 4 u. s. f. geben mag, und nehme DO = c; so sind O2, O3, O4 u. s. f. die Entfernungen, die den Werthen 2P, 3P, 4P u. s. f. für Q entsprechen. Man kann nun noch die gleichen Zwischenräume zwischen den Punkten 1, 2, 3 u. s. f. ferner eintheilen, und so durch diese Theilungspunkte das Gewicht Q mit einer Genauigkeit bestimmen, wie nur irgend verlangt werden kann.

## §. 41.

Fig. 1. Es sey ACB ein einarmiger Hebel, der in dem Endpunkte B unterstützt ist, und an dessen anderem Endpunkte A eine Kraft nach vertikaler Richtung $A\alpha$ aufwärts drückt, um einer Last Q, die in C nach $C\gamma$ den Hebel nieder zu ziehen strebt, das Gleichgewicht zu halten. Man setze die Länge AB = f, das Gewicht des Hebels, das dieser Länge proportional ist, $= \varkappa f$, CB = b, so hat man die Gleichung:

$$Pf = Qb + \tfrac{1}{2}\varkappa f^2, \text{ und diese giebt } P = \frac{Qb}{f} + \tfrac{1}{2}\varkappa f.$$

Sowohl für ein unendlich großes als unendlich kleines f wird dieser Ausdruck unendlich; also erhellet, daß er für irgend ein f ein Mindmum seyn müsse, oder daß eine Länge des Hebels statt finde, bey welcher die Kraft auf die Last am vortheilhaftesten wirkt. Um diese zu finden, differenziire man obige Gleichung, indem man bloß P und f als veränderlich ansieht, so erhält man $Pdf + fdP = \varkappa f$. Hierin $dP = 0$ gesetzt, giebt $P = \varkappa f$, d. i. die Kraft muß = dem Gewichte des Hebels seyn. Man substituire für P diesen Werth in der Gleichung, so wird $\frac{1}{2} \varkappa f^2 = Qb$, folglich $f = \sqrt{\frac{2Qb}{\varkappa}}$

## Winkelhebel.

### §. 42.

Fig. 5. Es sey AOB ein Winkel mit unbiegsamen Schenkeln, und um den festen Punkt O beweglich, ohne daß seine Größe sich ändern kann. Wenn an diesem zwey Kräfte in gleichen Entfernungen AO und BO vom Umdrehungspunkte nach Richtungen Aa und Bb ziehen, die senkrecht auf die Arme sind, und in der Ebene des Winkels liegen, so ist klar, daß solche einander das Gleichgewicht halten müssen: denn es geschieht hier, wie beym geradlinigten Hebel, auf beyden Seiten ganz dasselbe; also hat der Winkel eben so viel Bestreben nach der einen Seite sich zu drehen, als nach der andern, und bleibt daher ruhen.

### §. 43.

Fig. 5. **Lehrsatz.** Sind an dem Winkelhebel

zwey Kräfte P und Q in ungleichen Entfernungen AO und BO vom Ruhepunkte nach senkrechten Richtungen Aa, Bb angebracht, so halten sie einander das Gleichgewicht, wenn sie sich, wie beym geradlinigten Hebel, verkehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

Beweis. 1) Man mache EO = OB, und bringe in A die Kraft P nach Aa und in E eine Kraft = Q nach der Richtung Ee an, so stehen diese am einarmigen Hebel AO im Gleichgewichte, weil P : Q = EO : AO ist.

2) Dies Gleichgewicht bleibt noch, wenn in B die Kraft Q nach Bb, und in E eine gleich große nach Ee angebracht wird (§. 42.).

3) Dann aber heben sich die beyden gleichen und entgegengesetzten Kräfte in E, und können folglich weggenommen werden; so daß auch die beyden übrigbleibenden Kräfte P und Q in A und B noch mit einander im Geichgewichte seyn müssen.

## §. 44.

Fig. 5. Gegenseitig: wenn die Kräfte P und Q am Winkelhebel sich das Gleichgewicht halten, so folgt, daß P:Q = BO:AO seyn müsse.

Man bringe nemlich auf den Punkt A noch eine Kraft = P, nach entgegengesetzter Richtung A$\alpha$, und in B eine Kraft R nach B$\beta$ an, die das Verhältniß BO:AO zu einander haben. Diese beyden Kräfte sind für sich im Gleichgewichte, und stören also das schon vorhandene Gleichgewicht zwischen P und Q nicht. Da nun die Kräfte in A sich aufheben, so folgt, daß auch die beyden Kräfte Q und R bey B im Gleichgewichte stehen, und, weil sie einander entgegengesetzt sind, gleich groß seyn müssen. Man hat folglich: Q = R, und dieser Werth für R in vorhergehende Proportion substituirt, giebt P : Q = BO : AO.

---

Zweytes Kapitel.

## Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

---

### §. 45.

Fig. 6. **Lehrsatz. Zwey gleiche Kräfte P und Q, die auf zwey Punkte A und B einer festen geraden Linie A B nach Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ wirken, welche mit der Linie gleichlaufend aber entgegengesetzt sind, halten einander an dieser Linie das Gleichgewicht.**

Beweis. 1) Wäre die Kraft P allein vorhanden, so würde sie den Punkt A nach $A\alpha$ wirklich fortbewegen. Dies würde zur Folge haben, daß auch der nächste Punkt a in dieser Linie, weil er wegen der Festigkeit derselben von A unzertrennlich ist, diesem folgen, und um eben so viel nach $a\alpha$ fortrücken würde als A.

2) Was von a gilt, erstreckt sich auf jeden zunächstliegenden Punkt, folglich auch auf den Punkt B.

3) Eben diese Bewegung würde B aber auch nach entgegengesetzter Richtung B$\beta$ durch die Kraft Q bekommen; da nun beydes nicht zugleich geschehen kann, so bleibt derselbe, so wie die ganze Linie, unbeweglich, oder die beyden Kräfte stehen mit einander an der Linie im Gleichgewichte.

## §. 46.

Folgerung 1. Wenn eine Kraft auf den Punkt A einer festen geraden Linie angebracht ist, und ihre Richtung A$\alpha$ in diese Linie hineinfällt, so ist eine eben so große Kraft in jedem andern Punkte B derselben ihr äquipollent, wofern sie dieselbe Richtung B$\alpha$ hat (§. 25.).

2. **Man kann daher eine Kraft, die mit andern im Gleichgewichte steht, auf jeden beliebigen Punkt ihrer Richtung anbringen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht aufgehoben wird:** denn man kann ohne Verletzung des Gleichgewichtes zwey Punkte ihrer Richtung durch eine feste gerade Linie in Verbindung bringen, und an dieser, da sie in die Richtung der Kraft fällt, die Kraft von einem Punkte auf den andern verlegen.

## §. 47.

Fig. 7. **Lehrsatz. Wenn von dreyen Kräften P, Q, R, die gemeinschaftlich auf einen Punkt C nach den Richtungen** C$\alpha$, C$\beta$ **und** C$\gamma$ **wirken,**

die eine R den andern beyden P und Q das Gleichgewicht halten soll, so muß ihre Richtung den Winkel ACB so theilen, daß P . Sin ACO $=$ Q . Sin BCO ist.

Beweis. 1) Man verlängere C$\gamma$, die Richtung der Kraft R rückwärts über C hinaus willkührlich bis O, fälle aus diesem Punkte auf AC und C$\beta$ die Perpendikel OA und OB, und lege durch die Punkte A, O, B einen Winkelhebel.

2) Da diese Punkte in den Richtungen der Kräfte liegen, so kann man auf sie die Kräfte hinverlegen, ohne das Gleichgewicht dadurch zu stören (§. 46.), also müssen sich die drey Kräfte auch noch an dem Winkelhebel nach den Richtungen A$\alpha$, B$\beta$ und C$\gamma$ das Gleichgewicht halten.

3) Da die Kraft R von den andern beyden aufgehoben wird, so müssen letztere auf den Punkt O mit einer Kraft $=$ R nach entgegengesetzter Richtung $\gamma$O wirken.

4) Befestigt man daher den Punkt O mit Weglassung der Kraft R, so leidet dieser Punkt von den Kräften P und Q einen Druck $=$ R nach $\gamma$O, und wirkt also mit eben der Kraft nach O$\gamma$ zurück. Es wird folglich den beyden Kräften noch eben der Widerstand geleistet, als vorhin, und daher das Gleichgewicht nicht aufgehoben.

5) Da nun die Richtungen A$\alpha$ und B$\beta$ der Kräfte P und Q auf die Arme des Winkelhebels senkrecht sind, so hat man als Bedingung des Gleichgewich-

wichtes: (§. 44.) P : Q = BO : AO oder P . AO = Q . BO.

6) Nun ist AO = OC . Sin ACO und BO = OC . Sin BCO; substituirt man diese Werthe für AO und BO in die Gleichung (5), und dividirt dann auf beyden Seiten durch OC; so erhält man

P . Sin ACO = Q . Sin BCO.

## §. 48.

Die dritte Kraft R kann demnach nur unter der Bedingung den beyden andern P und Q das Gleichgewicht halten, wenn ihre Richtung den Winkel ACB so theilt, daß sich die Sinus der Theile verkehrt verhalten, wie die Kräfte, deren Richtungen daran grenzen. Das Verhältniß der Kräfte P und Q, und der Winkel, den ihre Richtungen einschließen, bestimmen also die Richtung der dritten Kraft, indem diese einen der Lage und Größe nach gegebenen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse theilen muß. Wir wollen nun sehen, wie die Kraft selbst durch eben die Stücke bestimmt werde.

## §. 49.

**Aufgabe.** Die Größe der Kraft R zu finden, die den gegebenen Kräften P und Q am Punkte C das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** 1) Aus der Forderung, daß R den Kräften P und Q das Gleichgewicht halten soll, fließt die Gleichung

P . Sin ACO = Q . Sin BCO (§. 47.).

2) Die drey Kräfte halten einander gegenseitig das Gleichgewicht; verlängert man also AC über C hinaus, und sieht P als die Gegenkraft an, die den beyden übrigen das Gleichgewicht hält, so giebt dies eine zweyte Gleichung

$Q \,.\, \mathrm{Sin}\, BCN = R \,.\, \mathrm{Sin}\, \gamma CN$, oder da $\mathrm{Sin}\, BCN = \mathrm{Sin}\, ACB$, und $\mathrm{Sin}\, \gamma CN = \mathrm{Sin}\, ACO$, so hat man auch

$$Q \,.\, \mathrm{Sin}\, ACB = R\, \mathrm{Sin}\, ACO.$$

3) Da P und Q, und der Winkel ACB gegeben sind, so enthalten die beyden Gleichungen (1) und (2) nur zwey unbekannte Größen, nemlich den Winkel ACO und die Kraft R, die sich also beyde daraus finden lassen.

## §. 50.

Man setze den Winkel $ACB = \alpha$, $ACO = \vartheta$; alsdann ist $BCO = \alpha - \vartheta$, und man hat:

$$P\, \mathrm{Sin}\, \vartheta = Q\, \mathrm{Sin}\, (\alpha - \vartheta)$$

$$Q\, \mathrm{Sin}\, \alpha = R\, \mathrm{Sin}\, \vartheta$$

Aus ersterer Gleichung wird:

$$P\, \mathrm{Sin}\, \vartheta = Q\, \mathrm{Sin}\, \alpha\, \mathrm{Cos}\, \vartheta - Q\, \mathrm{Cos}\, \alpha\, \mathrm{Sin}\, \vartheta$$

also $(P + Q\, \mathrm{Cos}\, \alpha)\, \mathrm{Sin}\, \vartheta = Q\, \mathrm{Sin}\, \alpha\, \mathrm{Cos}\, \vartheta$

und daher $\mathrm{tang}\, \vartheta = \dfrac{Q\, \mathrm{Sin}\, \alpha}{P + Q\, \mathrm{Cos}\, \alpha}$ wodurch die Direktion der Kraft R bestimmt wird. Diese Gleichung mit der zweyten verbunden, giebt nun ferner:

$$R\, \mathrm{Cos}\, \vartheta = P + Q\, \mathrm{Cos}\, \alpha$$

Man hat daher:

$$R^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 = P^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha + Q^2 \operatorname{Cos} \alpha^2$$

$$\text{und } R^2 \operatorname{Sin} \vartheta^2 = \ldots\ldots\ldots\ Q^2 \operatorname{Sin} \alpha^2$$

$$\text{folglich } R^2 = P^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha + Q^2$$

$$\text{und } R = \sqrt{(P^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha + Q^2}$$

§. 51.

Fig. 8. Vermittelst der beyden Gleichungen (1) und (2) des §. 49. läßt sich auch die Richtung und Größe der Kraft R auf sehr einfache Weise geometrisch darstellen. Man nehme nemlich auf den Richtungen der Kräfte P und Q die Punkte A und B so, daß die Längen AC und BC sich wie die Kräfte P und Q verhalten, und ergänze das Parallellogram ACBD, so ist:

$$P : Q = AC : AD = \operatorname{Sin} BCD\ (CDA) : \operatorname{Sin} ACD \text{ also}$$

$$P \operatorname{Sin} ACD = Q \operatorname{Sin} BCD.$$

Daher theilt die Diagonale des Parallellograms den Winkel ACB nach eben dem Verhältnisse, als die Richtung der mittlern Kraft, und fällt folglich mit dieser zusammen.

Ferner ist CB : CD = Sin BDC : Sin CBD = Sin ACD : Sin ACB, zugleich aber auch Q : R = Sin ACO : Sin ACB, folglich CB : CD = Q : R.

**Die mittlere Kraft wirkt also nach der Diagonale des konstruirten Parallelograms und verhält sich auch wie diese Diagonale.**

§. 50.

Wir haben die beyden Gleichungen P Sin ACO = Q Sin BCO und Q Sin ACB = R Sin ACO aus der Annahme des Gleichgewichtes zwischen den drey Kräften P, Q und R abgeleitet; es kann also da, wo sie nicht erfüllt werden, kein Gleichgewicht statt finden. Gegenseitig läßt sich nun zeigen, daß sie die einzigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes sind, oder daß dasselbe allemal vorhanden seyn müsse, wo ihnen Genüge geschieht. Man lasse nemlich (Fig. 7.) auf den Punkt C zwey Kräfte P′ und Q′ = den Kräften P und Q, nach den Richtungen CN und CI an, und nach einer mittlern Richtung $\gamma$C eine Kraft R′, die ihnen das Gleichgewicht hält, so ist P′ Sin $\gamma$CN = Q′ Sin $\gamma$CI, und Q′ Sin $\gamma$CN = R′ Sin $\gamma$CN. Der Winkel ICN wird also nach eben dem Verhältnisse getheilt, als der ihm gleiche Winkel ACB; daher hat man $\gamma$CN = ACO, und mithin R′ = R.

Bringt man demnach auf den Punkt C auch die Kräfte P und Q nach den entgegengesetzten Richtungen CA und CB, und außer diesen die dritte Kraft R so an, daß ihre verlängerte Richtung mit AC den Winkel ACO macht, wie ihn die Gleichung P Sin ACO = Q Sin BCO bestimmt, so fällt CO mit C$\gamma$ zusammen, und die drey Kräfte P, Q, R halten erstern dreyen P′, Q′, R′ das Gleichgewicht, weil immer eine der andern gleich und entgegengesetzt ist. Man kann nun die erstern P′, Q′, R′ wegnehmen, ohne das Gleichgewicht zu stören, weil sie für sich im Gleichgewichte stehen, und so muß auch noch zwischen den zurückbleibenden Kräften P, Q und R Gleichgewicht statt finden.

## §. 53.

Die Kraft R nach entgegengesetzter Richtung CO auf den Punkt C angebracht, ist den andern beyden P und Q äquipollent (§. 26.) und heißt die mittlere Kraft. Man kann sich daher vorstellen, es entstehe aus den Kräften P und Q durch ihr Zusammenwirken auf den Punkt C eine einzige Kraft R nach der mittlern Richtung CO, und kann diese jenen beyden allemal als gleichgültig substituiren. Dies nennt man eine Kraft aus zweyen andern zusammensetzen.

## §. 54.

Gegenseitig kann jede einfache Kraft R so angesehen werden, als sey sie aus der Zusammensetzung zweyer andern, die gegebene Richtungen CA und CB haben, entstanden. Um diese Kräfte zu finden, darf man nur in CD, der Richtung von R, einen Punkt D annehmen, und aus diesem mit den Richtungen der gesuchten Kräfte Parallelen ziehen, so verhalten sich diese Kräfte zu R, wie die Seiten AC und BC des dadurch entstehenden Parallelograms zur Diagonale CD. Fig. 8. Man sagt in diesem Falle, die Kraft R sey in die Kräfte nach CA und CB zerlegt. Diese Zerlegung ist offenbar eine bloße Zurückführung der Kraft auf ihre Theile, aus denen sie zusammengesetzt ist.

## §. 55.

Es sey CD die Richtung einer gegebenen Kraft P, die man in zwey andere nach den Richtungen CA und

CB, welche in derselben Ebene liegen, zerlegen will. Man setze den Winkel ACD $= \eta$, BCD $= \vartheta$, und nenne die gesuchten Kräfte M und N, so hat man:

$$M \operatorname{Sin}\eta = N \operatorname{Sin}\vartheta, \; P \operatorname{Sin}\eta = N \operatorname{Sin}(\eta+\vartheta), \text{ also:}$$

$$N = \frac{P \operatorname{Sin}\eta}{\operatorname{Sin}(\eta+\vartheta)}, \; M = \frac{N \operatorname{Sin}\vartheta}{\operatorname{Sin}\eta} = \frac{P \operatorname{Sin}\vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta+\vartheta)}$$

Sind die Richtungen CA und CB aufeinander senkrecht, so ist $\eta + \vartheta = 90°$, $\vartheta = 90° - \eta$, folglich alsdann $M = P \operatorname{Cos}\eta$ und $N = P \operatorname{Sin}\eta$. Ein anderer oft vorkommender Fall ist der, wo CD den Winkel ACB halbirt. Hier hat man $\eta = \vartheta$, also $M = N = \frac{P \operatorname{Sin}\eta}{\operatorname{Sin}2\eta} = \frac{P}{2\operatorname{Cos}\eta}$

## §. 56.

Um zu sehen, wie eine Kraft auf einen Punkt wirken kann, der nur nach einer gewissen Richtung bewegbar ist, zerlege man sie in eine nach dieser Richtung, und in eine darauf senkrecht. Erstere kann den Punkt frey bewegen, wofern sie nicht von einer andern Kraft daran gehindert wird. Dagegen wird letztere durch die Festigkeit des Punktes, der nach dieser Richtung nicht weichen kann, ganz aufgehoben, und da sie nicht weiter so zerlegt werden kann, daß noch irgend ein Theil zu ersterer hinzukäme, so enthält diese den völligen Antheil der Kraft, der hier als wirksam anzusehen ist.

Fig. 9. Wir wollen setzen, die Kraft P sey an dem Hebelarme AC, der in C seinen Ruhepunkt hat, auf den Punkt A nach der schiefen Richtung AF angebracht.

Der Punkt A kann nur allein nach der auf AC senkrechten Richtung Aa fortrücken; also hat die Kraft nur in so fern ein Bestreben, den Hebel zu drehen, als ein Theil von ihr P Sin FAC, wenn sie nach Aa und AC zerlegt wird, auf erstere Richtung fällt. Der andere Theil P Cos FAC drückt den Hebelarm nach AC an den festen Punkt C, der deshalb einen gleichen Gegendruck nach CA ausübt, und ihn folglich aufhebt. Die Kraft P hat demnach bloß das Moment P . AC Sin FAC den Hebel zu drehen.

Eben dies fließt auch aus folgender Betrachtung:

Man fälle aus C auf die Richtung der Kraft das Perpendikel CG, und lege durch ACF einen Winkelhebel, so kann man die Kraft auf den Punkt F versetzen, ohne daß ihre Wirkung dadurch geändert würde (§. 46.). Sie hat nun am Arme CF senkrechte Richtung, und ihr Moment ist daher P . CF = P . AC . Sin FAC, wie vorhin.

## §. 57.

Fig. 9. **Lehrsatz.** Wenn an einer geraden Linie ACB zwey Kräfte P und Q, die nach willkührlichen aber parallelen Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ ziehen, einer dritten Kraft R nach entgegengesetzter Richtung $C\gamma$ das Gleichgewicht halten, so wird dies auch noch geschehen, wenn man alle drey Kräfte an eben den Punkten senkrecht auf die Linie anbringt.

**Beweis.** 1) Man ziehe durch C eine auf $C\gamma$ senkrechte Linie FCG, die die Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$

in F und G schneiden mag, so kann man die Kräfte auch auf diese Punkte verlegen, ohne dadurch das Gleichgewicht zu stören.

2) Sie müssen sich also auch noch an der Linie FCG, auf die sie senkrecht gerichtet sind, das Gleichgewicht halten; folglich muß $P + Q = R$ und $FC . P = GC . Q$ seyn.

3) Man setze nun den Winkel $FAC = \alpha$, so ist $FC = AC \operatorname{Sin} \alpha$ und $GC = BC \operatorname{Sin} \alpha$. Dies in die Gleichung (2) substituirt, und dann mit $\operatorname{Sin} \alpha$ dividirt, giebt: $AC . P = BC . Q$.

## §. 58.

Gegenseitig folgt, daß drey Kräfte, die sich an der Linie ACB, auf die sie senkrecht gerichtet sind, das Gleichgewicht halten, auch dann noch im Gleichgewichte seyn müssen, wenn sie auf eben die Punkte nach jeden andern parallelen Richtungen angebracht werden. Denn nach dieser Voraussetzung hat man $AC . P = BC . Q$, welches mit $\operatorname{Sin} \alpha$ multiplicirt, $FC . P = GC . Q$ giebt: also stehen diese Kräfte auch an der Linie FCG nach senkrechten Richtungen $F\alpha$, $G\beta$ und $C\gamma$ im Gleichgewichte, folglich auch nach eben den Richtungen an ACB. Man sieht leicht, daß dieser Satz, so wie der im vorigen §, sich auf mehrere parallele Kräfte ausdehnen lassen, die an einer geraden Linie von einer entgegengesetzten Kraft im Gleichgewichte erhalten werden.

## §. 59.

Wenn drey oder mehrere Kräfte an einem Winkel-

Hebel AOB angebracht sind, so kann man durch zwey Punkte desselben A und B eine gerade Linie AB ziehen, und auf diese die Kräfte nach ihren Richtungen verlegen, woraus sich alsdann die Umstände beurtheilen lassen, unter denen sie sich an dem Winkelhebel das Gleichgewicht halten: sollen nemlich die Kräfte an ihm in Gleichgewichte seyn, so muß das Gleichgewicht auch an AB statt finden, und umgekehrt. Da hierbey die Form des Hebels gar nicht in Betracht kommt, so gelten diese Schlüsse auch für den krummlinigten Hebel, seine Arme mögen gebogen seyn, wie sie wollen.

## Zusammenwirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt.

### §. 60.

Die Größe und Richtung der mittlern Kraft mehrerer, auf einen Punkt C wirkender Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen, bestimmt man am leichtsten dadurch, daß man jede derselben nach zweyen senkrechten Richtungen CA und CB, die nach Gefallen angenommen werden können, zerlegt, dann die Kräfte nach jeder dieser Richtungen besonders summirt, und aus beyden Summen eine dritte Kraft zusammensetzt. Es mögen M und N diese Summen heißen, S die mittlere Kraft, die aus beyden entspringt, und $\vartheta$ der Winkel, den ihre Richtung mit CA einschließt, so hat man $S = \sqrt{(M^2 + N^2)}$, und $M \sin \vartheta = N \cos \vartheta$, also

$$\tang \vartheta = \frac{N}{M}.$$

Wir wollen setzen, es seyen drey Kräfte P, Q und R gegeben, deren Richtungen mit CA die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ machen, so sind die Theile, worinn P nach CA und CB zerfällt, $P \operatorname{Cos} \alpha$ und $P \operatorname{Sin} \alpha$ u. s. f., also

$$M = P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta + R \operatorname{Cos} \gamma$$

$$N = P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma \quad \text{folglich}$$

$$M^2 = P^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 + Q^2 \operatorname{Cos} \beta^2 + R^2 \operatorname{Cos} \gamma^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + 2PR \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma + 2QR \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$

$$N^2 = P^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + Q^2 \operatorname{Sin} \beta^2 + R^2 \operatorname{Sin} \gamma^2 + 2PQ \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta + 2PR \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \gamma + 2QR \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \gamma$$

und demnach $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ \operatorname{Cos} (\beta - \alpha) + 2PR \operatorname{Cos} (\gamma - \alpha) + 2QR \operatorname{Cos} (\gamma - \beta)$

indem $\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta = \operatorname{Cos} (\beta - \alpha)$, u. s. f. Man sieht leicht, daß $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ die Winkel sind, welche zwey und zwey Kräfte mit einander einschließen; daher besteht das Quadrat der mittlern Kraft aus den Quadraten der einzelnen Kräfte, und den doppelten Produkten je zweyer, multiplicirt durch die Cosinusse der Winkel, die ihre Richtungen miteinander machen. Dieser Satz erstreckt sich, wie man leicht darthun kann, auch auf mehrere Kräfte, und ist ganz allgemein.

Ferner hat man $\operatorname{tang} \vartheta = \dfrac{P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma}{P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta + R \operatorname{Cos} \gamma}$

und wenn man CA in die Richtung von P fallen läßt, so wird dadurch $\alpha = 0$, also

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{Q \operatorname{Sin} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma}{P + Q \operatorname{Cos} \beta + R \operatorname{Sin} \gamma}$$

## §. 61.

Fig. 10. **Aufgabe.** Es sey die Lage von OD gegen drey in O aufeinander senkrecht stehende Linien OA, OB und OC gegeben; eine gegebene Kraft P wirke nach dieser Richtung auf den Punkt O, man sucht die Kräfte, die aus der Zerlegung derselben nach jenen drey Linien entspringen.

**Auflösung.** 1) Es sey der Neigungswinkel DOF der Linie OD gegen die Ebene AOB = q, der Winkel FOA in dieser Ebene = p.

2) Da die Ebene DOF auf AOB senkrecht ist, so liegt CO in derselben; man kann also die Kraft nach den Richtungen OC und OF zerlegen, und da COF = 90° ist, so wird erstere nach OC = P Sin q, letztere nach OF = P Cos q.

3) Die Richtung OF liegt in der Ebene AOB, und die Kraft P Cos q kann also ferner nach OA und OB zerlegt werden; es wird nemlich die nach AO = P Cos q Cos p, und die nach BO = P Cos q Sin p.

4) Die Kräfte, welche aus der gegebenen Kraft P entspringen, sind also:

nach OA = P Cos q Cos p
nach OB = P Cos q Sin p und
nach OC = P Sin q.

## §. 62.

Einfacher lassen sich diese Kräfte noch dadurch ausdrücken, daß man die Lage der Linie OD durch die Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ bestimmt, die sie mit den Richtungen

OA, OB und OC einschließt. Es ist nemlich in der Ecke, welche OD, OF und OA an O bilden, und die an OF rechtwinklicht ist: $\text{Cos DOA} = \text{Cos DOF} . \text{Cos FOA}$ oder $\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos p Cos q}$; ferner in der Ecke BDOF: $\text{Cos BOD} = \text{Cos BOF} . \text{Cos DOF}$, oder $\text{Cos}\,\beta = \text{Sin p Cos q}$, und endlich $\text{Cos COD} = \text{Sin DOF}$, oder $\text{Cos}\,\gamma = \text{Sin q}$, also sind die drey Kräfte folgende: die nach $\text{OA} = \text{P Cos}\,\alpha$, die nach $\text{OB} = \text{P Cos}\,\beta$ und die nach $\text{OC} = \text{P Cos}\,\gamma$.

Hierbey ist nur zu bemerken, daß die Lage der Linie OD schon durch die Winkel $\alpha$ und $\beta$ bestimmt wird, also $\gamma$ von $\alpha$ und $\beta$ abhängt. Es ist nemlich $\text{Cos}\,\alpha^2 + \text{Cos}\,\beta^2 = (\text{Sin p}^2 + \text{Cos p}^2)\,\text{Cos q}^2 = \text{Cos q}^2$, folglich $\text{Cos}\,\alpha^2 + \text{Cos}\,\beta^2 + \text{Cos}\,\gamma^2 = 1$.

## §. 63.

Gegenseitig, wenn drey Kräfte P, Q und R nach senkrechten Richtungen OA, OB und OC auf einen Punkt wirken, und man nennt S die mittlere Kraft, die aus ihrer Zusammensetzung entspringt, $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel, welche ihre Richtung mit jenen dreyen macht, so hat man $\text{P} = \text{S Cos}\,\alpha$, $\text{Q} = \text{S Cos}\,\beta$, $\text{R} = \text{S Cos}\,\gamma$, also $\text{P}^2 + \text{Q}^2 + \text{R}^2 = \text{S}^2(\text{Cos}\,\alpha^2 + \text{Cos}\,\beta^2 + \text{Cos}\,\gamma^2) = \text{S}^2$, folglich $\text{S} = \sqrt{(\text{P}^2 + \text{Q}^2 + \text{R}^2)}$. Ferner ist dann $\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{P}}{\text{S}}$, $\text{Cos}\,\beta = \frac{\text{Q}}{\text{S}}$, $\text{Cos}\,\gamma = \frac{\text{R}}{\text{S}}$, wodurch die Lage ihrer Richtung bestimmt wird.

Sind die Richtungen der Kräfte P, Q, R nicht senkrecht aufeinander, so zerlege man sie erst nach dreyen senkrechten Richtungen, und setze dann die nach jeder dieser Richtungen enthaltenen Summen zu einer Kraft zusammen.

## Gleichgewicht der Kräfte an einer festen Axe.

### §. 64.

Fig. 11. Es sey AZ eine unbiegsame gerade Linie, und dabey nach keiner Seite zu beweglich, so daß die Hebelarme MP, NQ, die in P und Q senkrecht daran befestigt sind, sich nur um diese Punkte in Ebenen, senkrecht auf AZ, drehen lassen; diese Linie heißt alsdann eine feste Axe.

### §. 65.

**Lehrsatz. Wenn die Hebelarme MP und QN in einer gemeinschaftlichen Ebene liegen, und auf die Punkte derselben M und N zwey Kräfte P und Q nach Richtungen Mm und Nn wirken, die in den Umdrehungsebenen der Hebelarme senkrecht auf sie sind, so halten diese einander das Gleichgewicht, wenn P . MP = Q . NQ ist.**

Beweis 1) Wenn zwey Ebenen sich senkrecht schneiden, so steht eine Linie, die in der einen dieser Ebenen auf ihrem Durchschnitte senkrecht ist, auf der andern Ebene senkrecht.

2) Die Umdrehungsebene des Hebelarms MP schneidet die Ebene MPQN in MP senkrecht, und die Richtung Mm steht in ersterer senkrecht auf MP, also

ist sie auf der Ebene MPQN selbst senkrecht. Eben dies folgt für die Richtung Nn.

3) Man ziehe die Linie MN, die die Axe AZ in o schneiden mag, und betrachte sie als unbiegsam, so ist diese Linie für die Kräfte P und Q ein Hebel, der in o seinen Ruhepunkt hat, und auf den ihre Richtungen Mm, Nn senkrecht sind.

4) Nun ist vermöge der Voraussetzung $P : Q = MP : NQ$, und in den ähnlichen Dreyecken MPo und NQo, $MP : NQ = Mo : No$, also auch $P : Q = Mo : No$, folglich sind die Kräfte im Gleichgewichte.

## §. 66.

Folgerung. 1. Sollen die Kräfte P und Q an der Axe AZ einander das Gleichgewicht halten, so kann dies nur geschehen, wenn $P . Mo = Q . No$, oder, da $Mo : No = MP : NQ$, wenn $P . MP = Q . NQ$ ist.

2. Die Wirkung einer Hebelkraft an der Axe richtet sich also nach dem Produkte aus ihr in die Entfernung von dieser Axe. Man nennt dies Produkt das Moment der Kraft gegen die Axe.

3. Beyden Kräften ist in o ihre Summe äquipollent, die aber, wenn sie auf die Punkte P und Q vertheilt wird, wieder in dieselben Kräfte P und Q zerfällt, weil $Po : Qo = MP : NQ$ ist. Wäre also die Axe beweglich, so würden zwey Kräfte = P und Q in den Punkten P und Q nach entgegengesetzter Richtung angebracht, den Kräften P und Q in M und N das Gleichgewicht halten.

4. **Die Axe leidet also durch die Kräfte P und Q denselben Druck, als wenn sie nach ihrer Richtung unmittelbar auf die Punkte P und Q angebracht wären.**

## §. 67.

Fig. 12. Es sey wie vorhin die Richtung Nn der Kraft Q am Hebelarme NQ in der Umdrehungsebene desselben, auf ihn senkrecht; nur liege der Hebelarm nicht mit dem andern PM in einer Ebene; ich behaupte, es werde auch alsdann noch Gleichgewicht zwischen den Kräften P und Q statt finden, wofern P . MP = Q . NQ ist. Die Umdrehungsebene des Hebelarmes NQ schneide die Ebene ZPM in OQR. Man mache QR = QN, und bringe in ersterer Ebene auf R eine Kraft = Q nach Rr, senkrecht auf QR an, so hält diese am Winkelhebel NQR der Kraft Q das Gleichgewicht. Ist nun P . MP = Q . NQ = Q . RQ, so ist der Kraft Q am Punkte R die Kraft P äquipollent, folglich sind auch dann P an M, und Q an N im Gleichgewichte.

## §. 68.

Die Kräfte P und Q streben die Hebelarme MP und NQ nach verschiedener Seite zu drehen; würde dagegen Q nach entgegengesetzter Richtung auf N angebracht, so geschähe durch sie die Umdrehung nach Einer Seite zu, und sie wären dann einander äquipollent. Man kann daher P und Q für einander an ihren Orten substituiren, wofern sie einerley Moment haben, und die Umdrehung nach einerley Seite zu bewirken suchen.

Gesetzt also, es sind mehrere Kräfte auf die Weise wie P und Q an der festen Axe AZ im Gleichgewichte, so lassen sich die, welche die Umdrehung nach der Seite Mm hin hervorzubringen streben, auf eine einzige Kraft zurückführen, die ihnen äquipollent ist. Heißen nemlich diese Kräfte P, P′, P″ u. s. f. und ihre Entfernungen von der Axe p, p′, p″ . ., so sind ihnen in M, am Hebelarme MP = f, die Kräfte $\frac{Pp}{f}$, $\frac{P'p'}{f}$ u. s. f. äquipollent, wodurch eine einzige Kraft entsteht, die das Moment $Pp + P'p' + P''p''$ u. s. f. hat.

Eben so kann man auch den andern Kräften, die nach entgegengesetztem Sinne wirken, eine einzige in M nach mM substituiren. Man nenne die Kräfte Q, Q′, Q″ u. s. f., und die Entfernungen von der Axe q, q′, q″ u. s. f., so hat die ihnen äquipollente Kraft das Moment $Qq + Q'q' + Q''q'' \ldots$

Man hat daher, weil die Kräfte in M einander aufheben müssen:

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots = Qq + Q'q' + Q''q''. \text{ u. s. f.}$$

gerade wie beym einfachen Hebel.

## §. 69.

Fig. 12. **Aufgabe.** Den Druck zu finden, den die Kräfte P und Q (§. 67.) auf die Axe AZ ausüben.

**Auflösung.** 1) Man bringe Q nach verlängerter Richtung in O an, so wirkt sie auf den Hebelarm OQ unter dem Winkel qOn.

2) Sie zerfällt also in eine = Q Sin qOn nach

Op,

Op, senkrecht auf OQ, und in eine = Q Cos qOn nach Oq mit OQ parallel.

3) Erstere hat das Moment Q . OQ Sin qOn = Q . NQ, und steht mit P im Gleichgewichte; daher sie den Druck Q Sin qOn auf den Punkt Q hervorbringt. (66. 4.)

4) Die andere Q Cos qOn wirkt geradezu auf den Punkt Q, indem sie den Hebelarm OQ von ihm loszureißen strebt; folglich bewirken beyde in Verbindung an diesem Punkte der Axe den Druck Q nach einer mit On parallelen Richtung.

5) Die Kräfte P und Q drücken demnach die Axe so, als wären sie nach parallelen Richtungen unmittelbar auf die Punkte P und Q der Axe angebracht.

6) Der Satz (66. 4.) wird hierdurch auf senkrechte Hebelkräfte an der Axe überhaupt ausgedehnt; man sieht nemlich, daß er auch dann noch gelte, wenn mehrere dergleichen Kräfte an ihr im Gleichgewichte stehen.

## §. 70.

Fig. 13. **Aufgabe.** An der Axe AB, die in den Punkten A und B gehalten wird, befindet sich ein Hebelarm DF; im Punkte F zieht eine Kraft P nach der Richtung Ff, die mit der Axe parallel ist; man sucht den Druck, den die Axe in A und B durch diese Kraft leidet.

**Auflösung** 1) Man zerlege die Kraft P in zwey andere M und N nach den Richtungen FA und FB, die mit der Richtung Ff die Winkel AFf = BAF, und fFI = ABF machen; so wird, wenn wir BAF = $\eta$, ABF = $\vartheta$ setzen: $M = \frac{P \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$, $N = \frac{P \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$ (§. 55.)

2) Da die Richtungen dieser Kräfte M und N durch die Punkte A und B gehen, so kann man sie unmittelbar auf dieselben anbringen. (66.)

3) Man zerlege erstere nach A$\alpha$, senkrecht auf die Axe, und nach Aa, längs derselben, so wird die senkrechte $= M \operatorname{Sin} \eta = \frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$ und die der Axe parallele $= M \operatorname{Cos} \eta = \frac{P \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$

4) Eben so entspringt aus N eine nach B$\beta$, senkrecht auf die Axe, $= N \operatorname{Sin} \vartheta = \frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$, und eine nach BA $= N \operatorname{Cos} \vartheta = \frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$

5) Die beyden Kräfte längs der Axe geben zusammen die Kraft $\frac{P(\operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Sin} \vartheta)}{\operatorname{S}(\eta + \vartheta)}$ $= P$, welche auf den Punkt A kommt. Die Axe muß also in A mit der ganzen Kraft P nach der Richtung AB gehalten werden, d. i. sie wird eben so in A gedrückt, als wenn die Kraft P unmittelbar auf einen ihrer Punkte nach ihrer Richtung angebracht wäre.

6) Außerdem leiden nun noch die Punkte A und B nach den entgegengesetzten Richtungen A$\alpha$ und B$\beta$

den Druck $\frac{P \,\mathrm{Sin}\, \eta \,\mathrm{Sin}\, \vartheta}{\mathrm{Sin}\, (\eta + \vartheta)}$ (3. 4.), und da $\frac{\mathrm{Sin}\, \alpha}{\mathrm{Sin}\, (\alpha + \beta)}$ $= \frac{BF}{AB}$ ist, so wird dieser $= \frac{P \cdot BF \,\mathrm{Sin}\, \beta}{AB} = \frac{DF}{AB} \cdot P$

## §. 71.

Der Seitendruck, den die Punkte A und B leiden, liegt also mit dem Hebelarme DF in Einer Ebene, und ist seiner Länge proportional; außerdem verhält er sich direkt wie die Kraft, und verkehrt wie die Entfernung der Punkte A und B.

Hiernach läßt sich z. B. beurtheilen, welche Gewalt die Angeln einer Thür durch das Gewicht derselben leiden; oder bey Stampfmühlen: wie stark die Stempel gegen die Leitungen drücken, und wie dieser Druck geringer oder größer sey, je nachdem die beyden Leitungen weiter auseinander, oder näher zusammenliegen.

## §. 72.

Fig. 14. **Aufgabe.** Auf einer unbeweglichen Axe AB sind mehrere Hebelarme senkrecht befestigt, an denen Kräfte nach willkührlichen Richtungen ziehen, und sich im Gleichgewichte erhalten; man fragt, welchen Druck die Punkte A und B, wo die Axe gehalten wird, leiden werden.

Auflösung 1) Es sey an einem dieser Hebelarme DM die Kraft P befindlich. Man zerlege sie nach §. 61. in drey andere, nach den Richtungen MD, Mm und Mn, wovon erstere beyden in der Umdrehungsebene des Hebelarmes senkrecht auf einander sind, und letztere auf dieser Ebene selbst, senkrecht steht.

2) Die erstere wirkt geradezu auf die Axe; die zweyte drückt dieselbe ebenfalls so, als sey sie nach parralleler Richtung unmittelbar darauf angebracht, und auch von der dritten gilt dies (§. 70.), weil sie mit der Axe auf einerley Ebene senkrecht steht, und ihr also parallel ist. Daher kann man die ganze Kraft P in Ansehung des Druckes, den sie auf die Axe ausübt, so betrachten, als sey sie nach gleicher Richtung auf den Punkt D angebracht.

3) Wie dieser Druck auf die Punkte A und B sich vertheilt, ist §. 19. gezeigt worden.

4) Außerdem leiden die Punkte A und B durch die der Axe parallele Kraft noch den Druck $\frac{DM}{AB}.P$ nach Richtungen, die mit DM parallel sind.

5) Was von P gezeigt ist, gilt auch von den übrigen noch vorhandenen Kräften.

---

Drittes Kapitel.

## Vom Schwerpunkte fester Körper.

---

### §. 73.

Ein fester Körper läßt sich als ein System von Punkten, oder, wenn man will, unendlich kleinen Massen ansehen, die durch unbiegsame Linien so mit einander verbunden sind, daß keins dieser Theilchen sich bewegen kann, ohne alle die andern zugleich aus ihrer Lage zu bringen.

Das Wesentliche eines festen Körpers besteht nemlich darinn, daß seine Theile unter allen Umständen einerley Lage gegeneinander behalten, gerade so als hingen sie durch unbiegsame Linien miteinander zusammen. Was eigentlich diesen Zusammenhang zwischen den Theilen bewirkt, kommt hier nicht weiter in Betracht; genug, daß in jener Vorstellung die Bedingung der Festigkeit ganz enthalten ist.

## §. 74.

**Aufgabe.** In einem solchen Systeme von körperlichen Punkten werden die einzelnen Elemente von Kräften m, m′, m″ u. s. f. nach parallelen Richtungen sollicitirt; man sucht den Punkt in demselben, wo die Summe aller dieser Kräfte nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält.

**Auflösung.** 1) Man nehme eine Ebene an, worauf die gemeinschaftliche Richtung der Kräfte senkrecht ist, ziehe in dieser nach Gefallen die gerade Linie AB (Fig. 15.) und wähle in derselben irgend einen Punkt A zum Anfangspunkte.

2) Aus einem Punkte Z des Systems fälle man auf diese Ebene das Perpendikel ZY, und in der Ebene aus Y auf AB das Perpendikel YX, so wird die Lage

dieses Punktes Z gegen A durch die drey Ordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt.

3) Für einen andern Punkt Z′ seyen eben diese Coordinaten $AX' = x'$, $X'Y' = y'$, $Y'Z' = z'$.

4) Die Punkte Z, Z′ sind der Bedingung zu Folge durch eine unbiegsame gerade Linie ZZ′ verbunden, und das angenommene Gleichgewicht bleibt also noch, wenn man den beyden Kräften m und m′, welche auf diese Punkte nach parallelen Richtungen wirken, in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte $\zeta$ ihre Summe nach eben der Richtung $\zeta\upsilon$ substituirt. Für diesen Punkt hat man nun

$$Z\zeta : Z'\zeta = m' : m \text{ also:}$$
$$Z\zeta : ZZ' = m' : m + m'$$

5) Das Perpendikel Zz, aus Z auf Z′Y′ gefällt, werde von der darauf senkrechten Richtung $\zeta\upsilon$ in o geschnitten, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreyecke $Z\zeta o$ und $ZZ'z$

$$Z\zeta : ZZ' = Zo : Zz; \text{ also ist auch}$$
$$Zo : Zz = m' : m + m' \text{ und eben so:}$$
$$\zeta o : z' \zeta = m' : m + m', \text{ oder}$$
$$\zeta o : (Z' - z) = m' : m + m', \text{ folglich}$$
$$\zeta o = \frac{m'(z' - z)}{m + m'}, \text{ und } \zeta\upsilon = z + \frac{m'(Z' - Z)}{m + m'}$$
$$= \frac{mz + m'z'}{m + m'}$$

6) Weil $Y\upsilon = Zo$, und $YY' = Zz$, so ist ferner

$$Y\upsilon : YY' = m' : (m + m')$$

Wenn nun $\upsilon\xi$ senkrecht auf AB gezogen wird, und das aus Y auf Y'X' gefällte Perpendikel dieselbe in l schneidet, so ist auf gleiche Art:

$Y\upsilon : YY' = \upsilon l : Y'y = Yl : Yy$ also:

$\upsilon l : Y'y = m' : (m + m')$ folglich

$\upsilon l = \frac{(y' - y)\, m'}{m + m'}$, und $\upsilon\xi = \frac{my + m'y'}{m + m'}$

7) Da endlich $X\xi = Yl$ und $XX' = Yy$, so hat man auch:

$x\xi : XX' = m' : (m + m')$, also

$x\xi = \frac{m\,(x' - x)}{m + m'}$ und $A\xi = \frac{mx + m'x'}{m + m'}$

8) Mit der Kraft $m + m'$ im Punkte $\zeta$, dessen Coordinaten wir eben bestimmt haben, kann man nun ferner die Kraft $m''$, die auf den nächsten Punkt $Z''$ nach eben der Richtung wirkt, so verbinden, daß dadurch eine einzige äquipollente Kraft hervorgebracht wird. Diese ist nemlich $= m + m' + m''$, und ist auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von $\zeta$ und $Z''$ gerichtet.

9) Gesetzt, es sind auf solche Weise von i Punkten die Kräfte $m, m' \ldots m^{(i)}$ zusammen in eine Kraft M vereinigt, und die Coordinaten des Punktes, worauf sie angebracht werden muß $= X, Y$ und $Z$, so wird, wenn noch eine Kraft $m^{(i+1)}$ eines fremden Punktes, dessen Coordinaten $x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, z^{(i+1)}$ sind, hinzukommt, diese sich so mit M verbinden, daß die neue Kraft $M' = M + m^{(i+1)}$ seyn, und auf einen Punkt wirken muß, der zu Coordinaten $X' = \frac{MX + m^{(i+1)}x^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}$,

$$Y' = \frac{MY + m^{(i+1)} y^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}, Z' = \frac{MZ + m^{(i+1)} z^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}$$

hat (5. 6. 7.).

10) Ist daher für i Kräfte die Totalkraft M, die ihnen substituirt werden kann = der Summe aller einzelnen, so gilt dies auch für i + 1 Kräfte; und was die Lage des Punktes betrifft, auf den sie wirkt, so ist klar, daß wenn $MX = mx + m'x' \ldots + m^{(i)} x^{(i)}$, auch eben dies Gesetz für $X'$ gelten werde, indem $M'X' = MX + m^{(i+1)} x^{(i+1)}$ ist. Ein Gleiches gilt auch für die andern Coordinaten dieses Punktes.

11) Dies Gesetz, sowohl in Ansehung der Größe der Kraft, als der Lage des Punktes auf den sie anzubringen ist, erstreckt sich also auf i + 1 Kräfte, wenn es für i Kräfte statt findet. Von zweyen Kräften ist es aber (5. 6. 7.) erwiesen, also ist es für jede willkührliche Anzahl von Kräften wahr.

12) Man kann daher, ohne das Gleichgewicht zu stören, einer Anzahl von i Kräften allemal die Summe derselben in einem einzigen Punkte nach gleicher Richtung substituiren, der zu Coordinaten

$$X = \frac{mx + m'x' \ldots + m^{(i)} x^{(i)}}{m + m' \ldots + m^{(i)}},$$

$$Y = \frac{my + m'y' \ldots + m^{(i)} y^{(i)}}{m + m' \ldots + m^{(i)}}, \text{ und}$$

$$Z = \frac{mz + m'z' \ldots + m^{(i)} z^{(i)}}{m + m' \ldots + m^{(i)}} \text{ hat.}$$

13) Hat man auf solche Art alle Kräfte des Systems in eine zusammengebracht, so muß diese allein

der Gegenkraft das Gleichgewicht halten. Dies kann aber nicht anders geschehen, als wenn beyde gleich groß sind, und in entgegengesetzter Richtung auf einerley Punkt wirken. Die Gegenkraft muß daher = der Summe aller Kräfte des Systems seyn, und eine ihnen entgegengesetzte Richtung haben. Ist außerdem G der gesuchte Punkt, auf den sie angebracht werden muß, und AD, DF, FG dessen Coordinaten, so hat man

$$AD = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}, \quad DF = \frac{my + m'y' + \ldots}{m + m' + \ldots},$$

$$FG = \frac{mz + m'z' + \ldots}{m + m' + \ldots}$$

## §. 75.

Dieser Punkt G hat also die Eigenschaft, daß die Summe aller einzelnen parallelen Kräfte des Systems auf ihn nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält. Aus der Art wie seine Lage bestimmt ist, könnte man schließen, daß er von der Richtung der Kräfte abhänge, weil die Ebene, auf welche die Coordinaten sich beziehen, senkrecht auf diese Richtung genommen ist, folglich eine andere Richtung der Kräfte, andere Coordinaten für die Punkte des Systems hervorbringt. Es entsteht also die Frage, ob die Richtung der Kräfte auf die Lage des Punktes G Einfluß hat? Um einzusehen, daß dies nicht der Fall sey, darf man nur darauf zurückgehen, wie der Punkt gefunden ist. Wir suchten erst von zweyen Punkten des Systems Z, Z' den gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

Dieser fällt an einen bestimmten Ort ζ zwischen die beyden Punkte, die Richtung der Kräfte mag seyn, welche sie will; und so sind auch die folgenden Punkte, in denen nach und nach mehrere Kräfte des Systems vereinigt wurden, durchaus bestimmt. Da man nun nach Verbindung aller Kräfte des Systems endlich einen Punkt erhält, der mit G zusammenfallen muß, so folgt, daß auch G unwandelbar, und von der Richtung der Kräfte ganz unabhängig sey.

## §. 76.

Die Betrachtung des Systems paralleler Kräfte findet ihre Anwendung bey allen festen Körpern, in so fern sie der Wirkung der Schwere unterworfen sind. Diese Kraft wirkt nemlich in jedes Element des Körpers, denn sie äußert sich noch in dem kleinsten Theilchen, das man vom Körper trennt: also sieht man offenbar, daß sein Gewicht aus der Zusammenwirkung aller einzelnen Gewichte seiner Elemente entstehe, und daß er folglich als ein System von lauter parallelen Kräften anzusehen sey. Daher giebt es in jedem festen Körper einen Punkt, worauf eine Kraft nach vertikaler Richtung angebracht werden kann, die ihm das Gleichgewicht zu halten im Stande ist. Diesen Punkt nennt man den **Schwerpunkt** des Körpers.

## §. 77.

**Folgerung 1. Das Gewicht des Körpers ist ein Compositum aus den Gewichten aller seiner Theile; man kann aber dafür eine ihm gleiche Kraft in seinem**

Schwerpunkte als äquipollent substituiren, oder das Gewicht selbst als eine einfache Kraft betrachten, die auf den Schwerpunkt nach vertikaler Richtung wirkt.

2. Der Körper bleibt in Ruhe, oder seine Kraft zu sinken wird im Gleichgewichte erhalten, wenn sein Schwerpunkt durch eine vertikale Kraft unterstützt wird, die seinem ganzen Gewichte gleich ist. Diese Kraft kann entweder von unten hinauf wirken, oder durch einen Faden aufwärts ziehen, der im Schwerpunkte, oder in jedem andern Punkte der Vertikale, die durch den Schwerpunkt geht, befestigt ist.

3. Man kann auch den Körper auf einer festen Unterlage ruhen lassen; alsdann wird diese von seinem ganzen Gewichte gedrückt, und der Schwerpunkt leidet dadurch einen gleichen und entgegengesetzten Druck.

## Spezifisches Gewicht der Körper.

### §. 78.

Es giebt keinen Körper, in dem die Theile so innig mit einander verbunden wären, daß sie sich von allen Seiten genau berührten, oder, wie die Theile des geometrischen Körpers, ein Continuum bildeten. Sie lassen bald größere bald geringere Zwischenräume zwischen sich, je nachdem ihre Struktur anders ist, und geben dadurch dem Körper eine Ausdehnung, die er mit seiner Masse nur zum Theil ausfüllt. Dies macht, daß der eine Körper bey eben dem Volumen mehr wiegt, als der andere.

§. 79.

Der Erfahrung nach haben gleich große Stücke eines homogenen Körpers einerley Gewicht; also muß ein doppelt so großes Stück doppelt so viel wiegen, und überhaupt das Gewicht von einerley Materie dem Volumen proportional seyn. Weiß man daher, wieviel das Gewicht G von dem Cubikfuße einer Materie beträgt, so kann man daraus bestimmen, wieviel jedes andere Stück von ihr wiegen muß; es sey neimlich das Volumen desselben $= u$ in Cubikfußen ausgedrückt, so ist sein Gewicht $= Gu$.

*Exempel.* Ein eichener Balken habe 24 Fuß Länge, jede Seite seines Querschnittes sey $= 5$ Zoll, und der Cubikfuß von diesem Holze wiege 60 ℔, so ist $u = 24 \cdot \frac{25}{144} = \frac{50}{12}$, und $G = 60$ ℔; also das Gewicht des Balken $Gu = 250$ ℔.

§. 80.

Dies Gewicht für die Einheit des Volumens ist nun bey Körpern von verschiedener Art ungleich, und muß daher für jede besondere Materie besonders bestimmt werden; man nennt es das **eigenthümliche** oder **spezifische Gewicht** der Körper.

Da das Gewichtsmaaß, dessen man sich zu seiner Angabe bedient, so wie die Einheit des Volumens willkührliche Dinge sind, so kann man auch das spezifische Gewicht irgend einer Materie, z. B. des reinen Wassers $= 1$ setzen, und darauf das von andern Körpern beziehen, wobey aber alsdann in der Ausübung eine Reduktion auf übliche Maaße erforderlich ist, die so geschieht:

Das spezifische Gewicht einer Materie sey $= \pi$, das des Wassers $= 1$ gesetzt; das Gewicht eines Pariser Cubikfußes von dieser Materie $= G$; so hat man, da nach Brisson der Cubikfuß Wasser 70 ℔ wiegt: $1 : \pi = 70$ ℔ $: G$, also $G = 70\,\pi$ in Pfunden.

## §. 81.

Bey einem Körper, der nicht gleichförmig dicht ist, fällt der Begriff vom spezifischen Gewichte eigentlich weg. Ist jedoch die Verschiedenheit in der Dichte seiner Theile nicht sehr groß, so kann man sie in den meisten Fällen als homogen ansehen, und dem ganzen Körper ein mittleres spezifisches Gewicht beylegen. So z. B. fand Muschenbroek von dem Stamme einer alten Eiche

| | | |
|---|---|---|
| das spezifische Gewicht des Splintes | $=$ | 1,039 |
| des innern Holzes | $=$ | 1,076 |
| des Markes | $=$ | 1,116 |

Dies Dreyes zusammen genommen, und durch 3 dividirt, gäbe das mittlere Gewicht des ganzen Stammes $= 1{,}077$.

## §. 82.

In vielen Körpern giebt es außer den unbemerkbaren Zwischenräumen noch andere des Gewebes und der Crystallisation, wodurch sie lockerer und folglich spezifisch leichter werden, als ihre kleinern Theile es eigentlich sind. So z. B. sinken Sägespäne von manchem Holze, das auf dem Wasser schwimmt, in demselben nieder; Kreide, Zucker u. a. sind im Stücke spezifisch leichter, als wenn sie zu Pulver zerstoßen werden.

Solche gröberen Poren finden sich selbst bey Körpern, an denen man sie nicht unmittelbar wahrnimmt: die meisten Metalle werden durch den Hammer merklich verdichtet, so daß man bey der Angabe ihres spezifischen Gewichtes wohl darauf zu sehen hat, ob sie geschlagen oder bloß gegossen sind. Nach Brisson ist z. B. das spezifische Gewicht

| | | |
|---|---|---|
| des gegossenen Silbers | = | 10,4743 |
| des geprägten | = | 10,5107 |
| des Gußeisens | = | 7,2070 |
| des Stangeneisens | = | 7,7879. |

## Schwerpunkt homogener Körper.

### §. 83.

Bey der Anwendung der §. 74. gefundenen Formeln, die zur Bestimmung des Schwerpunktes im Körper dienen, bedeuten m, m′, m″ die Gewichte der einzelnen Elemente des Körpers. Eigentlich müßte man nun hiezu die kleinsten materiellen Theile nehmen, wie sie, durch Zwischenräume zerstreut, im Körper nebeneinander liegen. Diese kennen wir aber nicht; also ist ein solches Verfahren nicht gedenkbar. Die Eigenschaft homogener Körper, daß jedes Stück ein, seinem Volumen proportionales Gewicht hat, berechtigt uns statt dessen, den Körper als ein stetiges Ganze anzusehen, worinn allenthalben Theile anzutreffen sind, die von einer größern oder geringern Schwere getrieben werden, je nachdem das spezifische Gewicht des Körpers beschaffen ist.

Man setze das Gewicht eines homogenen Körpers für das Volumen 1, $= p$, so ist das Gewicht eines Theiles von der Größe $m = mp$, das man in den erwähnten Formeln für m setzen müßte. Der Faktor p kommt aber sodann im Zähler und Nenner vor, und fällt also, wenn mit ihm dividirt wird, ganz hinaus. Man kann daher $p = 1$ setzen, oder Raum und Gewicht miteinander verwechseln.

## §. 84.

Die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z gehen durch den stetigen Körper in unendlich kleinen Aenderungen dx, dy, dz fort, und die Elemente m, m′ u. s. f. in die der Körper dadurch abgetheilt wird, sind rechtwinklichte Parallelepipeda, deren Inhalt $= dxdydz$ ist, den wir dM nennen wollen. Die Summe aller dieser dM ist $= M =$ der Masse oder dem Inhalte des ganzen Körpers; ferner ist die Summe aller Produkte $mx = \int xdm$, und so auch bey den übrigen. Heißen also a, b, c die Coordinaten AD, DF, FG, die den Schwerpunkt G des Körpers bestimmen, so hat man

$$a = \frac{\int xdM}{M},\ b = \frac{\int ydM}{M},\ c = \frac{\int zdM}{M}.$$

## §. 85.

Fig. 16. Der Schwerpunkt einer ebenen Fläche von unendlich geringer Dicke fällt in dieselbe hinein, denn man nehme sie zur Ebene der Coordinaten x und y an, so ist $z = o$, also auch $c = \frac{\int z dM}{M} = o$. Es bleiben also hier für den Schwerpunkt bloß die Coordinaten $AD = a$, und $DG = b$ zu bestimmen übrig; außerdem ist jetzt $dM = dxdy$, folglich $a = \frac{\iint xdxdy}{\iint dxdy}$, und $b = \frac{\iint ydxdy}{\iint dxdy}$. Man summire nun zuerst die Differenzialgrößen längs Xy, indem man x als beständig annimmt, so wird $\iint dxdy = \int ydx$; $\int xdxdy = \int yxdx$, und bis $XY = Y$ genommen, ersteres Integral $= \int Ydx$, letzteres $= \int Yxdx$, mithin $a = \frac{\int Yxdx}{\int Ydx}$; und eben so erhält man $b = \frac{\int Y^2 dx}{2\int Ydx}$.

**Exempel.** Es sey die Fläche AOS der Quadrant eines Kreises, dessen Halbmesser $= f$, so hat man

$$Y^2 = 2fx - x^2$$

$$YdY = fdx - xdx$$

$$Y^2 dY = fYdx - Yxdx$$

folglich $\int Yxdx = f.\int Ydx - \frac{1}{3} Y^3$, und daher $\frac{\int Yxdx}{\int Ydx} = f - \frac{Y^3}{3\int Ydx}$. Setzt man nun $x = f$, so wird auch $Y = f$, und $\int Ydx$, als der Inhalt des Quadranten, $= \frac{1}{4}\pi f^2$, folglich

$a = f$

$$a = f - \frac{4f}{3\pi} = 0{,}5755868184\ldots f.$$

Ferner ist $Y^2 dx = 2fxdx - x^2 dx$, also $\int Y^2 dx = fx^2 - \frac{1}{3}x^3$, welches $= \frac{2}{3}f^3$ wird, wenn man $x = f$ setzt. Demnach ist $b = \frac{4f}{3\pi}$, und folglich $a + b = f$, wie auch seyn muß: denn nimmt man SO zur Abscissenlinie an, so ist alles wie vorhin, und ma erhält daher $DO = b$.

Anmerkung. Wenn auf beyden Seiten der Abscissenlinie Theile der Fläche liegen, so sind die y des entgegengesetzten Theiles negativ. Man muß sich aber hüten, dies unmittelbar auf die Formeln für a und b anzuwenden: denn das Element DM $= dxdy$ ist allemal positiv; also, wenn y negativ ist, auch $\iint ydxdy = \int Y^2 dx$ negativ, statt daß es, nach dem Quadrate $Y^2$ zu urtheilen, positiv seyn müßte. Dagegen ist $\iint xdxdy = \int Yxd$ allemal positiv, wofern x positiv ist. Wenn daher die Abscissenlinie AP, die Fläche MAN in gleiche und ähnliche Theile theilt, so ist jedesmal ein $Y^2dx$ dem ihm gleichen auf der andern Seite entgegengesetzt, folglich die Summe aller $Y^2dx = 0$, mithin auch $b = 0$. Der Schwerpunkt fällt alsdann in den Durchmesser AP, und seine Entfernung a vom Scheitel A ist $= \frac{2\int Yxdx}{2\int Ydx} = \frac{\int Yxdx}{\int Ydx}$.

## §. 86.

Fig. 17 Der Schwerpunkt eines Dreyecks fällt in die Linie CD, welche aus der Spitze C gezogen, die Grundlinie AB halbirt: denn zieht man MN mit AB parallel, so wird auch diese von ihr halbirt, also liegt in ihr der Schwerpunkt des unendlich schmalen Streifes MNmn; folglich, weil dies von allen solchen Streifen gilt, in die das Dreyeck sich theilen läßt, auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt G aller, oder der des ganzen Dreiecks. Man kann daher die Linie CD so betrachten, als sey sie in allen ihren Punkten mit den Gewichten der dadurch gehenden Streifen belastet.

Es sey nun CD = f, CG = a, CI = x, der Inhalt des ganzen Dreieckes = A, der des Theiles MCN = S, so ist das Stück MNmn = dS, also $Aa = \int x dS$: aber $S = \frac{Ax^2}{f^2}$, folglich $dS = \frac{2Axdx}{f^2}$, mithin $\int x dS = \frac{2A}{f^2} \cdot \int x^2 dx = \frac{2Ax^3}{3f^2}$, welches x = f gesetzt, $Aa = \frac{2}{3} Af$, oder $a = \frac{2}{3} f$ giebt.

**Der Schwerpunkt des Dreyecks liegt also in der Linie CD um $\frac{2}{3}$ ihrer Länge von der Spize entfernt.**

## §. 87.

Fällt man daher aus C und G auf die Grundlinie die Perpendikel CO und HG, und zieht GI der Grundlinie parallel, so hat man, wenn AO = g, OC = h, und AB = b gesetzt wird: $CI = \frac{2}{3} h$, also $GH = IO = \frac{1}{3} h$, und $DH = \frac{1}{3} DO = \frac{1}{3}(g - \frac{1}{2} b)$, folglich $AH = \frac{1}{2} b + \frac{1}{3}(g - \frac{1}{2} b) = \frac{1}{3}(b + g)$.

Für das gleichschenklichte Dreyeck ist $g = \frac{1}{2} b$, also $AH = \frac{1}{2} b$. Beym rechtwinklichten Dreyecke AOB ist g = b, also $AH = \frac{2}{3} b$, wie auch seyn muß, weil $HO = \frac{1}{3} b$ wird, wenn man AO als seine Höhe ansieht.

## §. 88.

Wenn zwey Körper so mit einander verbunden sind, daß sie ein festes Ganze ausmachen, so findet man dessen Schwerpunkt folgendermaßen: Man suche die Schwerpunkte A und B der beyden Körper einzeln, und sehe eines jeden Gewicht in dem seinigen als vereinigt an; alsdann läßt sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt C der Punkte A und B in der geraden Linie AB nach §. 17. bestimmen. Heißen nemlich P und Q die Gewichte der beyden Körper, so ist $AC = \frac{Q \cdot AB}{P + Q}$

Gegenseitig leitet dies auf ein Verfahren, den Schwerpunkt eines Körpers zu finden, der als Theil eines Ganzen anzusehen ist, dessen Schwerpunkt man bereits kennt, z. B.

Man sucht den Schwerpunkt G des Trapeziums MNAB.

Da dasselbe durch Wegnahme des $\Delta MEN$ vom $\Delta ACB$ entsteht, und beyder Schwerpunkte in die Linie CD fallen, so muß auch G in diese Linie fallen. Setzt man also $CD = f$, $CI = g$, $CG = x$, den Inhalt des $\Delta\, ACB = F$, den des $\Delta MCN = G$, so hat man (§. 30.) $\frac{2}{3} Gg + x\,(F - G) = \frac{2}{3} Ff$, also $x = \frac{2}{3} \frac{(Ff - Gg)}{F - G}$. Man nenne nun $AB = a$, $MN = b$, und $ID = c$, so ist:

$f : g = a : b$; $F : G = a^2 : b^2$; $Ff : Gg = a^3 : b^3$, folglich

$c = f - g = \frac{(a - b)\,f}{a}$, $F - G = \frac{(a^2 - b^2)\,F}{a^2}$,

$Ff - Gg = \frac{(a^3 - b^3)\,Ff}{a^3}$. Dies giebt $x = \frac{2}{3}$

$\frac{f(a^3 - b^3)}{a(a^2 - b^2)} = \frac{2}{3} f\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + ab}\right)$, und DG $=$

$f - x = \frac{1}{3} f\left(\frac{a^2 + ab - 2b^2}{a^2 + ab}\right)$. Wird nun für f

sein Werth $\frac{ac}{a - b}$ gesetzt so bekommt man DG $= \frac{1}{3}$ c.

$\frac{a^2 + ab - 2b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{1}{3} c \left(\frac{a+2b}{a+b}\right)$

In dieser Formel bedeutet c die Länge der Linie, welche durch die Mitte der beyden parallelen Seiten geht; beym senkrechten Trapezium ist dies seine Höhe.

§. 89.

In jedem Körper, dessen Oberfläche ein stetiges Ganze ausmacht, giebt es eine zusammenhängende Linie, in welcher die Schwerpunkte aller seiner Querschnitte liegen, die aber zugleich auf ihr senkrecht seyn müssen. Sie heißt die centrische Linie des Körpers. Um sie zu finden, darf man, wegen letzterer Bedingung, den Körper nicht in willkührliche Querschnitte abtheilen, daher ihre Angabe oft Schwierigkeiten unterworfen seyn kann. Hat man sie aber einmal bestimmt, so kann man den Körper, in so fern er schwer ist, sich unter dieser Linie vorstellen, indem man in ihren Punkten die Gewichte der durch sie gehenden Querschnitte als vereinigt ansieht, und der Schwerpunkt der centrischen Linie ist alsdann auch zugleich der des Körpers.

§. 90.

Der Schwerpunkt einer Linie, deren Elemente verschiedenes Gewicht haben, läßt sich nun so finden:

Fig. 15. 1) Man nehme eine Ebene nach Gefallen an, und bestimme die Punkte Z der Curve durch die drey rechtwinklichten Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, so sind y und z Funktionen von x.

2) Das Element bey Z setze man $= ds$, sein Gewicht $= pds$, so ist auch p von x abhängig, und man hat nach §. 83.

$$a = \frac{\int xpds}{\int pds}, \quad b = \frac{\int ypds}{\int pds}, \quad c = \frac{\int zpds}{\int pds}$$ für die drey Coordinaten AD, DF, FG des Schwerpunktes G dieser Curve.

3) Sind die Querschnitte des Körpers gleich groß, so fällt auf jeden Punkt der centrischen Linie gleiches Gewicht, und alsdann ist p eine beständige Größe, folglich

$$a = \frac{\int xds}{s}, \quad b = \frac{\int yds}{s}, \quad c = \frac{\int zds}{s}$$

4) Ist die Linie von einfacher Krümmung, d. i. fällt sie ganz in eine Ebene, so nehme man in dieser die beyden Coordinaten x und y an, wodurch $z = o$, also auch $c = o$ wird. Der Schwerpunkt fällt nemlich alsdann in dieselbe Ebene hinein.

**Exempel.** Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden. Man setze den Halbmesser des Kreises $= f$, die Sehne des Bogens $= c$, ihre Entfernung vom Mittelpunkte $= g$, und nehme den Punkt A in ihrer Mitte an, so hebt sich jedes Paar xds für gleiche und entgegengesetzte x, also ist $\int xds = o$, folglich auch $a = o$. d. h. der Schwerpunkt des Bogens fällt in den Halbmesser, der die Sehne halbirt.

Man ziehe ferner aus dem Mittelpunkte mit der Sehne eine Parallele, und nehme auf dieser die Absciſsen $x$, so ist das zu jedem $x$ gehörige $Y = g + y$, und $Y^2 = f^2 - x^2$, woraus $ds = \frac{fdx}{Y}$ folgt. Dies giebt also $fdx = Yds = (g+y)\,ds$, und $yds = fdx - gds$, folglich $\int yds = fx - gs$. Hierin $x = c$ gesetzt, wegen der Verdopplung der Summe durch beyde Seiten, erhält man für $s$ die Länge des ganzen Bogens, und $b = \frac{cf}{s} - g$, also die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes vom Mittelpunkte $= b + g = \frac{cf}{s}$.

