Lehrbuch

der

Anwendung der Mechanik

auf

Maschinen.

Von

J. V. Poncelet,

Ingenieurbataillonschef, Mitglied des französischen Nationalinstituts, Professor der technischen Mechanik an der Facultät der Wissenschaften zu Paris, Mitglied der königl. Academie zu Metz, der Academie der Wissenschaften zu Berlin rc. rc.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.

Erster
~~Zweiter~~ Band.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Darmstadt,
Druck und Verlag von C. W. Leske.
1845.

Vorwort des Uebersetzers.

Poncelet's Name hat in der angewandten Mathematik (technischen Mechanik) dieselbe Berühmtheit erlangt, wie die Namen: Poisson, Cauchy ꝛc. in der theoretischen Mathematik. Sein vorliegendes »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen« hat denselben klassischen Werth, wie Poisson's Lehrbuch der theoretischen Mechanik ꝛc., so daß eine Uebersetzung desselben wohl keiner speciellen Rechtfertigung bedarf, abgesehen von dem pecuniären Vortheile der weit größeren Wohlfeilheit der deutschen Ausgabe; denn das französische Original kostet über dreißig Thaler und ist nur sehr schwer zu erhalten.

Es hat sich zwar ein sehr thätiger deutscher mathematischer Schriftsteller in seinem »Archive« gegen das Uebersetzen ausländischer Werke erklärt und gesagt: »Deutschland habe selbst selbstständige Schriftsteller genug,« und doch findet man, daß gerade das Werthvollste seiner, übrigens vortheilhaft bekannten Schriften, aus ausländischen, namentlich französischen Klassikern der mathematischen Wissenschaft entlehnt ist! — Allerdings hat Deutschland an Gauß, Bessel, Jacobi ꝛc. ꝛc. selbstständige mathematische Schriftsteller, deren Produkte durch Einführung ausländischer weder ersetzt, noch verdrängt werden können; allein zu diesen Geometern primi ordinis gehören viele deutsche Schriftsteller, die auf eigenen Füßen zu stehen meinen — keineswegs.

Dr. S.

Inhaltsverzeichniß.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über die in Bewegung befindlichen Maschinen. Gegenstand dieses Abschnittes.

Anhang.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der passiven Widerstände in den Maschinentheilen, welche eine constante Bewegung haben und auf welche fast unveränderliche Wirkungen ausgeübt werden.

Ueber die Reibung der Zahnräderwerke.

Erste Note.

Ueber den genäherten, linearen und rationalen Werth der Wurzelgrößen von der Form $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ 2c.

Zweite Note.

Ueber das Totalmoment und den mittlern Hebelarm der Widerstände in der vier- und dreikantigen Schraube und in dem Frictionskegel.

Vierter Abschnitt.

Einfluß der plötzlichen Veränderungen der Geschwindigkeit.

Fünfter Abschnitt.

Von den Zugbrücken.

Lehrbuch

der

Anwendung der Mechanik

auf

Maschinen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über die in Bewegung befindlichen Maschinen.

Gegenstand dieses Abschnittes.

Wir wollen in diesem Abschnitte die allgemeinen Principien auseinandersetzen, welche die Theorie der in Bewegung befindlichen Maschinen bilden, ihre Haupteigenschaften in mechanischer Beziehung angeben, die Regeln und die nothwendigen Bedingungen aufstellen, welche bei ihrer Construction zur Anwendung kommen müssen, und endlich wollen wir zeigen, wie man, wenn diese Maschinen bereits construirt sind, ihre Mängel, ihre Eigenschaften und ihre mechanischen oder industriellen Effecte bestimmen kann. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß wir hier nur solche Maschinen betrachten werden, bei welchen die Anwendungsart der bewegenden Kraft und die Oeconomie derselben von besonderer Wichtigkeit ist.

Allgemeine Begriffe und Principien, worauf die Wissenschaft der bewegenden Kräfte und der Maschinen beruhet.

Zweck der industriellen oder technischen Maschinen.

§. 1. Die industriellen oder technischen Maschinen haben den Zweck, gewisse Arbeiten mit Hülfe der **Motoren** oder **bewegenden Kräfte**, welche uns die Natur darbietet, wie die Thiere, den Wind, das Wasser, die Wärme u. s. f. zu verrichten.

Bestimmungsart der Leistung oder des Effectes der Maschinen und Motoren.

§. 2. Der **Effect** oder die **Leistung** der Maschinen oder Motoren wird in den Künsten und Gewerben nach der Quantität Arbeit einer bestimmten Art geschätzt, welche sie in einer gegebenen Zeit hervorbringen können. Ihr absoluter Werth ist von andern Elementen abhängig, welche nicht in das Gebiet der Mechanik gehören, welche aber dennoch in der Praxis in Betracht gezogen werden müssen, wie z. B. der Preis der Arbeit oder des gewonnenen Productes, die Unterhaltungskosten, das angelegte Capital, die Dauer der Maschinen, u. s. w.

Wahl der Maaßeinheit für die Leistung oder Arbeit der Maschinen und Motoren.

§. 3. Wenn die Art der Arbeit immer dieselbe wäre, so ließe sich der mechanische Werth der Maschinen und Motoren leicht nach der Erfahrung abschätzen, weil derselbe die Quantität der in einer gegebenen Zeit verfertigten Waare zum Maaße hätte. Dieses verhält sich aber nicht so; denn die Arbeiten der Motoren und Maschinen sind außerordentlich verschieden, und um sie untereinander vergleichen zu können, haben die Mechaniker eine besondere Art von Einheit der Leistung, oder wie Navier sich ausdrückt, eine Art mechanischer Münze annehmen müssen, vermittelst welcher man alle Arten von Leistungen oder Arbeiten der Maschinen und Motoren untereinander vergleichen kann, so daß in dem Zahlenausdrucke dieser Leistungen oder Arbeiten durchaus nichts Willkürliches bleibt.

Diese Maaßeinheit bezieht sich auf die verticale Hebung schwerer Körper.

§. 4. Nachdem diese Betrachtungen vorausgeschickt sind und mit Hinweisung auf die noch folgenden, wollen wir bemerken, daß man für die in Rede stehende Einheit die Leistung, Arbeit oder den Effect genommen hat, welcher in der verticalen Hebung schwerer Körper besteht, und es ist alsdann nichts leichter, als diese Leistung in Zahlen auszudrücken. Denn wenn man die Arbeit oder Leistung, welche in der Hebung der Gewichtseinheit um die Höheneinheit zur Einheit der Leistung oder Arbeit nimmt, so ist einleuchtend, daß die durch die Hebung eines gegebenen Gewichtes P auf eine beliebige Höhe H bewirkte Leistung oder Arbeit die Einheit der Leistung oder Arbeit gerade so viele Male enthält, als das Product $P.H$ Einheiten enthält, so daß dieses Product folglich ein natürliches Maaß des Effectes oder der ganzen Nutzleistung der bewegenden Kraft ist, welche das Gewicht P auf die Höhe H gehoben hat, wobei es übrigens ganz gleichgültig ist, auf welche Weise sich diese Kraft der Intensität oder Richtung nach auch geändert haben mag; denn die in Rede stehende Messungsart der Leistung setzt weiter nichts voraus, als eine durch P ausgedrückte, nach verticaler Richtung wirkende Kraft, deren Angriffspunct einen gewissen Weg H in der Richtung ihrer Wirkung beschreibt.

Diese Messungsart der mechanischen Leistung stimmt übrigens mit der Art der Bezahlung der Arbeiten, welche in der verticalen Hebung von Lasten bestehet, überein, wie z. B. beim Emporziehen des Wassers aus einem Brunnen, dem Tragen gewisser Lasten auf bestimmte Höhen; denn der Arbeitslohn ist immer dem Gewichte der gehobenen Last und der Höhe, auf welche es gehoben, proportional.

Definition und Maaß der Kräfte.

§. 5. Es ist hier der Ort zu der Bemerkung, daß wir in Zukunft unter dem Ausdrucke Kraft nur den Druck oder die bloße Wirkung verstehen werden, welche irgend ein Agens in einer bestimmten Richtung auf einen gewissen Punct ausübt, so daß sich dieser Druck und diese Wirkung immer untereinander vergleichen und vermittelst gewisser mit Federn versehener Instrumente, wie das Regniersche Dynamometer und die gewöhnlichen Federwagen durch Gewichte ausdrücken lassen, wenn diese Instrumente vorher gehörig berichtigt sind, indem man bekannte Normalgewichte daran aufhängt. Denn es ist leicht einzusehen, daß derselben Biegung der Feder, deren Elasticität als vollkommen und nicht mit der Zeit veränderlich vorausgesetzt wird (was zwar nicht der Fall ist und deswegen öftere Prüfungen erfordert) immer dieselbe absolute Kraft oder derselbe Druck entspricht, wofern diese Kraft oder dieser Druck immer auf denselben Punct und nach derselben Richtung wirkt. Auf unserm Standpuncte lassen sich also die Kräfte immer in Gewichtseinheiten, z. B. in Kilogrammen, ausdrücken und sie haben für uns durchaus keine andere Bedeutung; aber da der Erfahrung zufolge die Intensität der Schwere in verschiedenen Orten der Erdoberfläche verschieden ist, so ist wohl zu bemerken, daß sich diese Gewichtseinheit auf einen bestimmten Ort oder auf verschiedene Oerter bezieht, für welche die absolute Intensität der Schwere dieselbe ist, was innerhalb der Ausdehnung eines einzelnen Staates nahezu der Fall ist.

Verschiedene Benennungen und Werthe der Einheit der mechanischen Leistung oder Arbeit.

§. 6. Das Product $P.H$ hat verschiedene Namen bekommen, welche man kennen muß Der englische Ingenieur Smeaton, welchem man viele Versuche über Wasserräder verdankt, nennt dasselbe mechanische Kraft; Carnot nennt es in seinen „Grundlehren des Gleichgewichtes und der Bewegung" Moment der Wirkung; Monge und Hachette haben es bloß dynamischen Effect genannt, welcher Ausdruck seiner Allgemeinheit wegen den Mangel hat, daß er etwas unbestimmt ist, und endlich hat Coulomb, welchem in dieser Beziehung viele andere gefolgt sind, das fragliche Product sehr passend Quantität der Wirkung genannt, welches Ausdruckes wir uns neben dem Ausdrucke Leistung oder Arbeit, der sich ganz natürlich darbietet, bedienen werden, obgleich derselbe das Nachtheilige hat, daß er in der theoretischen Mechanik zur Bezeichnung einer andern Größe gebraucht wird.

Was den absoluten Werth der Einheit der Wirkung, der Leistung oder Arbeit anlangt, so haben verschiedene Schriftsteller, wie Mongolfier und Hachette, denselben dem Gewichte eines Cubikmeters oder **1000** Kilogrammen Wasser, auf **1** Meter Höhe gehoben, gleich angenommen und Hachette hat dafür den Namen große dynamische Einheit angewandt, während Clement diese Größe Dynamie und Coriolis dieselbe Größe Dynamode nennt (**Calcul de l'Effet des Machines**). Dupin dagegen hat das Gewicht eines Cubikmeters Wasser, auf 1 Kilometer Höhe gehoben, als Einheit der Leistung oder Arbeit vorgeschlagen und Dyname genannt; allein diese Arbeit wird regelmäßig in einem Tage verrichtet, so daß die Dyname auf eine Art der Einheit der Leistung zurückkommt, deren weiter unten erwähnt werden wird.

Die von Navier angewandte Bezeichnung, welche darin bestehet, m Kg daß man oben zur Rechten des Productes aus dem in Kilogrammen ausgedrückten Gewichte und der in Metern ausgedrückten Höhe das

Zeichen $k \times m$ oder km setzt, läuft darauf hinaus, 1 Kilogramm auf 1 Meter Höhe gehoben, zur Einheit der Leistung oder Arbeit zu nehmen, welche Einheit wir der Kürze und Allgemeinheit wegen Kilogrammeter nennen wollen; denn es ist, wie wir bald sehen werden, nicht durchaus nothwendig, dabei an verticale Hebung schwerer Körper zu denken. Uebrigens ist diese letzte und die vorhergehende Ausdrucksweise auf jede Art von Gewichts- und Längeneinheiten anwendbar.

Maaßeinheit der Leistung gleichförmig wirkender Motoren. — Pferdekraft.

§. 7. Wenn die Wirkung der Motoren und der Maschinen lange Zeit gleichförmig fortdauert, so können die Zahlen, wodurch die Leistung oder Arbeit ausgedrückt wird, ihrer Größe wegen unbequem werden, und alsdann nimmt man die sich auf die Zeiteinheit, z. B. auf die Secunde, Minute u. s. f. beziehende Leistung oder Arbeit zur Einheit, und hierin liegt der Grund, daß die Mechaniker in die Einheit der Leistung oder Arbeit den Begriff der Zeit oder Dauer eingeführt haben, welcher eigentlich ganz fremdartig ist, und nur in dem Falle mit Genauigkeit angewandt werden kann, wo in jeder Zeiteinheit genau dieselbe Leistung oder Arbeit hervorgebracht wird, wobei man auch die Dauer der etwa stattfindenden Unterbrechungen der Arbeit der Maschinen in Betracht ziehen muß.

Die Verfertiger der Dampfmaschinen haben unter andern ganz allgemein eine Einheit der Wirkung oder Leistung dieser Art angenommen, welche sie unschicklich eine Pferdekraft nennen und welche schicklicher eine Pferdeleistung genannt werden könnte, weil das Wort Kraft einen andern bestimmten Sinn in der Mechanik hat (§. 5), welcher auf keine Weise mit dem Begriffe der Quantität der Wirkung oder der Arbeit übereinstimmt. Da aber der Ausdruck Pferdekraft allgemein gebräuchlich ist, so können wir uns desselben auch in diesem Lehrbuche bedienen, obgleich derselbe an und für sich betrachtet nicht genau ist; denn der Werth desselben, welcher ein rein fictiver ist, ist von den verschiedenen practischen Maschinenbauern auch verschieden angenommen, und der gegenwärtig gebräuchlichste ist gleich 75^{km} für jede Secunde, welchen Werth auch wir in der Folge annehmen werden.

Maaß der Leistung beliebiger Kräfte und insbesondere der constanten Kräfte, welche in dem Sinne der von ihrem Angriffspuncte beschriebenen Wege wirken.

§. 8. Wir wollen nun sehen, wie man im Allgemeinen die mechanische Leistung beliebiger Kräfte abschätzen und den Ausdruck des Maaßes derselben auf dieselben Einheiten zurückführen kann, wie die, welche sich auf die Erhebung von Lasten nach der Verticale beziehen. Bei etwas näherer Betrachtung sieht man, daß die Verrichtung jeder mechanischen Arbeit in der Ueberwindung gewisser Widerstände, wie der Adhäsionskraft der Körper, der Kraft der Wärme, der Molecularkräfte, der Schwerkraft, des Widerstandes der Flüssigkeiten, der Reibungen und zuweilen der Trägheit der Materie, wie bei dem Wurfe der Körper, der Bewegung der Hammerwerke, der Stampfer u. s. w. besteht. Zur Ueberwindung und successiven Aufhebung der sich längs eines gewissen Weges beständig erneuernden Widerstände ist aber eine auf den Angriffspunct dieses Widerstandes wirkende Kraft erforderlich, welche sich während der Verrückung des Angriffspunctes beständig erneuert. Nun kann es aber geschehen, daß die Kraft jeden Augenblick in der Richtung des von dem Angriffspuncte beschriebenen Weges wirkt, oder daß sich diese Kraft der Größe und Richtung nach auf eine beliebige Weise ändert und dennoch dem auf den Angriffspunct wirkenden Widerstande vermöge des Principes der Gleichheit und Entgegengesetztheit zwischen der Wirkung und Gegenwirkung das Gleichgewicht hält.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall und nehmen an, daß die Kraft und folglich der Widerstand einen constanten Werth behalten für jedes Element des durchlaufenen Weges oder in jedem Augenblicke der zu diesem Durchlaufen erforderlichen Zeit, so lassen sich auf diese Kraft offenbar dieselben Schlüsse anwenden, wie auf den Fall, wo es darauf ankam, ein gewisses Gewicht in derselben Verticale auf eine gewisse Höhe zu heben (§. 4); denn die Leistung oder Arbeit der Kraft während des Beschreibens eines Weges von einer gegebenen Länge ist auch hier noch der unveränderlichen Stärke dieser Kraft und der Zahl proportional, welche ausdrückt, wie oft sie sich wiederholt hat, oder der Zahl der einzeln gleichen Widerstände, welche überwunden sind, das heißt die Größe der Leistung ist gleich dem Producte aus dieser in Gewichtseinheiten ausgedrückten Kraft (§. 5) und aus der wirklich durchlaufenen Länge des Weges des Angriffspunctes, in Längeneinheiten ausgedrückt. Wenn also Q die Anzahl der Kilogramme bezeichnet, welche die Größe der Kraft ausdrücken und q die Anzahl der Meter, welche die Länge des durchlaufenen Weges ausdrücken; so kann die Größe der Arbeit oder Leistung wieder ausgedrückt werden durch das Product:

$$Q^{kil} \times q^{met} \text{ oder } Qq^{km},$$

indem man bemerkt, daß sich hier die Einheit der Arbeit 1^{km} auf eine constante Kraft von 1 Kil. bezieht, welche sich längs jedes Weges von 1 Meter und von einer beliebigen Richtung wiederholt. Wenn man sich übrigens überzeugen will, daß diese Einheit in rein mechanischer Hinsicht denselben Werth hat, als die analoge Einheit in Beziehung auf die Erhebung der Lasten nach der Richtung der Verticale, so braucht man nur zu erwägen, daß die Maschinen im Allgemeinen die Mittel zur Umwandlung einer industriellen Arbeit in irgend eine andere darbieten, und daß diese Umwandlung sogar ohne allen Verlust stattfinden würde, wenn man die fremdartigen Widerstände ganz beseitigen könnte, welche immer einen größern oder geringern Theil der bewegenden Kraft absorbiren; allein dieses wird bald direct und allgemein bewiesen werden, sobald wir noch einige andere durchaus nothwendige Principien aufgestellt haben.

Maaß der Leistung oder Arbeit für den Fall, wo sich die Intensität der Kraft jeden Augenblick ändert. — Mittlerer Werth derselben.

§. 9. Die vorhergehenden Betrachtungen setzen voraus, daß die bewegende Kraft immer dieselbe Intensität behält und beständig in der Richtung des von ihrem Angriffspuncte beschriebenen Weges wirkt; aber wenn dieses nicht der Fall ist, so muß man untersuchen, wie groß die Leistung oder Arbeit in jedem Zeitelemente ist, während dessen die Kraft als unveränderlich betrachtet werden kann. Bezeichnet also Q

die Größe der bewegenden Kraft, in Kilogrammen ausgedrückt, in dem Augenblicke, wo ihr Angriffspunct in der eigenen Richtung seines Weges den ganzen Weg q beschrieben hat; so drückt Qdq offenbar die während eines Zeitelementes längs des Weges dq von der Kraft Q hervorgebrachte Arbeit aus, und das zwischen zwei beliebigen Lagen des Angriffspunctes der Kraft genommene Integral:

$$\int Qdq$$

drückt die Gesammtquantität der Arbeit aus, welche die Kraft hervorbringt während des Beschreibens des zwischen diesen beiden Lagen ihres Angriffspunctes liegenden Weges. Diese Größe kann man jedesmal analytisch berechnen, wenn Q als Function von q gegeben ist, und in allen andern Fällen, wo man bloß die den verschiedenen Werthen von q entsprechenden Werthe von Q näherungsweise aus der Erfahrung kennt, kann man dieselbe Größe vermittelst des Lehrsatzes von Th. Simpson näherungsweise bestimmen.*)

Bezeichnet X die mittlere, constante Kraft, welche in der Richtung von dq wirken müßte, um dieselbe Größe der Wirkung oder der Leistung hervorzubringen, als die veränderliche Kraft Q und sind q', q'' die Werthe von q in Beziehung auf die erste und letzte Lage des Angriffspunctes von X und Q, so daß $q''-q'$ die Länge des durchlaufenen Weges bezeichnet; so hat man zur Bestimmung von X offenbar die Relation:

$$X(q''-q') = \int_{q''}^{q'} Qdq, \text{ folglich } X = \frac{\int_{q''}^{q'} Qdq}{q''-q'}.$$

Die Betrachtung dieses mittlern Werthes wird uns in mehrern Fällen von Nutzen sein.

Maaß der Größe der Leistung in dem Falle, wo sich die bewegende Kraft sowohl der Intensität, als der Richtung nach beliebig ändert.

§. 10. Endlich könnte die Kraft Q jeden Augenblick in Beziehung auf das von ihrem Angriffspuncte beschriebene Raumelement ds ihre Richtung verändern. Bezeichnet alsdann α den von diesen beiden Richtungen gebildeten veränderlichen Winkel, so denkt man sich diese Kraft Q in zwei andere zerlegt, wovon die eine $Q\cos.\alpha$ nach der Verlängerung von ds und die andere $Q\sin.\alpha$ in einer auf der von dem Angriffspuncte der Kraft Q beschriebene Curve normalen Richtung wirkt. Die letztere dieser beiden Kräfte wird offenbar durch den Widerstand oder das Hinderniß aufgehoben, welches den fraglichen Angriffspunct zwingt, auf dem Curvenelemente ds zu bleiben, und da ferner das Element des in ihrer eigenen Richtung beschriebenen Weges Null ist; so ist auch die entsprechende Quantität Arbeit $=0$, wovon man also abstrahiren kann. Da aber diese Componente in den materiellen Systemen, wie die Maschinen sind, Zusammendrückungen zu bewirken strebt, wodurch tangentiale, von den bewegenden Kräften dieser Systeme ganz verschiedene Widerstände hervorgerufen werden, welche aus diesem

*) Industrielle Mechanik §. 180.

Grunde **schädliche** oder **passive** Widerstände heißen, so darf man die diesen Widerständen entsprechende Arbeit bei der allgemeinen Bestimmung der mechanischen Leistungen solcher Systeme nicht unberücksichtigt lassen. Was die der andern Componente $Q \cos. \alpha$ entsprechende Quantität der Arbeit oder Leistung betrifft, so wird dieselbe nach dem Vorhergehenden offenbar durch das zwischen den gehörigen Grenzen genommene Integral:

$$\int Q \cos. \alpha ds = \int Q dq$$

ausgedrückt, wo $dq = ds \cos. \alpha$, d. h. gleich der Projection des Raumelementes ds auf die Richtung der Kraft Q gesetzt ist. Hierbei ist aber wohl zu merken, daß das Element der Wirkung oder Leistung nämlich:

$$Q dq = Q \cos. \alpha ds$$

nichts anderes ist, als das, was man in der theoretischen Mechanik das **virtuelle Moment** der Kraft Q für eine unendlich kleine Bewegung ihres Angriffspunctes nennt. Ferner sieht man leicht ein, daß diese Größe direct erhalten würde, wenn man wie in ersterm Falle verführe und bemerkte, daß das von dem Angriffspuncte beschriebene Raumelement, nach der Richtung der Kraft geschätzt, wirklich $= ds \cos. \alpha$ ist.

Aus dieser Uebereinstimmung der Natur der virtuellen Momente und der Größe des Elementes der Leistung oder Arbeit, d. h. der von den bewegenden Kräften in einem Zeitmomente hervorgebrachten Arbeit, in dem Falle, wo die betrachtete virtuelle Bewegung genau die wirkliche unendlich kleine Bewegung des Angriffspunctes dieser Kräfte ist, ergeben sich sofort verschiedene Folgerungen in Beziehung auf die allgemeinen Fortpflanzungsgesetze der Leistung in den materiellen Systemen, worin beliebige Kräfte und Widerstände wirksam sind, und welche sich unmittelbar auf die Wissenschaft der Motoren und Maschinen anwenden lassen. Um aber diese Anwendung genau aufzufassen, ist es durchaus nothwendig, die Elementarbegriffe kurz in Erinnerung zu bringen, auf welchen sie beruht, und welche zur Aufstellung der Grundprincipien gedient haben.*)

Wahre Bedeutung der Ausdrücke Geschwindigkeit und Größe der Bewegung.

§. 11. Wenn man zwei Kräfte successive auf denselben Körper wirken läßt, welcher dieser Wirkung frei folgen kann, indem er sich nach der Richtung dieser Wirkung parallel zu sich selbst bewegt; so ertheilen sie diesem Körper in demselben Zeitelemente dt bekanntlich unendlich kleine Geschwindigkeiten, welche den Intensitäten dieser Kräfte proportional und von der bereits früher angenommenen Bewegung unabhängig sind. Wenn daher p das absolute Gewicht eines gewissen Körpers oder materiellen Punctes in einem Orte bezeichnet, worin dieser Körper oder Punct vermöge der Wirkung der Schwere am Ende der ersten Secunde seines freien Falles die Geschwindigkeit $g = 9^m,8088$, oder in jedem Zeitelemente dt die Geschwindigkeit gdt erlangt, weil hier von einer fast constanten beschleunigenden Kraft die Rede ist, und

*) Vergleiche **Poisson's** und **Prony's** Lehrbücher der Mechanik.

φ bezeichnet irgend eine andere bewegende Kraft, welche demselben Körper oder materiellen Puncte in dem Zeitelemente dt einen Geschwindigkeitszuwachs dv zu ertheilen vermag; so hat man nach dem angeführten Gesetze:

$$\varphi : p = dv : gdt, \text{ folglich } \varphi = \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Ebenso sei p' das absolute Gewicht (§. 5) desselben Körpers an irgend einem andern Orte, wo er unter der Wirkung der Schwere am Ende der ersten Secunde eine Geschwindigkeit g' erlangt, so hat man ebenfalls:

$$\varphi = \frac{p'}{g'} \cdot \frac{dv}{dt}; \text{ folglich } \frac{p'}{g'} = \frac{p}{g} = const. = m,$$

was auch **a priori** einleuchtend ist, weil man vermöge desselben Gesetzes die Proportion hat:

$$p : p' = gdt : g'dt.$$

Das Verhältniß m, welches von der Intensität der Schwere an jedem Orte unabhängig ist, pflegt man die Masse des Körpers zu nennen, bei welcher Definition durchaus weiter keine physikalischen oder metaphysischen Begriffe, welche man zuweilen damit verbindet, in Betracht gezogen zu werden brauchen, so daß man vermöge einer bloßen Convention

$$p = mg$$

hat.*)

Da sich übrigens das Verhältniß m weder mit dem Volumen, noch mit der Form, noch mit dem absoluten Gewichte eines Körpers ändert, so bezeichnet man in der Mechanik die Körper oft bloß durch ihre Massen, was auch wir in der Folge thun werden. Die erste der obigen Gleichungen gibt also, wenn v' die Geschwindigkeit des Körpers in dem Augenblicke bezeichnet, wo die Wirkung der Kraft anfängt und v die Geschwindigkeit, welche einer beliebigen, seit diesem Augenblicke verflossenen Zeit entspricht:

$$\varphi = m\frac{dv}{dt}, \; \varphi dt = mdv, \; \int \varphi dt = m(v - v'),$$

wobei wieder vorausgesetzt wird, daß die Kraft φ den Körper $\frac{p}{g}$ in ihrer eigenen Richtung, welche, wie bei der Schwere, als unveränderlich angenommen wird, fortbewegt. Die Producte mv, mv', welche den Geschwindigkeiten v und v' des Körpers am Ende und im Anfange

---

*) Man sieht, daß die Masse eines Körpers für denselben Ort oder für ein ganzes Land fast dem Gewichte desselben proportional ist, weswegen man zuweilen die Gewichte der Körper für ihre Massen nimmt; dieses ist aber nur zulässig, wenn sie in Formeln mit einander verglichen werden, worin beide in Beziehung auf die übrigen Größen auf eine homogene Weise vorkommen. Denn $m = p$ setzen, heißt nichts anders, als g zur Längeneinheit nehmen, woraus man sieht, daß es sehr viel Fälle geben kann, wovon in der Folge auch Beispiele vorkommen werden, wo man in sehr grobe Fehler verfallen würde, wenn man die Gewichte für die Massen substituiren wollte.

des betrachteten Zeitintervalles entsprechen, werden die **Quantitäten oder Größen der Bewegung** dieses Körpers für die ebenerwähnten Zeitpuncte genannt, mit welchem Ausdrucke man ebenfalls keinen metaphysischen Begriff verbinden muß, und welcher, wie der vorhergehende Ausdruck, nur bezwecken soll, die Lehrsätze der Mechanik, worin Größen wie $mv = \frac{p}{g} v$ vorkommen, leichter ausdrücken zu können.

Uebrigens sieht man, daß die Quantität der Bewegung, welche durch ein zwischen bestimmten Grenzen genommenes Integral von der Form $\int \varphi dt$ ausgedrückt wird, eine ganz andere Bedeutung hat, als die Quantität der Wirkung oder Arbeit (§. 8), so daß es bei den Anwendungen nicht gestattet ist, diese Größen mit einander zu verwechseln.

Definition und Maaß der lebendigen Kraft.

§. **12.** In der That bezeichnet de in den obigen Voraussetzungen wieder das während des Zeitelementes dt von dem Angriffspuncte der Kraft φ beschriebene Raumelement, so drückt

$$\varphi de$$

das Element der Leistung oder Arbeit dieser Kraft in derselben Zeit aus, so daß man zwischen denselben Grenzen der Geschwindigkeiten v' und v und wegen $\frac{de}{dt} = v$ folgenden Ausdruck:

$$\int \varphi de = \int m \frac{dv}{dt} de = \int mv dv = {}^1\!/_2 \{ mv^2 - mv'^2 \}$$

für die Größe der Leistung oder Arbeit von der Lage an, wo der Körper die Geschwindigkeit v' hatte, bis zu der, wo er die Geschwindigkeit v erreicht hat, welche Größe übrigens, wie man sieht, positiv oder negativ ist, je nachdem v größer oder kleiner als v' ist, oder je nachdem die Kraft φ die frühere Bewegung des Körpers fortwährend zu beschleunigen oder zu verzögern strebt. In diesem letztern Falle nimmt nämlich der augenblickliche Zuwachs der Geschwindigkeit dv das entgegengesetzte Zeichen von v an.

Die Größen mv^2, mv'^2 werden **lebendige Kräfte** genannt, ein ziemlich unpassender Ausdruck, weil wir in der Mechanik keine andern Kräfte betrachten, als Druckkräfte, welche man mit Gewichten vergleichen kann, und womit man keinen metaphysischen Begriff verbinden, sondern welche man bloß als einen abgekürzten Ausdruck für das Product aus der Masse $\frac{p}{g}$ eines in Bewegung befindlichen Körpers und dem Quadrate seiner wirklichen Geschwindigkeit betrachten muß. Dadurch wird auch eine Verwechselung zwischen der lebendigen Kraft und der Quantität der Arbeit, welche sich auf physische Erscheinungen und Effecte beziehen, vermieden, obgleich sie in numerischer Beziehung von derselben Ordnung sind und ein gemeinschaftliches Maaß haben. Denn wenn man in der obigen Gleichung $v = o$ setzt, was dem Falle entspricht, wo die Bewegung mit der Wirkung der Kraft anfängt; so drückt sie aus: **daß die lebendige Kraft des Körpers der dop-**

pelten Quantität der dem Körper durch diese Kraft ertheilten Leistung gleich ist.

Definition und Maaß der Kraft der Trägheit bei der geradlinigen Bewegung.

§. 13. Es ist ferner ein in der Mechanik allgemein angenommener Grundsatz: daß die Wirkung einer Kraft auf ihren Angriffspunct immer der Rück- oder Gegenwirkung dieses Punctes gleich und direct entgegengesetzt ist. Hieraus folgt also, daß die weiter oben betrachtete bewegende Kraft φ von Seiten der Masse m eine Rückwirkung erfahren muß, welche durch $-m\frac{dv}{dt}$ gemessen wird, ihr das Gleichgewicht hält und offenbar von dem Widerstande herrührt, welchen der Körper vermöge seiner Trägheit bei jeder Veränderung seiner Geschwindigkeit ausübt, weswegen man diesen Widerstand zuweilen auch in Beziehung auf die Geschwindigkeitsveränderung dv die Kraft der Trägheit nennt. Man sieht, daß sie sich wie ein bloßer Widerstand verhält, wenn sich die Bewegung beschleunigt, und wie eine wirkliche Kraft, wenn sie sich verzögert, wo alsdann die bewegende Kraft φ selbst die Rolle des Widerstandes spielt.

Uebrigens ist die Kraft der Trägheit nicht vor dem Augenblicke, worin die Veränderung der Bewegung beginnt, vorhanden, sondern sie entsteht mit dieser Veränderung zugleich und dauert gerade ebenso mit ihr gleichzeitig fort, wie die Rückwirkung einer Feder in Beziehung auf die Kraft, welche sie zusammendrückt, d. h. ohne die physischen Wirkungen derselben aufzuheben; denn wenn man in diesem nämlichen Augenblicke auf den Körper eine andere Kraft wirken ließe, die der bewegenden Kraft $\varphi = m\frac{dv}{dt}$ gleich und entgegengesetzt ist, und die Geschwindigkeitsveränderung dv hervorzubringen vermag; so fände diese Geschwindigkeitsveränderung nicht statt, die Bewegung bliebe während des Zeitelementes dt gleichförmig und es fände zwischen den Kräften das Gleichgewicht statt, in dem gewöhnlichen Sinne, wenn man das D'Alembertsche Princip anwendet, indem man für die Kräfte des Systemes die Quantitäten der Bewegung setzt, welche sie in dem Zeitelemente hervorzubringen im Stande sind, oder wirklich hervorbringen. Man sieht also, daß diese verschiedenen Ansichten des Gegenstandes im Grunde auf dasselbe hinauslaufen; aber die Betrachtung der Kraft der Trägheit gewährt den Vortheil, daß man gleich a priori den Zustand der Untersuchungen in Beziehung auf die Fortpflanzung oder Uebertragung der Bewegung kennen lernt.

Maaß der Kraft der Trägheit bei der krummlinigen Bewegung eines freien materiellen Punctes. — Centrifugalkraft.

§. 14. Nehmen wir nun an, daß die Kraft φ jeden Augenblick ihre Richtung verändert, so daß der als in einen einzigen freien materiellen Punct concentrirt gedachte Körper unter der Wirkung dieser Kraft in Verbindung mit der anfänglichen Geschwindigkeit irgend eine krumme Linie beschreibt; so findet der Satz, daß die Gegenwirkung der Wirkung gleich und entgegengesetzt ist, d. h. daß der von der Trägheit herrührende absolute Totalwiderstand, welcher bei der Veränderung der Bewegung stattfindet, ebenfalls der Kraft φ gleich und direct entgegengesetzt ist, auch in diesem Falle noch statt, und dasselbe muß auch für die resp. Componenten, welche nach der Tangente und der Normale der Curve im Angriffspuncte wirken, der Fall sein. Da aber die nach der Richtung der Tangente wirkende Componente der bewegenden Kraft die Geschwindigkeitsveränderung dv des Körpers in der geradlinigen Richtung des Raumelementes während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt bewirkt, so wird der Werth dieser Componente, wie bei der geradlinigen Bewegung (§. 12) durch die Größe $-m\frac{dv}{dt}$ ausgedrückt, während die nach der Richtung der Normale wirkende Componente, welche verhindert, daß sich der Körper nicht von der Curve entfernt, genau der **Centrifugalkraft** gleich sein muß, deren Werth bekanntlich durch:

$$\frac{mv^2}{r}$$

ausgedrückt wird, wo r den Krümmungshalbmesser der beschriebenen Curve für den betrachteten Punct bezeichnet.

Die nach der Richtung der Normale wirkende Componente der Kraft der Trägheit ist also nichts anders, als diese Centrifugalkraft, und ihre nach der Richtung der Tangente wirkende Componente wird durch die Größe $-m\frac{dv}{dt}$, welche immer das entgegengesetzte Zeichen von dv haben muß, ausgedrückt.

Der absolute Werth der ganzen Kraft der Trägheit der Masse m wird folglich ausgedrückt durch die Größe:

$$\sqrt{\left(-m\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{mv^2}{r}\right)^2}=m\sqrt{\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{v^4}{r^2}},$$

welches auch der Ausdruck für die bewegende Kraft φ ist.

Was die jeder dieser Kräfte entsprechende Quantität der Leistung oder Arbeit während des Zeitelementes dt anlangt, so ist klar, daß sie sich bloß auf die der nach der Richtung der Tangente wirkenden Componenten entsprechende Leistung reducirt (§. 9), d. h. auf:

$$m\frac{dv}{dt}de=mvdv$$

für die bewegende Kraft φ und auf:

$$-mvdv$$

für die Kraft der Trägheit (§. 13), so daß man bei allen Untersuchungen, wo man nur die der Kraft der Trägheit der verschiedenen Massen eines Systemes entsprechenden Quantitäten der Arbeit in Betracht zu ziehen hat, streng genommen von den Normalcomponenten dieser Kraft, d. h. von der Centrifugalkraft abstrahiren kann, und nur die nach der Richtung des beschriebenen Raumelementes wirkenden Kräfte und die ihnen entsprechende Leistung in Betracht zu ziehen braucht, welche man ihrer besondern Wirkung wegen die **lebendigen Kräfte** der Körper nennen könnte. Da aber dieser Ausdruck allgemein zur Bezeichnung der in einer endlichen und bestimmten Zeit verrichteten Arbeit angewandt wird, so wollen wir statt desselben uns des Ausdruckes Tangentialkraft der Trägheit, und der Kürze wegen zuweilen bloß des Ausdruckes Kraft der Trägheit bedienen.

Uebrigens darf man hierbei nicht vergessen, daß die Centrifugalkräfte der verschiedenen Massen eines materiellen Systemes, obgleich sie hinsichtlich der mechanischen Leistung Null sind, dennoch einen gewissen Einfluß auf die Bewegung des materiellen Systemes haben, indem sie in Verbindung mit den Componenten der übrigen Normalkräfte auf die Stützpuncte und die Gelenke des Systemes einen Druck ausüben, wodurch ähnliche passive Widerstände, wie die Reibung, hervorgerufen werden, welche man muß berechnen können, sobald das Bewegungsgesetz der verschiedenen materiellen Puncte des Systemes für einen gegebenen Augenblick bekannt ist.

Grundprincip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit.

§. 15. Hat man alles Vorhergehende wohl aufgefaßt, so kann es mit gar keinen Schwierigkeiten verbunden sein, zu bestimmen, welche Rolle jeder Art von Kräften in einem beliebigen materiellen Systeme, welches sich, wie technische Maschinen und Motoren, unter gegebenen Bedingungen bewegt, spielt. Denn wir wollen in einem gegebenen Augenblicke oder für eine bestimmte Lage verschiedener Massen den Inbegriff aller Kräfte, sowohl innerer, als äußerer, sowohl activer, als passiver (aber von der Trägheit verschiedener) Kräfte betrachten, welche gleichzeitig auf das System wirken und einen merklichen, aber beliebigen Einfluß auf den Bewegungszustand seiner verschiedenen materiellen Bestandtheile ausüben, und dann annehmen, daß man auf jeden dieser Bestandtheile andere Kräfte wirken lasse, welche die wirklichen Veränderungen dieser Bewegung unter der alleinigen Wirkung der ersten Kräfte und für den unendlich kleinen Zeitraum dt, welcher auf den betrachteten Augenblick folgt, verhindern können; so ist klar, daß diese letzten Kräfte den erstern das Gleichgewicht halten, oder ihre Wirkung aufheben. Aber die zweiten Kräfte sind den Widerständen, welche von der Trägheit herrühren und bei der Veränderung der Bewegung der verschiedenen Massen entstehen, genau der Intensität und Richtung nach gleich (§. 13 und 14). Es findet also zwischen den wahren wirksamen Kräften und den von der Trägheit herrührenden Kräften das Gleichgewicht statt. Bezeichnet man folglich durch ΣQdq die Summe der durch diese verschiedenen wirksamen Kräfte hervorgebrachten Elementarquantitäten der Arbeit, indem man diejenigen dieser Größen, welche den nach der Richtung der Bewegung der Angriffspuncte wirkenden Kräften zugehören, als positiv, und die den nach entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräften entsprechenden als negativ betrachtet, und drückt ebenso $\Sigma - mvdv = - \Sigma mvdv$ die Summe der Quantitäten Arbeit in Beziehung auf die Kraft der Trägheit $- m\dfrac{dv}{dt}$ der verschiedenen Massen des Systemes aus, Größen, deren Zeichen immer dem Zeichen entgegengesetzt sein muß, welches das Product vdv für jede

Masse m annimmt, weil die Kraft der Trägheit wie ein Widerstand wirkt, wenn sich die Bewegung dieser Masse beschleunigt, d. h. wenn dv die Richtung und das Zeichen von v hat, und wie eine Kraft, wenn dv das entgegengesetzte Zeichen von v hat (§. 10), und bemerkt man endlich, daß die Quantitäten der Arbeit hier nichts anders sind, als die virtuellen Momente in Beziehung auf jede Kraft und auf die wirkliche Bewegung des Systemes; so hat man nach einem bekannten Principe*) die Relation:

$$\Sigma Qdq - \Sigma mvdv = 0 \text{ oder } \Sigma Qdq = \Sigma mvdv,$$

welche ausdrückt: daß die Summe der augenblicklichen Quantitäten Arbeit sowohl für die verschiedenen Kräfte, welche die Veränderung der Bewegung hervorbringen, als für die dadurch entstehenden Trägheitskräfte beständig $= 0$ ist.

Princip der lebendigen Kräfte.

§. 16. Da die obige Gleichung für jeden Augenblick stattfindet und außerdem von der Wirkungsart der Kräfte, welche eine beliebige und sogar discontinuirliche sein kann, unabhängig ist, wofern man nur die Unterbrechungen dieser Wirkung bei der Bestimmung der Quantitäten Arbeit für jede Kraft in Betracht zieht; so folgt daraus, daß der zweite Theil dieser Gleichung sich in allen Fällen muß integriren lassen, und daß sie auf das sogenannte Princip der lebendigen Kräfte in der allgemeinsten Bedeutung führt. Denn bezeichnet man die Geschwindigkeit einer beliebigen Masse m im ersten Augenblicke oder für die erste Lage, worin man das System betrachten will, mit v', und den Werth dieser Geschwindigkeit für einen andern Augenblick oder für eine andere gegebene Lage dieses Systemes mit v, und drückt endlich $\int Qdq$ die von einer beliebigen Kraft Q in demselben Zeitraume hervorgebrachte Quantität Arbeit aus, welche eine unterbrechende sein und beliebige Werthe annehmen kann; so hat man die neue Gleichung:

$$\Sigma \int Qdq = \Sigma \int_{v}^{v'} mvdv = \tfrac{1}{2}\Sigma(mv^2 - mv'^2),$$

welche ausdrückt: daß zwischen zwei beliebigen gegebenen Lagen des Systemes der Zuwachs der Summe der lebendigen Kräfte der verschiedenen Massen desselben, der doppelten Summe der positiven oder negativen Quantitäten Arbeit aller auf das System während desselben Zeitraumes wirkenden und von der Trägheit verschiedenen Kräfte gleich ist.

---

*) Wir lassen hier die Beschränkung in Beziehung auf die Bedingungsgleichungen, welche die Art des geometrischen Zusammenhanges des Systemes ausdrücken, und vermöge welcher die wirklichen Geschwindigkeiten nicht für die virtuellen substituirt werden können, wenn diese Gleichungen entwickelte Function der Zeit sind, unberücksichtigt; denn diese Beschränkung liegt stillschweigend in unsern Ausdrücken, welche voraussetzen, daß die Bewegung der verschiedenen Massen einzig und allein von den Kräften herrührt, welche in Rechnung gebracht werden, und namentlich, daß keiner der Körper des Systemes eine von der Wirkung dieser Kräfte unabhängige Bewegung hat oder bekommt, wofern diese Bewegung nicht für alle Körper gleichförmig, parallel und gleich ist.

Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte auf die Bewegung der Maschinen.

Ueber die physische Constitution und die Berechnungsart der Maschinen.