Für den halben Kreis ist diese Entfernung $= \frac{2f}{\pi} = 0{,}636619772 \ldots f$.

## §. 91.

Oft versteht man unter centrischer Linie auch diejenige, welche durch die Schwerpunkte paralleler Querschnitte geht, in die man den ganzen Körper eintheilt. Alsdann ist die Vorstellung von ihr einfacher, und es gilt noch eben das, was vorhin gesagt ist: sie vereinigt das ganze Gewicht des Körpers in sich, und hat mit ihm einerley Schwerpunkt.

## §. 92.

Die centrische Linie eines Prisma's ist offenbar eine gerade Linie; denn sie wird durch den Schwerpunkt seiner Grundfläche beschrieben, die man an einer der Seitenflächen des Prisma's parallel hinunter bewegt, und die auf solche Art nach und nach in die übrigen, ihr parallelen, Querschnitte zu liegen kommt. Man erhält sie also, wenn man die Schwerpunkte der beyden parallelen Grundflächen des Prisma's zusammenzieht.

Beym geraden Prisma erfüllt sie zugleich die Bedingung des §. 88.

Da die parallelen Querschnitte des Prisma's gleich groß sind, so ist die centrische Linie desselben in allen Punkten mit gleichen Gewichten beschwert, deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt also in ihre Mitte fällt. **Daher liegt der Schwerpunkt eines Prisma's in der Mitte seiner centrischen Linie.**

## §. 93.

**Aufgabe.** Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden.

**Aufl.** 1) Die centrische Linie der Pyramide ist ebenfalls gerade, und geht durch die Spitze derselben und den Schwerpunkt der Grundfläche: denn da die der Grundfläche parallelen Querschnitte ähnlich sind, so haben ihre Schwerpunkte ähnliche Lagen in denselben, wodurch sie in eine gerade Linie zu liegen kommen.

2) Nun sey ihre Länge, die sich vermöge ihrer Construction leicht finden läßt, $= \mathfrak{k}$, ein beliebiges Stück von ihr $= x$, der Inhalt des obern Pyramidenstückes, wozu dies gehört $= P$, so ist der Inhalt des

zunächst liegenden Querschnittes von unendlich geringer Dicke $= dP$. Heißt also nun noch $F$ der Inhalt der ganzen Pyramide, $a$ die Entfernung des Schwerpunktes in der centrischen Linie von der Spitze, so hat man

$Fa = \int x dP$.

3) Nun ist $F : P = f^3 : x^3$, also $P = \frac{Fx^3}{f^3}$,

$dP = \frac{3Fx^2 dx}{f^3}$, und $\int x dP = \frac{3F}{f^3} . \int x^3 dx = \frac{3Fx^4}{4f^3}$, das für $x = f$ der Werth $\frac{3}{4} Ff$ bekommt. Man hat daher: $Fa = \frac{3}{4} Ff$ oder $a = \frac{3}{4} f$.

4) **Der Schwerpunkt der Pyramide liegt also in der centrischen Linie um $\frac{3}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt.**

## §. 94.

Demnach ist auch die centrische Linie einer abgekürzten Pyramide gerade, und es ist leicht, in ihr den Schwerpunkt derselben zu finden. Heißen nemlich die Längen der centrischen Linie für die ganze Pyramide, und das fehlende obere Pyramidenstück $f$ und $g$, ihre Inhalte $F$ und $G$, ihre Grundflächen, wodurch das abgekürzte Stück begrenzt wird, $B$ und $S$, und endlich die Entfernung seines Schwerpunktes von der Spitze $x$, so hat man nach §.

$$\frac{3}{4} Gg + x(F - G) = \frac{3}{4} Ff, \text{ also } x = \frac{3}{4} . \frac{Ff - Gg}{F - G}.$$

Da nun $f : g = B^{\frac{1}{2}} : S^{\frac{1}{2}}$, $F : G = B^{\frac{3}{2}} : S^{\frac{3}{2}}$, und $Ff : Gg = B^2 : S^2$ so wird $x = \frac{3}{4} f \frac{B^2 - S^2}{(B^{\frac{3}{2}} - S^{\frac{3}{2}}) . \sqrt{B}}$.

Man nenne c die Länge der centrischen Linie innerhalb der beyden Grundflächen, so ist $c = f - g = f \frac{(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}{B^{\frac{1}{2}}}$, und $f = \frac{B^{\frac{1}{2}} c}{B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}}}$, folglich $x = \frac{3}{4} c \cdot \frac{(B^2 - S^2)}{(B^{\frac{3}{2}} - S^{\frac{3}{2}})(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}$, und die Entfernung des Schwerpunktes vom Schwerpunkte der untern Basis $= f - x = \frac{1}{4} c \cdot \frac{B^2 - 4B^{\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{2}} + 3S^2}{(B^{\frac{3}{2}} - S^{\frac{3}{2}})(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}$, oder wenn man mit $(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})^2$ dividirt, $= \frac{1}{4} c \cdot \frac{B + 3S + 2\sqrt{BS}}{B + S + \sqrt{BS}}$

## §. 95.

**Lehrsatz. Bey ebenen Figuren oder Körpern, welche einen Mittelpunkt, d. i. einen Punkt von solcher Beschaffenheit enthalten, daß allemal zwey entgegengesetzte Radien, die von ihm aus nach dem Umfange, oder beym Körper, bis zur Oberfläche gehen, einander gleich sind, fällt der Schwerpunkt in diesen Mittelpunkt hinein.**

Fig. 18. **Beweis** 1) Es sey MSN der Umfang einer solchen Figur, C ihr Mittelpunkt; man ziehe durch C die gerade Linie MCN, und eine andere mCn ihr unendlich nahe, so ist der Voraussetzung nach, CM = CN, Cm = Cn, und die Dreyecke CMm, CNn sind also congruent.

2) Die centrische Linie des $\Delta$MCm halbirt seine Grundlinie in O, und fällt daher mit der des $\Delta$CNn zusammen, weil sie verlängert auch Nn halbirt.

3) Nun seyen G und g die Schwerpunkte der beyden Dreyecke, so hat man $CG = \frac{2}{3}\, CO$, $Cg = \frac{2}{3}\, Co$, also, weil $CO = Co$ ist, auch $CG = Cg$; mithin sind in gleichen Entfernungen von C gleiche Gewichte befindlich, und C ist folglich ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt.

4) Eben dies gilt so von jedem Paare solcher entgegengesetzten Dreyecke, in die sich die ganze Figur theilen läßt; also fällt auch der Schwerpunkt der ganzen Figur in C.

5) Beym Körper ziehe man aus dem Mittelpunkte C vier solcher unendlich nahe liegenden Radien, und verlängere sie nach entgegengesetzten Richtungen über C hinaus, so entstehen dadurch zwey gleiche und ähnliche Pyramiden in entgegengesetzter Lage, deren centrische Linien also in Eine durch C gehende Linie zusammenfallen, und von gleicher Länge sind.

6) In diesen liegen die Schwerpunkte der Pyramiden gleich weit von C entfernt (§. 92.), und haben folglich in C ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt. Da nun der ganze Körper in solche einander entgegenliegende Pyramiden sich theilen läßt, so folgt, daß dessen Schwerpunkt ebenfalls in C hineinfalle.

## §. 96.

Folg. 1. Zu den ebenen Figuren der Art gehören: das reguläre Vieleck; das Parallelogram, dessen Schwerpunkt deshalb in den Durchschnitt der beyden Diagonalen fällt; der Kreis, die Ellipse u. a. m.

2. Die centrische Linie des Cylinders geht daher durch die Mittelpunkte seiner Grundflächen, und da er zu den prismatischen Körpern gehört, so liegt sein Schwerpunkt in der Mitte derselben.

3. Eben so geht die centrische Linie des schiefen sowohl als geraden Kegels durch dessen Spitze und den Mittelpunkt seiner Grundfläche, und sein Schwerpunkt liegt in ihr um $\frac{3}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt. Beym geraden Kegel ist die centrische Linie also mit der Höhe oder Axe einerley.

4. Zu den Körpern, die einen Mittelpunkt haben, gehört die Kugel, und das elliptische Sphäroid.

## §. 97.

Fig. 19. Ueberhaupt ist bey allen runden Körpern, d. h. solchen, die durch Umdrehung einer Fläche AMSX um ihre Axe AX entstehen, die Axe zugleich die centrische Linie derselben. Denn jeder auf die Axe senkrechte Querschnitt des Körpers ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

Man setze daher die rechtwinklichten Coordinaten AP und PM, wodurch die Beschaffenheit der Linie AMS bestimmt wird, $=$ x und y, so ist das Element des Körpers, welches von den beyden unendlich naheliegenden Querschnitten, die durch P und p gehen, begrenzt wird, und die Dicke Pp $=$ dx hat, $= \pi y^2 dx$, und man folglich, wenn die Entfernung AG des Schwerpunktes vom Scheitel $=$ a gesetzt wird: $a = \frac{\pi \int y^2 x dx}{\pi \int y^2 dx} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, wo sowohl im Integrale des

Zählers als des Nenners x = der ganzen Länge der Axe oder centrischen Linie gesetzt werden muß.

Z. E. Es sey der Körper ein Kugelsegment von der Höhe AX = h, und der Halbmesser der Kugel = f, so ist:

$y^2 = 2fx - x^2$, folglich $\int y^2 dx = fx^2 - \frac{1}{3}x^3$, und $\int y^2 x dx = \frac{2}{3} fx^3 - \frac{1}{4} x^4$, und daher für $x = h$, $a = \frac{8fh - 3h^2}{12f - 4h}$. Für die Halbkugel ist $h = f$, also $a = \frac{5}{8} f$.

## Die Wage.

### §. 98.

Um zu erfahren, wie viel ein Körper wiege, darf man nur bekannte Gewichte, oder auch andere Kräfte, die man kennt, mit ihm ins Gleichgewicht bringen, und das kann auf sehr mannigfaltige Art geschehen. Beyspiele davon geben außer dem gemeinen Hebel, Lamberts schwere Ebene *), die Federwaage, der von Ludlam angegebene Winkelhebel **) u. a. m. Unter allen diesen behält aber doch immer der Hebel wegen seiner Einfachheit den Vorzug, und ist deshalb als Werkzeug zum Abwiegen allgemein aufgenommen. Man kann durch ihn, wie man will, entweder Genauigkeit in Bestimmung des Gewichts erlangen, oder, wie dies von der Schnellwage §. 36. gezeigt ist, den Vortheil, daß

*) S. Acta Helvetica Tom. 3.

**) Phil. Transact. Vol. 55.

man bey großen Lasten mit geringern Gewichten ausreicht. Beyde Zwecke sind von entgegengesetzter Art, und lassen sich nicht zu gleicher Zeit erfüllen: denn um aus dem kleinern Gewichte auf das größere zu schließen, muß man es multipliciren, wodurch ein an sich unbemerkbarer Fehler, den man beym Abwiegen begeht, zu einer beträchtlichen Größe anwachsen kann. Man würde also, wo Genauigkeit das Haupterforderniß ist, die Schnellwage umkehren, und zur Bestimmung einer Last, ein noch größeres Gewicht anwenden müssen; aber dies Verfahren, außerdem daß es manche Unbequemlichkeiten haben würde, könnte doch selbst auch wegen der Eintheilung des kleinern Armes neue Fehler veranlassen. Man wählt daher zwischen beyden Einrichtungen das Mittel, und nimmt die Hebelarme gleich lang, wodurch die sogenannte **Wage** entsteht. Jeder kennt dies Instrument, also ist seine Beschreibung unnöthig, und wir können uns hier darauf einschränken zu bestimmen, was die Erfordernisse seiner Vollkommenheit sind, und wie sich diese erreichen lassen.

## §. 99.

Ein gleicharmiger Wagebalken, dessen Schwerpunkt in seine Axe fällt, wird in jeder Lage bey gleichen Gewichten ruhen (§. 58.), also ist seine horizontale Lage kein ausschließendes Zeichen des Gleichgewichts. Aus eben dem Grunde kann er auch bey keiner Lage in Ruhe treten, wenn die Gewichte ungleich sind, und muß sich daher in dem Falle so lange drehen, bis er vertikal zu stehen kommt. Da dies das Abwiegen sehr beschwerlich machen würde, so muß man nothwendig den Wagebalken so einrichten, daß er für ungleiche Gewichte dennoch in irgend einer schiefen Lage stehen bleibt, und folglich nur in dem einen Falle die Gewichte gleich seyn können, wenn er sich horizontal stellt.

## §. 100.

Fig. 20. Es sey O der Ruhepunkt des Wagebalken, g sein Schwerpunkt; in jedem der Punkte A und B, die in einer Horizontale AB liegen sollen, hänge ein gleich großes Gewicht p vermittelst zweyer Schaalen, deren Gewichte wir $= m$ und $n$ setzen wollen. Das Gewicht des Balken sey $= G$, und wenn man OC und gl auf AB senkrecht zieht, $CG = lg$ macht; $OG = f$, $Gg = Cl = g$. Der einfache Hebel, an dem diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten, ist sodann als ein Winkelhebel AOB anzusehen, und da ihre senkrechten Entfernungen vom Ruhepunkte AC, BC und CG sind, so hat man

$$(p+m)\,AC = (p+n)\,BC + Gg, \text{ folglich}$$

$$p\,(AC - BC) = n\,.\,BC - m\,AC + Gg.$$

Da diese Gleichung für jedes p statt finden soll, so muß jede Seite für sich $= 0$ seyn, also wird

$$p\,(AC - BC) = 0 \text{ und}$$

$$n\,.\,BC - m\,.\,AC + Gg = 0$$

Erstere Gleichung giebt $AC = BC$, woraus erhellet, daß nur die gleicharmige Wage für gleiche angehängte Gewichte bey horizontaler Lage in Ruhe seyn kann.

Aus der andern Gleichung erhält man:

$$mAC = nBC + Gg$$

also müssen die Gewichte der Schalen so beschaffen seyn, daß sich die Wage auch dann horizontal stellt, wenn sie mit gar keinen Gewichten beschwert ist.

Fällt daher der Schwerpunkt $g$ in $G$, oder mit dem Aufhängepunkte in einerley Vertikale, so hat man $g = 0$, folglich $m = n$.

## §. 101.

Die erste Bedingung bey einer Wage ist also die, daß sie gleicharmig seyn muß, d. h. daß ein Perpendikel aus dem Ruhepunkte O auf die Linie AB durch die Aufhängepunkte gezogen, diese halbiren muß. Es können nemlich nur alsdann zwey gleiche Gewichte bey horizontaler Lage der Linie AB einander aufwiegen. Um genau zu wissen, wann der Wagebalken horizontal liegt, hat man die Zunge auf ihn angebracht, die auf AB senkrecht seyn muß, weil man unter dem Wagebalken, wenn von seiner Lage die Rede ist, allemal die Linie AB zu verstehen hat. Da die Zunge bey horizontaler Lage des Wagebalken vertikal ist, und sich also hinter der Scheere, die ebenfalls vertikal hängt, verbirgt, so macht man bey genauen Wagen an der Stelle, wo die Spitze der Zunge durchgeht, in der Scheere eine Oeffnung. Die Zunge muß sich, wenn sie vollkommen vertikal steht, in dieser Oeffnung zeigen, und in die Linien fallen, welche die Scheere ihrer Länge nach halbirt.

## §. 102.

Wenn die Theile AC und BC ungleich lang sind, so heißt die Wage falsch. Man nenne p und q die ungleichen Gewichte, die bey ihr, wenn sie horizontal ist, im Gleichgewichte stehen, so hat man: $(p + m) AC = (q + n) BC + Gg$.

Hat sie für sich, wenn sie von den Gewichten frey ist, horizontalen Stand, so ist $m . AC = n . BC + Gg$, und setzt man

$$m = n, \; m (AC - BC) = Gg.$$

also für $m = o$, auch $Gg = o$, d. i. wenn die Wage auch nach Wegnahme der Schalen noch horizontal seyn soll, so muß der Schwerpunkt des Balken in die Vertikale OC fallen: alsdann aber kann sie nicht mehr in dieser Lage bleiben, sobald die Schalen angehängt werden, wodurch sie ihre Unrichtigkeit gleich offenbart.

## §. 103.

Die Bedingungsgleichung $m . AC = n . BC + Gg$ von der erstern abgezogen, läßt übrig $p . AC = q . BC$. Diese Eigenschaft der falschen Wage giebt ein Mittel, die ungleiche Länge ihrer Arme zu erforschen, und das wahre Gewicht eines Körpers durch sie dennoch zu finden. Man setze nemlich, der Körper habe nach der Wage das Gewicht p, wenn er in die Schale bey B, und das Gewicht q, wenn er in die bey A gelegt wird; sein wahres Gewicht sey $= x$, so ist:

$$p . AC = x . BC \text{ und}$$

$$x . AC = q . BC$$

also

also $x \cdot AC \cdot BC = pAC^2 = q \cdot BC^2$; folglich $AC : BC = \sqrt{q} : \sqrt{p}$; und $x^2 = pq$, oder $x = \sqrt{pq}$.

Hat man erst durch einen Versuch das Verhältniß der Arme gefunden, so hat man nachher nicht wieder nöthig, das doppelte Wiegen in beyden Schalen anzustellen. Wem es beschwerlich fallen sollte, Wurzeln auszuziehen, der könnte auch so verfahren: Man wiege den Körper durch irgend eine Sache, sie sey Gewicht, oder sonst etwas, auf; nehme ihn von der Schale weg, und lege dafür so viel Gewicht hinein, daß die Wage wieder horizontal zu stehen kommt, so ist letzteres Gewicht dem des Körpers äquipollent, und folglich mit ihm einerley.

## §. 104.

Aufgabe. Bey der gleicharmigen Wage den Neigungswinkel der schiefen Lage des Wagebalken gegen die horizontale zu bestimmen, in der sie stehen bleibt, wenn zu p auf der einen Seite B noch ein Gewicht $\pi$ hinzukommt.

Aufl. 1) Man betrachte jetzt die Lage von AB als schief, und $A\alpha$, $B\beta$, $Oc$, $g\lambda$ als die Vertikalen nach denen die Gewichte ziehen, und der Ruhepunkt widersteht. Diese machen alsdann mit den auf AB senkrechten Linien Aa, Bb, OC, gl den gesuchten Neigungswinkel, den wir F nennen wollen.

2) Die Kraft, womit der Ruhepunkt O zurückwirkt, und die nach cO gerichtet ist, kann man auf den Punkt c reduciren, und da auf solche Weise die Ge-

wichte nach parallelen Richtungen an dem Hebel AcB ziehen, so würde das Gleichgewicht noch bleiben, wenn man sie nach senkrechten Richtungen auf eben die Punkte anbrächte. Diesem zu Folge hat man:

$$(p+m)\,Ac = (p+\pi+n)\,Bc + G.c\lambda.$$

3) Nun setze man $OC = h$, $AC = BC = a$, so ist $Cc = h \tang I$, $l\lambda = CG \tang I = (f-h) \tang I$, folglich $Ac = a + h \tang I$, $Bc = a - h \tang I$, $c\lambda = g - f \tang I$, und daher:

$$(p+m)(a+h \tang I) = (p+\pi+n)(a-h \tang I) + G(g - f \tang I).$$

4) Daraus wird

$$[(2p+\pi+m+n)\,h + Gf] \tang I + (m-n-\pi)\,a = Gg$$ folglich da $(m-n)\,a = Gg$ (§. 99.)

$$\tang I = \frac{\pi a}{(2p+\pi+m+n)\,h + Gf}$$

Oder, wenn man den Druck, den der Ruhepunkt leidet, $= P$ setzt: $\tang I = \dfrac{\pi a}{Ph + Gf}$

## §. 105.

Folgerung. 1. Da tang I sich wie $\pi$ verhält, so kann dieser Winkel nicht anders $= 0$ werden, als wenn $\pi = 0$ ist, d. h. der Wagebalken kann sich nicht anders horizontal stellen, als wenn beyde Gewichte gleich groß sind, daher ist seine horizontale Lage ein ausschließendes Zeichen der Gleichheit der Gewichte.

2. Man kann gegenseitig aus dem Winkel I den Unterschied $\pi$ der Gewichte bestimmen, wofern man die

Werthe von a, f, h und G weiß, und diese lassen sich durch Versuche mit Gewichten finden. Da es schwer hält, das Gleichgewicht so zu treffen, daß die Zunge völlig vertikal zu stehen kommt, so könnte dies bey Abwägungen, wo große Genauigkeit gefordert wird, von Nutzen seyn, indem sich die Abweichung der Zunge von der Vertikale durch einen an der Scheere angebrachten Gradbogen sehr genau messen ließe.

3. Es ist gut, wenn die Wage für einen geringen Unterschied der Gewichte um einen merklichen Winkel aus der horizontalen Lage weicht: denn alsdann läßt sich dieser Unterschied leichter beobachten und ersetzen. Da sich nun tang I auch wie a verhält, so sieht man, daß die Wage eine desto genauere Bestimmung des Gewichtes zuläßt, je länger ihre Arme sind.

4. Fällt der Schwerpunkt in den Aufhängepunkt, und dieser zugleich in die Linie AB, so ist $h = f = 0$, also $\tang I = \infty$, und $I = 90°$, d. h. die Wage schlägt in diesem Falle bey der mindesten Verschiedenheit der Gewichte sogleich um, und stellt sich vertikal, wie schon §. 98. angemerkt ist.

5. Da g in der Formel nicht vorkommt, so ist es in Rücksicht des Erfordernisses (3) einerley, ob die Arme der Wage gleich schwer sind, oder nicht. Haben sie ungleiches Gewicht, so müssen nur die Schalen so genommen werden, daß die Gleichung $(m - n) a = Gg$ erfüllt wird, und das kann oft zweckmäßig seyn: weil nemlich die Gewichte gewöhnlich aus Bley bestehen, so haben sie meist ein weit größeres specifisches Gewicht,

als das, was man durch sie wiegt, und nehmen also viel weniger Raum ein; daher kann die Schale für sie weit kleiner seyn, als die andere, wodurch P vermindert wird.

## §. 106.

**Aufgabe.** Wenn die Wage gleiche Gewichte trägt, und in eine schiefe Lage gebracht wird, die Kraft zu bestimmen, womit sie gehalten werden muß, um in dieser zu bleiben.

**Aufl.** 1) Der Wagebalken sey unter dem Winkel I inclinirt; auf OB sey die gesuchte Kraft V senkrecht angebracht, und da es bloß auf ihr Moment ankommt, so heiße dies M. Alsdann ist $M = V . OB$.

2) Man setze, ein Gewicht $\pi$ sey ihr äquipollent, und zerlege dies nach OB und der darauf senkrechten Richtung, so ist letzterer Theil, wenn man den Winkel $CBO = \omega$ setzt, $= \pi \operatorname{Cos} (I + \omega)$, weil die Verlängerung von OB mit der Vertikale $B\beta$ den Winkel $I + \omega$ macht; also $V = \pi \operatorname{Cos} (I + \omega)$.

3) Demnach ist $M = OB . \pi \operatorname{Cos} (I + \omega) = \pi \operatorname{Cos} I . OB (\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega \operatorname{tang} I) = \pi \operatorname{Cos} I (a - h \operatorname{tang} I)$, und $\pi . Bc = \frac{M}{\operatorname{Cos} I}$.

4) Da die Gewichte nach parallelen Richtungen ziehen, so kann man sie auf eben die Punkte nach senkrechten Richtungen anbringen, ohne das Gleichgewicht zu stören, also hat man:

$$(p+m)(a+h\,\mathrm{tang}\,I) = (p+n)(a-h\,\mathrm{tang}\,I)$$
$$+\,G(g-f\,\mathrm{tang}\,I)+\frac{M}{\mathrm{Cos}\,I};$$

folglich $\frac{M}{\mathrm{Cos}\,I} = (m-n)a - Gg + [(2p+m+n)$
$h + Gf]\,\mathrm{tang}\,I$

oder, weil $(m-n)a - Gg = 0$ ist:

$$M = (2p+m+n)h + Gf)\,\mathrm{Sin}\,I.$$

## §. 107.

Zu den Eigenschaften einer guten Wage gehört auch die, daß sie, wenn die Gewichte gleich sind, dies so schnell als möglich anzeige; und dazu wird erfordert, daß alsdann ihr Bestreben, sich horizontal zu stellen, so groß als möglich sey. Da nun dies Bestreben auf dem von M beruhet, so sieht man, daß die Wage so eingerichtet werden müsse, daß der Ausdruck $(2p+m+n)h + Gf$ einen möglichst grösten Werth bekomme. Aber dies streitet geradezu mit der Bedingung §. 104. 4. nach der $\mathrm{tang}\,I$ so groß als möglich, folglich $Ph + Gf$ so klein als möglich seyn soll. Man kann daher keinem dieser beyden Requisite völlig Genüge leisten, wofern man nicht das eine dem andern nachsetzen will, welches doch nicht geschehen darf, da sie beyde gleich wesentlich sind. Am besten thut man also, wenn man die Werthe h, f und g weder zu groß noch zu klein annimmt.

## §. 108.

Aus dem gefundenen Werthe für M lassen sich noch folgende Betrachtungen ziehen:

1. Fällt der Ruhepunkt über die Linie AB, so ist h positiv, also die Wage desto rascher, je größer die Gewichte sind, womit sie beladen wird.

2. Ist $OC = 0$, so ist $M = Gf \tang I$, also ihr Bestreben bey gleichen Gewichten sich horizontal zu stellen, für große und kleine Gewichte gleich groß. Da die Friction die Trägheit der Wage vermehrt, und für größere Gewichte größer ist, so ist eine Wage, bey der O in AB fällt, für kleinere Gewichte brauchbarer.

3. Wenn sowol C als G über O liegt, so sind h und f beyde negativ, also auch M. Das heißt nun, wenn der Balken einer solchen Wage aus der horizontalen Lage gebracht wird, so hat er ein Bestreben, sich noch weiter davon zu entfernen, und sich ganz herumzudrehen, bis der Ruhepunkt über die Punkte C und G zu liegen kommt. Dieser Fehler, der durchaus nicht statt finden darf, macht dergleichen Wagen ganz untauglich.

4. Ist bloß OC negativ, so ist die Wage für kleinere Gewichte brauchbar, indem dann M einen mittlern Werth bekommt, wofern Gf nicht zu klein ist. Für größere Gewichte hingegen wird sie träge, und kann selbst zum Umschlagen geneigt werden.

5. Ist statt dessen OG bloß negativ, so ist die Wage für Gewichte, die kleiner als $\frac{Gf}{2h}$ sind, dem Umschlagen ausgesetzt; für etwas größere wird sie träge, und für noch größere brauchbar. Man kann also die

Wagen so einrichten, daß sie entweder zu größeren oder kleinern Gewichten taugen.

Anmerk. Das Bisherige ist zum Theil aus Eulers Abhandlung de Bilancibus genommen, die in den Coment. Petropol. Tom. X. steht. Andere nöthige Betrachtungen über dies Instrument kommen in der Folge vor, weil sie noch weitere Vorkenntnisse voraussetzen. Wer sich mit der genauern Einrichtung desselben, und der Verfertigung seiner Theile bekannt machen will, der lese folgende Schriftsteller darüber nach:

Bülfinger, Comment. Petropol. Tom. II.
Leutmann, Comment. Petropol. Tom. X.
Kuhn, Versuche der naturforschenden Gesellschaft in Danzig Tom. I.

## Stabilität der Körper auf festem Boden.

### §. 109.

Die äußersten Punkte eines Körpers, womit er den horizontalen Boden berührt, auf dem er ruhet, schließen einen bestimmten Raum ein, den wir die **Basis** des Körpers nennen wollen.

Der Körper kann durch Füße oder Stützen nur in einigen Punkten den Boden berühren, alsdann erhält man den Umfang der Basis, wenn man je zwey der nächsten Berührungspunkte durch gerade Linien verbindet.

### §. 110.

Wenn der Körper vermöge seiner Stellung vor dem Umschlagen gesichert ist, so muß doch irgend eine Kraft, die seitwärts auf seinen Schwerpunkt wirkt, ihn um eine der Seiten seiner Basis zu drehen im Stande seyn, wofern er nicht den Boden parallel fortrücken kann. Diese Kraft, wenn sie gerade so groß genommen wird, als nöthig ist, den Widerstand des Körpers zu überwinden, bestimmt die Festigkeit seines Standes in Ansehung der Seite, nach der die Umdrehung geschieht, oder, wie man sich ausdrückt, seiner **Stabilität.**

## §. 111.

**Aufgabe.** Die Stabilität eines Körpers, der auf horizontalem Boden steht, in Rücksicht einer Seite AB seiner Basis zu finden.

Fig. 21. Aufl. 1) Man fälle aus seinem Schwerpunkte G auf den Boden sowohl als auf die Linie AB die Perpendikel GO und GD, und lege durch beyde eine Ebene, so schneidet diese die Linie AB in D senkrecht.

2) Wenn man daher in derselben GI mit DO parallel zieht, und darauf das Perpendikel DI fällt, so sind DO und DI ebenfalls beyde senkrecht auf AB.

3) Es wirke nun eine Kraft S auf den Schwerpunkt G nach der horizontalen Richtung GI, und werde durch den Körper vermöge seiner Stabilität im Gleichgewichte erhalten, so kann man diese auf den Punkt I anbringen, und sie hat daselbst das Moment S . DI den Körper um AB zu drehen.

4) Das Gewicht des Körpers sey P, so hat dies in O das Moment P . DO, den Körper nach entgegengesetzter Seite um AB zu drehen.

5) Sollen also beyde Kräfte an der Axe AB im Gleichgewichte seyn, so hat man $S . DI = P . DO$ (§. 67.), also $S = \frac{DO}{DI} . P = \frac{DO}{GO} . P.$

6) Wäre $S > \frac{DO}{GO} . P$, so wäre das Moment $S . DI > P . DO$, und es erfolgte wirklich eine Umdrehung des Körpers nach außen zu: also ist die Kraft $\frac{DO}{GO} . P$ gerade so groß, als nöthig ist, den Widerstand des Körpers, den er der Umdrehung entgegensetzt, aufzuheben, und zeigt daher seine Stabilität an.

§. 112.

Folgerung. 1. Fällt der Punkt O innerhalb der Basis, so ist DO für jede ihrer Seiten positiv; es gehört folglich alsdann allemal eine Kraft dazu, den Körper nach irgend einer Seite umzustoßen, und er steht daher für sich fest. Da also in diesem Falle der Widerstand des Bodens dem Körper das Gleichgewicht hält, so muß dessen mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

2. Für $DO = 0$, d. h. wenn O in den Umfang der Basis fällt, ist auch $S = 0$. Der Körper schlägt in diesem Falle zwar nicht um, wenn er sich selbst überlassen bleibt, er wird aber durch die mindeste Kraft, die nach der Seite, wo D liegt, auf seinen Schwerpunkt wirkt, dazu gebracht.

3. Fällt O außerhalb der Basis, so ist OD negativ; alsdann muß also der Körper gehalten werden, wenn er nicht umschlagen soll, d. i. er kann für sich seine Stellung nicht behaupten, sondern dreht sich um diejenige Kante der Basis, die dem Punkte O am nächsten liegt.

4. Ein Körper steht auf horizontalem Boden desto fester, je größer sein Gewicht ist, je niedriger sein Schwerpunkt über der Basis liegt, und je weiter allenthalben der Punkt, wo das aus seinem Schwerpunkte herabgefällte Loth den Boden trifft, vom Umfange der Basis entfernt ist.

5. Ein runder Körper (§. 96.), der auf einem durch seine Axe senkrecht gehenden Querschnitte ruhet, hat nach allen Seiten zu gleiche Stabilität: denn sein Schwerpunkt fällt in die Axe, und folglich O in den Mittelpunkt seiner kreisförmigen Basis. Seine Stabilität ist bey übrigens gleichen Umständen desto größer, je größer der Halbmesser des Kreises ist. Bey runden Körpern, die ähnlich sind, verhält sie sich wie derren Gewichte.

6. Bey einer Kugel ist die Stabilität $= 0$, d. h. sie liegt zwar ruhig, so lange sie unberührt bleibt, aber bey dem geringsten Stoße, den man ihr giebt, kommt sie ins Rollen.

7. Es sey die Höhe einer cylindrischen Säule $= h$, der Halbmesser der Basis $= r$, das spezifische Gewicht der Materie, aus der sie besteht, $= G$; so ist $P = \pi G r^2 h$, also $S = 2\pi G r^3$. Die Stabilität derselben ist also von ihrer Höhe unabhängig, und bey cylindrischen Säulen von einerley Materie verhält sie sich wie der Cubus des Halbmessers.

## §. 113.

Da Fuhrwerke bey größerer Breite und kleinern Rädern weniger dem Umschlagen ausgesetzt sind, so muß man ihre Breite fast in eben dem Verhältnisse vermehren, als man ihnen größere Räder giebt, wofern man an Stabilität nicht verlieren will. Die inclinirte Lage der Speichen an den Rädern gewährt, wie in mancher andern Rücksicht, auch hier wesentliche Vortheile. Außerdem kommt viel darauf an, wie auf dem Wagen die Last vertheilt wird: damit nemlich der Schwerpunkt des Ganzen so tief als möglich und in die Mitte zu liegen komme, müssen die schwereren Sachen unten hingebracht werden, und keine Seite darf mehr bepackt seyn als die andere. Zur Beurtheilung des Effekts, den in diesem Betracht die Verlegung der Sachen an andern Stellen hervorbringt, dient folgender Satz:

## §. 113. a.

Fig. 22. Wenn in einem Behältnisse, dessen Gewicht P ist, eine Last p aus dem Orte M nach m verlegt wird, so verrückt sich der Schwerpunkt G des ganzen Behältnisses nach der mit Mm parallelen Richtung um $Gg = \frac{pMm}{P}$

**Beweis.** 1) Es sey O der Schwerpunkt der Masse $P - p$, wenn die Last p aus dem Behältnisse ganz weggenommen wird, so ist G der gemeinschaftliche Schwerpunkt von O und M; es liegen also O, G und M in gerader Linie, und zwar so daß

$$OG : GM = p : P - p, \text{ oder } OG : OM = p : P.$$

2) Eben so fällt, wenn p in m gelegt wird, der gemeinschaftliche Schwerpunkt in der geraden Linie Om

irgendwo in g, und es ist wieder $Og : Om = p : P$, folglich hat man:

$$OG : OM = Og : Om.$$

3) Zieht man also die geraden Linien Gg und Mm, so sind die Dreyecke OGg und OMm ähnlich: daher ist Cg mit Mm parallel, und $Gg : Mm = OG : OM = p : P$, folglich

$$P \cdot Gg = p \cdot Mm, \text{ oder } Gg = \frac{p \cdot Mm}{P}$$

Also kommt beym Umpacken einer Sache, in Ansehung des Ganzen, ihre Stelle gar nicht in Betracht, sondern nur allein ihr Gewicht, und die Richtung und Größe ihrer Ortsveränderung.

## §. 114.

Es sey der Querschnitt einer Mauer ein Trapezium, dessen obere Breite $= f$, die untere $= g$; die Höhe der Mauer sey $= h$, ihre Masse oder ihr Ge-Gicht $= M$, so ist bey ihr (§. 111.) $DO = \frac{1}{2} g$,

$GO = \frac{1}{3} \frac{h(2f+g)}{f+g}$ (§. 87.), folglich ihre Stabilität $= \frac{3Mg(f+g)}{2h(2f+g)}$.

Hätte die Mauer allenthalben die Dicke $\frac{1}{2}(f+g)$, so wäre ihre Masse noch dieselbe, und ihre Stabilität $= \frac{M(f+g)}{2h}$; also verhält sich die Stabilität der gleichdicken Mauer zu der einer trapezenförmigen bey gleicher Masse und Höhe, wie $2f+g$ zu $3g$, so daß folglich letztere immer größer als erstere ist, so lange $g > f$.

## §. 115.

Setzt man das spezifische Gewicht $= 1$, so ist die Masse des Trapeziums $= \frac{1}{2} h (f + g)$, also seine Stabilität $= \frac{3g (f+g)^2}{4 (2f+g)}$. Da dieser Ausdruck kein $h$ enthält, so folgt: **daß zwey senkrechte Trapezia auf gleicher Grundlinie einerley Stabilität haben, wofern nur ihre obere Breite dieselbe ist.**

Bringt man den Ausdruck auf die Form $\frac{3}{4} g \left(g + \frac{f^2}{2f+g}\right)$, so sieht man, daß er mit $f$ zugleich abnehme und wachse; daher hat von zweyen senkrechten Trapezien, die einerley Basis haben, das die größte Stabilität, welches oben breiter ist.

Also steht auf eben der Grundfläche eine gleiche dicke Mauer fester, als eine andere, die nach oben zu schmaler ist.

# Schiefe Fläche.

## §. 116.

Wenn die Ebene, auf der sich der Körper befindet, gegen den Horizont geneigt ist, so hat er vermöge seiner Schwere, wenn er auch vor dem Umschlagen gesichert ist, doch immer ein Bestreben längs derselben hinunter zu gleiten. Denn der Widerstand, den die Fläche dem Körper entgegensetzt, ist senkrecht auf die Fläche; also gesetzt auch, diese Kraft geht durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist ihre Richtung doch nicht vertikal, folglich kann sie sein Gewicht nur zum Theil aufheben, und bildet mit diesem eine zusammmengesetzte Kraft, die den Körper parallel der Fläche herabtreibt.

## §. 117.

**Aufgabe.** Die Kraft zu bestimmen, die den Körper auf der schiefen Fläche im Gleichgewichte erhält.

Fig. 23. Aufl. 1) Es sey EF der Durchschnitt einer nach Gefallen angenommenen horizontalen Ebene mit der schiefen; G der Schwerpunkt des Körpers; GCE $= 90°$, und dann auch in der horizontalen Ebene ECB $= 90°$, so steht EF, also auch die Ebene BCE, auf der Ebene GCB senkrecht, d. h. sie ist vertikal.

2) Sie schneide die schiefe Ebene in AC, so ist auch ACE $= 90°$, folglich ACB der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die horizontale; dieser heiße I.

3) Es sey ferner GD vertikal; GO auf AC senkrecht, so ist diese Linie die Normale der schiefen Ebene in O, und liegt mit GD in einerley vertikalen Ebene GCB.

4) Vorausgesetzt also, daß O innerhalb der Basis des Körpers fällt, worinn er die schiefe Fläche berührt, so wirkt diese mit der ganzen Kraft, womit sie gedrückt wird, auf G nach OG zurück (§. 112. 1.). Wir wollen diesen Druck $\Pi$ nennen.

5) Es sey Gn die verlängerte Richtung desselben; so ist noch irgend eine andere Kraft nach einer willkührlichen Richtung Gf in der Ebene GCB erforderlich, der Kraft P, die der Körper nach GD ausübt, das Gleichgewicht zu halten.

6) Man setze diese Kraft $= V$, und den Winkel GHB, den ihre verlängerte Richtung mit der Horizontale macht, $= I'$, so hat man

$V \operatorname{Sin} HGB = \Pi \operatorname{Sin} DGO$ oder

$V \operatorname{Cos} I' = \Pi \operatorname{Sin} I$, und

$P \operatorname{Sin} DGO = V \operatorname{Sin} HGO$ (§. 52.), oder

$$P \operatorname{Sin} I = V \operatorname{Cos} (I' - I)$$

folglich $V = \dfrac{P \operatorname{Sin} I}{\operatorname{Cos} (I' - I)}$

## §. 118.

Hieraus lassen sich folgende Bemerkungen ziehen:

1. Die Richtung der Kraft V muß in GCB, der Neigungsebene der schiefen Fläche gegen die horizontale, liegen, und durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

2. Ist $I' = I$, oder die Richtung dieser Kraft mit AC parallel, so ist $V = P \operatorname{Sin} I$. Alsdann ist sie also am kleinsten, folglich diese Richtung für sie unter allen die vortheilhafteste.

3. Der Schwerpunkt strebt nach dieser Richtung GI unmittelbar fortzurücken, weil sie die Fläche nirgends schneidet, und also eine freye Richtung für ihn ist. Es ist zu bemerken, daß sie dem Körper zugleich den kürzesten Weg darbietet, zum tiefsten Punkte zu gelangen.

4. Ist $I' = 0$, oder die Richtung der Kraft horizontal, so ist $V = \dfrac{P \operatorname{Sin} I}{\operatorname{Cos} I} = P \operatorname{tang} I$.

5. Der Druck Π, den die Fläche leidet, ist $= \frac{V \operatorname{Cos} I'}{\operatorname{Sin} I} = \frac{P \operatorname{Cos} I'}{\operatorname{Cos}(I' - I)}$. Für $I' = I$, oder für die vortheilhafteste Richtung der Kraft ist derselbe $= P \operatorname{Cos} I$; und für $I' = o$, $= \frac{P}{\operatorname{Cos} I}$. Man sieht leicht, daß bey jeder andern Richtung der Kraft, als der mit der Fläche parallelen, ein Theil derselben darauf verwandt werde, den Körper entweder noch fester an die Fläche anzudrücken, oder den Druck $P \operatorname{Cos} I$, der von ihm herrührt, zu erleichtern.

Anmerk. Man bedient sich der schiefen Fläche bey mechanischen Operationen da am vortheilhaftesten, wo die Lasten zu einer geringen Höhe erhoben werden sollen, als z. B. wenn man sie vom Ufer auf Schiffe bringen, oder vom Schiffe über Bord schaffen will. Auch kann man umgekehrt durch sie Lasten sanft herab gleiten lassen, ohne das ganze Gewicht derselben zu tragen.

## Stabilität des Körpers auf schiefer Fläche.

### §. 119.

Körper, die auf horizontaler Fläche feststehen, bekommen nicht allein ein Bestreben herabzugleiten, wenn man die Fläche inclinirt, sondern sie werden auch dadurch zum Umschlagen nach der herabwärtsgehenden Seite geneigter, gewinnen aber dafür an Stabilität in Rücksicht der entgegengesetzten Seite. Um nun das Verhalten eines Körpers in Ansehung dieser Art von Bewegbarkeit abgesondert betrachten zu können, wollen wir annehmen, er sey durch eine feste Widerlage verhin-

dert,

dert, über den Punkt D, den wir jetzt als den äußersten Punkt seiner Basis ansehen wollen, fortzurücken. Ferner gehe durch D eine der Seitenlinien der Basis parallel mit EF, so fragt es sich, unter welchen Umständen der Körper, oder, welches einerley ist, sein Schwerpunkt um diese sich drehen werde.

## §. 120.

**Aufgabe.** Die Stabilität des Körpers auf der schiefen Fläche in Rücksicht der queren Seitenlinie seiner Basis zu finden.

Fig. 23. **Aufl.** 1) Man fälle aus G auf die Basis, GO, und aus O auf die Umdrehungslinie, OD senkrecht; ferner ziehe man GI mit OD parallel, und errichte darauf aus D das Perpendikel DI.

2) Da DO in der Durchschnittslinie AC liegt, (§. 117.) so ist GOD die vertikale Neigungsfläche der Ebene gegen die horizontale, folglich liegt auch GI in dieser, und man kann das Gewicht P des Körpers in eine Kraft $= P \operatorname{Cos} I$ nach GO, und in eine $= P \operatorname{Sin} I$ nach GI zerlegen.

3) Erstere hat gegen die durch D gehende Axe das Moment $P \cdot DO \operatorname{Cos} I$, letztere das Moment $P \cdot DI \operatorname{Sin} I = P \cdot GO \operatorname{Sin} I$. Beyde Kräfte streben den Schwerpunkt nach verschiedenen Seiten um D zu drehen; soll also der Körper in Ruhe bleiben, so muß $P \cdot DO \operatorname{Cos} I = P \cdot GO \operatorname{Sin} I$ seyn.

4) Aber hier würde durch die geringste Kraft, die nach GI hinzukäme, eine Umdrehung nach dieser Seite

zu bewirkt werden. Dies wäre also derjenige Fall, wo die Stabilität des Körpers $= 0$ ist.

5) Man setze daher, es könne noch die Kraft S nach GI auf G angebracht werden, ohne daß der Körper wanke; sie sey aber gerade so groß als nöthig ist, um alle Stabilität aufzuheben, so ist sie der Stabilität äquipollent, und da sie zu der vorigen Kraft P Sin I nach GI hinzukommt, das Moment nach dieser Seite zu jetzt $= (S + P \operatorname{Sin} I)\, GO$, folglich wegen des Gleichgewichtes $(S + P \operatorname{Sin} I)\, GO = P \,.\, DO \operatorname{Cos} I$ oder $S = P \dfrac{(DO \operatorname{Cos} I - GO \,.\, \operatorname{Sin} I)}{GO}$

6) Auf gleiche Weise findet man, wenn DO die Entfernung des Punktes O von der entgegengesetzten Querseite der Basis bedeutet, $S = \dfrac{P\,(DO \operatorname{Cos} I + GO \operatorname{Sin} I)}{GO}$

§. 121.

Es sey jetzt, nicht wie vorhin D, sondern C der äusserste Punkt der Basis, also EF die Umdrehungskante, so ist in Rücksicht dieser: $S = \dfrac{P(CO \,.\, \operatorname{Cos} I - GO \operatorname{Sin} I)}{GO}$ $= \dfrac{P \operatorname{Cos} I}{GO} \,.\, (CO - GO \operatorname{tang} I)$ Ferner sey GD die Vertikale, so hat man $DO = GO \operatorname{tang} I$, folglich $S = \dfrac{P \operatorname{Cos} I \,.\, CD}{GO}$.

Wäre dagegen C der äußerste Punkt im obern Theile der Basis, so lägen die Punkte D und C auf verschiedenen Seiten von O, und es wäre alsdann CO + OD = CD, folglich die Stabilität in Rücksicht der obern Kante ebenfalls $= \frac{P \cdot CD \operatorname{Cos} I}{GO}$.

**Die Stabilität des Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich also direkt wie die Entfernung des Punktes, wo die Vertikale aus dem Schwerpunkte in die Ebene eintrifft, von den Seiten der Basis, und verkehrt wie das Perpendikel aus dem Schwerpunkte auf der Basis gefällt.**

Man sieht hieraus, daß die Frage, ob der Körper sich selbst überlassen, auf schiefem Boden umschlagen werde, oder nicht? gerade so beantwortet werde, als in dem Falle, wenn der Boden horizontal ist. Der Körper ist nemlich vor dem Umschlagen gesichert, wenn die Vertikale in den schiefen Boden innerhalb der Basis eintrifft, kann aber nicht seine Stellung behaupten, wenn dieser Punkt außerhalb der Basis fällt.

## §. 122.

**Aufgabe.** Ein Körper, dessen Gewicht = P ist, hat auf horizontalem Boden gegen eine der Seiten seiner Basis die Stabilität S; man fragt, wie stark der Boden inclinirt werden darf, ehe der Körper umschlägt.

Auflösung 1) Es sey I der gesuchte Neigungswinkel; da für ihn die Stabilität des Körpers = 0 werden soll, so hat man (§. 120.) $DO \cos I - GO \sin I = 0$, oder $\tan I = \frac{DO}{GO}$

2) Nun ist (§. 111.) $S = \frac{P \, . \, DO}{GO} = P \tan I$, also: $\tan I = \frac{S}{P}$.

**Exempel 1.** Es sey der Körper ein Cubus, so ist $DO = GO$, also $S = P$; daher $\tan I = 1$, und $I = 45^\circ$.

2. Für eine Halbkugel ist DO der Radius, $GO = \frac{5}{8} DO$ (§. 96.) also $S = \frac{8}{5} P$, folglich $\tan I = 1,6$ und $I = 57^\circ \, 59' \, 40\frac{2}{3}''$

## Das Wälzen runder Körper.

### §. 123.

Runde Körper, als Walzen, Tonnen u. dergl. berühren den ebenen Boden nur in einer Linie, nemlich in dem Durchschnitte einer Ebene mit dem Boden, die durch ihre Axe geht, und auf dem Boden senkrecht ist. Liegen sie daher der Quere nach auf demselben, d. h. so, daß die Berührungslinie die Neigungslinie des Bodens senkrecht schneidet, so ist $DO = 0$, also ihre Stabilität $= - P \sin I$.

Ein runder Körper hat daher auf einer schiefen Fläche ein eben so großes Bestreben sich zu drehen als herabzugleiten, und dies macht, daß letzteres nie geschieht, weil der berührende Theil allemal am Boden haftet. Das Umschlagen bekommt aber wegen der fortwährend neuen Berührung eine Continuität, und artet dadurch in eine eigene Art von Bewegung aus, die man das **Wälzen** oder **Rollen** nennt.

## §. 124.

Das Hinaufbewegen schwerer Lasten auf schiefen Flächen geschieht gewöhnlich durch Walzen, die man darunter legt. Dies gewährt unter andern Vortheilen auch den, daß man dabey Hebelarme anbringen kann, welches die Operation ungemein erleichtert. Wir wollen setzen, die Last P liege auf mehreren Walzen, deren
Fig. 34. Anzahl $= n$, so drückt auf jede derselben in E die Kraft $\frac{P}{n}$ nach der Vertikale EB.

Da die Walze sich nur um O drehen kann, so wirkt diese Kraft am einarmigen Hebel CEO unter dem Winkel $BEO = I$, dem Neigungswinkel der schiefen Fläche, und hat also das Moment $\frac{P}{n} . EO \operatorname{Sin} I$.

Eben so wirkt in G das Gewicht der Walze, das $\pi$ heißen mag, mit der Kraft $\pi \operatorname{Sin} I$ (§. 123.) nach senkrechter Richtung Gg, und hat folglich das Moment $\pi . GO \operatorname{Sin} I$.

Soll diesen nun eine Kraft V nach Cc das Gleichgewicht halten, so hat man:

$$V . CO = (\frac{P}{n} . EO + \pi . GO) \operatorname{Sin} I,$$ oder wenn der Halbmesser der Walze $= a$, und die Länge des Hebels $GO = f$ gesetzt wird,

$$nVf = (2P + n\pi)\, a \operatorname{Sin} I, \text{ also}$$

$$V = \frac{a \operatorname{Sin} I}{nf} \cdot (2P + n\pi)$$

Damit die Walze sich nicht verschiebt, muß auf beyden Seiten ein Hebel angebracht werden, wodurch für jeden Arbeiter die erforderliche Kraft $V = \frac{a \operatorname{Sin} I}{2nf}$. $(2P + n\pi)$ wird.

**Exempel.** Es sey eine Last von 6000 ℔ durch zwey Walzen, deren jede 1 Fuß im Durchmesser hat, und 250 ℔ wiegt, unter einem Winkel von 12° erheben; der hervorstehende Hebelarm CE sey 4 Fuß lang, so ist $V = \frac{1}{20} (P + \pi) \operatorname{Sin} I$, $P + \pi = 6250$, $\operatorname{Sin} I = 0{,}2079117$, also $V = 129, 94$ ℔, oder beynahe 130 ℔.

## §. 125.

Einen ähnlichen Vortheil, wie bey Erhebung der Lasten durch schräge Flächen, gewährt der schiefe Zug bey Rädern, die über einen Widerstand gehoben werden sollen.

Es sey DBG ein Rad, dessen Mittelpunkt O von einem belasteten Wagen das Gewicht P trägt; OI die Höhe eines hervorragenden Hindernisses, über das es vermittelst einer nach CA gerichteten Kraft V gezogen werden soll, so läßt sich diese folgendermaßen bestimmen:

Fig. 25. 1) Kraft und Last drücken das Rad an den höchsten Punkt O des Widerstandes, und bewirken dadurch, daß dasselbe, wenn es bewegt werden soll, um

diesen Punkt sich drehen muß. Daher ist der Halbmesser CO als ein Hebel anzusehen, der in O seinen Ruhepunkt hat.

2) An diesem zieht nun in C das Gewicht P nach der Vertikale CB, und in eben dem Punkte die Kraft V nach CA; das Moment des erstern ist P . CO Sin OCB, das der letztern V . CO Sin OCA (§. 56.); sollen also beyde mit einander im Gleichgewichte seyn, so hat man: P Sin OCB $=$ V Sin OCA.

3) Man setze den Winkel ACD, den die Richtung der Kraft V mit der Horizontale CD macht, $= \varepsilon$ den Halbmesser des Rades $= a$, die Höhe des Widerstandes $= i$, und ziehe OI mit BI parallel, so ist CI $=$ CB $-$ OI $= a - i$, also OI $= \sqrt{[a^2 - (a - i)^2]} = \sqrt{(2ai - i^2)}$, und Sin OCB $= \frac{\sqrt{(2ai - i^2)}}{a}$,

Cos OCB $= \frac{a - i}{a}$.

4) Ferner Sin OCA $=$ Sin ACD Cos DCO $+$ Cos ACD Sin DCO $= \frac{\sqrt{(2ai - i^2)} \operatorname{Sin} \varepsilon + (a - i) \operatorname{Cos} \varepsilon}{a}$,

daher wird (2)

$$P \sqrt{(2ai - i^2)} = V \operatorname{Sin} \varepsilon \sqrt{(2ai - i^2)} + V \operatorname{Cos} \varepsilon (a - i), \text{ und}$$

$$V = \frac{P \sqrt{(2ai - i^2)}}{(a - i) \operatorname{Cos} \varepsilon + \sqrt{(2ai - i^2)} \operatorname{Sin} \varepsilon}$$

## §. 126.

Hiernach läßt sich beurtheilen, wie viel Kraft Pferde anzuwenden haben, einen beladenen Wagen auf rauhem Wege fortzuziehen. Alsdann ist aber i allemal gegen a sehr gering, und man kann im Nenner den Theil $\sqrt{(2ai - i^2)}$ Sin $\varepsilon$ gegen $(a - i)$ Cos $\varepsilon$, und im Zähler $i^2$ gegen $2ai$ wegwerfen, wodurch man

$V = \frac{P\sqrt{2ai}}{a \operatorname{Cos} \varepsilon} = P \sec \varepsilon \sqrt{\frac{2i}{a}}$ erhält. Dies veranlaßt nun folgende Bemerkungen:

1) Die Kraft wächst nicht wie die Höhe des Widerstandes, sondern nur wie Quadratwurzel aus demselben, so daß z. B. zur Ueberwindung eines doppelt so hohen Widerstandes nur ungefähr $1\frac{2}{5}$ mal so viel Kraft nöthig ist.

2) Sie verhält sich verkehrt wie $\sqrt{a}$; also sieht man daß höhere Räder viel leichter über hervorragende Hindernisse zu ziehen sind, als kleinere, und deshalb den Vorzug verdienen.

3) Sie wirkt am vortheilhaftesten, wenn sie senkrecht auf CO gerichtet ist. Ist nun OI gering, so ist CO beynahe vertikal, also die wirksamste Richtung beynahe mit der horizontalen einerley, wie auch die Formel angiebt.

## §. 127.

Wenn auf dem Wege mehrere solcher hervorstehenden Hindernisse in kleinen und fast gleichen Zwischenräumen liegen, so senkt sich das Rad, je nachdem es groß ist, verschiedentlich zwischen ihnen ein, und berührt den Boden gar nicht. Es hängt alsdann die Tiefe BI — i zugleich von a ab, nemlich wenn man die halbe Weite eines solchen Zwischenraumes f nennt, so ist $Ol = f = \sqrt{(2ai - i^2)}$, folglich $V = \frac{Pf}{a}$; also verhält sich dann die Kraft verkehrt wie der Halbmesser des Rades. Dieser Fall findet aber, genau genommen, nur da statt, wo das Rad im weichen Boden einsinkt, wovon wir in der Folge reden werden. Couplet, Mem. de l'Acad. de Paris 1733.

## Vom Drucke der Dächer.

### §. 128.

Fig. 26. **Aufgabe.** Der Balken BC sey mit dem einen Ende C an eine vertikalstehende Wand CD angelehnt, mit dem andern Ende B stütze er sich theils gegen den horizontalen Boden DB, theils gegen eine Widerlage, die in B befestigt ist, und ihn verhindert nach Bq auszuweichen; man fragt, welchen Druck dieser Balken durch sein Gewicht auf die Wand, den Boden und die Wiederlage ausübt.

Aufl. 1) Das Gewicht des Balken, welches P heißen mag, wirkt von seinem Schwerpunkte G aus nach der Vertikale Gg und vertheilt sich auf die Unterstützungspunkte B und C nach gleichfalls vertikalen Richtungen Bp und CD. Setzen wir also, G falle in die Mitte von BC, so kommt auf jeden dieser Punkte das Gewicht $\frac{1}{2}$ P.

2) Ersteres drückt den Boden in B senkrecht, und wird von ihm getragen; letzteres kann dagegen nur

durch zwey Kräfte aufgehoben werden: durch den senkrechten Widerstand der Mauer, und durch den Gegendruck, den der Balken in B nach BC leidet.

3) Man zerlege daher dasselbe nach Cf senkrecht auf CD, und nach CB, und nenne die daraus entspringenden Kräfte M und N, so hat man (§. 52.)

$M = N \text{ Sin DCB}$, und

$\frac{1}{2} P = N \text{ Sin fCB}$, oder wenn der Winkel CBD $= I$ gesetzt wird: $M = N \text{ Cos I}$, $\frac{1}{2} P = N \text{ Sin } (180° - I) = N \text{ Sin I}$, folglich $N = \frac{P}{2 \text{ Sin I}}$, $M = \frac{1}{2} P \text{ Cot I}$.

4) Die Kraft N, welche auf den Punkt B wirkt, und daselbst einen Druck nach Bo ausübt, zerfällt in eine nach $Bq = N \text{ Cos I} = \frac{1}{2} P \text{ Cot I}$, und in eine nach $Bq = N \text{ Sin I} = \frac{1}{2} P$, welche letztere mit dem Gewichte $\frac{1}{2} P$ (2) zusammen den vertikalen Druck P giebt.

5) Der Balken übt also gegen die Wand sowohl als gegen die Widerlage nach den entgegengesetzten Richtungen Cf und Bq den Druck $\frac{1}{2} P \text{ Cot I}$ aus, und außerdem trägt noch der Punkt B sein ganzes Gewicht P.

**Anmerk.** Außer dieser Auflösung, die Fontana in den Mem. di Matem. e Fisica della Soc. Ital. Tom. III. von gegenwärtiger Aufgabe geliefert hat, findet sich in eben den Memoiren Tom. IV. eine andere von Salimbeni. Sie giebt aber eben die Resultate, und weicht nur darinn ab, daß das ganze Gewicht P aus G auf den Durchschnittspunkt der Vertikale durch G und der Horizontale durch C versetzt, und dann nach letzterer Richtung und einer nach B gehenden zerlegt wird. Eine dritte, die aber wegen der Construktionen noch weitläuftiger ist, giebt Lorgna in seinem Werke Saggi di Statica e di Meccanica applicate alle arti.

§. 129.

Sind daher zwey gleiche Balken AC und BC in einer vertikalen Ebene unter einerley Winkel gegen einander gestemmt, so wird der gegenseitige Druck in C aufgehoben; das Uebrige bleibt aber wie vorhin, und geschieht auf der einen Seite so wie auf der andern.

§. 130.

Anders verhält es sich mit dem Drucke des Balken BC, wenn er auf einem vertikal stehenden CD aufliegt, oder in denselben hineingefugt ist. Alsdann widersteht dieser ihm nach einer auf CB senkrechten Richtung. Man zerlege also das auf C kommende Gewicht $\frac{1}{2}$ P nach dieser Richtung, und nach einer andern längs CB herabgehenden, so ist erstere $= \frac{1}{2}$ P Cos I, welche aufgehoben wird, letztere $= \frac{1}{2}$ P Sin I, die auf B einen Druck nach Bo verursacht. Dieser nach Bp und Bq zerlegt, giebt den Druck $\frac{1}{2}$ P Sin I$^2$, senkrecht auf den Boden, der sich mit $\frac{1}{2}$ P zu $\frac{1}{2}$ P $(1 + \text{Sin I}^2)$ verbindet, und einen andern horizontalen gegen die Widerlage $= \frac{1}{2}$ P Sin I Cos I.

Der vertikale Balken leidet nun den auf CB senkrechten Druck $\frac{1}{2}$ P Cos I, und da dessen Richtung mit CD den Winkel 90° — DCB $=$ I macht, so ist von ihm der nach CD gerichtete Antheil $= \frac{1}{2}$ P Cos I$^2$, und der darauf senkrechte nach Cf $= \frac{1}{2}$ P Cos I Sin I.

Das Gewicht des Balken wird also in gegenwärtigem Falle auf zwey Punkte B und D des Bodens vertheilt, und übt gegen die Widerlage einen geringern Druck aus, als im vorigen Falle; jener war nemlich $= \frac{1}{2}$ P Cot I; dieser ist $= \frac{1}{2}$ P Sin I Cos I; also verhält sich ersterer zu letzterem wie 1 : Sin I², und ist folglich allemal größer.

Am auffallendsten ist dieser Unterschied für I = 0; da ist der horizontale Druck des bloß angelehnten Balken unendlich, und der des aufliegenden = 0.

## §. 131.

Liegt auf der andern Seite noch ein Balken AC, so daß der vertikal stehende CD beyde in Verbindung setzt, und sie zu gleicher Zeit unterstützt, so wird der Druck $\frac{1}{2}$ P Cos I Sin I nach Cf von dem gleich großen, den AC nach entgegengesetzter Richtung auf C ausübt, aufgehoben; der Druck auf D verdoppelt sich dagegen, und wird = P Cos I². Außerdem trägt der Boden sowol in A als B das Gewicht $\frac{1}{2}$ P (1 + Sin I²), und jede der Widerlagen strebt eine Kraft $\frac{1}{2}$ P Cos I² aus der Stelle zu treiben.

## §. 132.

Um den Druck des ganzen Daches gegen die darunter liegenden Balken zu bestimmen, hat man nur nöthig, irgend einen seiner Querschnitte ACB in Betracht zu ziehen, der durch zwey entgegengesetzte Sparren AC und BC geht; und so läßt sich das Vorhergehende hier leicht in Anwendung bringen. Die ganze Reihe der Sparren längs dem Dache theilt nemlich unter sich ganz das Gewicht der äußern Decke des Daches; so daß allemal zwey neben einander liegende Sparren den Theil von ihr tragen, der zwischen ihnen enthalten ist. Was also vorhin P genannt ist, besteht aus dem Gewichte der Sparre mit Inbegriff dessen, was diese von der Dachfläche zu tragen hat.

Diese doppelte Last wirkt nun auf zweifache Art:

1) Sie drückt auf die Tragbalken vertikal niederwärts.
2) Sie übt einen horizontalen Druck gegen die Widerlage aus, und strebt dadurch den Pfeiler, auf dem die Widerlage befestigt ist, nach aussen zu umzustürzen.

Diese letzte Wirkung der Dächer, wodurch sie der Festigkeit der Gebäude vorzüglich nachtheilig werden können, heißt ihre **Sperrung** oder **Propulsion** (la poussée horizontale).

## §. 133.

Wenn die Sparren AC und BC durch eine Hängesäule CD verbunden sind (§. 130.), so muß unten durch die Punkte A und B ein Querbalken AB gehen, der dann in seinen Endpunkten durch Pfeiler unterstützt ist. Dieser Querbalken ist unnöthig, wofern die Sparren unmittelbar zusammenstoßen (§. 128.).

I. Im erstern Falle ist nun der Druck auf A und $B = \frac{1}{2} P (1 + \text{Sin I}^2)$, der auf $D = P \text{ Cos I}^2$, und die Propulsion ist $= \frac{1}{2} P \text{ Sin I Cos I}$.

Der Druck auf D wird noch durch das Gewicht von CD vermehrt, und ist, wenn dieses H genannt wird, $= H + P \operatorname{Cos} I^2$. Dieser vertheilt sich auf die Unterstützungspunkte A und B, wodurch die ganze Last, die jeder derselben zu tragen hat, $= P + \frac{1}{2} H$ wird. Also theilen die Tragpfeiler das ganze Gewicht des Dachprofiles $2P + H$ unter sich.

II. Im zweyten Falle ist der Druck auf jeden der Punkte A und B $= P$, und die Propulsion ist $= \frac{1}{2} P \operatorname{Cot} I$.

Anmerk. Der beträchtliche Unterschied zwischen der Sperrung im erstern und der im letztern Falle zeigt offenbar den Vortheil, der daraus erwächst, wenn die Sparren durch eine Hängesäule unterstützt werden. Ein anderes Mittel, die Sperrung des Daches zu vermindern, wird noch in der Folge vorkommen.

## §. 134.

Es sey für die Länge $= 1$, das Gewicht der Sparre BC, nebst dem, was sie vom Dache zu tragen hat, $= G$, die halbe Breite des Daches $DB = b$; so ist $BC = b \operatorname{Sec} I$, $P = Gb \operatorname{Sec} I$, also die Propulsion

$$= \frac{1}{2} P \operatorname{Cot} I = \frac{Gb}{2 \operatorname{Sin} I}.$$

**Bey einerley Breite des Daches ist daher die Propulsion desto größer, je flacher das Dach ist.**

Ist dagegen in C eine Stütze CD, oder besteht das Dach nur aus Einer Seitenfläche BC, der die vertikale Mauer CD zum Rückhalte dient (Pultdach) so ist die Propulsion in $B = \frac{1}{2} P \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I = \frac{1}{2} Gb \operatorname{Sin} I$, folglich gilt alsdann der umgekehrte

Satz, daß steilere Dächer bey eben der Breite mehr Sperrung verursachen.

Anmerk. Den erstern Satz hat, so viel ich weiß, Couplet in Mem. de l'Acad. de Paris 1731 zuerst gezeigt. Ueberhaupt scheint es, als wenn vor ihm noch keiner die Sperrung der Dächer in Betracht gezogen hat, und die Meinung, die noch jetzt manche Baumeister hegen, *) daß die Wirkung des Daches bloß in dem vertikalen Drucke bestehe, und sich nach dem Gewichte allein beurtheilen lasse, allgemein gewesen seyn muß. Die Verschiedenheit der Resultate bey Satteldächern und Pultdächern hat Hr. Aepinus **) verführt, Couplets Behauptung anzugreifen; andere, die Letzterem beytreten, betrachten doch immer nur die Sache von Einer Seite, und schlichten dadurch den Streit nicht.

## §. 135.

Aufgabe. Die erforderliche Dicke einer Mauer zu bestimmen, damit ihre Stabilität der Propulsion des Daches das Gleichgewicht halte.

Aufl. 1) Es sey die halbe Breite des Daches $= b$, das mittlere Gewicht desselben für 1 Quadratfußfläche $= G$, der Neigungswinkel $= I$, so ist der vertikale Druck $= \frac{Gb}{\text{Cos } I}$, der horizontale $= \frac{Gb}{2 \text{ Sin } I}$, beydes für 1 Fuß Breite gerechnet.

2) Die Höhe der Mauer sey nun $= a$, ihre gesuchte Dicke $= x$, ihr spezifisches Gewicht $= K$, so ist für 1 Fuß Breite ihr Gewicht $= Kax$, dazu den

*) So z. B. giebt Hr. Schmidt den flachen italiänischen Dächern deshalb den Vorzug, weil sie das Gebäude weniger belasten. S. bürgerl. Baumeister 1 Theil, Kap. 7.

**) Comment. Petrop. Tom. XIV.

vertikalen Druck des Daches addirt, giebt $Kax + Gb \, Sec \, I$ für das ganze Gewicht; daher die Stabilität $= Kx^2 + \frac{Gbx \, Sec \, I}{a}$ (§. 111.).

3) Da diese im Schwerpunkte, d. i. in der Mitte der Mauer nach horizontaler Richtung widersteht, so muß sie doppelt so groß als die Propulsion seyn, um ihr das Gleichgewicht zu halten; also hat man

$$Kx^2 + \frac{Gbx \, Sec \, I}{a} = \frac{Gb}{Sin \, I}, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{Gbx}{Ka \, Cos \, I} - \frac{Gb}{K \, Sin \, I} = 0.$$

Exempel. Das Dach sey mit Ziegelsteinen gedeckt, so kann man auf den Quadratfuß mit Inbegriff des Kalkes am Gewicht 12 ℔ rechnen; das Gewicht des Holzes für eben die Fläche nehme ich zu 9 ℔ an, so ist $G = 21$ ℔. Für die steinerne Mauer setze man $K = 189$ ℔; alsdann bekommt man

$$x^2 + \frac{bx}{9a \, Cos \, I} - \frac{b}{9 \, Sin \, I} = 0$$

Nun sey $b = 15$ Fuß, $a = 40$ Fuß, die Höhe des Daches $= \frac{1}{4}$ der ganzen Breite, so wird $Sin \, I = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $Cos \, I = \frac{2}{\sqrt{5}}$, folglich $x^2 + \frac{x\sqrt{5}}{48} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 0$, woraus man $x = 1{,}90703$ findet. Die gesuchte Dicke der Mauer ist also 1 Fuß 10,88 Zoll.

Gebro-

# Gebrochene Dächer.

## §. 136.

Fig. 27. **Aufgabe.** Zwey gegebene Balken AF und FC zwischen dem horizontalen Boden AD, und der vertikalen Wand CD so übereinander zu stellen, daß sie sich im Gleichgewichte erhalten.

Aufl. 1) Es sey das Gewicht von AF $= P$, das von FC $= Q$, der Neigungswinkel FAD des erstern $= I$, der des andern CFI $= I'$.

2) Der obere übt auf den untern den Druck Q nach der Vertikale FK, und den Druck $\frac{1}{2} Q \operatorname{Cot} I'$ nach der Horizontale Fq aus. Dagegen widersteht der untere nach Fn, der Verlängerung von AF, und außerdem drückt ihn in F sein halbes Gewicht $\frac{1}{2} P$ vertikal herab, indem sich sein ganzes Gewicht auf die Punkte A und f vertheilt.

3) Diese vier Kräfte müssen also in F einander das Gleichgewicht halten. Man setze den Widerstand nach Fn $= R$, und zerlege diesen nach Fp und FI. Da pFn $=$ AFK $= 90° - I$ ist, so wird ersterer Theil $R \operatorname{Sin} I$, letzterer $= R \operatorname{Cos} I$.

4) Jetzt hat man lauter vertikale und horizontale Kräfte am Punkte F, von denen also jene, so wie diese für sich einander das Gleichgewicht halten müssen. Daher wird:

$$R \operatorname{Sin} I = \tfrac{1}{2} P + Q \text{ und}$$

$$R \operatorname{Cos} I = \tfrac{1}{2} Q \operatorname{Cot} I'.$$

5) Der Werth $R = \frac{Q \text{ Cot } I'}{2 \text{ Cos } I}$ in ersterer Gleichung substituirt, giebt $\frac{Q \text{ tang } I}{2 \text{ tang } I'} = \frac{1}{2} P + Q$, woraus man $\text{tang } I' = \frac{Q \text{ tang } I}{P + 2Q}$ erhält.

6) Der Winkel I ist also willkührlich, und der andere I' wird durch ihn bestimmt.

7) Nimmt man AF und FC von gleicher Länge, so ist $P = Q$, folglich wird alsdann $\text{tang } I' = \frac{1}{3} \text{tang } I$.

## §. 137.

Der Widerstand R ist mit dem Drucke einerley, den der Punkt A nach der Richtung FA leidet. Man zerlege ihn in einen vertikalen $= R \text{ Sin } I$, und in einen horizontalen $= R \text{ Cos } I$. Ersterer ist $= \frac{1}{2} P + Q$ (§. 136. 4.), und zu ihm kommt noch das Gewicht $\frac{1}{2} P$ (n 2), so daß der Boden in A das ganze Gewicht beyder Balken $P + Q$ trägt. Der horizontale ist $= (\frac{1}{2} P + Q) \text{ Cot } I$.

Dagegen ist der horizontale Druck, den vom obern Balken der Punkt C leidet, $= \frac{1}{2} Q \text{ Cot } I'$ (§. 128.).

## §. 138.

Läßt man statt der Wand zwey andere Balken BG und GC in eben der Lage an jene anstoßen, so wird der horizontale Druck in C durch einen gleichen und entgegengesetzten aufgehoben, und die vier Balken sind daher mit einander im Gleichgewichte, wofern sie nur in A und B durch Widerlagen am Zurückweichen verhindert werden. Hierauf gründet sich die Construktion der **gebrochenen** oder sogenannten **mansardischen** Dächer.

## §. 139.

Gewöhnlich werden bey einem solchen Dache die beyden Sparren AF, FC nicht unmittelbar in Berührung gebracht, sondern in einen Querbalken FG (Kehlbalken) eingefugt, den man noch durch eine Säule FK unterstützt. Dies ändert die Bestimmung des Bruches in sofern ab, daß der vertikale Druck Q von der obern Sparre sich nun auf FA und FK vertheilt, also AF nur die Hälfte davon zu tragen hat. Setzt man daher in §. 136. n. 4, $\frac{1}{2}$ Q statt Q, so erhält man $R \sin I = \frac{1}{2}(P+Q)$, $R \cos I = \frac{1}{2} Q \cot I'$, folglich $\tang I' = \frac{Q \tang I}{P+Q}$.

Die Propulsion, welche vorhin (§. 137.) $(\frac{1}{2} P + Q) \cot I$ war, wird dadurch auf $\frac{1}{2} \cot I\,(P+Q)$ zurück gebracht.

Anmerk. Die gebrochenen Dächer haben vor dem gewöhnlichen Dächern den entscheidenden Vorzug, daß sie eine steilere Lage des unteren Theiles zulassen, ohne dadurch die übermäßige Höhe des geraden Daches zu bekommen, die das Auge beleidigt, die Stabilität bis zur Gefahr vermindert, und außer dem einen Raum im Innern des Daches hervorbringt, der auf keine Art benutzt werden kann.

Viertes Kapitel.

# Von der Vertheilung des Druckes auf mehrere Punkte und ganze Flächen.

## §. 140.

Fig. 28. **Aufgabe.** Es sey die Grundfläche eines Körpers eben, und ruhe in horizontaler Lage auf den Punkten A, B und C. Man fragt, wie sich sein Gewicht auf diese Punkte vertheilen werde?

Aufl. 1) Ein Perpendikel aus dem Schwerpunkte des Körpers treffe die Grundfläche in G, so ist G der gemeinschaftliche Schwerpunkt von A, B und C: denn der vereinigte Widerstand von diesen drey Punkten muß das Gewicht des Körpers aufheben, also dessen mittlere Richtung durch seinen Schwerpunkt, folglich auch durch G gehen.

2) Man setze nun das Gewicht des Körpers $= P$, den Druck, den die Punkte A, B, C leiden $= \Pi, \Pi', \Pi''$, und fälle aus A und G auf BC die Perpendikel AD und GI, so hat man (§. 74.), da die Entfernungen der Punkte B und G von BC $= 0$ sind:

$$\Pi \,.\, AD = P \,.\, GI.$$

3) Da die Dreyecke ABC und GBC einerley Grundlinie haben, so ist $\Delta ABC : \Delta BGC = AD : GI$, also $\Pi = \frac{\Delta BGC}{\Delta ABC} \,.\, P$

4) Eben so erhält man, wenn man AC und AB

als Bezugslinien annimmt, $\Pi' = \frac{\Delta AGC}{\Delta ABC} . P$, und

$\Pi'' = \frac{\Delta AGB}{\Delta ABC} . P$

5) Addirt man diese drey Werthe, so wird $\Pi + \Pi' + \Pi'' = P$; also vertheilt sich die Last auf die drey Punkte ganz, und zwar für jeden im Verhältnisse des Dreyecks, das die andern beyden mit dem Schwerpunkte G einfassen.

6) Man setze $AG = a$, $BG = b$, $CG = c$, und die Winkel zwischen diesen Linien $= \alpha, \beta, \gamma$, so wird $\Delta AGB = \frac{1}{2}$ ab Sin $\alpha$, $\Delta BGC = \frac{1}{2}$ bc Sin $\beta$, $\Delta CGA = \frac{1}{2}$ ac Sin $\gamma$, folglich

$$\Pi = \frac{P . bc \sin\beta}{ab \sin\alpha + bc \sin\beta + ac \sin\gamma},$$

$$\Pi' = \frac{P\ ac \sin\gamma}{ab \sin\alpha + bc \sin\beta + ac \sin\gamma},$$

$$\Pi'' = \frac{P\ ab \sin\alpha}{ab \sin\alpha + bc \sin\beta + ac \sin\gamma}$$

## §. 141.

Folgerung 1. Es sey G von A, B und C gleich weit entfernt, und $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$, so wird $\Pi = \Pi' = \Pi'' = \frac{a^2 P \sin 120^\circ}{3a^2 \sin 120^\circ} = \frac{1}{3} P$; also vertheilt sich alsdann der Druck auf die Punkte gleichförmig.

2) Fällt der Punkt G außerhalb dem Dreyecke ABC, so wissen wir schon aus §. 112. 3, daß dann

der Körper nicht unterstützt sey. Eben dies zeigt sich hier dadurch, daß einer der Werthe von $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$ negativ wird.

Fig. 29. 3. Wenn daher die Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen, so kann der Körper nicht von ihnen getragen werden, wofern nicht auch G in diese Linie fällt. In dem Falle ist aber $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ entweder $= 0$ oder $180°$, also erhalten wir

$$\Pi = \tfrac{0}{0},\ \Pi' = \tfrac{0}{0},\ \Pi'' = \tfrac{0}{0},$$

Ausdrücke, die an sich unbestimmt sind, und also zeigen, daß der allgemeine Fall sich auf diesen besondern nicht unmittelbar anwenden lasse.

## §. 142.

Die Bedingungen, welche für diesen zweifelhaften Fall der Hebel giebt, indem man der Reihe nach, A, B und C als Unterstützungspunkte annimmt, sind folgende:

$$\Pi'' AC + \Pi' AB = P \,.\, AG$$
$$\Pi'' BC + \Pi\, AB = P \,.\, BG$$
$$\Pi'\, BC - \Pi\, AC = P \,.\, CG$$

Erstere beyden addirt, geben $\Pi'' AB + \Pi' AB + \Pi AB = P \,.\, AB$, oder $\Pi + \Pi' + \Pi'' = P$. Man multiplicire diese durch BC, und subtrahire davon die zweyte, so bleibt die dritte übrig. Also ist diese ganz unbrauchbar, und die drey Gleichungen zeigen weiter nichts, als daß die Last unter die Punkte A, B, C sich ganz vertheilt; in welchem Verhältnisse aber? erfährt man durch sie nicht. Es scheint vielmehr, als liege etwas

Willkührliches in dieser Vertheilung, so bald mehr als zwey Stützen vorhanden sind.

## §. 143.

Diese Unbestimmtheit liegt aber nicht in der Sache selbst, sondern zeigt bloß, daß man mit der bisherigen Theorie des Gleichgewichtes hier nicht zureiche: legt man nemlich einen Balken auf drey Stützen, deren Köpfe genau in einer Horizontale liegen, so trägt nothwendig jede Stütze einen bestimmten Theil von seinem Gewichte; also geschieht die Vertheilung gewiß nach irgend einem Gesetze, und richtet sich bloß darnach, wie die Stützen gestellt sind.

## §. 144.

Das natürlichste Hülfsmittel, welches sich zu der Auflösung dieses Problems darbietet, ist ohne Zweifel die Voraussetzung: Die Vertheilung werde so gleichförmig geschehen als möglich, oder die Verschiedenheit zwischen dem Drucke, den die eine oder die andere Stütze leidet, werde so gering seyn, als es die Umstände zulassen. Man setze daher, wie vorhin, das Gewicht des Balken $= P$, die Theile, die davon auf A, B und C kommen, $= p, p', p''$, so sollen

1) nach jener Voraussetzung die Unterschiede $p - p'$, $p - p''$ und $p' - p''$ zusammen ein Minimum ausmachen; da aber auch mit eben dem Rechte $p' - p$, $p'' - p$ und $p'' - p$ als die gegenseitigen Unterschiede angesehen werden können, so muß man, um die Zweydeutigkeit der entgegengesetzten Zeichen

wegzuräumen, statt der einfachen Differenzen ihre Quadrate nehmen, und die Summe $(p - p')^2 + (p - p'')^2 + (p' - p'')^2$ als Minimum betrachten.

2) Setzt man das Differenzial davon $= o$, und entwickelt es gehörig, so erhält man:

$$dp\,(p - p' - p'') + dp'\,(p' - p - p'') + dp''\,(p'' - p - p') = o.$$

Da nun $p + p' + p'' = P$ ist, so wird $p - p' - p'' = 2p - P$, $p' - p - p'' = 2p' - P$ und $p'' - p - p' = 2p'' - P$, also verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} 2pdp - Pdp \\ + 2p'dp' - Pdp' \\ + 2p''dp'' - Pdp'' \end{array}\right\} = o.$$

3) Aber $p$, $p'$, $p''$ sind Theile des unveränderlichen Ganzen $P$, folglich $dp + dp' + dp'' = o$; also auch $2pdp + 2p'dp' + 2p''dp'' = o$.

4) Man setze nun $AG = a$, $BG = b$, $CG = c$, so giebt die Bedingung des Gleichgewichtes:

$$ap + cp'' - bp' = o, \text{ folglich}$$
$$adp + cdp'' - bdp' = o.$$

Verbindet man diese mit den andern beyden Differenzialgleichungen n. 3, und eliminirt dadurch $dp'$ und $dp''$ so erhält man: $(b + c)\,p + (a - c)\,p' - (a + b)\,p'' = o$.

5) Man eliminire ferner aus dieser $p''$ vermittelst der Gleichung $ap + cp'' - bp' = o$; alsdann wird:

$$(a + ab + bc + c^2)\,p = (b^2 + ab - ac + c^2)\,p',$$

und auf gleiche Art bekommt man, indem man $p'$ wegschafft:

$$(a^2 + bc - ac + b^2)\,p = (b^2 + ab - ac + c^2)\,p''.$$

6) Diese Verhältnisse zwischen p, p′ und p″ geben nun: $p = \frac{\frac{1}{2}P(b^2 + ab - ac + c^2)}{a^2 + b^2 + ab + bc - ac + c^2}$, woraus sich die Werthe von p′ und p″ unmittelbar finden lassen.

7) Fällt der Schwerpunkt des Balken in die Mitte von AB, so ist $a = b$, folglich wird dann;

$$p = \frac{P(2a^2 - ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2},\ p' = \frac{P(2a^2 + ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2},$$

$$p'' = \frac{2Pa^2}{6a^2 + 2c^2}$$

8) Für $c = 0$, ist $p = p' = p'' = \frac{1}{3}P$, also wird dann die Last auf die Stützen ganz vertheilt.

## §. 145.

Auf diese Weise kann man die Vertheilung des Druckes für so viele Unterstützungspunkte bestimmen, als man will. Indeß wird die Auflösung bey mehrern Stützen, wenn gleich nicht verwickelter, doch wenigstens sehr weitläuftig, weil man außer der Differenzialgleichung, welche die Voraussetzung des Minimums giebt, alle die Gleichungen zu Hülfe nehmen muß, die aus der Bedingung des Gleichgewichtes fließen. Wir wollen daher bey den folgenden allgemeinern Problemen dieses Kapitels daneben gezeigten Weg verlassen, und dafür ein anderes Verfahren wählen, das von seinem Erfinder, dem Hrn. Euler zu einer sehr hohen Vollkommenheit gebracht ist. Es beruhet auf dem Grundsatze: daß unendlich kleine Aenderungen allemal den Kräften proportional sind, die sie hervorbringen. Dieser Satz klingt zwar in der Allgemeinheit, wie er hier ausgedrückt ist, etwas hypothetisch, er ist aber in dem einzelnen Falle, wo wir ihn gebräuchen werden, der vollkommensten Evidenz fähig.

## §. 146.

**Lehrsatz. Wenn ein Faden durch ein daran gehängtes Gewicht um einen unendlich kleinen Theil ausgedehnt wird, so ist diese Aenderung seiner Länge dem Gewichte proportional.**

**Beweis.** Man setze, die Länge des Fadens l bekomme durch das angehängte Gewicht P die Ausdehnung $\omega$. Machte diese einen bedeutenden Theil von l aus, so befände sich der Faden in einem gewaltsamen Zustande, und ein eben so großes Gewicht P, zum vorigen hinzugefügt, würde nicht vermögend seyn, eben die Ausdehnung noch einmal zu bewirken, sondern wenn letztere $\omega'$ heißt, so ist $\omega' < \omega$. Je geringer aber $\omega$ in Vergleichung gegen l ist, desto mehr nähert sich die Dehnbarkeit des Fadens in dem Zustande, in den ihn das Gewicht P versetzt hat, seiner natürlichen Dehnbarkeit, also $\omega'$ desto mehr $\omega$, und gedenkt man sich $\omega$ als unendlich abnehmend, so nähert sich $\omega'$ unendlich $\omega$, folglich ist die Grenze davon: $\omega' = \omega$; also die Ausdehnung durch das doppelte Gewicht $= \omega + \omega' = 2\omega$.

Bey eben der Voraussetzung folgt, daß die Ausdehnung des Fadens durch das Gewicht $3P = 3\omega$ sey u. s. f., woraus erhellet, daß unendlich kleine Aenderungen der Länge des Fadens sich allemal verhalten, wie die Gewichte, durch die sie hervorgebracht sind.

§. 147.

Aufgabe. Ein Balken, dessen Schwerpunkt in O fällt, ruhet auf den Punkten M, M′, M″ u. s. f. in horizontaler Lage; man fragt, welchen Druck diese Punkte durch sein Gewicht P leiden.

Fig. 30. Aufl 1) Man setze, statt der Stützen, werde der Balken in den Punkten M, M′, M″ u. s. f. durch Fäden gehalten, die in keinem Betracht von einander verschieden seyn sollen. Er wird sie durch sein Gewicht ausdehnen, und dadurch aus der horizontalen Lage nach und nach in eine schiefe kommen, bis er sich mit ihnen ins Gleichgewicht gesetzt hat.

2) Zu der Ausdehnung eines jeden dieser Fäden wird ein Theil vom Gewichte P verwandt, der gerade erforderlich ist, diese Wirkung für sich hervorzubringen; denn eine größere oder geringere Kraft würde den Faden entweder noch mehr ausdehnen, oder eine Zusammenziehung desselben gestatten, wobey also das Gleichgewicht nicht statt finden könnte.

3) Man kann nun die Fäden so stark annehmen, daß ihre Ausdehnungen unendlich klein sind; alsdann verhalten diese sich in den einzelnen Punkten M, M′ u. s. f. wie die Theile des Gewichtes, die auf diese Punkte kommen. Wir wollen diese Theile p, p′, p″ u. s. f. nennen.

4) Es sey nun $MO = x$, $M'O = x'$, $M''O = x''$ u. s. f., die Ausdehnung $Mm = y$, $M'm' = y'$ u. s. f.,

so sind die Punkte m, m′, m″ u. s. f. wieder in einer geraden Linie, folglich wird jede Ordinate y durch die ihm zugehörige Abscisse x vermittelst einer Gleichung: $y = a + bx$ bestimmt, worinn a und b noch unbekannt, aber für jedes x einerley sind. Außerdem hat man $y : y' : y'' .. = p : p' : p'' ..$ oder $\frac{p}{y} =$ einer beständigen Größe c.

5) Da P den Kräften p, p′ .. äquipollent ist, so ist O der gemeinschaftliche Schwerpunkt von M, M′, M″ u. s. f., also hat man, weil der Anfangspunkt mit dem Schwerpunkte zusammen fällt (§. 32.):

$px + p'x' + p''x'' + \ldots = 0$, oder wenn man für p, p′ .. die Werthe cy, c′y′ .. substituirt:

$$xy + x'y' + x''y'' + \ldots = 0.$$

6) Man setze ferner für jedes y seinen Werth (4) in x ausgedrückt, so wird

$$\left.\begin{array}{l} a\,(x + x' + x'' + \text{u. s. f.}) \\ + b\,(x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{u. s. f.}) \end{array}\right\} = 0.$$

oder, wenn man die Summen aller x, und ihrer Quadrate f und g nennt: $af + bg = 0$.

7) Außerdem ist $p + p' + p'' + \ldots = P$, und jedes $p = ca + cbx$, folglich, wenn die Zahl der Unterstützungspunkte n heißt,

$$P = nca + cb\,(x + x' + x'' \ldots) = nca + cbf.$$

8) Diese Gleichung mit der vorigen (6) verbunden, giebt $ca = \frac{Pg}{ng - f^2}$, $cb = \frac{-Pf}{ng - f^2}$; also wird $p^{(m)} = ca + cbx^{(m)} = \frac{g - fx^{(m)}}{ng - f^2} . P$

**Exempel** 1. Für den §. 144. betrachteten Fall ist $x = AG = a$, $x' = BG = -b$, $x'' = CG = c$, folglich $f = a - b + c$, $g = a^2 + b^2 + c^2$, dies giebt $p = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - a^2 + ab - ac}{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b + c)^2} \cdot P =$
$\frac{(b^2 + ab - ac + c^2)P}{2(a^2 + ab + b^2 + bc - ac + c^2)}$, wie oben.

2. Es liege allemal ein Paar von Unterstützungspunkten auf verschiedenen Seiten des Schwerpunktes in gleicher Entfernung davon, und die Anzahl derselben sey auf jeder Seite $= m$, so hat man $f = 0$, $n = 2m$, folglich $p = p' = p'' \ldots = \frac{P}{2m}$, d. i. jede der Stützen trägt so viel als die andere.

## §. 148.

Wenn ein schrägliegender Balken in mehreren Punkten unterstützt wird, so vertheilt sich sein Gewicht eben so auf diese Punkte, als wenn er horizontal läge. Denn es sey sein Gewicht $= P$, der Neigungswinkel $= I$, so ist $P \operatorname{Cos} I$ der senkrechte Druck, den er auf die Unterstützungspunkte ausübt; für diesen ist nun der bisherige Calcul richtig, also kommt davon $p \operatorname{Cos} I$, $p' \operatorname{Cos} I \ldots$ auf die einzelnen Stellen. Damit verbinde man $p \operatorname{Sin} I$, $p' \operatorname{Sin} I \ldots$, worinn sich der andere Theil des Gewichtes $P \operatorname{Sin} I$ zertheilen läßt, weil er längs dem Balken wirkt (§. 126.), so bekommt man $p$, $p'$, $p'' \ldots$ nach vertikalen Richtungen.

## §. 149.

Fig. 26. Zur Verminderung der Propulsion eines Daches (§. 133.) dienen auch noch die sogenannten Dachstühle, deren Wirkung aus der bisherigen Theorie von der Vertheilung des Drucks sich leicht bestimmen läßt. Es sey zwischen den Sparren AC und BC des Daches ACB ein Querbalken FG angebracht, der durch die Säulen FH und GI unterstützt ist, so vertheilt sich das Gewicht P der Sparre BC auf die Punkte B, G und C. Wir wollen setzen auf B komme der Theil p, auf C, p' und auf G, p''.

Von diesen zerlege man p' nach den Richtungen Cc und CB, so ist ersterer Theil $= p' \operatorname{Cot} I$, (§. 128.) der durch eine gleiche Kraft von der andern Seite her aufgehoben wird; letzterer Theil ist $= p' \operatorname{Sec} I$, und übt auf den Punkt B einen Druck nach Bp aus.

Das andere Gewicht p'' zerlege man, weil die Sparre in G schräg aufliegt, in eine Kraft nach Gg, senkrecht auf die Sparre, und in eine nach GB, längs derselben. Erstere ist $= p'' \operatorname{Cos} I$, und findet nach GI und GF Widerstand; letztere ist $= p'' \operatorname{Sin} I$ und vereinigt sich mit $p' \operatorname{Sec} I$ zu einer Kraft $N = \frac{p' + p'' \operatorname{Sin} I^2}{\operatorname{Sin} I}$ nach Bp.

Hiervon ist der Antheil nach Bq, oder die gesuchte Propulsion des Daches $= N \operatorname{Cos} I = \operatorname{Cot} I \,(p' + p'' \operatorname{Sin} I^2)$.

**Exempel. 1.** Der Punkt G falle in die Mitte von BC, oder in den Schwerpunkt der Sparre, so ist

$p = p' = p'' = \frac{1}{3}$ P, also die Propulsion $= \frac{1}{3}$ P Cot I $(1 + \text{Sin } I^2)$, die allemal geringer als $\frac{1}{2}$ P Cot I ist, wofern $I < 45°$ ist, aber $\frac{1}{2}$ P Cot I übertrifft, sobald $I > 45°$ genommen wird.

2. Der Punkt G liege nach oben zu um den vierten Theil der Sparre vom Schwerpunkte entfernt, so ist $c = \frac{1}{2} a$, $p' = \frac{2a^2 - ac + c^2}{6a^2 + 2c^2} \cdot P = \frac{7}{26} P$, $p'' = \frac{2a^2 P}{6a^2 + 2c^2} = \frac{4}{13} P$, folglich die Propulsion $= \frac{1}{26}$ P Cot I $(7 + 8 \text{ Sin } I^2)$, die, wie man sieht, kleiner als die vorige ist, und erst für einen Winkel von $60° = \frac{1}{2}$ P Cot I wird.

## §. 150.

Fig. 31. **Aufg.** Ein Körper, dessen Grundfläche eben und in horizontaler Lage ist, ruhet mit derselben auf mehreren Unterstützungspunkten M, M′, M″ u. s. f. Wieviel wird jeder dieser Punkte von seinem Gewichte P zu tragen haben?

Aufl. 1) Man ziehe in der Grundfläche aus einem beliebigen Punkte C zwey Linien CA und CB senkrecht aufeinander, und fälle aus den Punkten M, M′ u. s. f. auf CA die Perpendikel MP, M′P′ u. s. f., so wird die Lage eines jeden dieser Punkte durch die Coordinaten $CP = x$, und $PM = y$ bestimmt.

2) Ein Perpendikel aus dem Schwerpunkte des Körpers treffe die Grundfläche in O, so ist O der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller der Unterstützungs-

punkte (§. 112. 1.). Es sey für ihn $CD = a$, $DO = b$.

3) Man setze den Druck auf $M = p$, auf $M' = p'$ u. s. f., so hat man

$$p + p' + p'' .. = P, \text{ und wegen n. 2.}$$
$$px + p'x' + p''x'' + .. = Pa \ (\text{§. } 74.)$$
$$py + p'y' + p''y'' + .. = Pb.$$

4) Statt der Stützen denke man sich wieder den Körper in den Punkten $M$, $M'$ u. s. f. durch einerley Fäden gehalten, die dem Drucke unmerklich nachgeben, und sich um unendlich kleine Theile ausdehnen, so verhalten sich diese Ausdehnungen, die wir $z$, $z'$, $z''$ nennen wollen, wie die Kräfte $p$, $p'$, $p''$ u. s. f., durch die sie hervorgebracht sind. Man kann also $p^{(m)} = cz^{(m)}$ setzen.

5) Weil die Ausdehnungen wegen der Verschiedenheit der Kräfte $p$, $p'$, $p''$ u. s. f. ungleich sind, so kommt dadurch die Grundfläche in eine etwas schiefe Lage, in der die vertikalen Abstände der Punkte $M$, $M'$ u. s. f. von der vorigen Ebene mit den Ausdehnungen $z$, $z'$ u. s. f. einerley sind.

6) Die schiefe Grundfläche hat daher $x$, $y$ und $z$ zu Coordinaten, und folglich ist allgemein $z = f + gx + hy$; denn man weiß, daß unter dieser Form die Gleichung für jede Ebene begriffen ist, sie mag eine Lage haben, welche sie will.

7) Daher hat man überhaupt $p^{(m)} = cz^{(m)} = cf + cgx^{(m)} + chy^{(m)}$, oder, wenn $cf = A$, $cg = B$, $ch = C$ gesetzt wird: $p^{(m)} = A + Bx^{(m)} + Cy^{(m)}$.

8) Man

8) Man setze nun diesen Werth für $p, p', p''$ u. s. f. in die drey Gleichungen n. 3., so erhält man; wenn der Unterstützungspunkte $n$ sind:

$$nA + (x + x' + x'' \ldots) B + (y + y' + y'' \ldots) C = P,$$
$$A (x + x' + x'' \ldots) + B (x^2 + x'^2 + \ldots) + C (xy + x'y' + \ldots) = Pa$$
$$A (y + y' + y'' \ldots) + B (xy + x'y' + \ldots) + C (y^2 + y'^2 + \ldots) = Pb,$$

oder wenn die einzelnen Summen durch ein fortgesetztes $S$ bezeichnet werden:

$$nA + B \,.\, Sx + C \,.\, Sy = P,$$
$$ASx + B \,.\, Sx^2 + C \,.\, Sxy = Pa,$$
$$A \,.\, Sy + B \,.\, Sxy + C \,.\, Sy^2 = Pb.$$

woraus die Werthe von A, B und C gefunden werden können.

## §. 151.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Formeln mag folgender besondere Fall dienen:

Fig. 32. Ein Tischblatt ist in den vier Punkten A, B, C, D unterstützt, die in die Eckpunkte eines Rechtecks ACBD fallen. Gewichte, womit es beladen ist, machen, daß der Schwerpunkt des Ganzen nicht in die Mitte, sondern irgendwo in O zu liegen kommt. Wie viel wird jede der Stützen zu tragen haben?

Aufl. 1) Es sey die ganze Last, die auf ihnen ruhet, $= P$; die Seite $AC = f$, $BC = g$. Man ziehe durch O mit diesen Seiten die Parallelen FI und GH, und setze noch $CF = a$, $FO = b$, so hat man für den

Punkt A, $x = f$, $y = o$; für $B: x' = o$, $y' = g$; für $C: x'' = o$, $y'' = o$; für $D: x''' = f$, $y''' = g$.

2) Folglich wird $Sx = 2f$, $Sy = 2g$, $Sx^2 = 2f^2$, $Sy^2 = 2g^2$, $Sxy = fg$, und man erhält daher die Gleichungen:

$$4A + 2Bf + 2Cg = P$$
$$2Af + 2Bf^2 + Cfg = Pa$$
$$2Ag + Bfg + 2Cg^2 = Pb$$

3) Die erste mit f multiplicirt, und vom Doppelten der zweyten abgezogen, läßt übrig:

$$2Bf^2 = (2a - f)P, \text{ oder } B = \frac{(2a - f)P}{2f^2}.$$

Eben so erhält man aus der ersten und dritten:

$$2Cg^2 = (2b - g)P, \text{ oder } C = \frac{(2b - g)P}{2g^2}.$$

4) Daraus wird nun $4A + (\frac{2a}{f} + \frac{2b}{g})P = 3P$, folglich: $A = (\frac{3}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$, und daher

der Druck auf $A = A + Bf = (\frac{1}{4} + \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$

der auf $B = A + Cg = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} + \frac{b}{2g})P$

der auf $C = A = (\frac{3}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$

und der auf $D = A + Bf + Cg = (\frac{a}{2f} + \frac{b}{2g} - \frac{1}{4})P$.

## §. 152.

Eben diese Werthe für p, p′, p″, p‴ findet man sehr leicht aus der Betrachtung der möglichst kleinsten Verschiedenheit des Druckes. Man hat nemlich dieser zu Folge:

$pdp + p'dp' + p''dp'' + p'''dp''' = o$ (§. 144. 3.), und dazu kommen noch folgende Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes:

$p + p' + p'' + p''' = P$; $(p + p''') f = aP$; $(p' + p''') g = bP$ (§. 150. 3.). Diese geben, wenn man sie differenziirt:

$dp + dp' + dp'' + dp''' = o$; $dp + dp''' = o$; $dp' + dp''' = o$, woraus man $dp'' = dp''' = - dp$ und $dp' = + dp$ erhält.

Schafft man damit $dp'$, $dp''$ und $dp'''$ aus der ersten Gleichung weg, so wird: $p + p' - p'' + p''' = o$, und diese Gleichung mit der zweyten: $p + p' + p'' + p''' = P$ verbunden, giebt $2p + 2p' = P$, $2p'' + 2p''' = P$, oder $p' = \frac{1}{2} P - p$, $p''' = \frac{1}{2} P - p''$. Daher $(p - p'') f = (a - \frac{1}{2} f) P$ und $(p + p'') g = (g - b) P$, also $p = (\frac{1}{4} + \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g}) P$, $p'' = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g}) P$, wie vorhin.

## §. 153.

Bisher haben wir die Stellen, wo die Last unterstützt ist, als bloße Punkte betrachtet; sie kann aber auch durch eine ganze Fläche getragen werden, und alsdann breitet sich der Druck über diese nach allen Seiten aus, und jede ihrer Stellen übernimmt einen Theil davon. Vertheilt sich der Druck auf die Fläche gleichförmig; so bekommt das eine Stück derselben nach Verhältniß seines Raumes nicht mehr davon, als das andere, oder, wenn s einen Theil der Fläche bedeutet, $\pi$ den Theil des ganzen Druckes, der auf ihn kommt, so ist $\frac{\pi}{s} = p$ an allen Stellen einerley. Bey ungleichförmigen Drucke hingegen ist dies p, **die Einheit des Druckes**, an verschiedenen Stellen verschieden, und es entsteht dann die Frage, wie groß p für jedes besondere Element der Fläche sey, oder mit andern Worten: wie stark die Fläche in den einzelnen Punkten gedrückt werde.

## §. 154.

Die Auflösung dieses Problems unterscheidet sich von dem in §. 150. betrachteten Falle nur bloß dadurch, daß jetzt der Druck auf unendlich viele Stellen sich vertheilt, also $CP = x$, $PM = y$ nicht mehr Coordinaten für einzelne Punkte, sondern für jeden Punkt M der gegebenen Fläche bedeuten. Man stelle sich daher die Fläche in lauter rechtwinkliche und gleiche Elemente getheilt vor, die durch die Aenderungen von x und y entstehen, also $dxdy$ zum Inhalte haben, und nenne den Druck auf jedes derselben $d\pi$, so ist $d\pi$ ein unendlich kleiner Theil von P, und nach der Lage des Elementes veränderlich. Nach §. 150. hat man nemlich $d\pi = A + Bx + Cy$: da aber, wie man sieht, A, B, C, hier unendlich klein, und dem Flächenraume $dxdy$ proportional seyn müssen, so setze man

Fig. 31.

$A = \alpha dxdy$, $B = \beta dxdy$, $C = \gamma dxdy$; alsdann bekommt man für die Einheit des Druckes: $p = \frac{\pi}{dxdy} = \alpha + \beta x + \gamma y$. Zugleich aber ändern sich auch die Gleichungen (ebendas.) in so fern ab, daß die dortigen Summen sich in Integrale verwandeln, die über die ganze Fläche genommen werden müssen. Es sey K der ganze Flächenraum, so ist $ndxdy = K$, also $nA = n\alpha dxdy = K\alpha$, folglich:

$$K\alpha + \beta\int\int xdxdy + \gamma\int\int ydxdy = P.$$
$$\alpha\int\int xdxdy + \beta\int\int x^2dxdy + \gamma\int\int xydxdy = Pa$$
$$\alpha\int\int ydxdy + \beta\int\int xydxdy + \gamma\int\int y^2dxdy = Pb.$$

woraus sich $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$, also auch p für jede Stelle der Fläche bestimmen läßt.

## §. 155.

Die Integrale in diesen drey Gleichungungen sind doppelt, d. h. man muß jedes Differenzial erst für einerley x bis an den Umfang der Fläche summiren, und dann beym Kommenden nochmal die Integration nach x anstellen. Es sey nun für den Umfang der Fläche $y = Y$, so wird:

$\int\int xdxdy = \int Yxdx$, $\int\int ydxdy = \frac{1}{2}\int Y^2dx$, $\int\int x^2dxdy = \int Yx^2dx$, $\int\int xydxdy = \frac{1}{2}\int Y^2xdx$ und $\int\int y^2dxdy = \frac{1}{3}\int Y^3dx$; wodurch die Gleichungen folgende Form bekommen:

$$K\alpha + \beta\int Yxdx + \tfrac{1}{2}\gamma\int Y^2dx = P.$$
$$\alpha\int Yxdx + \beta\int Yx^2dx + \tfrac{1}{2}\gamma\int Y^2xdx = Pa$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha\int Y^2dx + \tfrac{1}{2}\beta\int Y^2xdx + \tfrac{1}{3}\gamma\int Y^3dx = Pb.$$

Weil nun die Grenzlinien der Fläche bestimmt sind, so ist für jeden Theil des Umfangs Y durch x gegeben, also hat man jetzt nur noch Ausdrücke zu integriren, in denen bloß x als veränderliche Größe vorkommt.

## §. 156.

Ist der Umfang der Fläche von solcher Beschaffenheit, daß es einen Punkt in ihr giebt, durch den sich zwey Linien senkrecht aufeinander ziehen lassen, von denen eine jede die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, so nehme man diesen Punkt zum Anfangspunkte der Abscissen und eine dieser Linien zur Abscissenlinie an. Alsdann ist die Summe der Elemente $dxdy = 2Ydx$, also für einerley x, positiv oder negativ genommen, gleich groß; daher sind allemal zwey solcher $2Yxdx$ auf verschiedenen Seiten des Anfangspunktes zusammengenommen $= 0$, folglich auch die ganze Summe $\int Yxdx = c$.

Da ferner ydxdy für einerley x und gleiche entgegengesetzte y gleich und entgegengesetzt ist, so sind solche zwey ydxdy zusammen genommen $= 0$, folglich auch das ganze $\int\int ydxdy$, oder $\int Y^2dx = 0$.

Eben dies erhellet von dem Integrale $\int\int xydxdy$; so daß also die drey Gleichungen für gegenwärtigen Fall auf folgende zurückgebracht werden:

$$K\alpha = P$$
$$4\beta\int Yx^2dx = Pa$$
$$\tfrac{4}{3}\gamma\int Y^3dx = Pb$$

Daher wird $p = \alpha + \beta x + \gamma y = \frac{P}{K} + \frac{Pax}{4\int Yx^2dx} + \frac{3Pby}{4\int Y^3dx}$.

**Exempel 1.** Es sey die Fläche ein Rechteck, dessen Höhe $= f$, und dessen Grundlinie $= g$ seyn mag, so hat man, wenn man die Abscissenlinie der Höhe parallel nimmt, $Y = \frac{1}{2}g$, also $\int Yx^2dx = \frac{1}{6}gx^3$, welches für $x = \frac{1}{2}f$, $= \frac{1}{48}gf^3$ wird. Ferner wird $\int Y^3dx = \frac{1}{16}g^3f$ und $K = fg$, $y = \frac{1}{2}g$, also $p = \frac{P}{fg} + \frac{12Pax}{gf^3} + \frac{12Pby}{fg^3} = \frac{P}{fg}(1 + \frac{12ax}{f^2} + \frac{12by}{g^2})$.

Exempel 2. Die Fläche sey ein Kreis, dessen Halbmesser $= f$ ist, so hat man $Y^2 = f^2 - x^2$; also, wenn man $x = f\,\mathrm{Sin}\,\vartheta$ setzt, $Y = f\,\mathrm{Cos}\,\vartheta$, folglich $Yx^2dx = f^4\,\mathrm{Sin}\,\vartheta^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{4}f^4 \,.\, \mathrm{Sin}\,2\vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{8}f^4 (1 - \mathrm{Cos}\,4\vartheta)\,d\vartheta$ und daher $\int Yx^2dx = (\frac{1}{8}\vartheta - \frac{1}{32}\mathrm{Sin}\,4\vartheta)\,f^4$. Für $x = f$ ist nun $\mathrm{Sin}\,\vartheta = 1$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, also der vollständige Werth des Integrals $= \frac{1}{16}\pi f^4$.

Auf gleiche Art findet man $\int Y^3dx = \frac{3}{16}\pi f^4$; daher wird: $p = \frac{P}{\pi f^2} + \frac{4Pax}{\pi f^4} + \frac{4Pby}{\pi f^4} = \frac{P}{\pi f^2}(1 + \frac{4ax + 4by}{f^2})$.

## §. 157.

Es wird bey dieser Berechnung allemal vorausgesetzt, daß nur auf den Theil der Fläche, der von der

Grundfläche des Körpers bedeckt wird, der Druck sich verbreite. Ragt dagegen die Grundfläche an den Seiten über den Umfang hervor, so wird begreiflich dadurch der Druck im Ganzen genommen weder größer noch geringer, weil die Fläche alsdann noch eben so gut das ganze Gewicht des Körpers zu tragen hat, aber die Einheit des Druckes ist in diesem Falle desto größer, je geringer der Flächenraum ist, der die Last übernimmt.

## §. 158.

Wenn der Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Fläche fällt, so ist $a = b = o$, folglich $p = \frac{P}{K}$, oder **der Druck vertheilt sich alsdann gleichförmig über die Fläche.** Dieser merkwürdige Satz beschränkt sich ohne Zweifel nicht bloß auf ebene Flächen, sondern gilt gewiß auch da, wo überhaupt eine krumme Fläche, die irgendwo einen Mittelpunkt hat, mit einem Körper beschwert wird, dessen Grundfläche in jene hineinpaßt, und dessen Schwerpunkt vertikal über erwähntem Mittelpunkte liegt. So z. B. wird die Schüssel, in der man die Linsengläser schleift, allenthalben gleich stark gedrückt werden, wenn die auf den Druck verwandte Kraft genau durch die Axe derselben geht. Auch gehört die Schraubenfläche hieher, auf die sich allemal die Last gleichförmig vertheilt, sobald ihr Schwerpunkt in die Spindel der Schraube fällt. Ich kann mich hier nicht darauf einlassen, diese höchst wahrscheinlichen Vermuthungen darzuthun; wie wichtich aber nähere

Untersuchungen hierüber sind, erhellet allein daraus, daß aus Mangel an denselben die Theorie der Friction krummer Flächen beynahe noch ganz im Dunkeln liegt.

Anmerk. Die letzten §§ dieses Kapitels hat Euler in Nov. Comment. Petrop. Tom. XVIII. umständlich abgehandelt; sonst wüßte ich aber keinen Schriftsteller zu nennen, der über diese Materie etwas Entscheidendes geliefert hätte: denn sowohl Lambert *) als Delanges **) begnügen sich bloß mit den gewöhnlichen Bedingungen des Gleichgewichtes, die doch, wie D'Alembert ***) zeigt, die Aufgabe allemal unbestimmt lassen, und also zu deren Auflösung für sich nicht zureichend sind. Eulers Verfahren allein verbreitet über die Sache Licht, und erhält durch die Uebereinstimmung mit den meinigen, wie ich glaube, völlige Bestätigung.

## Fünftes Kapitel.

# Von der Spannung biegsamer Fäden.

### §. 129.

Fig. 33. Wenn man einen Faden AMB mit dem einen Ende an einen unbeweglichen Punkt A befestigt, und an seinem andern Ende B eine Kraft P ziehen läßt, so streckt diese den Faden in eine gerade Linie, die mit der Richtung der Kraft zusammenfällt.

Es sey z. B. P ein angehängtes Gewicht, so wird

*) Beyträge zum Gebrauche der Math. 2. Th.

**) Memorie di Mat. e Fisica della Soc. Ital. Tom. V. p. 107.

***) Opuscules de Mathem. Tom. VIII. pag. 36.

diesem der Faden wegen seiner Biegsamkeit so lange nachgeben, bis es so tief als möglich gesunken ist; dies geschieht aber nur dann, wenn die Punkte A, M und B in einer geraden Linie liegen, die vertikal herabläuft.

## §. 160.

Durch den Zug der Kraft wird der Faden in einen gewaltsamen Zustand versetzt, den man die **Spannung** desselben nennt. Sie richtet sich nach der Größe der Kraft, und erstreckt sich der Länge nach auf alle Theile des Fadens in gleichem Grade.

Jeder Punkt M wird nemlich von der Kraft P nach MB gezogen, und da er nicht weichen kann, durch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft angehalten; also wirkt auf alle Punkte des Fadens dieselbe Kraft = P nach entgegengesetzten Richtungen, und spannt den Faden an allen Stellen gleich stark.

## §. 161.

Daher pflanzt sich die Kraft durch den Faden auf den Punkt A fort, oder wirkt auf ihn eben so, als wäre sie unmittelbar darauf angebracht, folglich muß dieser mit gleicher Kraft nach entgegengesetzter Richtung Widerstand leisten. Statt also den Punkt A zu befestigen, kann man eine entgegengesetzte Kraft = P auf ihn anbringen, ohne dadurch das Gleichgewicht aufzuheben; dies leitet auf folgende Sätze:

1. Zwey gleiche Kräfte, jede = P, die nach entgegengesetzten Richtungen an einem Faden ziehen, span-

nen ihn nach dieser Richtung in eine gerade Linie aus, und halten einander an demselben das Gleichgewicht.

2. Gegenseitig, wenn zwey Kräfte an dem Faden im Gleichgewichte seyn sollen, so müssen sie gleich und entgegengesetzt seyn.

3. Der Faden leidet zwischen diesen beyden Kräften allenthalben die Spannung = P.

## §. 162.

Fig. 34. **Aufgabe.** Es sind auf die Punkte A, B und F eines biegsamen Fadens drey Kräfte P, Q und R nach den Richtungen Aa, Bb und Ff angebracht; man sucht die Umstände, unter denen sie einander das Gleichgewicht halten werden.

Aufl. 1) Da die Kraft P aufgehoben wird, so muß in F eine gleich große Kraft nach entgegengesetzter Richtung $F\alpha$ ziehen, also der Theil AF in eine gerade Linie ausgespannt werden, die mit Aa, der Richtung von P, zusammenfällt.

2) Eben so muß der Kraft Q eine gleiche Kraft nach $F\beta$ entgegenwirken, also der Theil des Fadens FB die Lage Bb erhalten, und

3) den beyden nach $F\alpha$ und $F\beta$ gerichteten Kräften muß die Kraft R äquipollent seyn.

4) Setzt man daher den Winkel $fF\alpha$, den Aa und Ff, die Richtungen der Kräfte P und R, miteinander machen $= \eta$; den Winkel $fF\beta$ der Richtungen Bb und $Ff = \vartheta$, so hat man als Bedingungen des Gleichgewichtes (§. 52.)

$P \text{ Sin } \eta = Q \text{ Sin } \vartheta$

$R \text{ Sin } \eta = Q \text{ Sin } (\eta + \vartheta)$

5) Die Spannungen der Theile AF und FB sind $= P$ und Q.

## §. 163.

Fig. 35. Wenn ein Pferd vor einem Schlitten oder Wagen zieht, so wirken auf den Punkt F, wo das Zugseil eingehängt ist, drey verschiedene Kräfte. Der Brustriemen wird durch das Anziehen des Pferdes nach horizontaler Richtng FA gespannt; das Zugseil, wenn es in B an der fortzuziehenden Last befestigt ist, überträgt die Rückwürkung dieses Punktes auf F nach der schiefen Richtung FB, und der Sattelriemen widersteht vertikal aufwärts nach Ff.

Um hierbey die Erfordernisse des Gleichgewichtes zu bestimmen, setze man den Widerstand, den die Last dem Zuge nach horizontaler Richtung oB entgegensetzt, $= R$, die Kraft, die das Pferd nach FA anwendet, $= M$, den Gegendruck nach $Ff = \Pi$, die Spannung des Zugseils $= T$, seine Schiefe, oder den Winkel $FBo = \varepsilon$, so erhält man, weil $AFo = 90°$ ist:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ M &= T \text{ Cos } \varepsilon \\ \Pi &= T \text{ Sin } \varepsilon \end{aligned}\right\} (\S.\ 49.)$$

folglich $\Pi = M \text{ tang } \varepsilon$.

2) Durch die Spannung des Seiles wird in B ein Zug nach BF bewirkt. Man zerlege diese Kraft in eine nach der Horizontale $Bo = T \text{ Cos } \varepsilon$, und eine nach der Vertikale $Bp = T \text{ Sin } \varepsilon$; letztere strebt den Punkt

B vertikal zu heben, und wird durch das Gewicht des Wagens aufgehoben; erstere T Cos $\varepsilon$ soll gerade so groß seyn, als nöthig ist, den Widerstand R zu überwinden, folglich muß T Cos $\varepsilon = R$ seyn.

3) Dies mit dem Vorigen (1) verglichen, giebt $M = R$.

Das Seil mag also nach einer Richtung gespannt werden, nach der man will, so hat das Pferd doch immer eben die Kraft nach FA anzuwenden, als wenn es unmittelbar am Punkte B nach Bo zöge.

4) Außerdem leidet aber sein Rücken durch die Spannung des Sattelriemens den vertikalen Druck $\Pi = R \tan \varepsilon$ (1. 3.), der, wie man sieht, für einerley R desto größer ist, je mehr BF von der Horizontale abweicht.

5) Man setze die Länge des Seiles $BF = l$, den Theil Fo der Vertikale, um den die Brust des Pferdes höher liegt, als der Punkt B, $= a$, so ist $Bo = \sqrt{(l^2 - a^2)}$, also $\tan \varepsilon = \frac{a}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$, und $\Pi = \frac{Ra}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

Anmerkung. So hat Couplet *) und nach ihm Müller **) die Sache betrachtet. Allein, da der Zug durch zwey Seile geschieht, so vertheilt sich die Kraft und die Spannungen der beyden Riemen so wie die des Seiles werden dadurch halb so groß, als sie vorhin angegeben sind. Indeß ändert dies in den Werthen für M und $\Pi$ nichts: denn wir werden nach-

*) Mem. de l'Acad. de Paris 1733.

**) Versuch einer system. Abh. über das Fuhrwesen, Göttingen 1787.

her sehen, daß ein Faden, der über einen cylindrischen Körper AEB geht, und an seinen Enden A und B nach parallelen Richtungen Aa und Bb bespannt wird, im Punkte D nach derselben Richtung DC einen Druck ausübe, der doppelt so groß als die Spannung ist.

## §. 164.

Folgerung 1. Für einerley R und l ist $\Pi$ desto größer, je größer a ist, oder je tiefer der Punkt B unter die Horizontale AF fällt. Beym Schlitten liegt dieser Punkt immer sehr niedrig; beym Wagen, wegen der Räder, höher: dies zeigt, wie sehr schon deshalb allein der Wagen dem Schlitten vorzuziehen ist.

2. Was den Wagen anbetrifft, so zeigt sich hier ein neuer Vortheil der hohen Räder vor den niedrigen; besonders gilt dieser in Bezug auf die Vorderräder, die man gewöhnlich kleiner als die Hinterräder annimmt. Diese Einrichtung hat gewiß manche Bequemlichkeit: aber ob der vorzüglichste Nutzen, den sie gewähren soll, nicht scheinbar ist? fragt sich doch noch. Daß das Umwenden dadurch erleichtert werde, ist, wie Camus gezeigt hat *), ein bloßer Irrthum; im Gegentheile wird durch ungleiche Räder die Friktion am Nagel, der dadurch einen Seitendruck leidet, vermehrt, also das Umdrehen erschwert.

3. Für einerley R und a ist $\Pi$ desto geringer, je größer man l nimmt; verschwindet aber nie ganz, so groß auch l seyn mag. Wofern also nicht a = o ist, hat das Pferd jedesmal immer vertikalen Druck auszu-

*) Traité des forces mouvantes proposition XXX.

stehen, den man durch eine gehörige Länge des Zugseiles in so weit nur vermindern kann, daß er das Pferd auf die Länge der Zeit nicht ermüdet.

4. Weiß man daher wie viel Gewicht ein Pferd auf längere Dauer zu tragen im Stande ist, so läßt sich daraus berechnen, wie lang das Seil seyn muß, um nicht mehr Druck als diesen zu verursachen; man hat nemlich $l = \frac{a\sqrt{(R^2 + \Pi^2)}}{\Pi}$.

**Exempel.** Es sey $R = 572$ ℔, $\Pi = 96$ ℔, die Höhe der Brust des Pferdes $= 4$ Fuß, der Halbmesser des Vorderrades $= 3$ Fuß, so ist $a = 1$ Fuß, $\sqrt{(R^2 + \Pi^2)} = \sqrt{336400} = 580$, also $l = 6\frac{1}{24}$ Fuß oder 6 Fuß $\frac{1}{2}$ Zoll.

5. Bey einer Reihe von Pferden theilt sich R in so viele M, als ihre Anzahl ausmacht. Sind sie alle gleich groß, so sind die Zugseile, außer dem letzten, alle horizontal gespannt, folglich leidet dann das letzte Pferd den Druck $\Pi$ allein. Soll daher von diesem Drucke auch das vorletzte Pferd einen Theil übernehmen, so muß es größer als das letzte seyn. Es gewährt also einigen Vortheil, wenn man die größern Pferde vorangehen, und das kleinste zuletzt folgen läßt.

## §. 165.

Fig. 36. Wenn mehrere Kräfte an einem Faden AEFB sich im Gleichgewichte erhalten, so wird, wie bey dreyen Kräften (§. 162.), jeder Theil desselben zwischen zwey zunächst liegenden Punkten in eine gerade Linie ausge-

spannt. Außerdem muß jede Kraft, wenn man sie an ihrem Punkte z. B. E nach den Richtungen E$\alpha$ und E$\varepsilon$ der daranliegenden Theile EA und EF zerlegt, auf beyden Seiten von gleichen Kräften, die nach entgegengesetzten Richtungen A$\alpha$ und F$\varphi$ wirken, aufgehoben werden: denn sonst würde der Punkt E entweder nach E$\alpha$ oder E$\varepsilon$ weichen, also das Gleichgewicht nicht statt finden. Diese gleichen und entgegengesetzten Kräfte bringen zugleich die Spannungen der einzelnen Theile des Fadens hervor.

## §. 166.

Fig. 37. Wenn auf den Faden AYS unendlich viel Kräfte wirken, und jede einzelne von ihnen auf einen besondern Punkt angebracht ist, so liegen zwey solcher Punkte Y und y unendlich nahe beysammen, und die gespannten geradlinigten Theile des Fadens sind unendlich klein. Alsdann hat also jedes Element desselben eine andere Lage als das nächstfolgende, und der ganze Faden ist folglich in eine Curve gebogen.

## §. 167.

Um sich von der Biegsamkeit eines Fadens eine deutliche Vorstellung zu machen, kann man sich gedenken, er bestehe aus lauter unendlich kleinen geradlinigten Theilen, die an sich unbiegsam, aber durch Gelenke so mit einander verbunden sind, daß sie sich um diese nach jeder Richtung drehen lassen. Ist alsdann ein solches Element zweyen gleichen und entgegengesetzten Kräften ausgesetzt, die an seinen Endpunkten seiner

Länge

Länge nach ziehen, so bleibt dasselbe unbeweglich, und wenn dies bey allen Elementen des Fadens der Fall ist, so ist alles am Faden im Gleichgewichte.

## §. 168.

Wenn die Kräfte nicht unmittelbar in den Ligamenten des Fadens angebracht sind, sondern auf die Elemente selbst wirken, wie z. B. wenn diese für sich ein Gewicht haben, so kann man die Elemente wegen ihrer Unbiegsamkeit als kleine Hebel ansehen, und folglich die Kräfte auf ihre Verbindungspunkte vertheilen; Also kommt dieser Fall doch auf den im §. 166. angenommenen zurück.

## §. 169.

Fig. 37. Aufgabe. Es wirken auf jedes Element Yy eines Fadens zwey Kräfte, die der Länge desselben ds proportional sind; eine $=$ pds nach der Tangente YT, und eine $=$ qds nach der darauf senkrechten Richtung yN; man fragt 1) wie diese Kräfte den Faden krümmen werden, 2) wie groß die Spannung eines jeden Elementes sey.

Aufl. 1) Da die Kraft pds längs Yy wirkt, so kann sie auf jeden Punkt dieses Elementes verlegt werden; man bringe sie daher auf den Punkt y an.

2) Die senkrechte Kraft qds vereinigt ihre Wirkung im Schwerpunkte des Elementes Yy; wenn man sie also auf die Punkte Y und y vertheilt, so kommt auf jeden : $\frac{1}{2}$ qds. Wir betrachten hier nur den auf y fallenden Theil nach yN.

3) Eben so kommt von der Normalkraft $(q + dq) ds$, die auf das nächstfolgende Element yv wirkt, auf den Punkt y der Theil $\frac{1}{2} ds (q + dq)$ nach der auf yv senkrechten Richtung yn, so daß auf diesen Punkt drey äußere Kräfte gerichtet sind.

4) Es sey nun die Spannung des Elementes Yy $= T$, die des nächst folgenden $yv = T'$, so ist $T' = T + dT$. Durch erstere wird der Punkt y nach yY gezogen, durch letztere nach yv.

5) Also wirken auf den Punkt y in Allem fünf Kräfte (3. 4.), oder, weil T und dp sich zu $T + dp$ vereinigen, nur vier Kräfte, die an demselben im Gleichgewichte seyn müssen.

6) Es sey der Winkel TYX, den die Tangente des Elementes Yy mit der Ordinate YX macht, $= \phi$, so ist $tyx = \phi + d\phi$, also $Tyt = d\phi = Nyn$.

7) Von der Kraft $\frac{1}{2} ds (q + dq)$ kommt der Theil $\frac{1}{2} dqds$, als ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, gegen die übrigen Kräfte nicht in Betracht. Man zerlege nun das zurückbleibende $\frac{1}{2} qds$ in einen Theil nach yN, und in einen nach der Verlängerung von Ty, so ist ersterer $= \frac{1}{2} ds \operatorname{Cos} d\phi = \frac{1}{2} qds$, der sich mit $\frac{1}{2} qds$ (2) zu qds vereinigt, letzterer $= \frac{1}{2} qds \operatorname{Sin} d\phi = \frac{1}{2} qdsd\phi$, der gegen die anderen Kräfte wegfällt.

8) Es bleiben daher am Punkte y nur noch die Kräfte $T + dp$ nach yT, qds nach yN, und $T + dT$ nach yv zurück, wovon also letztere, wenn man ihr die entgegengesetzte Richtung yt giebt, den andern beyden äquipollent seyn muß.

9) Diesem zu Folge zerlege man $T + dT$ nach den Richtungen $yT$ und $yN$, so kommt auf erstere der Theil $(T + dT) \operatorname{Cos} d\varphi = T + dT$, auf letztere $(T + dT) \operatorname{Sin} d\varphi = (T + dT) d\varphi = Td\varphi$, und man hat folglich:

$$T + dT = T + dp, \text{ oder } dT = dp \text{ und}$$
$$Td\varphi = qds.$$

10) Nennt man $r$ den Krümmungshalbmesser des Elements $Yy$, so ist bekanntlich $r = \frac{ds}{d\varphi}$, also $T = \frac{qds}{d\varphi} = qr$, und $dp = dT = rdq + qdr$, wodurch sowol die Natur der Curve wie auch die Spannung $T$ bestimmt wird.

## §. 170.

Die gefundenen Gleichungen zeigen nicht bloß, wie der Faden durch gegebene Kräfte gebogen wird, sondern sie bestimmen gegenseitig auch die Kräfte, denen der Faden ausgesetzt seyn muß, wenn er eine gegebene Krümmung annehmen soll.

Fig. 38. Wird daher ein Faden über einen cylindrischen Körper gelegt, und an seinen Enden Aa, Bb straff angezogen, so nimmt er die Form ADB vom äußern Umfange des Körpers an, und die Kraft, die ihn in diese Krümmung versetzt, besteht alsdann in dem Drucke, den der Körper auf jedes seiner Elemente ausübt.

Man hat also in diesem Falle $pds = 0$, und es bleibt nur übrig, aus der gegebenen Form der Linie

ADB die Kraft $qds$ zu bestimmen, oder anzugeben, wie stark der Faden in jedem einzelnen Punkte Y gedrückt wird.

Dadurch erhält man dann zugleich T, die Spannung jedes Elementes; folglich auch die Spannung der Enden Aa und Bb, oder die Kräfte, die erforderlich sind, einander an dem gebogenen Faden das Gleichgewicht zu halten.

§. 170.

1. Da $p = 0$ ist, so ist auch $dT = dp = 0$, folglich $T =$ einer beständigen Größe G. Der Faden leidet also allenthalben dieselbe Spannung; daher müssen die beyden Kräfte die an seinen Enden ziehen, um sich im Gleichgewichte zu erhalten, gleich groß seyn, ohne daß ihre Richtungen Aa und Bb dabey weiter in Betracht kommen.

2. Hierdurch wird ferner $qr = G$; also hat man $q = \frac{G}{r}$ für die Einheit des Druckes (§. 153.) an jeder Stelle Y, für welche r den Krümmungshalbmesser bedeutet. Der Faden ist folglich da einem größern Drucke ausgesetzt, wo er sich mehr krümmen muß.

3. Der Körper leidet in jeder Stelle Y durch den Faden eben den Druck $qds = \frac{Gds}{r} = Gd\varphi$, nur nach entgegengesetzter Richtung Yr. Zerlegt man diesen nach der Ordinate YX und der darauf senkrechten oder mit der Axe AB parallelen Richtung, so ist erstere

Kraft $= Gd\varphi \operatorname{Cos} rYX = Gd\varphi \operatorname{Sin}\varphi$, letztere $=$ $Gd\varphi \operatorname{Cos}\varphi$.

§. 172.

Wenn die beyden Arme AYD und DyB gleich und ähnlich sind, so heben sich von dem Drucke in Y und y die beyden Theile nach der mit AB parallelen Richtung, als gleiche und entgegengesetzte Kräfte, auf; die andern beyden kommen auf die Punkte X und x, und da diese gleiche Entfernung von C haben, so vereinigen sie sich in diesem Punkte zu $2Gd\varphi \operatorname{Sin}\varphi$.

Da dies von jedem Paare entgegengesetzter Elemente gilt, so folgt, daß die Richtung des gesammten Drucks durch DC gehen muß. Man nenne diesen $\Pi$, so hat man $\frac{1}{2}\Pi = \int Gd\varphi \operatorname{Sin}\varphi = C - G \operatorname{Cos}\varphi$ von A bis D genommen.

Es sey nun $\varphi$ für das erste Element bey $A = \alpha$, so wird: $C - G \operatorname{Cos}\alpha = 0$, und weil bey D der Winkel $\varphi = 90°$ ist, $\frac{1}{2}\Pi = C = G \operatorname{Cos}\alpha$, also $\Pi = 2G \operatorname{Cos}\alpha$.

Sind daher die Richtungen der Kräfte, die an A und B ziehen, mit CD parallel, so ist $\alpha = 0$, folglich $\Pi = 2G$ d. i. die beyden Kräfte üben dann einen Druck durch Hülfe des Faden aus, als wären sie unmittelbar auf C angebracht.

## Die Rolle.

§. 173.

Der Gebrauch der einfachen Rolle beruhet auf der Eigenschaft des biegsamen Fadens, daß er die Würkung einer Kraft, die an seinem einen Ende zieht, auch wenn er gekrümmt ist, auf das andere Ende fortpflanzt (§. 171. 1.). Läßt man nemlich über die Rolle ein Seil gehen, so kann man dies von ihr nach Gefallen wieder ablenken, und dadurch einer Last, die an der einen Seite hängt, auf der andern Seite mit eben der Kraft nach jeder willkührlichen Richtung das Gleichgewicht halten.

Um den Druck zu bestimmen, den dabey die Axe der Rolle leidet, ziehe man durch die Punkte A und B, Fig. 39. wo das Seil die Rolle verläßt, die Linie AB, und setze den Winkel BFA, den die Richtungen der Kraft und Last Aa und Bb mit einander machen, $= \vartheta$, so weiß man, daß CF die Sehne AB senkrecht halbirt; also ist hier CFB $= \frac{1}{2}\vartheta = \alpha$ (§. 172.), folglich der gesuchte Druck $\Pi = 2\,G \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\vartheta$, und der Winkel, den seine Richtung FC mit der Verlängerung von Aa oder Bb macht, $= \frac{1}{2}\vartheta$.

Sind die Richtungen der Kraft und Last einander parallel, so ist $\vartheta = 0$, also $\Pi = 2G$, d. i. der Punkt C hat, wie beym Hebel, beyde gemeinschaftlich zu tragen.

## §. 174.

Fig. 39. Wenn an der Axe der Rolle eine Kraft P nach irgend einer Richtung CF zieht (die in die Ebene der Rolle fällt), und von zweyen andern Kräften vermittelst eines Seiles bBAa, das um die Rolle gelegt ist, im Gleichgewichte gehalten werden soll, so müssen

1) die beyden Kräfte einander gleich seyn.

Ferner muß der Druck, den sie auf den Punkt C durch die Spannung des Seiles hervorbringen (§. 173.), der Kraft P gleich und entgegengesetzt seyn; also müssen

2) ihre Richtungen verlängert sich in einem Punkte F schneiden, der in die Richtung von P fällt, oder der Bogen AB, den das Seil bedeckt, muß von CF halbirt werden.

Dies vorausgesetzt, sey jede derselben $= V$, der Winkel AFB, den ihre Richtungen Aa und Bb miteinander machen, $= \vartheta$, so hat man $P = 2V \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\vartheta$, also $V = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\vartheta}$.

Wenn P eine Last ist, die vertikal herab zu sinken strebt, und die beyden Kräfte vertikal aufwärts ziehen, so ist $\vartheta = 0$, also $V = \frac{1}{2}P$; folglich wird alsdann die Last unter die beyden Kräfte vertheilt.

## Schleife (Noeud coulant).

### §. 175.

Die Rolle überträgt die gleiche Spannung des Seiles von der einen Seite zur andern, man mag sie so klein annehmen, als man will: also gilt dies auch noch, wenn man das Seil durch einen Ring oder eine Schleife gehen läßt, weil da der Streif, den das Seil umschließt, als eine kleine Rolle angesehen werden kann. Die Schleife oder der verschiebbare Knoten an einem

Seile ist also von dem unbeweglichen darinn ganz verschieden, daß bey ersterem die Kraft, die an ihm zieht, die Theile des Seiles allemal gleich stark spannt; bey letzterem hingegen eine ungleiche Spannung entstehen kann.

## §. 176.

Fig. 40. **Aufgabe.** An einem Seile, das in A und B befestigt ist, hängt vermittelst eines Ringes oder einer Schleife ein Gewicht P; man sucht 1) den Punkt G, wo der Ring eingreift, und 2) die Spannung des Seiles.

Aufl. 1) Es sey die Länge des Seiles $= l$, die horizontale Distanz AD der Punkte A und B $= a$, die vertikale BD $= b$; man fälle GE senkrecht auf AD, und setze AE $= x$, EG $= u$.

2) Da GE in die Richtung des Gewichtes fällt, so wird dadurch der Winkel AGB, den wir $\vartheta$ nennen wollen, halbirt (§. 173.). Außerdem ist die Spannung T der beyden Theile AG und GB gleich groß, und

$T = \dfrac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta}$ (§. 175.).

3) Man verlängere AG, bis sie die Vertikale BD in I schneidet, so ist AIB $=$ AGE, EGB $=$ GBI, also sind die Winkel bey B und I einander gleich, folglich GI $=$ GB, und AI $= l$.

4) Im Dreyecke ADI ist $\operatorname{Sin} AIB = \dfrac{AD}{AI}$, oder

$\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\vartheta = \frac{a}{l}$, also $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\vartheta = \frac{\sqrt{(l^2 - a^2)}}{l}$, und daher $T = \frac{\frac{1}{2}Pl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

5) Ferner $AG = GO = \frac{AE}{\operatorname{Sin} AGE} = \frac{xl}{a}$; $BO = \frac{BD}{\operatorname{Cos} DBO} = \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$; also $AG + GO + OB = \frac{2xl}{a} + \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}} = l$, $x = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ba}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$ und $u = x \operatorname{Cot}\frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{(l^2 - a^2)} - \frac{1}{2}b$.

## §. 177.

Die Spannung T wächst ins Unendliche, wenn sich a der Grenze l nähert. Man sieht hieraus, daß eine geringe Last das Seil mit erstaunender Kraft zu spannen vermag, wofern es schon an sich durch die Befestigung an den Punkten A und B beynahe in eine gerade Linie angezogen ist.

Daher kann man den hartnäckigsten Widerstand vermittelst eines Seiles oder einer Kette zum Weichen bringen, so bald man nur zwey feste Punkte A und B in der Nähe hat; wenn man nemlich die Kette, nachdem man sie an dem Widerstande befestigt hat, bey A über eine Rolle gehen läßt, und sie dann, straff angezogen, an den Punkt B heftet, so bedarf es nur in den meisten Fällen nur eines geringen Gewichtes, das man der Kette innerhalb A und B anhängt, um die verlangte Wirkung hervorzubringen.

## Rollenzug.

### §. 178.

Eine Verbindung von Rollen vermittelst mehrerer Seile, die dadurch die aufzuhebende Last unter sich theilen, heißt ein **Rollenzug**.

Man kann ihn auf zweyerley Art einrichten: beym Rollenzuge der ersten Art (Fig. 41.) gehen die Seile unterwärts um die Rollen, und sind oberhalb an Punkten A, B u. s. f. befestigt; bey dem der zweyten Art (Fig. 42.) läßt man sie **über** die Rollen gehen, und befestigt sie mit dem einen Ende gemeinschaftlich an der Last, indem das andere Ende allemal die tiefere Rolle trägt.

### §. 179.

Fig. 41. **Aufgabe.** Der Rollenzug der ersten Art enthalte außer der Handrolle C, die bloß dazu dient, das Seil herabzuleiten, n Tragrollen; man fragt, wie viel Kraft nöthig ist, der in G hängenden Last P das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. 1) Da n Rollen vorhanden sind, so giebt es für die Seile n Aufhängepunkte. Die Spannung des Seiles Aa sey $= t^{(1)}$, die von Ab $= t^{(2)}$ u. s. f., endlich die des Seiles, das am n Punkte aufgehängt ist, $= t^{(n)}$.

2) Der Theil o'a' des Seiles Aaa'o' ist mit dem andern Theile Aa gleich stark gespannt (§. 175.), also ist seine Spannung $= t^{(1)}$. Eben so ist die vom fortgesetzten Seile Bb $= t^{(2)}$, und die vom letzten Stücke,

das über die Zugrolle $o$ geht, $= t^{(n)}$. Diese letzte Spannung wird nun durch die Kraft, die wir V nennen wollen, auf der andern Seite in T hervorgebracht, folglich hat man $V = t^{(n)}$.

3) Weil die Punkte A und $o'$ die ganze Last P tragen, so ist $t^{(1)} = \frac{1}{2} P$ (§. 175.), und aus gleichem Grunde $t^{(2)} = \frac{1}{2} t^{(1)}$, $t^{(3)} = \frac{1}{2} t^{(2)}$ u. s. f., also $t^{(2)} = \frac{1}{4} P$, $t^{(3)} = \frac{1}{8} P$, und endlich $t^{(n)} = \frac{1}{2^n} . P$, folglich auch $V = \frac{1}{2^n} . P$.

## §. 180.

Um zu sehen, wie viel Kraft auf die Gewichte der Rollen verwandt werden muß, setze man das Gewicht der untersten $= \pi^{(1)}$, der nächstfolgenden $= \pi^{(2)}$ u. s. f. so bekommmt man:

$t^{(1)} = \frac{1}{2} [P + \pi^{(1)}]$, $t^{(2)} = \frac{1}{2} [t^{(1)} + \pi^{(2)}] = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4} \pi^{(1)} + \frac{1}{2} \pi^{(2)}$, und so zuletzt $V = t^{(n)} = \frac{1}{2^n} . P + \frac{1}{2^n} \pi^{(1)} + \frac{1}{2^{n-1}} \pi^{(2)} \ldots + \frac{1}{2} \pi^{(n)}$.

Sind die Rollen allemal gleich schwer, so wird, wenn man das Gewicht jeder $= \pi$ setzt:

$$V = \frac{1}{2^n} P + \frac{1}{2} \pi [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}]$$

$$= \frac{1}{2^n} P + (1 - \frac{1}{2^n}) \pi.$$

Die Kraft bekommt also von den Gewichten der Rollen, es mögen ihrer noch so viel seyn, doch nie mehr zu tragen, als das Gewicht einer einzigen ausmacht.