§. 17. Um das Princip der Fortpflanzung oder Uebertragung der Arbeit, oder der lebendigen Kräfte auf die Theorie der Maschinen, wie sie in der Industrie vorkommen, anwenden zu können, müssen wir bemerken, daß sie im Allgemeinen aus einer Reihe materieller Bestandtheile bestehn, welche einander successive die Bewegung mittheilen, und zwar von dem Bestandtheile an, auf welchen die bewegende Kraft unmittelbar wirkt, und welcher der Receptor genannt wird, bis zu dem Maschinentheile, welcher die Nutzarbeit unmittelbar verrichtet und das Werkzeug oder der Operator genannt wird. Sowohl diesen Bestandtheilen, als den zwischen ihnen liegenden, welche man Communicatoren oder Ueberträger der Bewegung nennt, gibt man immer einen hinreichenden Grad von Festigkeit und Steifigkeit oder Starrheit, damit sie unter der Wirkung der Kräfte, welchen sie ausgesetzt sind, fast eine unveränderliche Form behalten, und die Geschwindigkeit ohne merklichen Verlust von einem Ende der Maschine bis zu dem andern, d. h. nach einzig und allein von der geometrischen Constitution des Systemes abhängigen Gesetzen fortpflanzen.

Unter dieser Voraussetzung betrachtet man in der That gewöhnlich die Theorie der Maschinen, um die Schwierigkeiten zu vermeiden, welche bei dem gegenwärtigen Zustande unserer mechanischen Kenntnisse oft unüberwindlich sein würden, wenn man alle molecularen und innern Rückwirkungen in Betracht ziehn wollte, welche aus der Zusammendrückbarkeit auch der festesten Körper entspringen. Allein man darf deswegen nicht vergessen, daß diese Zusammendrückbarkeit stattfindet, und daß sie die Ursache gewisser Verluste an Arbeit und gewisser Widerstände ist, welche man bei der Berechnung der Effecte der Maschinen nicht unberücksichtigt lassen darf, und deren Werth man entweder durch das Experiment, oder durch Rechnung und Schlüsse näherungsweise bestimmt.

Art und Weise, wie die von den molecularen Rückwirkungen herrührenden Verluste an Arbeit in Betracht gezogen werden.

§. 18. Die Reibungen, Adhäsion und die Steifigkeit der Seile sind Widerstände, welche von Ursachen dieser Art herrühren, und welche nicht zu der Nutzleistung gehören; denn sie setzen Verrückungen der materiellen Bestandtheilchen voraus, welche theils von der Tangentialbewegung der Körper herrühren, auf welche Normaldruckkräfte wirken, und theils von den mehr oder weniger beträchtlichen und beständig erneuerten Biegungen dieser Körper. Diese Widerstände und gewisse andere, wie der Widerstand des Mittels, worin sich die Körper bewegen, begleiten stets die Bewegung der Maschinen und nur selten darf man sie unberücksichtigt lassen.

Was die Molecularwirkungen anlangt, welche durch die Veränderung der allgemeinen Form der festen Maschinentheile, die einander die Bewegung mittheilen, in Thätigkeit gesetzt werden, d. h. durch die

Biegung, Ausdehnung, Drehung u. s. f.; so lehrt die Erfahrung, daß man die ihnen entsprechende Arbeit jedesmal unberücksichtigt lassen kann, wenn der Zustand der Zusammendrückung während der activen Dauer der Bewegung fast derselbe bleibt oder nur geringe Veränderungen erfährt.

Aber wenn diese Veränderungen sich häufig wiederholen und bleibende Formveränderungen der Maschinenbestandtheile zur Folge haben, und besonders wenn sie von den Kräften der Trägheit und von den Reactionen herrühren, welche bei plötzlichen Veränderungen der Bewegung, und bei dem Zusammenstoßen der mit entgegengesetzten oder ungleichen Geschwindigkeiten bewegten Körper stattfinden; so wird es durchaus nothwendig, die Verluste an Arbeit, welche sowohl von diesen Formveränderungen selbst, als von den relativen Bewegungen der materiellen Bestandtheilchen herrühren, in Rechnung zu bringen, indem diese Molecularbewegungen von der allgemeinen Bewegung der Maschinenbestandtheile verschieden und unabhängig sind, und bekanntlich wegen ihrer Entgegengesetztheit und Mittheilung an die umgebenden Massen schnell erlöschen.

Wir werden später zeigen, wie dieser Verlust an Arbeit näherungsweise bestimmt werden kann, und für den Augenblick brauchen wir bloß zu bemerken: 1) daß die Dauer der Stöße, wie sie in den Maschinen stattfinden, im Allgemeinen gegen die betrachtete Dauer der Bewegung der Maschine vernachlässigt werden kann; 2) daß, da die Bestandtheile, welche einem solchen Stoße ausgesetzt sind, eine solche Einrichtung haben, daß ihre Formveränderungen an und für sich sehr klein sind, das System nach dem Stoße nahezu dieselben geometrischen Bedingungen hinsichtlich seiner Zusammensetzung erfüllt, als zuvor, und daß bloß die absolute Geschwindigkeit jedes Punctes verändert ist; und endlich 3) daß durch den Stoß bloß ein Verlust an lebendiger Kraft der verschiedenen Maschinentheile bewirkt ist, welcher durch den Unterschied der lebendigen Kräfte des Systemes vor und nach dem Stoße gemessen wird.

Allgemeine Gleichungen für die Bewegung der Maschinen nach dem Principe der lebendigen Kräfte.

§. 19. Aus diesen verschiedenen Betrachtungen sieht man, daß die Kräfte, welche man allein in der Praxis in Betracht zu ziehen braucht, sind: 1) die bewegenden Kräfte, welche zur Hervorbringung der Nutzarbeit und zur Ueberwindung aller schädlichen Widerstände bestimmt sind, und ihre Quantitäten der augenblicklichen Leistung oder Wirkung können durch Ausdrücke von der Form Fdf, welche wesentlich positiv sind, dargestellt werden (§. 10). 2) Die schädlichen oder passiven Widerstände jeder Art (§. 18), welche während der ganzen Dauer der Bewegung stetig oder nicht stetig wirken und deren negative Quantitäten der augenblicklichen Arbeit durch Größen von der Form $-Rdr$ ausgedrückt werden können. 3) Die Nutzwiderstände, welche die Arbeit der letzten Maschinenbestandtheile bilden und dieselbe Rolle spielen, wie die vorhergehenden, so daß ihre Quantitäten der augenblicklichen Leistung durch Glieder von der Form $-Qdq$ ausgedrückt werden können. 4) Die Gewichte der verschiedenen materiellen Elemente des Systemes, welche bald in dem Sinne der Bewegung und bald nach entgegengesetztem Sinne wirken, so daß die entsprechenden Quantitäten der augenblicklichen Arbeit, folglich durch Glieder von der Form $\pm pdh$ oder $\pm mgdh$ ausgedrückt werden können, wo m die Masse eines beliebigen materiellen Bestandtheilchens, mg oder p sein Gewicht (§. 11) und $\pm dh$ die Höhe bezeichnet, um welche dasselbe in der Verticale und in dem Augenblicke, für welchen man die Bewegung der Maschine betrachtet, herabsinkt oder steigt. 5) Endlich die Kraft der Trägheit $-m\dfrac{dv}{dt}$ (§. 13) der verschiedenen fraglichen materiellen Theilchen, welche in demselben Zeitelemente Größen der Arbeit hervorbringen, welche durch $-mvdv$ ausgedrückt werden (§. 14) und welche sich zu denen der Kräfte addiren, oder davon subtrahiren, je nachdem die Geschwindigkeit jedes materiellen Theilchens ab- oder zunimmt, d. h. je nachdem das Product vdv negativ oder positiv ist.

Behalten wir also die Bezeichnungen und Annahmen in §§. 15 und 16 bei, so haben wir für jedes Zeitelement die Gleichung:

$$\Sigma mvdv = \Sigma Fdf - \Sigma Rdr - \Sigma Qdq \pm \Sigma mgdh,$$

und zwischen zwei beliebigen Augenblicken, wovon der erste der ganzen erlangten Geschwindigkeit v' des Molecules m und der letzte der Geschwindigkeit v entspricht, welche dasselbe unter dem Einflusse der gegebenen Kräfte erlangt hat, die Gleichung:

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv'^2 = 2\Sigma\int Fdf - 2\Sigma\int Rdr - 2\Sigma\int Qdq \pm 2\Sigma\int mgdh.$$

Integration der sich auf die Gewichte der Maschinentheile beziehenden Glieder, und Bemerkungen über diesen Gegenstand.

§ 20. Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, daß die Glieder $\Sigma mgdh$, $\Sigma\int mgdh$ auf eine einfachere Form gebracht werden können, wenn sie für die ganze Ausdehnung der Maschine oder für das den Geschwindigkeiten v und v' der Masse m entsprechende Zeitintervall integrirt vorausgesetzt werden. Denn bezeichnet h die Höhe, um welche sich in diesem Zeitraume das Massenelement m hebt, M und P die Summe der Massen und der Gewichte aller materiellen Theile, welche das System bilden, d. h. die Gesammtmasse und das Totalgewicht der beweglichen Bestandtheile der Maschine und endlich H die Höhe, um welche ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct in dem betrachteten Zeitintervalle steigt; so hat man offenbar nach der Theorie des Mittelpunctes paralleler Kräfte:

$$\Sigma mgh = MgH = P.H,$$

und $$\Sigma mgdh = PdH, \Sigma\int mgdh = \Sigma mgh = P.H,$$

welche Relationen nur insofern stattfinden, als das Gewicht P jeden Augenblick dasselbe bleibt, oder solange keine der Massen m während des Zeitintervalles, auf welches sich die Summationen und Integrationen erstrecken, das System verläßt. Wir setzen im Allgemeinen voraus, daß das Princip der lebendigen Kräfte nur für jedes der Intervalle auf die Maschinen angewandt wird, worin die Bedingungen dieselben bleiben, oder vielmehr, daß, wenn sich diese Bedingungen in jedem Zeitelemente oder in bestimmten Augenblicken ändern können, bei der Integration der verschiedenen Glieder für die Quantitäten der Arbeit darauf Rücksicht genommen wird, was nach unserer Betrachtungsweise des Princips der lebendigen Kräfte (§. 16) auch **a priori** klar ist, aber bei den Anwendungen dieses Princips auf verschiedene Fälle einige Aufmerksamkeit erfordert.

Einfachere Formen der Gleichungen der Bewegung der Maschinen.

§. 21. Wenn man annimmt, daß die zweite der Gleichungen im §. 19 auf dieselbe Weise in Beziehung auf jedes der Glieder, woraus sie besteht, integrirt ist, so kann man derselben zur Vereinfachung des Vortrages folgende Form geben:

$$mv^2 - mv'^2 = 2(Ff - Rr - Qq \pm PH);$$

aber man darf weder die Art und Weise, wie sie erhalten ist, noch die wahre Bedeutung jedes ihrer Glieder vergessen.

Ebenso wollen wir ihre Differentialgleichung, welche für jeden Augenblick der Bewegung stattfindet (§. 9), durch:

$$mvdv = Fdf - Rdr - Qdq \pm PdH$$

ausdrücken.

Diese Bezeichnungen laufen auf die einfache Voraussetzung hinaus, daß die auf das System wirkenden veränderlichen Kräfte durch die mittlern Werthe ersetzt sind, welche ihnen in dem betrachteten Zeitintervalle entsprechen.

Nähere Untersuchung der verschiedenen Glieder der Gleichung der lebendigen Kräfte. — Einfluß der Schwere auf den Nutzeffect.

§. 22. In der eben abgeleiteten und definirten Gleichungen ist die ganze Theorie der Bewegung der Maschinen enthalten; aber um den Geist derselben genau aufzufassen, ist es nöthig, die Bedeutung jedes ihrer Glieder und den Einfluß derselben auf die allgemeinen Effecte der Maschine und besonders auf den Nutzeffect Qq, welcher in Vergleich zu der Quantität der Wirkung Ff der bewegenden Kraft offenbar so groß als möglich gemacht werden muß, einzeln zu untersuchen.

Zu dem Zwecke wollen wir die erste dieser Gleichungen in Beziehung auf Qq auflösen, so erhalten wir:

$$Qq = Ff - Rr \pm PH + \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2}.$$

Betrachten wir zunächst das Glied PH, welches sich auf die Gewichte der Maschinentheile bezieht, so sehn wir, daß es jedesmal aus der Gleichung verschwindet, wenn der Schwerpunct des ganzen Systemes immer in derselben Höhe bleibt; denn alsdann ist $H = 0$, und wenn dies nicht der Fall ist für das ganze System, so verschwinden aus der Gleichung nur die Theile dieses Gliedes, welche sich auf Massen beziehen, deren Schwerpunct weder steigt, noch fällt, wie dieses z. B. bei den genau centrirten Rädern, deren Axe durch den Schwerpunct gehet, bei den Riemen und Ketten ohne Ende, bei den Wagen, welche auf horizontalen Ebenen fortrollen, u. s. w. der Fall ist. In allen diesen Fällen darf man aber nicht vergessen, daß, wenn auch das Gewicht dieser Maschinentheile aus der obigen Gleichung verschwindet, es dennoch nothwendig ist, die davon abhängigen Widerstände jeder Art, deren Einfluß sich in den auf die Reibungen und auf die lebendigen Kräfte des Systemes beziehenden Gliedern zeigt, in Rechnung zu bringen.

Setzen wir auch den Fall bei Seite, wo ein Maschinentheil während der Dauer der Bewegung fortwährend steigt oder fortwährend herabsinkt, weil das Gewicht p dieses Theiles alsdann als ein Theil des Nutzwiderstandes Q oder der bewegenden Kraft F betrachtet werden kann (§. 19), so haben wir doch den Fall zu untersuchen, wo dieser Maschinentheil sich abwechselnd auf- und niederwärts bewegt, wie dieses z. B. bei einem nicht centrirten Rade, d. h. welches sich nicht um seinen Mittelpunct dreht, bei einer verticalen Säge, welche durch Kurbeln in Bewegung gesetzt wird, u. s. f. der Fall ist. Da dieser Maschinentheil alsdann die Maschine niemals verläßt, so wird durch sein Gewicht keine andere Wirkung hervorgebracht, als daß die Summe der Quantitäten der Wirkung der übrigen Kräfte periodisch um gleiche Größen vermehrt oder vermindert wird, so daß diese Summe und der Nutzeffect Qq zwischen zwei Zeitmomenten, worin die Lage des fraglichen Maschinentheiles wieder dieselbe geworden ist, nicht geändert werden, weil zwischen diesen beiden Zeitmomenten das Glied $\int pdh = 0$ ist. Aber wenn auch durch das Gewicht der Maschinentheile, welche eine alternative Bewegung haben, direct kein nachtheiliger Einfluß auf den Nutzeffect ausgeübt wird, so werden dadurch doch Widerstände hervorgerufen, indem auf die Stützpuncte Druckkräfte ausgeübt werden, wodurch, wie wir später sehn werden, die Geschwindigkeit und die lebendige Kraft des Systemes für jeden Augenblick verändert werden.

Einfluß der passiven Widerstände und der Stöße.

§. 23. In Beziehung auf das Glied Rr, welches die den passiven Widerständen jeder Art entsprechenden Quantitäten Arbeit enthält, haben wir keine ähnliche Bemerkung zu machen; denn sie haben ein beständiges Bestreben, einen gewissen Theil der Leistung Ff der bewegenden Kraft aufzuheben (§. 19), weswegen man in jedem besondern Falle die Mittel ausfindig zu machen suchen muß, ihren Einfluß so viel als möglich zu vermindern, indem man die Form, Geschwindigkeit und Einrichtung der diesem Einflusse ausgesetzten Maschinentheile so bestimmt, daß das Product Rr ein Minimum wird.

Uebrigens sind die passiven Widerstände, welche während der Dauer der Bewegung stetig wirken, wie die Widerstände des Mittels, die Reibung u. s. f. wohl von denen zu unterscheiden, welche nur nach gewissen Intervallen stattfinden und während sehr kurzer Zeiträume wirken, wie die durch den Stoß oder die plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit der Theile des Systemes hervorgerufenen Widerstände. Da die ersten wie die Schwere, oder wie beliebige bewegende Kräfte wirken, so sieht man leicht ein, wie man die ihnen entsprechenden Quantitäten Arbeiten in allen den Fällen berechnen kann, wo das Gesetz ihrer Intensität bekannt ist (§. 10), und was die andern Widerstände anlangt, so muß man annehmen, daß während der sehr kurzen Zeit, wo die Maschinentheile aufeinander einwirken und sich gegenseitig zusammendrücken, die Molecularkräfte in Thätigkeit gesetzt werden, so daß in dem der Bewegung entgegengesetztem Sinne Quantitäten Arbeit hervorgebracht werden, deren Zahlenwerth die Hälfte der Summe der während des Stoßes aufgehobenen lebendigen Kräfte ist, welche Summe, wie wir in der Folge sehn werden, immer mit der ganzen lebendigen Kraft des Systemes vergleichbar ist, selbst wenn die Bestandtheile des materiellen Systemes vollkommen elastisch, d. h. so beschaffen wären, daß sie nach dem Stoße genau ihre frühere Form wieder annähmen.

Nachtheile der Stöße, selbst wenn dadurch der Nutzeffect hervorgebracht wird. — Mittel, sie zu vermeiden.

§. 24. Uebrigens sieht man leicht ein, daß, wenn der Stoß zur Hervorbringung des Nutzeffectes bestimmt ist, wie bei dem Zusammendrücken oder Zerstoßen eines Körpers vermittelst eines Stampfers oder Hammers, ein Theil der verlornen lebendigen Kraft der Maschinentheile, nämlich der Theil, welcher zur Verrichtung der beabsichtigten Arbeit unumgänglich nothwendig erforderlich ist, als dem Gliede Qq zugehörig betrachtet werden muß. Man begreift sogar leicht, daß der größte Theil der lebendigen Kraft des Stampfers nutzbar verwandt würde, wenn der Stampfer vollkommen starr und elastisch wäre, wenn sich seine Form und physische Beschaffenheit in Folge der Stöße nicht änderten, und wenn derselbe sowohl, als die zu bearbeitende Masse nach dem Stoße keine Geschwindigkeit behielte, wodurch kein Nutzeffect hervorgebracht wird. Da sich aber die Sache ganz anders verhält und da die Bewegung immer mit passiven Widerständen begleitet ist, so sieht man, daß ein merklicher Theil der lebendigen Kraft des Stampfers oder der entsprechenden Leistung nothwendig verloren geht, und es ist daher schon aus diesem Grunde allein, und abgesehen von allen übrigen, vortheilhaft, den vorhinerwähnten Effect durch bloße Druckkräfte hervorzubringen, wie dieses bei Walzwerken, Mühlen u. s. f. der Fall ist, welche man jetzt mit Recht für die Stampf- und Hammerwerke substituirt.

Wenn aber schon die Vermeidung der Stöße in dem Falle, wo sie zur Hervorbringung des Nutzeffectes dienen, vortheilhaft ist, so ist dieses um so mehr in den Fällen nothwendig, wo diese Stöße zur Hervorbringung des beabsichtigten Effectes nicht erforderlich sind. Dieses findet z. B. statt, wenn gewisse Maschinentheile nicht miteinander in Berührung bleiben und dann wieder mit gewissen Geschwindigkeiten zusammentreffen, indem sie entweder die Maschine ganz verlassen, oder zur Fortpflanzung der Bewegung dienen und ihre Gelenke zu viel Spielraum haben, so daß sich ihre Geschwindigkeiten sowohl der Größe, als der Richtung nach ändern, wie bei den Maschinentheilen, welche eine hin- und hergehende Bewegung haben. Diese Nachtheile werden zum Theil vermieden, wenn man diesen Spielraum so viel als möglich vermindert und wenn man zur Verwandlung der continuirlichen Bewegung in eine alternative Federn, oder, was noch besser ist, Kurbeln und excentrische Scheiben anwendet, welche die Geschwindigkeit im Anfange und am Ende jeder Oscillation absorbiren und wieder hergeben, und wenn man endlich die Maschinentheile, welche durch ihre gegenseitige Berührung die Arbeit übertragen und überhaupt alle Maschinentheile so einrichtet, daß sie sowohl in ihrer Zeichnung, als in ihrer Bewegung dem Gesetze der Stetigkeit unterliegen.

Durch die plötzlichen Veränderungen der Geschwindigkeiten der verschiedenen Maschinentheile werden sie überhaupt sehr beschädigt und abgenutzt, so daß zu große Spielräume entstehen und die Verluste an Arbeit immer größer werden. Dasselbe gilt im Allgemeinen auch von starken Druckkräften, wenn sie längere Zeit hindurch oft wiederholte alternative Veränderungen der Richtung und Intensität erfahren.

Ueber die Wirkung der Motoren auf die Maschinen. — Einfluß der Form und Geschwindigkeit des Receptors.

§. 25. Betrachten wir nun das Glied Ff, welches sich auf die Quantitäten der Wirkung oder Leistung der bewegenden Kräfte beziehet, und bemerken zunächst, daß diese bewegenden Kräfte ursprüngliche sein können, wie die Schwere und die Wärme, oder secundäre, wie die Thiere, der Wind, das Wasser und der Dampf, oder endlich zusammengesetzte und materielle, wie die Kurbeln, die verschiedenen Wasserräder, u. s. f., welche die ersten, beweglichen Maschinentheile sind, und die unmittelbaren Receptoren der bewegenden Kraft und der Bewegung bilden. Es kann hier nicht die Rede sein von der Art und Weise, wie diese Maschinentheile auf einander wirken, sondern es ist bloß zu bemerken, daß der Druck F, welchen der secundäre Beweger auf den Receptor ausübt, im Allgemeinen mit der eigenen Geschwindigkeit v dieses Theiles veränderlich sein kann, so daß dieser Druck $= 0$ ist, wenn die Geschwindigkeit seines Angriffspunctes der größten Geschwindigkeit V gleich ist, welche der Beweger annehmen kann, und dagegen seinen größten Werth hat, wenn der Receptor unbeweglich oder $v = 0$ ist.

Da also die der Maschine durch die bewegende Kraft mitgetheilte Quantität der Wirkung Ff für die beiden ebenerwähnten Grenzfälle Null ist, so sieht man, daß es zwischen o und V einen Werth von v gibt, welcher das Product Ff zu einem Maximum macht, wie dieses aus der Betrachtung der Wirkungsart gewisser secundärer Motoren, wie die Thiere und das Wasser, deutlich hervorgeht. Uebrigens sind in jedem besondern Falle noch andere Bedingungen zu erfüllen, um das Product Ff zu einem Maximum zu machen, und namentlich sind die Stöße und jede Zerlegung der Kraft und der Geschwindigkeit des Bewegers zu vermeiden, weil dadurch unnützerweise der Druck auf die Zapfenlager und Gelenke und folglich auch die passiven Widerstände u. s. f. vergrößert würden. Aber es lassen sich in dieser Beziehung keine allgemeinen Regeln aufstellen, und es ist hier der Ort nicht, näher auf diesen Gegenstand einzugehen.

Einfluß der Form und Geschwindigkeit des Operators auf den Nutzeffect. — Einfluß der Trägheit der Massen.

§. 26. Wir haben nun noch ein Paar Worte über die Glieder unserer Gleichung in §. 22 zu sagen, welche sich auf die Trägheit oder auf die lebendigen Kräfte der Maschine beziehen; denn es ist einleuchtend, daß sich in Beziehung auf den Nutzeffect Qq dasselbe sagen läßt, was über die passiven Widerstände im Allgemeinen gesagt ist, und es ist z. B. zu untersuchen, welche Geschwindigkeit, Form, u. s. w. der Operator haben muß, damit man bei demselben Aufwande von mechanischer Leistung die größte Quantität Waare einer bestimmten Art erhält; denn die Erfahrung hat gelehrt, daß es für jeden Operator eine vortheilhafteste Geschwindigkeit gibt, von welcher man sich nicht entfernen darf, wenn die Güte und Quantität der verfertigten Producte nicht vermindert werden soll.

Wir wollen also nun zu den Gliedern unserer Gleichung übergehen, worin die lebendigen Kräfte mv^2 und mv'^2 der verschiedenen Bestandtheile der Maschine am Ende und im Anfange des Zeitintervalles, für welches man ihre Bewegung betrachtet, vorkommen, so sehn wir sogleich, daß das eine dieser beiden Glieder den Nutzeffect Qq zu vergrößern und das andere zu verkleinern strebt. Da aber die Maschinen nothwendig von der Ruhe ausgehn und nur die Geschwindigkeit erlangen, welche ihnen der Beweger mittheilt, so sieht man, daß die durch die lebendige Kraft $\frac{mv'^2}{2}$ gemessene Quantität der Arbeit eine andere ursprüngliche Leistung des Bewegers voraussetzt, welche wegen der mit der Constitution der Maschine nothwendig verbundenen schädlichen Widerstände größer ist. Was die lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ anlangt, welche als ein wirklicher Verlust an Arbeit erscheint, so kann man sie gegen das Ende der Bewegung der Maschine noch zum Theil nutzbar machen, wenn letztere allein und vermöge ihrer bloßen Trägheit gegen die Widerstände wirkt, welche die zu bearbeitende Masse darbietet, was übrigens nicht bei jeder Art der zu verarbeitenden Masse und des Operators zulässig ist. Da aber die passiven Widerstände in allen Fällen einen merklichen Theil der lebendigen Kraft absorbiren, so sieht man, daß in jedem Falle der Nachtheil stattfindet, daß die verschiedenen Maschinentheile eine gewisse lebendige Kraft erlangen, abgesehen davon, daß der Einfluß der Stöße und der schädlichen Widerstände mit der Zunahme der Massen und der Geschwindigkeit wächst. Wenn jedoch die Bewegung der Maschine lange Zeit fortdauern muß, so kann der durch $\frac{mv^2}{2}$ ausgedrückte Verlust an Arbeit so gering werden, daß derselbe gegen den ganzen Nutzeffect vernachlässigt werden kann, und sein Einfluß ist gegen denjenigen, welchen er ausüben würde, wenn die Bewegung der Maschine häufig durch die Ruhe unterbrochen wird, gewissermaßen Null.

Auch sieht man, daß, wenn der Nutzeffect in dem Heben oder Bewegen der Körper in einer beliebigen Richtung besteht, immer ein gewisser Verlust an lebendiger Kraft oder an Arbeit stattfindet, wenn diese Körper die Maschine mit einer gewissen Geschwindigkeit verlassen, welche Geschwindigkeit völlig Null oder möglichst klein sein muß.

Was diejenigen Maschinentheile anlangt, welche eine hin- und hergehende Bewegung haben, deren Geschwindigkeit am Ende und im Anfange jeder Oscillation Null wird, so sieht man leicht ein, daß, wenn sich diese Geschwindigkeit allmählig ändert, ihre lebendige Kraft keine andere Wirkung hat, als daß sie die lebendige Kraft der Maschine, nämlich mv^2 abwechselnd vermindert und vermehrt, so daß letztere im Anfange und am Ende jeder Oscillation wieder dieselbe wird, und daß in dieser Beziehung kein Verlust an Arbeit stattfindet.

Hauptumstände, welche sich bei den in Bewegung befindlichen Maschinen darbieten.

Besondere Beschaffenheit der Bewegung der Maschinen.

§. 27. Nachdem wir den besondern Einfluß der verschiedenen Glieder der Gleichung der lebendigen Kräfte (§. 22) auf den Nutzeffect untersucht haben, wollen wir nun daraus die Bewegungsgesetze der Maschinen selbst ableiten.

Bei der Bewegung der Maschinen kommen gewisse Perioden vor, welche man Umläufe oder Umgänge nennt, an deren Ende die verschiedenen Maschinentheile wieder dieselbe Lage bekommen, als zuvor, und da alle Maschinentheile feste Körper sind; so pflanzt sich die Geschwindigkeit nach rein geometrischen Gesetzen allmählig fort, so daß sich die Geschwindigkeit der verschiedenen Puncte durch die Geschwindigkeit eines beliebigen unter ihnen, und durch die veränderliche Größe, welche jeden Augenblick die Lage dieser Puncte bestimmt, ausdrücken läßt. Die Gleichung der lebendigen Kräfte würde also diese Geschwindigkeit für einen beliebigen Augenblick geben, wenn man für diesen Augenblick die durch die verschiedenen Kräfte dem Systeme ertheilten Gesammtquantitäten der Wirkung kännte, und aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, enthält die in Rede stehende Gleichung die Bewegungsgesetze aller Maschinen.

Wenn man annimmt, daß die Maschine von der Ruhe ausgeht, so muß man in der Gleichung:

$$\Sigma S dm v^2 - \Sigma dm v'^2 = 2\Sigma\int F df - 2\Sigma\int R dr - 2\Sigma\int Q dq \pm 2PH$$

$v' = 0$ setzen, und sie gibt alsdann den Werth der Geschwindigkeit v der beliebigen Masse dm, weil die Geschwindigkeiten der verschiedenen andern Massen nach der Natur der Maschinen zu v in gegebenen Verhältnissen stehn, und bloß von den Größen abhängen, welche die Form und Lage der verschiedenen Theile des Systemes in jedem Augenblicke bestimmen.

Wenn man bloß untersuchen will, was in einem unendlich kleinen Zeitelemente dt stattfindet, worin die den Raumelementen df, dr, dq entsprechende Zunahme der Geschwindigkeit von $dm = dv$ ist; so erhält man, wenn man die obige Gleichung in Beziehung auf die Zeit differentiirt, die Gleichung:

$$\Sigma S dm v dv = \Sigma F df - \Sigma R dr - \Sigma Q dq \pm P dH,$$

welche die Geschwindigkeitszunahme eines beliebigen materiellen Punctes der Maschine für jeden Augenblick, und folglich das Bewegungsgesetz derselben gibt.

Um dieses zu beweisen, wollen wir bemerken, daß, wenn e den ganzen von dem materiellen Theilchen dm in dem Augenblicke, wo eine Geschwindigkeit $= v$ ist, beschriebenen Raum bezeichnet, so daß

$v dt = de$ ist, und wenn φe allgemein die rein geometrische Function darstellt, welche für das Massenelement dm das Verhältniß von v und dv zu den Werthen derselben Größen für ein anderes beliebiges Massenelement der Maschine, welches sich mit einer Geschwindigkeit u bewegt und eine gegebene Lage hat, ausdrückt, man statt der Größen:

$$\Sigma S dm v^2,\ \Sigma S dm v'^2 \text{ und } \Sigma dm v dv$$

die gleichbedeutenden:

$$u^2 \Sigma S dm (\varphi e)^2,\ u'^2 \Sigma S dm (\varphi e')^2,$$
$$u du \Sigma \int dm (\varphi e)^2 = de \frac{d^2 e}{dt^2} \Sigma \int dm (\varphi e)^2$$

in die vorhergehenden Gleichungen substituiren kann, welche sich alsdann, wenn man die sich auf die beiden betrachteten verschiedenen Lagen beziehenden Werhe von $\Sigma S dm (\varphi e)^2$, $\Sigma S dm (\varphi e')^2$ der Kürze wegen mit K und K' bezeichnet, in folgende verwandeln:

$$K u^2 - K' u'^2 = 2 \Sigma \int F df - 2 \Sigma \int R dr - 2 \Sigma \int Q dq \pm PH$$
$$K u du = K.\ \frac{d^2 e}{dt^2} de = \Sigma F df - \Sigma R dr - \Sigma Q dq \pm P dH,$$

und da df, dr, dq zu de ebenfalls in Verhältnissen stehen, welche bloß Functionen von e und den constanten Größen sind, welche die Größe und gegenseitige Lage der materiellen Bestandtheile des Systemes bestimmen, und da endlich F, R und Q als constant, oder veränderlich betrachtet werden, je nach den Gesetzen, welche a priori als Functionen der Zeit oder der Veränderlichen f, r und q, d. h. von e gegeben sind; so sieht man, daß die letzte dieser Gleichungen vermittelst der bekannten Methoden das wirkliche Bewegungsgesetz der Maschinen gibt, so daß sie in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung alle wesentlichen Eigenschaften der Maschinen, wie wir sie hier betrachten, enthalten muß.

Soll dieses aber der Fall sein, so muß man annehmen, daß alle Umstände in Betracht gezogen werden, welche während der Arbeit der Kräfte und namentlich derjenigen, welche ihre Wirkung und die Bewegung der verschiedenen materiellen Bestandtheile der Maschinen momentan unterbrechen oder verändern können, stattfinden, wie dieses z. B. bei den Stampf- oder Hammerwerken geschieht, wo sich gewisse Massen abwechselnd von der Maschine trennen und dann wieder mit ihr in Verbindung kommen. Die Integrale müssen alsdann offenbar zwischen den gehörigen Grenzen genommen werden.

Ueber die Bewegung der Maschinen von der Ruhe aus.

§. 28. In dem Augenblicke, wo eine Maschine aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung übergeht, ist das virtuelle Moment $F df$ der bewegenden Kraft nothwendig größer, als das aller Widerstände zusammengenommen, d. h. es ist:

$$F df - R dr - \text{etc.} > o.$$

Dieses geschieht gewöhnlich, entweder weil der Nutzwiderstand Q seinen **kleinsten** oder die bewegende Druckkraft R ihren **größten** Werth hat (§. 25). Die lebendige Kraft nimmt also in jedem Augenblicke um die Größe $d(mv^2) = 2mvdv$ zu, welche dem Doppelten der Quantitäten der augenblicklichen Wirkungen der Kräfte gleich ist.

Die lebendige Kraft nimmt so lange zu, als das Moment Fdf oder die augenblickliche Leistung der bewegenden Kraft größer ist, als das Moment $Rdr + Qdq + etc.$ der verschiedenen Widerstände; allein man muß nach der Erfahrung und nach der Beschaffenheit der technischen Maschinen annehmen, daß die lebendige Kraft nicht ohne Ende zunehmen kann, wenigstens nicht auf eine merkliche Weise, und mehr oder weniger schnell eine Grenze oder ein Maximum erreicht, wofür man die Bedingungsgleichung hat:

$$\tfrac{1}{2} d(mv^2) = Fdf - Rdr - Qdq \pm PdH = 0,$$

welche nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrückt: daß in demselben Augenblicke zwischen den bewegenden Kräften und den Widerständen das Gleichgewicht stattfindet, abgesehen von der Kraft der Trägheit $-m\frac{dv}{dt}$ (§. 14) der verschiedenen Massen, wofür die Summe der virtuellen Momente von selbst gleich Null ist.

Denn wenn die lebendige Kraft bei jedem Umgange der Maschine fortwährend und um eine merkliche Größe zunähme, so würde die Geschwindigkeit irgend eines Maschinentheiles, z. B. die des Angriffspunctes der bewegenden Kraft, ebenfalls fortwährend zunehmen und bald eine Grenze erreichen, für welche diese bewegende Kraft keine Wirkung mehr würde hervorbringen können (§. 25), welcher Umstand für die Widerstände nicht stattfindet, weil sie oft mit der Geschwindigkeit zunehmen.

Wenn also die lebendige Kraft und die übertragene Quantität Arbeit ihr Maximum erreicht haben, so kann es geschehen, daß sie entweder constant bleiben, oder daß sie während einer gewissen Zeit ab- und dann wieder zunehmen, und so abwechselnd fort, weil die Bewegung nach der Voraussetzung nicht erlischt.

Von der gleichförmigen Bewegung der Maschinen und ihren Bedingungen.

§. 29. Betrachten wir zunächst den ersten Fall, welcher der einfachste ist. Da die augenblickliche Zunahme $2mvdv$ der lebendigen Kraft sowohl, als die Summe $Fdf - Qdq + etc.$ der Quantitäten der mitgetheilten augenblicklichen Arbeit Null ist, so findet jeden Augenblick für alle Lagen der Maschine, und abgesehen von den Kräften der Trägheit, das Gleichgewicht statt; die Geschwindigkeit wird folglich für dieselben Lagen dieselbe, und da zwischen zwei beliebigen Augenblicken

$$mv^2 - mv'^2 = 2(Ff - Qq - Rr \pm PH) = 0$$

ist, so hat die Trägheit auf die Uebertragung der Arbeit keinen directen Einfluß mehr.

Der allgemeinste und zugleich der gewöhnlichste Fall, wo diese Umstände sich darbieten können, ist der, wenn die verschiedenen Massen des Systemes einzeln constante oder gleichförmige Geschwindigkeiten haben; denn es ist **a priori** nicht einzusehen, wie diese Geschwindigkeiten sich sollten so ändern können, daß die Zunahme der lebendigen Kräfte gewisser Maschinentheile der gleichzeitigen Abnahme aller übrigen beständig gleich wäre, was doch erforderlich wäre, wenn die Summe der lebendigen Kräfte constant bleiben sollte. Ferner ist einleuchtend, daß die wirklichen Geschwindigkeiten $v, v', v'', \ldots\ldots$ oder $\frac{de}{dt}, \frac{de'}{dt}, \frac{de''}{dt}, \ldots\ldots$ (§. 13 und 14) der verschiedenen Massen nicht constant bleiben können, wenn die virtuellen Geschwindigkeiten $de, de', de'', \ldots\ldots$, welche einzig und allein von der Beschaffenheit des geometrischen Zusammenhanges des Systemes abhängen, nicht selbst für alle Lagen, welche dasselbe annehmen kann, in unveränderlichen Verhältnissen stehen.*)

Durch diese Bedingung werden, wie man sieht, die Maschinentheile ganz ausgeschlossen, welche eine alternative Bewegung haben, weil ihre wirklichen und ihre geometrischen oder virtuellen Geschwindigkeiten zu denen der übrigen Maschinentheile in keinem constanten Verhältnisse stehen können; allein diese Bedingung zur Gleichförmigkeit der Bewegung der Maschine ist noch nicht hinreichend, sondern es muß auch in jedem Augenblicke

$$Fdf - Qdq - Rdr \pm PdH = 0$$

sein, oder es ist erforderlich, daß das Gleichgewicht stattfindet, abgesehen wieder von den Kräften der Trägheit, welche Bedingung nicht allgemein erfüllt werden kann, wenn die Kraft und die Widerstände auf eine discontinuirliche Weise wirken, oder sich der Intensität und der Richtung nach in den verschiedenen Lagen der Maschine nach beliebigen und von einander unabhängigen Gesetzen verändern. Wenn man aber auch annimmt, daß die Kräfte F, R und Q, so wie die Winkel, welche sie mit der Richtung der von ihren Angriffspuncten beschriebenen Raumelemente bilden, mit der Geschwindigkeit constant sind, vermöge welcher Bedingung die virtuellen Momente Qdq, Rdr, Fdf constant sind, und welche in vielen Maschinen erfüllt wird; so ist doch noch erforderlich, daß das Gewicht p jedes Maschinentheiles seinen Schwerpunct in derselben Höhe behält (§. 22), wofern es nicht bei einer gleichförmigen Geschwindigkeit ein Theil der bewegenden Kraft oder des Nutzwiderstandes ist; denn in jedem andern Falle bringt dasselbe offenbar augenblickliche Quantitäten Arbeit $\pm pdh$ hervor, welche für die verschiedenen Lagen des Systemes verschieden sind.

Nach dem Vorhergehenden darf also die Maschine keine Bestandtheile enthalten, welche eine alternative Bewegung haben, sondern sie muß bloß aus rotirenden Bestandtheilen, wie genau centrirte Räder (§. 22), Riemen und Ketten ohne Ende, rc. zusammengesetzt sein.

*) Es seien $K, K' \ldots.$ diese constanten Verhältnisse, so daß $de' = K'de'' = Kde \ldots.$ ist, so ist auch zwischen zwei beliebigen Lagen des Systemes $e' = Ke$, $e'' = K'e \ldots.$, d. h. die ganzen zwischen diesen Lagen von den verschiedenen Puncten des Systemes beschriebenen Räume stehen auch in denselben Verhältnissen.

In den meisten Fällen wird die Bewegung der Maschine in aller Strenge erst nach einer unendlichen Zeit gleichförmig.

§. 30. Aus dieser Untersuchung geht hervor, wie schwierig es ist, eine streng gleichförmige Bewegung der Maschinen zu erzielen, und man kann sogar sagen, daß sie in mathematischer Schärfe niemals zu erreichen ist; denn es wird dabei vorausgesetzt, daß nicht bloß die Kräfte in Beziehung auf ihre Intensität, Richtung u. s. f. constant bleiben, sondern daß auch die virtuellen Geschwindigkeiten der verschiedenen Maschinentheile unter sich in Verhältnissen stehen, welche von der Lage des Systemes unabhändig sind, wozu erforderlich ist, daß die weiter oben durch φe und durch K bezeichneten Größen für alle Lagen des Systemes constant bleiben. Endlich kann man entweder durch Betrachtung der Gleichung:

$$K\frac{d^2e}{dt^2}=K.\frac{dv}{dt}=\Sigma F\frac{df}{de}-R\frac{dr}{de}-\Sigma Q\frac{dq}{de},$$

in deren zweiten Theile die Größen $\frac{df}{de}$, $\frac{dr}{de}$, $\frac{dq}{de}$ als constant angenommen werden, oder durch directe, geometrische Betrachtungen leicht darthun, daß, wenn die verschiedenen Kräfte stetig wirken, wie die Schwere und bloß von der Veränderlichen abhängen, welche die Lage oder die Geschwindigkeit des Systemes bestimmen, diese Geschwindigkeit, so zu sagen, erst nach einer unendlichen Zeit im Allgemeinen ihre Grenze erreicht, obgleich sie in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen oft schon nach einer ziemlich kurzen Zeit nur um eine unmerkliche Größe von dieser Grenze verschieden ist, so daß dieser Unterschied unberücksichtigt bleiben kann in den meisten practischen Fällen.

Zu dem Zwecke braucht man nur zu bemerken, daß nach dem Vorhergehenden die durch den zweiten Theil der obigen Gleichung ausgedrückte Function ihren größten Werth erreicht, wenn die Maschine von der Ruhe ausgeht oder wenn $v=0$ ist, und daß sie mehr oder weniger schnell abnimmt, wenn die Geschwindigkeit v zunimmt, so daß sie für einen gewissen endlichen Werth dieser Geschwindigkeit völlig verschwindet, und folglich folgende, oder irgend eine andere gleichbedeutende Form hat:

$$N(a-v)^n,$$

wo N eine Function von v, wesentlich positiven Constanten und von der in Rede stehenden Grenzgeschwindigkeit a ist. Aus der letzten Gleichung folgt alsdann in der That:

$$t=\int\frac{Kdv}{N(a-v)^n}=K\int\frac{dv}{N(a-v)^n},$$

und dieses Integral muß, wenn es nach den bekannten Regeln von $v=0$ bis $v=a$ genommen wird, wenigstens ein Glied von der Form $-A\log.(a-v)$ enthalten, wenn n eine ungerade Zahl ist, oder von der Form $-A(a-v)^{-n+1}$, wenn n eine gerade Zahl ist. Beide Functionen werden aber unendlich, wenn die Geschwindigkeit v die Grenze a erreicht.

Dieses Factum ist dem analog, welches bei der Bewegung der Fallschirme und bei der Ausströmung der Flüssigkeiten aus Gefäßen durch Oeffnungen stattfindet, und zeigt, daß man in gewissen Fällen sehr vorsichtig zu Werke gehn muß, wenn man bei der Bestimmung des Bewegungszustandes eines Systemes keine irrigen Resultate erhalten will.

Aehnliche Bemerkungen sind auch auf die Maschinen anwendbar, welche vermöge ihrer Beschaffenheit und der der Motoren und Widerstände nur eine periodisch constante oder permanente Bewegung annehmen können, d. h. von solcher Beschaffenheit, daß ihre Geschwindigkeit, obgleich sie innerhalb der Ausdehnung jedes Umganges veränderlich ist, doch für dieselben Lagen immer wieder dieselbe wird.

Vortheile der gleichförmigen Bewegung der Maschinen.