Exempel. Es sey $n = 4$, $P = 2400$ ℔, $\pi = 20$ ℔, so ist $\frac{1}{2^n}(P - \pi) = \frac{2380}{16}$ ℔ $= 148\frac{3}{4}$ ℔; dazu $\pi$ addirt, giebt $V = 168\frac{3}{4}$ ℔.

## §. 181.

**Aufgabe.** Das Verhältniß der Kraft zur Last beym Rollenzuge der zweyten Art zu finden, wenn daran n Rollen befindlich sind.

Fig. 42. Aufl. 1) Es sey, wie vorhin die Last $= P$, die Kraft $= V$, die Spannung des Seiles an der untersten Rolle $o = t^{(1)}$, an der zweyten $o' = t^{(2)}$; an der obersten, oder nten Rolle $= t^{(n)}$, so ist $V = t^{(1)}$.

1) Wegen der Spannung des untersten Seiles $t^{(1)}$ trägt der Punkt o das Gewicht $2t^{(1)}$, und da dies die Spannung des nächsten Seiles $t^{(2)}$ hervorbringt, so ist $t^{(2)} = 2\, t^{(1)}$.

3) Eben so trägt der Punkt o′ das Gewicht $2t^{(2)} = 4t^{(1)}$, also ist die Spannung des folgenden Seiles $t^{(3)} = 4t^{(1)}$, und so die des obersten $t^{(n)} = 2^{n-1} . t^{(1)} = 2^{n-1} . V$.

4) Diese Spannkräfte ziehen nun an dem Hebel oba nach paralleler Richtung, also muß die Last P, die ihnen das Gleichgewicht hält, ihnen zusammengenommen gleich seyn. Man hat also

$$t^{(1)} + t^{(2)} + \ldots + t^{(n)} = P,$$

und wenn man die für $t^{(1)}$, $t^{(2)} \ldots$ gefundenen Werthe V, 2V u. s. f. substituirt:

$$V(1+2+4\ldots+2^{n-1})=P,$$

oder $(2^n-1)V=P$, folglich $V=\frac{P}{2^n-1}$.

### Anders.

Wegen der Spannung des obersten Seiles, $t^{(n)} = 2^{n-1}.V$, trägt der Aufhängepunkt A ein Gewicht $= 2t^{(n)} = 2^n.V$. Dies muß so viel betragen, als Kraft und Last zusammengenommen; also ist $2^nV = P+V$, folglich $(2^n-1)V=P$, wie vorhin.

### §. 182.

Sollen hierbey die Gewichte der Rollen in Betracht gezogen werden, so nenne man diese von der untersten an, wie vorhin, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}\ldots\pi^{(n)}$. Alsdann trägt

der Punkt o ein Gewicht $p^{(1)}=2\,t^{(1)}+\pi^{(1)}$

o′ ein Gewicht $p^{(2)}=2\,t^{(2)}+\pi^{(2)}$ u.s.f.

und der Anhängepunkt A ein Gewicht $p^{(n)}=2t^{(n)}+\pi^{(n)}$.

Da nun jedes dieser Gewichte das nächste Seil spannt, so ist $p^{(1)}=t^{(2)}$, $p^{(2)}=t^{(3)}$, also

$$t^{(2)}=2t^{(1)}+\pi^{(1)}$$

$$t^{(3)}=4t^{(1)}+\pi^{(1)}+\pi^{(2)}.\ \text{u. s. f.},$$

und endlich $t^{(n)}=2^{n-1}\,t^{(1)}+2^{n-2}\,\pi^{(1)}+2^{n-3}\,\pi^{(2)}\ldots+\pi^{(n-1)}$.

Daher $p^{(n)}=2^n t^{(1)}+2^{n-1}\,\pi^{(1)}+2^{n-2}\,\pi^{(2)}\ldots+\pi^{(n)}$. Aber $t^{(1)}=V$, und $p^{(n)}=P+V+\pi^{(1)}+\pi^{(2)}\ldots+\pi^{(n)}$, folglich erhält man

$$(2^n - 1) V = P + \pi^{(1)} + \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$$
$$- 2^{n-1} [\pi^{(1)} + \tfrac{1}{2} \pi^{(2)} + \tfrac{1}{4} \pi^{(3)} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \pi^{(n)}]$$

Für Rollen von einerley Gewichte $\pi$ wird:

$$(2^n - 1) V = P + n\pi - (2^n - 1) \pi, \text{ oder}$$
$$V = \frac{P}{2^n - 1} - \pi + \frac{n\pi}{2^n - 1}.$$

Da $\frac{n}{2^n - 1}$ jederzeit $< 1$ ist, so sieht man offenbar, daß hier das Gewicht der Rollen der Kraft nicht nachtheilig, sondern vielmehr vortheilhaft ist. Für ein großes n ist diese Erleichterung beynahe $= \pi$, dem Gewichte einer der Rollen.

Exempel. Es sey, wie im §. 181, $n = 4$, $P = 2400$ ℔, $\pi = 20$ ℔, so wird $\frac{P + n\pi}{2^n - 1} = \frac{2480 \text{ ℔}}{15}$ $= 165\frac{1}{3}$ ℔, davon $\pi$ abgezogen, bleibt $V = 145\frac{1}{3}$ ℔.

Anmerk. Die Rollenzüge beyder Art verstärken also die Würkung der Kraft ungemein; haben aber dabey das Unvollkommene, daß sie viel Raum einnehmen, und nur ein sehr langsames Fortrücken der Last gestatten. Sie sind daher nur in solchen Fällen mit Vortheil anzuwenden, wo sehr große Lasten zu einer geringen Höhe erhoben werden sollen, wie z. B. auf Schiffen: Lasten damit aus dem Raume über Bord zu heben, oder von außen ins Schiff hineinzubringen. Bey zwey oder drey Rollen ist der Rollenzug der ersten Art vorzuziehen, bey mehreren Rollen, der der zweyten Art, weil alsdann das Gewicht der Rollen mehr in Betracht kommt.

# Flaschenzug.

## §. 183.

Wenn mehrere Rollen in ein Gehäuse eingeschlossen sind, so daß ihre Axen nur gemeinschaftlich gehoben werden können, so nennt man eine solche Zusammensetzung eine **Flasche**. Dabey kann entweder jede Rolle ihre besondere Axe haben, in welchem Falle dann die Axen a, b, c (Fig. 43.) längs dem Gehäuse vertheilt sind; oder die Rollen können (Fig. 44.) an einer gemeinschaftlichen Axe neben einander liegen. Letztere Art von Flaschen ist wegen des kleinern Raumes, den sie einnimmt, gewöhnlicher.

Werden zwey solcher Flaschen durch ein Seil verbunden, das sich um beyde Rollen schlägt, und zuletzt der Kraft zugeführt wird, so bilden diese einen **Flaschenzug**. Die obere Flasche wird dann an einen festen Punkt A geheftet, und an die untere die zu hebende Last gehängt. Beyde enthalten wegen des gemeinschaftlichen Seiles gleich viele Rollen.

## §. 184.

**Aufgabe.** Die Kraft zu bestimmen, die an einem Flaschenzuge, der in jeder Flasche n Rollen enthält, mit einer gegebenen Last P im Gleichgewichte ist.

Fig. 43. Aufl. 1) Es sey die gesuchte Kraft = V, so wird das Seil allenthalben mit dieser Kraft gespannt, es mag um so viele Rollen gehen, als man will.

2) Daher leidet jede der Axen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ u. s. w. in

der untern Flasche einen Druck $= 2V$ vertikal aufwärts, und da ihrer $n$ sind, so wird die ganze untere Flasche von der Kraft $2nV$ aufwärts gezogen.

3) Mit dieser Kraft muß nun die Last $P$ im Gleichgewichte seyn, also hat man $P = 2nV$, oder $V = \frac{P}{2n}$.

Anders.

Wegen der gleichförmigen Spannung des Seiles leidet jede der Axen $a$, $b$, $c$ u. s. w. in der obern Flasche einen vertikal herabgehenden Druck $= 2V$, und der Haken bey $O$, an dem das Ende des Seiles befestigt ist, nach eben der Richtung den einfachen Druck $V$; also wird die ganze obere Flasche mit der Kraft $2nV + V = (2n + 1) V$ niedergezogen, folglich auch der Punkt $A$, an dem sie aufgehängt ist.

Was dieser nun zu tragen hat, besteht überhaupt in der Last $P$ und der Kraft $V$, also hat man $P + V = (2n + 1) V$ oder: $P = 2nV$, wie vorhin.

§. 185.

Fig. 44. Eben so verhält sich die Sache bey einem Flaschenzuge, wo die Rollen in den Flaschen eine gemeinschaftliche Axe haben. Das Seil wird allenthalben mit der Kraft $V$ gespannt, die in $F$ an demselben zieht, und der Last $P$ das Gleichgewicht hält; also leidet der Mittelpunkt einer jeden in der untern Flasche befindlichen Rolle den Druck $2V$ nach vertikal aufwärts gehender Richtung. Daher wird die Axe der untern Flasche in $n$ Punkten von gleichen Kräften heraufgezogen, denen

nen in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte die Kraft $2nV$ äquipollent ist. Diese Kraft wirkt nun unmittelbar der Last entgegen, folglich muß $P = 2nV$ seyn.

## §. 186.

Das Gewicht der Flaschen läßt sich hierbey folgendermaßen in Rechnung bringen:

Durch die gleichförmige Spannung des Seiles entsteht, wie wir gesehen haben, im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der untern Rollen eine Kraft $= 2nV$ vertikal aufwärts; durch ihr Gewicht aber in eben dem Punkte eine entgegengesetzte Kraft, die folglich mit der Last $P$ in Verbindung tritt. Es kommt daher bloß das Gewicht der untern Flasche in Betracht; setzt man dies $= \pi$, so wird $2nV = P + \pi$, also $V = \frac{P + \pi}{2n}$.

## §. 187.

Der Flaschenzug wird gewöhnlich gebraucht, große Lasten damit nach vertikaler Richtung auf eine gewisse Höhe zu bringen; man kann ihn aber auch da anwenden, wo nach jeder andern Richtung eine Last fortzuziehen, oder ein Widerstand zu überwinden ist. So z. B. bedienen sich die Schiffsbauer desselben, um ein Schiff am schrägen Ufer in die Höhe zu schaffen, und setzen ihn, zur Verstärkung der Kraft, mit einer Winde in Verbindung, wodurch die sogenannte Schiffswinde entsteht, die Herr Büsch in seiner Mechanik umständlich beschrieben hat.

## §. 188.

Fig. 45. Ein Beyspiel, wo der Flaschenzug selbst nach horizontaler Richtung mit Nutzen angebracht werden kann, ist folgendes:

Es sey der Balken DG, der eine gesenkte Lage bekommen hat, wieder in vertikale Stellung zu bringen. Man hänge oben in G durch Hülfe starker eiserner Ringe, die man daselbst um den Balken legt, einen Flaschenzug ein, und um diesen an einen andern Punkt A befestigen zu können, der nicht ausweicht, stütze man einen Balken CE in schräger Richtung gegen eine feste Unterlage C, lasse über diesen von A aus eine Kette AEB gehen, und befestige dieselbe, nachdem sie straff gezogen ist, irgendwo am Boden im B. Man kann alsdann vermittelst eines Haspels das Seil des Flaschenzuges nach vertikaler Richtung oT anziehen, und so durch eine mäßige Kraft eine sehr gewaltsame Wirkung auf den Punkt G hervorbringen.

Anmerk. Die sinnreiche Einrichtung, wodurch man den festen Punkt A erhält, giebt Herr Büsch in seiner Mechanik an. Es wird nicht unnütz seyn, darüber noch einige Bemerkungen beyzufügen.

1. Da die beyden Theile der Kette AE und EB gleich stark gespannt sind, so muß die Richtung des Balken CE den Winkel AEB halbiren, damit der mittlere Druck, den die Kette auf ihn ausübt, längs EC geschehe. Ist also die Länge von CE gegeben, so bestimmt dies den Punkt B, wo die Kette befestigt werden muß. Es sey nemlich CE $=1$, die vertikale Höhe

des Punktes G $=$ a, so ist $\text{Sin AEC} = \frac{a}{l} = \text{Sin ECB}$; also, wenn CB $=$ x gesetzt wird: $l : x = \text{Sin } 2\text{AEC} : \text{Sin AEC} = 2 \text{ Cos AEC} : 1$, folglich $x = \frac{l}{2 \text{ Cos AEC}} = \frac{l^2}{2\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

2. Wenn man die Kette an derselben Unterlage DCB befestigt, gegen die der Balken EC gestützt ist, so wirken auf die Punkte C und B derselben zwey entgegengesetzte Kräfte. Man setze die Spannung der Kette $= T$, den Druck nach EC $= \Pi$, den Winkel AEC $= \gamma$, so ist am einarmigen Hebel DCB das Moment in C $=$ DC . $\Pi \text{ Sin } \gamma$, und in B $=$ DB . T Sin CBE $=$ DB . T Sin $2\gamma$. Nun hat man $\Pi \text{ Sin } \gamma = T \text{ Sin } 2\gamma$ (§. 55.); daher ist letzteres Moment um CB . T Sin $2\gamma$ größer als ersteres, folglich muß die Unterlage entweder für sich das Gewicht $2T \text{ Sin } 2\gamma . \frac{CB}{DB}$ haben, oder an dem Boden befestigt werden, wofern sie nicht von der Kette in die Höhe gezogen werden soll.

## Krümmung eines Fadens durch sein eigenes Gewicht.

### §. 189.

Fig. 46. **Aufgabe.** Ein biegsames Seil von gleichförmiger Dicke und gegebener Länge wird an den festen Punkten A und B, die in einerley Horizontale liegen,

aufgehängt; man fragt, was für eine Gestalt dasselbe, vermöge des bloßen Gewichtes seiner Theile, annehmen werde, und welche Spannung dadurch in jedem seiner Punkte Y entstehe.

Aufl. 1) Es sey AYDB die gesuchte Curve; man fälle aus einem Punkte Y derselben ein Perpendikel YX auf AB, und setze $AX = x'$, $XY = y'$, den Bogen $AY = s$, und den Winkel tYX, den die Tangente Yt mit der Ordinate XY macht, $= \phi$. Außerdem sey die halbe Länge des Seiles $= a$, die Distanz $AB = 2f$, und das Gewicht des Seiles für die Einheit der Länge $= \varkappa$.

2) Alsdann ist das Gewicht des Elementes Yy $= \varkappa ds$, das nach XY wirkt; man zerlege es in eine Kraft nach der Tangente Yy und in eine nach der Normale Yn, so ist erstere $= \varkappa ds \cos \phi$, letztere $= \varkappa ds \sin \phi$.

3) Vergleicht man diese Werthe mit den in §. 169. allgemein angenommenen, so wird $p = -\varkappa \cos \phi$, $q = \varkappa \sin \phi$, und die Gleichungen daselbst bekommen hier folgende Gestalt:

$$-\varkappa ds \cos \phi = dT, \quad \varkappa ds \sin \phi = T d\phi.$$

4) Nimmt man ds als unveränderlich an, so ist $ds^2 = 0$; man erhält also, wenn man die zweyte Gleichung differenziirt:

$$\varkappa ds \cos \phi d\phi = T d^2\phi + dT d\phi;$$ und darin die Werthe für T und dT aus 3 substituirt, giebt:

$$\varkappa ds \cos \phi d\phi = \frac{\varkappa ds \sin \phi d^2\phi}{d\phi} - \varkappa ds \cos \phi d\phi$$

oder $2\,\text{Cos}\,\varphi d\varphi^2 - \text{Sin}\,\varphi d^2\varphi = 0$.

wovon das Integral $\dfrac{d\varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2} = Bds$ ist.

5) Hiervon nochmal das Integral genommen, giebt:

$$-\text{Cot}\,\varphi = A + Bs$$

6) Da alles bey B sich so verhalten muß, wie bey A, so müssen an beyden Punkten die Elemente gegen die Vertikale einerley Lage haben; setzt man also für $s = 0$, $\varphi = \eta$, so ist für $s = 2a$, $\varphi = 180° - \eta$; daher $A = -\text{Cot}\,\eta$, $A + 2Ba = +\text{Cot}\,\eta$, also $Ba = \text{Cot}\,\eta$, und folglich: $\text{Cot}\,\varphi = \text{Cot}\,\eta\left(1 - \dfrac{s}{a}\right)$.

$B = \dfrac{\text{Cot}\,\eta}{a}$

7) Im Dreyecke Yyo ist $Yo = Yy\,\text{Sin}\,\varphi$, $yo = Yy\,\text{Cos}\,\varphi$, also $\dfrac{dy'}{dx'} = \dfrac{yo}{Yo} = \text{Cot}\,\varphi$. Daher hat man auch $\dfrac{dy'}{dx'} = \text{Cot}\,\eta\left(1 - \dfrac{s}{a}\right)$.

8) Für $s = a$ ist $\dfrac{dy'}{dx'} = 0$, also daselbst $y'$ ein Maximum; ferner $\text{Cot}\,\varphi = 0$, oder $\varphi = 90°$. Die Mitte D des Seiles senkt sich folglich am tiefsten, und das Element bey D hat eine horizontale Lage.

9) Da man die nemliche Gleichung erhalten muß, wenn man B zum Anfangspunkte der Abscissen annimmt, so folgt, daß die Abscisse, welche dem Punkte D entspricht, dieselbe sey, sie mag von A oder B aus genommen werden; also liegt der Punkt C, der zu D

gehört, in der Mitte zwischen A und B, oder die durch D gezogene Vertikale halbirt AB.

10) Man nehme nun DC zur Abscissenlinie an, und setze $DI = x$, $IY = y$, $DC = b$, so hat man $f - x' = y$, $b - y' = x$, also $dx' = - dy$, $dy' = - dx$. Versteht man außerdem unter s jetzt die Länge des Bogens DY, so muß man statt des vorhin gebrauchten s, $a - s$ setzen; dadurch wird:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{Cot} \eta \left[1 - \left(\frac{a - s}{a}\right)\right] = \frac{s \operatorname{Cot} \eta}{a} \text{ oder}$$

$$a dx = s dy \,.\, \operatorname{Cot} \eta.$$

11) Also $a^2 dx^2 = s^2 dy^2 \,.\, \operatorname{Cot} \eta^2$,
$(a^2 + s^2 \operatorname{Cot} \eta^2)\, dx^2 = s^2 (dx^2 + dy^2) \operatorname{Cot} \eta^2 = s^2 ds^2 \,.\, \operatorname{Cot} \eta^2$, folglich

$$dx = \frac{s ds \,.\, \operatorname{Cot} \eta}{\sqrt{(a^2 + s^2 \operatorname{Cot} \eta^2)}} = \frac{s ds}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tang} \eta^2 + s^2)}}$$

welches integrirt: $x = C + \sqrt{(a^2 \operatorname{tang} \eta^2 + s^2)}$ giebt.

12) Für $s = 0$ ist auch $x = 0$, also $C = - a \operatorname{tang} \eta$; daher wird

$$x = \sqrt{(a^2 \operatorname{tang} \eta^2 + s^2)} - a \operatorname{tang} \eta, \text{ und}$$

daraus gegenseitig $s = \sqrt{(x^2 + 2ax \operatorname{tang} \eta)}$.

13) Um T zu bestimmen, setze man in der Gleichung $\varkappa ds \operatorname{Sin} \varphi = T d\varphi$ (3) statt ds seinen Werth $\frac{d\varphi}{B \operatorname{Sin} \varphi^2}$ (4) $= \frac{a \operatorname{tang} \eta d\varphi}{\operatorname{Sin} \varphi^2}$ (6) so erhält man $T = \frac{\varkappa a \operatorname{tang} \eta}{\operatorname{Sin} \varphi}$. Die Spannung ist also nach der Lage des Elements verschieden, und verhält sich verkehrt wie der Sinus des Neigungswinkels gegen die Vertikale.

Anmerk. Der Name Kettenlinie, den man dieser Curve allgemein beylegt, rührt unstreitig daher, daß man anfangs, der deutlichern Vorstellung wegen, die einzelnen Glieder einer Kette betrachtete, und hiervon zu der stetigen Krümmung eines biegsamen Fadens überging. Vor Galliläus findet man keine Spur einer Bekanntschaft mit dieser Linie; er selbst verwechselt sie noch mit der Parabel. *a*) Erst 1690 wurde die Frage über ihre Gestalt von **Jacob Bernoulli** *b*) von neuem aufgeworfen, und durch **Huyghens Leibnitz** und **Joh. Bernoulli** c) beantwortet. Durch **Eulers** allgemeinere Theorie der Spannung *d*) ist zur Auflösung dieses Problems ein sehr natürlicher und leichter Weg eröfnet, der andere Hülfsmittel, z. B. die Voraussetzung, daß jedes Element des Fadens so tief als möglich herabsinkt, *e*) unnöthig macht.

## §. 190.

1. Setzt man $a \tan \eta = g$, so wird $s^2 = x^2 + 2gx$; also für $s = a$, $a^2 = b^2 + 2gb$ und $a^2 + g^2 = (b+g)^2$.

2. Ferner hat man $gdx = sdy$ (10), und darin für $dx$ seinen Werth $\frac{sds}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$ (11) gesetzt, giebt $dy = \frac{gds}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$, wovon das Integral $y = g \log. \text{nat.} \left[\frac{a+\sqrt{(g^2+s^2)}}{g}\right]$ ist.

3. Für $s = a$ erhält man aus diesem: $f = g \log$

*a*) Mechanica, Dialog. II. pag. 131.

*b*) Acta eruditorum 1690 pap. 215.

c) Ebendaselbst 1691 pag 273.

*d*) Novi Comment. Petropol. Tom. XV. und Tom. XX.

*e*) Frisi Opera Math. Vol. I. Lib. I. pag. 126.

$[\frac{a + \sqrt{(a^2 + g^2)}}{g}] = g \log \frac{[a + b + g]}{g}$, und

wenn man darin für g seinen Werth $\frac{a^2 - b^2}{2b}$ (1) setzt:

$$f = \frac{a^2 - b^2}{2b} . \log\left(\frac{a+b}{a-b}\right).$$

4. Also $\frac{bf}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = \frac{b}{a} + \frac{b^3}{3a^3} + \frac{b^5}{5a^5} +$ u. s. w.

$$f = a - \frac{2}{1 \cdot 3} \frac{b^2}{a} - \frac{2}{3 \cdot 5} . \frac{b^4}{a^3} - \frac{2}{5 \cdot 7} \frac{b^6}{a^5} \text{ und}$$

$$\frac{a-f}{2a} = \frac{1}{1 \cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 5}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{b}{a}\right)^6 +$$ u. s. w.

5) Um gegenseitig b durch a und f auszudrücken, muß diese Reihe umgekehrt werden, welches so geschieht:

Man bezeichne $\frac{a - f}{2a}$ durch d, und setze:

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \alpha d + \beta d^2 + \gamma d^3 + \delta d^4 +$ u. s. w., so wird

$$\left(\frac{b}{a}\right)^4 = \alpha^2 d^2 + 2\alpha\beta d^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2) d^4 + \ldots$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^6 = \alpha^3 d^3 + 3\alpha^2\beta d^4 + \ldots$$

Diese Werthe für $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $\left(\frac{b}{a}\right)^4$ u. s. f. in erstere Reihe (4) substituirt, geben:

$$o = \left(\tfrac{1}{3}\alpha - 1\right)d + \left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}\beta \\ +\tfrac{1}{15}\alpha^2\end{array}\right\} d^2 + \left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}\gamma \\ +\tfrac{2}{15}\alpha\beta \\ +\tfrac{1}{35}\alpha^3\end{array}\right\} d^3 + \left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}\delta \\ +\tfrac{2}{15}\alpha\gamma \\ +\tfrac{1}{15}\beta^2 \\ +\tfrac{3}{35}\alpha^2\beta \\ +\tfrac{1}{63}\alpha^4\end{array}\right\} \begin{array}{l} d^4 + \\ \text{u. s. f.}\end{array}$$

also hat man $\frac{1}{3}\alpha - 1 = o$, $\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{15}\alpha^2 = o$, $\frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\alpha\beta + \frac{1}{35}\alpha^3 = o$ u. s. w., folglich $\alpha = 3$, $\beta = -\frac{9}{5}$, $\gamma = -\frac{27}{175}$, $\delta = -\frac{27}{175}$; daher wird:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3d - \frac{9}{5}d^2 - \frac{27}{175}d^3 - \frac{27}{175}d^4 - \text{u. s. w.}$$

Exempel. Es sey die Länge des Seiles doppelt so groß, als die Entfernung der Punkte A und B, also $f = \frac{1}{2}a$, so hat man $d = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = o, 6345$, $b = o, 7965\,a = 1, 593\,f$, für die Tiefe, zu der die Mitte D unter die Horizontale AB sinkt; ferner $g = \frac{a^2 - b^2}{2b} = o, 2294\,a$, $\tang \eta = o, 2294$, $\eta = 12°55'$.

6. Wenn man die Gleichung $gdx = sdy$ (2) differenzirt, und dabey dx als beständig annimmt, so erhält man:

$$o = sd^2y + dyds, \text{ oder } d^2y = -\frac{dyds}{s}.$$

Man nenne r den Krümmungshalbmesser, so ist bekanntlich $r = -\frac{ds^3}{d^2y \,.\, dx}$; darin der Werth für $d^2y$ gesetzt, giebt $r = \frac{s^2ds^2}{sdydx} = \frac{s^2ds^2}{gdx^2} = \frac{g^2+s^2}{g}$ (2)

## §. 191.

1. Wir hatten vorhin $T = \frac{\varkappa a \tan \eta}{\sin \varphi}$ (§. 198. 13.) $= \frac{g\varkappa}{\sin \varphi}$; setzt man darin für $\sin \varphi$ seinen Werth (ebendas. 7.) $\frac{Yo}{Yy} = \frac{dy}{ds} = \frac{g}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$, so erhält man $T = \varkappa \sqrt{(g^2+s^2)} = \varkappa \sqrt{gr}$. Die Spannung verhält sich also wie die Quadratwurzel aus dem Krümmungshalbmesser.

2. Im Punkte D, oder für $s = 0$ ist sie $= \varkappa g$, also daselbst am kleinsten. Ihren größten Werth erreicht sie für $s = a$, oder in den Punkten A und B.

3. Für diese Punkte bekommt man auch, wenn man $\varphi = \eta$ setzt: $T = \frac{\varkappa a}{\cos \eta}$; zerlegt man diese Kraft in eine vertikale und in eine horizontale, so wird erstere $= T \cos \eta = \varkappa a$, letztere $= T \sin \eta = \varkappa a \tan \eta = \varkappa g$. Die Punkte A und B tragen also jeder das halbe Gewicht des Fadens, und leiden außerdem einen horizontalen Druck, der der Spannung des unteren horizontalen Elementes in D gleich ist (2).

4. Es ist klar, daß das Gleichgewicht des Fadens nicht aufgehoben wird, wenn man ihn in einem seiner Punkte y befestigt: denn alsdann setzt dieser Punkt dem tieferen Theile yD weder einen größern noch geringeren Widerstand entgegen, als vorhin, da er durch die Spannung des Elements Yz zurückgehalten wurde. Wenn daher die festen Punkte A und B nicht in einer

Horizontale liegen, sondern A irgend wo in y fällt, so bildet sich nur ein Theil yDB der Kettenlinie, und man findet daraus leicht, welchen Druck der Faden auf den Punkt A ausübt.

---

## Sechstes Kapitel.

# Vom Räderwerke.

---

### §. 192.

Fig. 47. **Aufgabe.** Zwey Rollen von verschiedenen Halbmessern AO, BO sind in einer Ebene so mit einander verbunden, daß sie sich nicht anders als gemeinschaftlich um den Mittelpunkt O drehen können. An beyden sind in A und B Seile befestigt, vermittelst welcher zwey Kräfte P und M nach GE und IF ziehen, und die Rollen nach verschiedenen Seiten zu drehen streben; man sucht das Verhältniß dieser Kräfte, wenn sie einander das Gleichgewicht halten sollen.

Aufl. 1) Das Seil AGE leidet allenthalben bis an den Endpunkt A einerley Spannung $=$ P (§. 173.), und zieht also diesen Punkt mit der Kraft P nach einer auf AO senkrechten Richtung.

2) Eben so wird durch die Spannug des andern Seiles BIF ein Zug $=$ M im Punkte B nach einer auf OB senkrechten Richtung hervorgebracht.

3) Die beyden Punkte A und B haben wegen

der Verbindung der Rollen eine unveränderliche Winkeldistanz AOB; also wirken die Kräfte P und M an einem Winkelhebel, und weil ihre Richtungen auf die Schenkel desselben senkrecht sind, so hat man:

$$P : M = BO : AO.$$

Die beyden Kräfte müssen sich also verkehrt verhalten, wie die Halbmesser der Rollen.

## §. 193.

Dieselbe Bedingung des Gleichgewichtes findet auch noch statt, wenn die beyden Rollen nicht in einer Ebene liegen, sondern bloß eine gemeinschaftliche Axe haben, auf der sie senkrecht befestigt sind; alsdann sind nemlich AO und BO zwey auf dieser Axe senkrechte Hebelarme, an denen die Kräfte P und M eben so wirken, wie am Winkelhebel (§. 67.).

Es kann also auch der kleinere Kreis der Querschnitt einer cylindrischen Welle seyn, die sich vermittelst zweyer Zapfen in Lagern dreht, und statt daß man die Kraft an der größern Scheibe durch ein Seil ziehen läßt, kann sie unmittelbar an dem Umfange derselben nach der Tangente oder senkrecht auf den Halbmesser angebracht werden. Diese Einrichtung giebt eine Maschine, die man das **Rad an der Welle** nennt.

## §. 194.

Es sey der Halbmesser des Rades $= R$, der Welle $= r$; an dem Seile, das über die Welle geht, hänge eine Last P, und dieser halte eine Kraft M das Gleichgewicht, die am Umfange des Rades nach der Tangente wirkt, so hat man (§. 193.)

$$M : P = r : R, \text{ also } M = \frac{Pr}{R}.$$

Es kann nun R nach Gefallen viel größer als r genommen werden, also läßt sich vermittelst des Rades eine gegebene Last mit weit geringerer Kraft im Gleichgewichte halten, und wenn man die Kraft etwas verstärkt, in die Höhe heben.

## §. 195.

Je nachdem der Gebrauch ist, den man von dieser Maschine macht, bekommt sie noch besondere Einrichtungen, und nach diesen verschiedene Namen. Bey horizontal liegender Welle nennt man sie den **Haspel**, bey vertikal gestellter Welle die **Winde** oder den **Göpel**.

Vom Haspel giebt es folgende Arten:

1) **Den Hornhaspel.** Er enthält an der Welle statt des Rades eine Kurbel oder gebogenen Hebelarm, an dessen Ende ein Griff eingezapft ist, der mit der Welle parallel läuft.

2) **Den Kreuzhaspel:** bey diesem sind unter rechten Winkeln zwey Hebelarme durch die Welle gesteckt, so daß die zur Umdrehung der Welle nöthige Kraft unter vier Arbeiter vertheilt werden kann.

3) **Den Radhaspel:** hier liegen die Punkte, woran die Kraft angebracht wird, in dem Umfange eines wirklichen Rades.

Bey der Winde ist wegen der vertikalen Lage der Welle die Richtung der Kraft horizontal. Man läßt hier, wie beym Kreuzhaspel, zwey lange Hebelarme an der Welle sich durchkreuzen, an deren Enden entweder Menschen schieben, oder Thiere vorgespannt werden, die sie fortziehen.

## §. 196.

Am Rade kann man die Kraft auf mancherley Art wirken lassen; sie muß aber begreiflich auf den Umfang desselben angebracht werden, weil sie da das größte Moment hat. Das **Armrad** wird mit den Händen in Bewegung gesetzt, und enthält zu diesem Zwecke am Umfange hervorragende Zapfen, die bequem mit der Hand gefaßt werden können. Liegen diese oben an der **Stirn** des Rades, also in seiner Fläche, so heißen sie **Hörner**, und das Rad heißt dann ein **Stirnrad**; sind sie an der Seite, senkrecht auf die Fläche des Rades, eingesteckt, so nennt man sie **Spillen**, und das Rad ein **Spillrad**.

Damit der Arbeiter dabey beyde Hände bequem gebrauchen könne, müssen beym erstern die Hörner auf der Fläche der Stirn in zweyen parallelen Reihen fortgehen, bey letzterm die Spillen abwechselnd auf verschiedenen Seiten des Rades liegen. Oder man kann auch die Umfänge (**Kränze**) zweyer parallelen Räder mit Spillen verbinden, die dann eine solche Breite haben müssen, daß der Arbeiter die Arme einander nicht zu nähern braucht.

Wenn bey einem größern Rade dieser Art statt der Spillen Bretter zwischen die Kränze gelegt sind, so können Menschen oder auch Thiere mit den Füßen durch ihr Gewicht darauf wirken; ein solches Rad nennt man ein **Lauf- oder Tretrad.**

## §. 197.

Fig. 48. **Aufg.** Ein Rad vom gegebenen Halbmesser $= r$ ist um den festen Mittelpunkt C beweglich; in einem Punkte m seines innern Umfanges, der von B, dem tiefsten Punkte des Rades, um den Bogen $Bm = \eta$ absteht, liegt eine Last P; man sucht das Moment, welches sie hat, das Rad zu drehen.

Aufl. 1) Der Punkt m kann dem Drucke nicht anders, als nach der Tangente mt ausweichen; man zerlege also das Gewicht P, das nach der Vertikale mv zu sinken strebt, in eine Kraft nach mt, und in eine nach der darauf senkrechten Richtung mr.

2) Da mt auf dem Halbmesser Cm senkrecht ist, so fällt mr in die Verlängerung desselben; folglich ist $vmr = BCm = \eta$, also die Kraft nach $mt = P \operatorname{Sin} \eta$, und die nach $mr = P \operatorname{Cos} \eta$.

3) Erstere ziehe am Hebelarme $Cm = r$ senkrecht, und hat also das Moment $rP \operatorname{Sin} \eta$, diesen zu drehen; letztere drückt das Rad nach der Richtung Cm an seine feste Axe, und wird dadurch aufgehoben.

### Anders.

Man ziehe die Horizontale CD, und fälle darauf aus m das Perpendikel mp, so ist dies die verlängerte

Richtung des Gewichtes P, und man kann also dasselbe auf den Punkt p verlegen. Daher ist sein Moment, das Rad zu drehen, $= P . Cp = P . Cm . Sin\ Cmp = Pr . Sin\ \eta$.

## Das Tretrad.

§. 198.

Beym Tretrade drückt der Arbeiter ein Trittbret nach dem andern mit dem Fuße nieder, indem er sein ganzes Gewicht darauf ruhen läßt; dabey sinkt das Brett jedesmal bis zu einer gewissen Tiefe herab, ehe er ein anderes betritt, so daß sein Moment während der Zeit eines Fußtrittes nicht ganz gleich ist. Wenn aber n die Stelle ist, wo er den Fuß zuerst auf das Brett setzt, m die, wo er dasselbe verläßt, so kann man ohne merklichen Fehler die Mitte o zwischen beyden Punkten für seinen mittlern Standpunkt annehmen, und darnach sein mittlers Moment in Anschlag bringen.

§. 199.

Es sey das Gewicht des Menschen $= P$, der Halbmesser des Rades $= r$, so wird sein mittleres Moment $= Pr\ Sin\ BCo$ (§. 197.), das also desto größer ist, je weiter der Punkt o von B entfernt liegt. Da aber die Weite des Schrittes mn als unveränderlich angesehen werden kann, so wächst mit dem Bogen Bo zugleich auch die vertikale Höhe nf, zu der der Mensch sein Gewicht bey jedem Fußtritte heben muß, und der Vortheil, der aus der Zunahme des Momentes entspringt.

springt, wenn man den Punkt o weiter nach D rücken läßt, wird dadurch wieder aufgehoben, daß alsdann der Schritt mn eine desto steilere Lage bekommt, und daß sich folglich die Kraft des Menschen in desto kürzerer Zeit erschöpfen muß. Es kann also die größte Wirkung nur erreicht werden, wenn man den Punkt o in einer solchen Entfernung von B annimmt, daß eine Anhöhe unter dem Neigungswinkel nmf sich doch noch mit Bequemlichkeit ersteigen läßt. Man setze diesen Winkel $= I$, und ziehe an m die Tangente mu, so hat man:

$$\mathrm{Cmw} + \mathrm{Cmu} + \mathrm{umf} = 180^\circ.$$

Nun ist $\mathrm{Cmw} = 90^\circ - \mathrm{mCB}$, und $\mathrm{Cmu} = 90^\circ$. Dies beydes substituirt, giebt

$$\mathrm{umf} - \mathrm{mCB} = 0, \text{ oder}$$
$$\mathrm{mCB} = \mathrm{umf}; \text{ dazu}$$
$$\underline{\mathrm{mCo} = \mathrm{umn}} \text{ addirt, wird}$$
$$\mathrm{oCB} = \mathrm{nmf} = I.$$

Der Erfahrung zu Folge ist $I = 30^\circ$, und das Gewicht des Menschen P, im Durchschnitte, $= 140$ ℔, also sein Moment $= \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr} = r \times 70$ ℔.

## §. 200.

Es verhält sich Alles noch wie vorhin, wenn das Rad in dem obern Quadranten Am′D von außen getreten wird. Ruhet nemlich das Gewicht P auf einem Tritte des Rades in m′, und ist $\mathrm{Am'} = \mathrm{Bm}$, so ist dessen Umdrehungsmoment ebenfalls $= \mathrm{P} \cdot \mathrm{Cp} = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Sin}\,\eta$, wie im §. 197.

Ferner haben die Tangenten an m und m′ gegen die Horizontale einerley Neigung; daher liegt auch hier die vortheilhafteste Stelle für den Arbeiter um 30° vom obersten Punkte des Rades A entfernt. Weil dieser indeß, der Sicherheit wegen, sich doch an einer Stange halten muß, so kann man seinen mittlern Standpunkt etwas weiter von A, etwa in einer Distanz von 45°, annehmen; aber ihn mit **Elvius** in die Gegend von D zu setzen, würde für längere Dauer, worauf hier doch nothwendig gesehen werden muß, gewiß nicht rathsam seyn. Seine Beobachtungen hierüber *), entscheiden in der Sache nichts, da sie sich insgesammt nur auf einen Zeitraum von höchstens vier Minuten beschränken; auch erinnert er selbst, daß durch die Uhr, die er dabey gebrauchte, die Arbeiter zu einer übermäßigen Anstrengung ihrer Kräfte angetrieben wurden.

## §. 201.

Wenn zur Umtreibung eines solchen Rades Thiere gebraucht werden, so betreten diese allemal zwey Stufen m und n zu gleicher Zeit, und die Mitte o zwischen beyden giebt wieder hinlänglich genau ihren mittlern Standort: denn die Vertikale aus ihrem Schwerpunkte trift in die Mitte der Sehne mn ein, und halbirt also auch sehr nahe den dazu gehörigen Bogen *).

*) Schwedische Abhandl. Band VI. S. 197.

**) Nach Hrn. **Langsdorf** (Maschinenlehre 1. Th. S. 144.) fällt der Schwerpunkt des Thieres in den Halbmesser Co, der den Bogen mn halbirt, also sein mittlerer Standort nicht in o, sondern näher nach B zu. Ich würde Hrn. **Langsdorf** beystimmen, wenn das Thier die Beine gegen den schrägen

Es ist ein allgemein bekannter Erfahrungssatz, daß Thiere weit weniger zum Steigen geschickt sind, als Menschen, und daß sie, ohne Lasten zu tragen oder zu ziehen, doch schon merklich angegriffen werden, wenn die Schräge des Bodens über 20° beträgt. Man setzt daher für sie gewöhnlich den Winkel I (§. 199.) $= 18°$, wodurch ihr Moment $=$ Pr Sin $18° =$ 0,30902 . Pr wird.

## Die Tretscheibe.

### §. 202.

Fig. 49. Eine Scheibe, die man an einer schrägen Axe CD senkrecht befestigt, bekommt dadurch gegen den Horizont eine geneigte Lage. Legt man also ein Gewicht darauf, so hat dies ein Bestreben, längs derselben herabzusinken (§. 118.), oder sie um ihre Axe zu drehen, wofern das Herabgleiten auf irgend eine Art, z. B. durch Friction, verhindert wird. Man kann sie daher auch durch Menschen oder Thiere, die man darauf treten läßt, in Umlauf bringen, worin das Wesentliche der sogenannten **Tretscheibe** besteht.

### §. 203.

Es sey DCd die Abweichung der Axe CD von der Vertikale Cd, so ist die Ebene DCd zugleich die Neigungsebene der Scheibe, und, wenn sie dieselbe in ab schneidet, BCb ihr Neigungswinkel gegen die Horizon-

Boden senkrecht setzte; es stellt sie aber, wie mich dünkt, auf denselben vertikal.

tale AB, folglich, weil DCb = 90° ist, DCd = BCb; dieser Winkel soll I heißen.

Ferner sey M der mittlere Standpunkt des Menschen oder Thieres, P sein Gewicht. Man zerlege es in eine Kraft = P Cos I, senkrecht auf die Scheibe, und in eine = P Sin I nach Mm, mit ab parallel. Erstere ist der Axe parallel, und wird deshalb aufgehoben; letztere zerlege man noch in eine längs dem Halbmesser MC, und in eine nach Mn, senkrecht auf denselben. Setzt man den Winkel MCa = $\vartheta$, so ist jene = P Sin I Cos $\vartheta$, wovon die Axe in C gedrückt wird; diese = P Sin I Sin $\vartheta$, welche ganz auf die Umdrehung der Scheibe verwandt wird, und das Moment CM . P Sin I Sin $\vartheta$ hat.

Man nenne f den senkrechten Abstand des Punktes M von ab, so wird f = CM Sin $\vartheta$, folglich das Umdrehungsmoment = Pf Sin I; das also, wie man sieht, mit dem fürs Tretrad gefundenen Momente übereinkommt.

## Zusammengesetzte Winden.

### §. 204.

Wenn mit dem Haspel oder der Winde andere einfache Maschinen, als Rollen, Flaschenzüge, Räder u. s. w. in Verbindung gebracht werden, so entstehen dadurch mancherley brauchbare Hebzeuge, die man überhaupt **zusammengesetzte Winden**, oder auch **Winden mit vorgelegtem Zeuge** (caprae; holl. bokken; franz. chèvres) nennt.

Hieher gehören auch die sogenannten **Krahne**, bey denen entweder das ganze Gestell, oder bloß der Arm, an den die Last angehängt ist, um eine Axe gedrehet werden kann. Diese Einrichtung dient dazu, die Last nicht allein vertikal in die Höhe zu heben, sondern auch seitwärts an jeden beliebigen Ort, z. B. aus dem Schiffe ans Ufer zu bringen. Man findet Abbildungen davon im Leupold Theat. Mach., Muschenbroek Introd. ad phil. nat. Tom I.; und in den Machines approuvees par l'acad. Tom II. Vorzüglich einfach ist der Krahn, den **Scheldom** im 35. Bande der Schwed. Abh. S. 144. beschreibt.

## §. 205.

Eine musterhafte Zusammensetzung des Haspels mit einfachen Rollen führt **van Swinden** in seinen Posit. physic. part. I. pag. 275. an, deren Einrichtung folgende ist:

Fig. 50. 1) Die Welle des Haspels besteht aus zweyen ungleich dicken cylindrischen Theilen A, a, um die sich ein gemeinschaftliches Seil nach entgegengesetzten Seiten herumschlingt, das oben über eine Rolle p geht.

2) Diese Rolle hängt an einem andern Seile, das sich über eine höher liegende Rolle q schlägt, die bey C eingehängt ist, und dazu dient, das Seil zur aufzuwinden Last herabzuführen.

3) Durch den dickeren Theil A der Welle sind Hebelarme durchgesteckt, vermittelst deren die Welle gedreht werden kann.

4) Indem man die Welle dreht, wickelt sich das Seil an dieser Seite weiter auf, und zugleich vom andern Theile der Welle a ab. Da sich aber jedesmal ein größeres Stück auf als abwickelt, so wird die Rolle p herabgezogen, also auch das Ende des Seiles, woran sie hängt; folglich wird das andere Ende, und mit ihm die Last, heraufgezogen.

## §. 206.

**Aufgabe.** Die Kraft V am Hebelarme der Welle zu bestimmen, die der aufzuwindenden Last P das Gleichgewicht hält.

Aufl. 1) Durch die Last leidet das obere Seil die Spannung P, und die Rolle p wird also mit der Kraft P aufwärts gezogen.

2) Sind daher die beyden Enden des Seiles, das über diese Rolle geht, parallel, so wird jedes von der Kraft $\frac{1}{2}$ P gespannt (§. 174.).

3) Es sey der Halbmesser des Cylinders $A = R$, des Cylinders $a = r$, so hat das Seilstück, welches um den erstern gewunden ist, das Moment $\frac{1}{2}$ PR, ihn um die Axe nach der Richtung mn zu drehen, und das andere, welches um den letztern gewunden ist, das Moment $\frac{1}{2}$ Pr, ihn nach entgegengesetzter Richtung zu drehen; folglich behält die Last das Umdrehungsmoment $\frac{1}{2} P (R - r)$ nach ersterer Richtung mn.

4) Diesem muß das Moment der Kraft gleich und entgegengesetzt seyn. Setzt man also die Länge des

Hebelarms AF, auf dessen Endpunkt F sie angebracht ist, $= f$, so hat man

$$Vf = \frac{1}{2} P (R - r).$$

**Exempel.** Es sey $P = 3000$ ℔, $R = 6$ Zoll, $r = 5\frac{3}{4}$ Zoll, $f = 15$ Zoll, so wird $V = \frac{1}{120} P = 25$ ℔.

## §. 207.

Fig. 51. Wenn die beyden Seilstücke AG, ag nicht parallel sind, sondern unter irgend einem Winkel $\vartheta$ gegen einander zusammenlaufen, so ist die Spannung eines jeden $= \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \gamma}$ (§. 174.), also allemal grösser, als wenn sie parallel laufen.

Damit dieses Erforderniß statt finde, muß der Durchmesser der Rolle $Gg = Aa = AO + Oa$, folglich ihr Halbmesser $Gp = \frac{R + r}{2}$, oder das arithmetische Mittel zwischen den Halbmessern der beyden Cylinder seyn.

# Gezähntes Rad.

## §. 208.

Wenn die Hörner oder Spillen (§. 196.) dazu dienen sollen, die Bewegung des Rades einem andern daranliegenden Rade mitzutheilen, so bekommen sie eine etwas veränderte Gestalt, und heißen alsdann Zähne. Der Zahn des einen Rades greift zwischen zwey Zähne des andern, gleitet an dem einen herab, und schiebt ihn dadurch fort, während ein zweyter Zahn in den Zwischenraum der beyden folgenden einfaßt. Auf diese Art wird das eine Rad durch die Umdrehung des andern zugleich mit in Umlauf gebracht.

Beym **Sternrade** liegen die Zähne in der Verlängerung des Halbmessers, also in der Fläche des Rades; beym **Kronrade** stehen sie auf der Fläche desselben senkrecht, und heißen da auch wohl **Kämme**.

## §. 209.

Fig. 52. **Aufgabe.** Am Umfange der Welle eines gezähnten Rades OGB hängt eine Last P; das Rad greift bey O in ein anderes aeO, an dessen Axe sich noch ein drittes Rad AEF befindet, woran in einem Punkte A seines Umfanges eine Kraft V nach der Tangente AV zieht; man fragt, wie groß diese seyn müsse, um der Last das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. 1) Es sey der Halbmesser AC $=$ R, aC $=$ r, OD $=$ R′, und der Welle Db $=$ r′, so hält eine Kraft $= \frac{r'}{R'} \cdot P$, am Umfange des Rades OGB in O nach der Tangente Ot angebracht, der Last P das Gleichgewicht (§. 192.).

2) Eben die Kraft ist ihr also äquipollent, wenn sie nach entgegengesetzter Richtung Ou angebracht wird.

3) Auf gleiche Art steht die Kraft V mit einer Kraft $= \frac{R}{r} \cdot V$ im Gleichgewichte, die man in O am Umfange des Rades aeO nach Ou wirken läßt, und

dieselbe Kraft ist ihr äquipollent, wenn man ihr die entgegengesetzte Richtung Ot giebt.

4) Da die beyden Räder in O, wo sie zusammenstoßen, eine gemeinschaftliche Tangente haben, so sind die Kräfte $\frac{r'}{R'} \cdot P$ und $\frac{R}{r} \cdot P$, von denen erstere den Zahn des Rades OGB aufwärts, letztere den daranliegenden Zahn des Rades aeO herabdruckt, einander entgegengesetzt, und müssen folglich gleich groß seyn, da sie sich das Gleichgewicht halten sollen.

4) Man hat daher: $\frac{R}{r} \cdot V = \frac{r'}{R'} \cdot P$, und

$$\text{folglich } V = \frac{r \cdot r'}{R \cdot R'} \cdot P.$$

## §. 210.

1. Um der Last P das Gleichgewicht zu halten, wird also desto weniger Kraft erfordert, je kleiner die Quotienten $\frac{r'}{R}$ und $\frac{r}{R'}$ sind.

2. Ersteres ist an sich klar: denn die Kraft übt eine desto größere Wirkung aus, je länger der Hebelarm AC ist, an dem sie angebracht wird, und die Last hat ein desto kleineres Moment, je dünner die Welle ist, an deren Umfange sie zieht.

3. Aus Letzterem hingegen erhellet, daß es für die Kraft vortheilhaft sey, wenn von den beyden gezähnten Rädern das der Kraft zunächst liegende gegen das andere so klein als möglich ist.

## §. 211.

Man nennt dies kleinere Rad ein **Getriebe**. Da es wegen seines geringen Umfanges schmalere und folglich schwächere Zähne hat als andere Räder, so giebt man ihm der Länge der Axe nach eine größere Breite, so daß es wie ein Stück einer dünnen Welle gestaltet ist, in das Vertiefungen nach dem Mittelpunkte zu eingeschnitten sind.

Das Getriebe hölzerner Räderwerke (der Trilling) besteht aus zweyen parallelen Scheiben, die an ihrem Umfange mit cylindrischen Stäben (Triebstöcken) verbunden sind.

## §. 212.

Vermittelst der Getriebe kann man so viele Räder in Verbindung bringen, als man will, und dadurch die Wirkung der Kraft nach Gefallen vermehren.

Es sey der Halbmesser des ersten Rades, an dessen Umfange die Kraft V angebracht ist, $= R$, der Halbmesser des an eben der Axe befindlichen Getriebes $= r$, der des eingreifenden Rades $= R'$, der des zweyten Getriebes $= r'$ u. s. f., so ist der Kraft V am Getriebe die Kraft $\frac{R}{r} . V$ äquipollent, also auch am Umfange des zweyten Rades, wo dasselbe in das Getriebe eingreift. Auf solche Weise kann man der Kraft V nach und nach die Kräfte $\frac{R}{r} . \gamma$, $\frac{RR'}{rr'} . V$ u. s. w. an den Umfängen der folgenden Räder substituiren, und wenn man den Halbmesser des letzten Rades $R^{(n)}$, den seiner Welle, woran die Last P hängt, $r^{(n)}$ nennt, so hat man:

$$\frac{R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\,.\, R^{(n)}}{r \,.\, r' \,.\, r' \,.\,.\, r^{(n)}} \,.\, V = P, \text{ also}$$

$$V = \frac{r \,.\, r' \,.\, r'' \,.\,.\, r^{(n)}}{R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\,.\, R^{(n)}} \,.\, P.$$

## Form der Zähne.

### §. 213.

Der Zahn des Getriebes verläßt den Zahn des daranliegenden Rades nicht sogleich wieder, wie er ihn ergriffen hat, sondern er bewegt sich auf längere oder kürzere Zeit an ihm fort, je nachdem die beyden Räder mehr oder minder tief ineinander greifen. Diese Bewegung muß bey gut eingerichteten Zähnen nie anders als **wälzend** seyn (§. 123.): durch jedes andere Fortrücken der Zähne leidet die ganze Maschine eine Erschütterung, die ihrer Festigkeit nachtheilig ist, und ihr Gang wird wegen der größern Friktion, die dabey statt findet, allemal erschwert.

Eine zweyte nothwendige Bedingung bey den Zähnen ist die, daß die Kraft am Getriebe während der ganzen Zeit, da zwey Zähne mit einander in Berührung sind, beständig einerley Moment behalte, das Rad zu drehen. Ist dies der Fall nicht, so kann die Maschine keinen gleichförmigen Gang annehmen, und das mittlere Moment der Kraft ist um ein Beträchtliches geringer, als im Anfange, wo der eine Zahn auf den andern seine völlige Wirkung ausübt.

Beyde Erfordernisse sind von der Art, daß sie sich zu gleicher Zeit durch einerley Form des Zahnes erfüllen lassen. Um diese Form kennen zu lernen, und zugleich die Gründe einzusehen, warum sie beyde Eigenschaften in sich vereinigt, bedarf es einiger Vorbereitungen, die ich in den folgenden beyden §§ voranschicken will.

## §. 214.

Fig. 53. Die **Epicycloide** ist eine Curve, welche von einem Punkte M eines Kreises EMO beschrieben wird, der sich auf dem Umfange AO eines andern Kreises an der converen Seite fortwälzt. Geschieht die Fortwälzung auf der innern Seite des Umfangs, so entsteht dadurch die **Hypocycloide**, und wenn sie über einer geraden Linie geschieht, die **Cycloide**.

Anmerkung. *Waring* (Miscellanea analytica Cap. 2.) nennt überhaupt die krummen Linien, die bey Fortwälzung einer Curve auf einer geraden Linie durch einen Punkt derselben beschrieben werden, **Curvoiden**, und wenn die Basis ebenfalls eine Curve ist, **Epicurvoiden**. Man findet auch in diesem Werke einige näher Untersuchungen über diese Linien.

## §. 215.

Fig. 53. 1) Indem der bewegliche Kreis sich um ein unendlich kleines Stück seines Weges weiter fortwälzt, dreht er sich um seinen Berührungspunkt O, wodurch das folgende Element Oo seines Umfangs mit dem folgenden Elemente Oω der Basis AO in Berührung kommt.

2) Der Umdrehungswinkel ist also $=$ oOω.

3) Um so viel dreht sich nun auch jede andere Linie, die im Kreise durch O geht, um diesen Punkt; folglich auch MO.

4) Also beschreibt der Punkt M einen Bogen Mm, der MO zum Halbmesser hat, und den Winkel MOm = oOω am Mittelpunkte O einschließt.

5) Da auf die Weise M zunächst in m zu liegen kommt, so ist Mm ein Element der Epicycloide, also MO ihre Normale an M, und zugleich ihr Krümmungshalbmesser.

6) Diese Eigenschaft erstreckt sich auch auf die Hypocycloide, Cycloide, und überhaupt auf jede Linie, die durch einen Punkt einer Curve beschrieben wird, die sich auf dem Umfange einer andern Curve fortwälzt.

7) Wenn bey der Hypocycloide der Halbmesser CO des beweglichen Kreises die Hälfte von dem Halbmesser EO der Basis aO ist, so liegt das Element derselben Mm in der geraden Linie ME, die zum Mittelpunkte E läuft: denn sowohl Mm (6) als ME sind auf MO senkrecht, also fallen beyde zusammen.

8) Da dies von jedem ihrer Elemente gilt, so folgt, daß sie alle in einem und demselben Halbmesser aME liegen müssen; daher ist für diesen Fall die Hypocycloide eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt E des unbeweglichen Kreises geht.

## §. 216.

Indem zwey zusammenstoßende Zähne aneinander fortgleiten, verändern sie nach und nach ihre Berührungspunkte, so daß auf beyden Seiten die Entfernung des angegriffenen Punktes von den Mittelpunkten der beyden Räder nicht dieselbe bleibt. Fällt Anfangs der Punkt des Angriffs an den Fuß des einen Zahns, so ist der Hebelarm an dem die Kraft durch ihn wirkt, am kleinsten; nach und nach wird er aber größer, bis die Spitze des Zahns in Berührung kommt, wo er dann seine größte Länge erreicht hat.

Aus diesem Grunde unterscheidet man den **ursprünglichen** Halbmesser des Rades von seinem **Totalhalbmesser.** Ersterer geht vom Mittelpunkte bis an die Stirn des Rades, letzterer bis an die Spitze des Zahns; beyde sind also um die Länge des Zahns von einander verschieden.

## §. 217.

**Aufgabe.** Die Umstände zu bestimmen, bey denen zwey zusammentreffende Zähne des Rades und Getriebes sich aufeinander fortwälzen, und das Umdrehungsmoment der Kraft unveränderlich ist.

Fig. 54. Aufl. 1) Es sey C der Mittelpunkt des Getriebes, D der des Rades, M der Punkt, wo die beyden Zähne gegenwärtig in Berührung sind; ferner sey des Rades Halbmesser = R, der des Getriebes = r, und M die Kraft, die letzteres umzutreiben strebt, auf den Endpunkt seines Halbmessers r reducirt.

2) Wegen ersterer Forderung müssen bey M zwey Elemente der beyden Zähne zusammenfallen, oder ihre Curven daselbst eine gemeinschaftliche Tangente tMu

haben; folglich auch eine gemeinschaftliche Normale MO.

3) Außerdem soll die Last, auf den Endpunkt des Halbmessers R reducirt, der Kraft M gleich seyn, wie in dem Falle, wenn die Richtungen beyder entgegengesetzt sind (§. 209. 4.).

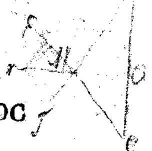
4) Man setze MC $=$ u, so ist der Kraft M am Punkte M die Kraft $\frac{Mr}{u}$ nach der auf MC senkrechten Richtung Mm äquipollent; diese zerlege man in eine senkrecht auf die Fläche des Radzahns oder nach der Normale Mr, und in eine nach MC.

5) Letztere wird durch die Festigkeit des Punktes C aufgehoben; erstere, die wir N nennen wollen, ist allein wirksam, und man hat für sie (§. 48.): $N \operatorname{Sin} CMr = \frac{Mr \operatorname{Sin} 90^\circ}{u} = \frac{Mr}{u}$, oder $Nu \operatorname{Sin} CMO = Mr$.

6) Nun ist im Dreyecke MCO:

$\operatorname{Sin} CMO : \operatorname{Sin} MOC = OC : MC$ also

$u \operatorname{Sin} CMO = OC . \operatorname{Sin} MOC$, folglich wird $N . OC \operatorname{Sin} MOC = Mr$ oder $N = \frac{Mr}{OC \operatorname{Sin} MOC}$.



7) Auf eben die Weise entspringt aus dem gleich großen Widerstande M, nachdem man ihn auf den Punkt M des Hebelarms DM reducirt hat, die Kraft $\frac{M . R}{OD \operatorname{Sin} MOD}$ nach MO. Da diese der erstern das Gleichgewicht halten muß, und ihr entgegengesetzt ist,

so müssen beyde einander gleich seyn; und man hat also

$$\frac{Mr}{OC \operatorname{Sin} MOC} = \frac{M \cdot R}{OD \operatorname{Sin} MOD} \text{ oder}$$

$$OC : OD = r : R.$$

8) Nun ist aber $OC + OD = CD = R + r$, folglich $OC = r$, und $OD = R$; die Normale muß also jedesmal in die Mittelpunktslinie CD da eintreffen, wo die Umfänge der beyden Räder sich berühren.

## §. 218.

Folgerung 1. Die Zerlegung der Kraft (4) nach den Richtungen Mr und MC ist nur alsdann möglich, wenn ihre Richtung Mm zwischen Mr und MC fällt, also rMC ein stumpfer Winkel ist. Da dies statt finden muß, wie klein auch der Winkel MCO seyn mag, so folgt, daß auch MOC stumpf seyn müsse; daher ist allemal $MC > OC$, oder die Entfernung des angreifenden Punktes von C größer als r (8). Gegenseitig erhellet, daß $MD < R$ seyn müsse.

2. Der Zahn des Getriebes ragt also über dessen Umfange hervor, und der Radzahn liegt dagegen innerhalb dem Umfange des Rades; daher bezeichnet hier r den ursprünglichen Halbmesser des Getriebes, und R den Totalhalbmesser des Rades. Man sagt in diesem Falle, das Getriebe **greife** in das Rad **ein**.

3. Es kann auch der Fall eintreten, daß das Getriebe durch das Rad in Umlauf gebracht wird, alsdann gilt alles so vom Rade, wie es vorhin vom Getriebe galt, und umgekehrt.

§. 219.

§. 219.

**Lehrsatz. Wenn das Rad durch das Getriebe in Umlauf gebracht wird, so lassen sich die beyden Forderungen (§. 213.) erfüllen, wenn der Zahn des Getriebes eine Epicycloide, und der des Rades eine Hypocycloide ist, die durch Fortwälzung eines und desselben Kreises auf dem äußern Umfange des Getriebes und dem innern Umfange des Rades entstehen.**

Fig. 55. Beweis 1) Man nehme an, die Punkte F und G im Getriebe und Rade seyen Anfangs in O beysammen gewesen, jetzt aber habe sich F bereits um den Bogen FO von O entfernt, so ist während der Zeit ein eben so großes Stück GO vom Umfange des Rades durch den Punkt O durchgeführt.

2) Es sey nun f der Halbmesser des Kreises, durch dessen Umwälzung auf FO und GO der Zahn des Getriebes und des Rades entsteht; man mache Oc = f, beschreibe aus c den Kreis EMO, und nehme auf seinem Umfange den Bogen MO = FO, so ist M ein Punkt in der Epicycloide FM, und zugleich auch, weil GO = FO ist, ein Punkt in der Hypocycloide GM.

3) Treffen daher beyde Zähne gerade in diesem Punkte M zusammen, so haben sie daselbst eine gemeinschaftliche Normale MO (§. 21. 5.), folglich auch eine gemeinschaftliche Tangente, und überdies schneidet die Normale die Mittelpunktslinie CD in dem Punkte O, wo die Umfänge des Rades und des Getriebes sich berühren (8.).



2175

4) Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, daß die beyden Zähne FM und GM jederzeit in einem Punkte zusammenstoßen, der zugleich im Kreise EMO liegt.

5) Zu dem Ende setze man, es sey diese Voraussetzung richtig, wenn der Fuß F des Zahns FM um irgend einen Bogen FO von O weggerückt ist, so gilt sie auch, wenn er noch um ein unendlich kleines Stück Ff weiter rückt: denn alsdann rückt auch G um eben so viel weiter, und wenn man Mm = Ff nimmt, so ist wieder der Bogen mMO = fFO, also m ein Punkt im Umfange des Getriebezahns, und da ebenfalls gO = mO ist, auch m ein Punkt im Umfange des Radzahns.

6) Nun sind Fuß und Spitze vom erstern und letztern, oder die Punkte F und G Anfangs in O beysammen gewesen, also gillt die Voraussetzung (4) für FO = 0, folglich auch, wenn FO nach und nach wächst, mithin für jede Distanz des Punktes F von O, bis zu der, wo beyde Zähne einander verlassen.

**Anmerk.** Aus dem so eben geführten Beweise erhellet, daß man statt des Kreises EMO jede andere Curve wählen könne, und daß folglich die Form der beyden Zähne nicht auf die Epicycloide und Hypocycloide allein eingeschränkt sey. Vielleicht ließe sich dazu eine Curve finden, die für die Umrisse der Zähne Linien von leichter Construktion gäbe.

## §. 220.

Fig. 56. **Folgerung** 1. Nimmt man $f = \frac{1}{2}$ R, so wird die Hypocycloide eine gerade Linie, die nach dem Mittelpunkte des Rades D gerichtet ist; also ist in dem Falle der Umriß des Radzahns ein Stück vom Halb-

messer des Rades, und der des Getriebezahns eine Epicycloide, die durch Fortwälzung eines Kreises vom Halbmesser $\frac{1}{2}$R auf dem Umfange des Getriebes entsteht.

2. Bisher haben wir als Bedingung voraus gesetzt, daß die anfängliche Berührung der beyden Zähne im Punkte O geschehe, und daß alsdann der eine Zahn den andern seitwärts fortschiebe; sie können aber auch vor der Linie CD zuerst zusammentreffen, und in O sich wieder verlassen. Man lasse in diesem Falle die beyden Räder sich rückwärts bewegen, so ist klar, daß der Radzahn den Zahn des Getriebes von O aus bis zum Punkte ihrer ersten Berührung zurückschieben werde; also verwechseln sich da die Formen der beyden Zähne: der Radzahn wird eine Epicycloide, und der des Getriebes eine Hypocycloide, die beyde durch den Kreis EMO (Fig. 55.) entstehen, wenn er sich auf dem äußern Umfange des Rades und dem innern Umfange des Getriebes fortwälzt.

3. Setzt man hier f = $\frac{1}{2}$ r, so wird der Umriß des Getriebezahns ein Stück vom Halbmesser des Getriebes, und der des Radzahns eine Epicycloide, die durch Fortwälzung eines Kreises vom Halbmesser = $\frac{1}{2}$ r entsteht.

Fig. 57. 4. Trifft man eine solche Einrichtung, daß die Zähne vor der Linie CD zuerst in Berührung kommen, und sich erst in eben der Distanz hinter CD wieder verlassen, so bekommen die Zähne eine zusammengesetzte Form. Der untere Theil des Getriebezahns wird nemlich geradelinigt, und zwar bis an den Punkt,

der bey O mit dem Radzahne in Berührung kommt; der obere FG hingegen eine Epicycloide, welche entsteht, wenn ein Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ R auf dem Umfange FOf des Getriebes sich fortwälzt (1.). Eben so wird auch der obere Theil gf des Radzahns eine Epicycloide, die ein Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ r auf dem Umfange gOG des Rades beschreibt (3.), und der Umriß IO seines untern Theiles wieder eine gerade Linie (1.).

5. In diesem Falle wirken die Zähne aufeinander folgendermaßen:

Das geradelinigte Stück fa vom Zahne des Getriebes ergreift in f die Spitze des Radzahns, und wälzt sich an seinem convexen Theile fg aufwärts fort, bis er in O das geradlinigte Stück IO desselben erreicht hat. Von O an kommt der obere Theil des Getriebezahns mit dem untern OI des Radzahns in Berührung, gleitet an diesem hinweg, und verläßt ihn in G mit seiner Spitze.

6. Wenn das Getriebe vom Rade in Bewegung gesetzt werden soll, so gilt von Allem, was bisher gesagt ist, das Gegentheil; man darf für diesen Fall nur die Namen Rad und Getriebe verwechseln.

Anmerk. Nach Camus ist die erstere Art des Eingreifens bey der die anfängliche Berührung der Zähne in der Mittelpunktslinie CD geschieht, den andern beyden vorzuziehen. S. Mem. de l'acad. de Paris 1732 pag. 137.

## §. 221.

**Aufgabe.** Aus den Halbmessern R und r des Rades und des Getriebes, und der Anzahl n der Zähne des letztern das Uebrige zu finden.

Fig. 56. Aufl. 1) Wir wollen setzen, der Zahn des Getriebes $fg$ habe Anfangs den Zahn des Rades in O ergriffen, und verlasse ihn nun in g, so muß in diesem Augenblicke ein neuer Zahn in O eintreffen.

2) Also ist $fO$ der Abstand der Füße f und O zweyer zunächst folgenden Zähne auf dem Umfange des Getriebes, und $fCO$ ihre Winkeldistanz an seinem Mittelpunkte. Setzt man daher $fCO = \zeta$, so wird $n\zeta = 2\pi$, folglich $\zeta = \frac{2\pi}{n}$, und $fO = r\zeta = \frac{2\pi r}{n}$.

Fig. 55. 3) Ist nun der Zahn des Rades geradlinigt, so ist der Halbmesser $Oc$ des Kreises, der die Epicycloide $fg$ beschreibt, $= \frac{1}{2} R$. Sie wird also construirt, wenn man diesen Kreis von f bis O sich fortwälzen läßt.

4) Da in den Radien DO und Dg die vordern Seiten zweyer Radzähne liegen müssen, und das dazwischen liegende Stück vom Umfange des Rades mit $fO$ einerley Länge hat, so ist die Winkeldistanz gDO zweyer Radzähne $= \frac{r\zeta}{R} = \frac{2\pi r}{nR}$. Setzt man daher ihre Anzahl $= m$, so hat man $m \cdot \frac{2\pi r}{nR} = 2\pi$, also $rm = Rn$ oder $m : n = R : r$.

## Das Kronrad am gezähnten Getriebe.

§. 222.

Fig. 58. Es sey von einem Kronrade (§. 208.) D der Mittelpunkt, AD der Halbmesser, SAR ein Stück des Umfangs; die Axe des Getriebes, wodurch es in Um-

lauf gebracht wird, liege in einer Ebene, die die Fläche des Rades in AD senkrecht schneidet, und sey mit dieser Linie parallel.

Indem nun der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades von A bis R fortschiebt, entfernt dieser sich von AD um die Sehne IR, und gleitet außerdem längs dem Zahne des Getriebes um das Stück AI zur Seite. Letztere Bewegung geschieht ohne alle Hindernisse, und hat folglich auf den Gang der Maschine keinen Einfluß; daher kommt hier allein nur die Bewegung des Kammes nach der geraden Linie IR in Betracht.

§. 223.

Das Kronrad kann also in Ansehung des Eingreifens der Zähne als ein Sternrad betrachtet werden, wovon das Stück des Umfangs, das vom Zahne des Getriebes fortgeführt wird, geradlinigt ist, oder einen unendlich großen Halbmesser hat; giebt man daher dem Kamme desselben einen geradlinigten Umriß, so ist auch der Halbmesser des Kreises, der die Epicycloide des Getriebezahns beschreibt, unendlich (§. 220. 1.). Daraus folgt, **daß der Zahn des Getriebes, das in ein Kronrad eingreift, durch den Endpunkt einer geraden Linie beschrieben werde, die sich auf dem Umfange des Getriebes fortwälzt.**

§. 224.