§. 31. Daß es von hoher Wichtigkeit ist, in jedem besondern Falle, wenn auch nicht in mathematischer Strenge, so doch so viel als möglich, die Bedingungen der Gleichförmigkeit der Bewegung der Maschinen zu erfüllen, springt am deutlichsten in die Augen, wenn man die Vortheile der gleichförmigen Bewegung mit den Nachtheilen der veränderlichen Bewegung in Parallele stellt.

In den Maschinen, welche eine gleichförmige Bewegung haben, und worin die Kräfte und Widerstände auf dieselbe Weise und mit derselben Intensität stetig wirken, theilen die verschiedenen Bestandtheile einander die Bewegung immer auf dieselbe Weise mit und bleiben stets mit einander in Berührung, ohne irgend einen nachtheiligen Stoß oder eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung zu erfahren, und da die Quantitäten der augenblicklichen, erhaltenen und mitgetheilten Arbeit jedes dieser Maschinentheile gleich und constant sind, oder jeden Augenblick für sie, wie für die ganze Maschine, das Gleichgewicht stattfindet; so sind wenigere Beschädigungen zu befürchten, und man kann in jedem Falle die auf sie wirkenden Kräfte, die Biegungen, welche sie erfahren und ihre kleinste Masse oder Stärke berechnen. Allein diese Vortheile sind noch nicht die wichtigsten der gleichförmigen Bewegung; denn, da es für jede bewegende Kraft eine Geschwindigkeit ihres Angriffspunctes gibt, für welche die Quantität ihrer Leistung ein Maximum wird (§. 25) und da die Qualität sowohl, als die Quantität des von dem Operator verfertigten Productes ebenfalls von seiner Geschwindigkeit und besonders von der Gleichförmigkeit dieser Geschwindigkeit abhängig ist (§. 26); so sieht man, daß es am vortheilhaftesten ist, wenn die äußersten Maschinenbestandtheile die jeder Art von bewegender Kraft und von Nutzarbeit entsprechende Geschwindigkeit haben und während der Bewegung sowohl, als die Zwischenbestandtheile unveränderlich bleiben.

Nachtheile der veränderlichen Bewegung, selbst wenn sie nach dem Gesetze der Stetigkeit erfolgt.

§. 32. In den Maschinen, deren Bewegung sich jeden Augenblick merklich, aber nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert, findet gerade das Gegentheil statt, abgesehen von den übrigen Nachtheilen, welche hier zuweilen vorkommen. So könnte es z. B. geschehen, daß die Bewegung auf keine Weise beginnen oder fortdauern könnte, weil wegen der intermittirenden Wirkung der bewegenden Kraft oder der verschiedenen Widerstände Augenblicke vorkommen könnten, für welche die letztern ihren größten und die erstern ihren kleinsten Werth erreicht hätten, so daß die lebendige Kraft der Maschine nicht hinreichend wäre, die Bewegung in diesen Lagen, welche die Practiker todte Puncte nennen, zu unterhalten, obgleich die Quantität der Leistung der bewegenden Kraft während eines Umganges der Maschine, welche, als zu einem gewissen Bewegungszustande gelangt, vorausgesetzt wird, der lebendigen Kraft aller Widerstände zusammengenommen gleich, oder sogar größer als diese wäre. Aber wenn man auch annimmt, daß die Bewegung der Maschine beginnen und fortdauern könnte, so folgt daraus noch nicht, daß die Maschine bei dieser veränderlichen Bewegung unter den vortheilhaftesten Bedingungen arbeitet, sondern daß die verschiedenen Bestandtheile derselben Stößen, Druck- und Zugkräften ausgesetzt sind, unter deren Wirkung sie sich schneller oder langsamer verändern, wodurch ein Theil der Leistung der bewegenden Kraft verloren geht (§. 18).

Mittel zur theilweisen Verbesserung der Nachtheile der veränderlichen Bewegung.

§. 33. Man sieht leicht ein, daß diese letzten Nachtheile, obgleich sie den im §. 24 angegebenen analog sind, dennoch weniger Bedeutung haben, weil der Spielraum an den verschiedenen Verbindungsstellen der Maschinentheile hier als sehr gering angenommen werden kann und weil wir zugleich voraussetzen, daß die Zeichnung und Einrichtung aller Maschinentheile dem Gesetze der Stetigkeit entspricht, so daß diejenigen Maschinentheile, welche eine alternative Bewegung haben, ihre Geschwindigkeit am Ende und im Anfange jeder Oscillation allmählig verlieren.

Um die Nachtheile genau beurtheilen zu können, welche in dem gegenwärtigen Falle stattfinden und denselben bei vorkommenden Gelegenheiten abzuhelfen, muß man erwägen, daß sie nur stattfinden, weil die bewegende Kraft entweder auf den ersten Maschinentheil oder Receptor bald in dem einen und bald in dem gerade entgegengesetzten Sinne wirkt, oder weil in der Maschine Gewichte oder Federn vorkommen, welche derselben bald in dem Sinne der Bewegung und bald in entgegengesetztem Sinne eine gewisse Geschwindigkeit zu ertheilen streben; denn der Maschinentheil, welcher einen andern fortschiebt, kann selbst fortgeschoben werden, und diese Maschinentheile können wegen des durchaus nöthigen Spielraumes abwechselnd in und außer Berührung mit einander kommen.

Nothwendigkeit, sich in gewissen Fällen von den Bedingungen der Gleichförmigkeit der Bewegung zu entfernen.

§. 34. Wegen dieser verschiedenen Nachtheile der veränderlichen Bewegung der Maschinen scheint es, daß man sie bei allen Anwendungen der Maschinen auf die Industrie vermeiden, und nur solche Mittel anwenden müßte, welche eine vollkommen gleichförmige Bewegung geben, was, wie wir gesehen haben, darauf hinausläuft, selbst für den Receptor und Operator nur solche Maschinentheile anzuwenden, welche eine stetige Rotationsbewegung annehmen, und jede unterbrechende Wirkung von Seiten der bewegenden Kraft und der Widerstände zu vermeiden. Dieses sucht man in der Praxis auch wirklich so viel als möglich zu erreichen, was bei mehreren wichtigen Maschinen bereits mit hinreichender Genauigkeit erreicht ist; allein es ist nicht zu erwarten, daß man denselben Zweck bei allen Maschinen erreichen wird. Die Natur der bewegenden Kraft und der zu verrichtenden Arbeit, und oft sogar Localverhältnisse, zu große Kosten u. s. w. verhindern es oft, diesen Zweck auf eine genügende Weise zu erreichen; aber wenigstens muß man in jedem besondern Falle dieses Ziel so viel als möglich zu erreichen suchen, indem man die eben angegebenen Hauptnachtheile der ungleichförmigen Bewegung vermeidet.

In der Wirklichkeit gibt es aber nur drei wesentlich verschiedene Ursachen der veränderlichen Bewegung der Maschinen, welche entweder in der unregelmäßigen Wirkung der bewegenden Kraft, oder des Nutzwiderstandes oder beider zugleich besteht. Es können also ebenfalls nur drei Fälle vorkommen, wo man genöthigt ist, Maschinentheile mit einer alternativen Bewegung anzuwenden, und in diesen drei Fällen muß man die unnütze Vervielfältigung der Maschinentheile zu vermeiden suchen. 1) Wenn z. B. der Receptor eine alternative und der Operator eine stetige gleichförmige Bewegung haben muß, so verwandelt man die erste Bewegung vermittelst Kurbeln, excentrischen Scheiben, u. s. w. in eine ähnliche Bewegung wie die zweite, und alle Zwischentheile der Maschine sind alsdann Räder, Riemen, 2c. mit einer continuirlichen Bewegung. Ebenso verfährt man, wenn 2) im Gegentheil der Receptor eine gleichförmige stetige Bewegung, und der Operator eine alternative Bewegung haben muß. 3) Aber wenn der Operator und Receptor beide zugleich eine alternative Bewegung haben müssen, so ist zunächst zu untersuchen, ob man beide unmittelbar auf einander einwirken lassen kann, ohne irgend welche Zwischentheile der Maschine, so daß die Oscillationen und Abwechselungen der Wirkung vollkommen zusammenfallen und die Geschwindigkeit, so wie der Druck am Ende und im Anfange jeder derselben allmählig erlöschen; denn alsdann kann kein merklicher Verlust an Effect stattfinden und die Maschine arbeitet fast ebenso vortheilhaft, als wenn sie eine gleichförmige Bewegung hätte. Dieses geschieht aber selten und fast immer sieht man sich genöthigt, von Verbindungstheilen Gebrauch zu machen, welchen man, wenn es die Umstände erfordern und zur Regulirung der Wirkung vortheilhaft ist, eine stetige Rotationsbewegung in demselben Sinne gibt.

Allgemeine Mittel zur Regulirung der Bewegung der Maschinen.

§. 35. Setzen wir also den Fall, wo alle Maschinentheile eine alternative Bewegung haben, bei Seite, so haben wir uns nur noch mit den drei übrigen Fällen zu beschäftigen, wozu man auch noch den Fall rechnen kann, in welchem alle beweglichen Maschinentheile eine stetige Rotationsbewegung haben, obgleich die Kraft oder der Widerstand auf den ersten und letzten Maschinentheil intermittirend oder ver=

änderlich wirken. In allen diesen Fällen, aber besonders in dem Falle, wo es vortheilhaft ist, daß einer dieser äußern Maschinenbestandtheile eine gleichförmige Bewegung habe (§. 31), scheint es zweckmäßig zu sein, die Bewegung der Maschine so viel als möglich zu reguliren, und aus dem Vorhergehenden ergeben sich leicht die Hauptmittel zur Erreichung dieses Zweckes: 1) Man zeichnet die Maschinentheile, durch welche die stetige Rotationsbewegung von einem Theile auf einen andern übertragen wird, so, daß die geometrische Geschwindigkeit ein gegebenes Verhältniß behält, worin das Problem der Construction der Räder, in seiner größten Allgemeinheit betrachtet, besteht. 2) Die Räder werden genau centrirt (§. 22), was zugleich den Vortheil gewährt, daß die Wirkung der Centrifugalkraft oder der daraus entspringende Druck auf die Axen aufgehoben wird. 3) Auch bringt man die Gewichte der Maschinentheile, welche eine alternative Bewegung haben, ins Gleichgewicht, oder man benutzt dieses Gewicht, wenn es möglich ist, zur Regulirung der Wirkung der Kraft und des Widerstandes in jeder Lage des Systemes. 4) Man vermindert so viel als möglich die Geschwindigkeit, die Amplitude der Bewegung und die Masse dieser Maschinentheile, d. h. soweit es die Dauerhaftigkeit der Maschine gestattet. 5) Endlich regulirt man die Wirkung der bewegenden Kraft oder des Widerstandes durch Gegengewichte oder durch jede andere Vorrichtung, welche sich in jedem besondern Falle leicht aus einer nähern Untersuchung ergibt. Wenn z. B. der Effect der einen oder andern dieser Kräfte aus mehreren gleichen, einzelnen und bei demselben Umlaufe der Maschine mehrere Male wiederholten Effecten besteht, so ist es zweckmäßig, sie so zu vertheilen, daß sie nach regelmäßigen Intervallen auf einander folgen, oder daß die größten Effecte der einen Kraft mit den schwächsten der andern zu gleicher Zeit stattfinden, u. s. f.

Nachdem alle diese Mittel zur Beseitigung der Unregelmäßigkeit der Wirkung benutzt sind, bleibt noch ein letztes Hilfsmittel übrig, wovon wir nun reden wollen, weil es sich an die allgemeinen Gesetze der Bewegung der Maschinen anschließt.

Einfluß der Maschinentheile, welche eine alternative Bewegung haben, und besondere Mittel, denselben zu vermindern oder zu verbessern.

§. 36. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit allgemein mit ω, so wird die lebendige Kraft des betreffenden Maschinentheiles ausgedrückt durch:

$$\int dm v^2 = \int dm \omega^2 r^2 = \omega^2 \int r^2 dm,$$

wo r die Entfernung eines beliebigen materiellen Bestandtheilchens dm von der Axe und $\int r^2 dm$ das Trägheitsmoment dieses Maschinentheiles bezeichnet. Die ganze lebendige Kraft der ähnlichen Maschinentheile in einem gegebenen Augenblicke und überhaupt für alle Theile der Maschine, deren Geschwindigkeiten in gegebenen Verhältnissen stehen (§. 29), kann folglich ausgedrückt werden durch $A\omega^2$, wo A eine Constante ist, welche von den Verhältnissen der Rotationsgeschwindigkeiten und der Trägheitsmomente der fraglichen Maschinentheile abhängt. Was die Summe der lebendigen Kräfte der Maschinentheile anlangt, welche eine alternative Bewegung haben, so wollen wir sie wieder allgemein durch mv^2 ausdrücken, so daß wir vermöge der Gleichungen in §. 27 zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω für jeden Augenblick folgende Gleichungen haben:

$$A\omega^2 = 2\left(Ff - Qq - etc. - \frac{mv^2}{2}\right),$$

$$A\omega d\omega = Fdf - Qdq - etc. - mvdv.$$

Da die Wirkung der Maschinentheile, welche eine alternative Bewegung haben, also bloß darin besteht, daß die augenblickliche Leistung der Kräfte Fdf um eine veränderliche Größe $mvdv$ vermindert wird, so kann man diese Wirkung durch die einer Kraft $\varphi = m\frac{dv}{dt}$ darstellen, welche nichts anders ist, als die allgemeine Resultante der Tangentialträgheitskräfte dieser Maschinentheile (§. 14), und diese Kraft, deren augenblickliche Quantität der Leistung, abgesehen vom Zeichen, $= - mvdv = \varphi de$ ist, mit zu denen zählen, welche wirklich auf die Maschine wirken und von der Trägheit verschieden sind.

Uebrigens sieht man leicht ein, daß, da die Geschwindigkeit v der fraglichen Maschinentheile am Ende und im Anfange der Oscillationen eines jeden derselben Null wird, dasselbe mit der ihrer Trägheit entsprechenden Quantität der Arbeit φde oder mv^2 der Fall ist, was voraussetzt, daß φde bald positiv und bald negativ ist, oder daß die Kraft φ für einen und denselben Maschinentheil bei jeder halben Oscillation gleiche Quantitäten Arbeit restituirt und destruirt, wodurch also der Nutzeffect der Maschine auf keine Weise verändert wird. Diese Kraft kann also in dieser Beziehung hinsichtlich ihrer Wirkung auf die Maschinentheile mit einer alternativen Bewegung, als der Schwere ähnlich, betrachtet werden (§. 22), so daß die Mittel zur Verbesserung ihres Einflusses ganz ähnliche sind. Man kann also außer den in §. 35 bereits angeführten Mitteln der Masse dieser Maschinentheile andere Massen, welche eine gerade entgegengesetzte oscillatorische Bewegung haben, entgegenwirken lassen, so daß der Zuwachs $2mvdv$ ihrer lebendigen Kraft jeden Augenblick dem für die fraglichen Maschinentheile gleich und von entgegengesetztem Zeichen ist. Auch kann man die Perioden der Bewegung dieser Maschinentheile so einrichten, daß die Kraft φ, welche ihren Effect darstellt, die Unregelmäßigkeit der Wirkung der Kräfte und Widerstände zum Theil aufhebt. Allein diese verschiedenen Mittel lassen sich selten mit Einfachheit anwenden, obgleich man sie in jedem besonderen Falle zu benutzen suchen muß, und man zieht es daher im Allgemeinen vor, die Trägheit einiger rotirender Maschinentheile nach den sogleich zu erörternden Principien zu vermehren.

§. 37. Durch ähnliche Betrachtungen, wie die im §. 28 angestellten, ergibt sich aus den obigen Gleichungen: 1) daß, wenn eine Maschine von der Ruhe ausgegangen ist, die Geschwindigkeit ω, welche sie nach Verlauf einer gewissen Zeit erlangt hat, desto größer ist, je beträchtlicher die Quantität der Arbeit der verschiedenen auf sie wirkenden Kräfte ist, und daß die Größe A, welche sich bloß auf die Trägheitsmomente und auf die constanten geometrischen Geschwindigkeiten der rotirenden Maschinentheile bezieht, im Gegentheil desto kleiner ist; 2) daß der augenblickliche Zuwachs $d\omega$ der Rotationsgeschwindigkeit in einem beliebigen Momente der Bewegung der in demselben Augenblicke ertheilten momentanen Arbeit direct und der erlangten Geschwindigkeit ω, so wie der constanten Größe A umgekehrt proportional ist. Die Geschwindigkeit ω würde also bei jedem Umgange der Maschine fortwährend zunehmen, wenn, wie bereits im §. 28 erklärt worden, die Summe der lebendigen Kräfte derselben nicht bald, wenigstens nahezu, eine absolute Grenze erreichte, welche sie nach der Natur der bewegenden Kräfte und der Widerstände nicht überschreiten kann. Wenn die Maschine diesen Zustand der fast gleichförmigen Bewegung erreicht hat, so kann sich die lebendige Kraft $A\omega^2$ und die Geschwindigkeit ω sowohl während desselben Umlaufes, als bei dem Uebergange von einem Umlaufe zum andern nur noch zwischen mehr oder weniger engen Grenzen ändern, welche sich auf die Veränderungen der Quantität der Gesammtwirkung $Ff - Qq - etc.$, welche während dieser Umgänge der Maschine hervorgebracht sind, beziehen. Diese verschiedenen Größen erreichen also successive und gleichzeitig einen größten und einen kleinsten Werth, wo für jeden zwischen allen in Betracht kommenden Kräften das Gleichgewicht stattfindet (§. 36), weil

$$A\omega d\omega = Fdf - Qdq - Rdr \pm PdH - mvdv = 0$$

ist. Von welcher Beschaffenheit das Gesetz aber auch sein mag, wonach sich die absolute Intensität dieser Kräfte ändert, wofern es nur kein völlig unregelmäßiges ist, und man durch Rechnung oder Beobachtung die Quantität der zwischen zwei Augenblicken, worin die Geschwindigkeit ω für denselben Umlauf oder für mehrere successive Umläufe ihren größten und kleinsten absoluten Werth erreicht, ertheilten Arbeit bestimmen kann; so wird man die Bewegung der rotirenden Maschinentheile doch immer der Gleichförmigkeit beliebig nahe bringen können.

Allgemeines Mittel zur Regulirung der Bewegung der Maschinen.

§. 38. Zur Regulirung der Bewegung der Maschinen bringt man an einer der Rotationsaxen ein Rad, oder einen Ring an, welcher eine große Geschwindigkeit annimmt und Schwungrad genannt wird, welches vermöge seiner Trägheit gewissermaßen den Ueberschuß der Arbeit der bewegenden Kraft absorbirt oder in sich aufnimmt, und denselben in lebendige Kraft verwandelt, wenn sich die Bewegung beschleunigt; aber diesen Ueberschuß nach einem den Widerständen entgegengesetzten Sinne wirken läßt, sobald sich die Bewegung verzögert oder die lebendige Kraft vermindert. Nach dem Vorhergehenden läßt sich leicht beurtheilen, welche Rolle ein solcher Maschinentheil spielt, und nach welchen Regeln derselbe construirt werden muß.

Denn bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle des Schwungrades und r die Entfernung eines beliebigen Massentheilchens dm desselben von der Rotationsaxe, so wird die lebendige Kraft dieses Theilchens dm ausgedrückt durch:

$$dm \,.\, \omega^2 r^2,$$

und die aller Massentheilchen des Schwungrades durch:

$$\omega^2 \int r^2 dm,$$

wo $\int r^2 dm$ das Trägheitsmoment der ganzen Masse des Schwungrades ist.

Nimmt man ferner ω für die Geschwindigkeit, auf welche sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Theile des Systemes beziehen, und welche in §. 25 mit u bezeichnet ist; so verwandelt sich unsere Fundamentalgleichung, wenn das Glied der lebendigen Kräfte des in Rede stehenden Schwungrades allein gesetzt wird, in:

$$\int r^2 dm\,(\omega^2 - \omega'^2) = \omega'^2 Sdm\,(\varphi e')^2 - \omega^2 Sdm\,(\varphi e)^2$$
$$+ 2\Sigma \int F df - 2\Sigma \int R dr - 2\Sigma \int Q dq.$$

Nach dem weiter oben Gesagten kann man im Allgemeinen vermöge der Constitution der Maschinen die Werthe von ω für jede der successiven Lagen des Systemes berechnen, und durch eine vorläufige Untersuchung ergeben sich auch diejenigen dieser Lagen, welche sich auf den größten und kleinsten der Werthe beziehen, die ω bei demselben Umgange der Maschine oder nach mehreren successiven Umgängen, nach deren Ablauf die Geschwindigkeit der Voraussetzung gemäß wieder dieselbe wird, annehmen kann. Ferner wollen wir annehmen, daß ω dieser größte und ω' der kleinste Werth ist, und das Trägheitsmoment des Schwungrades wollen wir durch A bezeichnen, wo, wenn man will, die Größe A auch die Trägheitsmomente aller Maschinentheile mit in sich begreift, welche eine gleichförmige Bewegung annehmen können, und deren Geschwindigkeit zu ω in einem constanten Verhältnisse steht, so daß φe für alle Lagen dieser Maschinentheile $= \varphi e'$ ist; so hat man, wenn man endlich:

$$\Sigma \int dm\,(\varphi e)^2 = B,\ \Sigma \int dm\,(\varphi e')^2 = B',$$
$$\Sigma \int F df - \Sigma \int R dr - \Sigma \int Q dq = S$$

setzt, wo sich die Werthe dieser Functionen zwischen den Grenzen ω und ω' nach der Voraussetzung berechnen lassen, die Relation:

$$(A + B)\,\omega^2 - (A + B')\,\omega'^2 = 2S,$$

vermittelst welcher man die Größe A immer so bestimmen kann, daß der Unterschied $\omega - \omega'$ zwischen der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades ein beliebig kleiner Bruch n der mittlern Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega + \omega'}{2}$ wird.

Denn setzt man:

$$\omega - \omega' = d,\ \frac{\omega + \omega'}{2} = \Omega,$$

folglich:
$$\omega = \Omega + \frac{d}{2},\ \omega' = \Omega - \frac{d}{2},$$

so gibt die obige Gleichung:

$$(A+B)\left(2 + \frac{d}{\Omega}\right)^2 - (A + B')\left(2 - \frac{d}{\Omega}\right)^2 = \frac{8S}{\Omega^2},$$

und folglich:
$$A = \frac{S}{n\Omega^2} - B\,\frac{(2+n)^2}{8n} + B'\,\frac{(2-n)^2}{8n};$$

so daß man den Werth von A oder des Trägheitsmomentes des Schwungrades jedesmal berechnen kann, wenn $n = \frac{d}{\Omega}$ und die mittlere Winkelgeschwindigkeit Ω gegeben sind.

Aus diesem letzten Ausdrucke geht ferner hervor, daß man, wenn man den Werth von A und folglich die Dimensionen des Schwungrades und sein Gewicht, welche immer eine Zunahme der schädlichen Widerstände veranlassen, so viel als möglich vermindern will, 1) die mittlere Winkelgeschwindigkeit entsprechend vergrößern muß. 2) Muß man die Größen B und B', welche den Trägheitsmomenten analog sind und sich auf die Massen der Maschinentheile beziehen, welche eine oscillatorische oder alternative Bewegung haben, so viel vermindern, als es die Dauerhaftigkeit und Constitution der Maschine gestattet. 3) Auch muß man den Unterschied S zwischen den Quantitäten der Arbeit für das Intervall, worin die Winkelgeschwindigkeit ω ihren größten und kleinsten Werth erreicht, durch eine schickliche Vertheilung und gehörige Einrichtung der Wirkungsart der Kräfte zu vermindern suchen.

Was den größten Werth anlangt, welchen man der Größe $n = \frac{2(\omega - \omega')}{\omega + \omega'}$ beilegen kann, ohne daß die Bewegung aufhört, periodisch oder selbst möglich zu sein, so entspricht derselbe offenbar dem Falle, für welchen $\omega' = 0$ und $n = 2$ ist; denn man kann ω' nicht negativ annehmen, wenn sich die Maschine fortwährend nach demselben Sinne bewegen muß.

n =

Theorie und Eigenschaften der Schwungräder. — Allgemeine Bedingungen ihrer Construction.

§. 39. Um also die Bewegung einer Maschine der Gleichförmigkeit so nahe zu bringen, als man wünscht, ist es nicht nöthig, zugleich die Geschwindigkeit und das Trägheitsmoment aller Maschinentheile zu vergrößern, was mit großen Nachtheilen verbunden sein und eine Vergrößerung der passiven Widerstände zur Folge haben würde, sondern man begnügt sich, dieses bei einem der rotirenden Maschinentheile zu thun, welchen man Schwungrad nennt, und so nahe als möglich bei der Kraft, deren Wirkung man reguliren will, an einer Welle mit einer großen Rotationsgeschwindigkeit anbringt (§. 33). Zuweilen wendet man auch zwei Schwungräder an, wenn die bewegende Kraft und der Widerstand zu gleicher Zeit unregelmäßig wirken, und jedes dieser Schwungräder ist alsdann dazu bestimmt, die Wirkung der ihm zunächst liegenden Kraft gleichförmig zu machen. In jedem Falle muß das Schwungrad die Geschwindigkeit seiner Welle unabhängig von der Trägheit der rotirenden Maschinentheile, welche sich nicht direct zwischen dem Schwungrade und der Kraft befinden, deren Wirkung regulirt werden soll, gleichförmig machen, durch welche Bedingung übrigens das Problem der Aufstellung der Schwungräder vereinfacht wird.

Da durch das Gewicht der Schwungräder eine Zunahme der Reibung in den Zapfenlagern veranlaßt wird, so muß man sie so leicht als möglich machen, wobei sie aber die gehörige Energie behalten müssen, welche ihrer lebendigen Kraft $\omega^2 \int r^2 dm$ proportional ist (§. 36).

Diesen Zweck erreicht man, wenn man die Schwungräder aus einer sehr dichten Masse verfertigt und diese Masse in eine gewisse Entfernung von der Rotationsaxe bringt.

Es ist hier nicht der Ort, in Beziehung auf die Construction und Berechnung der Schwungräder in alle Einzelheiten einzugehen und wir beschränken uns daher auf die Bemerkung, daß nach dem eben Gesagten die Function der Schwungräder darin besteht, einen gewissen Theil der Leistung der bewegenden Kraft in sich aufzunehmen und in lebendige Kraft zu verwandeln, wenn die Intensität der Kräfte die aller Widerstände übertrifft; oder wenn die Geschwindigkeit zunimmt, und im Gegentheil diese lebendige Kraft in eine den Widerständen entgegenwirkende Arbeit zu verwandeln und diese gleichsam wieder abzugeben, wenn sich die Bewegung in Folge des Uebergewichtes der Intensität der Widerstände über die der Kräfte verzögert. Dieses sind die Eigenschaften der Schwungräder, in Folge welcher man sie wohl zuweilen **Behälter der lebendigen Kraft oder der Arbeit** genannt hat, und welche besonders von Wichtigkeit sind, wenn wegen der Unregelmäßigkeit der Bewegung Verluste an Arbeit oder irgend welche andere Nachtheile stattfinden könnten (§. 32 und 33). Aber man darf auch nicht vergessen, daß durch die Anbringung eines Schwungrades in der Maschine neue Widerstände und Verluste an lebendiger Kraft entstehen (§. 26), weshalb sie in vielen Fällen nicht angewandt werden können. So würde z. B. die Anwendung eines Schwungrades, oder überhaupt jede Vermehrung der Trägheitsmomente über eine gewisse durchaus erforderliche Größe hinaus in den Maschinen, welche schon an und für sich eine hinreichend gleichförmige Bewegung haben, so wie in denen, welche oft plötzlich stehen bleiben müssen, und überhaupt bei allen den Maschinen, wo eine unveränderliche Geschwindigkeit nachtheilig und selbst gefährlich wäre, mehr schädlich als nützlich sein.

Nothwendigkeit und Zweckmäßigkeit, die Bewegung der Maschinen ohne Anwendung des Schwungrades so viel als möglich gleichförmig zu machen.

§. 40. Aus dieser Untersuchung sieht man, wie wichtig es ist, die Wirkung der Kräfte unabhängig von einem Schwungrade so viel als möglich zu reguliren, selbst wenn man zuletzt auch genöthigt wäre, ein Schwungrad anzuwenden. Denn da der Werth der Größe S, welche in der Gleichung in §. 38 vorkommen muß, alsdann sehr klein ist, so braucht man diesem Schwungrade nicht zu große Dimensionen und Geschwindigkeiten zu geben, als in der entgegengesetzten Voraussetzung erforderlich wären. Wir haben in dem Vorhergehenden einige der allgemeinen Mittel zur Erreichung des in Rede stehenden Zweckes angegeben, und es können sich in jedem besondern Falle auch noch andere darbieten; aber die wichtigste Bedingung besteht darin, die absolute Intensität der Kraft und des Nutzwiderstandes so zu reguliren, daß die Quantitäten der Arbeit, welche sie in der, in einen gegebenen Bewegungszustand gelangten Maschine hervorbringen, für jeden Umgang, oder wenigstens für jede zwei oder drei Umgänge beständig einander gleich sind, damit die Größe S keine zu großen Werthe bekommt, oder damit die lebendige Kraft und die Geschwindigkeit, wenn sie nicht constant sein können, wenigstens zwischen festen Grenzen eingeschlossen bleiben und nach Verlauf einer gegebenen Zeit periodisch wieder dieselben Werthe bekommen.

Da sich die Mittel, welche man zur Erreichung dieses Zweckes anwendet, an das Problem der Aufstellung der Maschinen anschließen, so glauben wir, die Hauptbedingungen hier kurz anführen und den Weg bezeichnen zu müssen, welchen man gewöhnlich in der Praxis einschlägt, um die in Rede stehende Aufgabe, wenn auch nicht in aller Schärfe, so doch wenigstens mit einer hinreichenden Annäherung, zu lösen, und hiermit wollen wir diese allgemeinen Betrachtungen über die Maschinen schließen.

Ueber die Einrichtung der technischen Maschinen.

Das Problem der besten Einrichtung der Maschinen läßt sich nicht in völliger Allgemeinheit und Strenge lösen, sondern muß in mehrere andere zerlegt werden.

§. 41. Wir haben schon bemerkt, daß die wesentlichen Bedingungen einer zweckmäßigen Einrichtung der Maschinen darin besteht, den Nutzeffect oder die Quantität des verfertigten Productes zu einem Maximum und den Aufwand an bewegender Kraft und Geld zu einem Minimum zu machen, so daß die Einheit des verfertigten Productes jeder Art zu dem niedrigsten Preise geliefert werden kann. Um diese Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit zu lösen, müßte man im Stande sein, alle Elemente, wovon sie abhängig ist, in den Relationen, wodurch der Nutzeffect mit der Leistung der bewegenden Kraft, ꝛc. verbunden ist, gleichzeitig sich ändern zu lassen. Aber wenn man auch von dem Preise der verfertigten Waare, welcher mit der Zeit und den Orten verschieden ist, abstrahirt, so kann man das Problem der Einrichtung der technischen Maschinen doch noch nicht ganz umfassen, sondern man begnügt sich, dasselbe in mehrere andere, einzeln zu behandelnde zu zerlegen, indem man z. B. successive die Wirkung der bewegenden Kräfte auf die Receptoren, die der Operatoren auf die zu bearbeitende oder zu bewegende Masse, ꝛc. untersucht, worauf man alsdann die Maschinentheile betrachtet, welche bloß zur Fortpflanzung oder Uebertragung der Bewegung dienen.

Die Erfahrung und Rechnung haben gelehrt, daß diese letzten Maschinentheile in allen gut construirten Maschinen, und worin sie nicht in zu großer Anzahl vorhanden sind, im Allgemeinen auf die Quantität der durch sie übertragenen Wirkung nur einen geringen Einfluß haben, kurz, die Quantität der durch die passiven Widerstände dieser übertragenden Maschinentheile absorbirten Quantität Arbeit ist gewöhnlich nur ein ziemlich kleiner Theil derjenigen Arbeit, welche sie von dem Receptor der Maschine erhalten. Nicht so verhält es sich mit den Verlusten an Arbeit, welche an dem Receptor und Operator stattfinden; denn diese bilden, wie wir sehen werden, immer einen beträchtlichen Theil der absoluten mechanischen Leistung der bewegenden Kraft, weswegen bei der Anlage einer Maschine die Wahl dieser beiden äußersten Bestandtheile derselben am wichtigsten ist, und da die Art der zu verrichtenden Arbeit immer bestimmt ist, so schreitet man zunächst zu der Wahl des Operators.

Wahl des Operators und Receptors der Maschinen. — Wesentliche Eigenschaften derselben.

§. 42. Da der Operator und Receptor als wirkliche Maschinen betrachtet werden müssen, auf welche eine Kraft und Widerstände wirken; so ist alles, was wir über Maschinen im Allgemeinen gesagt haben, unmittelbar auch auf sie anwendbar. Wenn man also den Preis dieser beiden Maschinentheile bei Seite setzt, welcher selten in Betracht gezogen werden darf, weil er immer nur einen ziemlich kleinen Theil von dem Kostenaufwande beträgt, welchen die bewegende Kraft während einer längern Zeit verursacht, so kann man zum Voraus die wesentlichen Bedingungen ihrer Einrichtung fixiren und in Ermangelung directer Beobachtungen die getroffene Wahl motiviren. Wir haben z. B. schon bemerkt, daß der beste Operator und der beste Receptor derjenige ist, für welchen die Kraft und der Widerstand stetig, gleichförmig und ohne Stöße wirkt, was besonders bei denjenigen Maschinentheilen der Fall ist, welche eine gleichförmige Rotationsbewegung um eine feste Axe haben. Für den Receptor ist außerdem erforderlich, daß die ganze in einer gegebenen Zeit von der bewegenden Kraft hervorgebrachte Quantität Arbeit vollständig absorbirt wird, und der Operator muß so beschaffen sein, daß er einen möglichst geringen Abfall der zu bearbeitenden Masse gibt und daß das Product den gewünschten Grad von Vollkommenheit besitzt, u. s. f.

Wenn auf den Operator und Receptor keine passiven Widerstände wirkten, so würden sie nach den vorhergehenden Bedingungen die ganze von der bewegenden Kraft auf sie ausgeübte Quantität Wirkung auf die vortheilhafteste Weise nutzbar machen, oder sie würden das absolute Maximum des Nutzeffectes hervorbringen. Allein in der Praxis verhält sich dieses niemals so, und man ist, wie bereits früher bemerkt worden (§. 34), sogar oft genöthigt, auf die Bedingungen der Gleichförmigkeit der Bewegung u. s. f. zu verzichten, so daß man, wenn der Operator und Receptor das absolute Maximum des Nutzeffectes nicht hervorbringen können, sich mit einem relativen Maximum desselben begnügen muß. Denn von welcher Beschaffenheit ein solcher Maschinentheil auch sein mag, so haben nach dem bereits früher Bemerkten (§. 26) seine Dimensionen, seine Form und seine Geschwindigkeit doch einen merklichen Einfluß auf die mitgetheilte Arbeit, so daß man in jedem besondern Falle die vortheilhaftesten Combinationen zu bestimmen hat. Die Erfahrung und Rechnung haben bereits auf einige werthvolle Resultate in Beziehung auf die verschiedenen Receptoren geführt; allein für die Operatoren bleibt noch viel zu thun übrig.

Allgemeine Begriffe von der Art und Weise, wie man bei der Anlage von Maschinen verfährt. — Mittel zur Regulirung der Arbeit des Operators.

§. 43. Wenn man für jede bewegende Kraft, jeden Receptor und jeden Operator die Bedingungen des größten Nutzeffectes und das

Verhältniß der mitgetheilten Quantität Arbeit zu der absoluten Quantität Arbeit kännte, so wäre man im Stande, wenn man diese Data mit den nicht in die Mechanik gehörenden combinirte, den Receptor und Operator zu bestimmen, welcher in jedem besondern Falle, und für jede Localität am vortheilhaftesten ist, und die Anlage von Maschinen würde keine großen Schwierigkeiten darbieten. Denn wenn die Geschwindigkeit, die Form und die relativen Dimensionen, welche dieser erste und letzte Maschinentheil haben muß, bestimmt sind, so ist die Wahl der mittlern oder übertragenden Maschinentheile, so wie das Verhältniß der Größe, Lage und Bewegung auch fast völlig bestimmt, weil man die vorhergehenden allgemeinen Vorschriften und die verschiedenen Transformationsarten der Bewegung dabei zur Richtschnur nehmen müßte. Es bliebe alsdann noch die Wirkung der bewegenden Kraft und des Nutzwiderstandes zu reguliren, d. h. die Effecte und die Arbeit in ein solches Verhältniß zu bringen, daß, wo möglich, eine fortdauernde und gleichförmige Bewegung erzielt würde (§. 40).

Es muß vorausgesetzt werden, daß die Quantität der zu bearbeitenden Masse oder der in einer gegebenen Zeit zu verfertigenden Waare bekannt sei, sowohl als die Anzahl der Umläufe der Maschine, und es kommt alsdann darauf an, den Verlauf der Operationen und die Leistung der bewegenden Kraft gehörig zu reguliren. Die wesentlichste hier zu erfüllende Bedingung besteht darin, die Sache so einzurichten, daß gleiche Quantitäten der zu bearbeitenden Masse vor den Operator gebracht werden, wenn auch nicht jeden Augenblick und auf eine stetige Weise, was nur bei rotirenden Operatoren angeht, so doch wenigstens bei jedem der verschiedenen Umgänge der Maschine. Denn wenn man auf den Operator eine Kraft wirken läßt, welche alle mit demselben verbundenen Widerstände zu überwinden im Stande ist, so muß sie, wenn auch nicht jeden Augenblick, so doch bei jedem Umlaufe der Maschine gleiche Quantitäten Arbeit hervorbringen, so daß die Veränderungen der Geschwindigkeit selbst zwischen enge und feste Grenzen eingeschlossen bleiben.

Diese Bedingungen werden bei allen guten Maschinen durch besonders angestellte Wärter, oder durch besondere Vorrichtungen an dem Operator selbst, welche die vor denselben gebrachte unmittelbar zu verarbeitende Masse der Geschwindigkeit oder der Intensität der bewegenden Kraft proportional abändern, erfüllt. Der Rüttler der Getraidemühlen, der Geisfuß der Sägemühlen rc. sind wirkliche Regulatoren dieser Art.

Mittel zur Berechnung und Regulirung der Quantitäten Arbeit der bewegenden Kraft.

§. 44. Es geschieht jedoch zuweilen, daß man die Wirkung des Operators nicht auf diese Weise reguliren kann, weil entweder durch die Veränderung des zu verarbeitenden Stoffes mehr oder weniger häufige und länger oder kürzer dauernde Unterbrechungen veranlaßt werden, oder weil der Widerstand des zu verarbeitenden Stoffes selbst veränderlich ist. Aber alsdann muß man die Unregelmäßigkeiten wenigstens in hinreichend enge Grenzen einzuschließen suchen, und zwar so, daß sich die in jeder Zeiteinheit zu verbrauchende Quantität Arbeit nicht zu sehr von dem aus einer gewissen Anzahl von Umgängen des Operators abgeleiteten mittlern Werthe entfernt.

In allen den Fällen, wo mit dieser Ungleichheit der Wirkung beträchtliche Nachtheile für die Maschine verbunden sind, wendet man, wie bereits früher bemerkt worden (§. 39), ein Schwungrad an, welches man so nahe als möglich bei dem Operator anbringt, und welches vermöge seiner Trägheit die Gleichförmigkeit der Bewegung der Welle, woran es sich befindet, bewirkt, wofern die bewegende Kraft, welche nach der Voraussetzung in tangentialer Richtung an dem Umfange des Rades wirkt (§. 34 und 35), welches die Bewegung zunächst erhält und sich an derselben Welle befindet, in jeder Zeiteinheit Quantitäten Arbeit hervorbringt, welche der oben erwähnten mittlern Quantität Arbeit gleich sind, welche letztere als durch Rechnung oder Beobachtung gegeben vorausgesetzt wird, sowohl als die fast constante Geschwindigkeit des Angriffspunctes der bewegenden Kraft. Dividirt man folglich diese Quantität Arbeit durch diese Geschwindigkeit, d. h. durch den gleichförmig beschriebenen Weg des ebenerwähnten Angriffspunctes, so erhält man auch den mittlern Werth der Wirkung, welche die Kraft zur Ueberwindung aller ihr entgegenwirkender Widerstände ausüben muß, welcher mittlere Werth sich im Allgemeinen wenig von dem wahren Werthe entfernt, und welchen man bei allen Berechnungen über die Bestimmung des Effectes der Maschine dafür substituiren kann (§. 9).

Wenn man nun die verschiedenen Maschinentheile zwischen dem Receptor und Operator nacheinander betrachtet, welche nach der Voraussetzung alle eine fast gleichförmige Rotationsbewegung haben, wobei der Einfluß der Trägheit unberücksichtigt bleiben kann, so daß die Kräfte und Widerstände an diesen Theilen einander stets das Gleichgewicht halten (§. 29), so lassen sich die mittlern Intensitäten der fraglichen Kräfte, und folglich die Quantität Arbeit, welche der Receptor bei jedem Umgange oder in jeder Zeiteinheit erhalten muß, um alle Widerstände zugleich überwinden zu können, leicht allmählig nach später auseinander zu setzenden Theorien berechnen, wenn die Gleichförmigkeit der Bewegung vermittelst eines neuen Schwungrades hergestellt ist, wofern dieses nöthig war (§. 40). Wenn also endlich die Theorie der Receptoren und Motoren als aufgestellt angenommen wird, so kann man die absolute Quantität Arbeit bestimmen, welche der Beweger in jeder Zeiteinheit oder bei jedem Umgange der Maschine hervorbringen muß, und es kommt alsdann bloß noch darauf an, seine Intensität der Wirkung zu reguliren, welches durch ähnliche Mittel geschieht, wie die, welche zur Regulirung der Arbeit des Operators selbst dienen, z. B. indem man die Schütze gehörig aufzieht, welche dem Wasserrade das Wasser liefert, oder den Hahn gehörig öffnet, durch welchen die Cylinder der Dampfmaschinen den Dampf erhalten, ꝛc. Diese Operationen werden auch hier durch Maschinenwärter verrichtet, und zuweilen wendet man besondere Vorrichtungen an, damit die Intensität der bewegenden Kraft den Veränderungen des Widerstandes von selbst folgt und die Bewegung gleichförmig erhalten wird. Hierher gehört insbesondere das conische Pendel oder der Centrifugalregulator, dessen Theorie wir in dem folgenden Abschnitte mittheilen werden.

Diese Berechnung ist überflüssig, wenn die Maschine bereits construirt ist.

§. 45. Aus dieser Untersuchung geht hervor, daß man die absolute Kraft des Bewegers bestimmen und gehörig reguliren kann, wenn die auf den Operator zu übertragende Quantität Arbeit gegeben ist; allein diese Bestimmung ist nur bei dem Entwurfe zu einer Maschinenanlage von Nutzen; denn wenn die Maschine bereits construirt ist, und es bloß darauf ankommt, sie in Bewegung zu setzen, so kann man ihre Arbeit und Geschwindigkeit leicht durch Probiren reguliren, indem man den Nutzwiderstand oder die Intensität der bewegenden Kraft durch die angegebenen Mittel abändert. Wenn übrigens umgekehrt die absolute Quantität Arbeit gegeben wäre, welche die bewegende Kraft in der Zeiteinheit hervorbringen kann, so müßte man auf eine ganz ähnliche Weise verfahren, um die Quantität Arbeit (Waare) zu bestimmen, welche der Operator verfertigen kann und muß.

Die vorhergehende Auflösung ist für die Praxis hinreichend.