Fig. 59. Man sieht offenbar, daß diese Curve mit der einerley sey, die der Endpunkt M eines Fadens MOE beschreibt, den man vom Umfange eines Kreises FOE

nach und nach abwickelt: der ausgespannte Theil MO berührt nemlich den Kreis in dem Punkte O, wo er seinen Umfang verläßt, und hat mit dem Bogen FO, wovon er abgewickelt ist, einerley Länge; gerade so, als wenn er sich von F bis O auf dem Umfange des Kreises fortgewälzt hätte.

Uebrigens verhält sich diese Curve in allem Betracht, wie die Epicycloide, von der sie nur eine besondere Art ausmacht; so z. B. ist MO im Punkte M auf ihr senkrecht, und zugleich der Krümmungshalbmesser für diese Stelle.

## §. 225.

Das Bisherige gründet sich auf die Voraussetzung, daß die beyden Zähne sich Anfangs im Punkte O der Linie CI berühren, die auf der Fläche des Rades senkrecht ist. Man setze nun, es habe sich der Zahn des Getriebes bereits um den Bogen OF von O entfernt, so ist während der Zeit der Kamm in gerader Linie (§. 222.) um IR $=$ OF fortgerückt; zieht man daher OM mit IR parallel, oder auf CO senkrecht, und macht OM $=$ OF, so ist M sowohl ein Punkt im Zahne (§. 219.), wie auch im Kamme; folglich treffen beyde beständig in einem Punkte der Linie zusammen, die den Umfang des Getriebes in O berührt.

## §. 226.

Wirkt demnach am Umfange des Getriebes eine Kraft M, so ist diese bey jeder Lage des Zahns FM allemal auf den daranstoßenden Kamm MR senkrecht gerichtet, und wird also ganz darauf verwandt, ihn nach Rn Fig. 58.) fortzubewegen. Da aber der Punkt R nur nach der Tangente Rr weichen kann, so zerfällt die Kraft in eine nach dieser Richtung, und in eine senkrecht darauf nach Ro; leztere übt einen Druck auf den Mittelpunkt D aus, und wird dadurch aufgehoben; erstere ist $=$ M Sin nRo $=$ M Cos ADR, folglich desto kleiner, je weiter R von A wegrückt.

Der Kraft am Getriebe ist also nur zu Anfange, wenn R in A fällt, oder die Zähne zuerst in O sich berühren, eine gleich große Kraft am Umfange des Rades äquipollent; nach und nach geht immer mehr von ihrer Würkung verloren, bis die Zähne sich verlassen, und zwey andere im Punkte O zusammentreffen. Aus diesem Grunde kann das Kronrad, genau genommen, den gleichförmigen Gang des Sternrades nie annehmen.

## §. 227.

**Aufgabe.** Aus den Halbmessern R und r eines Kronrades und des darein greifenden Getriebes, nebst der Anzahl n der Zähne des leztern, den vollständigen Umriß dieser Zähne, und die Anzahl der Kämme des erstern zu finden.

Fig. 59. Aufl. 1) Wenn der Zahn des Getriebes FM den Kamm MR im Punkte M verläßt, so ist M seine Spitze, und, da in diesem Augenblicke in O zwey andere Zähne zusammentreffen müssen, OF die Distanz zweyer zunächst folgender Zähne.

2) Sezt man daher den Winkel OCF $= \eta$, so

hat man $n\eta = 2\pi$, folglich $\eta = \frac{2\pi}{n}$, und $FO = r\eta$ $= \frac{2\pi r}{n}$.

3) Da also OF bekannt, und $OM = OF$ ist, so erhält man den vordern Umriß des Zahns bis zu seiner Spitze, wenn man von F bis O einen Faden vom Umfange des Getriebes abwickelt.

4) Während der Zeit, daß das Getriebe sich um den Winkel OCF dreht, rückt der Kamm aus A bis R fort, so daß $IR = OF = r\eta$ ist, und das Rad dreht sich um den Winkel, der $\zeta$ heißen mag.

Fig. 58. 5) Im Dreyecke DIR ist $IR = DR \operatorname{Sin} ADR$ oder $r\eta = R \operatorname{Sin} \zeta$, also $\operatorname{Sin} \zeta = \frac{r\eta}{R}$, wodurch $\zeta$ bekannt wird. Nennt man daher m die Anzahl der Kämme, so hat man $m\zeta = 2\pi$, also $m = \frac{2\pi}{\zeta} =$

$$\frac{2\pi}{\operatorname{arc\,Sin} \frac{2\pi r}{nR}}$$

**Exempel.** Es sey $n = 6$, $R = 25$ Zoll, $r = 5$ Zoll, so wird $\eta = 60°$, $\operatorname{Sin} \zeta = 0{,}2094395$, also $\zeta = 12° 5' 22''$, und $m = 29{,}7$, wofür man 30 setzen muß.

Fig. 59. Um die Höhe des Zahnes zu finden, ziehe man CM, so wird $CM = \sqrt{(CO^2 + OM^2)} = r\sqrt{(1 + \frac{4\pi^2}{n^2})}$ $= 1{,}44797 \ldots r$; davon r abgezogen, giebt die gesuchte Höhe $= 0{,}44797 \cdot r = 2{,}2398$ Zoll.

## §. 228.

Wenn der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades verläßt, so ist der Kraft M am Getriebe noch die Kraft M Cos $\zeta$ am Umfange des Rades äquipollent. Setzt man darin für Sin $\zeta$ seinen Werth, so erhält man

$$M \operatorname{Cos} \zeta = M \sqrt{\left(1 - \frac{4\pi^2 r^2}{n^2 R^2}\right)}.$$

Dieser Ausdruck weicht desto weniger von M ab, je kleiner r, und je größer nR ist; also kann man den Verlust, den die Kraft am Getriebe durch das Eingreifen der Zähne leidet, auf zweyerley Art vermindern:

1) Wenn man das Getriebe im Verhältnisse des Rades klein genug nimmt.
2) Wenn man ihm so viel Zähne giebt, als es die Sicherheit des Eingreifens nur immer gestattet.

Im vorigen Exempel wird M Cos $\zeta$ = 0,97782 M, also der mittlere Werth des wirksamen Antheils von M = 0,98891 M.

## §. 229.

Dieselbe Vorstellung vom Kronrade (§. 223.), woraus die bisherigen Folgerungen genommen sind, leitet nun ferner auch auf die Form, welche sowohl der Kamm als der Zahn des Getriebes haben muß, wenn beyde Anfangs **vor** der Linie CI zusammentreffen, und sich erst hinter derselben in eben der Distanz wieder verlassen. Alsdann wird nemlich (§. 220. 4.) (Fig. 60.) der Zahn des Getriebes zunächst am Umfange geradlinigt, bis an den Punkt O, womit er in CI den Kamm berührt; von da an, bis zu seiner Spitze, behält er seine vorige Krümmung (§. 223.). Der Kamm hingegen ragt nun über O hinaus, bleibt nur von I bis O geradlinigt, und bekommt oberhalb die Gestalt einer Cycloide, die durch den Punkt eines Kreises vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ r beschrieben wird, der sich auf der geraden Linie OM von O bis M fortwälzt.

Da die Zähne des Getriebes jetzt nicht mehr um den Winkel OCf, sondern um das Doppelte desselben FCf auseinander liegen, so wird bey eben der Anzahl von Zähnen die Länge OM halb so groß als vorhin, also der gekrümmte Theil vom Zahne des Getriebes etwas kürzer; das Uebrige bleibt alles ungeändert.

## Pochstämpfer.

### §. 230.

Der Mechanismus der Stampfmühlen besteht bekanntlich darin, daß vertikal gerichtete Balken vermittelst seitwärts angebrachter Zapfen durch die Zähne einer Welle in die Höhe gehoben werden, und, sobald diese von den Zapfen abgleiten, vermöge ihres eigenen Gewichtes wieder herabfallen.

Fig. 61. Ein solcher Balken AB heißt ein **Stempel**, der daranliegende Zapfen DM die **Hebelatte**, und der Zahn FM der **Daumen** oder die **Warze**. Damit der Stempel stets seine vertikale Lage behalte, umschließt man ihn an zweyen Stellen mit festen Seitenwänden Ee und Gg, worin er sich auf und nieder bewegen kann; diese heißen **Leitungen** oder auch **Scheidelatten**.

§. 231.

§. 71. Man kann den Stempel AB als ein Stück vom Umfange eines unendlich großes Rades ansehen, und auf solche Weise alles, was sich über diese Maschine sagen läßt, aus der vorhergehenden Theorie der Räder ableiten. Das Wichtigste davon besteht ungefähr in folgenden Punkten:

1. Da die Heblatte DM geradlinigt ist, so bekommt der Daumen der Welle die Gestalt einer Curve, die der Endpunkt F eines Fadens FO beschreibt, den man vom Umfange der Welle abwickelt (§. 223.).

2. Der Daumen FM faßt unter die Heblatte DM zuerst in dem Augenblicke, wenn der Halbmesser FC in die Horizontale OC fällt, und die Berührung geschieht alsdann im Punkte O. Nach und nach gleitet die Heblatte auf dem Daumen immer weiter nach dessen Spitze hin, berührt ihn aber stets mit ihrem Endpunkte M, so daß die Kraft, die am Umfange der Welle nach der Tangente OM gerichtet ist, bey jeder Lage des Daumen ihre volle Wirkung auf die Heblatte ausübt.

3. Wenn diese mit der Spitze des Daumen in Berührung gekommen ist, folglich ihre größte Höhe erreicht hat, so tritt jetzt in O ein neuer Daumen unter die Heblatte eines andern, schon herabgefallenen Stempels, wodurch ein abwechselndes Heben der Stempel bewirkt wird. Hieraus sieht man zugleich, daß allemal der Bogen vom Umfange der Welle, der zwischen zweyen parallelen Reihen vom Daumen enthalten ist, der Höhe OM gleich sey, zu der jede der Heblatten hinaufsteigt.

4. Damit die Heblatte bey ihrer tiefsten Lage nicht unmittelbar an den Umfang der Welle anstoße, giebt man den Daumen noch eine geradlinigte Unterlage, deren Höhe als ein Stück vom Halbmesser der Welle angesehen werden muß.

## §. 232.

**Aufgabe.** Auf den Umfang des an der Welle liegenden Rades wirke eine gegebene Kraft M; die Welle enthalte der Länge nach n Daumen, wodurch jedesmal n Stempel zugleich gehoben werden; man sucht die Kräfte, denen jeder Stempel ausgesetzt ist.

**Aufl.** 1) Es sey der Halbmesser des Rades $= R$, der Welle $= r$; die Höhe der Unterlage jedes Daumen $= e$, die Länge der Heblatten $= f$, die Breite des Stempels $= g$, der Abstand der beyden Leitungen voneinander $= a$.

2) Da die Unterlage des Daumen noch mit zur Welle gehört, so ist der eigentliche Halbmesser der Welle $= r + e$, also der Kraft M am Rade die Kraft $\frac{RM}{r+e}$ an ihrem Umfange äquipollent; daher wird jede Heblatte DM von der Kraft $\frac{RM}{n(r+e)}$ angegriffen.

3) Diese wirkt stets auf DM im Punkte M senkrecht, also auch unmittelbar auf den Schwerpunkt des Stempels nach vertikaler Richtung (§. 70.).

4) Außerdem leidet noch der Stempel von den Wänden der Leitungen, sowol in E als in g einen Sei-

tendruck. Da die centrische Linie des Stempels durch seine Mitte geht, also der angegriffene Punkt M von ihr um $f + \frac{1}{2} g$ entfernt liegt, so ist dieser Druck $= \frac{(f + \frac{1}{2} g) R}{na (r + e)} . M.$

## Das Eingreifen der Triebstöcke.

### §. 233.

**Lehrsatz.** Wenn die Zähne eines Rades in die Triebstöcke eines Getriebes eingreifen, und letztere als Linien ohne Dicke angenommen werden, so muß der Radzahn die Gestalt einer Epicycloide haben, bey der der bewegliche Kreis mit dem Getriebe, und die Basis mit dem Rade einerley Halbmesser hat.

Fig. 62. Beweis 1) Der Querschnitt eines solchen Triebstockes ist ein Punkt in des Getriebes Umfange. Diesen führt der Zahn des Rades, indem er sich von O um den Bogen GO entfernt, durch einen gleich großen Bogen MO.

2) Nimmt man also auf dem Umfange des Getriebes den Bogen MO = GO, so muß der Punkt M in dem Umrisse des Zahnes GM liegen, und zugleich muß die Sehne MO auf ihm senkrecht seyn (§. 217.).

3) Beydes wird erfüllt, wenn die Curve GM eine Epicycloide ist, die der Punkt M beschreibt, indem der Bogen MO sich auf dem Umfange des Rades von G bis O fortwälzt.

## §. 234.

Ein Kreis kann sich auf dem innern Umfange eines andern nicht fortwälzen, wenn beyde gleich groß sind; also artet dann die Hypocycloide in einen Punkt aus. Sieht man daher den Querschnitt eines unendlich dünnen Triebstocks als eine Hypocycloide an, so giebt auch über diesen Fall die allgemeine Theorie der Zähne Auskunft, und führt auf eben die Form des Radzahnes, die im vorigen §. angegeben ist.

Außerdem zeigt sich aus dieser Betrachtung, daß das erste Zusammentreffen des Zahnes mit dem Triebstocke nothwendig im Punkte O der Linie CD geschehen müsse; wollte man ihn früher in den Triebstock eingreifen lassen, so müßte letzterer die Form einer Epicycloide haben, und könnte also kein Punkt seyn.

Soll dagegen der Triebstock den Zahn fortführen, so müssen im Gegentheil beyde vor der Linie eD sich zuerst berühren, und wenn sie bis O gekommen sind, sich wieder verlassen.

## §. 235.

Es sey jetzt der Triebstock ein wirklicher cylindrischer Stab, also sein Querschnitt ein Kreis, so verhält sich nun die Sache bloß in sofern anders, daß die Epicycloide GM durch den Mittelpunkt M dieses Kreises geht, und der eigentliche Umriß des Zahnes ihn irgendwo in seinem Umfange berührt. Es sey $\mu$ der Berührungspunkt, so wird erfordert, daß $\mu$O sowohl auf der Curve des Zahnes, als auch auf dem Kreise senkrecht sey (§. 217. 2.); also muß wegen letzterer Bedingung $\mu O$ durch M gehen, folglich $\mu$ in der Normale der Epicycloide MO liegen, und von M um den Halbmesser des Querschnittes abstehen.

Daher ist in gegenwärtigem Falle die Curve des Zahnes $\gamma\mu$ eine **Parallele** der Epicycloide, und wird von dem Mittelpunkte des gedachten Querschnittes beschrieben, wenn man ihn auf dem innern Umfange der Epicycloide fortrollen läßt.

Beym Kronrade verwandelt sich die Epicycloide wieder in die Cycloide; das Uebrige bleibt alles so wie vorhin.

---

Siebentes Kapitel.

# Von der Schraube.

---

## Die Schraubenlinie.

### §. 236.

Fig. 63. Eine Ebene PCc, durch die Axe Cc eines senkrechten Cylinders gelegt, schneidet seine Oberfläche in einer geraden Linie PM, die auf seiner Grundfläche APB senkrecht steht. Nimmt man auf dieser ein Stück PM in einem gegebenen Verhältnisse zum Bogen AP, so liegt der Punkt M in einer Curve AMS, die sich um die Fläche des Cylinders herumwindet, und die **Schraubenlinie** genannt wird.

§. 237.

## §. 237.

Die Entstehungsart dieser Linie leitet auf folgende Betrachtungen:

1. Es sey der Halbmesser der Grundfläche CP $= r$, der Winkel ACP $= \varphi$, die Ordinate PM $= y$, und $\frac{PM}{AP} = \varkappa$, so wird der Bogen AP $= r\varphi$, also die Gleichung für die Schraubenlinie: $y = \varkappa r \varphi$.

2. Für $\varphi = 0$, ist auch $y = 0$; da in diesem Falle P in A zu liegen kommt, so sieht man, daß der Punkt A in die Schraubenlinie hineinfalle.

3. Wenn man $\varphi = 2\pi$ nimmt, so fällt P aufs Neue in A, und es wird $y = Aa = 2\pi\varkappa r$. Man nennt das Stück der Schraubenlinie AMSa einen **Schraubengang**, und Aa seine Höhe.

4. Setzt man diese $= h$, so wird $\varkappa r = \frac{h}{2\pi}$, also $y = \frac{h\varphi}{2\pi}$.

5. Das Element Pp des Bogens AP liegt mit dem Elemente Mm der Schraubenlinie in einerley Ebene MPmp; daher liegen auch die Tangenten MT und PT an M und P gezogen, in dieser Ebene, und schneiden sich in derselben in irgend einem Punkte T.

6. Man ziehe Mo mit Pp parallel, so wird mMr $=$ MTP, $Mr = Pp = r d\varphi$, $mr = dy = \varkappa r d\varphi$, also, wenn man den Winkel MTP $= \alpha$ setzt: $\tang \alpha$

$= \frac{mr}{Mr} = \varkappa$. Die beyden Tangenten schneiden sich daher jederzeit unter einem und demselben Winkel.

7. Es ist MP = TP . tang $\alpha$, folglich TP = $\frac{MP}{\varkappa}$ = AP. Legt man also ein rechtwinklichtes Dreyeck MTP, dessen Winkel an der Grundlinie = $\alpha$ ist, so um die Fläche des Cylinders, daß seine Grundlinie TM in den Umfang des Kreises APB fällt, so kommt seine Hypothenuse TM in die Schraubenlinie AM zu liegen.

8. Wählt man zum ersten Radius statt CA einen andern CF, und setzt die erste Ordinate FI = g, den Winkel FCP = $\varphi'$, und ACF = $\gamma$, so erhält man $g = \frac{h\gamma}{2\pi}$, $\varphi = \gamma + \varphi'$, folglich $y = \frac{h(\gamma + \varphi')}{2\pi}$ $= g + \frac{h\varphi'}{2\pi}$

## §. 238.

Fig. 64. Wenn um zwey Cylinder, die eine gemeinschaftliche Axe Cc haben, zwey Schraubengänge von einerley Höhe h gehen, und der Anfangspunkt $\alpha$ des innern Schraubenganges mit dem Anfangspunkte A des äußern zwar in derselben Ebene ACc, aber um das Stück a$\alpha$ = g höher liegt; so ist für einerley Winkel ACP = $\varphi$ die Ordinate MP = $\frac{h\varphi}{2\pi}$, und $p\mu = g + \frac{h\varphi}{2\varphi}$, also beyder Unterschied allemal = g. Zieht man daher MI mit PC parallel, und nennt den Halbmesser der

Grundfläche des größern Cylinders R, den der Grundfläche des kleinern r, so ist $Mo = R - r$, $o\mu = g$, also $\tang M\mu o = \frac{R - r}{g}$, folglich $M\mu$ gegen die Axe Cc durchgängig unter einerley Winkel geneigt.

§. 239.

Eine Fläche, die durch alle die Linien $M\mu$ geht, heißt eine **Schraubenfläche**. Legt man zugleich eine andere durch eben das Stück des äußern Schraubenganges und das zunächst darunter liegende Stück des innern, so bilden beyde Flächen am äußern Schraubengange eine Kante $\lambda M\mu$, und es geht dann über den inneren Cylinder eine Art von gewundenem dreyeckigen Prisma, wodurch die sogenannte **Schraube** entsteht.

§. 240.

Anmerk. 1. Da $\lambda\mu = h$ ist, so muß $g = \frac{1}{2} h$ seyn, wofern die Seitenlinien $\lambda M$ und $\mu M$ gegen die Axe des Cylinders (der Spindel) einerley Neigung haben sollen; dies ist aber nicht durchaus nothwendig.

2. Für $g = o$ ist $M\mu$ auf der Axe der Spindel senkrecht; in diesem Falle läßt man zwey Schraubenflächen AM, am parallel neben einander fortlaufen, und was bis an den Umfang des äußern Cylinders dazwischen liegt, bleibt auf der Spindel stehen, so daß nun der körperliche Schraubengang, der sich um die Spindel herumwindet, viereckig wird.

§. 241.

Wenn in einen hohlen Cylinder, dessen Oeffnung mit der Spindel einer Schraube gleichen Halbmesser hat, inwendig Vertiefungen eingegraben werden, in welche die Schraubengänge jener genau hineinpassen, so hat man eine **innere Schraube** oder **Schraubenmutter.**

## §. 242.

1. Die äußere Schraube ist in der innern beweglich: denn jedes Stück ihres Schraubenganges hat mit dem andern einerley Form und Lage, und kann also ohne Hindernisse in dessen Stelle treten.
2. Die Bewegung geschieht nach der Richtung der Schraubenlinie, und besteht daher in einer Umdrehung um die Axe der Spindel, und in einem dieser Axe parallelen Fortrücken.
3. Wenn also die Spindel gedrehet wird, so muß die Schraube zu gleicher Zeit parallel mit ihrer Axe steigen oder fallen.
4. Gegenseitig kann letzteres nur geschehen, wenn ersteres zugelassen wird.

## §. 243.

Fig. 65. **Aufgabe.** Auf eine Schraube, die in einer unbeweglichen Schraubenmutter enthalten ist, wirken zwey Kräfte: die eine Kraft V strebt dieselbe vermittelst eines Hebelarmes, worauf sie senkrecht angebracht ist, um ihre Axe zu drehen; die andere P drückt auf sie nach einer mit der Axe parallelen Richtung; man fragt, wie beyde Kräfte sich zu einander verhalten müssen, damit Gleichgewicht zwischen ihnen statt finde.

Aufl. 1) Durch die Kraft P wird die Fläche der äußern Schraube gegen die darunter liegende Fläche der Schraubenmutter gedrückt, und dieser Druck vertheilt sich auf letztere gleichförmig.

2) Wenn also n Schraubengänge vorhanden sind, so ist der Druck auf jede derselben $= \frac{P}{n}$, und davon kommt auf jedes seiner Elemente, das zwischen dem Winkel $d\Phi$ enthalten ist, der Theil $\frac{Pd\Phi}{2n\pi}$, der für jetzt p heißen mag.

3) Es sey MNmn ein solches Element der Fläche des hohlen Schraubenganges: man lege durch M eine auf die Axe der Spindel senkrechte Ebene, fälle darauf die Perpendikel NO, no, ml, ziehe MO, Oo, lo, und verlängere Oo und Nn, bis sie sich in T schneiden; so sind Mo und lo Stücke von den Radien, die den Winkel $d\Phi$ am Mittelpunkte des durch M gehenden senkrechten Querschnittes einschließen; also $MOT = 90^\circ$, und $NTO = \alpha$ (§. 237. 6.).

4) Man fälle ferner NI auf MT senkrecht, und ziehe IO, so ist NIO der Neigungswinkel des schrägen Elementes gegen gedachten Querschnitt. Es sey dieser $= I$, der Winkel $NMO = \vartheta$, $OMT = \lambda$, so hat man in der rechtwinklichten Ecke bey M: $\tang I = \frac{\tang \vartheta}{\sin \lambda}$.

5) Die Kraft p, die nach NO wirkt, zerlege man in eine senkrecht auf das Element, und in eine parallel

mit OI, so ist erstere $= \frac{p}{\text{Cos I}}$ (§. 118.), die aufgehoben wird; letztere $=$ p tang I. = M

6) Diese zerlege man noch in eine nach OM, und in eine senkrecht darauf. Erstere, $=$ p tang I Cos IOM $=$ p tang I Sin $\lambda$, drückt gegen die Axe der Schraube, und wird folglich durch einen gleichen Druck eines gegenüber liegenden Elementes zerstört; die andere $=$ p tang I Cos $\lambda$, strebt eine Umdrehung der Schraube um ihre Axe zu bewirken.

7) Nennt man r den Halbmesser der Schraube, so ist ihr Umdrehungsmoment $=$ pr tang I Cos $\lambda =$ pr $\frac{\text{tang}\,\vartheta}{\text{tang}\,\lambda}$ (4). $= \frac{p\,r\,h}{2\pi r}$;

8) Da nun

$$\begin{array}{l} NO = OM\ \text{tang}\,\vartheta \\ TO = OM\ \text{tang}\,\lambda \\ \hline \end{array}$$

so erhält man

$$\frac{\text{tang}\,\vartheta}{\text{taug}\,\lambda} = \frac{NO}{TO} = \text{tang}\,\alpha = \varkappa = \frac{h}{2\pi r}\ (\S.\ 237.);$$

folglich wird jenes Moment $= \frac{ph}{2\pi} = \frac{Phd\varphi}{4n\pi^2}$.

9) Die Summe von diesen einzelnen Momenten ist $= \frac{Ph\varphi}{4n\pi^2}$; also für $\varphi = 2\pi$, oder für einen Schraubengang $= \frac{Ph}{2n\pi}$, und daher für alle n Schraubengänge $= \frac{Ph}{2\pi}$.

10) Diesem Momente muß das entgegengesetzte

der Kraft V gleich seyn, welches, wenn man die Länge des Hebelarmes, woran sie wirkt, f nennt, $= Vf$ ist. Man hat daher $\frac{Ph}{2\pi} = Vf$, oder $Ph = 2\pi Vf$.

$h = 1'' = \frac{1}{12}$
$V = 30 \text{ W.}$
$f = 3' = 36''$
$P = 2 \times 3{,}14 \times 30 \times 36$
$= 6{,}3 \times 1080$

## §. 244.

Die Schraube gehört zu den einfachen Hebmaschinen, wodurch man Lasten in die Höhe treiben, oder Widerstände jeder andern Art zum Weichen bringen kann. Man bringt sie zu dem Ende unter die Last oder gegen den Widerstand senkrecht, befestigt auf irgend eine Weise ihre Einfassung, damit diese dem Seitendrucke (5) nicht nachgebe, und steckt durch die Spindel einen Hebelarm, auf den die Kraft senkrecht angebracht wird. Die Schraube leidet alsdann oben, wo sie angestemmt ist, einen Druck P, wodurch sie zum Niedersteigen in der Schraubenmutter, folglich zugleich zu einer Umdrehung um ihre Axe sollicitirt wird. Durch eine Kraft $V = \frac{Ph}{2\pi f}$ am Hebelarme wird dieses Drehen, also auch das Herabsteigen der Schraube verhindert (§. 242. 4.), und im Gegentheil, wenn die Kraft größer als $\frac{Ph}{2\pi f}$ ist, so wird sie nur zum Theil aufgehoben, und kann mit dem Ueberreste die Schraube frey um ihre Axe drehen, und dadurch die Last zum Weichen bringen.

Man sieht übrigens, daß die Kraft im Verhältnisse gegen die Last desto geringer zu seyn braucht, je länger der Hebelarm f, und je kleiner die Höhe der Schraubengänge h ist.

## Die Presse.

### §. 245.

Fig. 66. Die sogenannten **Pressen** sind Schrauben von entgegengesetzter Einrichtung. Bey diesen ist nemlich die äußere Schraube auf dem Boden AG befestigt, und dagegen die Einfassung vermittelst der Schraubenmutter um sie beweglich.

Der zusammengedrückte Körper übt zunächst einen Widerstand auf das Brett CD aus, der sich auf die beyden Schraubhölzer mp und nq vertheilt, und dadurch die Schraubenmutter gegen die Fläche der äußern Schraube drückt. Da dieser Druck mit der Axe der Spindel parallel geschieht, so geht ein Theil davon längs dem Schraubengange herab, und würde die Schraubhölzer zur Umdrehung bringen, wenn dies nicht durch eine Kraft, die an ihren Hebelarmen nach entgegengesetzter Richtung wirkt, verhindert würde.

Das Verhältniß der Kraft zum Widerstande ist dabey, wie man leicht einsieht, ganz dasselbe, wie im erstern Falle.

## Die Schraube an der Axe.

### §. 246.

Fig. 67. Es giebt noch eine dritte Zusammensetzung der äußern Schraube mit der innern, bey welcher beyde

Theile zugleich beweglich sind, aber jeder nur eine Bewegung einfacher Art anzunehmen fähig ist. Die äussere Schraube kann sich nemlich nur um ihre Axe OZ drehen, und die innere liegt in einem ausgehöhlten viereckigen Prisma FHGI, das von zweyen Seitenwänden AC und BD umschlossen ist, und sich zwischen diesen bloß hin und her schieben läßt. Wird nun erstere gedrehet, so kommt der Punkt m ihres Schraubenganges nach und nach mit den Punkten des dareingreifenden hohlen Schraubenganges mo in Berührung, und hebt diese bis in die Fläche des senkrechten Querschnittes mn, in welcher seine Umdrehung geschieht; so daß jedesmal, nachdem er einen Bogen von 180° beschrieben hat, oder von m bis n gelangt ist, der Punkt o der innern Schraube, und mit ihm das ganze Prisma um on, d. h. um die halbe Höhe eines Schraubenganges, gestiegen ist.

## §. 247.

Aufgabe. Von zweyen Kräften V und P strebt erstere vermittelst eines Hebelarms die äußere Schraube um ihre Axe OZ zu drehen, und dadurch das Prisma FHGI zu heben; leztere verhindert dies, indem sie auf die obere Fläche GI des Prisma's senkrecht drückt, und hält so der andern das Gleichgewicht; man fragt, wie beyde Kräfte sich zu einander verhalten müssen.

Aufl. 1) Die Kraft P, womit das Prisma zu sinken strebt, zertheilt sich in so viele Theile, als seine innere Schraubenfläche Elemente hat; daher bleibt als les so, wie zu Anfange des §. 243., nur bedeutet hier MmNn ein Element der äußern Schraubenfläche, und der darauf senkrechte Druck $\frac{p}{\mathrm{Cos\ I}}$, der dort aufgehoben wurde, ist jetzt der allein wirksame Antheil von p, indem der andere Theil p tang I, dessen Richtung mit OI parallel ist, das Prisma gegen die Seitenwand drückt, und dadurch vernichtet wird.

2) Man zerlege nun ferner die Kraft $\frac{p}{\mathrm{Cos\ I}}$, deren Richtung NR in der Ebene INO liegt, und auf IN senkrecht ist, in eine nach $NO = \frac{p}{\mathrm{Cos\ I}} \cdot \mathrm{Cos\ ONR} = p$, und in eine darauf senkrechte $= \frac{p}{\mathrm{Cos\ I}} \cdot \mathrm{Sin\ I} = p \mathrm{\ tang\ I}$.

3) Erstere hat kein Moment, die Schraube um ihre Axe zu drehen, weil ihre Richtung NO mit der Axe parallel ist; letztere hingegen, deren Richtung mit IO parallel läuft, zerfällt in eine nach $MO = p \mathrm{\ tang\ I\ Sin\ } \lambda$, die gegen die Axe drückt, und dadurch aufgehoben wird; und in eine auf MO senkrechte, $= p \mathrm{\ tang\ I\ Cos\ } \lambda = p \frac{\mathrm{tang\ } \vartheta}{\mathrm{tang\ } \lambda}$, die auf die Umdrehung der Schraube verwandt wird.

4 Vergleicht man hiermit §. 243 . 6, so sieht man, daß hier eben das Umdrehungsmoment aus p entspringt, wie dort, folglich am Ende wieder dieselbe Gleichung $2\pi Vf = Ph$ herauskommt.

# Die Schraube ohne Ende.

## §. 248.

Wenn die Schraube an der Axe in die Zähne eines daran liegenden Rades eingreift, und dadurch das Rad in Umlauf bringt, so nennt man sie die **Schraube ohne Ende.**

Fig. 68. Das Eingreifen des Schraubenganges geschieht dabey auf eben die Art, wie im vorhergehenden Falle; indem nemlich durch eine halbe Umdrehung der Spindel der Punkt m auf die andere Seite des Querschnittes mp in p zu liegen kommt, wird der ganze Schraubengang mo in die Lage np versetzt, und schiebt so den Zahn des Rades, der ihn in o berührt, um op, parallel der Axe, fort.

## §. 249.

Fig. 69. Es sey AZ die Axe der Schraube, COD eine auf AZ senkrechte Linie, die durch den Mittelpunkt des Rades C geht, so sind zum richtigen Eingreifen der Schraube folgende Bedingungen nothwendig:

1) Der Schraubengang MZ muß den Zahn des Rades FM vor der Linie COD ergreifen, und ihn bis O führen.

2) Er muß viereckig (§. 240. 2.) seyn, damit der Zahn nicht seitwärts abgleiten könne.

3) Die Berührung beyder muß beständig in der mit AZ parallelen Linie MO geschehen, damit das Moment der Schraube, das Rad zu drehen, unveränderlich bleibe.

Man sieht also, daß die Punkte des Zahnes in einem Faden MO liegen müssen, der vom Umfange des Rades von F bis O abgewickelt wird; nur kann hier sein Umriß nicht, wie im §. 223., vom Endpunkte des Fadens beschrieben werden, weil wegen der Schiefe des Schraubenganges die Linie MO mit dem Bogen FO nicht einerley Länge hat.

Um die jedesmalige Länge MO zu finden, die man auf dem abgewickelten Theile des Fadens bis an den Punkt M nehmen muß, der in der Curve des Zahnes liegt, setze man den Winkel $FCO = \varphi$, der Halbmesser des Rades $= R$, die Länge $MO = u$, so ist $FO = R\varphi$, $Oo = Rd\varphi$; also, wenn der Faden um das Stück Oo weiter abgewickelt wird, und dabey M in n zu liegen kommt: $no = nO + Oo = u + Rd\varphi$.

Ferner sey Mm das an M liegende Element der Curve. Da dies mit dem daran stoßenden Stücke des Schraubenganges MZ einerley Lage haben muß, und Mn auf MO senkrecht, also mit OD parallel ist, so hat man $nMm = DOA$, der Schiefe des Schraubenganges, also $\tang nMm = \varkappa$ (§. 237.); daher wird $mn = \varkappa \,.\, Mn = \varkappa u d\varphi$, folglich $du = mo - MO$ $= u + Rd\varphi - \varkappa u d\varphi - u = Rd\varphi - \varkappa u d\varphi$, also $d\varphi = \frac{du}{R - \varkappa u}$ oder $-\varkappa d\varphi = \frac{-\varkappa du}{R - \varkappa u}$, wovon die Integralgleichung: $C - \varkappa\varphi = \log(R - \varkappa u)$ ist.

Für $\varphi = 0$, ist auch $u = 0$, also $C = \log R$, daher erhält man: $\varkappa\varphi = \log\left(\frac{R}{R - \varkappa u}\right)$, $\frac{R}{R - \varkappa u}$

$= e^{\varkappa\varphi}$, $R - \varkappa u = R \cdot e^{-\varkappa\varphi}$, und $u = \frac{R}{\varkappa} \cdot (1 - e^{-\varkappa\varphi})$.

Setzt man den abgewickelten Theil des Fadens $= s$, und $\frac{R}{\varkappa} = c$, so wird, weil $s = FO = R\varphi$ ist, $\varphi = \frac{S}{R}$, also $u = c\,(1 - e^{-\frac{s}{c}})$.

Die Construktion des Zahnes ist also folgende: Man wickele einen Faden vom Punkte F an, nach und nach vom Umfange des Rades ab, und nehme jedesmal auf dem abgewickelten Stücke S vom Punkte O an, wo es den Umfang verläßt, einen Theil $OM = c\,(1 - e^{-\frac{s}{c}})$ ab, so liegt M in der verlangten Curve FM des Zahnes.

## §. 250.

Fig. 68. **Aufgabe.** Vom Umfange aeb der Welle eines Rades AoB hängt eine Last P herab, das in eine Schraube ompn eingreift; man sucht die Kraft V, die ihr am Endpunkte D der Kurbel GD das Gleichgewicht halt.

Aufl. 1) Es sey der Halbmesser AC des Rades $= R$, der Halbmesser aC der Welle $= r$, so ist der Last P am Umfange des Rades in O eine Kraft $\frac{Pr}{R}$ äquipollent (§. 193.).

2) Diese Kraft wirkt auf OC senkrecht, also nach OM, und da der Zahn die Schraubenfläche stets in einem Punkte berührt, der in OM hineinfällt, so übt die

Kraft auf den Schraubengang einen mit der Axe der Spindel parallelen Druck aus.

3) Wird also die Länge des Hebelarmes $GD = f$ gesetzt, so hat man: (§. 247.) $2\pi V f = \frac{Phr}{R}$, folglich $V = \frac{Phr}{2\pi R f}$.

Exempel. Es sey $R = 36$ Zoll, $r = 3$ Zoll, $h = 1$ Zoll, $f = 15$ Zoll, $P = 27000$ ℔, so wird:

$$\begin{array}{lll} & \log . 2Rf & = 3{,}0334238 \\ & \log . \pi & = \underline{0{,}4971499} \\ & \log 2\pi Rf & = 3{,}5305737 \\ \text{Ferner:} & \log Phr & = \underline{4{,}9084850} \\ \text{also:} & \log V & = 1{,}3779113 \\ \text{und} & V & = 23{,}87324 \text{ ℔} = 23 \text{ ℔ } 28 \text{ Lt.} \end{array}$$

## Zusammengesetzte Schrauben.

### §. 251.

Die Schraube ohne Ende kann auf mancherley Art mit andern einfachen Maschinen verbunden werden. Sie läßt sich selbst mit der Schraube der zweyten Art (§. 246.) wieder zusammensetzen, und beyde geben in Verbindung eine Maschine, die sehr brauchbar ist, große Lasten damit auf eine geringe Höhe, z. B. auf einen Wagen zu heben, daher sie auch vom Hrn. Prof. **Burja**, der sie in seiner Statik anführt, die **Wagenwinde** genannt wird. Ihre Einrichtung ist folgende:

1) Die stehende Schraube hat mit dem beweglichen

Prisma, worin die hohlen Schraubengänge liegen, vertikale Stellung.

2) Die zu hebende Last wird in ein Behältniß gepackt, das auf der obern Fläche GI des Prisma's befestigt ist.

3) Unterhalb an der Spindel der Schraube liegt ein horizontales Rad, dessen Zähne in eine Schraube ohne Ende eingreifen, die dann durch eine Kurbel gedrehet wird.

## §. 252.

Es sey die Höhe des Schraubenganges der ersteren Schraube $= g$, der Halbmesser des Rades $= a$, die auf GI ruhende Last $= P$, so ist dieser am Umfange des Rades die Kraft $\frac{gP}{2\pi a}$ äquipollent, die wir $= Q$ setzen wollen.

Ferner sey die Kraft an der Kurbel $= V$, die Länge der Kurbel $= f$, die Höhe des Schraubenganges der Schraube ohne Ende $= h$; so hat man für das Gleichgewicht der beyden Kräfte Q und V die Gleichung: $2\pi Vf = Qh$. Darin den Werth für Q substituirt, giebt $2\pi Vf = \frac{ghP}{2\pi a}$, oder $V = \frac{ghP}{4\pi^2 af}$.

Exempel. Es sey wieder, wie vorhin $f = 15$ Zoll, g und h beyde $= 1$ Zoll; außerdem $a = 6$ Zoll. Man setze die Kraft $V = 24$ ℔; wie viel Last wird man mit dieser im Gleichgewichte erhalten können?

| | | |
|---|---|---|
| Man erhält hier | $\log 4af$ | $= 2,5563025$ |
| | $\log \pi^2$ | $= 0,9942997$ |
| | $\log 4\pi^2 af$ | $= 3,5506022$ |
| dazu: | $\log V$ | $= 1,3802112$ |
| giebt | $\log P$ | $= 4,9308134$ |
| und | $P$ | $= 85273,36$ ℔. |

## §. 253.

Eine andere sehr sinnreiche Zusammensetzung zweyer gewöhnlichen Schrauben, die auf eine ähnliche Art ineinander greifen, beschreibt **Hunter** in den Phil. transact. Vol. 71. part. 1. pag. 58. Sie besteht in folgendem:

Fig. 70. 1) Die größere Schraube CDA geht bey D durch eine unbewegliche Schraubenmutter, und enthält inwendig selbst wieder eine Schraubenmutter für die kleinere Schraube cda, die zwischen den festen Seitenwänden mp und nq auf und niedersteigen, aber sich nicht drehen kann.

2) Wenn daher auf die obere Fläche o ein Gewicht gelegt wird, so drückt dies die kleinere Schraube gegen die größere, und wirkt dadurch auf letztere zwiefach.

3) In sofern nemlich dieser Druck auf ihre innern Schraubengänge geschieht, wird sie zu einer Umdrehung von f nach g sollicitirt; und in sofern derselbe auf den ganzen Schraubenkörper geht, der dadurch gegen die in GH liegenden Schraubengänge gedrückt wird, bekommt sie ein Bestreben, sich von g nach f zu drehen.

4) Beyde

4) Beyde Umdrehungen geschehen nach entgegengesetzter Richtung, und heben sich also zum Theil einander auf.

## §. 254.

**Aufgabe.** Auf die obere Schraube drückt eine Last P, der eine Kraft V am Hebelarme EC das Gleichgewicht hält; man fragt nach dem Verhältnisse von V zu P.

**Aufl.** 1) Es sey die Höhe des Schraubenganges bey der größern Schraube $= g$, bey der kleinern $= h$, so hat die Last P, in sofern sie die größere Schraube gegen die in GH liegenden Schraubengänge drückt, das Moment $\frac{Pg}{2\pi}$, (§. 243. 9.) sie um ihre Axe nach der Seite gf zu drehen; und in sofern sie die kleinere Schraube gegen ihre innere Schraubengänge drückt, das entgegengesetzte Moment $\frac{Ph}{2\pi}$, weil sie dadurch eine Umdrehung derselben nach der Seite fg zu bewirken sucht.

2) Also bleibt ihr das Moment $\frac{P(g-h)}{2\pi}$ nach ersterer Seite zu übrig. Diesem muß nun das entgegengesetzte Moment V.f der Kraft V gleich seyn, daher hat man:

$$Vf = \frac{P(g-h)}{2\pi} \text{ oder}$$

$$2\pi Vf = P(g-h).$$

P

Exempel. Es sey $g = \frac{1}{3}$ Zoll, $h = \frac{1}{4}$ Zoll, $f = 15$ Zoll, die Kraft $V = 24$ ℔, so wird $g - h = \frac{1}{12}$ Zoll, also

$$\log \frac{2f}{g-h} = \log 360 = 2{,}5563025$$

$$\begin{aligned} \text{dazu: } \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \text{und } \log V &= 1{,}3802112 \\ \text{giebt } \log P &= 4{,}4336636 \\ \text{und } P &= 27143{,}362 \text{ ℔.} \end{aligned}$$

Achtes Kapitel.

# Vom Keile.

§. 255.

Der **Keil** ist ein dreyseitiges Prisma, von dem zwey Seitenflächen einen spitzen Winkel einschließen. Sein Gebrauch besteht darinn, daß man ihn zwischen Flächen, die durch irgend eine Kraft gegeneinander gepreßt sind, mit der scharfen Kante nach und nach eindringen läßt, und sie dadurch auseinander treibt. Das Hineintreiben geschieht entweder durch Druck oder durch wiederholte Schläge auf die dritte Seitenfläche, die man den **Rücken** des Keiles nennt.

§. 256.

Fig. 71. Es sey der Keil ACB zwischen die beyden Flä-

chen EO und FO eingezwängt, die ein Bestreben haben, aneinander zu treten (wie z. B. in dem Falle, wenn EOF der Spalt eines festen Körpers ist); so leidet von ihnen der Keil an den Stellen E und F, wo er mit ihnen in Berührung ist, einen Druck, senkrecht auf seine Seitenflächen AC und BC. Es mögen nemlich die Kräfte, die die Flächen EO, FO gegeneinander treiben, nach Richtungen wirken, wonach sie wollen, so lassen sie sich doch allemal nach EG und FG, den Perpendikeln auf AC und BC, und nach EC, FC, parallel mit den Seitenflächen, zerlegen, von denen erstere beyden nur allein wirksam sind.

Das in der Figur gezeichnete Profil gehe durch die Mittelpunkte dieser Drucke E und F, so sind EG, FG ihre mittlere Richtungen, die sich irgendwo in G durchschneiden mögen. Aus beyden entspringt eine zusammengesetzte Kraft nach irgend einer Richtung GD, die allemal aufwärts geht, und folglich den Keil aus dem Zwischenraume EOF herauszutreiben strebt; soll daher dies verhindert werden, so muß auf den Rücken des Keiles eine eben so große Kraft nach entgegengesetzter Richtung DG wirken.

## §. 257.

**Aufgabe.** Die Umstände zu bestimmen, unter denen der mittlere Druck von Seiten des Widerstandes auf den Rücken des Keiles senkrecht gerichtet ist.

Aufl. 1) Es sey der Druck nach EGr = M, der nach FGu = N; man zerlege erstere in eine Kraft nach

GD, senkrecht auf AB, und in eine nach Gp, parallel AB, so ist jene $= M \text{ Cos } DGr$, diese $= M \text{ Sin } DGr$.

2) Da im Vierecke AEGD die Winkel bey E und D rechte Winkel sind, so ist $EGD + EAD = 180°$, folglich $DGr = EAD$; setzt man also den Winkel bey $A = \alpha$, so wird von jenen beyden Kräften, die nach $GD = M \text{ Cos } \alpha$, und die nach $Gp = M \text{ Sin } \alpha$.

3) Auf gleiche Art zerfällt der Druck N, wenn der Winkel bey $B = \beta$ gesetzt wird, in eine Kraft nach $GD = N \text{ Cos } \beta$, und in eine nach Gq, parallel AB, $= N \text{ Sin } \beta$.

4) Soll daher aus den Kräften M und N eine einzige Kraft nach GD entspringen, so müssen die beyden Seitenkräfte nach Gp und Gq sich heben, folglich hat man: $M \text{ Sin } \alpha = N \text{ Sin } \beta$.

## §. 258.

Folgerung. 1. Es sey P die Kraft, die unter diesen Umständen den Kräften M und N das Gleichgewicht hält, so bekommt man (2. 3.) $P = M \text{ Cos } \alpha + N \text{ Cos } \beta$. Darin für N seinen Werth $\frac{M \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta}$ gesetzt, giebt $P = \frac{M \text{ Cos } \alpha \text{ Sin } \beta + M \text{ Cos } \beta \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta} = \frac{M \text{ Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \beta} = \frac{N \text{ Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \alpha}$.

2. Sind M und N bloß Widerstandskräfte, die nur das weitere Eindringen des Keiles zwischen die Flä-

chen EO und FO verhindern, so wird gegenseitig: $M = \frac{P \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}$, $N = \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}$

3. Wenn das Dreyeck ACB gleichschenklig, oder $AC = BC$ ist, so ist $\alpha = \beta$, folglich wird alsdann $M = N = \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} 2\alpha} = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \alpha}$

3. Man setze den Winkel bey $C = \gamma$, so hat man: $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$, also $\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, und daher $M = N = \frac{P}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\gamma}$. Je spitzer also der Winkel ACB ist, desto größer ist der Seitendruck auf die anliegenden Flächen, folglich desto weniger Kraft erforderlich, um sie zum Weichen zu bringen.

5. Liegen die Berührungspunkte E und F in einer Linie EF, die mit AB parallel ist, so ist $AE = BF$, folglich sind die rechtwinkligen Dreyecke AEG und BFG kongruent, also $AG = BG$; daher ist das Dreyeck AGB gleichschenklich, folglich $AD = BD$. Die Kraft P muß also in diesem Falle auf die Mitte des Rückens wirken.

## Vom Drucke der Gewölbe gegen ihre Widerlagen.

### §. 259.

Eine der nutzbarsten Anwendungen findet unstreitig die Theorie des Keiles bey den Gewölben. Jedem, der nur irgend ein Gewölbe mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet hat, muß von selbst dabey einfallen, daß die einzelnen Wölbsteine, als vielförmige Massen, auch wie Keile aufeinander wirken, und durch den Seitendruck, den sie gegen einander ausüben, dem Gewölbe jene Festigkeit ertheilen, die es vor andern Werken der Baukunst so sehr auszeichnet. Freilich haben nähere Untersuchungen über diesen Gegenstand gezeigt, daß nicht bey jeder Form des Gewölbebogens ein vollkommenes Gleichgewicht der Wölbsteine unter sich statt finde, aber dies thut auch eigentlich zur Sache nichts; es kommt nur darauf an, ob die Widerlagen, auf die sich die ganze Masse stützt, fest genug stehen, um der Gewalt, womit die Wölbsteine einander seitwärts zurück zu drängen streben, gehörigen Widerstand leisten zu können. Hiervon soll in den folgenden §§ gehandelt werden.

## §. 260.

Fig. 72. **Aufgabe.** Den Druck zu bestimmen, den der Wölbstein IEie eines Gewölbebogens AIB gegen die anliegenden Seitenflächen IE und ie ausübt.

Aufl. 1) Es sey w das Gewicht des Wölbsteins, das auf seinen Schwerpunkt o nach der Vertikale on wirkt. Man fälle aus o auf die Fugen ie und IE die Perpendikel op und oq und nenne p und q die Kräfte, worin das Gewicht w nach diesen Richtungen zerfällt, so hat man (§. 49.)

$$p \text{ Sin } nop = q \text{ Sin } noq$$

$$q \text{ Sin } poq = w \text{ Sin } nop$$

2) Setzt man den Winkel Eqv und epu, welche

die Fugenschnitte IE, ie mit der Vertikale machen $= I$ und $I'$, so wird $nop = opu = 90° - I'$, $noq = oqv = 90° + I$, $poq = 180° - (I' - I)$ folglich:

$$p \operatorname{Cos} I' = q \operatorname{Cos} I$$

$$q \operatorname{Sin} (I' - I) = w \operatorname{Cos} I'.$$

3) Daher wird $q = \frac{w \operatorname{Cos} I'}{\operatorname{Sin} (I' - I)}$, $p = \frac{q \operatorname{Cos} I}{\operatorname{Cos} I'}$ $= \frac{w \operatorname{Cos} I}{\operatorname{Sin} (I' - I)}$

## §. 261.

Man nenne $w'$ das Gewicht des zunächst darunter liegenden Wölbsteins ie i'e'; $I''$ den Winkel, den die Fuge i'e' mit der Vertikale macht, $p'$ und $q'$ den senkrechten Druck auf die Fuge i'e' und ie, so hat man auf gleiche Art:

$$p' = \frac{w' \operatorname{Cos} I'}{\operatorname{Sin} (I'' - I')},\ q' = \frac{w' \operatorname{Cos} I''}{\operatorname{Sin} (I'' - I')}.$$

Von diesen ist letzterer dem Drucke $p$ entgegengesetzt, und hebt ihn also zum Theil auf; daher ist die Kraft, womit der obere Wölbstein IEie den untern iei'e' nach Richtung op fortzudrängen strebt, $= p - q' =$ $\frac{w \operatorname{Cos} I}{\operatorname{Sin} (I' - I)} - \frac{w' \operatorname{Cos} I''}{\operatorname{Sin} (I'' - I')}$.

## §. 262.

Man kann den ganzen Gewölbebogen als eine Zusammensetzung aus einer unendlichen Menge einzelner Theile ansehen: denn offenbar leidet darunter seine Festigkeit nicht, sondern gewinnt vielmehr, wenn am

Ende von den unendlich vielen Fugenschnitten nur einige wirklich vorhanden sind. Verbindet man mit dieser Voraussetzung noch die zweyte, daß die Fugenschnitte auf dem innern Bogen AIB senkrecht stehen, oder Normalen desselben seyn sollen, so ändern sich die vorigen Resultate folgendermaßen ab:

Fig. 73. 1) Der Winkel mIr, den die Normale Ir mit der Vertikale Im macht, ist $= I$; der Winkel $I' = I + dI$; $I'' = I + 2dI + d^2I$. Nimmt man daher in der Vertikale, die durch den Scheitel der Kurve AIB geht, die Abscisse $AP = x$, setzt die dazu gehörige Ordinate $PI = y$, und das Element des Bogens $Ii = ds$; so wird $\text{Sin}\, I = \text{Sin}\, miI = \frac{dx}{ds}$, $\text{Cos}\, I = \frac{dy}{ds}$, und der Krümmungshalbmesser bey I, den wir r nennen wollen, $= \frac{ds}{dI}$.

Fig. 72. 2) Setzt man ferner die Länge des Fugenschnittes $IE = z$, so wird

$$Ii : Ee = r : r + z, \text{ also}$$

$$Ee = \left(1 + \frac{z}{r}\right) ds,$$

folglich das arithmetische Mittel zwischen Ii und $Ee = \left(1 + \frac{z}{2r}\right) ds$, und der Inhalt des Trapeziums $IEie = \left(1 + \frac{z}{2r}\right) zds = \left(1 + \frac{zdI}{2ds}\right) zds = zds + \frac{1}{2} z^2 dI$.

3) Da es gestattet ist, die ganze Rechnung auf das Profil des Gewölbes zu beziehen, und das specifi-

sche Gewicht der Gewölbmasse $= 1$ zu setzen, so drückt letztere Formel zugleich das Gewicht w des unendlich schmalen Wölbsteins IEie aus. Ferner ist $w' = w + dw$, und, wenn man ds als beständig annimmt: $dw = dzds + zdzdI + \frac{1}{2}z^2 d^2I$.

4) Demnach wird der Druck $p = \frac{w \text{ Cos } I}{\text{Sin } dI}$ $= \frac{w \text{ Cos } I}{dI}$, und der ihm entgegengesetzte $q' =$ $\frac{w' \text{ Cos } (I + 2dI)}{\text{Sin } (dI + d^2I)} = \frac{w' (\text{Cos } I - 2 \text{ Sin } IdI)}{dI + d^2I}$ $= \frac{w}{dI}(\text{Cos } I - 2 \text{ Sin } IdI - \text{Cos } I . \frac{d^2I}{dI}) + \frac{\text{Cos } Idw}{dI}$; also der Ueberschuß des erstern über letztern, den wir $w''$ nennen wollen, $= 2w \text{ Sin } I + w \text{ Cos } I . \frac{d^2I}{dI^2}$ $- \text{Cos } I . \frac{dw}{dI}$.

5) Setzt man nun hierin für w und dw ihre Werthe, so erhält man:

$$w'' = (zds + \tfrac{1}{2} z^2 dI) \left(2 \text{ Sin } I + \frac{\text{Cos } Id^2I}{dI^2}\right) - \frac{\text{Cos } Idzds}{dI} - z \text{ Cos } Idz - \tfrac{1}{2} z^2 \text{ Cos } I . \frac{d^2I}{dI^2}$$

$$= 2z \text{ Sin } Ids + \frac{zds \text{ Cos } Id^2I}{dI^2} + z^2 \text{ Sin } IdI - \frac{\text{Cos } Idzds}{dI} - z \text{ Cos } Idz$$

6) Da $d\left(\frac{\text{Cos I}}{dI}\right) = -\text{Sin I} - \frac{\text{Cos I}d^2I}{dI^2}$, so wird:

$$\frac{\text{Cos I}d^2I}{dI^2} = -d\left(\frac{\text{Cos I}}{dI}\right) - \text{Sin I},\ \text{also}$$

$$\omega = z\,\text{Sin I}ds - zds\,d\left(\frac{\text{Cos I}}{dI}\right) + z^2\,\text{Sin I}.$$

$$zdI - \frac{\text{Cos I}dzds}{dI} - z\,\text{Cos I}dz$$

$$= zdx - zd.\left(\frac{rdy}{ds}\right) - z^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{(r+z)\,dydz}{ds}$$

## §. 263.

**Aufgabe.** Die Gestalt und Dimension des innern Gewölbbogens AIB ist gegeben, nebst der Dicke IE des Gewölbes für jeden Punkt I; man fragt, wie viel Breite KF der Widerlage BFKA gegeben werden müsse, damit sie hinlängliche Stabilität bekomme, um den Seitendruck des Gewölbes aushalten zu können.

Aufl. 1) Man ziehe aus dem Schwerpunkte o des Elementes IEie die beyden Linien oI und oNZ; erstere durch den Anfang des Bogens Ii, letztere vertikal, oder parallel mit ADL; so hat man $oI = \sqrt{(qI^2 + oq^2)}$, und da oq unendlich klein ist, $oI = qI$.

2) Nun kann man mit Sicherheit den Punkt q in der Mitte von IE annehmen; setzt man also $IE = z$, so wird $Io = \frac{1}{2}z$, und, weil der Winkel qIo unendlich klein, also nIo unendlich wenig von $nIq = 90° - I$ verschieden ist: $on = \frac{1}{2}z\,\text{Cos I}$, $nI = \frac{1}{2}z\,\text{Sin I}$.

3) Es sey des Gewölbes Höhe $AD = a$, seine halbe Weite oder Spannung $BD = b$, die Höhe der Widerlage $BF = h$, seine gesuchte Breite $KF = f$; so wird $nN = PD = a - x$, also $oN = a - x + \frac{1}{2}z \text{ Cos I}$. Ferner $ZL = nP = y + \frac{1}{2}z \text{ Sin I}$, folglich die Entfernung $KZ = b + f - y - \frac{1}{2}z \text{ Sin I}$, welche $v$ heißen soll.

4) Man zerlege die Kraft $\omega$, womit das Element IEie auf das nächstfolgende nach der Richtung op wirkt, in eine horizontale $= \omega \text{ Cos nIi} = \omega \text{ Cos I}$, und in eine vertikale $= \omega \text{ Sin I}$. Erstere hat das Moment $\omega u \text{ Cos I} = \omega \text{ Cos I} (a + h - x + \frac{1}{2}z \text{ Cos I})$ die Widerlage um den Punkt K zu drehen, und sie so nach außen zu umzustürzen; letztere hat das entgegengesetzte Umdrehungsmoment $\omega v \text{ Sin I} = \omega \text{ Sin I} (b + f - y - \frac{1}{2}z \text{ Sin I})$: daher bleibt dem Elemente w noch das Moment $\omega (u \text{ Cos I} - v \text{ Sin I})$ übrig, die Widerlage auswärts hin um K zu drehen.

5) Ein solches Moment hat jedes andere Element des Gewölbes; wenn man daher alle diese Momente summirt, so bekommt man für das Moment des ganzen Bogens AIB das Integral $\int \omega (u \text{ Cos I} - v \text{ Sin I})$, das nach geschehenem Kalkul von $x = 0$, bis $x = a$ genommen werden muß.

6) Das letzte Element bey B übt den Druck p unmittelbar auf die Widerlage aus, also fällt der entgegengesetzte Druck q′ hier weg; woraus erhellet, daß das Moment dieses Elementes besonders in Rechnung gebracht werden müsse. Man setze den Winkel I für die

Fuge Bb $= \zeta$, die Länge dieses Fugenschnittes $= e$, den Krümmungshalbmesser des Bogens an dieser Stelle $= \varkappa$, so wird $w = eds + \frac{1}{2}e^2 dI$, und $p = \frac{w \operatorname{Cos} I}{dI}$ (§. 262. 4.) $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta$.

7) Dieser Druck zerfällt in einen horizontalen $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta^2$, und in einen vertikalen $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta$, wovon ersterer das Moment $(e\varkappa + \frac{1}{2}e^2)\, h \operatorname{Cos} \zeta^2$, letzterer das entgegengesetzte Moment $(e\varkappa + \frac{1}{2}e^2)\, f \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta$ hat. Beyder Unterschied ist $= (e\varkappa + \frac{1}{2}e^2)(h \operatorname{Cos} \zeta^2 - f \operatorname{Sin} \zeta \operatorname{Cos} \zeta)$, der zum vorhergehenden Momente (5) hinzukommt.

8) Da die Widerlage nur um ein geringes Stück von dem Rechtecke abweicht, dessen Höhe $= h$ ist, so kann man ihren Schwerpunkt G in der Linie GO annehmen, die ihre Basis $\varkappa F$ halbirt, und ihren Inhalt $= hf$ setzen. Nennt man also m das specifische Gewicht des Mauerwerks, woraus sie besteht, so ist ihr Gewicht $= mhf$, und das Moment desselben, sie um K nach innen zu zu drehen, $= KO \, . \, mhf = \frac{1}{2} mhf^2$.

9) Wofern nun die Widerlage vor dem Wanken geschützt seyn soll, muß dieses Moment dem vorigen gleich seyn, woraus folgende Gleichung entsteht:

$$(e\varkappa + \tfrac{1}{2}e^2)\,(h \operatorname{Cos} \zeta^2 - f \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta) + \int \omega\, (u \operatorname{Cos} I - v \operatorname{Sin} I) = \tfrac{1}{2}\, mhf^2$$

in der die unbekannte Größe f nur bis auf den zweyten Grad steigt.

## §. 264.

Wenn der innere und äußere Gewölbbogen concentrische Halbkreise sind, deren Halbmesser $= a$ und $a + e$, so hat man:

1) $r = a$, $b = a$, $z = e$, und $\zeta = 90°$, also $\mathrm{Cos}\,\zeta = 0$; daher fällt aus jener Gleichung das erstere Glied ganz weg, und man behält bloß:

$$\int \omega \,\mathrm{Cos}\, I \left(h + a - x + \frac{edy}{2ds}\right) - \int \omega \,\mathrm{Sin}\, I$$

$$\left(f + a - y - \frac{edx}{ds}\right) = \tfrac{1}{2} mhf^2.$$

2) Da ferner für den Kreis $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$, und $\frac{dy}{ds}$ $= \frac{a-x}{a}$ ist, (§. 89.) so wird

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{dx}{a} \text{ und}$$

$$d\left(\frac{rdy}{ds}\right) = ad\left(\frac{dy}{ds}\right) = -dx; \text{ also}$$

$$\omega = 2edx + \frac{e^2dx}{a} = \frac{(2ae + e^2)\,dx}{a}, \text{ folglich:}$$

$$\omega \,\mathrm{Sin}\, I = \frac{\omega dx}{ds} = \frac{(2ae + e^2)\,ydx}{a^2}, \text{ und}$$

$$\omega \,\mathrm{Cos}\, I = \frac{\omega dy}{ds} = \frac{(2ae + e^2)\,(a - x)\,dx}{a^2}$$

3) Man setze $a - x = t$; $\frac{2a + e}{a} = \lambda$; so wird

$$dx = -dt, \text{ und } \omega \operatorname{Cos} I = -\frac{\lambda e t dt}{a}; \text{ ferner}$$

$$u = h + t + \frac{et}{2a} = h + \tfrac{1}{2}\lambda t, \text{ also}$$

$$\omega u \operatorname{Cos} I = -\frac{\lambda e h t dt}{a} - \frac{\lambda^2 e t^2 dt}{2a}, \text{ und}$$

$$\int \omega u \operatorname{Cos} I = C - \frac{\lambda e h t^2}{2a} - \frac{\lambda^2 e t^3}{6a}$$

4) Da dies Integral für $x = 0$, oder $t = a$ verschwinden soll, so wird $c = \frac{\lambda e h a^2}{2a} + \frac{\lambda^2 e a^3}{6a} = \frac{1}{2}\lambda e h a + \frac{1}{6}\lambda^2 e a^2$, dies ist zugleich sein vollständiger Werth, weil für $x = a$, $t = 0$ wird.

5) Ferner hat man $\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e y dx}{a}$, $v = f + a - y - \frac{ey}{2a} = f + a - \frac{1}{2}\lambda y$, also $v\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e (f + a) y dx}{a} - \frac{\lambda^2 e y^2 dx}{2a}$

6) Nun ist $\int y dx$, für $x = a$, $=$ dem Inhalte des Quadranten, also $= \frac{1}{4}\pi a^2$; daher $\frac{\lambda e (f + a)}{a} \cdot \int y dx = \frac{1}{4}\pi\lambda e (af + a^2)$, und

7) $\int y^2 dx = \int (2ax - x^2) dx = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$, welches für $x = a$ den Werth $\frac{2}{3}a^3$ bekommt. Also wird $\frac{\lambda^2 e}{2a}\int y^2 dx = \frac{1}{3}\lambda^2 e a^2$, folglich:

$$\int v\omega \operatorname{Sin} I = \tfrac{1}{4}\pi\lambda e (af + a^2) - \tfrac{1}{3}\lambda^2 e a^2.$$

8) Diese gefundenen Werthe der beyden Integrale in die Gleichung (1) substituirt, geben:

$$\tfrac{1}{2}mhf^2 + \tfrac{1}{4}\pi\lambda eaf - \tfrac{1}{2}\lambda e\,[ah + (\lambda - \tfrac{1}{2}\pi)\,a^2] = 0$$

oder wenn man

$$\frac{(2ae + e^2)\,\pi}{2\,mh} = A \text{ und}$$

$$\frac{2ae + e^2}{mh} \cdot [h + e + (2 - \tfrac{1}{2}\pi)\,a] = B \text{ setzt:}$$

$$f^2 + Af + B = 0, \text{ woraus}$$

$$f = -\tfrac{1}{2}A + \sqrt{(B + \tfrac{1}{4}A^2)} \text{ wird.}$$

Exempel. Es wird $a = 10$ Fuß, $e = 1\frac{5}{6}$ Fuß, $h = 10$ Fuß, und da bey $m$ das specifische Gewicht der Gewölbmasse als Einheit zum Grunde liegt, so sey hier auch $m = 1$.

Demnach wird $2ae + e^2 = 40{,}027778$

$$\begin{aligned}
\log\,(2ae + e^2) &= 1{,}6023014 \\
\log\ \pi &= 0{,}4971499 \\
\hline
\log\,(2ae + e^2)\,\pi &= 2{,}0995113 \\
(2ae + e^2)\,\pi &= 125{,}75095 \\
\text{und}\quad A &= 6{,}287647.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ferner}\quad (2 - \tfrac{1}{2}\pi)\,a &= 4{,}292037 \\
h + e &= 11{,}833333 \\
\hline
h + e + (2 - \tfrac{1}{2}\pi)\,a &= 16{,}125370 \\
\text{wovon der Log:} &= 1{,}2075097 \\
\text{hierzu } l\,(2ae + e^2) &= 1{,}6022614 \\
\hline
\text{giebt:}\ & \phantom{=}\ 2{,}8098711
\end{aligned}$$

wozu die Zahl: $645{,}46274$ gehört.

Daher wird $B = 64{,}546274$ und

$$f = 5{,}4835 = 5 \text{ Fuß } 5\tfrac{4}{7} \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Herr Langsdorf trägt in seiner Hydraulik pag. 259. eine andere Methode vor, die erforderliche Breite der Widerlagen für kreisförmige Gewölbe zu finden, die im gegenwärtigen Falle $f = 5{,}026$ Fuß giebt. Es ist nicht möglich, eine Vergleichung zwischen seiner Formel und der meinigen anzustellen, weil sie Größen enthält, die man zuvor durch eine Art von Falsi bestimmen muß; aber auf kleinere Resultate führt sie gewiß jedesmal, da sie auf der Voraussetzung beruhet, daß man den halben Gewölbbogen AIB als eine Zusammensetzung aus zweyen soliden Stücken ansehen könne.

## §. 265.

Die gedruckten Bogen werden jetzt gewöhnlich aus dreyen oder mehrern Kreisbogen, die verschiedene Halbmesser haben, zusammengesetzt *). Bey dieser Verzeichnungsart herrscht sehr viel Willkührliches, und es ist gewiß nicht leicht, sondern erfordert ungemein viel praktischen Scharfblick, sie am bequemsten und vortheilhaftesten einzurichten; hat man aber bereits eine bestimmte Konstruktionsmethode erwählt, und in der Ausführung bewährt gefunden, so ist für sie die Berechnung der Breite der Widerlagen nur umständlicher, aber durchaus nicht verwickelter, als beym einfachen Halbkreise. Zur nähern Erläuterung dieses Kalkuls mag folgender besondere Fall dienen:

## §. 266.

Fig. 74. Der gedruckte Bogen BAb bestehe aus dreyen Kreisbogen: dem mittlern lAi, der durch die Scheitellinie

*) S. Müller's analytisch-praktische Abhandlung über die Verzeichnung großer gedruckter Bogen. Göttingen 1792.

linie AD halbirt wird, und den Seitenbogen IB, ib, die der Symmetrie gemäß kongruent sind, so ergeben sich unmittelbar diese Folgen:

1) Der Mittelpunkt O des Bogens IAi muß in der Verlängerung der Vertikale AD angenommen werden; daher schneiden die Halbmesser IO, iO die Basis Bb in Punkten C und c, die von D, folglich auch von B und b gleich weit abstehen.

2) Die Linie IO ist eine gemeinschaftliche Normale der Bogen IA und IB, und muß also zugleich durch den Mittelpunkt des letztern gehen. Soll sich nun dieser Bogen über BD Anfangs senkrecht erheben, so muß sein Mittelpunkt auch in BD, folglich in den Durchschnitt beyder Linien IO und BD, d. i. in C, fallen. Eben dies gilt auf der andern Seite vom Bogen bi.

3) Es sey nun die Höhe des Gewölbes AD $= a$, die halbe Weite BD $= b$; ferner die Amplitude des obern Bogens Ii $= 2\alpha$, die von BI oder bi $= \beta$, der Halbmesser AO zu erstern $= g$, der zu letztern $= \varkappa$; so wird, wenn man durch I und i die Sehne Ii, und auf BD das Perpendikel $I\pi$ zieht:

$A\omega = g\ (1 - \text{Cos}\ \alpha)$, $I\pi = \varkappa\ \text{Sin}\ \beta$, also
$g\ (1 - \text{Cos}\ \alpha) + \varkappa\ \text{Sin}\ \beta = a$.