§. 46. Die im Vorhergehenden in der Kürze mitgetheilte Auflösung des Problemes der Aufstellung der Maschinen ist, wie man sieht, nur eine genäherte; allein auf jedem andern Wege würde diese Auflösung wegen der Menge der unbestimmten Elemente, wovon sie abhängt, unmöglich sein, und sie ist auch für die Praxis hinreichend genau, weil man in dieser keine mathematische Strenge würde verlangen können, und wo schon das gesuchte Resultat eine seltene Genauigkeit hat, wenn man es bis auf $^1/_3$ oder $^1/_4$ genau kennt, und oft geschieht es sogar, daß unwissende Maschinenbauer Maschinen construiren, für welche der erhaltene Nutzeffect kaum $^1/_5$ und zuweilen sogar kaum $^1/_{10}$ von dem beträgt, welchen man bei einer zweckmäßigern Einrichtung der Maschine hätte erwarten können.

Wenn wir uns bei diesem Gegenstande etwas aufgehalten haben, so ist dieses aus dem Grunde geschehen, zu zeigen, wie schwierig und zugleich nutzlos bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft eine allgemeine und strenge Auflösung des Problemes der Maschinen ist, damit Anfänger keine oft so nutzlosen Versuche in dieser Beziehung machen und ihnen andererseits zu zeigen, wie wichtig positive Kenntnisse sind, welche sich auf die zuverlässigen Data der Mechanik und der Erfahrung stützen, und endlich, um sie in den Stand zu setzen, die Natur der Quellen und Hülfsmittel zum Voraus beurtheilen zu lernen, von welchen sich in den verschiedenen Fällen etwas erwarten läßt.

Gegenstand und wirkliche Vortheile der Maschinen.

§. 47. Auch sieht man aus allem über die Maschinen bisher Gesagten, daß sie nicht dazu bestimmt sind, so außerordentliche Effecte hervorzubringen, als sich Laien in der Mechanik zuweilen eingebildet haben; denn sie können ihrer Natur nach wegen der vielen passiven Widerstände nur die ihnen mitgetheilte Arbeit mit gewissen Verlusten übertragen, so daß die Maschinen, welche einen Nutzeffect von 0,5 oder 0,6 der absoluten Wirkung der bewegenden Kraft hervorbringen, für sehr ausgezeichnete, gute Maschinen gelten; denn es gibt, wie wir schon vorhin bemerkt haben, in der That eine große Anzahl von Maschinen, welche wegen ihrer wunderlichen Zusammengesetztheit und falschen Räderverbindungen kaum einen Nutzeffect von $^1/_{10}$ oder selbst $^1/_{20}$ der Quantität der Wirkung der bewegenden Kraft geben.

Der Vortheil der Maschinen besteht nicht sowohl in der Vergrößerung der bewegenden Kraft, als in ihrer Abänderung nach den verschiedenen Bedürfnissen der Künste und Gewerbe und nach solchen Gesetzen, daß sie auf jede Art von Arbeiten angewandt werden kann, auf welche sie in ihrem ursprünglichen Zustande nicht anwendbar gewesen wäre. Durch Hülfe der Maschinen ist man dahin gelangt, die Geschicklichkeit und Intelligenz des Menschen durch rein physische Kräfte der Thiere und anderer natürlicher Agentien zu ersetzen, welche weit weniger kostspielig sind, und man daher die Einheit der Arbeit oder des Productes zu einem weit niedrigern Preise liefern kann. Oft erhält man durch Anwendung von Maschinen und Werkzeugen weit schönere und vollkommenere Producte, weil sie eine genauere und regelmäßigere Form haben. Auch kann man den Körpern vermittelst der Maschinen eine weit größere Geschwindigkeit ertheilen, als wenn die bewegende Kraft unmittelbar auf sie selbst wirkte, und andererseits kann man mit Hülfe von Maschinen weit größere Lasten heben, als durch die unmittelbare Wirkung der Kraft selbst, was bloß darin seinen Grund hat, daß im ersten Falle die Masse und im zweiten die Geschwindigkeit des Körpers sehr klein ist, so daß die lebendigen Kräfte oder die entsprechenden Quantitäten Arbeit doch sehr geringe Werthe haben und mit den Quantitäten Arbeit der bewegenden Kräfte in Verhältniß stehen. Endlich kann die Anwendung einer Maschine zuweilen auch einen größern Nutzeffect geben, als die unmittelbar auf den Widerstand wirkende bewegende Kraft, was dem eben Gesagten durchaus nicht widerspricht, weil die Vergrößerung des Nutzeffectes alsdann einzig und allein von der vortheilhaftern Verwendung der bewegenden Kraft herrührt.

Dieses sind also die wirklichen Vortheile, welche die Maschinen überhaupt gewähren können; aber um diesen wichtigen Zweck damit erreichen zu können, ist es, wie wir gesehen haben, durchaus nothwendig, selbst in rein mechanischer Hinsicht, eine Menge von Aufgaben zu lösen, wovon sich die einen auf die Arbeit der bewegenden Kräfte, andere auf die Wirkungsart der verschiedenen Operatoren und Werkzeuge und endlich noch andere auf die Bestimmung der passiven Widerstände beziehen, welche bei den zur Fortpflanzung oder Uebertragung der Wirkung und Bewegung dienenden Maschinentheilen nothwendig stattfinden.

Zweiter Abschnitt.

Von den Hauptmitteln zur Regulirung der auf die Maschinen wirkenden Kräfte und zur Herstellung der Gleichförmigkeit ihrer Bewegung.

Specieller Gegenstand dieses Abschnittes.

In dem vorhergehenden Abschnitte (§§. 31—41 und 44) haben wir die Ursachen der unregelmäßigen Bewegung der Maschinen und die vorzüglichsten Mittel, deren man sich bedient, um den Einfluß derselben so viel als möglich zu verbessern, angegeben. Wir brauchen daher auf diese allgemeinen Betrachtungen nicht wieder zurück zu kommen, sondern wollen nun dieselben auf einige besondere Beispiele anwenden, welche bei der Aufstellung von Maschinen häufig vorkommen. Wir werden daher successive von den Moderatoren, den Regulatoren, den einfachen oder vielfachen Kurbeln, von den Schwungrädern und von den Räderwerken überhaupt handeln.

Von den Moderatoren.

Specieller Zweck der Moderatoren.

§. 48. Der specielle Zweck der Moderatoren besteht darin, jede Beschleunigung der Geschwindigkeit, welche für den Nutzeffect der Maschine nachtheilig oder für sie selbst gefährlich werden könnte, zu verhindern. Die Bremsen, deren man sich überhaupt bedient, gegen die in Bewegung befindlichen Räder einen Druck auszuüben, wodurch ihre Reibung vermehrt wird, die Fallschirme, die Windfänge, gegen welche die Luft stößt, deren Widerstand schnell mit der Rotationsgeschwindigkeit der Axen oder Wellen zunimmt, gehören in die Klasse der Moderatoren. Da sie einen beträchtlichen Theil der Leistung der bewegenden Kraft absorbiren, so muß man von denselben nur Gebrauch machen, wenn es nicht möglich ist, die Wirkung der bewegenden Kraft, oder die des Nutzwiderstandes selbst zu reguliren, was fast nur in dem einzigen Falle möglich ist, wo die Maschine Gewichte enthält, deren Wirkung durch die eigenen Widerstände der Maschine nicht immer im Gleichgewichte erhalten werden kann. Die Bremsen werden auch in allen den Fällen angewandt, wo es durchaus nothwendig ist, die lebendige Kraft der Maschinentheile plötzlich zu vernichten und die Windfänge haben oft nur den Zweck, eine streng gleichförmige Bewegung zu erhalten. Endlich müssen die Sicherheitsventile, welche dazu dienen, in den hydraulischen Pressen das Wasser und aus den Dampfkesseln den Dampf entweichen zu lassen, wenn seine Spannkraft eine gewisse Grenze erreicht, so wie die Ueberfälle oder Oeffnungen, welche zur Ableitung des überschüssigen Wassers der Behälter, welche hydraulische Maschinen alimentiren, dienen, ebenfalls zu den Moderatoren gezählt werden.

Von den bei den Fuhrwerken angewandten Bremsen.

§. 49. Wenn man bei der Bewegung eines Fuhrwerkes von einer geneigten Ebene herab vermittelst einer Kette oder eines Hemmschuhes die Räder hemmt, so wird die rollende Reibung dieser Räder in eine gleitende verwandelt, welche bekanntlich weit beträchtlicher ist. Eine solche Vorrichtung ist eine wirkliche Bremse; da aber die Zunahme der Intensität der Reibung hier einzig und allein von der Belastung des Fuhrwerkes abhängt, so kann man sie nicht nach der größern oder geringern Neigung der Straße beliebig verändern, und deswegen hat Molard, ehemaliger Director des Conservatoriums der Künste und Gewerbe zu Paris, den Fuhrleuten dadurch einen sehr großen Dienst geleistet, daß er statt der gewöhnlichen Hemmketten und Hemmschuhe eine Bremse (Fig. 1) angewandt hat, welche in einem horizontalen Querstücke besteht, an dessen beiden Enden sich zwei gekrümmte Eisenstücke befinden, welche einen Theil des Kranzes der hintern Wagenräder umfassen, und gegen welche sie vermittelst einer Druckschraube, die durch einen Hebelarm in Bewegung gesetzt wird, gedrückt werden, so daß eine stärkere oder schwächere Reibung entsteht. Diese Vorrichtung gewährt auch noch den großen Vortheil, daß der Wagen nicht stillzuhalten braucht, wenn man denselben hemmen will, wie dieses ehedem der Fall war, und zugleich ist die Einrichtung getroffen, daß der Conducteur gleich von seinem Sitze aus vermittelst einer Hebelvorrichtung die Hemmung vornehmen kann.

Durch eine ähnliche Vorrichtung wird die zu große Beschleunigung der Wagen auf Eisenbahnen, deren Neigung größer als $\frac{1}{100}$ oder auch $\frac{1}{150}$ ist, verhindert.

Bremsen, welche bei Windmühlen angewandt werden.

§. 50. Auch in den meisten Windmühlen wendet man ähnliche Vorrichtungen an, indem man den äußern Umfang eines großen hölzernen Rades, welches sich auf der geneigten Welle der Windflügel befindet, mit einem Streifen Urnenholz von ungefähr 0^m,07 Dicke umgibt, dessen Biegsamkeit durch Sägeneinschnitte auf der innern Seite vermehrt wird. Dieser Holzstreifen ist an dem einen Ende A (Fig. 2) befestigt und an dem andern Ende B ist er mit einem Hebel verbunden, vermittelst dessen derselbe hinreichend stark angezogen werden kann, um auf dem Radumfange eine solche Reibung zu bewirken, durch welche man auch während der starken Winde die Bewegung der Maschine beliebig verzögern kann. Die Anwendung biegsamer Streifen ist, wie wir in Abschnitt 3 sehen werden, hier vortheilhafter, um die Reibung schneller hervorzurufen oder zunehmen zu lassen, als die an dem einen Ende des Streifens bewirkte Spannung.

Uebrigens wird diese Vorrichtung in dem gegenwärtigen Falle hauptsächlich dazu angewandt, die Bewegung der Maschine ganz zu unterbrechen, damit man den Windflügeln die gehörige Wirkungsfläche geben kann. Wenn man sich der Bremse bedienen wollte, um die Bewegung der Windmühle während starker Winde fortwährend zu ermäßigen, so würde die Maschine sehr beschädigt werden, weil der reibende Streifen in Brand gesetzt werden könnte und man also auf die Bremse beständig zu achten hätte.

Da der allgemeine Zweck der Bremsen darin besteht, einen gewissen Ueberschuß an bewegender Kraft zu absorbiren; so ist es vortheilhaft, sie an Rädern von einem großen Halbmesser oder von einer beträchtlichen Geschwindigkeit anzuwenden, damit sie bei einem kleinen Drucke oder einer schwachen Reibung doch eine beträchtliche Wirkung hervorbringen können.

Windfang.

Vorläufige Begriffe.

§. 51. Der Windfang, wie derselbe in den Bratenwendern und Uhren vorkommt, besteht aus einer rotirenden Welle (Fig. 3), woran mehrere Arme angebracht sind, die sich in sehr dünne Metallplatten endigen, deren Ebene gewöhnlich auf der Richtung der Bewegung senkrecht ist, aber zuweilen auch mehr oder weniger gegen die Axe geneigt wird, um die Intensität des Widerstandes des Mittels gehörig zu vermindern. Die Bewegung der Welle des Windfanges ist mit der der Maschine durch Räderwerke oder eine Schraube ohne Ende verbunden, wodurch die Geschwindigkeit sehr beschleunigt wird. Der Vortheil einer solchen Vorrichtung besteht hauptsächlich darin, daß das System, woran sie angebracht ist, eine gewisse Grenzgeschwindigkeit erreicht, welche dasselbe nicht überschreiten kann, und welche nach Verlauf einer kleinen Zahl von Umgängen fast gleichförmig wird.

Die Theorie des Windfanges bietet an und für sich in mechanischer Beziehung keine Schwierigkeit dar; allein wir benutzen sie als eine Gelegenheit zur Mittheilung eines Beispiels, welches lehrt, auf welche Art und Weise sich die Gleichförmigkeit der Bewegung der Maschinen mehr oder weniger schnell herstellt (§. 30), um so mehr, da der Windfang bei Versuchen oft als Mittel angewandt wird, sich eine constante Bewegung zu verschaffen, welche als Maaß der Größe der Geschwindigkeit gewisser Körper dient.

Gleichung für die Bewegung des Windfanges, wenn der Widerstand der Luft, die Reibung, u. s. w. in Betracht gezogen wird.

§. 52. Als Beispiel wählen wir insbesondere die Vorrichtung in Fig. 4, welche **Borda** zur Bestimmung des Widerstandes, den die Luft gegen die sich darin mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegenden Körper ausübt, angewandt hat. P ist das am untern Ende einer verticalen Schnur ab, die auf die horizontale Trommel der Welle e des Windfanges mit ebenen Flügeln ed, $e'd'$ von beliebiger Form, aber einer symmetrischen Lage in einer durch die Axe c gehenden Ebene, gewickelt ist, aufgehangene bewegende Gewicht. Da ferner die Arme cd, cd' sich nach dem Sinne der Bewegung bewegen und die Geschwindigkeit der Trommel, der Schnur und des Gewichtes P gegen die der Flügel sehr gering ist, so setzen wir den Widerstand, den die Luft gegen sie ausübt, bei Seite, wie dieses auch gewöhnlich geschieht, bringen aber die Veränderung der Länge der auf- und abgewickelten Theile der Schnur, so wie ihre Trägheit, welche bei großen Maschinen einigen Einfluß haben kann, in Rechnung. Nun bezeichne:

π die Dichtigkeit oder das Gewicht der Volumeneinheit des widerstehenden Mittels,
A die Gesammtfläche der auf der Richtung der Bewegung senkrecht vorausgesetzten Windflügel,
R die Entfernung ihres Mittelpunctes von der Axe,
r die Entfernung eines beliebigen Punctes derselben von derselben Axe,
R' den Halbmesser der Trommel, bis zur Mitte der Schnur gemessen,
ϱ den Halbmesser der Zapfen der Welle,
ω die Winkelgeschwindigkeit der letztern,
L die ganze Länge der Schnur,
l die des abgewickelten Theiles derselben,
ϑ das Gewicht der Längeneinheit dieser Schnur,
P das Gegengewicht in Kilogrammen,
p das Gewicht des ganzen übrigen Theiles des beweglichen Systemes mit Einschluß der Schnur,
$g = 9^m,809$ die Intensität der Schwere, und
dm das in der Entfernung r von der Axe liegende Massenelement;

so ist die Geschwindigkeit des Mittelpunctes der Flügel $= \omega R$, die des Gewichtes P und der Schnur $= \omega R'$ und endlich die Geschwindigkeit eines beliebigen in der Entfernung r von der Axe liegenden Punctes $= \omega r$. Da die Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit ω in dem Zeitelemente dt gleich $\frac{d\omega}{dt}$ ist, so ist der durch die Trägheit eines beliebigen Massenelementes dm bei dieser Beschleunigung verursachte Widerstand $= dmr\frac{d\omega}{dt}$, das Moment dieses Widerstandes in Beziehung auf die Axe $= r^2 dm \frac{d\omega}{dt}$ und endlich die Summe der ähnlichen Momente für alle mit der Welle festverbundenen materiellen Theilchen $= \frac{d\omega}{dt} S(r^2 dm)$. Was das Trägheitsmoment des Gewichtes P und der Schnur anlangt, so ist dasselbe offenbar resp. $= \frac{P}{g} R'^2 \frac{d\omega}{dt}$ und $= \frac{\vartheta L}{g} R'^2 \frac{d\omega}{dt}$.

Endlich verursachen die Wirkung der Flügel gegen das umgebende Mittel und die Zapfenreibungen der Welle Widerstände, welche sich leicht nach den bekannten Erfahrungsresultaten, worauf wir später zurückkommen werden, bestimmen lassen, und wir brauchen hier bloß zu bemerken, daß der von der ersten Ursache herrührende Widerstand durch das Product $\frac{\gamma\pi A\omega^2 R^2}{2g}$ ausgedrückt werden muß, worin der mittlere Werth des Zahlencoefficienten γ für Geschwindigkeiten zwischen den geringsten bis zu einer Geschwindigkeit von ungefähr 50^m in der Secunde $= 1,45$ ist, und der zweite Widerstand ist ein gewisser Bruch f der Summe der auf die Zapfen der Welle wirkenden Druckkräfte, welche Summe offenbar $= P + p - \frac{(P+\vartheta l)}{g} R' \frac{d\omega}{dt}$ ist, weil $\frac{(P+\vartheta l)}{g} R' \frac{d\omega}{dt}$ das Maaß der Trägheit des Gewichtes P und des abgewickelten Theiles l der Schnur ist. Man hat also die Gleichung:

$$(P+\vartheta l) R' = \left\{ S(r^2 dm) + \frac{(P+\vartheta l) R'^2}{g} \right\} \frac{d\omega}{dt} +$$

$$\frac{\gamma\pi A}{2g}\omega^2 R^3 + f \left\{ P + p - \frac{(P+\vartheta l)}{g} R' \frac{d\omega}{dt} \right\} \varrho,$$

wenn man bemerkt, daß die in Rede stehende Reibung an dem Halbmesser ϱ der Zapfen der Welle als Hebelarm wirkt. Setzt man also der Kürze wegen:

$$\frac{(P+\vartheta l)}{g} R'^2 + S(r^2 dm) - f \frac{(P+\vartheta l)}{g} R' \varrho = m^2,$$

$$\frac{\gamma\pi A R^3}{2g} = n^2, (P+\vartheta l) R' - f(P+p)\varrho = q^2,$$

so hat man: $$m^2 \frac{d\omega}{dt} + n^2\omega^2 - q^2 = 0.$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung haben wir den in b stattfindenden Widerstand, welcher von der Steifigkeit der Schnur herrührt, nicht in Betracht gezogen, weil derselbe gewöhnlich vernachlässigt wird; aber wenn das Gewicht P stiege und die Schnur sich auf die Trommel wickelte, so könnte sie in gewissen Fällen wegen ihrer Steifheit sehr wohl einen Widerstand leisten, welcher mit der Zapfenreibung vergleichbar wäre. Bezeichnet man alsdann die Spannung der Schnur in b, welche offenbar $= P - \frac{(P+\vartheta l)}{g} R' \frac{d\omega}{dt}$ ist, mit t, so wird der an dem Hebelarme R wirkende Widerstand wegen der Steifigkeit der Schnur ausgedrückt durch:

$$a + bl = a + b \left\{ P - \frac{(P+\vartheta l)}{g} R' \frac{d\omega}{dt} \right\},$$

wo a und b Constanten sind, welche von dem Durchmesser der Schnur, dem Grade ihrer Biegsamkeit und von dem Durchmesser der Trommel abhängen, so daß man zu dem Gliede, welches die Reibung enthält, noch die Größe:

$$aR' + b\left\{P - \frac{(P+\vartheta l)}{g}\, R'\, \frac{d\omega}{dt}\right\} R'$$

zu addiren hätte, wodurch die Form der obigen Gleichung:

$$m^2 \frac{d\omega}{dt} + n^2\omega^2 - q^2 = 0$$

nicht geändert wird, und worin man den Constanten m^2, n^2, q^2, welche wegen der Kleinheit von ϱ und f, a und b nothwendig positiv bleiben, nur andere Werthe beizulegen braucht.

Integration der vorhergehenden Gleichung und Folgerungen daraus.

§. 53. Durch Integration der vorhergehenden Differentialgleichung erhält man:

$$t = m^2 \int_o^\omega \frac{d\omega}{q^2 - n^2\omega^2} = \frac{m^2}{2qn} \log.\left(\frac{q+n\omega}{q-n\omega}\right),$$

weil nach der Voraussetzung im Anfange der Bewegung $\omega = o$ ist. Man hat also zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit ω, welche das bewegliche System nach Verlauf irgend einer Zeit t erlangt hat, die Formel:

$$\omega = \frac{q\left(e^{\frac{2qnt}{m^2}} - 1\right)}{n\left(e^{\frac{2qnt}{m^2}} + 1\right)},$$

wo $e = 2{,}71828$ und der obige Logarithmus ein Neperscher ist, und mit der Zahl 2,302585 multiplicirt werden muß, wenn er aus den gewöhnlichen Logarithmentafeln genommen wird.

Man sieht, daß dieser Werth sehr schnell gegen eine Grenze $\frac{q}{n}$ convergirt, welche er in aller Strenge erst nach Verlauf einer unendlichen Zeit erreicht, und da diese Grenze dem Augenblicke entspricht, wo die Bewegung gleichförmig geworden ist, so erhält man sie sofort, wenn man in der Gleichung, welche die Bedingungen des Gleichgewichtes des Systemes ausdrückt, $d\omega = o$ setzt (§. 51).

Der in Rede stehende Werth zeigt auch, daß die Geschwindigkeit von den ersten Augenblicken an desto schneller zunimmt, je größer der Werth des Verhältnisses:

$$\frac{2qn}{m^2} = \frac{\sqrt{2g\,\{(P+\vartheta l)\,R' - f(P+p)\,\varrho\}\,\gamma\pi A R^3}}{(P+\vartheta L)\,R'^2 + gS\,(r^2 dm) - f(P+\vartheta l)\,R'\varrho},$$

d. h. je beträchtlicher der Coefficient $\gamma\pi AR^3$ des dem Widerstande entsprechenden Gliedes, und je kleiner die Summe der Trägheitsmomente $\frac{P+\vartheta L}{g}R'^2 + S\,(r^2 dm)$ ist.

Den Ausdruck für diese Trägheitsmomente findet man in jedem besondern Falle nach der Form jedes zu betrachtenden Theiles und seiner Lage in Beziehung auf die Rotationsaxe mit Hülfe der am Ende dieses Abschnittes mitgetheilten Regeln und Formeln.

Endlich zeigt der Ausdruck:

$$\frac{q}{n} = \sqrt{\frac{2g\ (P+\mathfrak{N})R' - f(P+p)\varrho\zeta}{\gamma n A R^3}},$$

welcher den Grenzwerth der Geschwindigkeit gibt, daß dieser Werth mit dem Momente PR' des Gegengewichtes sehr langsam zunimmt, wogegen er mit dem mittlern Halbmesser R des Windfanges sehr schnell zunimmt, und wobei die Trägheit nur auf die Zeitdauer Einfluß hat, welche erforderlich ist, damit das System eine gleichförmige Geschwindigkeit annimmt.

Von den Regulatoren und der Steuerung.

Specieller Zweck der Regulatoren.

§. 54. Die Bremsen und Windfänge, womit wir uns eben beschäftigt haben, könnten offenbar als Regulatoren der Maschinen dienen, wenn sie nicht den Nachtheil hätten, einen großen Theil der Leistung der bewegenden Kraft nutzlos zu consumiren, weil ihre regulirende Wirkung gerade davon abhängt, daß man fremdartige passive Widerstände in das System einführt. Die zweckmäßigsten Mittel zur Erreichung der beabsichtigten Regulirung bestehen in denjenigen Vorrichtungen, bei welchen man die Quantität des zu bearbeitenden Stoffes, den Widerstand der Nutzarbeit oder die Intensität der bewegenden Kräfte und der Trägheit nach Belieben verändern kann. Wir haben bereits in §§. 35, 43 und 44 einige Beispiele angeführt, und wir könnten deren leicht noch mehrere anführen. Z. B. die Behälter der Luft von einem constanten Drucke der Pumpen und Gebläse, die großen Wasserbehälter oder Teiche, welche sich immer bei hydraulischen Maschinenanlagen befinden, die beweglichen Roste der Oefen der Dampfmaschinen, welche zur regelmäßigen und gleichförmigen Vertheilung des Brennmateriales unter dem Kessel dienen, der sich in diesem Kessel über dem Wasser befindende leere Raum zur Ansammlung des Dampfes, die excentrischen Scheiben und alle Vorrichtungen, welche dazu dienen, den Dampf successive über und unter die Kolben zu leiten, die besondern Mechanismen, welche angewandt werden, die Leinwand auf den Flügeln der Windmühlen, je nach der Stärke des Windes und der Geschwindigkeit der Bewegung mehr oder weniger auszubreiten, die Spindeln und Spiraltrommeln, welche zur Regulirung der Wirkung der bewegenden Kraft oder des Nutzwiderstandes in mehreren Maschinen und namentlich in den Uhren rc. angewandt werden, sind ebenso viele regulirende Apparate der in Rede stehenden Art, während die Sicherheitsventile, welche den Dampf entweichen lassen, wenn seine Spannkraft eine gewisse Grenze erreicht hat, die Ueberfälle und Oeffnungen, welche zur Ableitung des überflüssigen Wassers der Behälter, welche hydraulische Maschinen alimentiren, dienen rc., mehr zu der Classe der bloßen Moderatoren, wie die Bremsen und Windfänge gehören.

Von den spontanen Regulatoren oder der Steuerung der Maschinen.

§. 55. Unter allen diesen Mitteln sind aber besonders die zu unterscheiden, welche eine Selbststeuerung der Maschinen gewähren, so daß eine beständige und mühevolle Beaufsichtigung derselben überflüssig wird, was man in der That bei allen guten Maschinen so viel als möglich zu erreichen suchen muß. Die Dampfmaschinen bieten in ihrem gegenwärtigen vollkommenen Zustande in dieser Beziehung ein Muster dar, welches man auch bei den verschiedenen andern Maschinen so viel als möglich zu erreichen suchen muß; allein es ist nicht unsere Absicht, diese verschiedenen Selbststeuerungsmittel, deren Beschreibung und Theorie der der Maschinen, woran sie angewandt sind, anheim fallen, hier durch zu gehen, und von diesen Selbststeuerungsmitteln sind auch kaum einige, wie der Pumpenregulator und das Kegelpendel, oder der Centrifugalregulator, welche die Engländer bloß Steuerungen nennen, allgemein anwendbar; jedoch wollen wir noch den Feder- und augenblicklichen Auslösungsregulator, wovon weiter unten die Rede sein wird, betrachten.

In der That sind die Spiralschnecken und die Kegeltrommeln, welche eine ausgedehnte Anwendung zu gestatten scheinen, nur bei den Maschinen mit Nutzen anwendbar, worin sich entweder die Wirkung der bewegenden Kraft, oder die des Widerstandes nach einem genau bekannten Gesetze ändert, was nur in einigen besondern Fällen stattfindet. Ihre rein geometrische Theorie bietet übrigens keine Schwierigkeit dar, weil sie zum Aufwickeln eines Seiles oder einer Kette bestimmt sind, woran die veränderliche Kraft wirkt, und die ganze Aufgabe besteht darin, den Hebelarm dieser Kraft so zu- oder abnehmen zu lassen, daß ihr Moment für die verschiedenen Lagen des Systemes constant bleibt.

Dieses Mittel ist übrigens nur dann mit Vortheil anzuwenden, wenn die bewegende Kraft in einer Reihe von Umgängen der Maschinen beständig zu- oder abnimmt, und man muß es nicht mit andern Vorrichtungen, wie die Hebedaumen etc., verwechseln, welche nur dazu bestimmt sind, die Geschwindigkeit gewisser Maschinentheile oder die auf sie durch constante, oder veränderliche Kräfte ausgeübten Wirkungen momentan zu reguliren.

Von dem Pumpen- und Schwimmerregulator.

Beschreibung des Mechanismus und seines Spieles.

§. 56. A (Fig. 5) ist ein Pumpenstiefel, welcher das Wasser aus einem untern Bassin C nimmt, und dessen Kolbenstange EF durch die Maschine in Bewegung gesetzt wird, deren Bewegung regulirt werden soll. Diese Pumpe ist dazu bestimmt, das Wasser aus dem untern Bassin C in das obere B zu heben, welches letztere in D mit einer Oeffnung versehen ist, welche vermittelst einer kleinen innern Schütze oder eines äußern Hahnes vergrößert oder verkleinert werden kann. G ist ein Schwimmer, welcher an dem Ende eines Hebelarmes KL aufgehangen und dazu bestimmt ist, die Schütze, Ventile u. s. w. in Bewegung zu setzen, welche die als bewegende Kraft dienende Flüssigkeit auf den Receptor der Maschine liefern. Wenn zuvörderst die Oeffnung D geschlossen ist, und man läßt das Bassin B sich so weit mit Wasser füllen, daß der Schwimmer in Folge des Steigens des obern Niveaus IH eine mittlere, zum Voraus bestimmte Lage annehmen muß, für welche z. B. der Hebel KL horizontal steht, und man öffnet dann D so weit, daß in einer gegebenen Zeit genau so viel Wasser abfließt, als die Pumpe bei der mittlern Geschwindigkeit, welche man die Maschine annehmen lassen will, liefert, was man durch einen directen Versuch bestimmen kann; so sieht man leicht ein, daß das Niveau IH constant und der Schwimmer unbeweglich bleibt, so lange die Bewegung dieser Maschine oder des dadurch in Bewegung gesetzten Kolben regelmäßig ist; aber daß das Niveau IH und der Schwimmer um entsprechende Größen steigen oder fallen, und den Hebel KL, so wie das damit verbundene System um eine dem verdrängten Flüssigkeitsvolumen entsprechende Größe bewegen, sobald die Geschwindigkeit der Maschine größer oder kleiner wird, als die gewählte mittlere Geschwindigkeit.

Bedingungen des Gleichgewichtes des Schwimmers.

§. 57. Wir wollen zunächst die Bedingungen des Gleichgewichtes des Schwimmers suchen, indem wir den Widerstand in Betracht ziehen, welchen er von Seiten der Ventile oder Schütze, durch welche das Wasser auf den Receptor fließt, zu überwinden hat, so wie den Zuwachs von Flüssigkeit, welche das Bassin B in einer gegebenen Zeit durch die Pumpe erhält. Es bezeichne

- Q dieses Flüssigkeitsvolumen, wovon $\pi = 1000$ Kil. die Dichtigkeit ausdrückt,
- P das absolute Gewicht des Schwimmers mit Einschluß seines Zubehöres und seiner Belastung,
- p die Kraft in Kilogr., welche erforderlich ist, zur Ueberwindung der Widerstände des Hebels KL, und als nach der verticalen Axe des Schwimmers wirkend angenommen wird,
- a den constanten Querschnitt des Schwimmers,
- A den ebenfalls constanten Querschnitt des Bassins B,
- H die Tiefe, bis zu welcher der Schwimmer in dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit der Maschine regelmäßig ist, unter das mittlere Niveau eingetaucht ist,
- z die Tiefe, bis zu welcher der Schwimmer in dem Augenblicke, wo eine Flüssigkeitsmasse Q hinzugekommen ist, unter dasselbe Niveau eingetaucht ist, und
- x die Höhe, um welche in demselben Augenblicke das Niveau in dem Bassin B über das ursprüngliche oder mittlere Niveau gestiegen ist; so hat man offenbar:

$$P = \pi a H, \quad Q = (A - a)\,x + a\,(H - z),$$
$$\pi a\,(x + z - H) = p,$$

weil $a\,(x + z)$ das im zweiten und aH das im ersten Augenblicke durch den Schwimmer verdrängte Flüssigkeitsvolumen ist.

Wenn die Dimensionen des Bassins und des Schwimmers gegeben sind, sowohl als der Werth von Q und der Widerstand p des

Verschlusses der Schütze, welchen man durch einen directen Versuch erhalten kann; so kennt man auch die Werthe von x und z oder $H-z$, welche die absolute Höhe ausdrücken, um welche der Schwimmer und das Ende des Hebels, woran er aufgehangen ist, gestiegen sind.

Wenn Q statt einer Flüssigkeitszunahme in dem Bassin eine Abnahme bezeichnet; so verändert sich bloß das Zeichen von $H-z$ in den beiden letzten Gleichungen, welche sich alsdann in die beiden folgenden verwandeln:

$$Q=(A-a)x+a(z-H),\ \pi a(x-z+H)=p.$$

Bedingungen, welche die Ausdehnung des Laufes des Schwimmers beschränken.

§. 58. Der größte Werth von x oder der Amplitude der Bewegung des Niveaus in dem Bassin B über und unter seiner mittlern Lage HI wird besonders durch die Bedingung bestimmt, daß die Ausströmungsgeschwindigkeit in der Oeffnung D keine zu große Veränderung erfährt, welcher eine proportionale Veränderung in der Ausflußmenge des Wassers entsprechen würde. Gesetzt, man hätte dem mittlern Niveau IH eine Höhe von 2^m über dem Mittelpuncte der Oeffnung D gegeben, so daß der größte Werth von x $^1/_{10}$ oder $^1/_{20}$ dieser Höhe beträgt. Was die Amplitude des halben auf- oder absteigenden Laufes $H-z$ oder $z-H$ des Schwimmers und seines Hebels anlangt, so ist sie ebenfalls fixirt durch die Bedingungen in Beziehung auf die Amplitude der Bewegung, welche man der Schütze, durch die das Wasser zu dem Receptor gelangt, von ihrer mittlern Lage an ertheilen will, und es ist natürlich, sie für das Auf- und Absteigen gleich anzunehmen.

Bezeichnen also h diese Grenzamplitude, und Q', x' die entsprechenden Werthe von Q und x, welche ebenfalls für das Auf- und Niedersteigen als gleich angenommen werden, so hat man bloß den beiden Gleichungen:

$$Q'=(A-a)x'+ah,\ \pi a(x'-h)=p$$

zu genügen, welche außerdem voraussetzen, daß der Widerstand für die beiden äußersten Lagen des Schwimmers oder der Schütze derselbe sein kann. Wenn dieses nicht der Fall wäre, so hätte man noch einer Gleichung mehr zu genügen, und es blieben nur noch zwei der darin vorkommenden fünf Größen, wozu nothwendig Q' gehört, so lange das Spiel der Pumpe A, welche die Bewegung der Maschine reguliren soll, selbst nicht regulirt ist, willkürlich.

Regulirungsart der regulirenden Energie des Systemes.

§. 59. In dieser Beziehung sieht man leicht ein, daß es nicht zu erwarten ist, die Maschine jeden Augenblick in dem Zustande der streng gleichförmigen Bewegung zu erhalten, selbst wenn es ihre eigene Constitution gestattete; denn diese absolute Gleichförmigkeit wird durch das alternative Spiel der Pumpe verhindert. Man nimmt daher zum Voraus die größte Abweichung der Maschine zu beiden Seiten der mittlern Bewegung an, und setzt voraus, daß diese Abweichung von der gleichförmigen Bewegung genau den Amplituden der Bewegung des Schwimmers und der Schütze, wovon vorhin die Rede gewesen, entsprechen. Allein dieses ist zur Bestimmung von Q' noch nicht hinreichend, und man muß auch noch eine Zahl annehmen, welche die regulirende Energie der Pumpe oder die Schnelligkeit ausdrückt, mit welcher sie das Steigen oder Sinken des Schwimmers von dem Augenblicke an bewirken soll, wo die Geschwindigkeit der Maschine die eine oder die andere ihrer Grenzen erreicht hat, was wegen der Trägheit nicht plötzlich geschehen kann.

Es sei N die Anzahl der Kolbenzüge in 1 Sec., wenn die Maschine ihre mittlere, gleichförmige Geschwindigkeit angenommen hat, q das Flüssigkeitsvolumen, welches der Behälter B bei jedem Kolbenzuge bekommt, und n der größte Bruchtheil, um welchen diese Geschwindigkeit soll zu- oder abnehmen können; so ist nNq die Quantität Wasser, welche der Behälter in der Minute mehr bekommt als verliert, und wenn endlich T die Anzahl der Minuten bezeichnet, nach deren Verlauf der Schwimmer seine äußerste Lage erreicht haben müßte, wenn die Geschwindigkeit ihren größten oder kleinsten Werth behielte, so hat man zur Bestimmung von Q' die Gleichung:

$$nNqT = Q'.$$

Mittel zur Verminderung der von der Pumpe herrührenden Unregelmäßigkeitsursachen.

§. 60. Andererseits ist klar, daß die ungleichförmige Wirkung der Pumpe eine beständige Oscillation der Flüssigkeit in dem Behälter selbst bei der mittlern Geschwindigkeit verursacht, und man muß daher diese Oscillationen in eine Grenze einzuschließen suchen, deren Amplitude gegen die der ganzen Bewegung, welche durch das Hinzuströmen der Wasserquantität Q' in den Behälter B entstehen kann, sehr klein ist, d. h. der größte Unterschied zwischen den unregelmäßig hinzugeströmten und den regelmäßig durch die Oeffnung D abgeflossenen Wasserquantitäten muß für die ganze Dauer einer Oscillation nur einen sehr kleinen Theil von Q' betragen. Dieser Unterschied kann immer sehr klein gemacht werden, indem man entweder eine doppelt wirkende Pumpe anwendet, d. h. eine solche, welche sowohl während des Auf- als während des Niedersteigens des Kolbens Wasser liefert, oder indem man einen zur Regulirung des Wasserstrahles dienenden Luftbehälter anbringt, oder endlich, was noch besser ist, daß man statt der Pumpe eine Maschine mit einer gleichförmigen Bewegung, wie z. B. die Archimedische Wasserschraube, anwendet, welche besonders den Vorzug hat, daß sich ihre Effecte nicht verändern, wie dieses bei den Pumpen der Fall ist, welche nach einer kürzern oder längern Zeit schadhaft werden. Vermittelst solcher Vorrichtungen wird es möglich, die Größe Q' sehr zu verkleinern, so daß der Regulator für geringe Veränderungen der mittlern Bewegung der Maschine empfindlich wird.

Bestimmung des Grades der Empfindlichkeit und der Energie des Pumpenregulators.

§. 61. Wie dem aber auch sei, so muß man die größte Differenz zwischen den Quantitäten des durch die Pumpe herbeigeführten und des durch die Oeffnung D abgeflossenen Wassers, wenn sie bekannt ist, dennoch durch eine ziemlich große Zahl, wie 20 oder 30 multipliciren, um Q' zu erhalten. Nimmt man z. B. an, daß die Pumpe einfach wirkend ist, wo die in Rede stehende größte Differenz wohl 0,53 des von der Pumpe bei jeder ganzen Oscillation gelieferten Wasservolumens q beträgt *); so muß man wenigstens $Q' = 20 \times 0{,}53\, q = 10{,}6\, q$ nehmen, und man hat außerdem der Bedingung $nNqT = 10{,}6\, q$ oder $nNT = 10{,}6$, zu genügen, woraus hervorgehet, daß die regulirende Wirkung der Pumpe in diesem Falle nur eine sehr geringe Energie hat; denn man kann N kaum größer als 30 annehmen, und selbst wenn sich die Geschwindigkeit von ihrem mittlern Werthe zu beiden Seiten um $^1/_{10}$ entfernte, so daß $n = 0{,}1$ wäre, hätte man $T = \frac{10{,}6}{3} = 3{,}53$ Minuten, d. h. es würden von dem Augenblicke an, wo die Grenzgeschwindigkeit erreicht ist, mehr als $3^1/_3$ Minuten verfließen müssen, ehe daß der Schwimmer die beabsichtigte Wirkung hervorgebracht hätte.

Bei einer doppelt wirkenden Pumpe würde der größte Unterschied zwischen den von der Pumpe gelieferten und durch die Oeffnung D ausgeströmten Quantitäten Wasser nur $0{,}053\, q$ betragen, wo q wieder das von der Pumpe bei jeder doppelten Oscillation gelieferte Volumen Wasser bezeichnet, so daß man hat:

$$Q' = 20 \times 0{,}053\, q = 1{,}16\, q \text{ und } nNT = 1{,}16.$$

In den beiden obigen Voraussetzungen von $n = {}^1/_{10}$ und $N = 30$ hätte man also bloß $T = 0{,}387$ Minuten, statt $T = 3{,}53$ Minuten. Endlich wäre die Energie des Regulators so zu sagen unbeschränkt, wenn man für die Pumpe eine stetig wirkende Schöpfmaschine, wie die Archimedische Wasserschraube, die Noria ꝛc. substituirte. Da in allen Fällen die Größe q willkürlich bleibt, so kann man sie dazu benutzen, den Werth der Größe Q', welche in den Bedingungsgleichungen für die Einrichtung des Schwimmers vorkommt, zu vergrößern, und welche für die Horizontalquerschnitte des Behälters B und des Schwimmers die Ausdrücke:

$$a = \frac{p}{\pi}(x' - h), \quad A - a = Q' - \frac{ph}{\pi(x' - h)}$$

geben, wovon der letzte zeigt, daß Q' desto größer genommen werden muß, je kleiner $x' - h$ ist, damit der Werth von $A - a$ positiv bleibt.

Nachtheile dieses Regulators.

§. 62. Dieses ist, wie es uns scheint, die wahre Betrachtungsweise der Theorie des Schwimmer- und Pumpenregulators und das Gesagte ist hinreichend, um zu zeigen, daß die Vortheile, welche man sich von der Anwendung desselben verspricht, bei weitem nicht die Nachtheile compensiren, welche mit dem beträchtlichen Verluste an Arbeit verbunden sind, so wie die, welche entstehen können, wenn die Pumpe in Unordnung kommt. Uebrigens sieht man, daß die Wirkung auf den

*) Vergl. über diesen Gegenstand §. 109, welcher von der Theorie der einfach und doppelt wirkenden Kurbeln handelt.

Schwimmer nicht augenblicklich stattfindet, und daß das Spiel der Schütze nur auf eine sehr indirecte Weise von der Veränderung der Geschwindigkeit der Maschine abhängig gemacht wird, indem die Zeit, während welcher diese Veränderung stattfindet, nothwendig als Factor des regulirenden Effectes darin vorkommt, in welchen letzten Beziehungen uns das conische oder Centrifugalpendel in der Praxis bei weitem den Vorzug zu verdienen scheint.

Von dem Centrifugalregulator.

Beschreibung des Apparates und Data für seine Einrichtung.

§. 63. Dieser Regulator besteht gewöhnlich aus einer Raute mit Charnieren $ABCD$ (Fig. 6), welche sich an einer verticalen Axe AH befindet, die durch einen rotirenden Maschinentheil in Bewegung gesetzt wird. Die Raute ist an einer ihrer Winkelspitzen A an dieser Axe befestigt und nimmt die drehende Bewegung derselben an. Die obern Stäbe AB, AD tragen an ihren Verlängerungen Metallkugeln P und an der Winkelspitze C befindet sich eine Muffe mit einer Nute G, welche die Axe AH umgibt und längs derselben mit sanfter Reibung fortgleiten kann. Durch die Wirkung der Centrifugalkraft auf die Metallkugeln wird die Muffe G mehr oder weniger gehoben, wodurch vermittelst einer leicht anzugebenden Mittheilung der Bewegung die Anwendung der bewegenden Kraft regulirt wird (§. 44), indem die Oeffnung einer Schütze, eines Hahnes ꝛc., entsprechend verändert wird, wenn sich die Geschwindigkeit der Maschine in Folge der Wirkung irgend einer Ursache ändert. Es bezeichnen:

P und M das Gewicht und die Masse jeder der beiden Kugeln,
$g = 9^m,8088$, $\pi = 3,1416$,

- ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle AH des Pendels,
- α den Winkel, welchen die Stäbe AB, AD mit dieser Welle oder Axe bilden,
- a die Seite AB der Raute,
- b die Entfernung der Winkelspitze A vom Schwerpuncte der Kugeln P, und
- h endlich die Länge AC der verticalen Diagonale der Raute, welche die Lage der Muffe G bestimmt;

so kann man sich vorstellen, daß auf diese Raute folgende, einander das Gleichgewicht haltende Kräfte wirken:

1) Die Centrifugalkraft der beiden Kugeln, welche durch $2M\omega^2.IP = 2M\omega^2\, b\, sin.\, \alpha$ ausgedrückt wird und an dem Hebelarme $AI = b\, cos.\, \alpha$ wirkt;

2) das Gewicht $2P = 2Mg$ derselben beiden Kugeln, welches in Beziehung auf A an dem Hebelarme $PI = b\, sin.\, \alpha$ wirkt, und endlich

3) das Gewicht und die Centrifugalkraft der Stäbe der Raute, welche man, wie die Reibung der Gelenke und die in C erforderliche Kraft zur Ueberwindung der von den regulirenden Ventilen, Schützen ꝛc., herrührenden Widerstände, unberücksichtigt zu lassen pflegt.

Bedingungen des Gleichgewichts und practische Regel der Engländer.

§. 64. Wenn man also diese beiden letzten Kräfte unberücksichtigt läßt und bemerkt, daß zwischen den beiden andern um den Punct A das Gleichgewicht stattfinden muß, so hat man:

$$2\,M\omega^2\,b\,\sin.\,\alpha \times b\,\cos.\,\alpha = 2\,P.\,b\,\sin.\,\alpha,$$

woraus wegen $h = 2\,a\,\cos.\,\alpha$ und $P = Mg$ folgt:

$$b\,\cos.\,\alpha = AI = \frac{g}{\omega^2},\ h = \frac{2\,ag}{b\,\omega^2}.$$

Man hat also die Tiefe h, in welcher die Muffe G unter der Spitze A in Gleichgewicht bleibt, wenn die Geschwindigkeit ω für die Einheit der Entfernung von der Axe AH bekannt ist, und umgekehrt.

Es sei T die Dauer einer Umdrehung dieser Welle in Secunden, so hat man $T\omega = 2\pi$, und wenn man diesen Werth von ω in die obige Relation substituirt, so ergibt sich daraus:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{a}\,\frac{h}{g}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{AI}{g}}.$$

Dieses ist, wie man sieht, die doppelte Dauer der Schwingungen eines Pendels, dessen Länge der Tiefe $AI = \frac{b}{a}h$ der Kugeln unter der festen Winkelspitze A der Raute gleich ist. Nimmt man z. B. an, daß der Regulator eine Umdrehung in 2 Secunden oder 30 Umdrehungen in der Minute macht, so hat man $T = 2$ und AI wird die Länge $0^m,994$ des Pendels, welches in unsern Gegenden Secunden schlägt.

Unzulänglichkeit der vorhergehenden Regel.

§. 65. Dieses ist die sehr einfache Regel, welche die Schriftsteller gewöhnlich zur Bestimmung der Lage der Metallkugeln für eine mittlere Geschwindigkeit der Maschine angeben, wenn diese Geschwindigkeit zum Voraus gegeben ist; allein diese Regel ist durchaus nicht genügend, weil sie von dem Gewichte der Kugeln unabhängig ist, und die Energie nicht in Betracht zieht, welche ihre Centrifugalkraft haben muß, um die passiven Widerstände der Bewegung des Systemes überwinden zu können, welches zum Oeffnen oder Verschließen der Ventile oder Schütze rc., dient. Man kann sich daher auch nicht wundern, daß der in Rede stehende Regulator wegen dieser Unvollkommenheit seiner Theorie wenig geleistet hat, so daß er bei den meisten Maschinen nicht angewandt wird.

Tredgold, welcher ein Werk über Dampfmaschinen geschrieben hat, scheint die Unzulänglichkeit der obigen Regel erkannt zu haben und er schlägt vor, die größte Amplitude der verticalen Bewegung der Metallkugeln so zu bestimmen, daß, wenn die Geschwindigkeit der Maschine ihre mittlere Geschwindigkeit um den 20sten Theil überschreitet, die Ventile, rc. ganz geschlossen sind, und im Gegentheil ganz geöffnet sind, wenn die Maschine ihre mittlere Geschwindigkeit erreicht, damit, wie er sagt, bei dieser letzten Geschwindigkeit die Verengung der Röhre verhütet wird, welche den Dampf unter die Kolben der

Maschine leitet, und womit ein Verlust an bewegender Kraft verbunden ist. Allein eine solche Einrichtung würde offenbar den Nachtheil haben, daß sie gerade in dem Augenblicke eine Verminderung der bewegenden Kraft bewirkte, wo sich die Geschwindigkeit verzögert, was unzulässig ist, und zeigt, daß man, abgesehn von dem Nachtheile der Verengung der Röhre, dem Ventile oder der Schütze für den Fall einer mittlern Geschwindigkeit nothwendig eine Lage zwischen der, wo sie die meiste Flüssigkeit auf den Receptor strömen lassen, und zwischen der, wo sie diesen Zufluß ganz verhindern, geben muß.

Wahre Bedingung für die Einrichtung des Apparates.

§. 66. Bezeichnet man die der Winkelgeschwindigkeit $\omega' = (1+n)\,\omega$ entsprechende Tiefe der Muffe mit h' und die der Winkelgeschwindigkeit $\omega'' = (1-n)\,\omega$ entsprechende Tiefe mit h'', wo ω wieder die mittlere Geschwindigkeit der Welle AH und h die entsprechende Tiefe der Muffe ausdrückt; so hat man:

$$h' = \frac{2ga}{(1+n)^2\,\omega^2 b} = \frac{h}{(1+n)^2},\quad h'' = \frac{2ga}{(1-n)^2\,\omega^2 b} = \frac{h}{(1-n)^2},$$

und folglich für die Amplitude der verticalen Bewegung der Muffe, welche die Bewegung der Zulassungsventile oder Schütze reguliren soll:

$$h'' - h' = h\,\frac{4n}{(1-n^2)^2} = 4nh,$$

wenn man n^2 gegen die Einheit vernachlässigt.

Nimmt man mit Tredgold $n = {}^1/_{20}$, so hat man ungefähr $h'' - h' = {}^1/_5\,h$, woraus hervorgeht, daß die von der Muffe und dem damit in Verbindung stehenden Systeme für eine sehr geringe Veränderung der Geschwindigkeit beschriebenen Räume sehr merklich sein können, so daß man mit Tredgold sagen kann, daß, wenn der Centrifugalregulator unbrauchbar wird, dieses gewiß nicht wegen seiner Empfindlichkeit der Fall ist, wie mehrere Schriftsteller behauptet haben, welche dafür auf Kosten der bewegenden Kraft einen Pumpenregulator von ähnlicher Art, wie der vorhin betrachtete, substituirt haben.

Einfluß des Gewichtes der Kugeln und des Winkels, welchen die Stäbe der Raute mit der Rotationsaxe bilden.

§. 67. Was den Einfluß des Gewichtes der Kugeln auf die regulirende Wirkung des Apparates anlangt, so beschränkt sich Tredgold in dem angeführten Werke auf die Bemerkung, daß dieses Gewicht bei den Dampfmaschinen 12—36 Kilogr. betragen kann, und daß die Wirkung desselben sehr von den Winkeln abhängt, welche die Stäbe der Raute miteinander bilden. Bei der in Fig. 6 dargestellten Einrichtung ist die Kraft des Regulators, welche die Bewegung der Muffe bewirkt, beträchtlich, aber die Ausdehnung der Bewegung gering, was noch mehr bei der in Fig. 7 dargestellten Einrichtung der Fall ist, und welche oft bei Maschinen angewandt wird. Bei der in Fig. 8 angegebenen Einrichtung dagegen ist die bewegende Kraft der Muffe klein, aber die Ausdehnung der Bewegung sehr groß; mit andern Worten, die regulirende Kraft steht bei jeder Einrichtung im umgekehrten Verhältnisse der Länge des Weges, welchen die Muffe zu beschreiben strebt, was nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten auch einleuchtend ist.

Gleichung des Gleichgewichtes des Regulators in dem Falle einer Verbesserung der Geschwindigkeit, und mit Berücksichtigung der zu überwindenden Widerstände. — Erste Einrichtung Fig. 6.

§. 68. Um zu zeigen, wie sich aus dieser Betrachtung die wahre Theorie des Centrifugalregulators ergibt, wollen wir nach den englischen Autoren annehmen, daß der Apparat aufgestellt werde, wenn die Maschine ihre mittlere Geschwindigkeit ω erreicht, und daß die Muffe C (Fig. 6), so wie das Hebelsystem und die Schütze, welche sie in Bewegung setzt, keine Wirkung auf einander ausüben, was erfordert, daß sich dieses System für die durch die Relation $h = \frac{2ag}{b\omega^2}$ bestimmte Lage der Muffe (§. 55) im Gleichgewichtszustande befindet, abgesehen von der Reibung. Alsdann sieht man leicht ein, daß die Winkelgeschwindigkeit des Regulators um einen gewissen gegebenen Theil ihres ursprünglichen Werthes zunehmen kann, ehe die auf die Muffe wirkende Kraft im Stande ist, die Schütze zu bewegen, d. h. die bei dieser Bewegung stattfindenden Widerstände zu überwinden; denn die Intensität der Centrifugalkraft der Kugeln muß soweit zunehmen, daß sie der Wirkung der Gewichte und den in Rede stehenden Widerständen das Gleichgewicht halten kann, was eine neue Bedingungsgleichung gibt, welcher der Regulator genügen muß, und welche man leicht durch eine einfache Zerlegung der Kräfte erhielte, aber welche wir größerer Allgemeinheit wegen nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten abzuleiten suchen wollen.

Wir wollen zunächst den Fig. 6 entsprechenden Fall betrachten und mit Beibehaltung der frühern Bezeichnungen (§. 63) den von der Muffe zu überwindenden Widerstand mit p und die neue Winkelgeschwindigkeit, welche der Regulator erlangen muß, um diesen Widerstand überwinden zu können, mit $\omega' = (1 + n')\,\omega$ bezeichnen. Abstrahirt man für einen Augenblick von dieser Winkelgeschwindigkeit, und nimmt an, daß sich der Punct C um eine unendlich kleine Größe dh hebt, welche als die virtuelle Geschwindigkeit von p betrachtet werden kann; so beschreibt der Schwerpunct der Kugeln das Bogenelement $PS = b.\,d\alpha$. Die virtuelle Geschwindigkeit der Centrifugalkraft, nach ihrer Richtung geschätzt, ist $PS \cos.\alpha = b \cos.\alpha d\alpha$, die des Gewichtes der Kugeln $= b \sin.\alpha d\alpha$, und endlich wegen $h = 2a \cos.\alpha$ die virtuelle Geschwindigkeit von C oder p gleich $dh = -2a \sin.\alpha d\alpha$.

Hiernach gibt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn man bemerkt, daß die Wirkungen von $2P$ und von p, der der Centrifugalkraft entgegengesetzt sind, für das Gleichgewicht folgende Gleichung:

$$2M\omega'^2.\,IP = 2M\omega'^2 b \sin.\alpha,$$

$$2M\omega'^2 b^2 \cos.\alpha \sin.\alpha d\alpha - 2Pb \sin.\alpha d\alpha - 2pa \sin.\alpha d\alpha = 0,$$

oder wenn man durch $2 \sin.\alpha d\alpha$ dividirt, und bemerkt, daß $M = \frac{P}{g}$ und $h = 2a \cos.\alpha$ ist:

$$P.\omega'^2 b^2 h - 2ag.(Pb + pa). = 0.$$

Aber nach der Voraussetzung ist $h = \frac{2ag}{b\omega^2}$ (§. 55) und folglich verwandelt sich diese letzte Gleichung in:

$$P\omega'^2 b - bP\omega^2 - ap\omega^2 = 0,$$

woraus sich für das gesuchte Verhältniß zwischen dem Gewichte P der Kugeln und dem Widerstande p der Näherungsausdruck:

$$\frac{P}{p} = \frac{a}{b}\,\frac{\omega^2}{\omega'^2 - \omega^2} = \frac{a}{b(2n' + n'^2)} = \frac{a}{2n'b}$$

ergibt, weil n' als sehr klein vorausgesetzt wird.

Es findet also zwischen dem in Rede stehenden Verhältnisse und den Größen a, b, n', welche die Dimensionen des Regulators und die Größe der Abweichung der Winkelgeschwindigkeit von der mittlern Geschwindigkeit bestimmen, eine nothwendige Relation statt. Soll z. B. diese Abweichung nur $0{,}02\,\omega$ betragen, so hat man $P = 25\frac{a}{b}p$, und da bei der in Fig. 6 dargestellten Einrichtung b nicht merklich größer sein kann, als $\frac{3a}{2}$, wenn die Kugeln bei der tiefsten Lage des Systemes nicht gegen den Hebel GL schlagen sollen, so muß P wenigstens $= {}^2/_3 25\,p = 16{,}67\,p$ sein, um den gewünschten Effect zu erhalten.

Gleichung des Gleichgewichtes für die zweite Einrichtung. (Fig. 7.)

§. 69. Da dieser Werth von P in gewissen Fällen sehr groß werden kann, so hat man die Einrichtung in Fig. 7 angewandt, worin durch eine entsprechende Verlängerung der untern Stäbe CB und CD die Größe b 3 bis 4 mal größer ist als a.

Bezeichnet man die Länge dieser Stäbe, welche fast $= b$ oder $= AP$ sein muß, mit c, und behält alle frühern Bezeichnungen bei, so gibt das Dreieck ABC für die virtuelle Geschwindigkeit von C oder p:

$$AC = h = a\cos.\alpha + \sqrt{c^2 - a^2\sin.^2\alpha},$$

folglich: $$dh = -a\sin.\alpha\left\{1 + \frac{a\cos.\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin.^2\alpha}}\right\}d\alpha,$$

und die Gleichung des Gleichgewichtes wird hier, nachdem man durch $\sin.\alpha d\alpha$ dividirt hat:

$$2\frac{P}{g}b^2\omega'^2\cos.\alpha - 2Pb - a\left(1 + \frac{a\cos.\alpha}{\sqrt{c^2 - a^2\sin.^2\alpha}}\right)p = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $p = 0$, so hat man zur Bestimmung des Winkels α, welcher der mittlern Lage der Muffe und der mittlern Geschwindigkeit ω der Maschine entspricht, die Relation:

$$\omega^2 b\cos.\alpha - g = 0,$$

woraus folgt: $$b\cos.\alpha = AI = \frac{g}{\omega^2}.$$

Diese Relation ist, wie man sieht, ganz identisch mit der, welche wir in Vorhergehendem (§. 64) für den Fall der einfachen Raute erhalten haben, was auch zu erwarten war.

Substituirt man den daraus abgeleiteten Werth von α in die Gleichung mit p, so erhält man zur Berechnung des Verhältnisses von P zu p, wenn wieder n'^2 gegen $2n'$ vernachlässigt wird, die Gleichung:

$$\frac{P}{p} = \frac{a}{2\,b}\,\frac{\omega^2}{(\omega'^2 - \omega^2)}\left(1 + \frac{ag}{\sqrt{(c^2 - a^2)\,b^2\omega^4 + a^2g^2}}\right)$$

$$= \frac{a}{4\,n'b}\left(1 + \frac{ag}{\sqrt{(c^2 - a^2)\,b^2\omega^4 + a^2g^2}}\right).$$

Hier ist der Werth des Verhältnisses $\frac{P}{p}$ nicht mehr bloß von dem Werthe n' und dem des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ abhängig, sondern er ändert sich auch mit den absoluten Größen von c, a und ω, und wird desto kleiner, je größer $c^2 - a^2$ und ω^2 werden, indem der Werth von $\frac{a}{b}$ constant bleibt.

Nimmt man z. B. $b = 4a$, $c = 3{,}5a$, $a = 0^m{,}3$, $n' = 0{,}02$ und $\omega^2 = g$, d. h. nimmt man an, daß der Regulator in der Minute ungefähr 30 Umdrehungen macht, so findet man den Werth:

$$P = 3{,}904\,p,$$

welcher gegen den in dem Vorhergehenden gefundenen sehr klein ist, aber als eine untere Grenze bei diesem Systeme betrachtet werden muß.

Gleichung des Gleichgewichtes für die dritte Einrichtung. (Fig. 8 und 9.)

§. 70. Wegen des Nachtheiles, welcher schon an und für sich mit der Verlängerung der Stäbe BC, DC verbunden ist, weil man die Muffe G in eine gewisse Entfernung unter die Kugeln P bringen muß, zieht man dieser Einrichtung allgemein die in Fig. 8 angegebene vor, bei welcher man auch das Verhältniß von b zu a gewissermaßen beliebig vergrößern kann, und die Figur $ABCD$ eine wirkliche Raute ist. Aber statt hier die Stäbe AP, AP', welche die Kugeln tragen, in die Verlängerung der Seiten AB und AD zu bringen, läßt man sie mit dieser Verlängerung einen gewissen Winkel PAB bilden, welchen wir mit m bezeichnen wollen, und welcher den Zweck hat, zu verhüten, daß die Winkel A und C bei geringen Geschwindigkeiten der Maschine nicht zu spitz werden.

Bei dieser Einrichtung hat man offenbar:

$$h = 2a\,cos.(m + \alpha),\quad dh = -2a\,sin.(m + \alpha)\,d\alpha,$$

$$\frac{P}{g}\,b^2\omega'^2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha - Pb\,sin.\,\alpha - a\,sin.(m + \alpha)\,p = 0,$$

und wenn man $p = 0$ und ω für ω' setzt, so hat man wieder die Gleichung:

$$b \cos. \alpha = AI = \frac{g}{\omega^2},$$

woraus successive und näherungsweise folgt:

$$\frac{P}{p} = \frac{a}{b} \frac{\sin.(m+\alpha)}{\sin. \alpha} \frac{\omega^2}{(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{a}{2n'b} \frac{\sin.(m+\alpha)}{\sin. \alpha}$$

$$= \frac{a}{2n'b}\left(\cos. m + \sin. m \frac{g}{\sqrt{b^2\omega^4 - g^2}}\right).$$

Nimmt man dieselben Data wie oben, und setzt außerdem $m = 30^0$, folglich $\sin. m = 0{,}50$, $\cos. m = 0{,}866$, so findet man:

$$P = 10{,}125\, p.$$

Wenn man dagegen $m = o$ setzte oder die Stäbe AP, AP' genau in die Verlängerung der Stäbe AB, AD brächte, so fände man bloß $P = 6{,}25\, p$, so daß durch die Vergrößerung des Winkels m auch das Verhältniß von P zu p vergrößert wird.

Nach dieser Untersuchung läßt sich in jedem besondern Falle leicht beurtheilen, welche von diesen drei Einrichtungen des Centrifugalregulators vor den beiden übrigen den Vorzug verdient, und zugleich kann man darnach den Einfluß jeder dieser Einrichtungsarten a priori bestimmen, wenn man sich nur erinnert, daß das in Rede stehende Verhältniß nicht vermindert werden kann, ohne daß die Ausdehnung des Weges der Muffe gleichzeitig abnimmt.

Betrachtung des Falles, wo sich die Geschwindigkeit verzögert. — Relation zwischen der zur Ueberwindung des Widerstandes erforderlichen, kleinsten und größten Geschwindigkeit.

§. 71. Wenn die Geschwindigkeit der Maschine statt, wie wir bisher angenommen haben, zuzunehmen, abnimmt, so daß sie $= \omega'' = (1 - n'')\,\omega$ wird, so muß das Gewicht der Kugeln alsdann der Wirkung der Centrifugalkraft und des Widerstandes p das Gleichgewicht halten. Die Gleichungen bleiben also bis auf das Zeichen von p dieselben, so daß in jedem Falle die nothwendige Relation:

$$\frac{\omega^2}{\omega'^2 - \omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega''^2} \text{ oder } \omega'^2 + \omega''^2 = 2\,\omega^2$$

stattfindet, woraus folgt, wenn man $(1+n')\,\omega$ für ω' und $(1-n'')\,\omega$ für ω'' setzt:

$$n'' = 1 - \sqrt{1 - n'(2+n')} =$$

$$n'(1 + {}^1\!/_2 n') + {}^1\!/_2 n'^2 (1 + {}^1\!/_2 n')^2 + {}^1\!/_2 n'^3 (1 + {}^1\!/_2 n')^3 - etc.,$$

oder wenn man beim ersten Gliede dieser sehr schnell convergirenden Reihe stehn bleibt:

$$n'' = n' + {}^1\!/_2 n'^2,\ n'' - n' = {}^1\!/_2 n'^2,$$

welches Resultat zeigt, daß die Muffe und die regulirende Schütze für fast gleiche Abweichungen der Geschwindigkeit zu beiden Seiten der mittlern Geschwindigkeit anfangen sich zu bewegen, wofern die Größe dieser Abweichungen, welche hier ein Maaß der Empfindlichkeit oder der regulirenden Energie des Apparates ist, hinreichend klein ist.

Allein dieser Apparat muß auch noch andere Bedingungen erfüllen, welche in Verbindung mit den vorhergehenden dazu dienen, in jedem Falle den Werth zu bestimmen, welchen man für a, b anwenden muß; denn er muß die Schütze vermittelst einer neuen Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit der Maschine vollständig verschließen oder öffnen können, weil die Muffe so lange in Ruhe bleibt, als die Geschwindigkeit nicht größer als ω' und nicht kleiner als ω'' wird.

Bedingungen in Beziehung auf die beiden äußersten Grenzen der Geschwindigkeit, welche man die Maschine annehmen lassen will.

§. 72. Es seien α' und α'', h' und h'' die Werthe des Winkels α und der Tiefe h, welche gleichzeitig die Lage der Seitenstäbe und der Muffe für den völligen Verschluß und die völlige Oeffnung der Schütze bestimmen, und außerdem seien $\omega_1' = (1 + n_1')\,\omega$, $\omega_1'' = (1 - n_1'')\,\omega$ die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten, welche die Maschine soll annehmen können; so hat man gleichzeitig den vier folgenden Gleichungen zu genügen, wenn man z. B. den Fall betrachtet, welcher sich auf die in Fig. 9 dargestellte Einrichtung bezieht:

$$\frac{P}{g}\,\omega'^2 b^2 \cos.\alpha - Pb - pa = 0,$$

$$\frac{P}{g}\,\omega^2 b^2 \cos.\alpha - Pb = 0,$$

$$\frac{P}{g}\,\omega_1'^2 b^2 \cos.\alpha' - Pb - pa = 0,$$

$$\frac{P}{g}\,\omega_1''^2 b^2 \cos.\alpha'' - Pb + pa = 0,$$

was übrigens voraussetzt, daß der Widerstand p für alle Lagen der in Rede stehenden Schütze fast constant bleibt. Wenn dieses nicht der Fall wäre, so müßte man für p resp. seine α' und α'' entsprechenden Werthe p' und p'' substituiren. Diese Gleichungen können durch die gleichbedeutenden:

$$P = \frac{a}{b}\;\frac{\omega^2}{\omega'^2 - \omega^2}\,p = \frac{a}{2n'b}\,p,\; b\cos.\alpha\,\frac{g}{\omega^2},$$

$$b\cos.\alpha' = \frac{\omega'^2}{\omega_1'^2}\;\frac{g}{\omega^2} = \frac{(1+2n')}{(1+2n_1')}\;\frac{g}{\omega^2},$$

$$b\cos.\alpha'' = \left(\frac{2\omega^2 - \omega'^2}{\omega_1''^2}\right)\frac{g}{\omega^2} = \frac{(1-2n')}{(1-2n_1'')}\;\frac{g}{\omega^2},$$

ersetzt werden, wenn man hier wieder das Quadrat der Brüche n', n_1', n_1'', welche als sehr klein vorausgesetzt werden, gegen die Einheit vernachlässigt.

Hieraus folgt wegen $h = 2a\cos.\alpha$ allgemein:

$$h = 2\frac{ag}{b\,\omega^2},\; h' = 2\frac{a}{b}\;\frac{\omega'^2}{\omega_1'^2}\;\frac{g}{\omega^2} = 2\frac{a}{b}\;\frac{(1+2n')}{(1+2n_1')}\;\frac{g}{\omega^2},$$

$$h'' = 2\,\frac{a}{b}\,\frac{(2\omega^2 - \omega'^2)}{\omega_1'^2}\,\frac{g}{\omega^2} = 2\,\frac{a}{b}\,\frac{(1 - 2n')}{(1 - 2n_1'')}\,\frac{g}{\omega^2},$$

$$h - h' = 2\,\frac{a}{b}\left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega_1'^2}\right)\frac{g}{\omega^2} = 4\,\frac{a}{b}\,\frac{(n_1' - n')}{(1 + 2n_1')}\,\frac{g}{\omega^2},$$

$$h'' - h = 2\,\frac{a}{b}\,\frac{(2\,\omega - \omega'^2 - \omega_1''^2)}{\omega_1''^2}\,\frac{g}{\omega^2} = 4\,\frac{a}{b}\,\frac{(n_1'' - n')}{1 - 2n_1''}\,\frac{g}{\omega^2},$$

wovon die beiden letzten Ausdrücke das Maaß der Amplitude der Bewegung der Muffe zu beiden Seiten ihrer mittlern oder Gleichgewichtslage geben.

Da diese Ausdrücke den gemeinschaftlichen Factor $2\,\frac{ag}{b\omega^2}$ haben, so sieht man, daß ihr Verhältniß davon unabhängig ist und völlig bestimmte Werthe hat, sobald die Zahlen n', n_1' und n_1'' gegeben sind, welche die Abweichungen der Winkelgeschwindigkeit von ihrem mittlern Werthe bestimmen.

Wenn man z. B. die Bedingung aufstellen will, daß die Amplituden $h - h'$, $h'' - h$ der Bewegung der Muffe einander gleich sein sollen, was beim ersten Anblicke zweckmäßig erscheinen kann, so müßten diese Zahlen der Gleichung:

$$1 - \frac{\omega'}{\omega_1'^2} = \frac{2\omega^2 - \omega'^2}{\omega_1''^2} - 1 \text{ oder } \frac{\omega_1''^2}{\omega_1'^2} = \frac{2\omega^2 - \omega'^2}{2\omega_1'^2 - \omega'^2}$$

genügen, und diese Relation gibt eine dieser drei Größen, wenn die beiden andern bekannt sind. Es sei z. B. $n_1'' = n_1' = 0{,}04$, was darauf hinausläuft, $\omega_1'' = 0{,}96\,\omega$, $\omega_1' = 1{,}04\,\omega$ zu setzen, so findet man näherungsweise $\omega' = 1{,}0295\,\omega$ oder $n' = 0{,}03$.

Allein es ist nicht durchaus nöthig, die Zahl n', deren Kleinheit den Grad der Empfindlichkeit des Apparates angibt (§. 58), auf diese Weise zu beschränken; denn es schadet nicht, wenn der sich aus der obigen Gleichung für gegebene Werthe von n' und n_1' oder von ω' und ω_1' ergebende Werth von n_1'' etwas von dem Werthe n_1' verschieden ist. Nimmt man z. B. $n' = 0{,}02$, wie in §. 58 und $n_1' = 0{,}04$, so findet man $\omega_1'' = 0{,}9245\,\omega_1'$ oder $n_1'' = 0{,}037$, so daß die Abweichungen der Winkelgeschwindigkeit zu beiden Seiten ihres mittlern Werthes ω nur um die zu vernachlässigende Größe $0{,}003\,\omega$ verschieden sind.

Gleichungen für die Bedingungen in Beziehung auf die materielle Constitution des Systemes.

§. 73. Wir betrachten also die Zahl n_1'' als durch die obige Gleichung bestimmt; allein die Kenntniß der Zahlen n', n_1', n_1'' und der Größen p und $h - h'$ ist nicht zur Bestimmung der übrigen nothwendigen Elemente der Aufgabe, wie P, a, b, ω, h, *etc.* hinreichend, dennn wir haben hier weniger Gleichungen als unbekannte Größen, und es müssen mit diesen Gleichungen noch die besondern Bedingungen verbunden werden, welche die materielle Constitution des Systemes liefert, und welche die den anscheinend ganz unbestimmten Größen beizulegenden Werthe beschränken.

Von diesen letzten Bedingungen sind die wichtigsten bereits in §. 58 bei Gelegenheit der Betrachtung der in Fig. 6 dargestellten Einrichtung, welche uns auch jetzt beschäftigt, angeführt; nämlich: 1) dürfen die Kugeln bei ihrer tiefsten dem Winkel α'' entsprechenden Lage den Hebel GL, welcher die Muffe mit der Schütze verbindet und eine fast horizontale Lage hat, nicht berühren, und 2) dürfen dieselben Kugeln die untern Rautenstäbe BC und DC nicht berühren, wenn sie ihre tiefste Lage haben. Zu diesen Bedingungen kann man noch die hinzufügen, daß der Winkel α'' niemals kleiner als $20-30°$ ist, damit man den Biegel, welcher in A die Stäbe der Kugeln aufnimmt, nicht zu sehr auszuschneiden, oder diese Stäbe selbst zu krümmen braucht, was aber dennoch zuweilen geschieht. Endlich kann man annehmen, daß der Halbmesser der Kugeln in keinem Falle größer als $0^m,12$ ist, so daß sie ein Gewicht von ungefähr 52 Kilogr. haben, daß ferner dieselbe Länge der Stäbe CB und CD, so wie die des Hebels GL nicht mehr als $0^m,025$ betragen darf, und daß endlich der Spielraum zwischen den Kugeln und diesen Stäben oder diesen Hebeln wenigstens $0^m,035$ beträgt.

Bezeichnet ferner j das Intervall zwischen der Mitte der Muffe G und dem Mittelpuncte der Gelenke C, so geben die beiden ersten Bedingungen offenbar die Ungleichheiten:

$$h - b\, cos.\, \alpha'' \text{ oder } 2\,\frac{ag}{b\omega^2} - \frac{(1-2n')}{1-2n_1''}\,\frac{g}{\omega^2}$$

$$> 0^m,12 + 0^m,025 + 0^m,035 + j = 0^m,18 + j,$$

$$BP.\, sin.\, CBP \text{ oder } (b-a)\, sin.\, 2\alpha'' =$$

$$2\left(1-\frac{a}{b}\right) sin.\, \alpha''\,\frac{(1-2n')}{1-2n_1''}\,\frac{g}{\omega^2} > 0^m,18,$$

worin α'' wenigstens $=20°$ sein muß.

Diese Ungleichheiten geben die Grenzen der Werthe, welche man dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ beilegen kann, wenn man außer α'' auch die Größen ω oder $h-h'$ kennt, welche unter sich durch die Relation:

$$h - h' = 4\,\frac{a}{b}\,\frac{(n_1' - n')}{1+2n_1'}\,\frac{g}{\omega^2}$$

verbunden sind.

Hat man die Werthe von α'', ω, p, $h-h'$ und $\frac{a}{b}$ nach diesen Betrachtungen und nach denen, welche sich etwa auf das Hebelsystem beziehen, was zur Uebertragung der Bewegung der Muffe auf die Schütze dient, bestimmt, so ergeben sich daraus unmittelbar die Werthe von P, b, a, *etc.* vermittelst der Gleichungen:

$$P = \frac{ap}{2n'b},\ b = \frac{(1-2n')}{cos.\,\alpha''\,(1-2n_1'')}\,\frac{g}{\omega^2},\ a = \frac{a}{b}\,b,\ etc.$$

Untersuchung dieser Bedingungsgleichungen und Grenzen der zu wählenden Verhältnisse.

§. 74. Sollen aber diese Werthe zulässig sein, so dürfen sie gewisse Grenzen, welche die Erfahrung kennen lehrt, nicht überschreiten. So würde es z. B. nachtheilig sein, wenn P viel größer wäre, als 36 bis 40 Kilogr. und b größer, als 1 bis 1,1 Meter. Nun lehrt aber der obige Ausdruck von b, daß diese letzte Grenze merklich überschritten würde, wenn man den Größen $\cos.\alpha''$ und $\frac{\omega^2}{g}$ Werthe beilegte, welche viel kleiner wären, als die Einheit, und diese Bedingung wird erfüllt, wenn man den Winkel α'' nicht größer als 30° nimmt und den Regulator nicht weniger, als 30 Umdrehungen in der Minute machen läßt. Andererseits würde man der Zahl n' keinen größern Werth als 0,03 beilegen können, ohne dem Apparate seine Regulirungsfähigkeit zu nehmen, und da die erste der obigen Ungleichheiten

$$\frac{a}{b} > (0^m,18 + j)\frac{\omega^2}{2g} + {}^1/_2\frac{1-2n'}{1-2n_1''} > 0,1 + 0,5 = 0,6$$

gibt, weil j wenigstens $= 0^m,02$ ist, nach dem Vorhergehenden ω^2 größer als g sein muß, und endlich der Bruch $\frac{1-2n'}{1-2n_1''}$, worin n' kleiner ist als n_1'' selbst die Einheit übersteigt; so folgt, daß nothwendig:

$$P > \frac{0,6}{0,06}\,p > 10p \text{ und } p < \frac{40}{10} < 4 \text{ Kilogr.,}$$

ist, welche Bedingung veranlassen könnte, daß man in gewissen Fällen der Größe $h - h'$ zu kleine Werthe beilegte, welche die Gleichung:

$$h - h' = 4\,\frac{a}{b}\,\frac{(n_1' - n')}{1 + 2n_1'}\,\frac{g}{\omega^2}$$

nicht gestattet; denn das Product $p\,(h - h')$, welches gewissermaßen den Nutzeffect des Regulators für die letzte aufsteigende Bewegung der Muffe ausdrückt, hat einen durch die entsprechende Amplitude der Bewegung der Schütze und des durch diese Bewegung verursachten Widerstandes bestimmten Werth, so daß p nicht vermindert werden kann, ohne daß $h - h'$ vergrößert wird. Substituirt man übrigens den aus dieser letzten Relation abgeleiteten Werth von $\frac{a}{b}$ in den Ausdruck von P, so erhält man den neuen Ausdruck:

$$P = \frac{(1 + 2n_1')}{8n'(n_1' - n')}\,\frac{\omega^2}{g}\,p\,(h - h'),$$

worin das Product $p\,(h - h')$ bekannt und $\frac{\omega^2}{g} > 1$ ist, und welcher einen Werth von P geben kann, der viel größer ist, als 40 Kilogr., in welchem Falle man auf die Anwendung der in Fig. 6 dargestellten Einrichtung verzichten und eine der in Fig. 7 und 8 dargestellten Einrichtungen des Regulators anwenden müßte.

Wir glauben übrigens, daß es nicht nöthig sein wird, die Bedingungsgleichungen oder Ungleichheiten für diese letzten Einrichtungen des Regulators hier speciell anzuführen; denn aus den vorhergehenden Untersuchungen geht zur Genüge hervor, welchen Weg man einzuschlagen hat.

Ueber das System der Ein- und Ausrückung, wobei die Kraft des Regulators durch die der Maschine ergänzt wird.

§. 75. Wenn die Werthe von p und $h - h'$ so groß sind, daß es unmöglich ist, die Schütze direct durch die Muffe des Regulators in Bewegung zu setzen, so benutzen die Maschinenbauer die Bewegung der Maschine selbst zu diesem Zwecke und die ganze Einrichtung ist in Fig. 10 angegeben.

Der Regulator wird alsdann bloß zur Bewegung der Klauenmuffe L vermittelst des Hebels GL angewandt. OK ist eine Welle, welche direct durch die Maschine in Bewegung gesetzt wird, und um welche sich die Winkelräder N, M ohne Längengleitung frei drehen lassen, und welche in das Rad Q eingreifen, welches dazu dient, die Bewegung bald in dem einen, bald in dem andern Sinne von der Welle OK auf die Schütze zu übertragen, sobald die Klauenmuffe L, welche längs dieser Welle fortgleiten, aber sich nicht um sie drehen kann, in das Rad M oder N eingreift, wodurch diese Räder mit der Welle fest verbunden werden.

Aus dieser Einrichtung folgt, daß die Kraft p blos durch die ersetzt ist, welche erfordert wird, um die Muffe längs der Welle fortzuschieben und mit einem oder dem andern der Räder N, M in Eingriff zu bringen. Aber da die Kraft p von dem Augenblicke an, wo die Klauen der Muffe L mit denen der Räder in Berührung kommen, verstärkt werden muß, um die bei dem Ein- und Ausrücken stattfindenden Widerstände zu überwinden; so würde eine gewisse Zeit verfließen, ehe die Maschine die diesem Widerstande entsprechende neue Geschwindigkeitszu- oder Abnahme erhalten hat.

Bedingungen für die Einrichtung dieses Systemes.

§. 76. Bezeichnet p' alsdann die Kraft, welche die Muffe G des Regulators ausüben muß, und sind $\omega_2' = (1 + n_2')\,\omega$, $\omega_2'' = (1 - n_2'')\,\omega$ die entsprechenden Geschwindigkeiten des Regulators; so hat man, wenn man bemerkt, daß die Winkel α', α'' und die Tiefen h', h'' sich nicht geändert haben, die neuen Bedingungsgleichungen:

$$\frac{P}{g}\,\omega_2'^2\, b^2 \cos.\alpha' - Pb - p'a = 0,$$

$$\frac{P}{g}\,\omega_2''^2\, b^2 \cos.\alpha'' - Pb + p'a = 0$$

zu genügen, welche bloß zur Bestimmung der Werthe von ω_2', ω_2'' dienen, wenn der Apparat schon construirt ist, oder in Verbindung mit den vorhergehenden Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von P, a, b, *etc.*, wenn man die ersten Werthe willkürlich annehmen will; aber da man alsdann mehr Bedingungsgleichungen zu erfüllen hätte, als man unbekannte Größen hat, so müßte man, wenn man die Werthe von ω_1' und ω_1'' wieder willkürlich annehmen wollte, die Gleichungen des Gleichgewichtes, worin diese Größen vorkommen, bloß als zu ihrer Bestimmung geeignet betrachten, wenn die übrigen Größen der Aufgabe bestimmt wären, und folglich die in Rede stehenden Gleichungen, so wie alle sich daraus ergebenden Gleichungen durch andere ersetzen, worin man resp. p', ω_2', ω_2'', n_2', n_2'', *etc.* für p, ω_1', ω_1'', n_1', n_1'', *etc.* substituiren müßte.

Was die Bestimmungsart von p anlangt, so besteht sie bloß darin, vermittelst des Dynamometers, oder durch irgend ein anderes Mittel die Größe der Kraft zu bestimmen, welche in der Richtung der Welle AH des Regulators auf die Muffe G wirken muß, um die Klauenmuffe L während der Bewegung der Maschine mit einem der Räder N, M in Eingriff zu bringen, was mit keiner Schwierigkeit verbunden ist, wenn das Eingriffs- und Hebelsystem einmal eingerichtet ist. Man kann auch die Widerstände dieses Systemes nach dem, was in den folgenden Abschnitten gesagt werden wird, direct berechnen, wenn man bemerkt, daß der Eingriffswiderstand, nach der Richtung der Axe OK der Muffe L gemessen, nothwendig herrührt: 1) von der Reibung, welche auf den Flächen der Klauen durch den Druck hervorgerufen wird, welchen man darauf normal wirken lassen muß, um den von dem Rade Q herrührenden Widerstand zu überwinden, und 2) von der Reibung, welche längs der Welle OK durch das eigene Gewicht der Muffe und durch die von diesem Drucke herrührende Rückwirkung entsteht, und namentlich auf der vorspringenden Leiste stattfindet, welche als Leitung der Muffe längs der erwähnten Welle dient.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß der Widerstand p' nach den ungünstigsten Voraussetzungen und für den ungünstigsten Augenblick berechnet werden muß, so daß die wirkliche Kraft niemals größer werden kann, als die nach der Berechnung oder Beobachtung angewandte, und da diese Kraft in der ganzen Ausdehnung der Bewegung der Muffe L während des Ein- oder Ausrückens wirken muß; so wird es zweckmäßig sein, diese Ausdehnung mit in die Werthe von $h-h'$, $h''-h$ aufzunehmen, welche nach der Voraussetzung den oben erwähnten Grenzgeschwindigkeiten ω_2' und ω_2'' entsprechen.

Die sich auf die Aufstellung des Regulators speciell beziehenden Bedingungsgleichungen werden also, wenn wir wieder die in Fig. 6 dargestellte Einrichtung betrachten:

$$P=\frac{a}{b}\,\frac{\omega^2}{\omega'^2-\omega^2}\,p=\frac{a}{2n'b}\,p,$$

$$b\cos.\alpha''=\frac{2\omega^2-\omega'^2}{\omega_2''^2}\,\frac{g}{\omega^2}=\frac{1-2n'}{1-2n_2''}\,\frac{g}{\omega^2},$$

$$h-h'=2\,\frac{a}{b}\left(1-\frac{\omega'^2}{\omega_2'^2}\right)\frac{g}{\omega^2}=4\,\frac{a}{b}\,\frac{(n_2'-n')}{1+2n_2'}\,\frac{g}{\omega^2},$$

$$h''-h=4\,\frac{a}{b}\,\frac{(n_2''-n')}{1-2n_2''}\,\frac{g}{\omega^2},$$

womit man die Ungleichheiten in §. 73 verbinden muß, welche sich hier in:

$$\frac{a}{b} > \frac{(1-2n')}{2(1-2n_2'')} + (0,09 + {}^1/_2 j)\frac{\omega^2}{g} < 1 - \frac{0,09}{sin.\alpha''}\frac{(1-2n_2'')}{(1-2n')}$$

verwandeln, und worin α'' immer größer als 20° genommen werden muß.

Art und Weise, wie die Wirkung der Schwere und die der Centrifugalkraft der Stäbe des Regulators in Betracht gezogen wird.

§. 77. Ehe wir diesen Gegenstand abschließen, glauben wir die Art und Weise angeben zu müssen, wie die Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft auf die Seitenstäbe des Regulators in Rechnung gebracht wird; denn diese Wirkung könnte einen gewissen Einfluß haben, wenn der Widerstand p sehr gering wäre.

Wenn man wieder die Reibung in den Gelenken des Systemes, deren Wirkung sich zu der von p hinzufügt und immer ein sehr kleiner Bruch der letztern bleibt, unberücksichtigt läßt, und außerdem annimmt, daß die Seitenstäbe eine prismatische Form haben, oder wenn dieses nicht der Fall ist, für den veränderlichen Querschnitt einen constanten mittlern Querschnitt substituirt, wodurch die Resultate der Rechnung nur wenig geändert werden; so kann man zunächst die Gewichtskraft der untern Stäbe BC (Fig. 6 und 7) in zwei andere Kräfte zerlegen, wovon die eine in C und die andere in B wirkt. Die erste vereinigt sich mit dem Gewichte der Muffe G, um den Werth von p zu vergrößern oder zu verkleinern, je nach der Einrichtung des Systemes und dem Sinne der eigenen Bewegung dieser Muffe. Die zweite Kraft wird wieder in zwei andere zerlegt, welche in A und P wirken und wovon sich die eine mit dem Gewichte P der Kugeln verbindet, während die andere durch den Widerstand der Axe A aufgehoben wird. Ebenso zerlegt man das Gewicht der Stäbe AB in zwei andere Kräfte, welche in den Puncten A und B wirken.

Bezeichnen nun q, q' und o resp. das bloße Gewicht der untern und obern Stäbe und der Muffe G, so findet man für den Fall der Fig. 6 und wenn die frühern Bezeichnungen beibehalten werden, daß das Gewicht P der Kugeln um die Größe ${}^1/_2(q\frac{a}{b} + q')$ und der Widerstand p um $q + o$ vermehrt oder vermindert werden muß, je nachdem die Muffe sich auf- oder abwärts bewegt.

Was die Centrifugalkraft der Seitenstäbe anlangt, so findet man leicht, daß sie für jeden der Centrifugalkraft einer Masse gleich ist, welche ${}^1/_3$ der Masse des Stabes beträgt, und an dem entferntesten Ende von der Rotationsaxe concentrirt gedacht wird. Um also die Wirkung der Centrifugalkraft auf die Seitenstäbe in Rechnung zu bringen, braucht man die Masse $M = \frac{P}{g}$ der Kugeln nur um die Größe $\frac{1}{3g}(q\frac{a}{b} + q')$ zu vermehren.