4) Ferner $I\omega = g\ \text{Sin}\ \alpha$, $B\pi = \varkappa\ (1 - \text{Cos}\ \beta)$, folglich:

$$g\ \text{Sin}\ \alpha + \varkappa\ (1 - \text{Cos}\ \beta) = b.$$

5) Beyde Gleichungen verbunden, geben:

$$g = \frac{b \operatorname{Sin} \beta - a (1 - \operatorname{Cos} \beta)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} \beta - (1 - \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \beta)} \text{ und}$$

$$\varkappa = \frac{a \operatorname{Sin} \alpha - b (1 - \operatorname{Cos} \alpha)}{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta - (1 - \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \beta)}$$

6) Da überhaupt $\operatorname{Sin} \eta = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \eta \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \eta$, und $1 - \operatorname{Cos} \eta = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \eta^2$ ist, so lassen sich die eben gefundenen Ausdrücke noch unter folgende Form bringen:

$$g = \frac{b \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \beta - a \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \beta}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (a + \beta)}$$

$$\text{und: } \varkappa = \frac{a \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha - b \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \alpha}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \beta \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

**Exempel.** Es sey $2\alpha = \beta = 60°$, so ist $\operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Cos} \beta = \frac{1}{2}$, und $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Sin} \beta = \sqrt{\frac{3}{4}}$; folglich wird in den erstern Formeln für g und $\varkappa$ (5) der Nenner $= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, also:

$$g = \frac{b\sqrt{3} - a}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(b\sqrt{3} - a) \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3b - a + (b - a)\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{und } \varkappa = \frac{a - b(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} = \frac{b + a - (b - a)\sqrt{3}}{2}$$

## §. 267.

**Aufgabe.** Der äußere Bogen des Gewölbes sey mit dem innern parallel, und letzterer auf die eben angezeigte Art konstruirt; man sucht die erforderliche Breite der Widerlagen.

Aufl. 1) Da der Bogen AIB aus zweyen ungleichartigen Theilen AI, IB besteht, so muß man das Integral $\int (u\omega \operatorname{Cos} I - v\omega \operatorname{Sin} I)$ (§. 263. 5.) für jeden dieser Theile besonders berechnen; und nachher beyde Resultate zusammen addiren.

2) Nun hat man aus §. 264. zuvörderst für den obern Bogen AI:

$$\omega \operatorname{Sin} I = \frac{(2ge + e^2)\, ydx}{g^2}$$

$$\omega \operatorname{Cos} I = \frac{(2ge + e^2)(g - x)\, dx}{g^2}$$

$$u = a + h - x + \frac{e(g - x)}{2g}$$

$$v = b + f - y - \frac{ey}{2g}$$

oder, wenn man wieder $\frac{2g + e}{g} = \lambda$, und außerdem $a + h + \frac{1}{2} e = c$ setzt; $\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e y dx}{g}$, $\omega \operatorname{Cos} I = (\lambda e - \frac{\lambda e x}{g})\, dx$, und $u = c - \frac{1}{2}\lambda x$, $v = b + f - \frac{1}{2}\lambda y$.

3) Daher wird $\int u\omega \operatorname{Cos} I = \lambda e c x - (\frac{2\lambda e c + \lambda^2 e g}{4g})\, x^2 + \frac{\lambda^2 e x}{6g}$, und für $I = 30°$, oder $x = g(1 - \operatorname{Cos} 30°) = \frac{1}{2} g (2 - \sqrt{3})$, der vollständige Werth dieses Integrals $= \frac{1}{8} \lambda e c g + \frac{1}{48} \lambda^2 e g^2 (5 - 3\sqrt{3})$.

4) Ferner $\int v\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e\,(b+f)}{g}\int y dx - \frac{\lambda^2 e}{2g}\int y^2 dx$; $\int y dx =$ Sect. AOI $- \Delta FOI = \frac{1}{12}\pi g^2 - \frac{1}{8}g^2\sqrt{3} = \frac{1}{24}g^2\,(2\pi - 3\sqrt{3})$; $\int y^2 dx = gx^2 - \frac{1}{3}x^3$, und für $x = \frac{1}{2}g\,(2 - \sqrt{3})$, $= \frac{1}{24}g^3\,(16 - 9\sqrt{3})$; daher $\int v\omega \operatorname{Sin} I = 0{,}045293\,\lambda eg\,(b+f) - 0{,}008574\,\lambda^2 eg^2$, also das Moment:

$$\int(u\omega \operatorname{Cos} I - v\omega \operatorname{Sin} I) = \tfrac{1}{8}\lambda egc - 0{,}045293\,\lambda eg\,(b+f) + 0{,}004487\,\lambda^2 eg^2.$$

5) Da der untere Bogen IB von $I = 30°$ angeht, und bey $I = 90°$ endigt, so betrachte man ihn als ein Stück vom ganzen Quadranten, berechne den Werth des Integrals $\int(u\omega \operatorname{Cos} I - v\omega \operatorname{Sin} I)$ für $I = 90°$, der M heißen mag, und subtrahire davon seinen Werth M′ für $I = 30°$; der Ueberrest $M - M'$ giebt alsdann das gesuchte Moment des Bogens IB.

6) Hierbey ist nun $u = \varkappa + h - x + \frac{e\,(\varkappa - x)}{2\varkappa}$, und $v = b + f - y - \frac{ey}{2\varkappa}$; setzt man also $\frac{2\varkappa + e}{\varkappa} = \lambda'$, und $\varkappa + h + \frac{1}{2}e = d$, so wird:

$M = \frac{1}{2}\lambda' eh\varkappa + \frac{1}{2}\lambda'^2 e\varkappa^2 - \frac{1}{4}\pi\lambda' e\,(f\varkappa + \varkappa^2)$ (§. 264 No. 4 und 7.) $M' = \frac{1}{8}\lambda' e\varkappa d - 0{,}045293\,\lambda' e\varkappa\,(\varkappa + f) + 0{,}004487\,\lambda'^2 e\varkappa^2$, (4.) folglich

$$M - M' = \tfrac{1}{8}\lambda' e\varkappa\,(4h - d) + 0{,}495513\,\lambda'^2 e\varkappa^2 - 0{,}740105\,\lambda' e\,(\varkappa f + \varkappa^2).$$

7) Dies Moment zum vorhergehenden (4.) hinzu addirt, und

$\frac{1}{8}\lambda egc - 0{,}045293\,\lambda egb + 0{,}004487\,\lambda^2 eg^2 = A,$
$0{,}045293\,\lambda eg = C$
$\frac{1}{8}\lambda' e\varkappa\,(4h - d) + 0{,}495513\,\lambda'^2 e\varkappa^2 - 0{,}740105\,\lambda' e\varkappa^2 = B'$
$0{,}740105\,\lambda' e\varkappa = D$ gesetzt, giebt endlich folgende Gleichung:

$$f^2 + \frac{2(C + D)}{mh}.f - \frac{2(A + B)}{mh} = 0.$$

**Exempel.** Es sey a 20′, b = 30′, e = $1\frac{1}{4}$′, h = 10′, m = 1; so wird g = 43,66025 (§. 266.), $\varkappa$ = 16,33975, $\lambda$ = 2,02863, $\lambda'$ = 2,07650, c = 30,62500, 4h — d = 13,03525; $\frac{1}{8}\lambda egc$ = 423,824; 0,004487 $\lambda^2 eg^2$ = 43,999, C = 5,01453; daher A = 317,387. Ferner $\frac{1}{8}\lambda' e\varkappa\,(4h - d)$ = 69,106; 0,495513 $\lambda'^2 e\varkappa$ = 713,050; 0,740105 $\lambda' e\varkappa^2$ = = 512,392; B = 269,264, D = 31,389. Man erhält also:

$$f^2 + 7{,}281\,f - 117330 = 0,$$

und daraus f = 7,786 Fuß.

## Gewölbe mit Bekleidung.

### §. 268.

Wenn der äußere Bogen des Gewölbes mit Mauerwerk bekleidet ist, oder sonst eine Last zu tragen hat, so läßt sich der Seitendruck der ganzen Masse gegen die Widerlagen nicht nach dem bloßen Gewichte der Wölbsteine schätzen; es bedarf also in diesem Falle der vorhin geführte Kalkul noch einer Korrektion, die auf folgende Art bestimmt werden kann:

Fig. 75. 1) Man setze die Höhe der Säule MEme, die auf dem Elemente Ee des äußern Bogens aEb ruhet, $= t$, ihr Gewicht $= \sigma$, so zerfällt dies in eine Kraft, $\sigma$ tang I, nach der Horizontale ES, und in eine senkrecht auf Ee, $= \sigma$ Sec. I.

2) Erstere drückt unmittelbar gegen die Widerlage, und hat also das Umdrehungsmoment $\sigma u$ tang I.

3) Letztere bringt dadurch, daß sie auf den Rücken des Keiles EIei senkrecht wirkt, einen Seitendruck auf die anliegenden Elemente hervor, der sich aus §. 258. bestimmen läßt. Da nemlich die Fugen IE, ie, wenn man sie sich bis zu ihrem Durchschnitte verlängert denkt, den Winkel dI miteinander machen, so hat man hier $\gamma = dI$, $P = \sigma$ Sec. I, also $M = N = \frac{\sigma \text{ Sec I}}{2 \text{ Sin } \frac{1}{2} dI}$ $= \frac{\sigma \text{ Sec I}}{dI}$.

4) Hiervon den entgegengesetzten Druck $\frac{\sigma' \text{ Sec I}'}{dI'}$ des folgenden Elementes subtrahirt, bleibt vom erstern der Theil $- d\left(\frac{\sigma \text{ Sec I}}{dI}\right)$ übrig, der auf die Widerlage wirkt. Wir wollen ihn $\psi$ nennen.

5) Setzt man in §. 262. (2) $z = e$, so wird $Ee = \left(1 + \frac{e}{r}\right) ds$, folglich $Eu = Ee \text{ Cos I} =$

$(1+\frac{e}{r})$ Cos Ids; also der Inhalt von MEme $=$ $(1+\frac{e}{r})$ t Cos Ids $= \frac{\sigma}{m}$. Daher $\frac{\sigma \text{ Sec I}}{dI} = mt$ $(r+e)$, und $\psi = - mtdr - m(r+e)dt$.

6) Um so viel wird also die Kraft $\omega$ durch das Gewicht $\sigma$ vermehrt; daher ist jetzt das Umdrehungsmoment des Gewölbes $= \int (\omega + \psi)$ u Cos I $-$ $(\omega + \psi)$ v Sin I).

7) Zu diesem kommt nun noch die Summe der Momente $\sigma$u tang I (2), welche $= \int (1+\frac{e}{r})$ mtu Sin Ids $= m\int (1+\frac{e}{r})$ tudx ist.

8) Dagegen ist die Widerlage jetzt um das Stück BZ höher als vorhin; setzt man dies $= l$, so wird ihr Gewicht $= m(h+l)f$, und das Moment desselben $= \frac{1}{2}m(h+l)f^2$, wodurch folgende Gleichung entsteht:

$$m\int (1+\frac{e}{r}) \text{tudx} + \int (\omega+\psi)(\text{u Cos I} - \text{v Sin I}) = \frac{1}{2}m(h+l)f^2.$$

## §. 269.

Es sey der Gewölbbogen ein Halbkreis vom Halbmesser a, der Rücken OMZ geradlinigt und horizontal, und seine vertikale Höhe aO über dem Schlußsteine des Gewölbes $= g$, so wird $t = g + \cancel{e} + x - e$ Cos I $= g + e + x - \frac{e(a-x)}{a}$, oder wenn man $\frac{a+e}{a}$

$= \xi$ setzt, $t = g + \xi x$, $\psi = -m\xi^2 a dx$, also $\omega + \psi = (e\lambda - m\xi^2 a) dx$.

Setzt man daher $\lambda - m . \frac{\xi^2 a}{e} = \lambda'$, so erhält man (§. 264.) $\int (\omega + \psi) (u \operatorname{Cos} I - v \operatorname{Sin} I) = \frac{1}{2}\lambda' eha + \frac{1}{2}\lambda'^2 ea^2 - \frac{1}{4}\pi\lambda' e (af + a^2)$.

Ferner ist $u = a + h - x + \frac{c (a - x)}{2a}$, oder, wenn $a + h + \frac{1}{2} e = c$ gesetzt wird, $u = c - \frac{1}{2}\lambda x$; daher $\int (1 + \frac{e}{r}) tudx = \xi \int (g + \xi x) (c - \frac{1}{2}\lambda x) dx = \xi cgx + (\frac{1}{2}\xi^2 \sigma - \frac{1}{4}\lambda\xi g) x^2 - \frac{1}{6}\xi^2\lambda x^3$, welches für $x = a$ den Werth $\xi cga + (\frac{1}{2}\xi^2 c - \frac{1}{4}\lambda\xi g) a^2 - \frac{1}{6}\xi^2\lambda\alpha^3$ bekommt.

Man setze nun noch

$(\xi cg + \frac{1}{2}\lambda' eh) a + (\frac{1}{2}\xi^2 c - \frac{1}{4}\lambda\xi g - \frac{1}{4}\pi\lambda' e + \frac{1}{2}\lambda'^2 e) a^2 - \frac{1}{6}\xi^2\lambda a = A$, so wird endlich:

$$A - \frac{1}{4}\pi\lambda' caf = \frac{1}{2} m (h + l) f^2, \text{ oder}$$

$$f^2 + \frac{\pi\lambda' ea}{2m (h + l)} f - \frac{2 A}{m (\lambda + l)} = 0$$

**Exempel.** Es sey $a = 10'$, $h = 10'$, $e = 1\frac{5'}{6}$, $g = 2'$, $m = 1$; so hat man $\xi = \frac{71}{60}$, $\lambda = \frac{131}{60}$, $\lambda' = \frac{2 ae + e^2 - (a + e)^2}{ae} = - \frac{a}{e} = - \frac{60}{11}$, ferner $b = a + e + g = 13\frac{5}{6}$, $h + l = 23\frac{5}{6}$, $c = 20\frac{11}{12}$. Daraus wird nun $A = - 0{,}497223\ a + 48{,}47948\ a^2 - 0{,}50954\ a^3 = 4333{,}44$, und

$$f^2 - 6{,}591\ f - 363{,}635 = 0$$

also $f = 22{,}647$ Fuß.

Anmerk. Ausser den hier betrachteten Tonnengewölben giebt es noch mancherley andere Gewölbarten, unter denen die sogenannten Kuppelgewölbe (voutes en dôme) besonders für die Statik ein sehr wichtiger Gegenstand sind. Da bey diesen die Berechnung des Seitendrucks auf eine ganz andere Art geführt werden muß, so gestattet es der Zweck dieses Buches nicht, mich näher darauf einzulassen. Man ziehe darüber folgende Schriftsteller zu Rathe:

Bossut, Memoires de l'acad. de Paris, 1770.

Frisi, Opera Math. P. I. pag. 72. der Hrn. Bossut's Formel in mehrern Punkten aber zum Theil falsch, abgeändert hat.

Salimbeni de gli archi e delle Volte. Verona 1787; ein in aller Hinsicht vortrefliches Werk.

## Neuntes Kapitel.

# Von der Cohäsion fester Körper.

### §. 270.

Es läßt sich keine mechanische Operation gedenken, bey der nicht feste **Punkte** ein wesentliches Erforderniß wären. So wird beym Hebel vorausgesetzt, daß er eine feste Unterlage habe; die Rolle und der Flaschenzug werden an einen festen Punkt aufgehängt, der sowohl Kraft als Last, so wie die ganze Maschine trägt; das Rad dreht sich um seine Axe, die auf festen Lagern ruhet u. s. w.

Dergleichen feste Punkte kann man nun auf keine andere Art, als durch die unbeweglichen Theile der Maschine erhalten, die sich entweder geradezu, oder mittelbar gegen den Boden stützen, und auf ihn den Druck, den sie auszuhalten haben, übertragen. Also muß man von diesen genau anzugeben wissen, wie viel Widerstand sie zu leisten vermögend sind, damit man ihnen nicht mehr zu tragen überlasse, als ihre Festigkeit es gestattet.

§. 271.

Die Festigkeit eines Körpers beruhet auf der Stärke des Zusammenhanges oder der Cohäsionskraft seiner Theile, und läßt sich also dadurch bestimmen, daß man die Kraft sucht, die erfordert wird, seine Theile von einander zu trennen. Da dies auf zweyerley Art geschehen kann, so unterscheidet man bey ihm **absolute** und **respektive** Festigkeit von einander; erstere besteht in der Kraft, die man anwenden muß, ihn zu zerreißen; letztere in derjenigen, die nöthig ist, um ihn zu zerbrechen. Eigentlich liegt dieser Unterschied nicht sowohl im Körper selbst, als vielmehr in der verschiedenen Art, wie man die Trennung seiner Theile hervorzubringen sucht.

Anmerk. Muschenbrök hat bey einer Menge von Körpern Versuche, sowohl auf die eine als die andere Art, angestellt, und uns eine schätzbare Sammlung von Resultaten hinterlassen. S. dessen phys. experim. et geom. differt. pag. 421 u. f. wie auch dessen introd. ad phil. nat. Tom. I. Cap. XXI.

## Absolute Festigkeit der Körper.

§. 272.

Um einen Körper zu zerreißen, müssen auf ihn zwey gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht werden; will man bloß eine einzige Kraft dazu anwenden, so muß der andere Theil des Körpers so befestigt seyn, daß er dem Zuge der Kraft nicht nachgeben kann. Muschenbroek befestigt den untern Theil des Körpers an den Boden, und bringt seinen obern Theil mit dem Arme eines Wagebalken in Verbindung, der durch ein entgegengesetztes Gewicht aufwärts gezogen wird. Das Nähere dieser Versuche findet man a. a. O. umständlich beschrieben.

Wenn sonst keine Nebenumstände eintreten, die den Versuch ungewiß machen, so erfolgt die Trennung allemal in einer Ebene, die auf die Richtung der Kraft senkrecht ist; z. B. beym vertikalen Zuge der Kraft in einem horizontalen Querschnitte des Körpers.

## §. 273.

Wenn der Körper durchaus gleichartig ist, so hängen alle seine Theile mit gleicher Kraft unter einander zusammen; also verhält sich dann seine absolute Festigkeit wie die Menge der Theile, die beym Zerreißen desselben von einander getrennt werden, folglich wie der Querschnitt, in dem die Trennung geschieht.

Daher ist die Cohäsion eines solchen Körpers für die Einheit der Fläche eine unveränderliche Größe, und kann also zum Maaße seiner Festigkeit dienen. Man setze sie $= A$; die Cohäsion des Körpers für jeden andern Querschnitt $Z = P$, so hat man: $P = AZ$.

§. 274.

**Folgerung.** 1. Ist also von irgend einer Materie das Maaß ihrer Festigkeit bekannt, so läßt sich daraus bestimmen, wie viel Kraft angewandt werden muß, um ein aus ihr bestehendes Prisma von gegebener Grundfläche seiner Länge nach zu zerreißen.

2. Für einen senkrechten Cylinder, dessen Grundfläche einen Halbmesser $= f$ hat, ist $Z = \pi f^2$, also $P = \pi A f^2$; daher verhalten sich die absoluten Festigkeiten zweyer Cylinder, die aus einerley Materie bestehen, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Grundflächen.

3. Gegenseitig kann man aus Versuchen, durch die man zwey zusammen gehörige Werthe von Z und P gefunden hat, den Werth von A bestimmen.

**Exempel.** Nach **Muschenbrök** zerriß ein Parallelapipedum von weißem Glase, 0,2 Zoll breit und dick, von 78 ℔; ein anderes, das 0,16 Zoll ins Gevierte hatte, von 50 ℔. Ersterer Versuch gäbe also für 1 Quad. Zoll Fläche $A = 1950$ ℔; letzterer $A = 1953$ ℔.

## Stärke des Holzes.

§. 275.

Die Festigkeit des Holzes läßt sich nur einem bestimmten Maaße unterwerfen, wenn man sie im eingeschränkten Sinne nimmt, und sie bloß auf die Stärke seiner Fibern bezieht, die durch den ganzen Stamm nach einerley Richtung, gewöhnlich parallel mit der centrischen Linie des Stammes, fortlaufen. Wiewohl auch diese wieder unter sich zusammenhängen, so ist doch der Grad dieser Cohäsion größtentheils so verschieden, daß sich darüber nichts mit Gewißheit festsetzen läßt. Wenn also ohne weitern Zusatz von der Stärke des Holzes die Rede ist, so versteht man darunter allemal die Kraft, die erforderlich ist, es seiner Länge nach zu zerreißen.

## §. 276.

Nach den Beobachtungen, die **Muschenbroek** in s. Introd. ad phil. nat. über die Stärke des Holzes mittheilt, haben die verschiedenen ringförmigen Schichten, aus denen das Holz besteht, nicht einerley Festigkeit; vom Marke an, das allemal am schwächsten ist, nimmt die Stärke der Fiber nach und nach zu, erreicht nahe am Splinte ihr Maximum, und leidet dann wieder bis zur Rinde eine Abnahme. Dagegen findet in der Festigkeit eines Stammes seiner Länge nach kein merklicher Unterschied statt, so daß man in der Regel den obern Theil desselben, und den untern, nahe an der Wurzel, als gleich stark annehmen kann. Obgleich der Boden auf die Festigkeit des Holzes einigen Einfluß hat, so stimmen doch die Versuche bey einerley Holzart ziemlich genau zusammen; nach Muschenbroek zerriß ein Parallellepipedum aus Tannenholz, wovon jede Seite 0,27 Zoll hielt, von 600 ℔; ein anderes, das

0,2 Zoll ins Gevierte betrug, von 333 ℔. Nimmt man hierbey den Quad. Zoll Rheinl. als Einheit an, so giebt ersterer Versuch A = 8230 ℔, letzterer A = 8325 ℔; wozwischen offenbar wenig Verschiedenheit herrscht. Die Versuche, die er bey andern Holzarten angestellt hat, geben auf gleiche Art für das Maaß der Festigkeit

| | | |
|---|---|---|
| des Buchen- und Eschenholzes | | 17147 ℔ Cöln: |
| des Eichenholzes | — — | 15773 — |
| des Erlen- und Lindenholzes | | 13717 — |
| des Ulmenholzes | — — | 13031 — |
| des Fichtenholzes | — — | 7344 — |

## Stärke der Seile.

### §. 277.

Wenn man die Seile aus gestreckten und parallelen Fäden zusammensetzte, so würde sich, wegen ihrer cylindrischen Form, die Stärke derselben wie das Quadrat ihres Durchmessers verhalten (§. 274. 2.); da sie aber aus gewundenen Fäden bestehen, so kann man nicht erwarten, daß dies Gesetz im strengsten Verstande bey ihnen statt finde. Indeß wichen doch die Resultate, die man durch Versuche gefunden, zumal bey Seilen, die über $\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser haben, so wenig davon ab, daß man in der Ausübung diesen Unterschied außer Acht lassen, und jenes einfache Verhältniß ihrer Stärke als völlig richtig annehmen darf.

Nach Muschenbroeks Angaben zerriß

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ein Seil von | | | 6 | Paris. Lin. Diam. von | | | | 190 | ℔ |
| — | — | — | 8 | — | — | — | — | 330 | — |
| — | — | — | 10 | — | — | — | — | 540 | — |
| — | — | — | 12 | — | — | — | — | 750 | — |
| — | — | — | 15 | — | — | — | — | 990 | — |
| — | — | — | 16 | — | — | — | — | 1030 | — |
| — | — | — | 20 | — | — | — | — | 2080 | — |
| — | — | — | 24 | — | — | — | — | 3000 | — |
| — | — | — | 30 | — | — | — | — | 4730 | — |

Hebt man unter diesen Angaben die vierte aus, so erhält man für die Stärke eines Seiles, dessen Durchmesser in pariser Zollen $= a$ ist, $750\ a^2$ ℔. Hiermit stimmen die übrigen Angaben so genau überein, daß die geringen Abweichungen, da sie überdies sehr unregelmäßig sind, auch wohl von zufälligen Nebenursachen herrühren können.

## §. 278.

Da die einzelnen Schnüre, aus denen ein Seil besteht, durch das Drehen an sich schon in eine Spannung versetzt werden, so ist es begreiflich, warum das Seil desto weniger Stärke besitzt, je enger seine Schnüre zusammen gewunden sind. Ein Seil, dessen Schnüre um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge eingedreht waren, hielt nur 4321 ℔; ein anderes von eben der Dicke, bey dem die Verkürzung $\frac{1}{4}$ betrug, hielt 5187 ℔. Drey andere Seile von gleicher Dicke gaben folgende Resultate:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bey $\frac{1}{3}$ Verk. | betrug | die Stärke | 4098 ℔ |
| — $\frac{1}{4}$ | — | — | 4850 — |
| — $\frac{1}{5}$ | — | — | 6205 — |

Da beyde Versuche sehr nahe einerley Verhältniß der Stärke geben, so erhält man aus vorhergehender Formel, die sich auf Seile von mittlerer Windung bezieht:

| Verkürzung | Stärke in ℔ |
|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $630 \cdot a^2$ |
| $\frac{1}{4}$ | $750 \cdot a^2$ |
| $\frac{1}{5}$ | $960\ a^2$. |

## §. 279.

Aus eben dem Grunde haben die Seile im nassen Zustande weniger Stärke, als wenn sie trocken sind, da sie bekanntlich durch die Nässe um ein Beträchtliches zusammenlaufen.

Von zweyen gleichen Seilen zerriß das eine, welches naß gemacht wurde, von 4000 ℔; das andere, welches trocken blieb, hielt dagegen 5400 ℔. Von zweyen andern hielt das nasse nur 5800 ℔, das trockne hingegen 7800 ℔.

Nach ersterm Versuche hat die Stärke des trocknen Seiles zu der des nassen das Verhältniß $1 : 0{,}741$;

Nach letzterm das Verhältniß — $1 : 0{,}743$.

Das mittlere Verhältniß zwischen der Stärke beyder wäre also — — $1 : 0{,}742$

Um die Seile vor der Nässe zu sichern, werden sie entweder in Theer getränkt, oder gepicht. Dadurch ver-

verlieren sie zwar auch an Stärke, und zwar in eben dem Verhältnisse, als durch die Nässe: behalten aber den anfänglichen Grad ihrer Stärke eine lange Zeit hindurch, und sind aus diesem Grunde dauerhafter als die ungepichten Seile, die durch öftere Abwechselung von Trockniß und Nässe immer mehr an Haltbarkeit abnehmen.

## §. 280.

Ein gewöhnliches gleich dickes Seil ist gegen das obere Ende zu, nach Verhältniß der Last, die es da zu tragen hat, schwächer, als am untern Ende: denn jede seiner Stellen trägt nicht allein die unten angehängte Last, sondern auch das Gewicht des ganzen Seilsstücks, das zwischen ihr und der Last enthalten ist. Daher ist ein solches Seil allemal oben am meisten der Gefahr des Zerreißens ausgesetzt. Soll dies nicht der Fall seyn, so muß das Seil nach oben zu in dem Maaße dicker werden, als die Last durch das darunter liegende Seilstück zunimmt. Da man, nach des Hrn. Baillet de Belloy *) Berichte, dergleichen conische Seile bey der Marine in Frankreich wirklich verfertigt, und auf den dasigen Schiffen gebraucht, so will ich die Gründe, worauf ihre richtige Form beruhet, hier kurz auseinander setzen.

Fig. 33. 1) Es sey der Durchmesser des Seiles am untern Ende B = a, in der Entfernung BM = x

*) Journal de physique May 1788 pg. 375.

vom untern Ende, $= u$; das specifische Gewicht der Seilmasse $= \varkappa$; die in B hängende Last $=$ G.

2) An der Stelle B hat also das Seil die Last G zu tragen; in M, außer derselben, noch das Gewicht des Stücks BM, welches für jetzt s heißen soll; folglich zusammen: $G + s$.

3) Man hat also folgende Proportion:

$a^2 : u^2 = G : G + s$; welche

$u^2 = a^2 + \frac{a^2 s}{G}$ giebt. Davon ist das Differenzial: $2udu = \frac{a^2 ds}{G}$.

4) Da ds das Gewicht des Elementes Mm, und dessen Inhalt $= \frac{1}{4} \pi u^2 dx$ ist, so hat man $ds = \frac{1}{4} \pi \varkappa u^2 dx$, folglich

$$2Gudu = \frac{1}{4} \pi \varkappa a^2 u^2 dx$$

oder $\frac{2Gdu}{u} = \frac{1}{4} \pi \varkappa a^2 dx$

5) Hiervon ist das Integral:

$$2G \log \text{nat}\, u = C + \frac{1}{4} \pi \varkappa a^2 x,$$

und da für $x = 0$, $u = a$ ist:

$$C = 2G . \log \text{nat}\, a, \text{ folglich:}$$

$$\log \text{nat.} \frac{u}{a} = \frac{\pi \varkappa a^2 x}{8G},$$

$$u = a . e^{\frac{\pi \varkappa a^2 x}{8G}}$$

6) $\frac{1}{4} \pi \varkappa a^2 x$ drückt das Gewicht eines Seilstücks aus, das die Länge x, und allenthalben die Dicke a hat.

Da dies gegen G allemal gering seyn wird, so folgt, daß der Exponent $\frac{\pi\varkappa a^2 x}{8G}$ ein kleiner Bruch sey.

7) Bekanntlich ist nun:

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{1 \,.\, 2} + \frac{Z^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots,$$

wovon hier füglich das dritte und die folgenden Glieder wegbleiben können, so daß:

$$u = a\left(1 + \frac{\pi\varkappa a^2 \pi}{8G}\right) = a + \frac{\pi\varkappa a^3 x}{8G} \text{ wird.}$$

8) Weil sich nach dieser Formel die Zunahme der Dicke wie die der Länge x verhält, so sieht man, daß das Seil eine conische Form erhalte.

9) Es sey l die Länge des ganzen Seiles, so wird, für $x = l$, der Durchmesser des obern Endes $u = a + \frac{\pi\varkappa a^3 l}{8G}$, oder, wenn das Gewicht des Seiles, das die Länge l, und allenthalben die Dicke a hätte, $= F$ gesetzt wird: $u = a + \frac{aF}{2G}$. Das Verhältniß des untern Durchmessers zum obern wäre also wie $1 : 1 + \frac{F}{2G}$.

10) Die untere Dicke a hängt von G ab; man hat nemlich, wenn man auf Nässe Rücksicht nimmt, der das Seil ausgesetzt seyn kann: $G = 0{,}742 \times 750a^2 = 556a^2$, also $a^2 = 0{,}0017985 \,.\, G$, und $a = 0{,}00424 \sqrt{G}$.

# Respektive Festigkeit.

## §. 281.

Fig. 76. Wenn man auf die Endpunkte A und B eines prismatischen Körpers AFB zwey senkrechte Kräfte wirken läßt, und diesen in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte C ihre Summe entgegensetzt, so haben die drey Kräfte ein Bestreben, den Körper zu **zerbrechen**. In manchen Fällen kann die eine oder die andere dieser Kräfte in der bloßen Rückwirkung eines Widerstandes bestehen; so z. B. läßt sich der Körper zerbrechen, wenn man ihn in C unterstützt, und an den Seiten mit Gewichten behängt; oder umgekehrt, wenn die Unterstützung in den Endpunkten A und B geschieht, und die Kraft auf C angebracht wird; endlich kann man auch den einen Arm BC ganz einschließen, und bloß den andern Arm CA der Wirkung der Kraft überlassen. In allen diesen Fällen erfolgt der Bruch, wenn anders der Körper gleichförmig stark ist, im Punkte C, weil da das Moment des Zerbrechens von beyden Seiten her am größten ist.

## §. 282.

**Aufgabe.** Der Körper sey im Punkte C unterstützt; auf seinen Endpunkt A drücke ein Gewicht, oder sonst eine Kraft, $= M$; man fragt, wie groß diese seyn müsse, um den Körper zu zerbrechen.

**Aufl.** 1) Es sey CD das Profil des Querschnittes, in welchem der Bruch geschieht, so wirken am

Winkelhebel ACD Cohäsion und Last einander entgegen. Letztere strebt den Arm AC, und mit ihm die Fläche CD, um C zu drehen; erstere widersteht dieser Umdrehung nach einer auf CD senkrechten Richtung.

2) Man setze die Cohäsion für die Einheit der Fläche $= A$, $CX = x$, das Element der Fläche $Xx = ds$, so ist die nach $X\xi$ dieser Stelle ziehende Kraft $= Ads$, und ihr Moment $= Axds$. Also die Summe aller Momente, oder das Moment der Cohäsion der ganzen Fläche $= A\int xds$.

3) Nennt man $y$ die Breite der Höhe bey $X$, so ist $ds = ydx$, folglich jenes Moment auch $= A\int yxdx$.

4) Diesem muß nun das Moment der Kraft $M$ gleich seyn; setzt man also $CA = f$, so hat man:

$$Mf = A\int yxdx.$$

5) Liegt der Körper horizontal, so kommt noch das Moment in Betracht, das der Arm AC durch sein eigenes Gewicht gegen C hat. Dies Gewicht ist, bey gleicher Dicke des Körpers, der Länge a proportional, also = [illegible], wenn das Gewicht für die Länge 1, $= K$ gesetzt wird; folglich, da der Schwerpunkt des Armes in die Mitte von AC fällt, das Moment desselben $= \frac{1}{2}f^2K$. Man erhält also:

$$Mf + \tfrac{1}{2}Kf^2 = A\int yxdx.$$

## §. 283.

Folgerung. 1. Ist der Querschnitt des Prisma's ein Rechteck, dessen Höhe $= c$, Breite $= b$, so ist $y$

unveränderlich, also $\int yxdx = \frac{1}{2}bx^2$; darin $x = c$ gesetzt, giebt:

$$Mf + \frac{1}{2}Kf^2 = \frac{1}{2}Ac^2b.$$

2. Läßt man das Moment $\frac{1}{2}Kf^2$ gegen $Mf$ weg, so wird $M = \frac{Ac^2b}{2f}$; folglich verhält sich die Kraft, die erfordert wird, ein Parallelepipedum zu zerbrechen, wie das Maaß seiner absoluten Festigkeit: wie das Quadrat seiner Dicke, einfach wie seine Breite; und verkehrt, wie die Entfernung der Kraft am Unterstützungspunkte.

3. Der Querschnitt des Prisma's mag eine Gestalt haben, welche man will, so hat doch das Integral $\int yxdx$ für ein und dasselbe Prisma jedesmal einen bestimmten Werth. Setzt man diesen $= e^3$, so wird $M = \frac{Ae^3}{f}$.

## §. 284.

**Aufgabe.** Das Prisma sey in den beyden Endpunkten A und B unterstützt, und die Kraft M auf den Punkt C angebracht; wie groß wird sie in diesem Falle seyn müssen, wenn sie das Prisma zerbrechen soll?

**Aufl.** 1) Man setze die Kräfte, worin sie sich auf die Punkte A und B vertheilt, $= M'$ und $M''$, so ist jetzt $M'$ was vorhin $M$ war; also, wenn man wieder $CA = f$, und außerdem $CB = g$ setzt: $M' = \frac{Ae^3}{f}$, und auf gleiche Art: $M'' = \frac{Ae^3}{g}$.

2) Nun ist $M' = \frac{Mg}{f+g}$, $M'' = \frac{Mf}{f+g}$ (§. 19.);

folglich erhält man: $\frac{Mg}{f+g} = \frac{Ae^3}{f}$; $\frac{Mf}{f+g} = \frac{Ae^3}{g}$, und

aus beyden Gleichungen: $M = \frac{Ae^3(f+g)}{fg}$.

§. 295.

Um den Punkt C zu finden, wo sich das Prisma, wenn es in A und B unterstützt ist, am leichtesten zerbrechen läßt, suche man den Werth von f, wofür M ein Minimum wird. Zu dem Ende setze man die ganze Länge des Prisma's $AB = a$, so wird $f + g = a$, $g = a - f$, folglich $M = \frac{Ae^3a}{af - f^2}$. Dieser Ausdruck ist dann am kleinsten, wenn sein Nenner $af - f^2$ am größten, also $(a - 2f)\,df = 0$, oder $f = \frac{1}{2}a$ ist; daraus folgt also, daß ein Prisma in der Mitte der Gefahr des Zerbrechens allemal am meisten ausgesetzt sey.

Für diesen Fall erhält man: $M = \frac{4Ae^3}{a}$, und

beym Parallelepipedum: $M = \frac{2Abc^2}{a}$.

## Festigkeit steinerner Mauern.

§. 286.

Wir haben bisher die Festigkeit der Mauern bloß nach ihrer Stabilität beurtheilt, oder sie als Massen betrachtet, die durch ihr Gewicht allein vor dem Umsturze gesichert sind. Da sie aber auf den Boden nicht, wie andere feste Körper, bloß hingestellt, sondern mit demselben durch Kalk oder Mörtel verbunden werden, so liegt noch ein zweyter Grund ihrer Festigkeit in der Cohäsion. Diese erfordert zwar erst eine gewisse Zeit, ehe sie ihre volle Wirksamkeit erreichen kann; allein da man auch gewöhnlich einer Mauer diese Zeit, sich zu befestigen, gestattet, so ist es allerdings erlaubt, bey derselben auf Cohäsion, als eine wichtige Ursache ihrer Stärke, Rücksicht zu nehmen.

## §. 287.

Fig. 77. **Aufgabe.** Es sey das Rechteck ABCD das Profil einer gleichdicken Mauer; ihre Dicke CD $= c$, ihre Höhe AC $= h$, und die Länge derselben $= b$; außerdem sey das Gewicht eines Kubikfußes der Steinmasse $= m$, und die Cohäsion des Steines mit dem Kalke für jeden Quadratfuß Fläche $= A$. Man sucht das Moment der ganzen Kraft, mit der die Mauer der Umdrehung um den Punkt C widersteht.

**Aufl** 1) Wir wollen die Kraft, die oben in A senkrecht auf AC angebracht werden muß, um den Widerstand der Mauer aufzuheben, $= M$ setzen, so hat diese am Arme AC des Winkelhebels ACD das Umdrehungsmoment $= Mh$, dem also die Mauer, theils durch ihr Gewicht, theils durch die Kraft, womit sie in der Grundfläche CD an dem Boden haftet, ein gleiches Moment entgegensetzen muß.

2) Ihr Gewicht ist nun $= mcbh$, und wirkt aus ihrem Schwerpunkte G auf die Mitte E des Hebelarmes CD senkrecht; hat also an diesem das Moment $CE \,.\, mcbh = \frac{1}{2} mc^2bh$.

3) Die Cohäsion widersteht einem Theile von M, $= \frac{Ac^2b}{2h}$ (§. 287. 2.), mit dem sie folglich einerley Moment $\frac{1}{2} Ac^2b$ hat. Beyde Momente zusammengenommen geben daher:

$$Mh = \tfrac{1}{2} c^2b\,(A + mh).$$

## §. 288.

Nach den von **Lorgna** *) über die Cohäsion zwischen Kalk und Stein mitgetheilten Versuchen, ist für Felssteine $A = 1728$ pariser Pfunde, für Backsteine $A = 1296$ ℔; dabey wog der Kubikfuß des erstern 200 ℔, des letztern 140 ℔. Substituirt man diese Werthe für A und m in vorhergehender Formel, so erhält man für Felssteine:

$$Mh = \tfrac{1}{2} c^2b\,(1728 + 200h),$$

und für Backsteine:

$$Mh = \tfrac{1}{2} c^2b\,(1296 + 140h).$$

**Exempel.** Wenn man nach dieser Formel die in §. 269. gefundene Gleichung für f verbessern will, so ist dort f, h + 1, 1, was hier c, h, b genannt ist; daher hat man für das eigentliche Moment des Widerstandes daselbst: $\frac{1}{2} mf^2\,(8{,}64 + h + 1)$, und die Gleichung ändert sich also in sofern ab, daß man allent-

*) Saggi di Statica e di meccanica pag. 91.

halben darin für $h + l$, $h + l + 8{,}64$ setzen muß. Man erhält also in dem beygefügten Exempel:

$$f^2 - 4{,}838\,f - 266{,}895 = 0,$$

woraus $f = 18{,}954$ Fuß wird.

### §. 289.

**Aufgabe.** Die Mauer sey an der Seite, wo sie der Gefahr des Umsturzes ausgesetzt ist, noch durch eine Widerlage ACF verstärkt; man fragt, wie groß jetzt die Kraft M seyn müsse, um den Widerstand der Mauer aufzuheben.

**Aufl.** 1) Das Gleichgewicht zwischen Kraft und Widerstand bezieht sich jetzt auf den Winkelhebel AFD. An diesem hat die Kraft M, wie vorhin, das Moment Mh; dagegen ist jetzt das Moment des Rechtecks ACBD $= mcbh \,.\, FE$, oder, wenn wir $CF = d$ setzen, $= mcbh\,(d + \frac{1}{2}c)$.

2) Ferner ist das Gewicht des Prisma's AFC $= \frac{1}{2}mdbh$, und wenn man aus seinem Schwerpunkte I auf FC das Perpendikel IK fällt, $CK = \frac{2}{3}d$, also sein Moment $= \frac{1}{3}md^2bh$.

3) Endlich ist das Moment des Widerstandes von Seiten der Cohäsion $= \frac{1}{2}A\,(c + d)^2 b$; folglich alles dreyes zusammengenommen:

$$Mh = mcbh(d + \tfrac{1}{2}c) + \tfrac{1}{3}md^2bh + \tfrac{1}{2}A(c + d^2)b$$
$$= bc\,(\tfrac{1}{2}c + d)\,(A + mh) + bd^2\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{3}mh).$$

4( Setzt man in dieser Gleichung für A und m ihre Werthe aus §. 288, so erhält man

für Felsstein: $Mh = (bc^2 + 2bcd)(864 + 100h)$
$+ bd^2 (864 + 66\frac{2}{3}h)$

für Backstein: $Mh = (bc^2 + 2bcd)(648 + 70h)$
$+ bd^2 (648 + 46\frac{2}{3}h)$.

## Festigkeit dehnbarer und elastischer Körper.

### §. 290.

Die im §. 282. gefundene Relation zwischen absoluter und respektiver Festigkeit gründet sich auf die Voraussetzung, daß in der ganzen Fläche des Bruchs die Theile des Körpers zu gleicher Zeit von einanderreißen; daher schränkt sie sich bloß auf solche Körper ein, bey denen das Zerbrechen plötzlich geschieht, wohin z. B. die verschiedenen Steinarten, so wie alle spröden Körper, als Glas, spröde Metalle u. s. w. gehören. Ganz anders verhält sich dagegen die Sache bey Körpern, die einer Ausdehnung und Zusammenziehung fähig sind; diese nehmen vor dem Zerbrechen allemal eine mehr oder minder gebogene Form an, und zerreißen deshalb an der konvexen Seite, weil sie da am meisten ausgedehnt sind, zuerst; worauf dann nach und nach auch der Bruch in den übrigen Stellen erfolgt. Dies allmählige Zerbrechen macht, daß ihre respektive Festigkeit nach Verhältniß ihrer absoluten weit geringer ist, als bey unbiegsamen Körpern, wie in den folgenden §§ näher gezeigt werden soll.

### §. 291.

**Ueber die Gesetze, nach denen prismatische Körper**

durch angehängte Gewichte ausgedehnt werden, hat man zwar noch keine genauen Versuche angestellt; da aber bey Körpern, die sich zerbrechen lassen, die Ausdehnung nach Verhältniß ihrer Länge immer sehr gering ist, so läßt sich für diese als ein sicheres Axiom annehmen:

**daß die Ausdehnung eines und desselben Körpers dem Gewichte, durch das sie hervorgebracht wird, proportional sey.**

Daraus folgt nun unmittelbar:

Fig. 78. 1) Daß bey einerley Querschnitt des prismatischen Körpers AB, und einerley angehängtem Gewichte G, die Ausdehnung desselben Ff sich wie seine Länge AF verhalten müsse.

Man denke sich nemlich den Körper in lauter gleiche Querstreifen wie MNmn getheilt, so leidet jeder derselben vom Gewichte G eine gleiche Spannung, folglich auch gleiche Ausdehnung $m\mu$; daher verhält sich die Ausdehnung Ff des ganzen Körpers ABFI wie die Menge der Streifen, also wie seine Länge.

2) Daß bey einerley Länge des Körpers das Gewicht sich wie sein Querschnitt verhalten müsse, wenn es dieselbe Ausdehnung in ihm hervorbringen soll.

Gedenkt man sich nemlich jetzt den Körper seiner Länge nach in lauter gleiche Prismen getheilt, so erfordert jedes derselben, um einerley Ausdehnung zu bekommen, einerley angehängtes Gewicht; will man daher im ganzen Körper diese Ausdehnung hervorbringen, so ist dazu in eben dem Verhältnisse mehr Gewicht nöthig, als die Menge der gleichen Prismen, oder der Querschnitt des Körpers größer ist.

3. Man setze nun, es sey bey einem Prisma von gegebener Materie für den Querschnitt 1, Länge 1, zur Ausdehnung $\varepsilon$ das Gewicht G nöthig, so erfordert ein Prisma dessen Querschnitt $= S$, Länge $= 1$, zu eben der Ausdehnung $\varepsilon$ das Gewicht GS (2.); folglich wird bey einem Prisma dessen Querschnitt $= S$, Länge $= l$, durch das Gewicht GS, die Ausdehnung $\varepsilon l$ hervorgebracht (1). Setzt man also für eben die Dimensionen des Prisma's die Ausdehnung, die durch das Gewicht P entsteht, $= z$, so hat man

$$GS : P = \varepsilon l : z$$

$$\text{folglich: } z = \frac{P\varepsilon l}{GS}$$

4. Da die Ausdehnung allemal der Länge des Körpers proportional ist, so setze man $z = \omega l$; alsdann wird $\omega = \frac{\varepsilon P}{GS}$, wo $\varepsilon$ den Theil der Länge bedeutet, um den ein Prisma vom Gewichte G ausgedehnt wird, dessen Querschnitt $= 1$ ist.

5. Eben diese Formel gilt nun auch offenbar für die Verkürzung eines Prisma's, wenn es durch ein Gewicht oder sonst eine Kraft zusammengedrückt wird.

## §. 292.

Fig. 79. **Aufgabe.** Ein Parallelepipedum, dessen Länge $CA = f$, Dicke $IE = c$, und Breite $= b$ ist, sey im Punkte I unterstützt, und an seinem Endpunkte

A mit einem Gewichte M behängt; wie groß wird dies seyn müssen, um an der unterstützten Stelle eine gegebene Krümmung hervor zu bringen?

Aufl. 1) Indem der Körper durch das Gewicht gebogen wird, wird seine obere Seite ausgedehnt, und die untere zusammengedrückt; es muß also zwischen beyden eine Stelle C geben, die weder Ausdehnung noch Zusammenziehung leidet, und folglich seine natürliche Länge behält.

2) Es sey Cc ein Element dieser Länge, O der Mittelpunkt seiner Krümmung, so schließen die Halbmesser OC und Oc einen gebogenen Querstreif Ecli des Körpers ein, und man hat für jede andere Stelle P desselben:

$$OC : OP = Cc : P\pi$$

oder, wenn man $OC = r$, $CP = x$, und $Cc = df$ setzt:

$$r : r + x = df : P\pi, \text{ also}$$

$$P\pi = \frac{(r+x)\,df}{r} = df + \frac{xdf}{r}$$

3) Da nun das Element $P\pi$ im natürlichen Zustande $= Cc$ war, so ist es durch das Biegen um $\frac{xdf}{r}$, oder um den Theil $\frac{x}{r}$ seiner Länge ausgedehnt; setzt man also die Kraft, die zu dieser Ausdehnung erfordert wird, $= dp$; die Dicke des Elementes $Pp = dx$; so hat man: $S = bdx$, $\omega = \frac{x}{r}$, $P = dp$, folglich:

$$\frac{x}{r} = \frac{\varepsilon dp}{Gbdx}, \text{ und } dp = \frac{Gbxdx}{\varepsilon r}.$$

4) Diese Kraft wirkt demnach im Punkte P am Winkelhebel ECa dem Gewichte M entgegen, und hat an demselben das Moment $xdp = \frac{Gbx^2dx}{\varepsilon r}$. Hiervon ist das Integral $= \frac{Gbx^3}{3\varepsilon r}$, und für $x = CE = g$, die Summe der Momente von allen zwischen C und E liegenden Elementen $= \frac{Gbg^3}{3\varepsilon r}$.

5) Es bleibt jetzt noch übrig, den Widerstand von Seiten der unterhalb C liegenden Elemente zu bestimmen. Da diese sich im zusammengedruckten Zustande befinden, so haben sie ein Bestreben, sich auszudehnen, und wirken daher auf gleiche Art am Arme IC des Winkelhebels ICa dem Gewichte M entgegen. Setzt man also im vorigen Integrale $x = CI = c - g$, so erhält man für die ganze Summe ihre Momente: $\frac{Gb(c-g)^3}{3\varepsilon r}$

6) Beyde Momente zusammengenommen müssen nun dem Momente M . Ca des Gewichtes M gleich seyn. Setzt man darin für Ca die ganze Länge $CA = f$, (von der Ca immer nur wenig abweichen kann, wofern die Biegung des Armes CA nicht sehr beträchtlich ist) so wird:

$$\frac{Gb[g^3 + (c-g)^3]}{3\varepsilon r} = Mf.$$

7) Um aus dieser Formel die Größe G wegzuschaffen, müßte man das Verhältniß von g zu c kennen, oder im Querschnitte ECI die Lage des Punktes C an-

zugeben wissen. Da aber dieser Punkt höher oder tiefer fällt, je nachdem der Körper sich leichter zusammendrücken oder ausdehnen läßt, so beruhet das Verhältniß $g : c$ auf der jedesmaligen Beschaffenheit des Körpers, und kann also nur aus der Erfahrung abgeleitet werden. Setzen wir vorläufig $g = \varkappa c$, so wird $g^3 + (c - g)^3 = c^3 (1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)$, folglich:

$$Mf = \frac{Gbc^2 (1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon r}$$

§. 293.

Die Krümmung des Körpers nimmt also in dem Maaße zu, wie man das Gewicht M vergrößert, bis zuletzt der Körper oben bey E so weit ausgedehnt wird, daß er an dieser Stelle zerreißen muß. Sobald dies geschieht, eefolgt der Bruch, ohne Vermehrung des Gewichtes, auch nach und nach in den übrigen Stellen des Querschnittes ECI: denn man sieht offenbar, daß der Widerstand von Seiten des Körpers immer mehr abnehmen müsse, je weniger Theile von ihm in der Fläche ECI noch miteinander zusammenhängen.

Um daher das Gewicht M zu finden, wodurch der Bruch des Körpers bewirkt wird, setze man G = dem Maaße A der absoluten Festigkeit de[s] Körpers; alsdann bezeichnet $\varepsilon$ den Coefficienten der Ausdehnung, die unmittelbar dem Zerreißen vorhergeh[e]t, folglich, da die Ausdehnung des obern Elementes $Ee = \frac{gdf}{r}$ ist, (§. 292. 3.) hat man: $\varepsilon = \frac{g}{r}$, $\varepsilon r = g = \varkappa c$, also:

Mf

$$Mf = Abc^2 \left(\frac{1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2}{3\varkappa}\right);$$

oder, wenn man den beständigen Faktor $\frac{1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2}{3\varkappa}$ $= \lambda$ setzt:

$$Mf = \lambda Abc^2.$$

## §. 294.

Vergleicht man diese Formel mit der, die wir vorhin (§. 283. 2.) für die respektive Festigkeit unbiegsamer Körper gefunden haben, so zeigt sich, daß beyde bloß in dem beständigen Coefficienten von einander abweichen. In letzterer ist nemlich allemal $\lambda = \frac{1}{2}$; in ersterer kann $\lambda$ nach Beschaffenheit der Materie mancherley Werthe annehmen, die sich aber, wie schon erinnert ist, nur durch Versuche bestimmen lassen.

Bey Körpern, die bloß dehnbar, aber nicht compressibel sind, ist $CI = 0$, also $g = c$, $\varkappa = 1$, folglich $\lambda = \frac{1}{3}$.

Bey Körpern hingegen, die vollkommen elastisch sind, oder eben so viel Ausdehnungs- als Zusammenziehungsvermögen besitzen, fällt der Punkt C unstreitig zwischen E und I in die Mitte; folglich hat man für diese: $g = \frac{1}{2}c$, $\varkappa = \frac{1}{2}$, also $\lambda = \frac{1}{6}$.

## §. 295.

Wird das Parallelepipedum in seinen beyden Endpunkten A und B unterstützt, und das Gewicht in der Mitte C aufgehängt, so bringt dies dieselbe Wirkung hervor, als wenn der Punkt C unterstützt würde, und bey A und B die Hälfte des Gewichtes vorwärts zöge. Setzt man also im gegenwärtigen Falle das Gewicht, wodurch das Parallelepipedum zerbrochen wird, $= P$, seine ganze Länge $= a$, so wird $M = \frac{1}{2}P$, $f = \frac{1}{2}a$, folglich:

$$Pa = 4\lambda Abc^2.$$

## Respektive Festigkeit des Holzes.

### §. 296.

Bey den Versuchen, die **Muschenbrök** über das Zerbrechen des Eichenholzes angestellt hat, hatten die Parallelepipeda insgesammt einerley Länge $a = 18''$ Rheinl. und Breite $b = 0{,}26'$; sie wurden an den Seiten unterstützt, und in der Mitte mit Gewichten behängt, die in sehr geringen Quantitäten nach und nach vermehrt wurden, bis der Bruch erfolgte. In nachstehender Tafel enthält die erste Kolumne die verschiedene Dicke derselben, die zweyte das Gewicht, wovon sie zerbrochen, und die dritte den daraus berechneten Werth von $\lambda A$:

| c | P | λA |
|---|---|---|
| 0,33″ | 13½ ℔ | 2146 ℔ |
| 0,40 | 23½ — | 2542 — |
| 0,52 | 31½ — | 2016 — |
| 0,58 | 32½ — | 1671 — |
| 0,68 | 50½ — | 1860 — |

Das Mittel zwischen diesen Resultaten genommen, gäbe demnach: $\lambda A = 2053$.

Auf gleiche Weise erhält man aus seinen übrigen Versuchen für Ulmenholz $\lambda A$ = 946 ℔

— Eschenholz — 2588 —

— Lindenholz — 1719 —

— Tannenholz — 1504 —

Anmerk. Büffons *) merkwürdige Versuche mit eichenen Balken von 7 bis 28 Fuß Länge und 4 bis 8 Zoll Dicke würden unstreitig vor allen andern Versuchen dieser Art den Vorzug verdienen, wenn sie nicht leider mit gar zu weniger Sorgfalt angestellt wären. Es ist nemlich ein äußerst wichtiges Versehen von ihm, daß er die Gewichte nicht nach und nach, sondern jedesmal 500 Pfd. weise, ja bey einigen Versuchen sogar 1000 Pfd. weise, verstärkt hat, wodurch begreiflich die Fibern des Holzes, vorzüglich bey langen Balken, weit über das Gesetz des Gleichgewichtes ausgedehnt, und daher viel früher zerrissen worden sind, als es bey einem vorsichtigen Verfahren der Fall hätte seyn können. Da die Resultate seiner Versuche für einerley Länge der Balken allemal ziemlich genau zusammenstimmen, so setze ich davon in nachstehender Tafel bloß die mittleren Werthe her:

| Länge. | mittl. Werth von $\lambda A$ |
|---|---|
| 7 Fuß | 1840 Pfd. |
| 8 — | 1783 — |
| 9 — | 1724 — |
| 10 — | 1667 — |
| 12 — | 1659 — |
| 16 — | 1547 — |
| 20 — | 1429 — |

Man sieht aus dieser kurzen Zusammenstellung, daß seine Balken nach Verhältniß desto leichter zerbrachen, je länger sie waren; offenbar aus dem Grunde, weil bey längern Balken die Fibern durch die plötzliche Zunahme des Gewichtes desto mehr erschüttert, und zum Bruche sollicitirt wurden.

*) Mem. de l'acad. de Paris 1740. pag. 453. und 1741 pag. 292; Auch im Hamb. Magazin V. Band, S. 506.

## §. 297.

**Aufgabe.** Unter den rechtwinklichten Balken, die aus einem cylindrischen Stamme von gegebenem Durchmesser e gehauen werden können, denjenigen zu bestimmen, der die meiste respektive Festigkeit hat.

Fig. 80. **Aufl.** 1) Man setze die Breite des Balken $AD = x$, seine Höhe $DB = u$; so sind zwey Bedingungen zu erfüllen: einmal soll $x^2 + u^2 = e^2$, und dann das Produkt $\lambda A x u^2$ ein Maximum seyn.

2) Letztere giebt, weil $\lambda A$ ein unveränderlicher Faktor ist: $d(xu^2) = u^2 dx + 2xudu = 0$.

erstere . . . $2xdx + 2udu = 0$.

3) Multiplicirt man die zweyte Gleichung mit x, und zieht sie von ersterer ab, so bleibt übrig:

[illegible]

$(u^2 - 2x^2)\,dx = 0$, oder $u^2 = 2x^2$, woraus $u = x\sqrt{2}$ wird.

[illegible] $= 5 : 7$

$x : x\sqrt{2} = x : 1{,}4x$

4) Man fälle aus D auf AB das Perpendikel DE, und setze $AE = Z$, so hat man:

$$AB : AD = AD : AE$$

$$e : x = x : z, \text{ also}$$

$$ez = x^2.$$

Da nun $e^2 = u^2 + x^2 = 3x^2$, so wird $e^2 = 3ez$, also $z = \frac{1}{3}e$. Hieraus fließt folgende Construktion:

Man theile den Durchmesser AB in drey gleiche Theile, errichte auf ihm aus einem der Theilungspunkte E ein Perpendikel, und verlängere dies, bis es den Kreis irgendwo in D schneidet, so sind AD und BD die verlangte Seiten des Rechtecks.

§. 298.

Fig. 81. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliger Balken AB, der in seinen Endpunkten A und B unterstützt ist, sey mit dem Gewichte P beladen, das aber nicht, wie vorhin, auf einer einzelnen Stelle ruhet, sondern gleichförmig auf ihm, seiner Länge nach, vertheilt ist; man fragt, wie groß dies seyn müsse, um ihn zu zerbrechen.

Aufl. 1) Es sey AYB die Kurve, in die der Balken unmittelbar vor dem Zerbrechen gebogen wird. Man setze seine ganze Länge $= a$, die Abscisse $AX = x$, so ist das Gewicht, das auf das Element Yy drückt, weil man ohne merklichen Fehler $Yy = Xx$ setzen kann, $= \frac{Pdx}{a}$, und sein Moment gegen die Mitte $c = Xf.$ $\frac{Pdx}{a} = \frac{P}{a}. (x - \frac{1}{2}a)\, dx$, dessen Integral $= \frac{P}{2a}$ $(x^2 - ax + C)$ ist.

2) Dies Integral ist für $x = \frac{1}{2}a$, $= o$, also $C = \frac{1}{4}a^2$. Setzt man nun ferner darin $x = a$, so wird das Moment des ganzes Armes cB gegen $c =$ $\frac{PC}{2a} = \frac{1}{8}Pa.$

3) Der Unterstützungspunkt B übt dagegen auf den Endpunkt des Balken den entgegengesetzten Druck $= \frac{1}{2}P$ aus, der das Moment $\frac{1}{2}P \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}Pa$ hat, den Arm cB nach entgegengesetzter Richtung um c zu drehen, und den Balken an dieser Stelle zu krümmen; wird daher ersteres Moment $\frac{1}{8}Pa$ von letzterm

abgezogen, so bleibt für das wahre Moment der Biegung $\frac{1}{8}$Pa übrig.

4) Man hat also (§. 293.) $\frac{1}{8}Pa = \lambda Abc^2$, oder
$$Pa = 8\lambda Abc^2$$
Daher muß das Gewicht, um den Balken zu zerbrechen, doppelt so groß seyn, als nöthig wäre, wenn es in seiner Mitte aufgehängt würde (§. 295.).

## §. 299.

Zur Erläuterung dieser Formel mag folgendes leichte Beyspiel dienen:

Die Sparren eines Daches sind zum Theil ihrem eigenen Gewichte ausgesetzt, zum Theil ruhet auf ihnen die äußere Bekleidung des Daches; man kann also fragen, wie stark sie zum wenigsten seyn müssen, damit sie unter dieser Last nicht brechen?

Fig. 26. Man setze ihre Breite $= x$, ihre Dicke $= u$, das specifische Gewicht des Holzes $= G$, die äußere Last, die auf jedem Fuße ihrer Länge ruhet $= \kappa$; ferner sey die halbe Breite des Daches $AD = b$, der Neigungswinkel der Dachfläche $CAD = I$, so ist ihre Länge $AC = \frac{b}{\mathrm{Cos}\, I}$, also das ganze Gewicht O, das jede Sparre zu tragen hat $= \frac{b}{\mathrm{Cos}\, I}(K + Gxu)$.

Da dies Gewicht auf einer schiefen Fläche liegt, so leidet die Sparre von ihm bloß den senkrechten Druck $O\ \mathrm{Cos}\, I$; man hat also gegenwärtig $P = b\,(K + Gxu)$.

Weil man die Sparren gewöhnlich an irgend einer Stelle F unterstützt, so wollen wir setzen, dies geschehe in der Mitte; alsdann ist hier $a = \frac{b}{2 \operatorname{Cos} I}$, folglich bekommt man die Gleichung:

$$\frac{b^2 (K + Gxu)}{2 \operatorname{Cos} I} = 8\lambda A x u^2$$

und wenn man zwischen x und u das vortheilhafteste Verhältniß $1 : \sqrt{2}$ annimmt (§. 297.):

$$b^2 (K + Gx^2 \sqrt{2}) = 32\lambda A x^3$$

$$\text{oder } x^3 - \frac{b^2 G \sqrt{2}}{32\lambda A \operatorname{Cos} I} \cdot x^2 - \frac{b^2 K}{32\lambda A \operatorname{Cos} I} = 0.$$

**Exempel.** Für tannene Balken ist nach Lorgna's Versuchen *) $4\lambda A = 5973$ ℔, $G = 44$ ℔; diese Werthe substituirt, geben vorläufig:

$$x^3 - 0{,}00130222 \cdot b^2 \operatorname{Sec} I \, x^2 - 0{,}000020927$$
$$b^2 K \operatorname{Sec} I = 0$$

Es sey nun $b = 12$ Fuß, $I = 45°$, das Gewicht von 1 Quadratfuß Dachfläche = 6 ℔, die Distanz der Sparren 4 Fuß, so ist $K = 12$ ℔, folglich erhält man:

$$x^3 - 0{,}26519 \, x^2 - 0{,}05826 = 0$$

und daraus $x = 0{,}4992$ Fuß, oder sehr nahe 6 Zoll, welches $u = 8\frac{1}{2}$ Zoll giebt.

## Festigkeit cylindrischer Körper.

### §. 300.

**Lehrsatz. Die Gewichte, wodurch zwey Cylinder von einerley Materie zerbrochen wer=**

*) a. a. O. pag. 65.

den, verhalten sich direkt wie die Cuben ihrer Durchmesser, und verkehrt wie ihre Längen.

Fig. 59. Beweis. 1) Es sey von einem dieser Cylinder EMNI der Querschnitt, in dem der Bruch geschieht, O sein Mittelpunkt, C der Grenzpunkt zwischen Ausdehnung und Zusammenziehung; der Durchmesser $EI = c$, $EC = g$, $CP = x$; die Ordinate $MN = y$, so ist das Element $MNmn = ydx$, also (§. 292. 3.) $dp = \frac{Gyxdx}{\varepsilon r}$; das Moment $xdp = \frac{Gyx^2dx}{\varepsilon r}$, und die Summe dieser Momente $= \frac{G\int yx^2dx}{\varepsilon r}$.

2) In diesem Integrale muß nun theils $x = g$, theils $x = c - g$ gesetzt werden (ebendas. 4. 5.). Für ersteres x sey $\int yx^2dx = M$, für letzteres $= N$, so hat man für das Moment des gesammten Widerstandes: $\frac{G(M+N)}{\varepsilon r}$.

3) Für den Fall des Zerbrechens ist nun, wenn man $G = A$ setzt, $\varepsilon r = g$. Heißt also a die Länge des cylindrischen Armes, an dem die Kraft wirkt, die ihn zerbricht, und die wir P nennen wollen, so ist $Pa = \frac{A(M+N)}{g}$.

4) Um zu sehen, wie sich y durch x ausdrucken läßt, nenne man $OP = u$, so hat man $y^2 = c^2 - 4u^2$, und $x = u + g - \frac{1}{2}c$ oder $u = x - g + \frac{1}{2}c$, folglich $y = \sqrt{[c^2 - (2x - 2g + c)^2]}$.

5) Für den andern Cylinder sey nun $c'$, $g'$, $a'$,

$x'$ u. s. f., was vorhin $c$, $g$, $a$ u. s. f. hieß. Man setze $c' = mc$, so ist auch $g' = mg$, $x' = mx$, folglich $dx' = mdx$, und $y' = \sqrt{[m^2c^2 - m^2(2x - 2g + c)^2]} = my$, also $y'x'dx' = m^4yx^2dx$, mithin $M' = m^4M$, $N' - m^4N$.

6) Daher hat man $P'a' = \frac{A(M' + N')}{g'} = \frac{m^4A(M + N)}{mg} = m^3Pa$ (3), folglich $P'c^3a' = m^3c\,Pa = Pc'^3a$, und

$$P : P' = c'^3a' : c^3a = \frac{c^3}{a} : \frac{c'^3}{a'}.$$

## §. 301.

Folgerung 1) Da $\frac{Pa}{c^3} = \frac{P'a'}{c'^3}$, so ist $\frac{Pa}{c^3}$ eine beständige Größe, es mögen $a$ und $c$ Werthe haben, welche man will. Setzt man also $\frac{Pa}{c^3} = K$, so wird $P = \frac{Kc^3}{a}$; in welcher Formel der unveränderliche Koefficient $K$ durch Versuche bestimmt werden muß.

Fig. 83. 2) Wenn eine Kette durch ein Gewicht $P$ gespannt wird, so trägt jedes Glied derselben $aebg$ dies Gewicht in den Punkten $a$ und $b$, wo die beyden nächsten Glieder in dasselbe eingreifen, und davon vertheilt sich die Hälfte auf jeden der Punkte $e$ und $f$. Diese Kraft könnte, wenn sie groß genug ist, den Ring an den Stellen $e$ und $f$ zerreißen: sie wirkt aber eher darauf hin, ihn in $b$ zu zerbrechen, weil letzteres leichter

geschehen kann, als ersteres. Setzt man daher die Dicke des Ringes es $= c$, seine innere Weite εγ $= f$, so ist die mittlere Breite desselben $= f + c$, also das Gewicht, wodurch er zerbrochen wird: $P = \frac{4Kc^2}{f+c}$.

3) Man sieht hieraus, daß die Stärke einer Kette nicht bloß auf der Dicke der Glieder, sondern auch zugleich auf ihrer Weite beruhe, und daß es also sehr zweckmäßig sey, ihnen eine längliche Form zu geben.

4) Setzt man $f = nc$, so wird $P = \frac{4Kc^2}{n+1}$; daher gilt der gewöhnliche Satz: daß sich die Stärke der Kette wie das Quadrat der Dicke ihrer Glieder verhalte, nur dann, wenn Weite und Dicke bey ihnen ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

## Vom Widerstande fester Körper beym Zusammendrücken derselben.

§. 302.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo ein prismatischer Körper zweyen entgegengesetzten Kräften ausgesetzt ist, die ihn genau seiner Länge nach zusammen zu drücken streben. Wiewohl die bisherige Theorie nicht zeigt, wie dadurch der Zusammenhang seiner Theile leiden könne, da er hier weder unmittelbar angegriffen, noch durch Hebelkraft zum Widerstande gereizt wird; so lehrt doch die Erfahrung, daß auch unter diesen Umständen die Festigkeit des Körpers ihre

Grenzen habe: der Stein wird nemlich durch eine zu große Last, die man ihm aufbürdet, im eigentlichen Verstande zerdrückt; das Holz, so wie jeder andere dehnbare Körper, wird dadurch seitwärts gebogen, und zerbricht endlich.

Ersteres Ereigniß, das Zerdrücken harter Körper, wird schwerlich aus mechanischen Principien genugthuend erklärt werden können, wofern man nicht zu Konjekturen über die Form ihrer Elemente seine Zuflucht nehmen will; letzteres hingegen, das Zerknicken biegsamer Körper, läßt sich sehr gut auf die vorhergehende Theorie zurückführen, wie Euler in seiner vortreflichen Abhandlung: Determinatio onerum, quae columnae gestare valent *), gezeigt hat.

## §. 303.

Fig. 81. Man setze, der Balken AB habe eine vertikale Stellung, und sey oben bey A mit einem Gewichte O beladen, das ihn, seiner Länge nach, senkrecht gegen den horizontalen Boden drückt.

So lange der Balken im gestreckten Zustande bleibt, hat die Last weiter keine Wirkung auf ihn, als daß etwa seine Fibern durch das Zusammenpressen sich um ein Geringes verkürzen; allein zerbrechen kann sie ihn auf diese Art nicht. Sobald er aber unter ihr auch nur die mindeste Krümmung leidet, bekommt sie nun ein Moment ihn ferner zu biegen, das mit der Biegung stufenweise zunimmt, und folglich zuletzt größer

*) Acta acad. sc. Petropol. 1778. P. I. pag. 121.

werden kann, als das Moment des Widerstandes, den ihr die Festigkeit des Balken entgegen zu setzen fähig ist.

Es sey AyB die Kurve, in die der Balken bereits gebogen ist, c die Mitte derselben, so wirkt die Last O als Hebelkraft an dem krummlinigten Arme Ayc, und strebt diesen um c zu drehen. Fällt man also cf auf ihre Richtung AB senkrecht, so erhält man für das Umdrehungsmoment derselben: cf . O (§. 59.).

Hierdurch werden nun, eben so wie oben (§. 59.), die Fibern des Elementes Elei auf der einen Seite von Cc ausgedehnt, und auf der andern zusammengedrückt; mit einem Worte: so wie in jenem Falle Gewicht und Cohäsion am Winkelhebel ECa gegeneinander wirkten, so geschieht dies jetzt am geradlinigten Hebel ECf.

## §. 304.

Auf gleiche Art wird auch die Krümmung an jeder andern Stelle der Kurve AyB durch die Last O hervorgebracht. Setzt man also $Ax = x$, $xy = y$ den Bogen $Ay = s$, und den Krümmungshalbmesser bey $y = r$, so bekommt man die Gleichung (§. 292, 7.)

$$Oy = \frac{Gbc^3 (1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon r}$$

oder, wenn man $\frac{G (1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon} = E$ setzt: $Oy = \frac{Ebc^3}{r}$.

Bekanntlich ist nun $r = -\frac{ds^3}{d^2y dx}$; weil aber die Kurve AyB doch gewiß sehr wenig von der geraden Linie AB abweicht, so kann man hier ohne Bedenken $ds = dx$ setzen, wodurch $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$ wird. Dieser Werth von r giebt:

$$Oydx^2 + Ebc^3d^2y = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dy, und integrirt dann, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}Oy^2dx^2 + \tfrac{1}{2}Ebc^3dy^2 = Cdx^2$$

oder, wenn man $C = \frac{1}{2}Of^2$ setzt:

$$O(f^2 - y^2)\,dx^2 = Ebc^3dy^2, \text{ also}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(f^2 - y^2)}} \cdot \sqrt{\frac{Ebc^3}{O}}.$$

Setzt man nun noch $\sqrt{\frac{Ebc^3}{O}} = g$, so wird $dx = \frac{gdy}{\sqrt{(f^2 - y^2)}}$, und davon das Integral genommen:

$$x = C + g \,.\, \text{arc Sin}\,\frac{y}{f}.$$

## §. 305.

Aus dieser Gleichung für die Kurve AyB lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Für $x = 0$, ist auch $y = 0$, also $C = 0$, man hat also bloß $x = g \,.\, \text{arc Sin}\,.\,\frac{y}{f}$, und gegenseitig: $y = f \,.\, \text{Sin}\,\frac{x}{g}$.

2) Zunächst wird y wieder $= 0$, für $\frac{x}{g} = \pi$,

oder $x = g\pi$, und da dies unten bey B geschieht, so wird, wenn wir die ganze Länge des Balken $AB = a$ setzen: $a = g\pi$.

3) Darin für g seinen Werth $\sqrt{\frac{Ebc^3}{O}}$ gesetzt, giebt: $Oa^2 = \pi^2 Ebc^3$, oder $O = \frac{\pi^2 Ebc^3}{a^2}$. Da dieser Ausdruck lauter beständige Größen enthält, so folgt hieraus der merkwürdige Satz: **daß einerley Gewicht erfordert werde, den Balken, er sey mehr oder weniger gebogen, in seiner Krümmung zu erhalten.**

4) Wenn man die Gleichung $y = f \operatorname{Sin} \frac{x}{g}$ differenziirt, so erhält man: $\frac{dy}{dx} = \frac{f}{g} . \operatorname{Cos} \frac{x}{g}$; also wird y ein Maximum für $\operatorname{Cos} \frac{x}{g} = 0$, oder $x = \frac{1}{2} g\pi = \frac{1}{2} a$, d. i. in der Mitte c, und daselbst ist $y = f$.

5) Durch nochmaliges Differenciiren wird: $\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{f}{g^2} \operatorname{Sin} \frac{x}{g}$, folglich $\frac{1}{r} = \frac{y}{g^2} = \frac{\pi^2 y}{a^2}$. Je mehr also der Balken gebogen ist, desto größer ist zwar das Moment der Last Oy, aber auch zugleich in eben dem Verhältnisse desto größer das Moment des Widerstandes $\frac{Ebc^3}{r}$, woraus der Satz (3) nun sehr begreiflich wird.

## §. 306.

Da der für O gefundene Werth bloß auf die Biegung des Balken sich bezieht, so könnte es scheinen, als müsse die Last, die ihn wirklich zerbrechen soll, größer als O seyn. Allein dies wäre offenbar falsch geschlossen: denn da nicht mehr Last erfordert wird, den Balken in größerer als in geringerer Biegung zu erhalten, so ist eben diese Last auch im Stande, ihm die Biegung zu ertheilen, die unmittelbar dem Bruche vorhergeht. Ueberdies lehrt die höhere Mechanik, daß wenn eine Bewegung einmal eingeleitet ist, und dabey Kraft und Widerstand sich das Gleichgewicht halten, sie alsdann ungehindert fortdaure; daraus folgt also für unsern Fall: daß der Balken, wenn er einmal angefangen hat sich zu krümmen, bey eben dem Gewichte O sich von selbst immer mehr und mehr krümmen müsse, und das so lange, bis er endlich bricht.

## §. 307.

Nach der hier vorgetragenen Theorie verhält sich demnach die Last, die ein Parallelepipedum von gegebener Materie zu tragen im Stande ist: **wie der Kubus derjenigen Seite seines Querschnittes, nach der es gebogen wird, einfach wie die andere Seite, und verkehrt, wie das Quadrat seiner Länge.**

Sehen wir jetzt, in wie weit die Erfahrung hiermit übereinstimmt:

1. In Ansehung des Verhältnisses der Länge. Nach Muschenbrök (Diss. phys. pag. 655.) zerbrach

ein Parallelepipedum aus Eichenholze, 0,23 Zoll breit und dick,

| | | |
|---|---|---|
| bey 18 Zoll Länge unter einer Last von | — — — | 23 ℔ |
| — 9 — | — — — — — | 92 — |
| — 8 — | — — — — — | 128 — |

Wie genau diese drey Versuche mit der Theorie zusammenstimmen, zeigt sich aus folgender Vergleichung der letztern beyden mit ersterm:

| Länge | angegebenes Gewicht | berechnetes Gewicht |
|---|---|---|
| 18 Zoll | 23 Pfd. | 23 Pfd. |
| 9 — | 92 — | 92 — |
| 8 — | 118 — | $116\frac{1}{2}$ — |

Ein Parallelepipedum aus Eschenholze, 9 Zoll lang, zerbrach unter einem Gewichte von 100 Pfd. Nach dieser Angabe hätte eben dies Parallelepipedum bey 12 Zoll Länge zerbrechen müssen von — $56\frac{1}{4}$ Pfd.
es zerbrach von — — 55 —

Es ist also keinem Zweifel unterworfen, daß das verkehrte Verhältniß des Quadrates der Länge der Natur vollkommen angemessen sey.

2. In Ansehung des Verhältnisses der Dicke.

Ein Parallelepd. aus Tannenholze, 4 Fuß lang, 0,51 Zoll breit und dick, zerbrach unter einer Last von 64 Pfd. 9 Unzen. (Muschenb. ad phil. Tom. I pag. 474.)

Ein anderes, das bey eben der Länge 0,7 Zoll ins Gevierte betrug, zerbrach von 226 Pfd.

Ersterer Versuch giebt $\pi^2 E = 2197815$
letzterer — — $\pi^2 E = 2168696$

Man

Man sieht hieraus, daß sich beym Tannenholze auch das kubische Verhältniß der Dicke als richtig annehmen läßt. Bey andern Holzarten hingegen, namentlich beym Eichenholze, scheint es vielmehr, als richte sich der Widerstand nach dem Quadrate der Dicke; doch sind die von Muschenbrök darüber angestellten Versuche nicht zahlreich genug, als daß man aus ihnen sichere Resultate ziehen könnte.

## §. 308.

Fig. 26. **Aufgabe.** Ein horizontal liegender Balken AB sey in den Endpunkten A und B unterstützt, und in der Mitte D durch eine Hängesäule CD mit zweyen Streben AC und BC verbunden, die sich bey A und B gegen Widerlagen stützen, und bey C ineinander gefugt sind; man fragt, wie viel Gewicht der Balken unter diesen Umständen zu tragen im Stande sey.

Aufl. 1) Wenn der Schwerpunkt der Last in die Mitte D fällt, so ist klar, daß der Balken keine Biegung leiden könne, ohne die Säule CD mit sich herabzuziehen; dies kann aber nicht geschehen, wofern nicht zugleich die Streben AC und CB gebogen werden. Es kömmt also hier nur darauf an, wie viel Widerstand diese ihrer Länge nach auszuüben im Stande sind, ohne sich zu krümmen, oder, welches einerley ist, ohne zu zerbrechen (§. 305. 3.).

2) Setzt man nun die Dicke der Streben $= c$, ihre Breite $= b$, die halbe Länge des Balken AD $= a$, den Winkel CAB $=$ CBA $= I$, so ist AC $=$ BC $=$

$\frac{a}{\text{Cos I}}$, also der Widerstand, den sie nach AC und BC ausüben können, $= \frac{\pi^2 Ebc^3 \text{ Cos I}^2}{a^2}$.

3) Die gesuchte Last, die wir P nennen wollen, strebt die Säule CD niederzuziehen, und drückt folglich auch den Verbindungspunkt C der beyden Streben herabwärts; daher zerfällt sie in zwey Seitenkräfte nach CA und CB, jede $\frac{P}{2 \text{ Cos } (90^\circ - I)} = \frac{P}{2 \text{ Sin I}}$; und da diesen die Festigkeit der Streben das Gleichgewicht halten muß, so hat man

$$\frac{P}{2 \text{ Sin I}} = \frac{\pi^2 Ebc^3 \text{ Cos I}^2}{a^2}$$

$$\text{also: } P = \frac{2\pi^2 Ebc^3 \text{ Sin I Cos I}^2}{a^2}.$$

**Exempel.** Es sey $a = 15'$, $b = c = 6''$, $I = 30^\circ$, das Holz, woraus die Streben bestehen, Tannerholz; so hat man aus §. 307. für $\pi^2 E$ den mittlern Werth: 2183256, folglich

$$P = \frac{2 \cdot 1296 \cdot 3 \cdot 2183256}{32400 \cdot 2 \cdot 4} = 65497{,}68 \text{ ℔}.$$

## §. 282.

Fällt der Schwerpunkt der Last P nicht in die Mitte des Balken, sondern in irgend einen andern Punkt H, so wirkt sie auf die Säule CD nur mittelbar durch den Hebelarm AHD, und es ist ihr an diesem im

Punkte D die Last $P \cdot \frac{AH}{AD}$ äquipollent. Setzt man also $AH = f$, so wird jetzt:

$$\frac{Pf}{a} = \frac{2\pi^2 Ebc^3 \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I^2}{a^2},$$

$$\text{folglich } P = \frac{2\pi^2 Ebc^3 \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I^2}{af}.$$

Da aber der Balken in H nicht gehalten wird, so muß man zugleich darauf Rücksicht nehmen, ob seine Hälfte AD auch stark genug sey, diese Last tragen zu können. Man setze die Last, die ihm in eben dem Punkte H seine respektive Festigkeit zu tragen gestattet, $= Q$, seine Dicke $= e$, Breite $= g$, so hat man:

$$\frac{Qf(a-f)}{a} = \lambda A g e^2 \text{ (§. 293.)}$$

$$\text{also: } Q = \frac{\lambda A g e^2 a}{af - f^2}.$$

Zwischen diesen beyden Gewichten P und Q darf man offenbar nur dasjenige wählen, welches am kleinsten ist.

## §. 310.

Sowohl für $I = 0$, als für $I = 90°$ ist $P = 0$; es muß also irgend einen Winkel geben, wofür P ein Maximum wird, oder für den der Balken, bey einerley Breite und Dicke der Streben, die möglichst größte Last zu übernehmen im Stande ist. Um diesen zu finden, setze man Sin I = x, so wird Cos I² = 1 — x² also:

$$P = \frac{2\pi^2 E b c^3 (x - x^3)}{a^2}$$

Hierin das Differenzial des veränderlichen Faktors $x - x^3 = 0$ gesetzt, giebt $3x^2 = 1$, und $x = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$; daher ist der gesuchte Winkel $I = 35^\circ 15' 52''$.

## Zehntes Kapitel.

# Von der Friktion.

### §. 311.

Unter **Friktion** versteht man den Widerstand, den die Rauhigkeit zweyer an einander gedrückten Flächen der Kraft entgegensetzt, die die eine längst der andern fortzubewegen strebt.

### §. 312.

Man kann die Friktion zwar dadurch vermindern, daß man die Ursache derselben wegzuräumen sucht, d. h. daß man den Flächen, so viel es sich thun läßt, ihre Rauhigkeit benimmt; aber gänzlich aufheben läßt sie sich dennoch nie, weil jeder Körper doch immer nur einen gewissen Grad von Glätte anzunehmen fähig ist. Dieser Grad ist nach Beschaffenheit der Materie verschieden, z. B. bey harten Körpern größer, als bey weichen; bey biegsamen größer als bey spröden; woraus schon vorläufig erhellet, daß auch die Friktion beym einen Körper größer oder geringer seyn müsse, als beym andern, und daß sich folglich im Allgemeinen nichts Bestimmtes darüber festsetzen lasse. Indeß stimmen doch alle Versuche, die man ihrentwegen angestellt hat, in folgenden Punkten miteinander überein:

1) Die Friktion richtet sich nicht nach der Größe der Flächen, die dabey mit einander in Berührung sind; wenigstens ist die Verminderung derselben, wenn man kleinere Flächen nimmt, so gering, daß man in den meisten Fällen keine Rücksicht darauf zu nehmen braucht.

2) Dagegen hängt sie von dem Drucke ab, den der Körper gegen die Fläche ausübt, an der er sich reibt, und ist diesem Drucke ziemlich genau proportional. Bey größerem Drucke ist sie verhältnißmäßig etwas geringer.

3) Der Umstand, ob der Körper aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird, oder vorher schon eine Bewegung hat, bewirkt in der Friktion einen sehr merklichen Unterschied; im erstern Falle ist sie nemlich bey weitem größer als im letztern.

4. Gleichartige Körper reiben sich nach Verhältniß stärker aneinander als ungleichartige. Vielleicht deshalb, weil ihre Theile wegen gleicher Struktur tiefer in einander greifen.

5) Holzarten sind einer geringern Reibung unterworfen, wenn sie sich der Länge ihrer Fibern nach

auf einander hin bewegen, als in die Quere. Nach Herrn Coulomb *) ist die Friktion im erstern Falle zu der im letztern wie 234 : 376.

6) Bey wälzender Bewegung ist die Friktion viel geringer, als bey gleitender. Daher ist sie bey gemischter Bewegung, wie z. B. bey der Umdrehung der Axen in ihren Pfannen größer, als im erstern Falle, aber doch immer kleiner als im letztern.

## §. 313.

Wenn man annimmt, daß der Körper durch die Kraft, die zur Ueberwindung der Friktion nöthig ist, über die hervorragenden Hindernisse der Fläche hinüber gezogen werden müsse, so läßt sich daraus erklären, warum die Größe der Fläche auf die Friktion keinen Einfluß hat. Man setze, es seyen auf dem Theile der Fläche, den der Körper berührt, n solcher kleinen Hindernisse vorhanden, so kommt auf jedes derselben vom ganzen Drucke des Körpers, den wir P nennen wollen, der Theil $\frac{P}{n}$.

Ferner sey die schiefe Seitenfläche eines solchen Theilchens um den Winkel I über der ebenen Grundfläche erhoben, so muß bey jedem derselben eine Kraft $= \frac{1}{n} P \tan I$, parallel mit der Grundfläche ange-

*) Journal de physique. Sept. 1785. Hrn. Coulomb's Art, sich auszudrücken, kann leicht zu Irrthümern Veranlassung geben: er bestimmt die Friktion nach dem Nenner ihres Coefficienten, und nennt sie größer, wenn es dieser Nenner ist; da man sie doch eigentlich dann kleiner nennen sollte.

wandt werden, um den Körper hinüber zu ziehen; daher erfordern alle n Hindernisse die Totalkraft $=$ P tang I, die also vom Drucke P ein unveränderlicher Theil ist.

Setzt man demnach die Friktion, die beym Drucke P zu überwinden ist, $= F$, $\tang I = \lambda$, so hat man $F = \lambda P$; wo der Coefficient $\lambda$ für jede besondere Art von Flächen durch Versuche bestimmt werden muß.

## §. 314.

Indeß gilt die Voraussetzung, worauf dies sich gründet, nur so lange, als P nicht sehr beträchtlich ist. Man sieht nemlich leicht, daß bey größerm Drucke manches hervorragende Theilchen niedergebogen werde, das bey kleinerm Drucke widersteht; es kann also der Coefficient $\lambda$ wohl nicht ganz unveränderlich seyn, sondern muß mit wachsendem Drucke abnehmen, und dies bestätigt auch die Erfahrung. So z. B. ist nach den Versuchen des Herrn Ximenes *), wenn sich Eisen auf Messing reibt, für $P = 100$ ℔, $\lambda = 0{,}137$; für $P = 2400$ ℔, $\lambda = 0{,}103$, also um den vierten Theil geringer.

## §. 315.

Sobald die Bewegung eingeleitet ist, wird die Friktion plötzlich um ein Ansehnliches geringer, so daß sie z. B. beym Holze nur etwa noch $\frac{1}{4}$ so viel beträgt, als zu Anfange. Die Metalle machen indeß hiervon

*) Theoria e Pratica delle Resistenze de' Solidi ne' loro Attriti P. II.

eine Ausnahme, bey denen zwischen der Friktion der Bewegung und der Ruhe nie ein sehr merklicher Unterschied statt findet. Man kann dies alles aus folgender Tafel näher beurtheilen:

| | λ für Ruhe | λ für Bewegung |
|---|---|---|
| Eichen auf Tannen | 0,65 | 0,16 |
| Tannen auf Tannen | 0,56 | 0,17 |
| Eichen auf Eichen | 0,43 | 0,10 |
| Ulmen auf Ulmen | 0,46 | 0,10 |
| Eisen auf Eichen | 0,20 | 0,11 |
| Kupfer auf Eichen | 0,18 | 0,08 |
| Eisen auf Eisen | 0,28 | 0,25 |
| Messing auf Eisen | 0,17 | 0,17 |

Diese Verschiedenheit zwischen der Friktion ruhender und bewegter Körper zeigt unverkennbar, daß der Widerstand nicht bloß vom Reiben herrühre, sondern daß auch Cohäsionskräfte sich hierbey einmischen. Noch wahrscheinlicher wird diese Vermuthung durch die genauern Versuche, die von Herrn **Coulomb** in dieser Hinsicht angestellt sind: je länger die Flächen zuvor in Berührung gewesen waren, desto größer wurde dadurch der Widerstand; doch erreichte er nach längerer oder kürzerer Dauer jedesmal eine gewisse Grenze, über welche er nie hinauswuchs.

Da die Cohäsion desto größer ist, je mehr Theile mit einander in Berührung kommen, so ließe sich das, was bey der Friktion von der Größe der Fläche abhängt, ihrer Einwirkung allein zuschreiben; und auf solche Art ist es gedenkbar, daß die Friktion im eingeschränktern Sinne von der Fläche durchaus unabhängig ist.

## §. 316.

Ein gewöhnliches Hülfsmittel, die Friktion zu vermindern, besteht darin, daß man die Flächen mit Talg, Theer, Oelen oder andern schlüpfrigen Materien überzieht, wodurch begreiflich ihre Zwischenräume zum Theil ausgefüllt, also die Ungleichheiten auf ihnen mehr geebnet werden.

Bey Metallen bedient man sich vorzüglich der Oele; beym Holze hingegen, so wie bey Metallen, die sich auf Holz reiben, giebt der Talg die angemessenste Schmiere, der z. B. die Friktion zwischen Eichen und Eichen bis auf $\frac{1}{20}$, zwischen Buxbaum und Ulmen auf $\frac{1}{80}$, und zwischen Metallen und Eichen auf $\frac{1}{40}$ des Drucks herabsetzt. Da jedoch der Talg wegen seines leichten Zerfließens sehr oft erneuert werden muß, so bedient man sich in der Ausübung dennoch lieber der zäheren Schmieren, z. B. des Theers, wenn gleich die Friktion nicht in so hohem Grade dadurch vermindert wird.

## Friktion eines Körpers, der auf horizontalem Boden fortgezogen wird.

## §. 317.

Fig. 84. Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, wodurch eine gegebene Last P auf horizontalem Boden fortgezogen wird.

Aufl. 1) Es sey die gesuchte Kraft $= M$, der Winkel $xBu$, den ihre Richtung $Br$ mit der Horizontale $Bu$ macht, $= \vartheta$, so zerfällt sie in eine nach $Bu$ $= M \operatorname{Cos} \vartheta$, und in eine nach der Vertikale $Bv =$ $M \operatorname{Sin} \vartheta$.

2) Erstere wird allein darauf verwandt, die Friktion zu überwinden, der sie also gleich seyn muß. Setzt man daher den Druck, den der fortzuziehende Körper gegen den Boden ausübt, $= \Pi$, die Verhältnißzahl der Friktion $= \lambda$, so wird $M \operatorname{Cos} \vartheta = \lambda \Pi$.

3) Das Gewicht des Körpers ist eigentlich auf die Fläche BD, worin er den Boden berührt, gleichförmig vertheilt; da aber hier die Fläche nicht in Betracht kommt, so ist es einerley, wenn man sich sein Gewicht bloß auf die Endpunkte B und D vertheilt denkt.

4) Es komme nun auf B der Theil $P'$, auf D der Theil $P''$, so hat man $P' + P'' = P$, und weil von $P'$ der Theil $M \operatorname{Sin} \vartheta$ (1) aufgehoben wird: $\Pi = P' - M \operatorname{Sin} \vartheta + P'' = P - M \operatorname{Sin} \vartheta$.

5) Daher wird $M \operatorname{Cos} \vartheta = \lambda P - \lambda M \operatorname{Sin} \vartheta$,

folglich: $M = \dfrac{\lambda P}{\operatorname{Cos} \vartheta + \lambda \operatorname{Sin} \vartheta}$.

## §. 318.

Wenn ein Pferd vor einem Schlitten nach der schrägen Richtung $Br$ zieht, so ist $M$ die Spannung des Zugseiles, und die eigentliche Kraft, die das Pferd anzuwenden hat, ist (§. 163.) $= M \operatorname{Cos} \vartheta = \frac{\lambda P}{1 + \lambda \operatorname{tang} \vartheta}$, also jederzeit kleiner, als beym horizontalen Zuge, und zwar beträgt der Unterschied $\frac{\lambda^2 P \operatorname{tang} \vartheta}{1 + \lambda \operatorname{tang} \vartheta}$, den wir $= \mathfrak{P}$ setzen wollen.

Dagegen ist der vertikale Druck, den das Pferd leidet, $= M \operatorname{Sin} \vartheta = \frac{\lambda P \operatorname{tang} \vartheta}{1 + \lambda \operatorname{tang} \vartheta} = \frac{\mathfrak{P}}{\lambda}$, folglich $> \mathfrak{P}$, weil $\lambda$ allemal $< 1$ ist.

Man sieht also hieraus, daß dennoch der schräge Zug, er geschehe unter welchem Winkel man will, nie Vortheil gewähren kann, weil dabey das Pferd weit mehr zu tragen bekommt, als ihm das Fortziehen erleichtert wird; da doch bekanntlich allen Thieren das Tragen beschwerlicher fällt, als das Ziehen.

## Gleichgewicht auf der schiefen Fläche mit Betrachtung der Friktion.

### §. 319.

Fig. 23. **Aufgabe.** Einem Gewichte P, das auf der schiefen Fläche CA liegt, wirke nach der Richtung HG, die durch seinen Schwerpunkt G geht, die Kraft V entgegen; man fragt, wie groß diese seyn müsse, um zu verhindern, daß das Gewicht längs der Fläche herabgleite.

**Aufl.** 1) Wenn die Winkel, welche die Linien AC und GH mit der Horizontale CB machen, wie im

§. 117. I und I′ heißen, so entspringt aus dem Gewichte P nach der Richtung GI, parallel mit der Fläche, die Kraft $= P \text{ Sin } I$, und der auf die Fläche senkrechte Druck $= P \text{ Cos } I$.

2) Wird die Kraft V auf gleiche Art zerlegt, so erhält man aus ihr, da der Winkel $IGD = GDO = I' - I$ ist, nach den entgegengesetzten Richtungen IG und OG die Kräfte: $V \text{ Cos } (I' - I)$ und $V \text{ Sin } (I' - I)$.

3) Diese beyden Kräfte wirken jenen erstern entgegen; daher behält das Gewicht nach GI noch die Kraft $P \text{ Sin } I - V \text{ Cos } (I' - I)$, und der eigentliche Druck, den es senkrecht gegen die Fläche ausübt, wird $= P \text{ Cos } I - V \text{ Sin } (I' - I)$.

4) Soll also das Gewicht in Ruhe bleiben, so muß die Friktion, die aus letzterem Drucke entspringt, die noch vorhandene Kraft nach GI aufheben, folglich hat man:

$$P \text{ Sin } I - V \text{ Cos } (I' - I) = \lambda P \text{ Cos } I - \lambda V \text{ Sin } (I' - I),$$

woraus $V = \dfrac{P(\text{Sin } I - \lambda \text{ Cos } I)}{\text{Cos } (I' - I) - \lambda \text{ Sin } (I' - I)}$ wird.

## §. 320.

Folgerung 1. Wenn die Richtung der Kraft V mit AC parallel ist, so ist $I' = I$, also $V = P(\text{Sin } I - \lambda \text{ Cos } I)$.

2. Ist sie dagegen horizontal, so wird $I' = 0$, folglich:

$$V = \frac{P(\text{Sin } I - \lambda \text{ Cos } I)}{\text{Cos } I + \lambda \text{ Sin } I} = \frac{P(\text{tang } I - \lambda)}{1 + \lambda \text{ tang } I};$$ oder,

wenn man unter $\omega$ einen Winkel versteht, dessen Tangente $= \lambda$ ist: $V = P . \text{tang} (I - \omega)$.

3. Für $V = o$, ist $\text{Sin } I - \lambda \text{ Cos } I = o$, also $\text{tang } I = \lambda$, $I = \omega$. Bey diesem Neigungswinkel der Fläche ist also der Körper, sich selbst überlassen, im Begriff herabzugleiten; er bleibt aber doch noch ruhig auf ihr liegen, ohne daß eine Kraft ihn zu halten braucht. **Parent**, der ihn zuerst in den Mem. de l'acad. de Paris 1704 betrachtet hat, nennt ihn den **Winkel des Gleichgewichtes**; sonst pflegt man ihn auch wohl den **Ruhewinkel** zu nennen.

4. Da man den Ruhewinkel durch Versuche finden kann, so veranlaßt dies eine Methode, die Reibungszahl $\lambda$ zu bestimmen: man erhält aber begreiflich auf diese Art nur den Werth von $\lambda$ für die Friktion der Ruhe.

## §. 321.

**Aufgabe.** Es bleibe alles wie im §. 319. ungeändert; man sucht, wie groß die Kraft V seyn müsse, um nicht bloß den Körper im Gleichgewichte zu erhalten, sondern auch dessen Friktion zu überwinden; so daß durch die geringste Verstärkung derselben der Körper zum Weichen gebracht würde.

**Aufl.** 1) Der Theil von ihr $V \text{ Cos } (I' - I)$ muß also in diesem Falle größer seyn, als die Kraft $P \text{ Sin } I$, womit der Körper nach GI zu sinken strebt, und der Ueberschuß $V \text{ Cos } (I' - I) - P \text{ Sin } I$ muß hinreichend seyn, um die Friktion, die aus dem senkrechten Drucke $P \operatorname{Cos} I - V \operatorname{Sin} (I' - I)$ entspringt, aufheben zu können.

2) Man hat daher:

$$V . \operatorname{Cos} (I' - I) - P \operatorname{Sin} I = \lambda P \operatorname{Cos} I - \lambda V \operatorname{Sin} (I' - I)$$

woraus $V = \frac{P (\operatorname{Sin} I + \lambda \operatorname{Cos} I)}{\operatorname{Cos} (I' - I) + \lambda \operatorname{Sin} (I' - I)}$ wird.

3) Für $I' = I$ bekommt man $V = P (\operatorname{Sin} I + \lambda \operatorname{Cos} I)$. Der Körper wird also durch jede mit der Fläche parallele Kraft im Gleichgewichte erhalten, die zwischen die Grenzen $P (\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I)$ und $P (\operatorname{Sin} I + \lambda \operatorname{Cos} I)$ fällt. Bey ersterer ist der Körper im Begriff zu sinken, bey letzterer zu steigen.

4) Für $I' = 0$, wird $V = \frac{P (\operatorname{Sin} I + \lambda \operatorname{Cos} I)}{\operatorname{Cos} I - \lambda \operatorname{Sin} I}$

$$= \frac{P (\operatorname{tang} I + \operatorname{tang} \omega)}{1 - \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} I} = P . \operatorname{tang} (I + \omega).$$

## Friktion bey der Schraube.

### §. 322.

Bey der Schraube bewirkt die Friktion, eben so wie bey der schiefen Ebene, in dem zwischen Kraft und Last (§. 242.) gefundenen Verhältnisse eine Aenderung in zwiefacher Hinsicht. Soll nemlich die Friktion vom Gewichte P überwunden werden, so ist in den meisten Fällen weit weniger Kraft nöthig, als die dortige Gleichung angiebt, um zu verhindern, daß das Gewicht niedersinke; soll sie aber durch die Kraft selbst überwunden werden, so muß diese bey weitem größer seyn.

Im erstern Falle entsteht aus dem Gewichte p (ebendaselbst 5.) nach der Richtung ON die Kraft p tang $(I-\omega)$ (§. 320. 2.); folglich erhält man, Fig. 65. da alles Uebrige ungeändert bleibt: $2\pi V f = \frac{Ph \tan(I-\omega)}{\tan I}$.

Im letztern Falle übt das Gewicht p nach eben der Richtung den Widerstand p tang $(I+\omega)$ aus; also wird hier: $2\pi V f = \frac{Ph \tan(I+\omega)}{\tan I}$.

Es bleibt jetzt noch der Winkel I zu bestimmen übrig, den man auf folgende Art findet:

In der Ecke bey M, die an MO rechtwinklicht ist, hat man die Proportion:

$$1 : \tan I = \sin OMT : \tan NMO$$
$$= \sin\lambda : \tan\vartheta$$

Ferner, in der Ecke bey T, die an TO rechtwinklicht ist:

$$1 : \tan I = \sin MTO : \tan NTO$$
$$= \cos\lambda : \tan\alpha$$

Erstere Proportion giebt: $\sin\lambda^2 \tan I^2 = \tan\vartheta^2$

letztere: $\cos\lambda^2 \tan I^2 = \tan\alpha^2$

folglich wird: $\tan I^2 = \tan\alpha^2 + \tan\vartheta^2$

und $\tan I = \sqrt{(\tan\alpha^2 + \tan\vartheta^2)}$.

## §. 323.

Folgerung. 1. Bey viereckigen Schraubengängen (§. 240. 2.) ist $\vartheta = 0$, also $\tan I = \tan\alpha = \frac{h}{2\pi r}$, folglich der kleinere Werth von $V = \frac{Pr(h - 2\pi\lambda r)}{f(2\pi r + \lambda h)}$

der größere $= \frac{Pr(h + 2\pi\lambda r)}{f(2\pi r - \lambda h)}$

2. Für $V = 0$, wird $I = \omega$, folglich tang $I =$ tang $\omega$, oder $\sqrt{(\tang \alpha^2 + \tang \vartheta^2)} = \lambda$. So lange also tang $\alpha^2 +$ tang $\vartheta^2$ nicht größer als $\lambda$ ist, bewirkt die Friktion, ohne Beyhülfe einer Kraft, allein schon den Stillstand der Schraube; das Gewicht P mag so groß seyn, als man will.

3. Sind die Schraubengänge viereckig, so ist ihre größte Schiefe, bey der noch die Friktion dem Gewichte Widerstand leistet, $= \omega$; also z. B. für $\lambda = \frac{1}{4}$, tang $\alpha = 0{,}25$, $\alpha = 14°$.

## Friktion eines Seiles, das sich um einen cylindrischen Körper schlägt.

### §. 324.

Fig. 85. **Aufgabe**. An einem Seile, das über den Umfang AyB eines cylindrischen Körpers gelegt ist, ziehen bey a und f zwey Kräfte P und Q nach den Tangenten Aa, Ff; man fragt, um wie vieles Q größer als P seyn könne, ohne daß das Gleichgewicht zwischen beyden aufgehoben, oder das Seil nach der Seite F hinüber gezogen werde.

**Aufl.** 1) Es sey an irgend einer Stelle y, wie im §. 172, die Spannung des Seiles $= T$; der Krümmungshalbmesser $= r$; so ist die Kraft, womit das Element $yy' = ds$ senkrecht gegen die Fläche gedrückt wird, (ebendas.) $= \frac{Tds}{r}$; also die Friktion, die dieses Druckes wegen zu überwinden ist, $= \frac{\lambda Tds}{r}$.

2) Um so viel kann daher die Spannung des folgenden Elementes $y'y''$ größer als $T$ seyn, ohne daß das Gleichgewicht zwischen beyden gestört wird, oder man hat: $dT = \frac{\lambda Tds}{r}$.

3) Wird die Amplitude des Bogens $Ay = \phi$ gesetzt, so ist $r = \frac{ds}{d\phi}$, $d\phi = \frac{ds}{r}$; also $dT = \lambda T d\phi$, $\frac{dT}{T} = \lambda d\phi$; wovon das Integral: $\log \text{nat}. T = \lambda\phi + C$ ist.

4) Für $\phi = 0$, ist $T = P$, folglich $\log T = \lambda\phi + \log P$, oder $\log . \frac{T}{P} = \lambda\phi$; daher $T = P . e^{\lambda\phi}$.

5) Nennt man die Amplitude des Bogens $AF$, d. i. den Winkel $AOF$, den die beyden Normalen $AO$ und $FO$ mit einander machen, $= \alpha$, so ist für $\phi = \alpha$, $T = Q$; also $Q = P . e^{\lambda\alpha}$.

6) Man kann auch das Verhältniß der Kräfte $P$ und $Q$ durch den Winkel $AIF = \gamma$ bestimmen, den ihre Richtungen $aAI$ und $fFI$ miteinander einschließen. Da nemlich im Vierecke $AOFI$ sowol $IAO$ als $IFO = 90°$ ist, so ist $\alpha = 180° - \gamma$, also $Q = P . e^{\lambda(\pi - \gamma)}$.

## §. 325.

Folgerung 1. Der Widerstand von Seiten der Friktion wächst demnach in einem geometrischen Verhältnisse, wenn die Amplitude des Bogens, den das Seil auf dem Umfange des cylindrischen Körpers umschließt, im arithmetischen Verhältnisse zunimmt.

Euler Novi Comment. acad. Sc. Petrop. Tom. XX. pag. 304.

Belidor arch. hydraul. Tom. I. pag. 113.

2. Für den Bogen $AyB = 180°$, wobey die Richtungen $Aa, Bb$ der beyden Kräfte parallel werden, hat man $Q = P \cdot e^{\lambda\pi}$. Nimmt man also z. B. $\lambda$ zu $\frac{1}{3}$ an, so wird

$$\log Q = \log P + \tfrac{1}{3}\pi \log e.$$ Nun ist

$$le = 0{,}43429448$$
$$\tfrac{1}{3}\pi = 1{,}0471975$$

$$\tfrac{1}{3}\pi\, le = 0{,}4547921$$
$$e^{\frac{1}{3}\pi} = 2{,}849653$$

folglich: $Q = 2{,}849653 \cdot P$

3. Geht das Seil ganz um den Cylinder herum, so ist $Q = P \cdot e^{2\lambda\pi}$; und ist es $n$ mal um ihn herumgeschlagen; $Q = P \cdot e^{2n\lambda\pi}$; man würde also z. B. für $n = 3$ nach voriger Rechnung $Q = 535\frac{1}{2}\,P$ erhalten.

Bey mehrern Umwindungen kann daher $Q$ sehr beträchtlich werden, selbst wenn das herabhängende Stück $Aa$ keine fremde Last trägt, sondern bloß durch sein eigenes Gewicht gespannt wird.

## Friktion der Zapfen in den Pfannen.

### §. 326.

Fig. 86. **Aufgabe.** Am Umfange der Welle BGE zieht eine gegebene Last P nach der Tangente $B\beta$; man sucht die Kraft V, die am Endpunkte A des Hebelarmes AO nach senkrechter Richtung $A\alpha$ angebracht, ihr das Gleichgewicht hält, und zugleich den Widerstand aufhebt, der durch das Reiben des Zapfens aDb in der Pfanne FID bewirkt wird.

**Aufl.** 1) Die beyden Kräfte V und P drücken gemeinschaftlich den Zapfen bey D gegen den innern Umfang der Pfanne, und zwar eben so, als wenn sie nach parallelen Richtungen auf den Punkt D unmittelbar angebracht wären (§. 69.); setzt man also den Winkel, den ihre Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ zusammen einschließen, $= \gamma$, so entsteht aus beyden der mittlere Druck $\Pi = \sqrt{(V^2 + 2VP \cos\gamma + P^2)}$ (§. 50.).

2) Wäre der Zapfen keiner Reibung unterworfen, so müßte die Richtung dieses Drucks durch seinen Mittelpunkt O gehen, oder auf der Tangente $D\tau$, die die Umfänge des Zapfens und der Pfanne am Berührungspunkte D mit einander gemein haben, senkrecht seyn: aber wegen des Reibens kann der Druck nach einer schiefen Richtung $D\varepsilon$ geschehen, ohne daß der Zapfen aus dem Gleichgewichte kommt. Wie groß die Abweichung $\varepsilon D\tau$ von der senkrechten Richtung $D\tau$ seyn dürfe, läßt sich so bestimmen:

3) Man setze $\varepsilon D\tau = \omega$, so entspringt aus dem

Drucke $\Pi$ der senkrechte nach $Dr = \Pi \operatorname{Cos} \omega$, und ein anderer nach der Tangente $Dt = \Pi \operatorname{Sin} \omega$. Letztere Kraft strebt den Zapfen nach Dt fortzuschieben; erstere verursacht nach entgegengesetzter Richtung den Widerstand $= \lambda \Pi \operatorname{Cos} \omega$; soll also dieser aufgehoben werden, so muß $\Pi \operatorname{Sin} \omega = \lambda \Pi \operatorname{Cos} \omega$, folglich $\operatorname{tang} \omega = \lambda$ seyn.

4) Es widerstehen demnach der Kraft V an den Hebelarmen OB und OD die beyden Kräfte P und $\lambda P \operatorname{Cos} \omega$, die eine Umdrehung um O nach entgegengesetzter Seite zu bewirken suchen. Wird also $AO = f$, $OB = r$, $OD = e$ gesetzt, so erhält man für das Gleichgewicht:

$$Vf = Pr + \lambda e \Pi \operatorname{Cos} \omega = Pr + e \Pi \operatorname{Sin} \omega;$$ oder, wenn man für $\Pi$ seinen Werth aus (1) substituirt:

$$Vf = Pr + e \operatorname{Sin} \omega \sqrt{(V^2 + 2VP \operatorname{Cos} \gamma + P^2)}$$

woraus folgende quadratische Gleichung entsteht

$$V^2 - \frac{2VP(fr + e^2 \operatorname{Sin} \omega^2 \operatorname{Cos} \gamma)}{f^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2} + \frac{P^2(r^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2)}{f^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2} = 0.$$

5) Sind die Richtungen $A\alpha$ und $B\beta$ parallel, so ist $\gamma = 0$, $\operatorname{Cos} \gamma = 1$, also:

$$Vf = Pr + e \operatorname{Sin} \omega (V + P)$$

oder, $$V = \frac{P(r + e \operatorname{Sin} \omega)}{f - e \operatorname{Sin} \omega}.$$

§. 328.

Bey der Rolle hat man auf folgenden Unterschied zu sehen: entweder sitzt der Bolzen an der Rolle fest, und dreht sich auf beyden Seiten in Pfannen, oder er ist an sich unbeweglich, und geht in der Mitte durch eine Oeffnung der Rolle. Die Gleichung zwischen Kraft und Last ist in beyden Fällen dieselbe; da hier nemlich $f = r$ ist, so erhält man:

$$V^2 - 2VP\left(\frac{r^2 + e^2 \operatorname{Sin} \omega^2 \operatorname{Cos} \gamma}{r^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2}\right) + P^2 = o,$$

und wenn beyde nach parallelen Richtungen ziehen:

$$V = P \cdot \left(\frac{r + e \operatorname{Sin} \omega}{r - e \operatorname{Sin} \omega}\right);$$

nur bedeutet im erstern Falle $e$ den Halbmesser des Bolzen, und im andern, da die Umdrehung allemal um den Mittelpunkt der Rolle geschieht, den Halbmesser der Oeffnung in der Rolle.

## §. 329.

Der Unterschied zwischen $V$ und $P$ wird bloß auf die Ueberwindung der Friktion verwandt: denn wenn keine Friktion statt fände, so würde $V = P$ seyn müssen. Man setze $V - P = p$, und dividire in der letztern Formel Zähler und Nenner wirklich in einander, so bekommt man:

$$V = P\left(1 + \frac{2e \operatorname{Sin} \omega}{r - e \operatorname{Sin} \omega}\right)$$

$$\text{also } p = \frac{2Pe \operatorname{Sin} \omega}{r - e \operatorname{Sin} \omega}.$$

## §. 330.

Da das Reiben bey allen drehenden Bewegungen auf einerley Art geschieht, so lassen sich darüber mit der

Rolle die einfachsten Versuche anstellen; ein Werth von p, den man durch einen Versuch gefunden hat, giebt nemlich gegenseitig:

$$\text{Sin}\ \omega = \frac{pr}{(2P + p)\,e}.$$

Eine Rolle von Guajacholz, die Herr **Coulomb** zu einem seiner Versuche gebrauchte, hatte 144‴ im Durchmesser, und wog 14 ℔; ihr Bolzen, um den sie beweglich war, war von Eisen, und 19‴ dick; dabey betrug der Spielraum zwischen ihm und dem Umfange der Oeffnung $1\frac{3}{4}$‴. Man hat also hier $e = 20\frac{3}{4}$, folglich sehr nahe $\frac{r}{e} = 7$, und da das Gewicht der Rolle zu $2P + p$ hinzu kommt,

$$\text{Sin}\ \omega = \frac{7p}{2P + p + 14}.$$

Folgendes Täfelchen enthält Herrn **Coulombs** Angaben, nebst den daraus berechneten Werthen von Sin $\omega$:

| P | p | Sin $\omega$ |
|---|---|---|
| 103 | 6 | 0,186 |
| 200 | $10\frac{1}{2}$ | 0,148 |
| 400 | 21 | 0,151 |
| | | 3) 0,485 |

mittl. Werth von Sin $\omega$ = 0,162

Ich füge hier noch einige Resultate seiner übrigen Versuche bey:

1) Bey eisernen Axen, die sich auf kupfernen

Zapfenlagern drehen, ist $\sin \omega = \frac{1}{8}$, und wenn Talg dazwischen gebracht wird, $\sin \omega = \frac{1}{11}$; Schmiere $= \frac{2}{17}$; Oel $= \frac{1}{8}$.

2) Das Reiben eiserner Axen auf hölzernen Lagern ist in den meisten Fällen, wenn die Schmiere vortheilhaft gewählt wird, $= \frac{1}{20}$; beym Oele hingegen $= \frac{1}{8}$ und mehr, doch nie über $\frac{2}{11}$.

3) Beym Drehen eichener Axen auf Guajacholz, das mit Talg geschmiert wird, ist $\sin \omega = \frac{1}{26}$; auf Ulmenholz $= \frac{1}{33}$; und, wird der Talg wieder abgewischt, im erstern Falle $= \frac{1}{17}$, im letztern $= \frac{1}{20}$.

4) Die Geschwindigkeit hat in allen diesen Fällen keinen Einfluß auf die Friktion.

## §. 331.

Da sich die Rolle bey ihrer Umdrehung an dem Seile, das über ihren Umfang geht, fortwälzt, so entsteht eigentlich auch dadurch eine Art von Reibung, die von der Kraft überwunden werden muß; indeß ist diese sicher zu gering, als daß sie gegen das Reiben der Axe auf den Pfannen in Anschlag käme. Bey weiten größer ist dagegen der Widerstand, den das Seil durch seine Steifheit der Kraft entgegensetzt: soll nemlich die Rolle sich umdrehen, so muß von dem straffen Seilstücke, woran die Last hängt, ein Theil nach dem andern über ihren Umfang herumgebogen werden, und dazu ist allemal eine gewisse Kraft nöthig, die desto größer seyn muß, je weniger das Seil Biegsamkeit besitzt.

Nach Amonton's Versuchen *) verhält sich die Kraft, die zur Biegung eines Seiles erfordert wird, direkt wie seine Dicke und Spannung, und verkehrt wie der Krümmungshalbmesser. Aus Herrn Coulomb's Versuchen hingegen läßt sich auf kein bestimmtes Verhältniß in Ansehung der Dicke des Seiles schließen; jedoch stimmt nachstehende Formel mit den meisten dieser Versuche, so viel es die Unregelmäßigkeit derselben zuläßt, ziemlich genau überein:

$$w = \frac{c^{1,7}}{r} \cdot (2{,}45 + 0{,}053\, t) \text{ **)}$$

worin c die Dicke des Seiles in Linien ausgedrückt, t seine Spannung, r den Halbmesser der Rolle oder der Welle ebenfalls in Linien, und w die Kraft bedeutet, die auf die Biegung des Seiles verwandt wird.

**Exempel.** Es sey der Halbmesser der Rolle $r = 24'''$, $c = 9'''$, die Spannung $t = 625$ ℔, so hat man $c^{1,7} = 42$; $2{,}45 + 0{,}053\, t = 35{,}575$ ℔, also

$$w = \frac{42 \times 35{,}575}{24} = 62\tfrac{1}{4} \text{ ℔.}$$

§. 332.

Um diesen Widerstand zugleich mit in Rechnung zu bringen, setze man $w = \frac{G + gt}{r}$, und $\sin\omega = \lambda$, so wird (§. 327, 5.)

*) Mem. de l'acad. de Paris 1699.

**) Prony Nouvelle archit. hydraul. P. I. pag. 499.

$$Vf = Pr + \lambda e (V + P) + G + gP$$
$$V (f - \lambda e) = P (r + \lambda e + g) + G$$

folglich $V = \dfrac{(r + \lambda e + g) P + G}{f - \lambda e}$,

und bey der Rolle:

$$V = \frac{(r + \lambda e + g) P + G}{r - \lambda e}$$

also $p$ (§. 329.) $= \dfrac{(2\lambda e + g) P + G}{r - \lambda e}$

**Exempel.** Es sey $P = 500$ ℔, $r = 72'''$, $e = 18'''$, die Dicke des Seiles $c = 9'''$, so wird $G = 103$ ℔, $g = 2{,}226$; folglich, wenn wir $\lambda = \frac{1}{6}$ setzen:

$$p = \frac{4113 + 103}{72 - 3} = 61\tfrac{7}{69} \text{ ℔.}$$

## §. 333.

**Aufgabe.** Beym Flaschenzuge das genauere Verhältniß zwischen Kraft und Last zu bestimmen, wenn dabey sowol die Friktion, als die Steifheit der Seile in Betracht gezogen werden soll.

**Aufl.** Es sey die zu hebende Last $= P$; die Kraft, die ihr das Gleichgewicht hält, und zugleich den Widerstand beyderley Art überwindet, $= V$; die Anzahl der Rollen in jeder Flasche $= n$; ihr mittlerer Halbmesser $= r$, der Halbmesser ihrer Zapfen $= e$; die Spannung des Seilstücks, woran unmittelbar die Kraft zieht, $= t$; die der folgenden $= t', t'', t''' \ldots t^{(2n)}$, so hat man

1) $t = V$ und

$$t' + t'' + t''' \ldots + t^{(2n)} = P$$

2) Wegen gedachter Hindernisse geht von der Spannung des Seiles jedesmal, wenn es sich um eine andere Rolle schlägt, ein Theil verloren, so daß die Werthe t, t′, t″ u. s. w. eine abnehmende Reihe bilden. Es wird nemlich:

$$t = \frac{(r + \lambda e + g)\,t' + G}{r - \lambda e} \quad (\text{§. } 332.)$$

oder gegenseitig $t' = \dfrac{(r - \lambda e)\,t - G}{r + \lambda e + g}$

und auf gleiche Art: $t'' = \dfrac{(r - \lambda e)\,t' - G}{r + \lambda e + g}$ u. s. w.

3) Man substituire allemal den vorhergehenden Ausdruck in den nächstfolgenden, und setze der Kürze wegen $\dfrac{r - \lambda e}{r + \lambda e + g} = i$, $\dfrac{G}{r + \lambda e + g} = \varkappa$, so erhält man:

$t' = it - \varkappa$, $t'' = i^2 t - (i + 1)\varkappa$, $t''' = i^3 t - (i^2 + i + 1)\varkappa$ u. s. w. oder:

$$t' = it - \varkappa$$

$$t'' = i^2 t - \left(\frac{1 - i^2}{1 - i}\right)\varkappa$$

$$t''' = i^3 t - \left(\frac{1 - i^3}{1 - i}\right)\varkappa \text{ u. s. w.}$$

$$t^{(2n)} = i^{2n} t - \left(\frac{i - i^{2n}}{i - i}\right)\varkappa$$

---

$$P = \frac{i(1 - i^{2n})}{1 - i} \cdot t - \left[\frac{2n}{1 - i} - \frac{i(1 - i^{2n})}{(1 - i)^2}\right]\varkappa$$

also $V = t = \dfrac{(1 - i)}{i(1 - i^{2n})} \cdot P + \left(\dfrac{2n}{i(1 - i^{2n})} - \dfrac{1}{1 - i}\right)\varkappa$

4) Setzt man $1 - i = \frac{2\lambda e + g}{r + \lambda e + g} = \omega$, und läßt die höhern Potenzen, so wird $1 - i^{2n} = 2n\omega (1 - (n - \frac{1}{2})\omega)$, und $\frac{2n}{i(1 - i^{2n})} - \frac{1}{1 - i} =$

$\frac{1}{\omega(1 - (n + \frac{1}{2})\omega)} - \frac{1}{\omega} = (n + \frac{1}{2})$, folglich:

$$V = \frac{[1 + (n + \frac{1}{2})\omega] P}{2n} + (n + \frac{1}{2})\varkappa,$$

$$= \frac{P}{2n} + (n + \frac{1}{2}) \cdot \left(\frac{P\omega}{2n} + \varkappa\right)$$

$$= \frac{P}{2n} + \frac{2n + 1}{4n} \cdot \left[\frac{(2\lambda e + g) P + 2nG}{r + \lambda e + g}\right]$$

## Friktion bey der Waage.

### §. 334.

Es sey an der Schnellwage AOB

| | |
|---|---|
| der kürzere Arm AO . . . | $= a$ |
| die in A aufgehängte Last . . | $= P$ |
| das Laufgewicht . . . | $= V$ |
| seine Entfernung OF vom Ruhepunkt | $= f$ |
| das Gewicht des ganzen Wagebalken | $= G$ |
| die Entfernung seines Schwerp. von O | $= g$ |
| der Halbm. des Zapfen, um den er sich drehet . . . . | $= e$ |

so wird nach §. 327.

$$Vf + Gg = Pa + \lambda e (V + P + G)$$

oder $V(f - \lambda e) = P(a + \lambda e) - G(g - \lambda e)$

Man nenne die Last, die der Arm OB durch sein eigenes Gewicht aufwiegt, $= H$, so erhält man für $V = 0$:

$$H(a + \lambda e) - G(g - \lambda e) = 0$$

$$\text{also } G = \frac{H(a + \lambda e)}{g - \lambda e}$$

Dieser Werth für G, in voriger Gleichung substituirt, giebt:

$$V(f - \lambda e) = (P - H)(a + \lambda e).$$

## §. 335.

Bey der gleicharmigen Wage ist $g = 0$, $f = a$, also:

$$Va = Pa + \lambda e\,(V + P + G)$$

oder, wenn man $V - P = p$ setzt:

$$pa = \lambda e\,(2P + p + G),$$

$$p(a - \lambda e) = \lambda e\,(2P + G);$$

$$\text{daher } p = \frac{\lambda e\,(2P + G)}{a - \lambda e}.$$

Da von einer genauen Wage gefordert wird, daß sie den geringsten Unterschied zwischen den Gewichten anzeigen soll, so muß man bey ihr den Einfluß der Friktion, so viel, als sich thun läßt, zu vermindern suchen. Dies geschieht, wie die Formel zeigt:

1) dadurch, daß der Zapfen eine sehr geringe Dicke bekommt; doch muß er Stärke genug behalten, um die Last $2P + G$, die auf ihm ruhet, tragen zu können. Man findet deshalb an sehr feinen Wagen zuweilen prismatische Zapfen, die auf der innern Fläche der Oeffnungen in der Schwere mit der scharfen Kante aufliegen.

2) Indem man die Arme so lang und dabey so leicht macht, als ohne die Gefahr, daß sie bey größern Gewichten sich biegen könnten, geschehen darf. Wegen letzterer Rücksicht besteht der Wagebalken bey den Ramsden'schen Wagen aus zweyen hohlen Kegeln, die am Ruhepunkte mit ihren Grundflächen zusammenstoßen.

## Friktion bey stehender Welle.

### §. 336.

Fig. 87. **Aufgabe.** Eine cylindrische Welle, deren Gewicht $= P$ ist, ruhet mit ihrer Grundfläche DGEB auf horizontalem Boden, und ist um die vertikale Axe beweglich, die durch ihren Mittelpunkt O geht; man fragt, wie viel Kraft an den Endpunkt F des Hebelarmes OF nach senkrechter Richtung Ff angebracht werden muß, um die Friktion zwischen der Grundfläche und den Boden aufzuheben.

Aufl. 1) Wir wollen setzen, eine Vertikale aus dem Schwerpunkte der Welle treffe die Grundfläche in O, so vertheilt sich der Druck P auf ihr gleichförmig (§. 158.); setzt man daher ihren Halbmesser $= \varrho$, so ist $\pi\varrho^2$ ihr Inhalt, folglich $\frac{P}{\pi\varrho^2}$ die Einheit des Druckes, die wir $= \varkappa$ setzen wollen.

2) Es kommt also auf den unendlich schmalen Ring, der von O allenthalben um $OI = z$ absteht, und die Breite $Ii = dz$ hat, vom ganzen Drucke der Theil $2\pi\varkappa z dz$, und die Friktion, die dadurch entsteht, ist $= 2\pi\lambda\varkappa z dz$.

3) Da dieser Widerstand in einer Entfernung von $O = Z$ überwunden werden muß, so ist am Hebelarme OIF sein Moment $= 2\pi\lambda\kappa z^2 dz$, und die Summe dieser Momente von allen einzelnen Ringen, aus denen die Grundfläche besteht, $= \int 2\pi\lambda\kappa z^2 dz = \frac{2}{3}\pi\lambda\kappa z^3$; welches Integral für $z = e$, $= \frac{2}{3}\pi\lambda\kappa e^3$ wird.

4) Heißt demnach M die gesuchte Kraft, f die Länge des Hebelarmes OF, so hat man:

$Mf = \frac{2}{3}\pi\lambda\kappa e^3$, oder wenn man für $\kappa$ seinen Werth $\frac{P}{\pi\varrho^2}$ setzt (1): $Mf = \frac{2}{3}\lambda e P$.

## §. 337.

**Folg.** 1. Wenn die Welle unten auf einem dünnern Zapfen läuft, so trägt dieser ihr ganzes Gewicht, das sich auf seiner Grundfläche gleichförmig vertheilt. Daher bedeutet c in dem Falle den Halbmesser des Zapfen, und die Dicke der Welle kommt dabey weiter gar nicht in Betracht; alles Uebrige aber bleibt in der Formel ungeändert.

2. Da die Kraft M von der Friktion aufgehoben wird, so leidet der Zapfen keinen Seitendruck, also auch weiter keine Friktion, als die an der Grundfläche. Dieser Fall tritt aber ein, wofern die Welle unter irgend einem Winkel $\vartheta$ gegen die Vertikale geneigt wird: man nenne $M'$ den Theil von M, der alsdann auf die Friktion an der Grundfläche des Zapfen, und $M''$ den Theil, der auf die Seitenfriktion verwandt wird, so hat man: $M'f = \frac{2}{3}\lambda e P \operatorname{Cos} \vartheta$, und wenn man die

Friktionszahl der drehenden Bewegung $\lambda'$ nennt:

$$M''f = \lambda'e\,(M'' + P \operatorname{Sin} \vartheta) \text{ (§. 327. 5.)}$$

$$M'' = \frac{\lambda' e P \operatorname{Sin} \vartheta}{f - \lambda' e};$$

folglich wird $M = M' + M'' = \frac{2\lambda e P \operatorname{Cos} \vartheta}{3f} + \frac{\lambda' e P \operatorname{Sin} \vartheta}{f - \lambda' e}$; oder, wenn wir $\lambda' = \lambda$ setzen, und im Nenner des zweyten Theiles $\lambda'e$ als unbedeutend gegen f weglassen: $M = \frac{\lambda e P}{f}\,(\tfrac{2}{3} \operatorname{Cos} \vartheta + \operatorname{Sin} \vartheta)$.

3. Das Differenzial des eingeschlossenen Faktors ist $= (\operatorname{Cos} \vartheta - \tfrac{2}{3} \operatorname{Sin} \vartheta)\, d\vartheta$; also positiv, so lange $\operatorname{tang} \vartheta < \tfrac{3}{2}$ ist, und negativ, so bald $\operatorname{tang} \vartheta < \tfrac{3}{2}$ wird. Daher wird die Friktion Anfangs mit zunehmender Schräge der Axe größer; erreicht für $\vartheta = 56^\circ 18'$ ein Maximum, und nimmt dann wieder ab, so wie sich die Axe mehr der horizontalen Lage nähert.

4. Hierin liegt vorzüglich der Grund, warum manche Uhren nur in horizontaler Lage richtig gehen, und wenn sie aufgehängt, oder in irgend eine andere Lage gebracht werden, um ein merkliches zurückbleiben.

5. Da der Zapfen in vertikaler Lage nach Verhältniß seiner Dicke weit mehr tragen kann, als in horizontaler Lage, so kann bey einerley Druck sein Halbmesser e im erstern Falle viel kleiner seyn, als im letztern; also hat auch in dieser Rücksicht die vertikale Welle vor der horizontalen den Vorzug.

## Friktion beym Räderwerke.

### §. 338.

Im §. 219 u. f. ist gezeigt, daß bey einer angemessenen Form der Zähne die Kraft M am Umfange jederzeit von einer gleich großen Kraft am Umfange des hareingreifenden Getriebes im Gleichgewichte erhalten werde. Soll nun letztere Kraft das Rad wirklich in Bewegung setzen, so muß sie, um Theils die Friktion an den zusammenstoßenden Zähnen, theils die an den Axen zu überwinden, offenbar größer als M seyn; da letzteres Hinderniß nach §. 326. leicht bestimmt werden kann; so wollen wir bloß suchen, wieviel von ihr auf die Ueberwindung der Friktion an den Zähnen verwandt wird.

### §. 339.

Fig. 54. Man setze diese Kraft $= m$; den gegenseitigen Druck, den die Zähne senkrecht aufeinander, oder nach der Normale MO ausüben, $= N$; so bewirkt dieser die Friktion $= \lambda N$, deren Richtung nach der Tangente uMt geht, die die beyden Zähne am Punkte M ihres Zusammenstoßens mit einander gemein haben.

Man zerlege den Widerstand $\lambda N$ in eine Kraft nach $CM = \lambda N \operatorname{Cos} uMC = \lambda N \operatorname{Sin} CMO$, und in eine nach der darauf senkrechten Richtung $Mm = \lambda N \operatorname{Sin} uMC = \lambda N \operatorname{Cos} CMO$; erstere wirkt auf den festen Punkt C, und wird also aufgehoben; letzterer, die

dem

am Hebelarme MC das Moment MC . $\lambda$N Cos CMO hat, ist am Endpunkte O des Halbmessers OC die Kraft $\frac{MC}{OC}$ . $\lambda$N Cos CMO äquipollent, und da diese unmittelbar der Kraft m entgegenwirkt, so hat man

$$m = \frac{MC}{OC} . \lambda N \text{ Cos CMO}.$$

Nun ist $N = \frac{M}{\text{Sin MOC}}$ (§. 217.) und

MC : OC = Sin MOC : Sin CMO, folglich wird

$$m = \frac{\lambda M \text{ Cos CMO}}{\text{Sin CMO}} = \lambda M \text{ Cot. CMO}.$$

Die Friktion ist also während der Zeit, daß zwey Zähne aneinander fortgleiten, beständigen Aenderungen unterworfen, und hängt jedesmal von dem Winkel MCO ab, um den sich der Halbmesser MC von der Mittelpunktslinie CD entfernt hat. Man setze diesen Winkel $= \varphi$, so erhält man im Dreyecke MCO : tang

$$\text{CMO} = \frac{\text{OC Sin } \varphi}{\text{MC} - \text{OC Cos } \varphi}$$

Da der Halbmesser MC von OC höchstens um die Länge des Zahns, oder den Halbmesser des Triebstocks verschieden seyn kann, so darf man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, MC = OC setzen; dadurch wird tang CMO $= \frac{\text{Sin } \varphi}{1 - \text{Cos } \varphi} = \frac{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi \text{ Cos } \frac{1}{2}\varphi}{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi^2}$ $= \text{Cot } \frac{1}{2}\varphi$, also endlich:

$$m = \lambda M \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varphi$$

mithin die ganze Kraft am Getriebe:

$$M + m = M\,(1 + \lambda \tan \tfrac{1}{2}\phi)$$

**Exempel.** Für 20 Zähne oder Triebstöcke ist die größte Abweichung $\phi = 18°$, also $\tan \tfrac{1}{2}\phi = 0{,}1583845$, und wenn $\lambda = \tfrac{1}{3}$ gesetzt wird, $m = 0{,}0527948\ M$, $M + m = 1{,}0527948\ M$, oder beynahe $= \tfrac{20}{19}\ M$.

Anmerk. Nach Belidors Rechnung beträgt in gegenwärtigem Falle (eigentlich für $\phi = 18°26'$) $m = \tfrac{1}{18}\ M$, welches mit dem eben gefundenen Resultate ziemlich genau überein kommt. Beträchtlicher weicht Herrn Langdorfs Formel *) von der meinigen ab; ich muß aber bekennen, daß die Art, wie er sich dabey des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten bedient hat, mir einigen Bedenklichkeiten unterworfen zu seyn scheint.

## §. 340.

**Aufgabe.** Am Umfange der Welle des Rades OGB hängt die Last P; man fragt, wie viel Kraft V auf den Umfang des Rades AEF angebracht werden muß, damit nicht allein die Last im Gleichgewichte erhalten, sondern auch die Friktion an den Zähnen überwunden werde.

**Aufl.** 1) Man setze den Halbmesser $AC = R$, $aC = r$, $OD = R'$, $Db = r'$; so ist der Kraft V am Punkte O die Kraft $M + m = \frac{VR}{r}$, und der Last P an eben dem Punkte die Kraft $M = \frac{Pr'}{R'}$ äquipollent (§. 209). Es wird also:

*) Maschinenlehre I. Th. pag. 48.

$$\frac{VR}{r} = \frac{Pr'}{R'}(1 + \lambda \tang \tfrac{1}{2}\varphi),$$ oder

$$V = \frac{r \cdot r'}{RR'} \cdot P(1 + \lambda \tang \tfrac{1}{2}\varphi)$$

2) Beym Eingreifen mehrerer Räder in einander kann man für $\tang \frac{1}{2}\varphi$ einen mittlern Werth $\varkappa$ annehmen. Auf diese Art erhält man für drey Räder: $V = \frac{rr'r''}{RR'R''} \cdot P(1 + \lambda\varkappa)^3$.

## §. 341.

Wenn das Getriebe in ein Kronrad eingreift, so sind zwey Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn das Getriebe Zähne hat. Alsdann berühren sich die Zähne beyder Räder beständig in einem Punkte der Linie OM, die auf CI senkrecht ist (§. 225.); daher ist hier der Winkel CMO jedesmal $= 90° - OCM = 90° - \varphi$, also $m = \lambda M \operatorname{Cot} CMO = \lambda m \tang \varphi$, und folglich $M + m = M(1 + \lambda \tang \varphi)$.

2. Bey Triebstöcken hingegen geschieht die Berührung allemal in der Sehne MO, die den Winkel MCO mißt (§. 235.); folglich ist in diesem Falle wieder $CMO = 90° - \frac{1}{2} MCN$, also $m = \lambda M \tang \frac{1}{2}\varphi$.

## §. 342.

Fig. 61. **Aufgabe.** Es sey das Gewicht des Stempels AB, der vermittelst des Daumen FM gehoben werden soll, $= P$; man fragt, um wieviel die Kraft an dem Umfange der Welle OFK größer seyn müsse,

damit sowohl die Friktion zwischen der Hebelatte und dem Daumen, als auch die an den Wänden der Leitungen Ee und Gg überwunden werde.

Aufl 1) Man setze die Länge der Hebelatte DM mit Inbegriff der halben Dicke des Stempels (§. 232.) $= f$, die Entfernung $EG = a$, die Kraft, die auf den Punkt O nach der Tangente OM angebracht werden muß $= P'$, so bewirkt diese an den Scheidelatten bey E und g den Seitendruck $\frac{fP'}{a}$, und folglich an jeder Seite die Friktion $\frac{\lambda fP'}{a}$.

2) Demnach ist der gesammte Widerstand, der sich der Kraft P′ unmittelbar nach der Vertikale MO entgegensetzt, $= P + \frac{2\lambda fP'}{a}$.

3) Aus diesem entspringt ferner bey M die Friktion $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})$, deren Richtung MD ist; man zerlege sie in eine Kraft nach Mr, längst dem Halbmesser CM, und in eine darauf senkrechte nach Mn.

4) Erstere ist $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})\ \mathrm{Cos}\ DMr$, und wird am Mittelpunkte C aufgehoben; letztere ist $= \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})\ \mathrm{Sin}\ DMr$, für die man am Punkte O, senkrecht auf CO, die Kraft $\frac{MC}{OC} \cdot \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})\ \mathrm{Sin}\ DMr = \lambda\,(P + \frac{2\lambda fP'}{a})\ \mathrm{tang}\ MCO$ substituiren kann.

5) Setzt man also CMO $= \varphi$, so wird:

$$P' = P + \frac{2\lambda f P'}{a} + \lambda\left(P + \frac{2\lambda f P'}{a}\right) \text{tang}\,\varphi$$

$$= \left(P + \frac{2\lambda f P'}{a}\right)(1 + \lambda\,\text{tang}\,\varphi)$$

folglich $P'\left(1 - \frac{2\lambda f}{a} - \frac{2\lambda^2 f\,\text{tang}\,\varphi}{a}\right) = P$
$(1 + \lambda\,\text{tang}\,\varphi)$, und, wenn man $\lambda^2\,\text{tang}\,\varphi$ gegen $\lambda$ wegläßt:

$$P' = \frac{aP(1 + \lambda\,\text{tang}\,\varphi)}{a - 2\lambda f}$$

6) Es sey noch die Höhe OM, zu der der Stempel gehoben wird, $= h$, der Halbmesser der Welle OC $= r$, so hat man $h = r\,\text{tang}\,\varphi$; also wird der größte Werth, den $P'$ annehmen kann, $= \frac{aP(r + \lambda h)}{r(a - 2\lambda f)}$.

## §. 343.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Einfluß der Friktion bey der Schraube ohne Ende zu bestimmen, die in die Zähne eines daranliegenden Rades eingreift.

Da die Last P (§. 250.) durch den Zahn des Rades einen Widerstand $= \frac{Pr}{R}$ gegen den daranstoßenden Schraubengang parallel mit der Axe ausübt (§. 249. 3.), und die Gänge der Schraube allemal viereckig sind (ebendas. 2.), so hat man, wenn man den Halbmesser der Spindel $\varrho$ nennt: $V = \frac{\varrho Pr(h + 2\pi\lambda\varrho)}{Rf(2\pi\varrho - \lambda h)}$ (§. 323.)

Um zugleich die Friktion an der Axe des Rades in Betracht zu ziehen, wollen wir den gewöhnlichen Fall annehmen, die Schraube habe eine horizontale Lage. Man setze nun, statt V sey jetzt die Kraft $(1+i)V$ nöthig, so ist die Rückwirkung der Schraube auf den Zahn $= \frac{(1+i)Pr}{R}$, und da deren Richtung mit der Richtung der Last einen rechten Winkel macht, so bewirken beyde in Verbindung auf die Axe C Fig. 68. den Druck $\sqrt{(P^2 + (\frac{1+i)^2P^2r^2}{R^2})} = P\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2r^2}{R^2})}$, wodurch an ihrem Zapfen die Friktion $\lambda P\sqrt{(1+\frac{(1+i)^2r^2}{R^2})}$ entsteht.

Da diese als Hebelkraft wirkt, so kann man ihr am Punkte o, wenn man den Halbmesser des Zapfen $= e$ setzt, die Kraft $\frac{\lambda eP}{R}\sqrt{(1+\frac{(1+i)^2r^2}{R^2})}$ substituiren; man erhält demnach:

$$\frac{Pr}{R} + \frac{\lambda eP}{R}\sqrt{(1+\frac{(1+i)^2r^2}{R^2})} = \frac{(1+i)Pr}{R}, \text{ oder}$$

$$1 + \frac{\lambda e}{r}\sqrt{(1+\frac{(1+i)^2r^2}{R^2})} = 1+i$$

Es ist also $i$ beynahe $= \frac{\lambda e}{r}$, und wenn man dies mit dem $i$, das unter dem Wurzelzeichen steht, verwechselt, so bekommt man genauer:

$$1+i = 1 + \frac{\lambda e}{r}\sqrt{(1+\frac{(r+\lambda e)^2}{R^2})},$$

womit folglich der oben gefundene Werth von V noch multiplicirt werden muß.

## Friktion der wälzenden Bewegung.

§. 344.