Für den Fall der Figuren 8 und 9 ist zu bemerken, daß das Gewicht der Muffe und der obern Raute $ABCD$ dem der Kugeln entgegenwirkt, so daß man, wenn hier q, q' und q'' resp. die Gewichte der Stäbe AB, AP und BC bezeichnen, in den betreffenden Gleichungen des Gleichgewichtes (§. 70)

$$P \text{ durch } P + {}^1/_2 q' - {}^1/_2 (q + q'') \frac{BK}{IP}$$

$$= P + {}^1/_2 q' - {}^1/_2 (q + q'') \frac{a}{b} \frac{\sin.(m + \alpha)}{\sin.\alpha},$$

$$\frac{P}{g} \text{ durch } \frac{P}{g} + \frac{1}{3g} q' + \frac{1}{3g} (q + q'') \frac{AK}{AI}$$

$$= \frac{P}{g} + \frac{1}{3g} q' + {}^1/_3 (q + q'') \frac{a}{b} \frac{\cos.(m + \alpha)}{\cos.\alpha},$$

p durch $p - o - q''$, wenn die Geschwindigkeit zunimmt, und durch $p + o + q''$, wenn sie abnimmt, oder sich die Muffe aufwärts bewegt, ersetzen muß.

Specielle Anwendung auf den durch Figur 6 dargestellten Regulator.

§. 78. Betrachten wir noch als Beispiel den Fall der Figur 6, so verwandelt sich die erste der Gleichungen in §. 62, wenn man darin der Einfachheit wegen das Verhältniß $\frac{a}{b} = I$ setzt, in:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{P}{g} + \frac{1}{3g}(qI + q')\right\} \omega'^2 b^2 \cos.\alpha \\ - \left\{P + {}^1/_2 (qI + q')\right\} b - (p + q + o) a \end{array}\right\} = 0$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{P}{g} + \frac{1}{3g}(qI + q')\right\} \omega'^2 b^2 \cos.\alpha \\ - \left\{P + ({}^3/_2 q + o) I + {}^1/_2 q'\right\} b - pa \end{array}\right\} = 0,$$

und die drei folgenden Gleichungen des angeführten Paragraphen verwandeln sich ebenso in:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{P}{g} + \frac{1}{3g}(qI + q')\right\} \omega^2 b^2 \cos.\alpha \\ - \left\{P + ({}^3/_2 q + o) I + {}^1/_2 q'\right\} b \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{P}{g} + \frac{1}{3g}(qI + q')\right\} \omega_1'^2 b^2 \cos.\alpha' \\ - \left\{P + ({}^3/_2 q + o) I + {}^1/_2 q'\right\} b - pa \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{P}{g} + \frac{1}{3g}(qI + q')\right\} \omega_1''^2 b^2 \cos.\alpha'' \\ - \left\{P + ({}^3/_2 q + o) I + {}^1/_2 q'\right\} b + pa \end{array}\right\} = 0.$$

Eliminirt man $\cos.\alpha$ zwischen der ersten und zweiten dieser vier neuen Gleichungen, so erhält man:

$$(A) \ldots . \; P = \frac{\omega^2}{(\omega'^2 - \omega^2)} pI - (^3/_2 q + o) I - ^1/_2 q'$$

$$= \left(\frac{p}{2n'} - ^3/_2 q - 0\right) I - ^1/_2 q',$$

welcher Ausdruck das Merkwürdige darbietet, daß er von den Größen unabhängig ist, welche von der Wirkung der Centrifugalkraft auf die Stäbe herrühren, und da man für den Fall, wo sich die Winkelgeschwindigkeit des Regulators verzögert, so daß sie sich auf ω' reducirt, und die Muffe sich nach entgegengesetztem Sinne bewegt, ebenfalls die Gleichung:

$$P = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega''^2} pI - (^3/_2 q' + o) I - ^1/_2 q'$$

hat (§. 71), so sieht man, daß man auch in diesem Falle zwischen ω' und ω'' die Relation:

$$\omega'^2 + \omega''^2 = 2\omega^2$$

hat, welche zur Bestimmung einer dieser Geschwindigkeiten durch die andere dient.

Eliminirt man P zwischen den beiden ersten der in Rede stehenden vier Gleichungen, so findet man:

$$\cos.\alpha = \frac{gpI}{b\left\{pI\omega^2 - \left\{(^7/_6 qI + o) I + ^1/_6 q'\right\}(\omega'^2 - \omega^2)\right\}},$$

und für die Tiefe h, in welcher die Muffe bei der mittlern, gleichförmigen Geschwindigkeit unter dem festen Puncte A bleibt, hat man den Ausdruck:

$$(B) \ldots \; h = 2a \cos.\alpha = \frac{2gpI^2}{pI\omega^2 - \left\{(^7/_6 q + o) I + ^1/_6 q'\right\}(\omega'^2 - \omega^2)},$$

welcher, wie der vorhergehende, wesentlich von den Gliedern abhängig ist, welche von der Wirkung der Centrifugalkraft auf die Stäbe herrühren.

Was die beiden letzten dieser vier Gleichungen anlangt, so kann man sie durch die sehr einfachen Relationen ersetzen, welche sich aus ihrer Verbindung mit den übrigen Gleichungen ergeben.

Zieht man zunächst die dritte Gleichung von der ersten ab, so erhält man:

$$(C) \ldots\ldots \; \omega'^2 \cos.\alpha = \omega_1'^2 \cos.\alpha'.$$

Substituirt man alsdann den aus den beiden ersten Gleichungen abgeleiteten Werth von P in die dritte und vierte Gleichung, multiplicirt hierauf diese beiden letzten Gleichungen resp. mit $\omega_1'^2 \cos.\alpha'$, $\omega_1''^2 \cos.\alpha''$ und zieht die so erhaltenen transformirten Gleichungen von einander ab; so erhält man die neue Relation:

$$\omega_1'^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega'^2 - \omega^2} - 1\right) \cos.\alpha' = \omega_1''^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_1'^2 - \omega^2} + 1\right) \cos.\alpha'',$$

woraus sich die dritte:

$$(D) \ldots . \; (2\omega^2 - \omega'^2) \cos.\alpha' = \omega_1''^2 \cos.\alpha''$$

ergibt, welche in Verbindung mit der vorhergehenden (C) zur Bestimmung der Werthe von $\cos.\alpha''$, $\cos.\alpha'$ vermittelst des bereits oben gefundenen Werthes von $\cos.\alpha$, und zur successiven Ableitung aller übrigen Größen oder Relationen, wovon die Auflösung der Aufgabe abhängt, dient.

Allgemeine Bedingungen der Aufstellung des Centrifugalregulators.

§. 79. Man hat z. B.

$$(E)\ldots\ldots h-h'=2a\cos.\alpha\left(1-\frac{\omega'^2}{\omega_1'^2}\right)=h\left(1-\frac{\omega'^2}{\omega_1'^2}\right)$$

$$=\frac{2gpI^2\left(1-\frac{\omega'^2}{\omega_1'^2}\right)}{pI\omega^2-\left\{(^7/_6 q+o)I+{}^1/_6 q'\right\}(\omega'^2-\omega^2)}$$

$$(F)\ldots\ldots h''-h=2a\cos.\alpha\left(\frac{2\omega^2-\omega'^2}{\omega_1''^2}-1\right)=h\left(\frac{2\omega^2-\omega'^2}{\omega_1''^2}-1\right)$$

$$=\frac{2gpI^2\left(\frac{2\omega^2-\omega'^2}{\omega_1''^2}\right)}{pI\omega^2-\left\{(^7/_6 q+o)I+{}^1/_6 q'\right\}(\omega'^2+\omega^2)},$$

und wenn man, wie in §. 72, diese Werthe von $h-h'$, $h''-h$ einander gleich setzt, so erhält man die Relation:

$$(G)\ldots\ldots \frac{\omega_1''^2}{\omega_1'^2}=\frac{2\omega^2-\omega'^2}{2\omega_1'^2-\omega'^2},$$

welche mit der in §. 72 identisch ist, und hinsichtlich des Größenverhältnisses von n_1'' zu n auf dieselben Folgerungen führt.

Substituirt man endlich in die Ungleichheiten des §. 73:

$$h-b\cos.\alpha''>0{,}18+j,\ 2(1-I)\sin.\alpha''\,b\cos.\alpha''>0{,}18,$$

so geben diese den Grenzausdruck des Verhältnisses I oder $\frac{a}{b}$, wenn man die Werthe der Größen q, q' und o a priori kennt.

Aber da diese Werthe implicite Functionen von a, b und selbst von P sind, und außerdem das Quadrat von I enthalten; so ist es zweckmäßiger, sie vermittelst der Relationen (E), welche:

$$h=\frac{(h-h')\,\omega_1'^2}{\omega_1'^2-\omega'^2},\quad \cos.\alpha=\frac{(h-h')}{2a}\,\frac{\omega_1'^2}{\omega_1'^2-\omega'^2}$$

geben, zu eliminiren, und vermöge der Gleichungen (F) und (G) ist:

$$(H)\ldots\ b\cos.\alpha''=\frac{(2\omega^2-\omega'^2)}{\omega_1'^2-\omega'^2}\,\frac{\omega_1'^2}{\omega_1''^2}\left(\frac{h-h'}{2I}\right)$$

$$=\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}{(\omega_1'^2-\omega'^2)}\,\frac{(h-h')}{2I},$$

was auf die neuen Ungleichheiten:

$$(h-h')\frac{\omega_1'^2}{\omega_1'^2-\omega'^2}-\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}{(\omega_1'^2-\omega'^2)}\frac{(h-h')}{2I}>0,18+j,$$

$$\frac{(1-I)}{I}\sin.\alpha''\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}{(\omega_1'^2-\omega'^2)}(h-h')>0,18$$

führt, woraus folgt:

$$(I)\ldots\ldots I>\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)(h-h')}{2\omega_1'^2(h-h')-2(\omega_1'^2-\omega'^2)(0,18+j)},$$

$$I<\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)(h-h')\sin.\alpha''}{(2\omega_1'^2-\omega'^2)(h-h')\sin.\alpha''+0,18(\omega_1'^2-\omega'^2)}.$$

Aber wenn die Werthe von $h-h'$, welche in diesen Ungleichheiten vorkommen, gegeben werden; so darf man nicht vergessen: 1) daß ω vermöge der Relation (E), welche sich in:

$$(K)\ldots\ \omega^2\left\{pI-2n'(\tfrac{1}{6}q+o)I-\frac{n'}{3}q'\right\}=\frac{2gpI^2(\omega_1'^2-\omega'^2)}{(h-h')\omega_1'^2}$$

$$=\frac{4gpI^2(n_1'-n')}{(h-h')(1+2n')}$$

verwandelt, wenn man für ω', ω_1' resp. $(1+n')\omega$, $(1+n_1')\omega$ setzt, und wieder die Quadrate von n', n_1' vernachlässigt, davon abhängt, und 2) daß zwischen $h-h'$ und p eine nothwendige Relation stattfindet (§. 64), so daß das Product $p\ (h-h')$ in jedem Falle fast unveränderlich ist, und daß man bei einer gehörigen Einrichtung des Hebelsystemes, welches die Bewegung auf die Schütze überträgt, die Größe $h-h'$ nicht vermindern kann, ohne daß daraus eine entsprechende Zunahme des Werthes von p und folglich von P entspringt.

Da diese Grenzen von I ziemlich complicirt sind, so kann man dafür die von $b\cos.\alpha''$ substituiren, welche sich unmittelbar daraus ergeben; denn dividirt man den Ausdruck (H) von $b\cos.\alpha''$ durch jede dieser Grenzen, so erhält man:

$$(L)\ldots\left\{\begin{aligned}b\cos.\alpha''&<\frac{\omega_1'^2}{\omega_1'^2-\omega'^2}(h-h')-0,18-j\\&<\frac{(1+2n')}{2(n_1'-n')}(h-h')-0,18-j,.\\b\cos.\alpha''&>\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}{(\omega_1'^2-\omega'^2)}\frac{(h-h')}{2}+\frac{0,18}{2\sin.\alpha''}\\&>\frac{(1+4n_1'-2n')}{4(n_1'-n')}(h-h')+\frac{0,09}{\sin.\alpha''}.\end{aligned}\right.$$

Art und Weise, wie man allen diesen Bedingungen zusammengenommen genügen kann.

§. 80. Dieses sind sämmtliche Bedingungen, welche man in dem betrachteten allgemeinen Falle zu erfüllen suchen muß, so daß man keine unzulässigen Werthe von b, P und ω erhält.

Die Gleichung (K) gibt insbesondere:

$$(M)\ldots\begin{cases}\dfrac{\omega^2}{g}=\dfrac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}{\omega_1'^2}\,\dfrac{1}{b\cos.\alpha''\left\{1-\dfrac{2n}{p}({}^1/_6q+0)-\dfrac{n'}{p}\dfrac{q'}{3I}\right.}\\[2ex] \quad\;=\dfrac{(1+4n_1'-2n)}{(1+2n_1')}\,\dfrac{1}{b\cos.\alpha''\left\{1-\dfrac{2n'}{p}({}^1/_6q+0)-\dfrac{n'}{p}\dfrac{q'}{3I}\right.},\end{cases}$$

und wenn man hierin für I seinen aus der Gleichung (H) abgeleiteten Werth substituirt, so ergibt sich, wie in §. 74, daß, wenn man $b\cos.\alpha''$ viel größer nimmt, als die Einheit, was unzulässig ist, ω^2 immer größer sein muß, als g oder die Geschwindigkeit des Regulators von 30 Umdrehungen in der Minute. Man sieht sogar, daß das Verhältniß $\dfrac{\omega^2}{g}$ ohne Ende abnehmen müßte, wenn $b\cos.\alpha''$ immer kleiner werdende Werthe bekäme, und daß sich die Größe $\dfrac{2n}{p}({}^1/_6q+0)$ $-\dfrac{n'}{p}\dfrac{q'}{3I}$ fortwährend der Einheit nähert. Nun ist es aber nicht gestattet, der Größe ω Werthe beizulegen, welche gewisse Grenzen überschreiten, ohne daß der Widerstand der Luft, welcher auf die Kugeln und auf die Stäbe des Regulators wirkt, in den Gelenken Reibungen hervorruft, die schnell mit der Geschwindigkeit zunehmen, wodurch die Empfindlichkeit des Apparates vermindert wird.

Dieses letzten Umstandes wegen muß man der Größe $b\cos.\alpha''$ die möglichst größten Werthe beilegen, die Größen q, q', o oder die Dicke der Stäbe so viel vermindern, als es die Dauerhaftigkeit des Apparates gestattet und endlich das Verhältniß von n' zu p auf eine sehr kleine Größe reduciren. Aber da

$$P=\left(\frac{p}{2n'}-{}^3/_2q\right)I-{}^1/_2q'$$

ist, und I endliche Werthe behält, welche nicht kleiner sein können, als 0,6 (§. 74), so könnten sich daraus sehr große Werthe für P ergeben, was man ebenfalls vermeiden muß. Nach unserm Dafürhalten genügt man den Erfordernissen der Aufgabe oder den verschiedenen Bedingungen, welche man sich bei der materiellen Ausführung des Regulators stellen muß, am zweckmäßigsten, wenn man in allen Fällen ungefähr $n'=0{,}01\,p$ nimmt, was

$$P=50\,I-({}^3/_2q+o)\,I-{}^1/_2q'$$

gibt, so daß man, da I nicht kleiner sein kann, als 0,06 und sich auch der Einheit nicht sehr nähern kann, für das Gewicht der Kugeln Werthe von der entsprechenden Größe erhält.

Nachdem der Einfluß des Gewichtes und der Centrifugalkraft der Stäbe auf diese Weise gehörig vermindert ist, ohne daß man etwas über den Werth von $h-h'$ festgesetzt hat; kann man auch leicht den übrigen Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, wofern das Product $p\,(h-h')$ die Grenze nicht überschreitet, welche durch die zweite der Ungleichheiten (L) bestimmt wird, und welche offenbar

$$p\,(h-h') < \left(b\ cos.\ \alpha'' - \frac{0{,}09}{sin.\ \alpha''}\right)\frac{(\omega_1'^2-\omega'^2)}{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}\,200n'$$

$$< \frac{400n'\,(n_1'-n')}{1+4n_1'-2n'}\left(b\ cos.\ \alpha'' - \frac{0{,}09}{sin.\ \alpha''}\right)$$

gibt.

Nimmt man nach dem Vorhergehenden an, daß $b\ cos.\ \alpha''$ keinen größern Werth als 1^m und $sin.\ \alpha''$ keinen größern Werth als $^1/_2$, welcher $\alpha''=30°$ entspricht, bekommen soll; so hat man auch:

$$(O)\ldots b\ cos.\ \alpha'' - \frac{0{,}09}{sin.\ \alpha''} < 1 - 0{,}18 \doteq 0^m{,}82;$$

$$p\,(h-h') < 328\,\frac{n'\,(n_1'-n')}{1+4n_1'-2n'}.$$

Da der größte Werth, welchen die Zahl n_1' in dieser letzten Ungleichheit annehmen kann, offenbar nicht größer sein darf als 0,05 und Abweichungen der Geschwindigkeit von ihrem mittlern Werthe von $^1/_{20}$ voraussetzt; so findet man, daß der größte Werth der Grenze des Productes $p\,(h-h')$ der Zahl $n=0{,}0234$ entspricht, und ungefähr $=$ 0,177 ist. So oft also dieses Product, welches die Quantität Arbeit ausdrückt, die erforderlich ist, um die Schütze von ihrer mittlern Lage aus zu verschließen, größer ist, als 0,177, muß man auf die directe Anwendung des Centrifugalregulators verzichten, was auch von den in Fig. 7 und 8 angegebenen Einrichtungen desselben gilt, so daß man sich in diesem Falle genöthigt sieht, das in §. 75 beschriebene System anzuwenden.

Besondere Anwendungsbeispiele der erhaltenen Formeln.

§. 81. Wir wollen z. B. $p\,(h-h')=0^{km}{,}11$ nehmen, so ist leicht einzusehn, daß man $n'=0{,}02$, $n_1'=0{,}04$ setzen kann, und daß die obige Ungleichheit doch erfüllt wird. Nimmt man also auch $p=100\,n'=2$ Kilogr., folglich $h-h'=0^m{,}055$, so ist dadurch die Einrichtung des Hebelsystemes, welches zur Uebertragung der Bewegung auf die Schütze dient, regulirt.

Ferner wollen wir $j=0{,}06$ und $\alpha''=30°$ annehmen, so ergibt sich aus den Ungleichheiten (L):

$$b\ cos.\ \alpha'' < 1^m{,}245,\quad b\ cos.\ \alpha'' > 0{,}95,$$

und hiernach setzt man genau $b\ cos.\ \alpha''=0^m{,}95$, woraus sich wegen $cos.\ \alpha''=0{,}866$ der etwas zu große Werth $b=1^m{,}1$ ergibt, und welchen man nur vermindern könnte, wenn man $n_1'>0{,}04$, z. B. $=0{,}05$ nähme, was $b\ cos.\ \alpha''>0^m{,}712$ gäbe, so daß man b kleiner, als 1^m annehmen könnte.

Substituirt man den Werth $b\ cos.\ \alpha''=0^m{,}95$ in die Gleichung (H), so gibt sie:

$$I=\frac{(2\omega_1'^2-\omega'^2)}{\omega_1'^2-\omega'^2}\,\frac{(h-h')}{2b\ cos.\ \alpha''}=\frac{(1+4n_1'-2n')}{4\,(n_1'-n')}\,\frac{(h-h')}{b\ cos.\ \alpha''}=0{,}81.$$

Hieraus ergibt sich $a = bl = 0^m,77$ und wenn der Querschnitt der Stäbe ein Rechteck von $0^m,022$ Breite und $0^m,035$ Länge ist, $q = 4,62$ Kilogr., $q' = 5,7$ Kilogr. Gibt man endlich der Muffe ein Gewicht $0 = 1,2$ Kilogr., so erhält man nach den Formeln (A) und (N):

$$P = 29^{kil},44, \frac{\omega^2}{g} = 1,295 \text{ oder } \omega = 3^m,431,$$

welcher Werth ungefähr 33 Umdrehungen in der Minute entspricht, wenn die Winkelgeschwindigkeit für 1^m Entfernung von der Axe genommen ist.

Untersuchung der Fälle, wo der Regulator, oder das Hebelsystem, welches seine Bewegung auf die Schütze oder das Ventil überträgt, bereits aufgestellt sind.

§. 82. Wenn das Hebelsystem, welches die Bewegung auf die Schütze oder das Ventil überträgt, bereits construirt ist, so kann die Aufgabe unlösbar sein, obgleich das Product $p(h = h')$ die Grenze (O) nicht überschreitet. Denn ist z. B. $p - 6$ Kilogr., $h - h' = 0^m,025$, folglich $p(h - h') = 0,15 < 0,177$, so hat man folglich auch $n' = 0,01\,p = 0,06$, welcher Werth offenbar zu groß ist, und wenn man $n' = 0,03$ oder $= 0,04$ nimmt, so erhält man für P und b Werthe, welche sich viel zu weit von den diesen Größen entsprechenden Grenzen entfernen.

Wenn endlich im Gegentheil der Regulator schon construirt und das Product $p(h - h')$, welches die zur Bewegung der Schütze erforderliche Arbeit ausdrückt, bloß näherungsweise bekannt wäre, so könnte man das Hebelsystem bei Seite setzen, so daß $p = 100 n'$ wäre, woraus sich der Werth $h - h'$ der halben Amplitude der Bewegung der Muffe ergäbe, und da die Größen a, b, l, q, q' und o unmittelbar bekannt sind; so fände man zunächst P vermittelst der Gleichung (A), die Gleichung (K) gäbe hierauf den Werth von ω, wenn der von n_1' und n' gegeben wäre, welche in Verbindung mit der Gleichung (H) und den Ungleichheiten (I) oder (L) ihre resp. Werthe so bestimmt, daß der von ω gewisse Grenzen nicht überschreitet, und welches zugleich den Werth α'' gibt.

Um dabei nach einer bestimmten Ordnung zu verfahren, leitet man zunächst den Werth von ω_1' aus der Gleichung (H) ab, welche gibt:

$$\omega_1'^2 = \frac{2lb\cos.\alpha'' - (h - h')}{2lb\cos.\alpha'' - 2(h - h')}\,\omega'^2,$$

und wenn man diesen Werth in den zweiten Theil der Gleichung (K) substituirt, und zu gleicher Zeit $100n'$ für p, m für $(^1/_6 q + o)\,l + {}^1/_6 q'$ setzt; so erhält man:

$$\omega^2 = \frac{200 g l^2}{(100 l - 2m)(2lb\cos.\alpha'' - h + h')},$$

aus welchem Ausdrucke n' ganz verschwunden ist, welches andeutet, daß bei dem Annäherungsgrade, wo n'^2 gegen $2n'$ oder n' gegen 2 vernachlässigt wird, die Zahl n' keinen merklichen Einfluß auf ω hat.

Die Grenzen (L) verwandeln sich gleichzeitig in:

$$(2I-1)\,b\cos.\alpha'' > h - h' + 0{,}18 + i,$$
$$2(1-I)\,b\cos.\alpha''\sin.\alpha'' > 0{,}18,$$

wo statt der zweiten

$$\cos.\alpha'' < \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}18}{1-I}\right)^2}}$$

gesetzt werden kann. Man wählt hierauf den Werth von $\cos.\alpha''$ so, daß die davon abhängigen Werthe von ω und ω' zwischen entsprechenden Grenzen liegen, worauf alsdann nichts leichter ist, als alle übrigen Größen h, $\cos.\alpha$, *etc.*, wovon die Auflösung der Aufgabe abhängt, zu erhalten.

Schluß und allgemeine Bemerkungen über die Anwendung der Centrifugalregulatoren.

§. 83. Die Erörterungen, in welche wir in dem Vorhergehenden in Beziehung auf den Centrifugalregulator eingegangen sind, werden durch die Wichtigkeit der Anwendungen, welche man von diesem Apparate in der Industrie macht, und durch den noch unvollkommenen Zustand seiner Theorie hinreichend gerechtfertigt; allein wir würden den uns vorgesetzten Zweck nur unvollkommen erreicht haben, wenn wir nicht noch Einiges über die Ausdehnung dieser Anwendungen und über die Sorgfalt, mit welcher dieser Apparat construirt werden muß, mittheilen wollten.

Zunächst ist klar, daß, auf welche Weise der Regulator ursprünglich auch regulirt sein mag, seine Wirkungen nur sehr unsicher und unregelmäßig sein können, wenn der Widerstand der Schütze oder des Systemes, welches denselben mit der Muffe verbindet, nicht constant ist, oder wenn dieser Widerstand die ursprünglich festgesetzten Grenzen überschreiten kann, was in vielen Fällen möglich ist.

Wenn ferner die Maschine selbst eine oscillatorische oder periodisch veränderliche Bewegung hat, wie dieses bei den mit Balanciers, Kolbenstangen und Kurbeln versehenen Maschinen der Fall ist; so wird auch der Regulator bei jeder Umdrehung um seine mittlere Lage schwingen und der Schütze mehr schädliche als nützliche entgegengesetzte Bewegungen ertheilen, weil sie auf keine Weise die Periodicität der Geschwindigkeit der Maschine verhindern können. Das Schwungrad, dessen Theorie wir später aufstellen wollen, ist allein fähig, die Amplitude dieser momentanen Veränderungen der Geschwindigkeit zu vermindern, und die Wirkung des Regulators muß sich allein darauf beschränken, zu verhindern, daß sich die Bewegung der Maschine in einer Reihe von Perioden nicht zu sehr beschleunigt oder verzögert.

Wenn man endlich zu gleicher Zeit das Schwungrad und den Regulator anwendet, so ist es zweckmäßig, dem letztern nicht eine solche Empfindlichkeit zu geben, daß er während der Dauer der regelmäßigen mittlern Bewegung der Maschine oscilliren kann, was erfordert, daß man für $n'\omega$ oder $n''\omega$ genau die größte Abweichung der Geschwindigkeit während dieser Bewegung und ungeachtet des Schwungrades von ihrem mittlern Werthe nimmt. Auch kann man, ohne Verminderung dieser Empfindlichkeit, der Nute der Muffe, welche die Schütze in Bewegung setzt, eine solche Länge geben, daß diese letztere vermittelst eines entsprechenden Spielraumes sich nur von der Lage des Regulators an bewegt, welche der eben erwähnten größten Abweichung entspricht. Diese Einrichtung ist besonders in dem Falle nothwendig, wo man gezwungen ist, zur Bewegung der Schütze das in §. 75 erwähnte Eingriffssystem anzuwenden; aber alsdann muß der gedachte Spielraum nicht an der Schütze, sondern an der Welle selbst stattfinden, woran sich das Eingriffssystem befindet, so daß die Muffe dieser Welle erst einen gewissen Raum zu durchlaufen hat, ehe der Eingriff in das eine oder andere der Räder stattfindet. Da in diesem Falle ferner die Schütze um eine sehr beträchtliche Größe steigen oder fallen kann, ehe die wirkliche Geschwindigkeit der Maschine durch die Trägheit der Massen der mittlern Geschwindigkeit um eine merkliche Größe näher gebracht wird; so sieht man, daß diese Einrichtung in gewissen Fällen große Nachtheile darbieten kann, indem die Schütze eine oscillatorische Bewegung von einer größern oder geringern Dauer bekommt, was darin seinen Grund hat, daß die Amplituden ihrer Bewegung nur auf eine sehr indirecte Weise von der Ursache abhängt, welche die Geschwindigkeit der Maschine verändert und offenbar in der Veränderung der an der Maschine wirkenden Widerstände besteht.

Diese letzte Betrachtung führt uns auf eine Auflösung des Problemes der Regulirung der Bewegung der Maschinen, welche uns directer und einfacher zu sein scheint, als die vorhergehenden und außerdem verschiedene sehr wesentliche Vorzüge darbietet, welche wir in dem folgendem §. hervorzuheben suchen wollen.

Neuer momentaner Federregulator.

Beschreibung des Apparates.

§. 84. A und A' sind zwei von einander unabhängige Theile derselben Welle, welche durch das zwischen den Zapfenlagern hg, $h'g'$ (Fig. 11) liegende Intervall von einander getrennt sind. Die Welle A setzt die gußeiserne Trommel CC, welche inwendig ausgehöhlt und mit vorspringenden Zapfen a, b versehen ist, in Bewegung, und die Welle A' ist mit dem Halse $a'a'$ fest verbunden, welcher mit geraden Stahlstäben aa' versehen ist, welche biegsam und nach den Halbmessern gerichtet sind und gegen deren, am weitesten von der Axe entfernte Enden die Zapfen b b der Trommel C drücken, so daß die Rotationsbewegung der Welle A vermittelst der Federn aa' auf die Welle A' und umgekehrt übertragen wird.

B, B' sind zwei gleiche Räder mit derselben Anzahl von Zähnen, und welche resp. von den Wellen A und A' ihre Bewegung erhalten. Diese Räder greifen in die Getriebe F und F', welche sich auf der zu AA' parallelen Welle DD' befinden; aber während das Getriebe F' an seiner Welle festsitzt, kann das Getriebe F mit der Muffe G, welches nach seiner Axe mit einer Schraubenmutter durchbrochen ist, längs der Welle fortrücken, welche zu dem Zwecke die Form einer Schraubenspindel hat. Nun ist einleuchtend, daß, wenn die Wellentheile A, A' ein System bildeten und die Räder B, B' gleiche Winkelgeschwindigkeiten hätten, sich die Schraubenmutter nicht längs der Schraubenspindel fortbewegen würde. Aber da diese Wellen wegen der Biegung der Stahlfedern, wodurch sie mit einander in Verbindung gesetzt werden, ungleiche Winkelgeschwindigkeiten bekommen, so bewegt sich das Getriebe F längs seiner schraubenförmigen Welle um eine Größe fort, welche genau dem Torsionswinkel der Wellen A, A' proportional ist, und das genaue Maaß desselben bildet. Wenn endlich die rückwirkende Kraft derselben Wellen constant ist, was eine streng gleichförmige Bewegung voraussetzt; so dreht sich das Getriebe F, ohne sich von der dem Torsionswinkel entsprechenden Stelle zu bewegen. Stellt man sich also vor, daß die Muffe G zur Bewegung der Schütze dienen soll, welche die Quantität des zu der Maschine gelangenden Wassers regulirt, so daß diese Schütze sinkt, wenn die Biegung der Stahlfedern zunimmt, und steigt, wenn sie abnimmt; so sieht man, daß der neue Apparat die Functionen eines Regulators erfüllt; denn die Größen, um welche die Schütze steigt oder fällt, oder um welche die Oeffnung vergrößert oder verkleinert wird, stehen genau mit den entsprechenden Veränderungen der Biegung der Stahlfedern in Verhältniß, welche, wenn die Elasticitätgrenze nicht überschritten wird, bekanntlich selbst den Veränderungen der Kraft proportional sind, welche auf die Enden dieser Stahlfedern wirkt.

Besondere Bemerkung über diese Vorrichtung.

§. 85. Statt der Zahnränder B, B' und der Getriebe F, F' kann man auch bloße Rollen anwenden, welche einander die Bewegung durch Schnüre oder Riemen ohne Ende mittheilen, wofern diese Schnüre oder Riemen gehörig gespannt und die Wellen DD', AA' weit genug von einander entfernt sind, damit die Rolle F, welche alsdann eine sehr geringe Breite hat, nicht zu schief steht gegen die Schnur oder den Riemen, wodurch sie mit der Rolle B verbunden ist.

Ebenso kann man, statt dem Getriebe F die Freiheit zu lassen, daß es sich in der Richtung der Axe DD' fortbewegen kann, wobei man demselben, oder der Rolle B eine große Breite geben muß, dasselbe auch durch feste Seitenvorsprünge an derselben Stelle erhalten; aber alsdann müßte sich die Muffe an der Welle DD' befinden, welche sich longitudinal müßte fortbewegen können, sowohl in ihren beiden Zapfenlagern, als in dem Auge der Rolle F', welches mit Vorsprüngen versehn sein müßte, die in die auf der Welle DD' befindlichen Falzen eingriffen.

In gewissen Fällen kann es auch vortheilhaft sein, die Trommel C durch ein Zahnrad der Maschine zu ersetzen, welches alsdann auf der aus einem Stücke bestehenden Welle AA' beweglich ist, und seine Wirkung nur vermittelst der Federn aa', welche wie im vorhergehenden Falle eingerichtet sind, auf diese Welle überträgt. Bei dieser Einrichtung bildet z. B. das Rad B' mit dem Rade C' ein System, wozu erfordert wird, daß es sich auf der andern Seite des Zapfenlagers $h'g'$ befindet und daß es sich seinerseits frei um die Welle AA' drehen kann; aber alsdann kann das Rad C sehr wohl die Stelle desselben vertreten, wenn die Verzahnung mit der gehörigen Genauigkeit ausgeführt ist.

Endlich wollen wir noch die in Fig. 12 angegebene sehr einfache Vorrichtung mittheilen, worin sich das Rad F und die Muffe G mit der durch das Zahnrad E in Bewegung gesetzten Trommel C an derselben Welle befinden. Der von dieser Trommel und der Welle AA' in Folge der Biegung der Federn beschriebene relative Winkel entspricht der Bewegung des doppelt gezahnten Sectors BB', welche sich auf einer besondern Welle D befindet, die mit AA' aus einem Stücke besteht, u. s. f.

Berechnung der Dimensionen der Stahlfedern dieses Regulators.

§. 86. Sehen wir nun, wie man bei der Construction des in Rede stehenden Regulators verfahren muß.

Wir wollen annehmen, daß die Stahlfedern einander gleich sind und eine prismatische Form haben. P bezeichne die Totalkraft, welche auf ihre Enden, nahe bei der Trommel C wirkt, n sei die Anzahl dieser Federn, a ihre vorspringende Länge, b ihre Breite, c ihre Dicke und f ihre bekannte Biegung, welche wegen ihrer Kleinheit gegen die Länge a durch den Bogen dargestellt werden kann, welchen ihre Enden beschreiben; so hat man nach den bekannten Formeln für den Widerstand der elastischen Federn bei ihrer Biegung:

$$f = \frac{4Pa^3}{nEbc^3},\text{*)}$$

worin der Elasticitätcoefficient E nach den Versuchen von Morin $= 30{,}000{,}000{,}000$ Kilogr. für den sogenannten Huntzmannschen Gußstahl genommen werden muß, wenn das Meter zur Längeneinheit, und das Kilogramm zur Gewichtseinheit genommen wird. Bezeichnen ferner P' und f' resp. die größte Kraft und die größte Biegung, welcher die Federn ausgesetzt werden können, ohne daß ihre Elasticität sich selbst nach einer längern Zeit ändert, und welche Kraft ungefähr $1/6$ der Zerreißungskraft beträgt; so hat man zur Bestimmung der Dimensionen dieser Federn die Ausdrücke:

$$f' = \frac{4P'a^3}{nEbc^3}, R = \frac{18P'a}{nbc^2} \text{ oder } \frac{3P'}{n} = R\frac{bc^2}{ba},$$

worin E denselben Werth wie vorhin hat und der Zerreißungscoefficient R nach Morin $= 103{,}333{,}333$ Kilogr. sein muß.

Hieraus ergeben sich zur Berechnung der Dicke c und der Breite b, wenn die Länge a und die größte Biegung f' bekannt sind, folgende Ausdrücke:

$$c = \frac{4R}{18E}\frac{a^2}{f'} = 0{,}000765\,\frac{a^2}{f'}, b = \frac{18P'}{Rnc^2}a = 0{,}29732\frac{f'^2P}{na^3}.$$

Setzt man bloß $f' = 0^m{,}05$, $n = 32$, $P = 2000$ Kilogr. und $a = 0^m{,}5$, so findet man $c = 0^m{,}0038$ und $b = 0^m{,}372$. Da diese letzte Dimension nicht zur Breite einer einzigen Feder genommen werden kann, so wendet man statt dieser einen Feder 6 oder 7 schmale an, welche in der Richtung der Axe des Rades eine Breite von $0^m{,}05$ bis

*) Navier, Application de Mécanique etc.

$0^m,06$ haben, oder was noch besser ist, man vergrößert die Zahl n oder die Breite a, so daß b entsprechend verkleinert wird, welchen Zweck man insbesondere erreicht, wenn man f' vermindert, wovon die Empfindlichkeit des Apparates wesentlich abhängt.

Wenn man dem Durchschnitte der Federn die Form der Parabel von gleichem Widerstande gibt, indem man die Dicke c in der Nähe der innern Fläche der Welle beibehält, so wird die Biegsamkeit der Federn vergrößert und die Resultate werden vortheilhafter; denn die obigen Formeln verwandeln sich alsdann in:

$$c = \frac{8R}{18E} \cdot \frac{a^2}{f'} = 0,00153\,\frac{a^2}{f'},\ b = \frac{18P'a}{nRc^2} = 0,07433\,\frac{f'^2}{na^3}P',$$

woraus sich in den obigen Voraussetzungen, d. h. für $n = 32$, *etc.* ergibt:

$$c = 0^m,0272 \text{ und } b = 0^m,122.$$

Bemerkung in Beziehung auf starke Maschinen und den Fall, wo Stöße stattfinden.

§. 87. Wenn man annimmt, daß der Apparat an einer sich mit großer Geschwindigkeit drehenden Welle angebracht ist, was zweckmäßig zu sein scheint; so entspricht der Werth $P = 2000$ Kilogr. offenbar einer sehr starken Maschine, was hinreichend ist, um die Möglichkeit darzuthun, daß ein Regulator dieser Art in den verschiedenen in der Praxis vorkommenden Fällen angewandt werden kann. Dieser Werth läßt sich immer durch Rechnung oder Beobachtung näherungsweise leicht bestimmen; aber es ist zu bemerken, daß die Reactionskraft P momentan große Werthe bekommen und auf die Federn einen nachtheiligen Einfluß haben würde, wenn in derselben Maschine Stöße oder plötzliche Geschwindigkeitsveränderungen stattfänden. In diesem Falle wird es zweckmäßig sein, die Einrichtung zu treffen, daß, wenn der Torsionswinkel der Trommel c in Beziehung auf die Welle mit den Federn, die der Biegung f' entsprechende Grenze überschreitet, der Umfang dieser Trommel gegen vorspringende Arme trifft, welche an der in Rede stehenden Welle befestigt sind, welche Bedingung sehr leicht zu erfüllen ist, wenn man zwischen die Federn sehr steife und starke Stäbe bringt, gegen welche die an dem innern Umfange der Trommel c befindlichen Arme treffen. Es ist übrigens zweckmäßig, diese Vorsicht in allen möglichen Fällen anzuwenden, um die starken Torsionskräfte zu vermeiden, welche im Allgemeinen stattfinden, wenn die Maschine in Bewegung gesetzt wird, und die bewegende Kraft außer den gewöhnlichen Widerständen 2c. auch die Trägheitskräfte des Systemes überwinden muß.

Zusammenhang zwischen der Bewegung der Muffe des Apparates und der Kraft der Welle, woran sie sich befindet.

§. 88. Hat man auf diese Weise die Dimensionen der Stahlfedern und die Grenze der auf sie wirkenden Kräfte oder der Biegung derselben regulirt, so ergibt sich leicht das Gesetz, welches im Allgemeinen diese Kräfte mit den entsprechenden Bewegungen der Muffe G verbindet. Denn bezeichnet:

Θ den Torsionswinkel der Trommel, welcher einer beliebigen Kraft P und der zugehörigen Biegung f entspricht;
$a+d$ den Abstand des Endes der Federn von der Axe AA',
R den Halbmesser der Räder B, B',
r den der Getriebe F, F',
e die gemeinschaftliche Weite der verschiedenen Gänge der Schraube DD', und endlich
h die Länge des Weges, welchen die Muffe durchläuft, während der Winkel Θ oder der Bogen f beschrieben wird;

so hat man zur Bestimmung der Lage der Muffe für jede der auf die Federn ausgeübten Kräfte P offenbar:

$$\Theta(a+d)=f,\; h=\frac{\Theta R}{2\pi r}\,e=\frac{2Pa^3e}{\pi r(a+d)\,nEbc^3}.$$

Dieser Apparat kann auch als Dynamometer zur Messung der Leistung der Maschinen angewandt werden.

§. 89. Da die Längen h des von der Muffe durchlaufenen Weges genau den Kräften proportional sind, so begreift man leicht, daß dieser Apparat sehr gut als Dynamometer angewandt werden kann, um in jedem Augenblicke die Intensität dieser Kräfte zu messen; denn es braucht zu dem Zwecke an der Muffe nur ein Index und ein eingetheilter Limbus angebracht zu werden, von ungefähr derselben Einrichtung, wie bei dem Regnierschen Federdynamometer, indem man mit diesem Apparate noch die Vorrichtung mit drehender Scheibe, wovon am Ende des 7. Abschnittes die Rede sein wird, verbindet, wodurch man die successiven Intensitäten der Kraft P und die Quantität der Wirkung oder Leistung, welche sie hervorbringt, erhält, und welche gemessen werden durch das Integral des Productes aus diesen Kräften und den von ihrem Angriffspuncte beschriebenen Raumelementen in der Entfernung $a+d$ von der Axe A'.

Denkt man sich die Bewegung als gleichförmig und setzt für die Kraft P ihren mittlern Werth, und bezeichnet endlich die Anzahl der Umdrehungen der Welle AA' für die Minute mit m; so wird die Quantität der Arbeit für jede Umdrehung dieser Welle durch das Product $2\pi(a+d)P$ und für jede Secunde durch $\frac{2m\pi}{60}(a+d)P$ gemessen, und wenn man in diese Ausdrücke für P seinen aus den obigen Gleichungen abgeleiteten und durch h ausgedrückten Werth substituirt, so erhält man:

$$P=\frac{2\pi r(a+d)\,nEbc^3h}{4a^3e},$$

folglich: $$2\pi(a+d)P=\frac{n\pi^2(a+d)^2\,Ebc^3rh}{60a^3e},$$

$$2m\pi(a+d)P=\frac{mn\pi^2(a+d)^2\,Ebc^3rh}{60a^3e}.$$

Graduirung des Instrumentes ohne Rechnung, nachdem dasselbe an Ort und Stelle gebracht ist.

§. 90. Aber, statt P und die Arbeit durch diese Formeln direct zu berechnen, kann man, nachdem die Federtrommel und die Muffe an Ort und Stelle gebracht ist, die zwischen P und h stattfindende Relation durch Versuche bestimmen, oder was dasselbe ist, die in gleiche Theile getheilte Graduationsscale von h, wo diesen gleichen Theilen auch immer gleiche Werthe von P entsprechen, so lange diese Werthe die Grenze der Kräfte nicht überschreiten, welche auf die Federn fortwährend wirken können, ohne daß ihre Elasticität verändert wird, welche Grenze wir mit P' bezeichnet haben, und welche einem Wege h' der Muffe entspricht, welcher näherungsweise durch die Formel

$$h' = \frac{2a^3eP'}{\pi r(a+2)\pi Ebc^3},$$

oder genauer durch die erwähnte Graduationsscale gegeben wird.

Uebrigens besteht das Experiment, durch welches man die jeder der Kräfte P entsprechende Länge h ohne Rechnung bestimmen kann, ganz einfach darin, daß man um die Trommel CC eine biegsame Schnur legt, woran man ein dieser Kraft gleiches Gewicht vertical aufhängt, indem man die Welle AA' mit den Federn so fixirt, daß sie sich auf keine Weise drehen kann, während die Trommel und die Muffe die dem erwähnten Gewichte entsprechende Gleichgewichtslage annehmen.

Nimmt man diese Operationen vor, ehe das Hebel- oder Rädersystem an Ort und Stelle gebracht ist, welches zur Uebertragung der Bewegung der Muffe auf die Schütze dient; so kann man dieses System immer so einrichten, daß man den beabsichtigten Zweck sofort erreicht.

Einrichtung des Apparates und insbesondere des Hebelsystemes, welches die Bewegung auf die Schütze oder das Ventil überträgt.

§. 91. Denn wenn die mittlere Geschwindigkeit, welche die Maschine annehmen soll, gegeben ist, so kommt es nur darauf an, diese letztere unter den größten und kleinsten der Nutzwiderstände arbeiten zu lassen, welche man zu überwinden hat, wenn sie in Thätigkeit gesetzt wird, indem man die Schütze jedesmal so weit öffnet, daß man die fragliche mittlere Geschwindigkeit erreicht, und dann die entsprechenden mittlern Lagen der Muffen oder die Werthe von h beobachtet. Alsdann richtet man das die Bewegung übertragende Hebelsystem so ein, daß dasselbe die während der Versuche beobachteten Lagen annimmt.

Wenn man ganz genau verfahren wollte, so müßte man die Maschine bei der mittlern Geschwindigkeit unter einer Reihe von Nutzwiderständen arbeiten lassen, welche zwischen dem größten und kleinsten Nutzwiderstande liegen, und wenn man alsdann jede entsprechende Lage der Schütze und Muffe beobachtete, so hätte man den Mechanismus zu wählen, für welchen die Bewegung der Schütze und der Muffe fortwährend so beschaffen wären, daß diese Lagen gleichzeitig erreicht würden, was man durch eine zweckmäßige Einrichtung des Theiles erreichen könnte, welcher in die Nute der Muffe greift. Da es aber in der Natur der Maschinen liegt, daß die Kräfte P mit dem Nutzwiderstande p nach einem Gesetze zu- und abnehmen, welches nahezu durch die Formel $P = A + Bp$ ausgedrückt wird, worin A und B Functionen der Geschwindigkeit und der Größe sind, welche die Lage der verschiedenen Maschinentheile für einen gegebenen Augenblick bestimmt; so sieht man, daß, wenn die Geschwindigkeit der Maschine bei jedem Umlaufe oder bei jeder Wiederkehr in dieselbe Lage, dieselbe bleiben muß, die dieser Lage entsprechenden Kräfte P aus einer constanten Größe A bestehen, welche den Widerstand für $p = 0$, oder wenn sich die Maschine mit der fraglichen mittlern Geschwindigkeit leer bewegt, ausdrückt, und aus einer andern Größe Bp, welche genau dem Nutzwiderstande p proportional ist. Diese Bedingung wird aber von selbst erfüllt, wenn das Hebelsystem, welches die Bewegung der Muffe auf die Schütze überträgt, so eingerichtet ist, daß die beschriebenen Räume genau proportional bleiben, wie dieses zuerst angegeben ist; denn da die Geschwindigkeit nach der Voraussetzung constant bleibt, so nehmen die Quantitäten Arbeit, welche dem Receptor der Maschine bei jedem Umgange mitgetheilt werden, selbst nahezu wie die Kraft P und wie die Masse des durch die Oeffnung der Schütze ausgeströmten Wassers zu.

Unregelmäßigkeitsursachen, welche durch diesen Apparat nicht beseitigt werden können.

§. 92. Diese Betrachtungen setzen stillschweigend voraus, daß die Ursachen, welche die Gleichförmigkeit der Bewegung der Maschine zu stören streben, einzig und allein von der Veränderlichkeit der Widerstände herrühren, was in der That fast in allen den Fällen stattfindet, wo, wie bei den Walzwerken, den Spinnmaschinen, den Sägemühlen, ꝛc. die Arbeit des Operators oder mehrere Operatoren momentan durch stärkere oder schwächere Widerstände unterbrochen oder modificirt wird. Wenn sich nun aber die Intensität der auf die Maschine von der bewegenden Flüssigkeit ausgeübten Wirkung in Folge anderer Ursachen ändern könnte, welche sowohl von der Geschwindigkeit der Maschine, als von der Schützöffnung unabhängig sind, so würde die Anwendung des in Rede stehenden Apparates von keinem Nutzen mehr sein, weil die Kraft P und folglich die Lage der Muffe des Regulators für sehr langsame Veränderungen des Receptors, welche durch eine entsprechende Veränderung der Wirkung der bewegenden Flüssigkeit veranlaßt werden, fast constant bleiben könnte. Dieses alles wird übrigens durch das im 7. Abschnitte Vorzutragende, wobei wir uns aber hier nicht aufhalten können, mehr ins Licht gesetzt werden. Wir beschränken uns daher bloß auf die Bemerkung, daß die Ursachen, welche die Intensität der bewegenden Kraft auf eine absolute Weise zu verändern streben, bei guten Maschinen sehr selten vorkommen, und daß die wahre Beseitigung derselben in der Anwendung von Sicherheitsventilen und Oeffnungen besteht, wodurch das überschüssige Wasser der großen Wasserbehälter abgeleitet wird (§. 54). Was den Fall anlangt, wo die bewegende Kraft eine dauernde und merkliche Veränderung erfährt, so läßt sich dieselbe durch eine veränderte mittlere Oeffnung der Schütze leicht beseitigen; abein wir können in dieser Beziehung nicht in alle Einzelheiten eingehen, weil wir dadurch zu weit von unserm eigentlichen Zwecke entfernt würden.

Vermeidung der Oscillationen in den momentanen Veränderungen der Bewegung.

§. 93. Gleichwohl können wir diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne ein Paar Worte über die Art und Weise zu sagen, wie man den Federregulator einrichten muß, um die periodischen Oscillationen zu vermeiden, welche das System der Schütze und der Hebel immer darbietet, wenn die Maschine nicht schon ihrer Natur nach eine streng gleichförmige Bewegung annehmen muß.

Offenbar ist hier, wie bei dem Centrifugalregulator, die Anwendung eines Schwungrades unumgänglich nothwendig, um die Amplitude dieser momentanen Veränderungen zu vermindern. Die Federtrommel C muß sich alsdann auf der Welle des Schwungrades an der Seite befinden, wo die Kräfte in derselben Periode am wenigsten unregelmäßig sind, und dem Hebelsysteme, welches die Bewegung von der Muffe auf die Schütze überträgt, muß man den nöthigen Spielraum lassen, damit die Schütze sich erst bewegt, wenn die Kräfte der Maschine für dieselbe Periode der Bewegung den größten oder kleinsten Werth überschreiten, was man leicht experimentell erreichen kann, wenn man die Oscillationen der Muffe beobachtet, nachdem das Schwungrad aufgestellt ist, und wenn die Maschine unter den vorgeschriebenen Umständen mit ihrer mittlern Ladung arbeitet. Aber statt sich dieses Mittels zu bedienen, würde es ohne Zweifel zweckmäßiger sein, wenn man dem in Rede stehenden Hebelsysteme eine so große Elasticität oder Biegsamkeit gäbe, daß es den momentanen Zu- oder Abnahmen der Kraft P nachgeben könnte, ohne daß diese Zu- oder Abnahmen der Bewegung der Schütze mitgetheilt würden, welche denselben vermöge ihrer Trägheit und Reibung zu widerstehn strebt, während sie sich unter der Wirkung, welche von einer Veränderung der Kraft P herrührt, nothwendig bewegen muß.

Wenn man zur Uebertragung der Bewegung der Muffe auf die Schütze ein System von Rädern anwendete, so brauchte man nur eins dieser Räder ungefähr wie die Trommel C, d. h. so einzurichten, daß es seine Welle nur bei einem kleinen Torsionswinkel mit sich herum bewegen könnte.

Vorrichtung für den Fall, wo die Bewegung der Schütze einen großen Widerstand darbietet.

§. 94. Man kann hierbei ganz von der größern oder geringern Kraft abstrahiren, welche erforderlich ist, um die Schütze und ihr Hebelsystem in Bewegung zu setzen, weil diese Kraft immer durch die Räder B, B' auf Kosten der bewegenden Kraft der Maschine überwunden wird. Wenn jedoch diese Kraft sehr beträchtlich wäre, wie es bei den durch Wasserräder in Bewegung gesetzten Maschinen der Fall ist, so würde es zweckmäßig sein, von der momentanen Wirkung des Regulators lieber etwas einzubüßen, indem man die Bewegung der Schütze nicht mehr unmittelbar durch die Muffe G, sondern vermittelst eines ähnlichen Eingriffssystemes, wie das in §. 75 betrachtete, bewirken ließe, so daß sich die Schütze nur langsam bewegte, obgleich sich die bewegende Kraft der Maschine, welche hierzu erforderlich ist, beträchtlich vermindert hätte, rc.

Verbindung des Federregulators mit dem Windfange zur unmittelbaren Regulirung der Bewegung.

§. 95. Endlich könnte man auch die betrachtete Vorrichtung zur unmittelbaren Veränderung der Bewegung anwenden, so daß sie beständig in den Zustand der mittlern gleichförmigen Geschwindigkeit zurückgeführt würde; denn man brauchte zu dem Zwecke nur an einer von der Maschine unabhängigen Welle, welche aber, wie bei dem Centrifugalregulator, direct ihre Rotationsbewegung von derselben erhält, einen Windfang anzubringen, dessen schnell mit der Geschwindigkeit zunehmender Widerstand die Torsion der Trommel C auf derselben Welle bewirken würde. In der That sieht man leicht ein, daß, wenn man die Einrichtung trifft, daß die Schütze für die mittlere Geschwindigkeit auch ihre mittlere Lage annimmt, keine Zunahme der Geschwindigkeit stattfinden kann, ohne daß damit eine entsprechende Verminderung der Schützöffnung verbunden ist, und umgekehrt. In dem vorliegenden Falle aber nehmen die Amplituden der Bewegung der Muffe zu beiden Seiten ihrer mittlern Lage fast wie die Abweichungen der Geschwindigkeit von ihrem mittlern Werthe zu. Uebrigens hat dieser Apparat ähnliche Eigenthümlichkeiten, wie der Centrifugalregulator und seine Einrichtung bietet folglich nach dem in §. 52 und folg. Gesagten keine Schwierigkeit dar.

Von den Kurbeln oder excentrischen Scheiben, auf welche Kräfte wirken, die der Richtung und Intensität nach constant sind.

Vorläufige Begriffe über die Kurbeln.

§. 96. Die Kurbeln bieten, wie wir im Vorhergehenden (Absch. 1, §. 24) gesehn haben, im Allgemeinen das zweckmäßigste Mittel zur Verwandlung der alternativen oder absetzenden Bewegung in eine stetige Rotationsbewegung, und umgekehrt dar. Die gewöhnlichste Einrichtung derselben besteht aus einem Hebelarme AB (Fig. 13), welcher normal an dem Ende einer rotirenden Welle AE befestigt ist, und an dessen Ende vermittelst einer geradlinigen Stange BI, die Lenkstange genannt, ein Widerstand oder eine Kraft F wirkt, welche in irgend einer Richtung BF, die wir zunächst als unveränderlich betrachten wollen, wie dieses bei guten Maschinen, worin man jede unnütze Zerlegung der Kraft zu vermeiden sucht, der Fall ist, eine alternative Bewegung hervorbringt, deren Richtung in der Wirklichkeit jedoch kleinen periodischen Veränderungen unterliegt, welche von der Wirkungsart der Kraft an dem der Kurbelwarze B entgegengesetzten Ende der Lenkstange, d. h. von dem Wege abhängt, welchen dieses Ende durchlaufen muß.

In einer solchen Voraussetzung vereinfacht sich die Untersuchung der constitutiven Eigenschaften der Kurbel sehr, und man ist alsdann im Stande, sich von dem Gesetze der Veränderlichkeit der Wirkung der Kurbel einen vorläufigen, allgemeinen Begriff zu bilden.

Besondere Einrichtungen der Kurbeln, welche excentrische Scheiben genannt werden.

§. 97. Zuweilen werden die Kurbeln *excentrische* Scheiben genannt, und zwar geschieht dieses vorzugsweise, wenn der **Kurbelarm** AB (Fig. 14) gegen den Halbmesser der Warze B sehr klein ist, oder diese letztere durch eine kreisförmige Scheibe ersetzt wird, welche an ihrem Umfange von einem an dem Ende der Lenkstange befestigten Ringe umgeben ist; aber man muß diese Vorrichtung nicht mit gewissen Hebedaumen verwechseln, wovon jeder ebenfalls ein *Excentricum* genannt wird, welche an rotirenden Wellen befestigt sind und auf Maschinentheile wirken sollen, deren Richtung der Bewegung von der ihrer eigenen Bewegung unabhängig ist. Durch die gehörige Vergrößerung der Warze der Kurbel kann man den freien Spielraum und die von der Abnutzung der sich aneinander reibenden Flächen herrührenden Ungleichheiten fast ganz beseitigen, und so eine stetige und sanfte Bewegung erhalten; aber, wie wir später sehn werden, auf Kosten der bewegenden Kraft, weshalb man die excentrischen Scheiben nur bei solchen Mechanismen anwendet, in welchen schwache Kräfte wirken, wie z. B. bei den Dampfmaschinen, wo sie zur Bewegung der Hähne oder Schieberventile dienen.

In Fig. 15 ist eine sehr solide und leicht auszuführende Einrichtung der Kurbeln angegeben. Die Warze B der Lenkstange ist an einem gußeisernen Ringe angebracht, welcher mit den Armen eines größern Ringes verbunden ist, der die Wirkung eines Schwungrades hervorbringt, und die Unregelmäßigkeit der Wirkung gerade da verbessert, wo sie am größten ist.

Von den einfachen Kurbeln.

Gesetz der Veränderung der Wirkung der einfachen Kurbeln in dem ersten halben Umlaufe.

§. 98. Wir wollen annehmen, daß die unveränderliche Richtung BF (Fig. 16) die der Verticale sei und F bezeichne die constante Kraft, welche wie ein Gewicht von oben nach unten wirkt, b bezeichne den Kurbelarm AB und α den veränderlichen Winkel EAB, welchen dieser Arm in irgend einem Augenblicke mit der Verticale AE bildet; so wird die Intensität oder Energie der drehenden Kraft durch ihr virtuelles Moment $F.b\,sin.\,\alpha d\alpha$ gemessen, welches auch ihre Quantität der momentanen Arbeit oder Leistung ist, d. h. sie ist dem Hebelarm $b\,sin.\,\alpha = AD = BD'$ der Kraft proportional, also für die Lagen AE, AG des Kurbelarmes Null und für die horizontale Lage AC am größten. Der mittlere Werth X des Hebelarmes AD für den halben Umgang ECG wird erhalten, wenn man bemerkt, daß die während dieses halben Umlaufes von der Kraft F hervorgebrachte Quantität Arbeit $F.EG = F.2b$, der gleich sein muß, welche dieselbe Kraft in demselben Intervalle hervorbringt, wenn sie an dem Umfange des Kreises von dem Halbmesser X nach tangentialer Richtung wirkte. Nun ist aber diese letzte Quantität Arbeit offenbar $= F\pi X$, wo π das Verhältniß des

Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, und folglich hat man zur Bestimmung von X die Gleichung:

$$2bF = F\pi X,$$

woraus folgt: $$X = \frac{2}{\pi} b = 0,6366.b.$$

Die Länge des mittlern Hebelarmes einer nach einer unveränderlichen Richtung auf eine einfache Kurbel wirkenden Kraft ist also etwas kleiner, als $^2/_3$ des Halbmessers dieser Kurbel und entfernt sich, wie man sieht, von den beiden Grenzwerthen o und b des Hebelarmes resp. um die Größen $0,6366.b$ und $0,3674.b$. Multiplicirt man diese Größen durch $Pd\alpha$, so erhält man das Maaß der Abweichungen der virtuellen Momente oder der augenblicklichen Quantitäten Arbeit $Fb\,sin.\,\alpha d\alpha$ von ihrem mittlern Werthe $0,6366\,bFd\alpha$.

Veränderungsgesetz der Wirkung der Kurbeln während des zweiten halben Umlaufes in den verschiedenen Fällen.

§. 99. Bisher haben wir nur die Wirkungsart der Kurbeln während ihres ersten halben Umlaufes betrachtet, und wir wollen nun sehn, was bei dem zweiten halben Umlaufe EHG derselben stattfindet. Nun können aber drei Fälle stattfinden: entweder die Kraft F hört ganz auf zu wirken, oder sie wirkt nach einer der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung, oder endlich sie fährt fort, in derselben Richtung zu wirken.

Da im ersten Falle die Quantitäten der augenblicklichen Arbeit der Kraft F während des zweiten halben Umlaufes beständig Null sind, so ist die einem ganzen Umlaufe entsprechende Quantität Arbeit noch $= 2bf$, während die Quantität Arbeit derselben an dem mittlern Hebelarme X wirkenden Kraft $= 2\pi XF$ ist. Es ist also $X = \frac{b}{\pi} =$ $0,3183.b$, welche Größe von ihren Grenzwerthen o und b resp. um $0,3183.b$ und $0,6817.b$ verschieden ist.

Da im zweiten Falle die Kraft die Welle in demselben Sinne herumdreht, so ist die während eines ganzen Umlaufes hervorgebrachte Quantität Arbeit $= 4bF$, so daß, wie für den ersten halben Umgang, $4bF = 2\pi XF$, und folglich $X = \frac{2b}{\pi} = 0,6366.b$ ist. Da das größte und kleinste Moment der Kraft F wieder für die horizontalen und verticalen Lagen des Kurbelarmes stattfinden und dieselben Werthe behalten, so werden die Abweichungen der momentanen Wirkung von der mittlern wieder durch die Zahlen 0,6366 und 0,3674 gemessen, woraus folgt, daß die größte Abweichung in dem gegenwärtigen Falle kleiner ist, als in dem vorhergehenden.

Im dritten Falle ist die Quantität der Leistung der Kraft während eines ganzen Umlaufes der Kurbel $= 0$ und dasselbe ist mit der augenblicklichen, mittlern Leistung der Fall, so daß die durch 0 und 1 ausgedrückten Abweichungen alsdann die möglichst größten sind.

Der erste und zweite Fall bezieht sich speciell auf Pumpenkolben, Tritte, Sägegatter, ꝛc. von einfacher oder doppelter Wirkung, d. h.

solcher, welche bloß bei der niederwärts gehenden Bewegung, oder solcher, welche sowohl beim Auf- als Niedersteigen wirken. Der letzte Fall dagegen kann sich nur auf die Schwere beziehn, welche immer nach demselben Sinne wirkt, und bei den Maschinentheilen, welche eine auf- und niedersteigende Bewegung haben, keinen Nutzeffect hervorbringt (Absch. 1, §. 22). Da sich aber die Wirkung der Schwere immer mit der einer andern Kraft von der Natur der vorhergehenden verbindet, so muß man ihren Einfluß auf die Bewegung untersuchen.

Regulirungsart des Gewichtes des Zubehöres der Kurbeln.

§. 100. Es bezeichne p das Gewicht der Theile, welche eine alternative Bewegung haben und welches aus dem Gewichte der Lenkstange BF und dem des übrigen Zubehöres der Kurbel besteht und nach der Richtung der Kraft F wirkt. Es ist zu bemerken, daß sich die Wirkung von p abwechselnd zu der der Kraft F hinzufügt, oder davon subtrahirt, je nachdem sie nach der einen oder andern Richtung wirkt, so daß die während einer ganzen Umdrehung hervorgebrachte Arbeit, so wie der mittlere Hebelarm, und die Quantität der mittlern augenblicklichen Arbeit nicht geändert wird, und da das Moment der Kraft für die verticalen Lagen des Kurbelarmes wieder $=0$ ist, so sieht man, daß sich der Effect von p auf eine bloße Vergrößerung oder Verkleinerung der obern Grenze bF dieses Momentes reducirt, je nach dem Sinne der Kraft F.

Hiernach ist klar, daß die Abweichungen des Totalmomentes der Kräfte F und p von dem mittlern Momente in dem Falle, wo F in beiden halben Umläufen und in den, wo F nur in dem ersten halben Umlaufe wirkt, sich also zu p addirt, größer sind, als für die vorhergehenden Fälle, wo $p=0$ gesetzt wurde. Unter diesen Umständen ist es also nothwendig, das Zubehör der Kurbel in Beziehung auf die Rotationsaxe ins Gleichgewicht zu bringen. Es kann sich aber ganz anders verhalten, wenn die Kraft nur während des ersten halben Umlaufes von unten nach oben wirkt, wo F um p vermindert wird; denn da das größte Moment immer für die horizontale Lage des Kurbelarmes stattfindet, so ist es für den ersten halben Umgang $=b(F-p)$ und für den zweiten $=bp$, und man muß die erste oder letzte dieser Größen für das Grenzmoment nehmen, je nachdem $F-p \gtrless p$, d. h. $F \gtrless 2p$ ist. Der vortheilhafteste Fall findet offenbar für den Werth von p statt, welcher $b(F-p)=bp$, folglich $p={}^1/_2 F$ gibt, und das größte Moment ist also alsdann $=0{,}5.bF$, während das mittlere Moment immer $=0{,}3183.bF$ und das kleinste $=0$ ist, woraus hervorgeht, daß die Veränderungen der augenblicklichen Arbeit kleiner sind, als in den vorhergehenden Fällen.

Von den vielfachen oder zusammengesetzten Kurbeln.

Zweck dieser Kurbeln. — Vortheilhafteste Einrichtung der doppelten Kurbeln.

§. 101. Um die Unregelmäßigkeit der Wirkung einer einzigen Kraft auf die Kurbel zu vermindern, zertheilt man diese Kraft zuweilen in zwei oder mehrere gleiche Kräfte, welche auf eben so viele verschiedene Kurbeln wirken, die an derselben Welle so angebracht sind, daß die größten Momente der durch einige Kurbeln auf die Welle ausgeübten Kräfte genau den kleinsten Momenten der durch die übrigen Kurbeln auf diese Welle ausgeübten Kräfte entsprechen.

Dieses ist z. B. bei den doppelten Kurbeln Fig. 17 und 18 der Fall, deren Arme entweder in derselben Ebene, aber in entgegengesetzten Richtungen, oder in zwei beliebigen Ebenen liegen, welche einen gewissen Winkel mit einander bilden. Die erste dieser Einrichtungen bietet dieselben Umstände dar, wie die einfache Kurbel und kann nicht zur Regulirung der Wirkung der wieder der Größe und Richtung nach als constant vorausgesetzten Kraft dienen, wogegen die zweite Einrichtung sehr wohl zu diesem Zwecke angewandt werden kann.

Die Untersuchung dieser zweiten Einrichtung lehrt in der That, daß, wenn die gleichen parallelen und constanten Kräfte nur während einer halben Umdrehung auf die beiden Kurbelarme wirken, die Wirkung unregelmäßiger ist, als bei den einfachen Kurbeln, deren Zubehör im Gleichgewichte ist, aber daß sich die Sache ganz anders verhält, wenn das Gewicht dieses Zubehöres halb so groß als die Kräfte ist, oder wenn das Zubehör im Gleichgewichte ist, und die Kräfte gleichzeitig und auf dieselbe Weise während der beiden halben Umläufe wirken, und es ist daher jede Einrichtung zu verwerfen, für welche diese beiden letzten Umstände nicht stattfinden.

Der der kleinsten Unregelmäßigkeit der Wirkung entsprechende Winkel der beiden Kurbelarme. — Gesetze dieser Wirkung.

§. 102. Es seien AB, AB' (Fig. 19) die beiden Arme der so eingerichteten doppelten Kurbel und a der halbe Winkel BAI oder IAB', welchen die beiden Kurbelarme miteinander bilden; so überzeugt man sich leicht, daß das Totalmoment der Kräfte F seine obere Grenze für die horizontale und verticale Lage von BB' und seine untere Grenze für die vier symmetrischen Lagen erreicht, worin einer der Kurbelarme AB, AB' eine verticale Richtung hat. Diese Grenzwerthe des Totalmomentes sind also resp.:

$$2Fb\,cos.\,a,\ 2Fb\,sin.\,a,\ Fb\,sin.\,2a = 2Fb\,sin.\,a\,cos.\,a.$$

Untersucht man diese Werthe, so findet man, daß sie einander am nächsten kommen, wenn $sin.\,a = cos.\,a = \sqrt{^1/_2}$ oder der Winkel BAB', welchen die beiden Kurbelarme miteinander bilden, ein rechter ist. Denn da die beiden ersten dieser Grenzen ihrem absoluten Werthe nach nothwendig größer sind, als die dritte, so ist es offenbar vortheilhaft, die größte derselben der kleinsten so viel als möglich zu nähern, indem man die kleinste von allen zu einem Maximum macht, was hier von selbst geschieht, wenn man $sin.\,a = cos.\,a$ nimmt. In dieser Voraussetzung erhält man für die obigen Grenzwerthe der Momente:

$$2Fb\sqrt{^1/_2},\ 2Fb\sqrt{^1/_2},\ 2Fb\,^1/_2,$$

so daß das mittlere Moment zwischen:

$$2Fb\sqrt{^1/_2} = 2Fb \times 0,7071 \text{ und } 0,5 \times 2Fb$$

liegt.

Da die Kräfte F während eines ganzen Umlaufes eine Quantität Arbeit $= 2F.4b$ hervorbringen, so würden sie eine Quantität Arbeit $= 2F.2\pi X$ hervorbringen, wenn sie an einem Kreisumfange von dem Halbmesser X wirkten. Man hat also zur Bestimmung des mittlern Hebelarmes X in dem gegenwärtigen Falle die Gleichung:

$$2b = \pi X, \text{ woraus folgt: } X = \frac{2}{\pi} b = 0,6366.b.$$

Das mittlere Moment ist folglich $= 0,6366 \times 2Fb$, und die Unterschiede desselben von dem größten und kleinsten Momente, welche resp. der horizontalen oder verticalen Lage von BB', AB, AB' entsprechen, betragen ungefähr nur $^1/_9$ und $^1/_5$ seines eigenen Werthes, woraus hervorgeht, daß die rechtwinklig gegeneinander gestellten Kurbelarme zur Regulirung der Wirkung der Kräfte und der Bewegung sehr vortheilhaft sind.

Eigenschaften und Nachtheile der drei- oder vierfachen Kurbeln.

§. 103. Für eine dreifache Kurbel (Fig. 20), deren Arme AB, AB', AB'' den Kreisumfang in drei gleiche Theile theilen, und auf welche während des halben Umganges EBG gleiche Kräfte F wirken, findet man, daß das Totalmoment seinen größten oder kleinsten Werth hat, wenn irgend einer der drei Kurbelarme eine horizontale oder verticale Lage hat, so daß das mittlere Moment zwischen Fb und $Fb \sin. {}^1/_6 360^\circ = Fb\, {}^1/_2 \sqrt{3} = 0,866\, Fb$ liegt. Da der mittlere Hebelarm X alsdann $= \frac{6\,Fb}{2\pi F} = \frac{3\,b}{\pi} = 0,955.b$ ist, so sieht man, daß das mittlere Moment $0,955\,Fb$ nur um $^1/_{22}$ von dem größten und um $^1/_{11}$ von dem kleinsten Momente verschieden ist. Diese Resultate setzen übrigens voraus, daß das Zubehör der Kurbeln um die Welle A im Gleichgewichte ist.

Es würde sich leicht darthun lassen, daß die Wirkung der vierfachen Kurbel weniger regelmäßig ist, als die der dreifachen, aber sie bietet noch andere, für die Praxis weit größere Nachtheile dar, welche sie mit der dreifachen Kurbel gemein hat, und welche allein schon hinreichend sind, auf ihre Anwendung zu verzichten, nämlich die Schwierigkeit, sie mit hinreichender Genauigkeit und Dauerhaftigkeit auszuführen. Denn so oft eine rotirende Welle auf mehr als zwei Zapfenlagern ruht, wird es sehr schwierig, wo nicht unmöglich, die Axen der in diesen Lagern ruhenden cylindrischen Zapfen in eine gerade Linie zu bringen, und man sieht alsdann leicht ein, daß heftige Stöße entstehn müssen, welche einen beträchtlichen Theil der bewegenden Kraft consumiren und das Zerbrechen der Kurbeln veranlassen. Die Drehbank ist das einzige Mittel, welches man anwenden kann, die Zapfen einer Welle so einzurichten, daß ihre Axen in derselben geraden Linie liegen, was bei einer Welle aus einem einzigen Stücke und von der gehörigen Steifheit anwendbar ist; allein dieses Mittel scheint nicht anwendbar zu sein, wenn die Welle durch Kurbeln unterbrochen wird.

Vorrichtung, welche bei den dreifachen Kurbeln anzuwenden ist.

§. 104. Das einzige Mittel, diesen sehr großen Nachtheil zu beseitigen, besteht darin, die Kurbelarme an einzelnen Wellen und zwar an jeder höchstens zwei anzubringen, und dann jeder dieser Wellen besonders durch gleiche Räder, welche auf einer zu den Kurbelwellen parallelen gemeinschaftlichen Welle sich befinden, die Bewegung mitzutheilen. Diese Vorrichtung, wovon Fig. 21 eine Horizontalprojection darstellt, ist in den Hütten von Moyeurre (Mosel) mit Vortheil für ein dreifaches Kurbelgeschirr substituirt, welches unlängst dazu diente, die Kolben des Hohofengebläses in Bewegung zu setzen. Wie vortheilhaft diese Einrichtung aber auch sein mag, so kann sie doch nicht verhindern, daß auf die Zapfen und Zapfenlager bedeutende Druckkräfte wirken, wodurch folglich beträchtliche Reibungen entstehn.

Dynamische Betrachtungen über die Effecte der Kurbeln.

Bestimmung des Gesetzes der Veränderung der Arbeit der an einer einfachen Kurbel wirkenden constanten Kraft in Beziehung auf die mittlere Arbeit dieser Kraft.

§. 105. Die vorhergehenden Betrachtungen über die Kurbeln sind rein statisch und betreffen nur das Gesetz der augenblicklichen Veränderungen der Wirkung der an Kurbeln angebrachten Kräfte, oder des Momentes und des Hebelarmes dieser Kräfte; allein man kann den Gegenstand aus einem ganz andern und namentlich dynamischen Gesichtspuncte betrachten.

Denn werden die Bezeichnungen und Conventionen in §. 98 in Beziehung auf die einfache Kurbel beibehalten, so kann man nach dem Gesetze der Veränderungen der Leistung der Kraft F während eines halben oder eines ganzen Umganges der Kurbel fragen und diese verschiedenen Werthe mit denen der gleichförmigen Arbeit einer constanten oder mittlern Kraft vergleichen, welche in tangentialer Richtung an dem Umfange des von dem Ende B des Kurbelarmes beschriebenen Kreises wirkt.

Wird diese Kurbel als einfach wirkend angenommen, so daß die Kraft nur während des halben Umganges ECG (Fig. 16) wirkt, und die Quantität der augenblicklichen Arbeit der Kraft F durch $Fb\,sin.\,ad\alpha$ gemessen wird; so wird die Quantität Arbeit, welche hervorgebracht wird, während der Kurbelarm von der Verticale AF aus dem Winkel $EAB = \alpha$ beschreibt, offenbar ausgedrückt durch:

$$\int_0^\alpha Fb\,sin.\,\alpha d\alpha = Fb\,(1 - cos.\,\alpha) = F \times ED',$$

was auch ohne alle Rechnung einleuchtet, weil F als constant vorausgesetzt ist. Diese letzte Quantität Arbeit, deren Werth $= 2Fb$ ist, wenn der Kurbelarm zwei rechte Winkel beschrieben und wieder eine verticale Lage angenommen hat, ist auch der gleich, welche die Componente $F\,cos.\,\alpha$ hervorbringen würde, welche an dem Umfange des von dem Angriffspuncte B beschriebenen Kreises wirkt. Setzt man aber für diese veränderliche Componente ihren mittlern Werth $Y =$

$\frac{2Fb}{2\pi b} = \frac{1}{\pi} F = 0{,}3183\, F$ (§. 99) für einen ganzen Umgang der Kurbel, weil diese nach der Voraussetzung von einfacher Wirkung ist; so ist die, einem beliebigen von der Axe beschriebenen Winkel α entsprechende Quantität Arbeit offenbar $= \frac{Fb\alpha}{\pi}$, deren Ueberschuß über die vorhergehende für den ersten halben Umgang $= Fb\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1 + cos.\alpha\right)$ und für den zweiten halben Umgang nur $= Fb\left(\frac{\alpha}{\pi} - 2\right)$ ist, wo die Winkel α hier durch die Bogen gemessen werden, welche ihnen in dem mit einem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreise entsprechen.

Untersuchung dieses Gesetzes.

§. 106. Wenn man den ersten dieser Ausdrücke untersucht, so findet man, daß er mit α zugleich verschwindet, dann bis zu dem Werthe von α positiv zunimmt, welcher durch die Relation $sin.\, \alpha = \frac{1}{\pi}$ oder $\alpha = arc.\left(sin. = \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}103$ bestimmt wird, und welchem ein erstes positives Maximum:

$$Fb\left(\frac{arc.\, sin.\, \frac{1}{\pi}}{\pi} - 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}\right)$$

$$= Fb\,(0{,}1031 - 1 + 0{,}948) = 0{,}051\, Fb$$

entspricht, daß derselbe alsdann wieder abnimmt, und ungefähr für $\alpha = {}^2/_3 = 0{,}2122\pi$ verschwindet, hierauf für den Werth:

$$\alpha = \pi - arc.\,(sin. = \pi) = 0{,}8969\,\pi,$$

welcher gibt:

$$Fb\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1 + cos.\alpha\right) = Fb\,(0{,}8969 - 1 - 0{,}948) = -1{,}0511\, Fb,$$

ein negatives Maximum erreicht, und endlich in dem ganzen übrigen Theile des halben Umganges seinem absoluten Werthe nach abnimmt, bis er für die $\alpha = \pi$ entsprechende verticale Lage AG des Kurbelarmes streng $= - Fb$ geworden ist.

Was den Ausdruck des Unterschiedes für den zweiten halben Umgang betrifft, so bleibt derselbe stets negativ und abnehmend, bis derselbe für den der obern verticalen Lage AE des Kurbelarmes entsprechenden Werth $\alpha = 2\pi$ verschwindet, worauf sich alles in derselben Ordnung wiederholt.

Maximum des dem Systeme ertheilten Arbeits- und Kraftüberschusses über die mittlern Werthe dieser Größen.

§. 107. Der größte absolute Unterschied zwischen den Gesammtquantitäten Arbeit der veränderlichen Kraft $F\, sin.\, \alpha$ und der nach der Voraussetzung an dem Umfange des von der Kurbelwarze beschriebenen Kreises wirkenden mittlern Kraft $Y = \frac{1}{\pi} F$ ist also $= 1{,}0511\, Fb = 0{,}5255 . 2\, Fb$ oder größer als die Hälfte der Quantität Arbeit $2\,Fb$, welche die Kraft F während eines ganzen Umlaufes der Kurbel hervorbringt.

Einfache doppeltwirkende Kurbeln.

§. 108. Bei den **doppeltwirkenden** Kurbeln (§. 99) wird die von der constanten Kraft F während eines ganzen Umganges hervorgebrachte Quantität Arbeit $= 4\,bF$, welches $Y = \frac{4\,bF}{2\pi b} = \frac{2}{\pi} F = 0{,}6366\, F$ gibt, und da die Quantität der Arbeit der Kraft F oder der Componente $F \cos. \alpha$ wieder $= Fb \cos. \alpha$ und die der mittlern Kraft Y gleich $Yb\alpha = \frac{2\,Fb\alpha}{\pi}$ ist; so ist der Ueberschuß der einen über die andere bei dem ersten halben Umgange:

$$Fb\left(\frac{2\,\alpha}{\pi} - 1 + \cos.\alpha\right),$$

und bei dem zweiten halben Umgange:

$$Fb\left(\frac{2\,\alpha}{\pi} - 3 - \cos.\alpha\right),$$

was voraussetzt, daß man die Winkel α unbestimmt zunehmen läßt; aber man braucht nur zu untersuchen, was während des ersten halben Umganges der Kurbel stattfindet, weil sich in dem zweiten halben Umgange alles symmetrisch wiederholt, wenn der Winkel α von dem Halbmesser AG aus gezählt wird.

Nun verschwindet aber der erste dieser Ausdrücke für $\alpha = 0$, $\alpha = {}^1/_2\, \pi$, $\alpha = \pi$ und erreicht sein positives oder negatives Maximum für die beiden Zwischenlagen, welche $\sin. \alpha = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366$ entsprechen, woraus folgt:

$$\alpha = 0{,}21964\, \pi, \quad \alpha = \pi - 0{,}21964\, \pi,$$

$$Fb\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 1 + \cos.\alpha\right) = Fb\left(2 \times 0{,}21964 - 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right)$$
$$= +\, 0{,}21039\, bF,$$

$$Fb\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 1 + \cos.\alpha\right) = Fb\left(2 \times 0{,}21964 - 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right)$$
$$= -\, 0{,}21039\, bF.$$

Der absolute Werth des größten Unterschiedes zwischen den Quantitäten Arbeit $F \cos. \alpha$ und Y beträgt also hier bloß $0{,}0526 \times 4\, bF$ oder ${}^1/_{20}$ der während eines ganzen Umganges der Kurbel hervorgebrachten Totalquantität Arbeit, was sich nothwendig auch auf den Unterschied zwischen der veränderlichen, lebendigen Kraft, welche dem

Systeme bei einer periodischen Bewegung mitgetheilt wird, und der mittlern lebendigen Kraft, d. h. der, welche sich auf die mittlere Geschwindigkeit bezieht, ausdehnen lassen muß.

Besondere Folgerungen in Beziehung auf das Spiel der Pumpen oder überhaupt der Maschinen mit Kolben.

§. 109. Wenn man z. B. annimmt, daß die Lenkstange zur Bewegung des Kolbens einer Pumpe dient und bemerkt, daß die Quantitäten des auf die Höhe des obern Behälters gehobenen Wassers den Quantitäten der Arbeit der Kurbeln proportional sind, so folgt aus der vorhergehenden Untersuchung, daß bei der einfach wirkenden Pumpe der Unterschied zwischen dem veränderlichen Wasservolumen, welches sie liefert und dem, welches sie bei einer stetigen, gleichförmigen Wirkung liefern würde, welche während eines ganzen Umganges der Kurbel dieselbe Quantität Wasser gäbe, ungefähr auf 0,53 dieser letzten Quantität steigen würde, während diese Differenz bei einer doppeltwirkenden Pumpe, d. h. deren Kolben bei dem Auf- und Niedersteigen auf gleiche Weise wirkt, nur $^1/_{20}$ oder $^1/_{10}$ betragen würde, wenn man diese Differenz mit dem Volumen Wasser vergleicht, welches bei einer halben Oscillation gehoben wird.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die Anwendung der doppeltwirkenden Kurbeln zur Regulirung der Wirkung der Kräfte oder der Leistung der Pumpen vortheilhaft ist, und dieselbe Untersuchung würde sich auch leicht auf die vielfachen Kurbeln, d. h. auf die drei- oder vierfachen ausdehnen lassen.

Ueber die Kurbeln, welche Maschinentheile mit einer geradlinigen alternativen Bewegung in Bewegung setzen.

Bestimmung des virtuellen Momentes oder der augenblicklichen Quantität Arbeit der auf die Lenkstange wirkenden Kraft.

§. 110. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft F oder der Lenkstange unveränderlich sei, was in der Praxis niemals der Fall ist, weil das der Kurbel entgegengesetzte Ende dieser Stange gewöhnlich eine gerade Linie oder einen Kreisbogen von einem Halbmesser beschreiben muß, welcher gegen den Kurbelarm sehr groß ist. Es ist daher von Interesse, zu untersuchen, welche Veränderung dieser Umstand in den Resultaten herbeiführen kann, und wie man alsdann die zwischen den Geschwindigkeiten, den angewandten Kräften und den virtuellen Momenten oder Quantitäten Arbeit dieser Kräfte stattfindenden Verhältniste bestimmen muß.

Betrachten wir zunächst das System einer Kurbel AB (Fig. 21), welche sich um eine Welle A drehen muß, und vermittelst der Lenkstange BC auf einen Punct C wirkt, welcher sich nur auf einer geraden Linie FM, deren Verlängerung durch A geht, hin und her bewegen kann. Ferner wollen wir annehmen, daß auf diese Lenkstange von oben nach unten oder von C gegen A die constante Kraft F wirkt, um AB in der durch den Pfeil angegebenen Richtung zu bewegen: so gibt das Dreieck ABC, wenn $AB = b$, $BC = l$, $AC = h$, $CAB = \alpha$ und $ACB = \beta$ gesetzt wird, ohne alle Schwierigkeit:

$$h = b\cos.\alpha + l\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\sin.^2\alpha},$$

$$dh = -b\sin.\alpha d\alpha\left(1 + \frac{b}{l}\frac{\cos.\alpha}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\sin.^2\alpha}}\right).$$

Diese virtuelle Geschwindigkeit des Punctes C ist hier negativ, weil die Höhe $h = AC$ abnimmt, wenn der Winkel $\alpha = BAC$ zunimmt; aber da die Kraft F nach der Richtung des von ihrem Angriffspuncte C durchlaufenen Weges $df = -dh$ wirkt, so muß ihr virtuelles Moment positiv genommen werden (Absch. 1, §. 15), so daß die augenblickliche Arbeit der Kraft F ausgedrückt wird durch:

$$Fdf = -Fdh = b\sin.\alpha d\alpha F\left\{1 + \frac{b}{l}\frac{\cos.\alpha}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\sin.^2\alpha}}\right\},$$

wo f, wenn man will, den Weg $b + l - h$ bezeichnet, welchen der Punct C von seiner höchsten Lage aus beschreibt.

Vereinfachter und genäherter Werth dieses Momentes und überhaupt der Leistung dieser Kraft.

§. 111. Man sieht leicht ein, daß der Factor $Fb\sin.\alpha d\alpha$ nichts anders ist, als das virtuelle Moment der nach verticaler Richtung auf die Kurbelwarze B wirkenden Kraft F, und da das zweite Glied in der Parenthese gegen das erste oder gegen die Einheit immer sehr klein ist, so sieht man, daß die im Vorhergehenden abgeleiteten Folgerungen nur sehr wenig modificirt werden. Denn der größte absolute Werth, welchen dieses zweite Glied annehmen kann, entspricht offenbar $\sin.\alpha = 0$, und ist $= \frac{b}{l}$. Nun ist aber l gewöhnlich 10mal größer als b und niemals kleiner, als $5b$, selbst unter den ungünstigsten Umständen, und da überdies der größte Werth, welchen der Factor:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\sin.^2\alpha}}$$

annehmen kann, offenbar $\sin.^2\alpha = 1$ entspricht; so sieht man, daß derselbe, selbst wenn man $l = 5b$ setzt, niemals größer ist, als $\frac{5}{\sqrt{24}} = 1{,}0206$, so daß man bis auf weniger, als

$$\frac{0{,}0206\,\frac{b}{l}\cos.\alpha}{1 + \frac{b}{l}\cos.\alpha} \text{ oder } \frac{0{,}00412}{1{,}2} = \frac{1}{271}$$

seines wirklichen Werthes

$$Fdf = b\, sin.\, \alpha d\alpha F \left\{ 1 + \frac{b}{l} cos.\, \alpha \right\}$$

setzen kann, was darauf hinausläuft, bei den Betrachtungen über Kurbeln, auf welche eine Kraft F von unveränderlicher Richtung wirkt, $F\left(1 + \frac{b}{l} cos.\, \alpha\right)$ für F zu setzen.

Ebenso hat man näherungsweise die Relationen:

$$h = b\, cos.\, \alpha + l - \tfrac{1}{2} \frac{b^2}{l} sin.^2\, \alpha,$$

$$\int_0^\alpha Fdf = bF\left(1 - cos.\, \alpha + \tfrac{1}{2} \frac{b^2}{l^2} sin.^2\, \alpha\right),$$

wovon die letzte die Quantität Arbeit ausdrückt, welche die Kraft F von der verticalen Lage AF des Kurbelarmes an bis zu der Lage desselben, worin er mit der Verticale den Winkel α bildet, hervorbringt; aber hier ist der begangene Fehler weit geringer, als für den obigen Ausdruck von Fdf.

Näherungswerth und genaue Construction des Verhältnisses der virtuellen Geschwindigkeiten der Kraft und des Widerstandes.