Es sey (Fig. 25.) EBG der Querschnitt eines Cylinders, der auf horizontalem Boden liegt, sein Halbmesser CB = a, sein Gewicht = P, der jedesmalige Zwischenraum zwischen den hervorragenden Hindernissen des Bodens = f, so ist nach §. 126., wenn man daselbst $\varepsilon = 0$ setzt, die Kraft, die nach horizontaler Richtung CE auf seinen Schwerpunkt C angebracht, die Friktion überwindet, $= \frac{Pf}{a}$. Diese Kraft verhält sich also direkt, wie das Gewicht des Cylinders, und verkehrt, wie sein Halbmesser.

Herr Coulomb *) fand eben dasselbe durch Versuche auf folgende Art:

Fig. 85. Er ließ über einen Cylinder EBD, der auf zwey horizontale Leisten gelegt war, ein dünnes Seil FDEG gehen, und behing beyde Enden desselben DF, EG anfangs mit gleichen Gewichten; dann aber legte er auf der einen Seite so viel Gewicht hinzu, bis der Cylinder fortzurollen anfing. In nachstehender Tafel enthält die erste Kolumne das ganze Gewicht P, womit der Cylinder gegen die Fläche gedrückt wurde; die andern beyden enthalten das Gewicht p, das zur Ueberwindung der Friktion nöthig war.

*) a. a. O. pag. 287.

| P | Diam. 6 Zoll | Diam. 2 Zoll |
|---|---|---|
| 100 ℔ | 0,6 ℔ | 1,6 ℔ |
| 500 = | 3,0 = | 9,4 = |
| 1000 = | 6,0 = | 18,0 = |

Dies Gewicht p wirkt hier am Hebelarme BE nach der schiefen Richtung EG, und hat folglich das Moment $p \cdot BI = p \cdot CE$; ihm ist also am Arme BC des Winkelhebels CBE nach horizontaler Richtung CE eine gleich große Kraft p äquipollent. Man setze nun den Halbmesser $CE = a$, so wird: für $a = 3$ Zoll, und $P = 100, 500$ und $1000$ ℔, $pa = 0{,}018\, P$;

| für a = 1 Zoll | pa |
|---|---|
| P = 100 ℔ | 1,6 ℔ = 0,016 P |
| = 500 = | 9,4 = = 0,019 = |
| = 1000 = | 18,0 = = 0,018 = |
| | 3) 0,053 P |

mittl. Werth von $pa = 0{,}0177\, P$

Daher kann man $p = 0{,}018 \cdot \frac{P}{a}$ setzen, wobey a in Zollen ausgedruckt seyn muß.

Bey den hier angeführten Versuchen war sowol der Cylinder, so wie die Fläche, worauf er fortrollte, von Guajacholz; beym Ulmenholze war dagegen die Friktion um $\frac{2}{5}$ größer, also $p = 0{,}025 \cdot \frac{P}{a}$. Talg und andere Fettarten bewirkten in dieser Art von Friktion keinen Unterschied.

## §. 345.

Fig. 24. Wenn also ein cylindrischer Körper, dessen Gewicht P ist, längs der schiefen Fläche AO durch eine Kraft V aufwärts gewälzt werden soll, die auf seinen Schwerpunkt G nach einer mit der Fläche parallelen Richtung angebracht ist, so hat diese Kraft zugleich die Friktion zu überwinden, die aus dem senkrechten Drucke des Körpers gegen die Fläche entspringt. Heißt nun I der Neigungswinkel der Fläche, a der Halbmesser des Cylinders, $\mu$ die Friktionszahl, so ist jener Druck $= P$ $\text{Cos } I$, folglich $V = P \text{ Sin } I + \frac{\mu P \text{ Cos } I}{a}$.

Soll dagegen die Kraft bloß verhindern, daß der Körper herabrolle, so hat man:

$$V = P \text{ Sin } I - \frac{\mu P \text{ Cos } I}{a}.$$

Setzt man in letzterer Formel $V = 0$, so erhält man für den Neigungswinkel der Fläche, unter dem der Cylinder auf ihr von selbst fortzurollen anfängt: tang $I = \frac{\mu}{a}$; also z. B. für $a = 12$ Zoll, und $\mu = 0{,}025$, tang $I = 0{,}002$, $I = 6'50''$. Man könnte daher auch auf diese Weise die Friktion der wälzenden Bewegung durch Versuche bestimmen.

## §. 346.

Da die Friktion dieser Art so äußerst gering ist, so sucht man bey mechanischen Operationen, wo es sich thun läßt, jedesmal die gleitende Bewegung in eine wälzende zu verwandeln. So bedient man sich z. B. zur Fortschaffung großer Lasten auf horizontalem Boden mit vielem Vortheile der Walzen; diese werden nemlich der Last untergelegt, und vermittelst durchgesteckter Hebelarme zum Fortrollen gebracht, wodurch die Last wegen der ungleich größern Friktion der gleitenden Bewegung zugleich mit fortgezogen wird.

Fig. 90. Man setze nun, auf einer dieser Walzen DEB ruhe das Gewicht P, und am Hebelarme FC, dessen Länge wir $= f$ setzen wollen, sey nach senkrechter Richtung Ff die Kraft w angebracht; außerdem sey der Halbmesser der Walze $= a$, und der Winkel, den FC mit der Vertikale CL macht, $= \vartheta$, so zerfällt

1) die Kraft w in eine nach der Vertikale $Fo = w \operatorname{Cos} fFo = w \operatorname{Sin} \vartheta$, und in eine nach der Horizontale $Fl = w \operatorname{Cos} \vartheta$.

2) Erstere hat am Hebelarme $HB = oC$ das Moment $oC \cdot w \operatorname{Sin} \vartheta = FC \cdot w \operatorname{Sin} \vartheta^2 = fw \operatorname{Sin} \vartheta^2$; letztere am Hebelarme $LB = LC + CB = f \operatorname{Cos} \vartheta + a$ das Moment $fw \operatorname{Cos} \vartheta^2 + aw \operatorname{Cos} \vartheta$.

3) Beyde Kräfte müssen am Winkelhebel HBL der Kraft p nach CE (§. 344.) das Gleichgewicht halten, also ihre Momente zusammen genommen dem Momente pa gleich seyn. Dies giebt:

$$wf + wa \operatorname{Cos} \vartheta = pa = \mu P;$$

$$w = \frac{\mu P}{f + a \operatorname{Cos} \vartheta}$$

4) Da aber auch die Friktion an der obern Fläche bey A überwunden werden muß, an der die Walze

gleichfalls fortzurollen genöthigt ist, so erfordert dies noch eine zweyte Kraft w′. Man erhält diese, wenn man in der Formel (3) statt $\vartheta$ den Winkel FCB $=$ $180^\circ - \vartheta$ setzt; daher wird:

$$w' = \frac{\mu P}{f - a \operatorname{Cos} \vartheta}$$

also die ganze Kraft M, die zur Fortwälzung des Cylinders am Hebelarme FC nöthig ist, $= w + w' = \frac{2\mu f P}{f^2 - a^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2}$.

5) Diese Kraft ist am kleinsten für $\operatorname{Cos} \vartheta = 0$, oder bey horizontaler Lage des Hebelarms, und wird für den Fall $= \frac{2\mu P}{f}$.

## §. 347.

Auf diesem vortheilhaften Gebrauche der Walzen beruhet die von Herrn Scheldom *) erfundene Methode, gesunkene Balken an einer festen Wand AE in die Höhe Fig. 91. zu treiben. Man bringt unter die Last bey E eine Stütze EG in schräger Richtung, und stemmt diese gegen die Nuth einer Unterlage BD, die auf zwey oder mehrere Walzen gelegt ist. Werden nun die Walzen durch Hebelarme cf, cf, die an den Seiten durchgesteckt sind, umgedreht, so wird die Unterlage nach A fortgeschoben, und die Stütze EG dadurch der vertikalen Stellung näher gebracht; welches nicht anders geschehen kann, als indem der Widerstand bey E in die Höhe weicht.

*) Schwed. Abhandl. Band IX. S. 45 u. f.

Es sey der Winkel GEA, den die schräge Richtung GE der Stütze mit der Vertikale EA macht, $= \eta$, der Widerstand nach vertikaler Richtung $= S$; die Kraft, die auf den Hebelarm fc senkrecht wirken muß, um ihm das Gleichgewicht zu halten, und zugleich die Friktion zu überwinden, $= M$; die Länge von fc $=$ f; der Halbmesser der Walze $=$ a. Man zerlege nun:

1) die Kraft S in eine nach EG, und in eine nach Ee, senkrecht auf die vertikale Wand EA, so ist erstere $= \frac{S}{\mathrm{Cos}\,\eta}$, und letztere, die durch die Festigkeit der Wand aufgehoben wird, $= S \,\mathrm{tang}\, \eta$.

2) Die Kraft $\frac{S}{\mathrm{Cos}\,\eta}$ zerlege man ferner in eine horizontale $= \frac{S\,\mathrm{Sin}\,\eta}{\mathrm{Cos}\,\eta} = S\,\mathrm{tang}\,\eta$, und in eine vertikale $= \frac{S\,\mathrm{Cos}\,\eta}{\mathrm{Cos}\,\eta} = S$.

3) Erstere hat am Hebelarme ab $=$ 2a das Moment $2aS\,\mathrm{tang}\,\eta$; letztere bringt durch den Druck auf die Walze das Moment der Friktion $2\mu S$ hervor (§. 346.); also hat man:

$$Mf = (2a\,\mathrm{tang}\,\eta + 2\mu)\,S.$$

4) Da $\mu$ etwa $= \frac{1}{40}$ ist, so erhellet, daß $2\mu$ gegen $2a\,\mathrm{tang}\,\eta$, worin a durch Zolle ausgedrückt werden muß (§. 344.), nicht in Betracht komme. Bedeutender ist dafür die Friktion bey E, die man so findet:

Der Kraft M ist am Punkte a, nach senkrechter Richtung auf ab die Kraft $\frac{Mf}{2a}$ äquipollent; man zerlege sie in eine nach der Vertikale, und in eine nach EG, so ist erstere $= \frac{Mf}{2a} \cdot \text{tang } EGD$, die gegen den Boden drückt, und dadurch aufgehoben wird; letztere $= \frac{Mf}{2a \text{ Cos } EGD} = \frac{Mf}{2a \text{ Sin } \eta}$. Diese zerfällt noch in eine vertikale $= \frac{Mf \text{ Cos } \eta}{2a \text{ Sin } \eta} = \frac{Mf}{2a \text{ tang } \eta}$, und in eine horizontale nach Ee $= \frac{Mf \text{ Sin } \eta}{2a \text{ Sin } \eta} = \frac{Mf}{2a}$, wodurch die Friktion $\frac{\lambda Mf}{2a}$ entsteht; man hat also: $\frac{Mf}{2a \text{ tang } \eta} = S + \frac{\lambda Mf}{2a}$, folglich:

$$Mf = \frac{2aS \text{ tang } \eta}{1 - \lambda \text{ tang } \eta}.$$

5) Ruhet nun der Block BD auf n Walzen, und ist auf jeder Seite derselben ein Hebelarm durchgesteckt, so wird dadurch die Kraft M in 2n Theile getheilt.

## §. 348.

Die Friktion allein muß hier bewirken, daß durch die Kraft S tang $\eta$ die Unterlage auf den Walzen nicht fortgeschoben wird. Es ist also eine nothwendige Bedingung, daß $\lambda S > S \text{ tang } \eta$, oder $\text{tang } \eta < \lambda$ sey.

Setzt man daher $lE = h$, so darf Gl wenigstens nicht größer als $\lambda h$, folglich EG nicht größer als $h\sqrt{(1 + \lambda^2)}$ seyn; also ist die Höhe, zu der die Last hinaufrücken kann, $= EG - El = h \cdot \sqrt{(1 + \lambda^2)} - h$.

Bey einer zweyten Operation ist $EI = h\sqrt{(1 + \lambda^2)}$, und $EG = h\,(1 + \lambda^2)$; bey einer dritten ist $EG = h\,(1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}$, und nach $n$ maliger Wiederderhohlung $= h\,(1 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}$; mithin die ganze Höhe, um die alsdann die Last gestiegen ist, $= h\left((1 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}} - 1\right)$.

Soll demnach die Last durch einen gegebenen Raum $g$ gehoben werden, so hat man $h\left((1 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}} - 1\right) = g$, folglich:

$$(1 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}} = 1 + \frac{g}{h}, \text{ und}$$

$$n = \frac{2 \log\left(1 + \frac{g}{h}\right)}{\log(1 + \lambda)}$$

Es betrage z. B. der Raum $g$ ein Zehntel von $h$, und $\lambda$ sey $= \frac{1}{3}$, so ist $\log\left(1 + \frac{g}{h}\right) = 0{,}0413927$, $\log(1 + \lambda^2) = 0{,}0457574$, $n = \frac{827854}{457574}$; also muß die Operation zweymal geschehen.

## §. 349.

Bey der eben betrachteten Maschine, so wie in andern solchen Fällen, wo die Last nur um ein Geringes fortrücken soll, leisten die Hebelarme sehr gute Dienste; es würde aber dennoch nicht rathsam seyn, sie damit auf eine beträchtliche Weite fortzuschaffen. Man bedient sich alsdann mit größerm Vortheile der Stricke, wobey freylich das Ungemach wieder eintritt, daß sich die Walzen aus ihrer Lage, die begreiflich immer senkrecht auf die Richtung des Zuges seyn muß, leicht verschieben, und dadurch den gleichförmigen Gang der Bewegung sehr häufig unterbrechen.

Aus diesem Grunde wurde der ungeheure Granitblock, eine Last von drey Millionen Pfunden, worauf nachher die Statue Peters des Großen errichtet worden ist, vom Finnischen Meerbusen bis nach St. Petersburg auf Kugeln transportirt. *) Da dies Unternehmen unstreitig eine der merkwürdigsten mechanischen Operationen ist, die je im Großen angestellt worden sind, so will ich das Nähere davon hier im Kurzen beyfügen:

Fig. 92. 1. Die Kugeln bestanden aus einer messingartigen Metallmischung, und hatten 5 Zoll im Durchmesser. Sie wälzten sich zwischen zweyen Riemen AA und BB fort, wovon die obere durch zwey Querbalken mit einer danebenliegenden verbunden, der Last zur Basis diente. Die Entfernung cd der Berührungspunkte betrug $3\frac{1}{2}$ Zoll.

2. Die ganze Steinmasse wurde auf diesen Kugeln durch zwey Stricke fortgezogen, an deren jedem ein dreyrolliger Flaschenzug angebracht war, von dem das Seil um die Welle einer Erdwinde ging, die zwey Fuß im Durchmesser hatte.

3. An jeder der beyden Winden befanden sich 8 Hebelarme von 8 Fuß Länge, und an jedem einzelnen

*) S. des Grafen *Carburi* monument élevé à la gloire de Pierre le Grand. Paris 1777.

Arme schoben 4 Leute, so daß in allem die Last durch 64 Menschen fortbewegt wurde. (a. a. O. pag. 24.)

4. Es versteht sich, daß hier nur von horizontalen Strecken die Rede ist; bey Anhöhen mußten 4, auch wohl 6 Winden gebraucht werden.

Man setze nun

1) das Gewicht der Masse $= P$, den Reibungscoefficienten $\mu$ nach §. 344. $= \frac{1}{40}$, so war das Moment der Friktion $2\mu P = \frac{1}{20} P$ (§. 346. 5.), und da der Hebelarm f hier $= 3\frac{1}{2}$ Zoll ist (1), die erforderliche Kraft zum Fortziehen $= \frac{2\mu P}{f} = \frac{1}{70} P$; also die Spannung jedes der beyden Stricke $= \frac{1}{140} P$.

2) Folglich die des Seiles an der Welle der Winde $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{140} \cdot P = \frac{P}{840}$ (§. 184.), deren Moment ebenfalls $\frac{P}{840}$ ist, da der Halbmesser der Welle 1 Fuß beträgt.

3) Es sey endlich M die Kraft, die jeder Arbeiter anzuwenden hatte; so wird, wenn man die Länge des Hebelarmes in vier gleiche Theile theilt, und den Punkt des Angriffs jedesmal in die Mitte eines solchen Theiles setzt; $7M + 5M + 3M + M$ das Moment an einem der Arme, folglich dies 8 mal genommen:

$$8 . 16 M = 128 M = \frac{P}{840}, \text{ mithin } M = \frac{P}{107520}.$$

4) Da nun $P = 3000000$ ℔, so erhält man $M = 27\frac{101}{112}$ ℔, eine Kraft, die man in der Regel

jedem

jedem Arbeiter selbst bey anhaltender Anstrengung zumuthet, und die sie hier um so leichter anwenden konnten, da die Arbeit durch die Stellveränderung der Winden sehr häufig unterbrochen wurde.

## Friktionsräder.

### §. 350.

Die Umdrehung der Zapfen in ihren Pfannen ist eigentlich mehr gleitend als wälzend; man kann sie aber dadurch zu einer bloß wälzenden Bewegung umschaffen, daß man den Zapfen auf die Umfänge zweyer neben einander liegenden Räder bringt, die gleichfalls um ihre Axen beweglich sind. Wenn sich nemlich alsdann der Zapfen dreht, so bewirkt die Friktion, daß die Räder zugleich mit umlaufen, also der Zapfen auf ihren Umfängen sich bloß fortwälzt. Hierdurch wird nun zwar das Hinderniß, das man zu vermeiden sucht, nicht ganz gehoben, weil allemal wieder eine Bewegung der erstern Art durch die Axen der beyden Räder entsteht; aber wenigstens kann doch die damit verbundene Friktion nun weit leichter überwunden werden, als wenn der Zapfen sich unmittelbar auf unbeweglichen Lagern dreht.

### §. 351.

Fig. 93. **Aufgabe.** Die Welle EFG leide nach vertikaler Richtung CD den Druck P; man fragt, wie viel Kraft auf den Hebelarm AC, der mit ihr verbunden ist, nach der auf ihn senkrechten Richtung Aa ange-

bracht werden müsse, damit die Friktion sowohl bey F und G, als auch an den Zapfen der beyden Räder überwunden werde.

Aufl. 1) Man setze die gesuchte Kraft $= M$, die Länge des Hebelarmes $AC = f$, den Halbmesser des Zapfen $FC = a$, den Halbmesser des Rades $Fo = r$, und den seines Zapfen $of = e$; außerdem sey der Winkel $FCD = \eta$, so zerfällt

1) der Druck P in einen nach CFo, und in einen nach CGo, wovon jeder $= \frac{P \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Sin} 2\eta} = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \eta}$ ist.

2) Dadurch entsteht an jedem der kleinern Zapfen die Friktion $\frac{\lambda P}{2 \operatorname{Cos} \eta}$, die das Moment $\frac{\lambda e P}{2 \operatorname{Cos} \eta}$ hat, und zur Ueberwindung an dem Umfange des Rades bey F und G eine Kraft $= \frac{\lambda e P}{2 r \operatorname{Cos} \eta}$ erfordert.

3) Der Zapfen EFG leidet also bey seiner Umdrehung den Widerstand $= \frac{\lambda e P}{r \operatorname{Cos} \eta}$, und da dieser an seinem Umfange nach der Tangente gerichtet ist, so hat er daran das Moment $= a \cdot \frac{\lambda e P}{r \operatorname{Cos} \eta}$.

4) Hierzu kommt nun noch das Moment $\frac{2 \mu P}{2 \operatorname{Cos} \eta}$ $= \frac{\mu P}{\operatorname{Cos} \eta}$ der Friktion, die das Wälzen der Zapfen bey F und G hervorbringt; also hat man:

$$Mf = (\mu + \frac{\lambda ea}{r}) \frac{P}{\mathrm{Cos}\,\eta}, \text{ oder}$$

$$M = (\mu + \frac{\lambda ea}{r}) . \frac{P}{f\,\mathrm{Cos}\,\eta}$$

5) Drehete sich der Zapfen auf unbeweglichen Lagern, so wäre $M = \frac{\lambda a P}{f}$; daher wird, weil $\mu$ unbeträchtlich ist, die Friktion durch Hülfe der Räder beynahe in dem Verhältnisse $1 : \frac{P}{r\,\mathrm{Cos}\,\eta}$ vermindert.

**Exempel.** Es sey $f = 12$ Zoll, $a = e = 1$ Zoll, $r = 6$ Zoll, so wird, wenn man $\lambda = \frac{1}{6}$ und $\mu = \frac{1}{40}$ setzt, $M = (\frac{1}{40} + \frac{1}{36}) . \frac{P}{12\,\mathrm{Cos}\,\eta} = \frac{19}{4320} . \frac{P}{\mathrm{Cos}\,\eta}$.

Nun sey ferner die Distanz der Mittelpunkte o,o $= 9$ Zoll, so hat man $oD = 4\frac{1}{2}''$, $oC = 7''$, also $\mathrm{Sin}\,\eta = \frac{9}{14}$, $\mathrm{Cos}\,\eta = 0{,}766$; mithin wird $M = 0{,}00567\,P$.

Bey unbeweglichem Zapfenlager wäre dagegen $M = \frac{1}{72} P = 0{,}01389\,P$, folglich mehr als $2\frac{1}{2}$ mal so groß, als im erstern Falle.

## §. 352.

Man nenne c die halbe Distanz der Mittelpunkte der beyden Räder, so ist $\mathrm{Sin}\,\eta = \frac{c}{r+a}$, und $\mathrm{Cos}\,\eta = \sqrt{[1 - \frac{c^2}{(r+a)^2}]}$.

Je größer also c ist, desto kleiner ist Cos $\eta$, folglich M bey einerley P desto größer; theils weil Cos $\eta$ sich darin im Nenner befindet, theils weil die Zapfen bey o und $\omicron$, wegen des größern Druckes, der nach der schrägen Richtung F$\omicron$ geht, um so dicker seyn müssen. Es muß also die Distanz der Mittelpunkte so klein angenommen werden, als möglich; damit aber die Axen und Umfänge der Räder nicht zusammenstoßen, muß sie doch allemal etwas größer als r seyn. Gewöhnlich nimmt man sie zu $\frac{4}{3}$ r an.

---

Eilftes Kapitel.

# Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

## §. 353.

Fig. 94. **Lehrsatz. Wenn mehrere Kräfte** S, S′, S″ **u. s. f. an einem Punkte** D **einander das Gleichgewicht halten, und wir setzen, der Punkt bewege sich nach irgend einer Seite durch einen unendlich kleinen Raum, so ist allemal die Summe der Produkte aus den einzelnen Kräften in die Wege, die sie dabey nach ihren Richtungen zurücklegen,** $= 0$.

Beweis 1) Man ziehe nach Gefallen drey Axen OA, OB, und OC, die sich in irgend einem Punkte O rechtwinklig durchschneiden, und nenne die Koordinaten des Punktes D, in Bezug auf diese Axen: OF $=$

a, FI $=$ b, ID $=$ c; eben so seyen OX $=$ x, XY $=$ y, YZ $=$ z die Koordinaten für einen Punkt Z, der in der Richtung der Kraft S liegt, und seine Entfernung DZ von D sey $=$ S.

2) Ferner ziehe man durch D die Linien Da, Db und Dc mit OA, OB und OC parallel; lasse ZY von der Ebene bDa in u schneiden, und fälle ur auf Da, rw auf XY senkrecht; so ist Dr $=$ Iw $=$ FX $=$ x $-$ a, ru $=$ wY $=$ y $-$ b, Zu $=$ ZY $-$ DI $=$ z $-$ c, und

$$DZ^2 = Du^2 + uZ^2 = Dr^2 + ru^2 + uZ^2, \text{ oder}$$
$$S^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

3) Diese Gleichung nach x, y und z besonders differenziirt, giebt:

$$S\left(\frac{ds}{dx}\right) = x - a;\ \left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{x-a}{S}$$
$$S\left(\frac{ds}{dy}\right) = y - b;\ \left(\frac{ds}{dy}\right) = \frac{y-b}{S}$$
$$S\left(\frac{ds}{dz}\right) = z - c;\ \left(\frac{ds}{dz}\right) = \frac{z-c}{S}$$

4) Man nenne X, Y und Z die Kräfte, die aus der Zerlegung der Kraft S nach den dreyen Richtungen Da, Db, Dc entspringen, so hat man X $=$ S Cos ZDa, Y $=$ S Cos ZDb, Z $=$ S Cos ZDc (§. 51.)

5) Aber in der rechtwinkligen Ecke, die von DZ, Du und Da eingeschlossen wird, ist Cos ZDa $=$ Cos

$$ZDu \cdot \text{Cos } uDa = \frac{Du}{DZ} \cdot \frac{Dr}{Du} = \frac{Dr}{DZ} = \frac{x-a}{S} =$$

$\left(\frac{ds}{dx}\right)$; also wird: $X = S\left(\frac{ds}{dx}\right)$, und eben so erhält man: $Y = S\left(\frac{ds}{dy}\right)$, $Z = S\left(\frac{ds}{dz}\right)$.

6) Bedeutet jezt Z einen Punkt in der Richtung der Kraft S′, und heißt s′ die Entfernung desselben von D; so sind auf gleiche Art $S'\left(\frac{ds'}{dx}\right)$, $S'\left(\frac{ds'}{dy}\right)$, $S'\left(\frac{ds'}{dz}\right)$ die Kräfte, die aus der Zerlegung derselben nach den Richtungen Da, Db und Dc entspringen, und eben dies gilt auch für die folgenden Kräfte S″, S‴ u. s. w.

7) Es sey V die Kraft, die durch die Zusammensetzung aller der Kräfte S, S′, S″ u. s. w. hervorgebracht wird, so ist offenbar der Antheil von ihr nach der Richtung Da = der Summe aller einzelnen Kräfte, die man aus der Zerlegung von S, S′ u. s. f. nach dieser Richtung erhält, und ein Gleiches gilt in Ansehung der beyden andern Richtungen Db und Dc; nennt man also u eben das für V, was bey den gegebenen Kräften s, s′, s″ u. s. f. hieß, so wird:

$$V\left(\frac{du}{dx}\right) = S\left(\frac{ds}{dx}\right) + S'\left(\frac{ds'}{dx}\right) + \text{u. s. w.}$$

oder $V dx \,.\left(\frac{du}{dx}\right) = S dx\left(\frac{ds}{dx}\right) + S' dx\left(\frac{ds'}{dx}\right) + \text{u. s. w.}$

und eben so:

$$V dy\left(\frac{du}{dy}\right) = S dy\left(\frac{ds}{dy}\right) + S' dy\left(\frac{ds'}{dy}\right) + \text{u. s. w.}$$

$$V dz\left(\frac{du}{dz}\right) = S dz\left(\frac{ds}{dz}\right) + S' dz\left(\frac{ds'}{dz}\right) + \text{u. s. w.}$$

Folglich, wenn alles dreyes zusammen addirt wird:

$Vdu = Sds + S'ds' +$ u. s. w.

8) Sind nun die Kräfte S, S', S'' u. s. f. unter sich im Gleichgewichte, so ist die aus ihnen resultirende Kraft $V = o$, also

$$Sds + S'ds + S''ds'' \text{ u. s. f.} = o.$$

9) Gegenseitig: wenn zwischen diesen Kräften die gefundene Gleichung statt findet, so ist die Kraft V, die aus ihrer Zusammensetzung entspringt, $= o$; also stehen die Kräfte mit einander im Gleichgewichte.

## §. 354.

Wenn der Punkt D sich nicht frey bewegen kann, sondern auf irgend einer Fläche fortzugehen genöthigt ist, so sind es nicht bloß die äußern Kräfte S, S' u. s. f., die ihn im Gleichgewichte erhalten, sondern es kommt auch dabey der Druck in Betracht, den die gedachte Fläche auf den Punkt ausübt.

Dieser Druck, den wir $\Pi$ nennen wollen, wirkt nach der Normale der Fläche, oder welches einerley ist, vom Mittelpunkte ihrer Krümmung aus, die sie an der Stelle hat, wo der Punkt auf ihr sich befindet. Setzt man demnach ihren Krümmungshalbmesser daselbst $=$ r, so erhält man die Gleichung:

$$o = \Pi dr + Sds + S'ds' + \ldots$$

Da aber bekanntlich jedes Element einer Fläche als ein Stück einer Kugelfläche zu betrachten ist, so beschreibt der Punkt jedesmal, er mag sich auf der Fläche bewegen, wohin man will, ein Element eines Kreisbogens; mithin bleibt dabey r ungeändert, und dr wird folglich $= 0$. Daher bekommt man wieder: $0 = Sds + S'ds' +$ u. s. w., so daß also die Einwirkung der Fläche keine Aenderung in dem einfachen Gesetze hervorbringt.

Fig. 95. **Exempel.** Der Schwerpunkt M eines Körpers, dessen Gewicht $= P$ ist, ruhet auf der schiefen Fläche AC, die gegen die Horizontale CB unter dem Winkel $ACB = I$ inclinirt ist; man fragt, wieviel Kraft V nach einer gegebenen Richtung DM, die mit CB den Winkel I' macht, auf den Punkt M angebracht werden muß, um ihn im Gleichgewichte zu erhalten?

Man setze, der Punkt bewege sich längs der Fläche durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dw$; so ist, wenn man MF auf CB, und mr auf MF senkrecht zieht, Mr der Weg, den der Punkt M nach der Richtung der Schwere durchläuft, und, wenn man mo auf DM senkrecht zieht, Mo der Weg, den er gegen die Richtung der Kraft V zurücklegt. Daher hat man hier:

$ds = Mr = dw \operatorname{Sin} I$, und $ds' = -Mo = -dw \,.\, \operatorname{Cos} mMo$: aber $mMo = mMF - oMF = (90° - I) - (90° - I') = I' - I$; also $ds' = -dw \operatorname{Cos} (I' - I)$, folglich

$$P dw \operatorname{Sin} I - V dw \operatorname{Cos} (I' - I) = 0$$

oder $V = \dfrac{P \operatorname{Sin} I}{\operatorname{Cos} (I' - I)}$ wie im §. 117 gefunden ist.

## §. 355.

**Lehrsatz. Wenn die Kräfte S, S', S'' u. s. w.**

auf ein System von mehrern Punkten $m$, $m'$, $m''$ u. s. f., die durch feste gerade Linien gegenseitig mit einander verbunden sind, nach beliebigen Richtungen wirken, und sich daran im Gleichgewichte erhalten; so ist wieder für eine unendlich kleine Aenderung in der Lage des ganzen Systems, wobey die Kräfte nach ihren Richtungen die Wege $ds$, $ds'$, $ds''$ u. s. f. durchlaufen:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = 0.$$

**Beweis.** 1) Wir wollen bloß setzen, das System bestehe aus den drey Punkten $m$, $m'$, $m''$. Auf den Punkt $m$ sey die Kraft $S$, auf $m'$, $S'$ und auf $m''$, $S''$ angebracht; dabey sey die Entfernung zwischen $m$ und $m' = f$, zwischen $m$ und $m'' = f'$, und zwischen $m'$ und $m'' = f''$.

2) Was nun zuvörderst den Punkt $m$ betrifft, so ist klar, daß die Kräfte $S'$, $S''$ nicht anders als von $m'$ und $m''$ aus auf ihn wirken können; setzt man daher den gegenseitigen Druck, den die Punkte $m$ und $m'$ auf einander ausüben, $= R$, und den zwischen $m$ und $m''$ $= R'$, so sind am Punkte $m$ die Kräfte $S$, $R$ und $R'$ für sich im Gleichgewichte; man hat also:

$$Sds + Rdf + R'df' = 0.$$

3) Setzt man ferner die gegenseitige Wirkung der Punkte $m'$ und $m''$ aufeinander $= R''$, so sind $S'$, $R$ und $R''$ die Kräfte, die am Punkte $m'$ unter sich im Gleichgewichte stehen, und da dieser Punkt, wegen seiner unveränderlichen Distanz von $m$, dem Punkte $m$ nach $m'm$ folgen muß, so ist der Weg, den hier die

Kraft R nach ihrer Richtung mm' durchläuft, $= - df$, folglich:

$$S'ds' - Rdf + R''df'' = o.$$

4) Endlich sind $S''$, $R'$ und $R''$ die Kräfte, die sich am Punkte m'' das Gleichgewicht halten, und weil derselbe sowohl nach m''m, als nach m''m' um eben so viel zurückweichen muß, als die Punkte m und m' nach diesen Richtungen fortrücken, so hat man:

$$S''ds'' - R'df' - R''df'' = o.$$

5) Alle drey Gleichungen zusammen addirt, geben demnach:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' = o.$$

6) Man sieht übrigens leicht, daß sich der Beweis ganz auf dieselbe Art führen lasse, wenn das System aus mehr als dreyen Punkten besteht.

## §. 356.

### Exempel für zwey Kräfte.

An der Schraube (§. 243.) halte die Kraft S, vermittelst eines Hebelarmes, dessen Länge $= f$ ist, der Last S' das Gleichgewicht.

Man setze, die Kraft beschreibe um die Axe der Spindel den Bogen ds, so dreht sich die Schraube um den Winkel $\frac{ds}{f}$, und wird zugleich, wenn man h die Höhe ihrer Gänge nennt, um $\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{ds}{f}$ gehoben. Um so viel steigt also die Last aufwärts; da nun diese Bewegung gegen ihre Richtung geschieht, so hat man:

$$Sds - \frac{hS'ds}{2\pi f} = o$$

oder $2\pi fS = hS'$.

## §. 357.

## Exempel für drey Kräfte.

Fig. 96. I. Am Winkelhebel ACB sey auf den Punkt A nach der Richtung Ap die Kraft S, und auf den Punkt B nach Bq die Kraft S' angebracht; beyden halte eine Kraft S'', die am Ruhepunkte C nach der Richtung Cr zieht, das Gleichgewicht. Man lasse

1) den ganzen Hebel am Punkte C sich um den Winkel $d\varphi$ drehen, so beschreiben die Punkte A und B, wenn man ihre Entfernungen von $C = a$ und b setzt, die Bogen $Aa = ad\varphi$, und $Bb = bd\varphi$. Fällt man nun aus a und b auf Ap und Bq die Perpendikel ai, bl, und nennt die Winkel, die die Richtungen Ap, Bq mit den Hebelarmen CA und CB machen, $= \alpha$ und $\beta$, so sind die Räume, die die Kräfte S und S' nach ihren Richtungen durchlaufen: $Ai = ad\varphi \,.\, \text{Sin}\, \alpha$, und $Bl = - bd\varphi\, \text{Sin}\, \beta$, folglich hat man:

$$Sad\varphi\, \text{Sin}\, \alpha - S'bd\varphi\, \text{Sin}\, \beta = o, \text{ oder}$$

$$Sa\, \text{Sin}\, a = S'b\, \text{Sin}\, \beta$$

Um die Größe und Richtung der dritten Kraft S'' zu bestimmen, lasse man:

2) den Hebel nach der Richtung dieser Kraft um $Cc = dw$ sinken; fälle aus a und b auf Ap und Bq die Perpendikel ai und bl, und setze die Winkel, die die Richtungen Ap und Bq mit Cr machen, $= \eta$ und $\vartheta$;

so ist der Raum, den die Kraft S durchlaufen ist: Ai $= Aa \operatorname{Cos} \eta = dw \operatorname{Cos} \eta$, und den S' durchlaufen ist: $Bl = dw \operatorname{Cos} \vartheta$, folglich:

$$S dw \operatorname{Cos} \eta + S' dw \operatorname{Cos} \vartheta - S'' dw = o; \text{ also}$$

$$S'' = S \operatorname{Cos} \eta + S' \operatorname{Cos} \vartheta.$$

Fig. 97. 3) Man lasse ferner den Hebel längs der Richtung Ap um das Stück $A\alpha = dw'$ fortrücken, und fälle aus $\beta$ und $\gamma$, worin die Punkte B und C durch diese Bewegung gelangt sind, auf Bq und Cr die Perpendikel $\beta l$ und $\gamma o$, so hat die Kraft S' nach ihrer Richtung den Weg $Bl = B\beta \operatorname{Cos} (\eta + \vartheta) = dw' \operatorname{Cos} (\eta + \vartheta)$, und S'' gegen ihre Richtung den Weg $Co = C\gamma \operatorname{Cos} \eta = dw' \operatorname{Cos} \eta$ zurück gelegt, mithin wird:

$$S dw' + S' dw' \operatorname{Cos} (\eta + \vartheta) - S'' dw' \operatorname{Cos} \eta = o,$$

folglich:

$$S'' \operatorname{Cos} \eta = S + S' \operatorname{Cos} (\eta + \vartheta)$$

4) Auf gleiche Art erhält man, wenn man den Hebel längs Bq sich bewegen läßt:

$$S'' \operatorname{Cos} \vartheta = S' + S \operatorname{Cos} (\eta + \vartheta)$$

5) Multiplicirt man die Gleichung (2) mit Cos $\eta$, und zieht sie dann vor der Gleichung (3) ab, so bleibt:

$$o = S \operatorname{Sin} \eta^2 - S' \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta$$

$$\text{oder } S \operatorname{Sin} \eta = S' \operatorname{Sin} \vartheta$$

6) Und, wenn die Gleichung (3) und (4) mit S und S' multiplicirt, und dann addirt werden, so erhält man:

$$S'' (S \operatorname{Cos} \eta + S' \operatorname{Cos} \vartheta) = S''^2 = S^2 + 2SS' \operatorname{Cos} (\eta + \vartheta) + S'^2;$$

woraus erhellet, daß die Kraft $S''$ sammt ihrer Richtung aus der Zusammensetzung der Kräfte $S$ und $S'$ entspringt.

II. Derselbe Hebel ruhe bey $C$ auf einem Zapfen, dessen Halbmesser $= e$; man sucht das Verhältniß der Kräfte $S$ und $S'$ zu einander, wenn erstere zugleich die Friktion überwinden soll.

Man lasse, wie I. (1), den Hebel nach $A$ zu sich um den Winkel $d\phi$ drehen, so beschreibt der Widerstand $\lambda S''$, den das Reiben verursacht, um $C$ den Bogen $ed\phi$, und zwar gegen seine Richtung; es entsteht also die Gleichung:

$$Sad\phi \operatorname{Sin} \alpha - S'bd\phi \operatorname{Sin} \beta - \lambda S'' ed\phi = 0$$

woraus $Sa \operatorname{Sin} \alpha = S''b \operatorname{Sin} \beta + \lambda S''e$ wird.

Ist der Hebel geradlinigt, und sind die Richtungen der beyden Kräfte auf ihn senkrecht, so ist der Winkel $\eta + \vartheta$, den sie zusammen einschließen, $= 0$; also $S''^2 = S^2 + 2SS' + S'^2$, oder $S'' = S + S'$; ferner ist $\alpha = \beta = 90°$, folglich erhält man:

$$Sa = S'b + \lambda e (S + S')$$

$$\text{und } S = \frac{(b + \lambda e) S'}{a - \lambda e}.$$

## §. 358.

## Exempel für mehrere Kräfte.

Den Schwerpunkt eines Systems von Punkten oder unendlich kleinen Massen $m$, $m'$, $m''$ u. s. w. zu finden, die unter sich zu einem festen Körper verbunden sind.

Fig. 15. Man setze, der ganze Körper werde nach der Vertikale um ds gehoben, so durchlaufen die einzelnen Punkte Z, Z′ u. s. w. diesen Raum gegen die Richtung ihrer Schwere, und die Kraft S, die auf den Schwerpunkt G vertikal aufwärts angebracht ist (§. 32.), durchläuft eben den Raum nach ihrer Richtung; es wird also:

$$Sds - mds - m'ds - \ldots = 0$$

folglich: $S = m + m' + m'' +$ u. s. f.

Man fälle ferner aus den einzelnen Punkten des Systems Z, Z′ u. s. f. auf die horizontale Ebene AOB die Perpendikel ZY, Z′Y′ u. s. w., so wird das Gleichgewicht zwischen der Kraft S und den Gewichten m, m′ ... nicht aufgehoben, wenn man letztere auf die Punkte Y, Y′ ... so wie die Kraft S auf den Punkt F verlegt.

Jetzt lasse man die Ebene AOB um die Axe OB nach C zu den Winkel $d\phi$ beschreiben, so durchläuft das Gewicht m am Punkte Y gegen seine Richtung den Bogen $OX . d\phi = xd\phi$; das Gewicht m′ den Bogen $x'd\phi$ u. s. w.; und die Kraft S am Punkte F nach ihrer Richtung den Bogen $OD . d\phi = ad\phi$; man erhält also:

$$Sad\phi - mxd\phi - m'x'd\phi \ldots = 0,$$

$$Sa = mx + m'x' + m''x'' + \ldots$$

$$\text{folglich } a = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

Auf gleiche Art werden die andern beyden Koordinaten des Punktes G bestimmt, wenn man den Körper in Lagen bringt, wo die Axen OA und OC in OB zu liegen kommen.

## §. 359.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, wo alle Punkte des Systems so mit einander verbunden sind, daß sie bey ihrer Bewegung stets dieselbe Entfernung von einander behalten; wir wollen nun annehmen, einige Punkte des Systems stehen unter sich in gar keinem Zusammenhange, so daß sich der eine von diesen ohne den andern frey bewegen, und willkührlich seine Entfernung von ihm verändern kann.

Man sieht offenbar, daß zwischen solchen Punkten keine unmittelbare Reaktion statt findet, sondern daß ihre Wirkung auf einander bloß von denjenigen Punkten aus geschieht, mit denen sie auf unveränderliche Distanz verbunden sind. Wenn also in einer der Gleichungen (§. 355.) ein Glied $Rdf$ vorkommt, und es enthält keine der folgenden Gleichungen das entgegengesetzte Glied $-Rdf$, so ist allemal $R = 0$, weil alsdann die Punkte, wovon $R$ die gegenseitige Wirkung andeuten soll, von einander unabhängig sind; daher bleibt die Gleichung

$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = 0$$

auch noch für den Fall richtig, wenn nicht alle Punkte des Systems zu einerley festem Ganzen gehören.

## §. 360.

### Exempel für zwey Kräfte.

Fig. 52. I. An dem Umfange der Welle des gezähnten

Rades OGB ziehe eine Kraft $S'$ nach der Tangente $gs$, und werde von der Kraft $S$, die am Umfange des Rades AEF nach der Tangente ES angebracht ist, im Gleichgewichte erhalten. Hier sind E, C und O; O, D und g die Punkte, die ihre Entfernung von einander unverändert beybehalten, also unmittelbar einen Druck aufeinander ausüben können.

Man setze die Reaktion zwischen E und $C = R$, zwischen E und $O = R'$, zwischen C und $O = R''$; die Distanz $EC = f$, $EO = f'$, $CO = f''$; eben so sey die Reaktion zwischen O und $D = r$, zwischen O und $g = r'$, zwischen D und $g = r''$; die Distanz $OD = g$, $Og = g'$, $Dg = g''$: so hat man für den Punkt E:

$$Sds + Rdf + R'df' = 0$$

und weil C unbeweglich, also $df = 0$ ist:

$$1)\ Sds + R'df' = 0.$$

Ferner ist für den Punkt C, auf den keine äußere Kraft wirkt:

$-R'df' + R''df'' + rdg + r'dg' = 0$; und da wegen der unbeweglichen Punkte C und D, $df''$ und $dg = 0$ sind:

$$2)\ -R'df' + r'dg' = 0.$$

Endlich ist für den Punkt g, da $dg'' = 0$ ist:

$$3)\ S'ds' - r'dg' = 0.$$

Addirt man diese drey Gleichungen zusammen, so wird:

$$Sds + S'ds' = 0.$$

Um aus dieser Gleichung die im §. 209. gefundene Formel herzuleiten, muß man für ein angenommenes

menes ds den Werth von dt′ bestimmen, welches auf folgende Art geschieht:

Indem die Kraft S nach ihrer Richtung ES um ds fortrückt, dreht sich das Rad AEF um den Winkel $\frac{ds}{EC} = \frac{ds}{F}$; also beschreibt der Punkt O den Bogen $DO . \frac{ds}{F} = \frac{f''ds}{F}$, folglich das Rad OGB um D den Winkel $\frac{f''ds}{fg}$, und der Punkt g den Bogen $Dg . \frac{f''ds}{fg} = \frac{f''g''ds}{fg}$. Da nun die Kraft S′ diesen Weg gegen ihre Richtung gs zurücklegt, so ist hier $ds' = -\frac{f''g''}{fg} . ds$, also: $Sds - \frac{S'f''g''}{fg} . ds = 0$, oder:

$$fg . S = f''g'' . S'.$$

Fig. 98. II. Die Kraft m zu bestimmen, die an den Umfang des Getriebes, oder senkrecht auf den Halbmesser CO angebracht werden muß, um die Friktion zwischen den Zähnen zu überwinden.

Man setze, die Berührung der Zähne geschehe im Punkte M des Halbmessers MC, der von der Mittelpunktslinie COD um den Winkel MCO $= \varphi$ absteht; der Druck, den sie senkrecht auf einander, oder nach der Normale MO ausüben, sey $= N$, so wirkt die Friktion nach einer auf MO senkrechten Richtung, und ist $= \lambda N$. Rückt nun der Punkt M im Umfange des Getriebes (§. 235.) um den Bogen Mm $=$ ds fort, so durchläuft die Friktion den Raum des auf MO gefällten Perpendikels $mr = Mm \text{ Sin } mMr = Mr \text{ Sin } rmq = Mm \text{ Cos } CqO = ds \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi$; also wird

$$mds = \lambda Nds \text{ Sin } \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$m = \lambda N \text{ Sin } \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Aber $N = \frac{M}{\text{Sin } MOC}$ (§. 217.) $= \frac{M}{\text{Cos } \frac{1}{2}\varphi}$, folglich $m = \lambda M \text{ tang } \frac{1}{2}\varphi$, wie §. 339.

## §. 361.

Es bleibt endlich noch der Fall zu betrachten übrig, wo zwey Punkte des Systems weder zu einem festen Ganzen gehören, noch gänzlich unabhängig von einander sind, sondern mit einander durch einen Faden in Verbindung stehen. Dieser Faden kann entweder

1. zwischen ihnen in eine gerade Linie ausgespannt seyn; in dem Falle ist die Distanz der Punkte unveränderlich, und die gegenseitige Wirkung des einen auf den andern = der Spannung des Faden; also verhält sich hier alles so, wie im §. 255.; oder

Fig. 38. 2. der Faden geht nicht unmittelbar von dem einen Punkte a zum andern b in gerader Linie fort; sondern biegt sich zwischen beyden über eine Fläche ADB; alsdann findet wieder keine unmittelbare Reaktion zwischen a und b, wohl aber zwischen a und A, b und B statt. Setzt man also die Spannung des Faden aADBb = T, die Entfernung Aa = f, Bb = f′, so kommt in die Gleichung für den Punkt a das Glied Tdf, und in die für b das Glied Tdf′.

Nun ist klar, daß wenn der Punkt a nach irgend einer Seite fortgeht, der Faden allemal um df fortgezogen, also das Stück Bb um eben so viel verkürzt werde, mithin jedesmal $df' = -df$ sey; daher heben sich bey der Addition der Gleichungen für die einzelnen Punkte (§. 355.) die beyden Glieder $Tdf$ und $Tdf'$ ebenfalls einander auf, und man erhält auch für diesen Fall wieder die Endgleichung:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = 0.$$

## §. 362.

### Exempel.

An der Winde (§. 206.) sey die Kraft V mit der Last P im Gleichgewichte.

Fig. 50. Indem die Welle sich um den Winkel $d\varphi$ dreht, beschreibt die Kraft V am Hebelarme AF den Bogen $fd\varphi$; zugleich wickelt sich am Theile A der Welle das Seilstück $Rd\varphi$ auf, und vom Theile a das Stück $rd\varphi$ ab, also wird das von A bis a gehende Seilstück AGga um $(R - r)\,d\varphi$, und jeder Theil desselben AG, ag, wenn wir beyde als parallel annehmen, um $\frac{1}{2}(R - r)\,d\varphi$ verkürzt. Da nun der Punkt p um so viel sinkt, und die Last P um eben so viel steigt, so hat man:

$$Vfd\varphi - \tfrac{1}{2}P(R - r)\,d\varphi = 0,$$

$$\text{oder } Vf = \tfrac{1}{2}P(R - r).$$

## §. 363.

Fig. 99. **Aufgabe.** Auf zweyen Kurven AMB und

AND liegen in M und N zwey Gewichte M und m, die vermittelst eines Seiles MON, das bey O über eine Rolle geht, mit einander verbunden sind; man sucht die Bedingungen, unter denen sie sich im Gleichgewichte erhalten.

Aufl. 1) Man fälle aus M und N auf die vertikale Abscissenlinie AC die Perpendikel MP, NQ, und nenne $AP = X$, $PM = Y$, $AQ = x$, $QN = y$.

2) Gesetzt nun, das Gewicht P gleite an der Kurve AMB um das Element derselben Mm hinunter, so sinkt es nach vertikaler Richtung durch den Raum Pp; zugleich aber wird das Gewicht m auf der Kurve AND längs dem Elemente Nn heraufgezogen, und steigt dabey vertikal aufwärts um Qq; es wird also:

$$M \cdot Pp - m \cdot Qq = o$$

oder, da $Pp = dX$, und $Qq = - dx$ ist:

$$MdX + mdx = o.$$

3) Wenn man diese Gleichung integrirt, so erhält man:

$$MX + mx = C.$$

4) Soll also das Gewicht m an jeder Stelle der Kurve AND dem Gewichte M das Gleichgewicht halten, so muß die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunkts beyder von der durch A gehenden Horizontale eine beständige Größe $\frac{C}{M + m}$ seyn, d. h. dieser Punkt muß selbst in einerley Horizontale bleiben, man mag die Gewichte an Stellen bringen, wohin man will.

5) Man setze die Länge des ganzen Seiles MON $= l$, die Entfernung AO $= f$, so wird MO $= \sqrt{[(f + X)^2 + Y^2]}$, ON $= \sqrt{[(f + x)^2 + y^2]}$, folglich:

$$l = \sqrt{[(f + X^2) + Y^2]} + \sqrt{[(f + x)^2 + y^2]}.$$

6) Ist nun eine von den Kurven z. B. AMB bestimmt, also Y durch X gegeben, so kann man aus voriger Gleichung Y, und vermittelst der Gleichung (3) auch X wegschaffen, wodurch man eine Gleichung zwischen x und y erhält.

## §. 364.

### Exempel.

Es sey MC die Fallthür einer Zugbrücke, die durch ein Gewicht m vermittelst eines Seiles, das über den Punkt A geht, aufgezogen wird; man sucht die Natur der Kurve AND, worauf das Gewicht m gelegt werden muß, um die Fallthür bey jeder Lage im Gleichgewichte zu erhalten.

1) Hier liegt der Punkt M in einem Kreise, dessen Halbmesser MC ist; nennt man also diesen $= a$, so wird $Y^2 = 2aX - X^2$,

folglich: $X^2 + Y^2 = 2aX$.

2) Das Gewicht von MC sey $= 2M$, so ist der Theil, der davon auf den Endpunkt M kommt, $= M$, also

$$MX + mx = C$$

$$\text{und } X = \frac{C - mx}{M}.$$

3) Da ferner $f = o$ ist, so wird

$$l = \sqrt{(X^2 + Y^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$= \sqrt{2aX} + \sqrt{(x^2 + y^2)} \ (1)$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2aC - 2amx}{M}\right)} + \sqrt{(x^2 + y^2)} . (2).$$

4) Weil für $x = o$, auch $y = o$ ist, so erhält man aus dieser Gleichung $l = \sqrt{\frac{2aC}{M}}$, folglich

$$l = \sqrt{\left(l^2 - \frac{2amx}{M}\right)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und wenn man $\frac{m}{M} = \varkappa$ setzt, und beyde Seiten quadirt:

$$l^2 = l^2 - 2\varkappa ax + x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)} . \sqrt{(l^2 - 2\varkappa ax)}$$

oder $2\varkappa ax = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)} . [l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]$

$$= 2l\sqrt{(x^2 + y^2)} - (x^2 + y^2).$$

**Anmerk.** Die eben gefundene Gleichung gehört zu einer Epicycloide, die durch Fortwälzung eines Kreises über einen andern von gleichem Halbmesser hervorgebracht wird; wie Joh. Bernoulli in den Actis Lips. 1695 pag. 60. zuerst gezeigt hat. Eine sehr elegante analytische Auflösung des gegenwärtigen Problems von Herrn Prof. Fuß findet man in den Actis acad. Petropol. 1790. pag. 197 u. f.

## §. 365.

Wenn überhaupt mehrere Gewichte $m$, $m'$, $m''$ u. s. f. auf irgend eine Art mit einander im Gleichgewichte sind, und man läßt $x$, $x'$, $x''$ u. s. f. ihre Distanzen von einer horizontalen Ebene bedeuten, so hat man die Gleichung

$$m dx + m' dx' + m'' dx'' + \ldots = 0$$

die sich auch so ausdrücken läßt:

$$d(mx + m'x' + m''x'' + \ldots) = 0.$$

Setzt man nun die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes aller dieser Gewichte von derselben Ebene $= u$, so ist

$$u = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots} \quad (\S. 74.)$$

$$\text{folglich } du = \frac{d(mx + m'x' + m''x'' + \ldots)}{m + m' + m'' + \ldots} = 0.$$

Daher ist u für den Fall des Gleichgewichts entweder ein Maximum oder ein Minimum, woraus der allgemeine Satz folgt: **daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt mehrerer Gewichte für den Fall, wo sie mit einander im Gleichgewichte sind, entweder am höchsten oder am tiefsten liege.**

## §. 366.

Fig. 40. Wenn also z. B. ein Gewicht P an einen Faden AGB, der bey A und B befestigt ist, vermittelst eines Ringes aufgehängt wird, so wird es sich mit der Spannung des Faden nicht eher ins Gleichgewicht setzen, als bis es die möglichst tiefste Schnelle erreicht hat. Setzt man nemlich seine Entfernung EG von der Horizontale AD $= u$, so erhält man, da die Kräfte, die ihm Widerstand leisten, von unbeweglichen Punkten herrühren, $P du = 0$; mithin ist u für den Fall des Gleichgewichtes ein Maximum.

Es sey nun $AE = x$, $AD = a$, $BD = b$, die Länge des Seiles $= l$, so wird $ED = a - x = GB \operatorname{Sin} BOD$, und $b + u = GB \operatorname{Cos} BOD$,

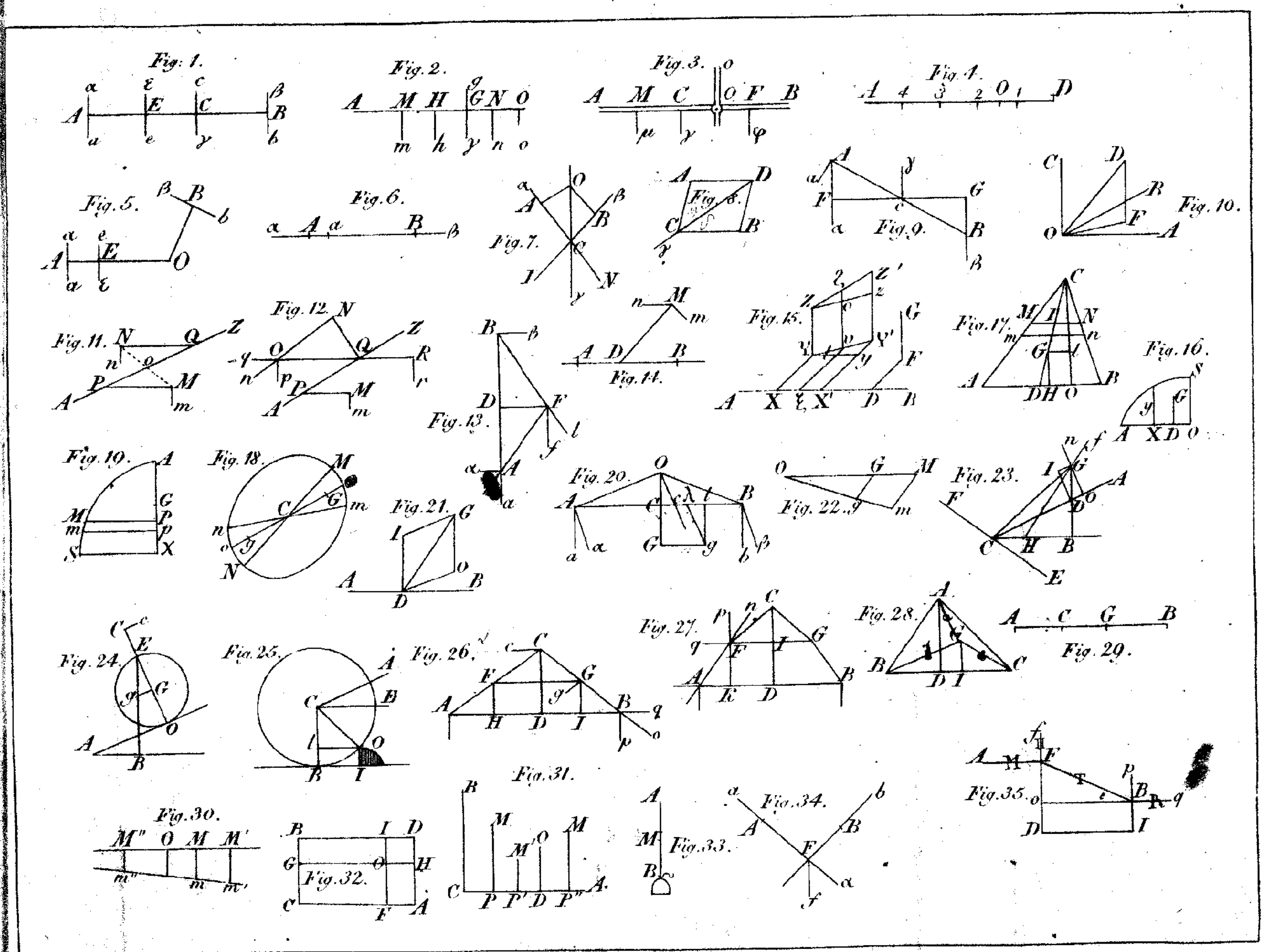
also $(a - x)^2 + (b + u)^2 = GB^2 = [l - \sqrt{(x^2 + u^2)}]^2$.

Man differenziire diese Gleichung nach $x$, indem man $u$ als beständig annimmt, so erhält man:

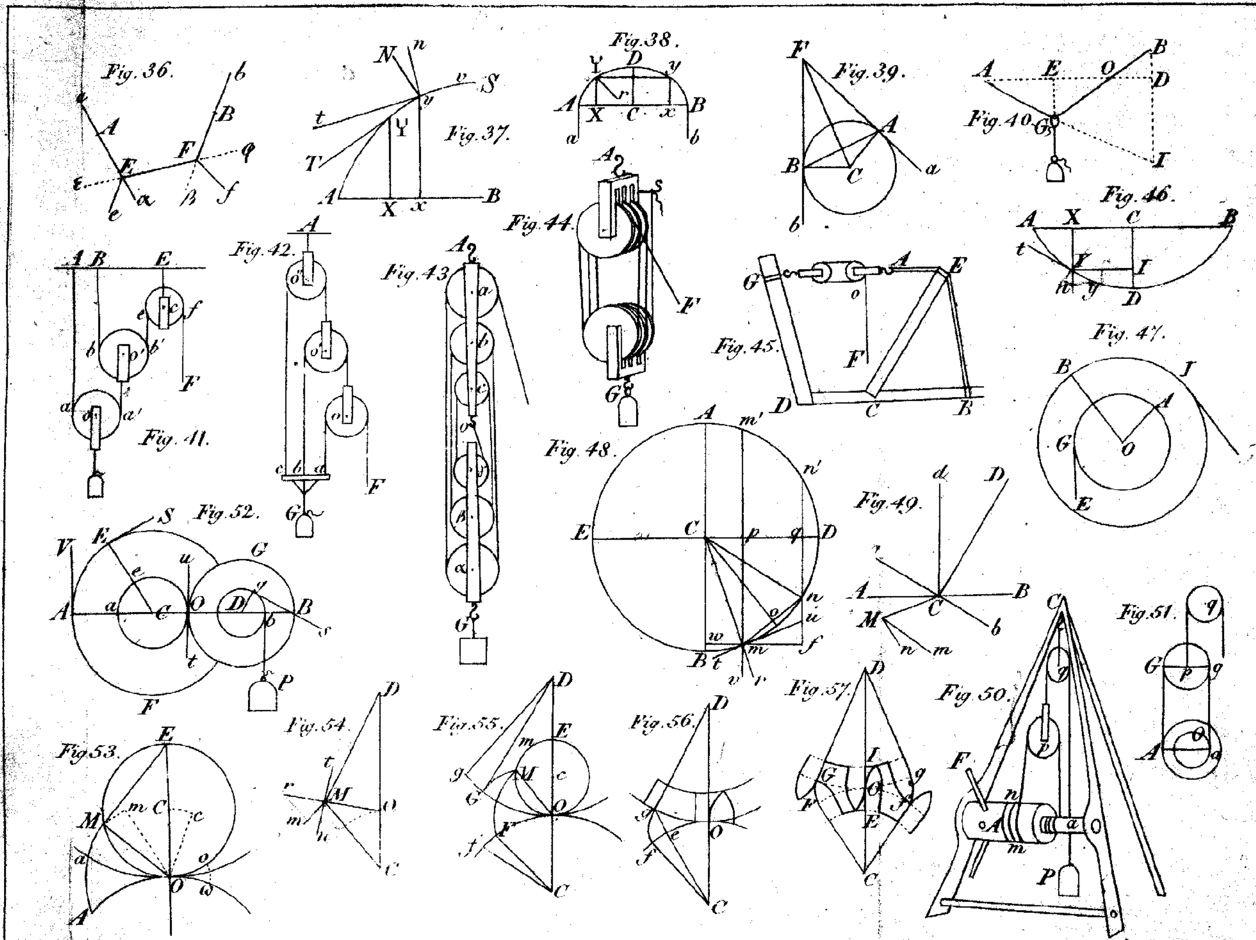
$$a - x = [l - \sqrt{(x^2 + u^2)}] \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}$$

$$a = \frac{xl}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}, \text{ woraus}$$

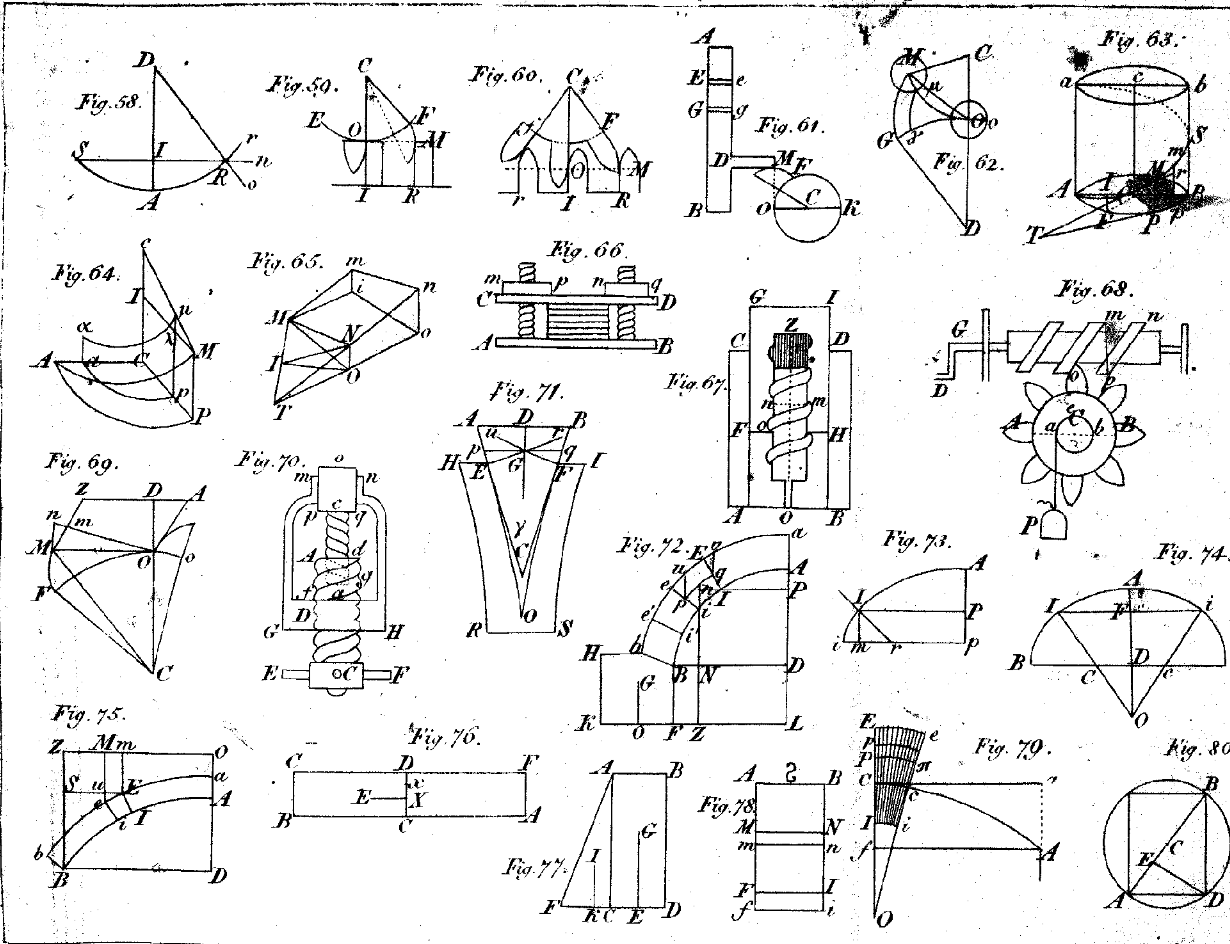
$u = x\sqrt{(l^2 - a^2)}$ wird, welches eben die Gleichung ist, die wir §. 176. gefunden haben.



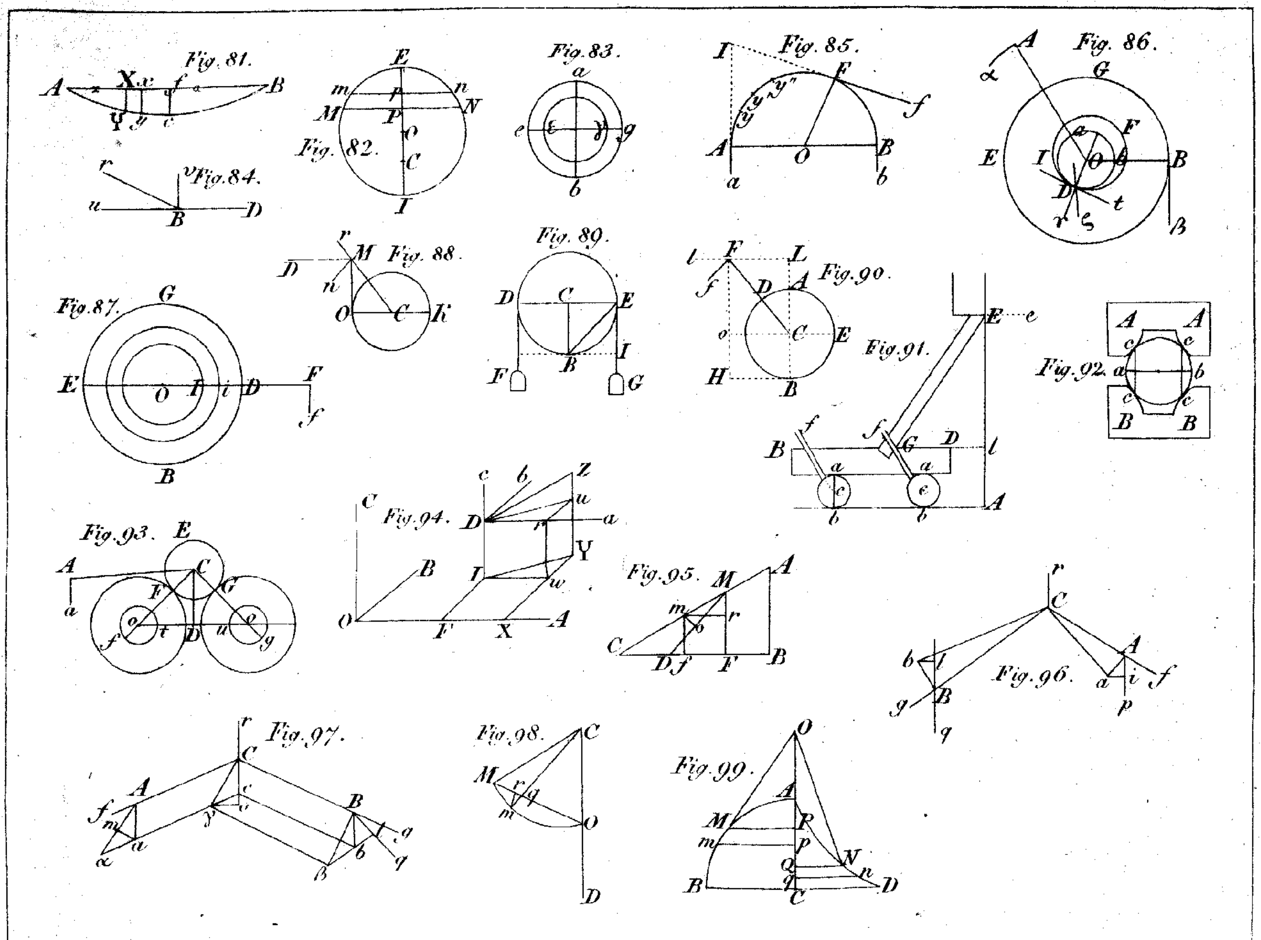

Ide System der Mechanic
Th. 1. Tab. I.




Ide System der Mechanic
Th. 1. Tab. II.




Ide System der Mechanic
Th. 1. Tab. III.




*Ide System der Mechanic*
*Th. 1. Tab. IV.*