§. 112. Wenn man endlich die virtuelle Geschwindigkeit $-dh$ des Punctes C mit der virtuellen Geschwindigkeit $bd\alpha$ des Punctes B vergleichen will, deren Verhältniß genau dem umgekehrten Verhältnisse der Kraft F zu der, welche ihr das Gleichgewicht halten würde, wenn sie in B in tangentialer Richtung an dem von diesem Puncte beschriebenen Kreisumfange wirkte, gleich ist; so hat man mit demselben Grade von Annäherung:

$$-\frac{dh}{bd\alpha} \text{ oder } df = sin.\, \alpha.\, \frac{l + b\, cos.\, \alpha}{l}.$$

Wie einfach aber dieser Ausdruck auch sein mag, so substituirt man in gewissen Fällen doch mit Vortheil den dafür, welcher sich aus der directen und strengen Betrachtung der Data der Figur ergibt; denn es ist in aller Strenge:

$$\frac{-dh}{bd\alpha} = \frac{(\sqrt{l^2 - b^2 sin.^2\, \alpha} + b\, cos.\, \alpha)}{\sqrt{l^2 - b^2 sin.^2\, \alpha}} sin.\, \alpha.$$

Wenn man aber AB bis zum Durchschneiden der Horizontale durch C in I und CB bis zum Durchschneiden der Horizontale durch A in O verlängert und dann von B und C die Perpendikel BK und CH auf CI und BI fällt; so hat man offenbar:

$$\frac{-dh}{bd\alpha} = \frac{h\, sin.\, \alpha}{BK} = \frac{CH}{BK} = \frac{CI}{BI} = \frac{AO}{AB},$$

folglich:
$$\frac{df}{d\alpha} = AO,$$

woraus erhellt, daß das in Rede stehende Verhältniß durch AO ausgedrückt wird, wenn man $AB = 1$ setzt.

Bezeichnet also X die Kraft, welche, in tangentialer Richtung an dem von B beschriebenen Kreisumfange angebracht, der Kraft F das Gleichgewicht hält; so hat man:

$$\frac{F}{X} = \frac{AB}{AO} \text{ oder } F.AO = X.AB,$$

so daß die Kraft F den Effect einer in O wirkenden gleichen und parallelen Kraft hervorbringt, zu welchem Resultate man augenblicklich gelangt, wenn man bemerkt, daß die unbekannte Kraft, welche nach der Richtung BC der Lenkstange wirkt, in C die verticale Kraft F und die horizontale Reactionskraft, welche auf die geradlinige Leitung des Punctes C wirkt, als Componenten haben muß. Denn denkt man sich die erste dieser Kräfte im Puncte O ihrer Richtung angebracht, und von neuem zerlegt; so wird ihre nach AO gerichtete Componente aufgehoben, oder vielmehr der Hebelarm derselben wird für die Drehung von AB Null, und die verticale Componente ist nichts anders, als die an dem Hebelarme AO wirkende Kraft F.

Allgemeines Princip in Beziehung auf die gleichzeitigen Verrückungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Puncte eines materiellen Systemes.

§. 113. Allein man gelangt zu denselben Folgerungen auch vermittelst eines Principes, welches wir glauben, hier anführen zu müssen, weil es über das Bewegungsgesetz articulirter Systeme im Allgemeinen ein großes Licht verbreitet. Dieses Princip ist uns im Jahre 1829 von Bobillier mitgetheilt, und Chasles hat dasselbe seinerseits nebst vielen andern Sätzen im 14. Bande des Bulletins der mathematischen Wissenschaften von Ferussac Seite 321 bekannt gemacht. Dieses Princip lautet folgendermaßen: Wenn eine ebene Figur von einer unveränderlichen, aber beliebigen Form und Größe irgend eine unendlich kleine Verrückung erfährt, ohne aus dieser Ebene gebracht zu werden; so strebt sie, ohne fortzugleiten, sich um einen festen Punct zu drehen, welchen man vermittelst des Durchschnittes der Normalen der Curvenelemente erhält, welche zwei beliebige Winkelspitzen der Figur gleichzeitig beschreiben.

So haben z. B. in dem uns beschäftigenden Falle alle Puncte der Lenkstange BC ein Bestreben, sich gleichzeitig um den Durchschnittspunct I der Normalen IC und IB der von den Puncten C und B beschriebenen Elemente dh und $bd\alpha$ zu drehen, so daß der Winkel BIC bei der als unendlich klein vorausgesetzten Verrückung der Lenkstange unveränderlich bleibt, und man hat folglich in der That, wenn man nur absolute Größen in Betracht zieht:

$$dh : bd\alpha = CI : BI.$$

Dieser Lehrsatz ist höchst wichtig, weil derselbe augenblicklich die Geschwindigkeit eines beliebigen mit der geraden Linie BC auf eine unveränderliche Weise verbundenen Punctes vermittelst der Geschwindigkeit eines ihrer Endpuncte B oder C gibt, so daß man auch die lebendige Kraft eines beliebigen mit der Lenkstange festverbundenen materiellen Elementes und folglich auch die lebendige Kraft der Masse dieser Stange, ꝛc. erhalten kann.

Anwendung dieses Lehrsatzes auf die Bestimmung der lebendigen und der bewegenden Kraft der durch eine Kurbel bewegten Lenkstangen.

§. 114. Es bezeichne $d\Theta$ den unendlich kleinen Winkel, welchen BC um den Punct I beschreibt, während B den Bogen $bd\alpha$, oder C den Bogen $df = -dh$ durchläuft; dm sei ein beliebiges in der Entfernung ϱ von der auf der Ebene der Figur in I senkrechten augenblicklichen Rotationsaxe liegendes Massenelement der Lenkstange, $d\sigma$ seine nach dem Perpendikel in dem Endpuncte von ϱ gerichtete virtuelle Geschwindigkeit und endlich ω die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt}$ von AB, oder ωb die wirkliche Geschwindigkeit, so hat man zunächst:

$$df = -dh = CId\Theta, \; bd\alpha = BId\Theta,$$

$$d\sigma = \varrho d\Theta = \frac{\varrho b d\alpha}{BI},$$

und dann:

$$\text{Geschw. von } dm = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{b}{BI}\,\varrho\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{b\varrho}{BI}\,\omega,$$

und endlich die ganze lebendige Kraft der Lenkstange:

$$= \frac{b^2\omega^2}{BI^2}\int\varrho^2 dm,$$

wo das Integral auf die ganze Masse dieser Lenkstange erstreckt werden muß.

Bezeichnet ferner M diese Masse, G die Entfernung ihres Schwerpunctes von der Rotationsaxe I, und I ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch ihren Schwerpunct gehende parallele Axe, so hat man noch einfacher:

$$\frac{b^2\omega^2}{BI^2}\int\varrho^2 dm = \frac{b^2\omega^2}{BI^2}(MG^2 + I).$$

Auf dieselbe Weise findet man den Ausdruck der bewegenden oder totalen Trägheitskraft der Lenkstange, rc.

Vermittelst der in diesem letzten §. enthaltenen verschiedenen Data lassen sich leicht alle Umstände der Bewegung und Fortpflanzung der Kräfte des zuletzt betrachteten Kurbel- und Lenkstangensystemes auffinden und untersuchen, und insbesondere wird es sehr leicht sein, auf dieses allgemeine System die Betrachtungen zu erweitern, welche wir in dem vorhergehenden §. nur auf den Fall angewandt haben, wo die Lenkstange stets vertical oder zu sich selbst parallel bleibt.

Ueber die Kurbeln, welche einem Balancier eine alternative Bewegung ertheilen.

Beschreibung des Apparates.

§. 115. Die Figur 22 stellt einen Balancier dar, welcher durch die Kurbel AB in Bewegung gesetzt wird, und zur Uebertragung der geradlinigen alternativen Bewegung auf die verticale Kolbenstange FG

dient. Dieses System ist gewöhnlich so eingerichtet, daß die Verticale des Punctes A durch die äußersten Lagen des Gelenkes C geht, welche den Augenblicken entsprechen, wo die Lenkstange BC und der Kurbelarm AB in gerader Linie liegen, und folglich die durch den Drehungspunct D gehende Horizontale DL den von der Axe des Balanciers beschriebenen ganzen Winkel in zwei gleiche Theile theilt.

Was die Kolbenstange FG anlangt, so erhält sie gewöhnlich ihre Bewegung vermittelst des von Watt erfundenen, mit Gelenken versehenen Parallelogrammes $EFHN$, welches durch die Stange oder das Band SH gerichtet wird, welche sich um den festen Punct S dreht, dessen Lage so bestimmt ist, daß die Winkelspitze F nahezu eine verticale gerade Linie während der Oscillationen des Balanciers beschreibt, was man auf folgende Weise erreicht: Wir wollen annehmen, daß das Parallelogramm $EFHN$ bereits construirt ist, und seine Lage einzig und allein durch die Bewegung des Balanciers um den Punct D und der Winkelspitze F auf der Verticale FG bestimmt wird; so bestimmt man die Reihe der correspondirenden Lagen der Winkelspitze H, läßt dann durch diese verschiedenen Lagen einen Kreisbogen geben, welcher sich zu beiden Seiten so wenig als möglich davon entfernt, und dessen Mittelpunct die Rotationsaxe S des Bandes SH ist.

Im 19. Bande (vom Jahre 1823) der **Annales de Physique et de Chémie** und im 12. Bande (1826) der **Annales des Mines** befindet sich eine Abhandlung von Prony, worin dieser berühmte Ingenieur die Mittel angibt, das Watt'sche Parallelogramm so einzurichten, daß die Abweichungen der Kolbenstange von der verticalen Richtung so gering als möglich werden. Ueber die verschiedenen Vorrichtungen, welche zur Erreichung desselben Zweckes dienen können, kann man auch Tredgold's Werk über Dampfmaschinen vergleichen; aber für uns genügt es hier, zu wissen, daß das gemeinschaftliche Gelenk der Stäbe FG und EF nahezu eine gerade Linie beschreibt.

Verschiedene Relationen, welche zwischen den Kräften und den Geschwindigkeiten der verschiedenen Maschinenbestandtheile stattfinden.

§. **116.** Wir wollen der Deutlichkeit wegen annehmen, daß sich alle Maschinenbestandtheile auf ihre Axen reduciren (Fig. 23) und bemerken, daß das Bewegungsgesetz des Punctes C auf den Kreisbogen, welchen er um den Punct D beschreibt, nahezu dasselbe ist, als für den vorhergehenden Fall (Fig. 22), wo sich dieser Punct auf der Verticale AC bewegen mußte; denn dieser Bogen entfernt sich hier immer sehr wenig von dieser Verticale. Aber der strenge analytische Ausdruck dieses Gesetzes würde, obgleich er sich leicht erhalten ließe, zu complicirt sein, als daß sich daraus brauchbare Resultate ableiten ließen, und es wird daher besser sein, wenn wir uns der Zeichnung und des im §. **113** angeführten Principes bedienen, welches unmittelbar das Verhältniß der Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte und der daran angebrachten Kräfte gibt.

Wenn man z. B. den Durchschnittspunct I der Verlängerung von AB mit DC bestimmt, so kann dieser Punct als der augenblickliche Rotationsmittelpunct der Lenkstange BC und des Dreieckes BCI betrachtet werden, indem das System beider als von unveränderlicher

Größe angenommen wird, so daß die Geschwindigkeiten der Puncte B und C sich wie BI zu CI verhalten. Desgleichen, wenn man den Durchschnittspunct I' der Verlängerung von DE mit der, auf dem von F beschriebenen Wege senkrechten Horizontale $I'F$ bestimmt; so kann dieser Punct als der augenblickliche Rotationsmittelpunct des Systemes der Stange FE und des Dreieckes EFI' von unveränderlicher Form betrachtet werden, so daß sich die Geschwindigkeiten der Puncte F und E wie die entsprechenden Seiten FI' und EI' verhalten.

Wenn man FE bis zum Durchschnitte O' der durch den Rotationsmittelpunct D gehenden Horizontale verlängert, so kann man das Verhältniß von $I'F$ zu $I'E$ für das von DO' zu DE nehmen. Zieht man durch den Mittelpunct A zu DC die Parallele OA, welche die Verlängerung von BC in O trifft, so kann man das Verhältniß von AB zu AO ebenfalls für das Verhältniß von BI zu CL nehmen. Setzt man endlich $AB = b$, $CD = DE = B$, $DO' = u'$, Winkel $CDL = \Theta$, Winkel $CAB = \alpha$ und bezeichnet ferner die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt}$ des Kurbelarmes mit ω, die virtuelle Geschwindigkeit des Punctes F und die daran angebrachte verticale Kraft resp. mit dh und F, und mit U und X resp. die Kräfte, welche in tangentialer Richtung an den von den Endpuncten E oder C und B beschriebenen Kreisbogen angebracht, der Kraft F das Gleichgewicht halten würden, abgesehn von jeder andern Kraft; so hat man ohne Berücksichtigung des negativen Zeichens von $d\Theta$:

$$\frac{U}{X} = \frac{bd\alpha}{Bd\Theta} = \frac{BI}{CI} = \frac{AB}{AO} = \frac{b}{u},$$

folglich:
$$Uu = Xb,\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{u}{B}\omega,$$

$$\frac{F}{U} = \frac{Bd\Theta}{dh} = \frac{I'E}{I'F} = \frac{DE}{DO} = \frac{B}{u'},$$

folglich:
$$Fu' = UB = X\frac{bB}{u},\ \frac{dh}{dt} = u'\frac{d\Theta}{dt} = \frac{uu'}{B},$$

Relationen, welche sich leicht berechnen oder construiren lassen und zu welchen man durch eine bloße Zerlegung der Kräfte oder der nach den Linien BC und FE gerichteten Geschwindigkeiten leicht direct gelangen könnte (§. 111).

§. 117. Dieselben Relationen geben auch das Mittel an die Hand, die Trägheitskräfte und die lebendigen Kräfte der verschiedenen Maschinentheile für jede Lage des Systemes als Functionen der Winkelgeschwindigkeit ω auszudrücken, wie wir in §. 114 näher gezeigt haben; allein es würde nutzlos sein, uns hier bei diesem Gegenstande, so wie bei den Folgerungen länger aufzuhalten, welche sich durch eine leichte Untersuchung aus den fraglichen Relationen hinsichtlich der größern oder geringern Unregelmäßigkeit der Bewegung oder der Wirkung der Kräfte, je nachdem die Stange EF während des einen halben Umganges, oder während des ganzen Umganges wirkt, ergeben; denn diese Folgerungen würden ganz denen analog sein, welche wir in dem besondern Falle einer Kurbel, die durch eine der Größe und Richtung nach unveränderliche Kraft in Bewegung gesetzt wird, erhalten haben.

So würde sich z. B. auch hier wieder ergeben, daß man bei einer doppeltwirkenden Kurbel ihr Zubehör, d. h. das Gewicht der Lenkstange, des Balanciers, ꝛc. ins Gleichgewicht bringen muß, während es bei den einfach wirkenden Kurbeln vortheilhaft ist, das eine Ende des Balanciers mit einem Gewichte zu belasten, welches ungefähr der Hälfte der Kraft F gleich ist. Demnach brauchen wir hier nur kurz anzudeuten, wie man bei der Auflösung der Hauptaufgaben, welche sich bei dieser Untersuchung darbieten können, verfahren muß.

Angabe der Art und Weise, wie man bei der allgemeinen Auflösung der in §. 98 und 105 betrachteten Aufgaben über die einfachen Kurbeln und Lenkstangen verfahren muß.

§. 118. Betrachtet man z. B. den Fall, wo die als constant vorausgesetzte Kraft F nur während einer halben aufsteigenden Oscillation des Kolbens, oder während der Zeit wirkt, in welcher der Kurbelarm den zur Rechten der durch den Rotationsmittelpunct A gehenden Verticale liegenden Halbkreis beschreibt, bezeichnet die dem von dem Kurbelarme von seiner obern Lage aus beschriebenen Winkel α entsprechende Länge des Weges des Punctes F mit h und endlich mit a' die Totallänge dieses Weges, welche im Allgemeinen sehr wenig von $2b$ verschieden ist; so wird die von der Kraft F während eines ganzen Umganges hervorgebrachte Quantität Arbeit durch das Product Fh' ausgedrückt, wornach ihr mittlerer Hebelarm (§. 98) in Beziehung auf die Axe A gleich $\dfrac{h'}{2\pi}$, und die mittlere Kraft, welche die Kraft F ersetzen könnte und bei jedem ganzen Umgange dieselbe Arbeit hervorbringen würde, wenn sie in tangentialer Richtung an dem von dem Ende B des Kurbelarmes beschriebenen Kreisumfange angebracht wäre, ist $= \dfrac{h'}{2\pi b} F$.

Je nachdem man nun den Gegenstand aus statischem Gesichtspuncte (§. 98 u. folg.), oder aus dynamischem Gesichtspuncte (§. 105 bis 107) betrachtet, hat man das Maximum und Minimum des virtuellen Momentes:

$$Fdh = F\frac{uu'}{B}\,d\alpha,$$

d. h. das Product $F\dfrac{uu'}{B}$ zu bestimmen, welches hier gewissermaßen das Moment der constanten Kraft F ist, oder es kommt vielmehr darauf an, die Lagen des Systemes zu finden, für welche der Ueberschuß der Leistung der mittlern Kraft $\dfrac{h'}{2\pi b}F$ über die wirkliche Leistung der Kraft F sein Maximum und sein Minimum erreicht, was nothwendig in den Augenblicken stattfindet, in welchen diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten, und ihre augenblicklichen Quantitäten Arbeit einander gleich sind, so daß man hat:

$$\frac{h'}{2\pi b} Fbd\alpha - Fdh = 0$$

oder:
$$\frac{h'}{2\pi} - \frac{uu'}{B} = 0.$$

Graphisches Verfahren zur Bestimmung des größten oder kleinsten Ueberschusses des veränderlichen Momentes und der veränderlichen Leistung der Kraft über ihr mittleres Moment oder ihre mittlere Leistung.

§. 119. Im ersten Falle hat man also die Lage des Systemes zu bestimmen, welche dem kleinsten und größten Werthe der Function $\frac{uu'}{B}$ entspricht, und im zweiten Falle die Lagen desselben, für welche dieselbe Function einer gegebenen Zahl $\frac{h'}{2\pi}$ gleich wird. Die Auflösung dieser Aufgabe wird vermittelst der Data der Figur, und wenn man eine einzige Curve construirt, deren Abscissen die verschiedenen Werthe von u' oder DO' und deren Ordinaten die correspondirenden Werthe von $\frac{uu'}{B}$ sind, welche man sehr leicht construirt, wenn man die Größe von $u = AO$, von D nach U auf die Richtung von DE trägt, und zu $O'EF$ die Parallele UV zieht, welche auf DO' den Abschnitt

$$DV = \frac{uu'}{B}$$

gibt, erleichtert.

Sind die Werthe von u und u', welche der Aufgabe genügen, auf diese Weise gefunden, so ergibt sich daraus unmittelbar der größte und kleinste Ueberschuß des mittlern Momentes über das veränderliche Moment $F = \frac{uu'}{B} = F.DV$ oder der mittlern Leistung $\frac{Fh}{2\pi}$ über die veränderliche Leistung Fh der als constant vorausgesetzten Kraft F, rc.

Es ist einleuchtend, daß die Auflösung der Aufgaben nicht viel schwieriger sein würde, wenn sich die Kraft F mit h nach einem gegebenen Gesetze änderte, welches z. B. durch eine Curve ausgedrückt wäre; denn die Werthe der Quantitäten Arbeit $\int_0^{h'} Fdh$, $\int_0^{\alpha} Fd\alpha$, würden alsdann unmittelbar durch das im Abschn. 1, §. 9 angeführte Theorem der Quadraturen gegeben.

Ueber das Universalgelenk oder die allgemeine Kuppelung.

Beschreibung des Apparates.

§. 120. Das Universalgelenk oder die allgemeine Kuppelung hat zum Zweck, die Rotationsbewegung einer Welle auf eine andere zu übertragen, welche mit der ersten irgend einen Winkel bildet, welcher größer ist, als ein rechter. Es besteht gewöhnlich aus einem Kreuzstück (Fig. 24) oder einer Metallkugel mit zwei rechtwinkligen Axen, welche zwischen die Kloben am Ende der zusammenstoßenden

Wellen gebracht wird. Dieser Mechanismus wird besonders in Holland zur Uebertragung der Bewegung der Windmühlen auf die geneigten Axen der zum Ausschöpfen dienenden Archimedischen Wasserschraube angewandt. Der Hauptvortheil des Universalgelenkes besteht darin, daß man bei Anwendung desselben zwischen gegebenen Grenzen den Winkel der beiden rotirenden Wellen beliebig verändern kann. Gewöhnlich macht man davon nur bei schwachen Maschinen Gebrauch, weil die Bewegung dadurch unregelmäßig gemacht wird, und auf die Zapfen der Kreuzstücke ein enormer Druck oder Widerstand ausgeübt wird, und man daher gewöhnlich Winkelräder statt desselben anwendet.

Wir wollen die Ebene der beiden gegebenen Rotationsaxen CL und CM (Fig. 25) zur Horizontalebene nehmen, und es seien DD', EE' die Projectionen der resp. von den Enden der Axen der Kreuzstücke brschriebenen Kreise, welche auf den Axen CL und CN senkrecht sind, auf diese Ebene. Wir wollen uns ferner eine Kugel denken, in deren Oberfläche diese Kreise liegen, und für eine beliebige Lage des Systemes seien A und A', B und B' die Projectionen der erwähnten Endpuncte, welche einander auf den Kreisen DD', EE' diametral gegenüber liegen; so bildet der durch diese Endpuncte gehende größte Kreis mit den vorhergehenden das sphärische Dreieck ABC, dessen Seiten AB und AC die Lage der obern Enden B und C der Kreuzstücke in Beziehung auf den Durchschnitt C der Kreise DD', EE' oder die der Halbmesser CA und CB in Beziehung auf die dem Durchschnittspuncte der Axen entsprechende Verticale vollständig bestimmen. Da nun AC als ein durch den Endpunct B von dem Puncte A aus beschriebener Bogen eines größten Kreises betrachtet wird, so muß BE oder das Complement von CB betrachtet werden als der gleichzeitig von dem Endpuncte B von E aus, oder von der der verticalen Lage C des Halbmessers CA entsprechenden horizontalen Lage des Halbmessers BC aus beschriebene Bogen.

Relation zwischen den von den Kreuzstücken beschriebenen Winkeln.

§. 121. Bezeichnet man folglich die den Bogen BE und AC entsprechenden Winkel am Mittelpuncte mit α und β, so sind diese Winkel genau die, welche die Halbmesser CB und CA gleichzeitig um die Axen CL und CM, worauf sie resp. senkrecht sind, beschreiben, und wenn man außerdem den Winkel $MCL = ACB = C$ setzt, welchen diese beiden Axen mit einander bilden; so gibt das sphärische Dreieck ABC, worin $AB = 90°$ und BC das Complement von BE ist:

$$tang.\,\alpha + cos.\,C\,tang.\,\beta = 0.$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man bemerkt, daß, wenn man auf dem größten Kreise EE' von B nach a einen Bogen $Ba = BA = 90°$ nimmt, der Bogen des größten Kreises Aa auf $Ca = BE = \alpha$ senkrecht ist, so daß, wenn man den Winkel ACa oder das Supplement von C mit I bezeichnet, das Dreieck ACa gibt:

$$tang.\,\alpha = cos.\,I\,tang.\,\beta.$$

Hieraus folgt aber, daß die gleichzeitig um die Axen CL und CM beschriebenen Winkel α und β genau diejenigen sind, welche zwei

Halbmesser CA und ca, wovon der eine die Orthogonalprojection des andern auf seine eigene Ebene der Bewegung ist, von der verticalen Lage von C aus beschreiben würden, welche Eigenschaft Betancourt und Breguet bemerkt, in einer dem französischen Nationalinstitute vorgelegten Abhandlung bewiesen und auf ihr Telegraphensystem angewandt haben.

Differentiirt man die letzte der obigen Relationen, so erhält man:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{cos.I\, cos.^2\alpha}{cos.^2\beta} = \frac{1 - sin.^2 I\, cos.^2\alpha}{cos.I} = \frac{cos.I}{1 - sin.^2 I\, sin.^2\beta}$$

für das Verhältniß der Rotationsgeschwindigkeiten der Wellen MC und LC, welches auch das umgekehrte Verhältniß der Kräfte ist, die, an demselben Hebelarme wirkend, einander stets das Gleichgewicht um diese resp. Wellen halten würden.

Man sieht hier, daß sich die Werthe dieses Verhältnisses von $cos.I$ bis $\frac{1}{cos.I}$ ändern können, und daß die Wirkung desto regelmäßiger ist, je kleiner der Winkel I wird. Uebrigens kann man sich hier ähnliche Aufgaben stellen, wie die, welche wir für die Kurbeln aufgelöst haben (§. 98 und 105).

Bestimmung der Kraft und der veränderlichen oder mittlern Quantitäten Arbeit, welche von der einen Welle auf die andere übertragen werden.

§. 122. Wir wollen z. B. annehmen, daß auf die Welle LC, welche die Winkel β beschreibt, eine constante Kraft F wirkt, und zwar an dem Ende des Hebelarmes R, welcher, wenn man will, der Halbmesser eines Rades sein mag, so hat man 1) für die auf die andere Welle übertragene veränderliche Kraft:

$$\frac{Fd\beta}{d\alpha} = \frac{F\, cos.I}{1 - sin.^2 I\, cos.^2\alpha},$$

2) für die angenblickliche Quantität Arbeit dieser Kraft:

$$\frac{FR\, cos.I d\alpha}{1 - sin.^2 I\, cos.^2\alpha},$$

und endlich 3) für die dem Winkel α entsprechende Totalquantität Arbeit:

$$\int_0^\alpha \frac{FR\, cos.I d\alpha}{1 - sin.^2 I\, cos.^2\alpha} = FR\, arc.\left(tang. = \frac{tang.\alpha}{cos.I}\right).$$

Nimmt man den Bogen $\alpha = 2\pi$, so ist klar, daß die Quantität der Arbeit für eine ganze Umdrehung der Welle MC gleich $F.2\pi R$ ist. Die mittlere Kraft, welche man an einem Rade von dem Halbmesser R an derselben Welle wirken lassen müßte, ist also genau F, oder R ist der mittlere Hebelarm der an derselben Welle wirkenden constanten Kraft F (§. 98), und folglich drücken die Größen:

$$FRd\alpha - \frac{FR\, cos.I d\alpha}{1 - sin.^2 I\, cos.^2\alpha} = FRd\alpha \left\{1 - \frac{cos.I}{1 - sin.^2 I\, cos.^2\alpha}\right\}$$

$$FR\alpha - FR\, arc.\left(tang. = \frac{tang.\alpha}{cos.I}\right) = F2\pi R \left\{\frac{\alpha}{2\pi} - arc.tang. = \frac{tang.\alpha}{cos.I}\right\}$$

die resp. Unterschiede der augenblicklichen und totalen Quantität Arbeit der veränderlichen Kraft von denen der mittlern Kraft F für denselben von der Welle MC beschriebenen Winkel α aus, so daß der größte und kleinste Werth des ersten dieser Unterschiede resp. durch:

$$FRd\alpha\left(\frac{1}{cos.\ I}-1\right),\ FRd\alpha\,(1-cos.\ I)$$

ausgedrückt wird.

Was den zweiten dieser Unterschiede anlangt, so verschwindet derselbe für $\alpha=0$, $\alpha={}^1/_2\pi$, $\alpha=\pi$, $\alpha={}^3/_2\pi$, $\alpha=2\pi$, *etc.* und er erreicht seinen größten positiven oder negativen Werth für die vier Zwischenlagen des Systemes, welche durch die Gleichung:

$$\frac{d\left\{\alpha-arc.\left(tang.=tang.\alpha\,\frac{\alpha}{cos.\ I}\right)\right\}}{d\alpha}=1-\frac{cos.\ I}{1-sin.^2 I\ cos.^2\alpha}=0$$

bestimmt werden, woraus folgt:

$$cos.\ \alpha=\pm\frac{\sqrt{1-cos.\ I}}{sin.\ I},\ tang.\,\alpha=\pm\sqrt{cos.\ I},$$

und folglich sind die gesuchten Werthe des größten Unterschiedes:

$$F2\pi R\left\{\frac{arc.\,(tang.=\pm\sqrt{cos.\ I}}{2\pi}-\frac{arc.\,(tang.=\pm\frac{1}{\sqrt{cos. I}}}{2\pi}\right\}.$$

Bestimmung der größten Druckkraft und der Unregelmäßigkeiten der Wirkung, welche durch das Universalgelenk veranlaßt werden.

§. 123. Wir wollen z. B. $I=45^\circ$ oder $cos.\ I=sin.\ I={}^1/_2\sqrt{2}=0{,}7071$ setzen, was ungefähr bei der Archimedischen Wasserschraube der Fall ist; so findet man für das Maaß des größten und kleinsten Unterschiedes zwischen der augenblicklichen und der mittlern Quantität Arbeit, oder zwischen dem Hebelarme der veränderlichen und dem der mittlern Kraft die Größen $\frac{1}{cos.\ I}-1=0{,}7071$, $1-cos.\ I=0{,}2929$, welches, wie man sieht, beträchtlichen Veränderungen der Wirkung entspricht und beweist, daß auf die Zapfen des Kreuzstückes sehr große Druckkräfte wirken können, welche den Bogen $\alpha=0$, $\alpha=\pi$, $\alpha=2\pi$, *etc.* entsprechen.

Man muß aber hieraus nicht schließen, daß die Unterschiede der totalen Quantität Arbeit, oder der entsprechenden lebendigen Kraft von ihrem mittlern Werthe ebenfalls sehr groß sind; denn die letzte der obigen Formeln gibt diesen Unterschied 1) $=0{,}02494$, welcher dem Winkel $\alpha=40^\circ\,3'\,40''$ entspricht, dessen Tangente $=+\sqrt{cos.\ I}=0{,}8409$ ist, 2) $=0{,}02494$ der dem Winkel $\alpha=139^\circ\,56'\,20''$ entspricht, welcher genau das Supplement des vorhergehenden ist, und dessen Tangente $=-\sqrt{cos.\ I}=-0{,}8409$ ist, 3) $=-0{,}02494$, welcher dem Winkel $180^\circ+40^\circ\,3'\,40''=220^\circ\,3'\,40''$ entspricht und endlich 4) $= 0{,}02494$, welcher dem Winkel $360^\circ - (40^\circ 3' 40'') = 319^\circ 56' 20''$ entspricht. Diese Unterschiede sind, wie man sieht, kleiner, als die für die doppeltwirkende Kurbel gefundenen (§. 109).

Besondere Anwendungen der Theorie der Schwungräder.

Es ist nicht möglich, eine allgemeine Regel aufzustellen, wonach sich jede Art von Schwungrad construiren läßt.

§. 124. Nach den in §. 86 über die Theorie der Schwungräder aufgestellten allgemeinen Sätzen ist leicht einzusehn, daß man keine allgemeine Formel würde angeben können, wornach sich in allen Fällen die Dimensionen der Schwungräder berechnen ließen, und es sind daher auch die in dieser Beziehung von einigen Practikern aufgestellten allgemeinen Regeln durchaus unzulässig. Jede besondere Art der Unregelmäßigkeit der Wirkung der Kräfte und der Widerstände erfordert auch eine besondere Regel und die Theorie der Schwungräder ist für die Praxis nur dann vollständig, wenn man sie auf jeden speciellen Fall angewandt hat. So kann z. B. das Schwungrad einer Sägemühle nicht wie das einer Dampfmaschine, eines Walzwerkes, ꝛc. berechnet werden, und wir wollen daher nur an einigen einfachen Beispielen der Systeme mit Kurbeln zeigen, wie man in jedem Falle bei der Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe verfahren muß. Da diese Auflösung aber immer sehr complicirt sein würde, wenn man alle Umstände der Bewegung und alles, was in der ganzen Ausdehnung der Maschinen stattfindet, in Betracht ziehen wollte; so müssen wir hier einige Betrachtungen anstellen, wodurch die Rechnungsschwierigkeiten, welche oft für den beabsichtigten Zweck ganz nutzlos sein würden, beseitigt werden können.

Vereinfachung, welche in vielen Fällen bei der Berechnung der Schwungräder zulässig ist.

§. 125. Zunächst muß die in Absch. 1, §. 39 gemachte Bemerkung, daß das Schwungrad so nahe als möglich bei der Kraft angebracht werden muß, welche unregelmäßige Wirkungen ausübt, und daß das Schwungrad die Gleichförmigkeit der Bewegung unabhängig von der Trägheit der rotirenden Maschinentheile bewirken muß, welche auf der dieser Kraft entgegengesetzten Seite darauf folgen, als Grundsatz gelten; denn sonst könnten diese Maschinentheile alternativen Wirkungen ausgesetzt sein, welche nachtheilig und sogar gefährlich wären.

Hierauf ist zu bemerken, daß die passiven Widerstände, von welcher Beschaffenheit sie auch sein mögen, da sie in die Gleichung der lebendigen Kräfte (Absch. 1, §. 38) Glieder einführen, welche nur als positiv in dem ersten sich auf diese lebendigen Kräfte beziehenden Theile, und als negativ in dem Ausdrucke von S vorkommen können, in vielen Fällen eine Verminderung der größten Abweichungen der Geschwindigkeit oder des Werthes bewirken, welchen man dem Trägheitsmomente des Schwungrades geben müßte, wenn diese Umstände nicht stattfänden; mit andern Worten, sie streben schon an und für sich, die Bewegung zu reguliren, indem sie die Functionen einer Bremse verrichten, und wenn man sie folglich unter solchen Umständen unberücksichtigt läßt;

so erhält man für das Schwungrad zuverlässig mehr als hinreichende Dimensionen.

Uebrigens geschieht es fast immer, daß die passiven Widerstände, welche den meisten Einfluß haben, einen integrirenden Theil der bewegenden Kraft oder des activen Widerstandes bilden, oder in dieselben Glieder der Gleichung der lebendigen Kräfte mit aufgenommen werden können, so daß man ohne Nachtheil die zwischenliegenden passiven Widerstände unberücksichtigt lassen kann, indem man bloß ihre mittlern Werthe, oder die Quantitäten Arbeit in Rechnung bringt, welche sie bei jedem Umgange der Maschine hervorbringen würden, d. h. indem man diese mittlern Werthe zu der bewegenden Kraft oder zu dem activen Widerstande addirt.

Endlich in andern sehr complicirten Fällen, wo man Maschinentheile mit einer alternativen Bewegung in Betracht zu ziehen hat, sieht man sich genöthigt, den Einfluß der Trägheit einiger oder aller dieser Theile unberücksichtigt zu lassen, so daß man bloß die Unregelmäßigkeit der Wirkung der Kraft und des Widerstandes in Rechnung bringt, oder man ist genöthigt, den veränderlichen Bewegungszustand der Maschine durch irgend eine Voraussetzung zu vereinfachen, wie dieses z. B. bei den in §. 110 und 115 (Fig. 21 und 22) betrachteten Apparaten der Fall war, indem die Lenkstange BC nahezu als vertical und die Kraft F als unmittelbar an dem Ende des Armes DE des Balanciers wirkend angenommen wurde, was sich in den gewöhnlichen Fällen, wo diese Lenkstange und dieser Hebelarm ungefähr 5mal länger sind, als der Kurbelarm AB, auch wenig von der Wirklichkeit entfernt.

Gewöhnlichste Einrichtung der Schwungräder.

§. 126. Um den in §. 86 angegebenen Bedingungen so viel als möglich zu genügen, verfertigt man gewöhnlich die Schwungräder aus einem gußeisernen Ringe oder Kranze (Fig. 26), welcher mittelst Armen aus derselben Masse oder von Schmiedeeisen oder Holz mit der Welle verbunden ist, indem man diesen Armen eine 5mal größere Länge, als die des Kurbelarmes gibt. Der erwähnte Ring bekommt fast immer einen rechteckigen Querschnitt; aber zuweilen hat dieser Querschnitt, so wie der der Arme eine elliptische Form, um den Widerstand der Luft zu vermindern. Es ist uns aber kein Versuch bekannt, wonach man diesen Widerstand in dem vorliegenden Falle berechnen könnte, und es ist sogar wegen der Stetigkeit des Ringes und der schnellen Aufeinanderfolge seiner Arme in demselben Raume zweifelhaft, daß die Trägheit der Luftmolecule, oder vielmehr die Form der Arme des Ringes einen so großen Einfluß haben, als bei völlig isolirten Flächen. Bei schwachen Maschinen endlich begnügt man sich oft, an das Ende der eisernen Arme, welche in der Richtung der Bewegung scharf auslaufen, metallene Massen anzubringen, welchen man eine linsenförmige Gestalt gibt, um den Luftwiderstand zu vermindern; allein diese letzten Vorrichtungen sind wegen der damit verbundenen Gefahren ganz zu verwerfen.

Genäherte und vereinfachte Ausdrücke des Trägheitsmomentes und der lebendigen Kraft der Schwungräder.

§. 127. Vermittelst der am Ende dieses Abschnittes aufgestellten Regeln läßt sich das Trägheitsmoment $\int r^2 dm$ und die lebendige Kraft $\omega^2 \int r^2 dm$ (§. 83) eines solchen Systemes immer leicht berechnen. Betrachten wir z. B. Schwungräder mit einem stetigen Ringe, nennen das Gewicht dieses Ringes P', seinen mittlern Halbmesser R_1, seine Geschwindigkeit V am Ende von R_1 und die Intensität der Schwere $g = 9^m,809$; so haben wir sehr nahe:

$$\int r^2 dm = \frac{P'}{g} R_1^2 \text{ und } \omega^2 \int r^2 dm = \frac{P'}{g} \omega^2 R_1^2 = \frac{P'}{g} V^2.$$

Was die Arme betrifft, so kann man, wenn man ihr Gesammtgewicht mit P'' bezeichnet, nach denselben Regeln sehr nahe

$$\int r^2 dm = 0,325 \frac{P''}{g} R_1^2$$

und folglich:

$$\omega^2 \int r^2 dm = 0,325 \frac{P''}{g} \omega^2 R_1^2 = 0,325 \frac{P''}{g} V^2$$

setzen, so daß die gesammte lebendige Kraft des Schwungrades ausgedrückt wird durch:

$$\frac{(P' + 0,325 P'') V^2}{g},$$

welche wir bloß durch $\frac{P}{g} V^2$ ausdrücken wollen, man mag das Trägheitsmoment der Arme, welches kaum $^1/_6$ oder $^1/_5$ von dem des ganzen Ringes überschreitet, in Betracht ziehen wollen, oder nicht.

Bestimmung des Gesammtmomentes der Kräfte, welche aus der Veränderung der Bewegung des Schwungrades entspringen und die Arme desselben zu zerreißen streben.

§. 128. Das Schwungrad ist hauptsächlich der Wirkung der Centrifugalkraft ausgesetzt, welche die Arme und die Theile des Ringes voneinander zu trennen strebt, und der Wirkung der bewegenden Kraft oder der Trägheit, welche aus der augenblicklichen Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit entspringt und besonders die Arme aus ihren Befestigungen an der Welle und dem Ringe loszureißen strebt. Jede dieser Wirkungen läßt sich streng berechnen, wenn die Constitution der Maschine, an welcher das Schwungrad angebracht ist, genau bekannt ist.

Wenn man wieder dieselben Bezeichnungen beibehält, so sieht man, daß $\frac{\omega^2 r^2}{r} dm = \omega^2 r dm$ der Ausdruck der Centrifugalkraft eines in der Entfernung r von der Rotationsaxe liegenden Massenelementes dm ist, während $\frac{d\omega}{dt} r dm$, abgesehn vom Zeichen, die bewegende Kraft, oder die Tangentialträgheit (§. 14) ausdrückt, deren Moment in Beziehung auf die Rotationsaxe folglich durch $\frac{d\omega}{dt} r^2 dm$ ausgedrückt wird, welches zur Berechnung der in einem gegebenen Augenblicke auf das Ende des mittlern Halbmessers R des Ringes, oder an dem mittlern Kreisumfange desselben wirkenden Totalkraft X_1, die der Wirkung der aus der augenblicklichen Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit entspringenden Kräfte das Gleichgewicht zu halten vermag, die Gleichung gibt:

$$X_1 = \frac{1}{R} \frac{d\omega}{dt} \int r^2 dm = \frac{1}{R} \frac{d\omega}{dt} \frac{(P' + 0{,}325\, P'')}{g} R_1^2$$
$$= \frac{d\omega}{dt} \frac{PR}{g},$$

wenn die ganze Masse des Ringes und der Arme in Betracht gezogen wird.

Betrachtet man diese Kraft als eine Torsionskraft, welche die Arme aus ihren Befestigungen mit einer Intensität zu reißen strebt, welche durch das Moment $\frac{d\omega}{dt} \frac{PR^2}{g}$ ausgedrückt wird; so lassen sich die Principien der Theorie des Widerstandes der festen Körper auf den uns beschäftigenden Theil der Aufgabe anwenden, wenn man für das aus der Welle des Schwungrades und den Theilen, welche eine Unregelmäßigkeit der Bewegung veranlassen, bestehende System den größten Werth von $\frac{d\omega}{dt}$ gefunden hat, welcher für einen beliebigen Augenblick oder für eine beliebige Lage durch die Gleichung:

$$(A + B)\, \omega d\omega = (A + B) \frac{d\omega}{dt} d\alpha = F df - Q dq - etc. = dS$$

gegeben wird (Absch. 1, §. 37 und 38), wo A hier insbesondere die Summe der Trägheitsmomente der stetig rotirenden Maschinentheile bezeichnet, welche zu der Welle des Schwungrades gehören, B eine ähnliche Summe für die oscillirenden Theile des Systemes, deren Werth man vermittelst der in §. 113 und folgg. angestellten Betrachtungen als Function des von der genannten Welle beschriebenen Winkels α erhalten kann, und wo endlich F, wenn man will, die veränderlich wirkende Kraft, und Q den auf das bewegende Rad der Welle des Schwungrades, ꝛc. wirkenden constanten Widerstand ausdrückt. Hieraus ergibt sich:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F \frac{df}{d\alpha} - Q \frac{dq}{d\alpha} - etc.}{A + B}.$$

Da alle in diesem Ausdrucke vorkommenden Größen entweder constant, oder Functionen des Winkels α sind, welcher die Lage des Systemes bestimmt, so hat man nur noch das Maximum desselben durch die gewöhnlichen Methoden, oder durch ähnliche Verfahrungsarten, wie die bereits in §. 113 angegebenen, zu bestimmen, um das Maximum der gesammten Trägheitskraft X zu erhalten, welche bei einem

Stoße oder bei einer plötzlichen Geschwindigkeitsveränderung eine beträchtliche Intensität bekommen kann, deren Wirkungen nach den im 5. Abschnitte zu erörternden Principien bestimmt werden müssen.

Bestimmung der größten Geschwindigkeit, welche die Schwungräder wegen der Wirkung der Centrifugalkraft auf ihren aus einem einzigen Stücke bestehenden Ring annehmen können.

§. 129. In Beziehung auf die besondere Wirkungsart der Centrifugalkraft, können nach der gewählten Constructionsart offenbar auch mehrere Arten des Zerreißens oder Zerbrechens stattfinden. 1) Wenn der Ring aus einem einzigen Stücke besteht, und bloß die Wirkung der Centrifugalkraft in Betracht gezogen wird, welche die Massentheilchen von Innen nach Außen zu entfernen strebt, indem sie nach der Richtung des Ringes eine Spannung verursacht; so hat man nach bekannten Theorien, wenn die Dicke des Ringes oder der Unterschied seiner Halbmesser mit e, und die größte Kraft, welche auf die äußersten Theile des Ringes für das Quadratmeter wirken soll, mit T bezeichnet wird:

$$\frac{\pi}{g}\,\omega^2 R_1^{\,2} = T\,\frac{1 + {}^1\!/_{12}\,\dfrac{e^2}{R_1^{\,2}}}{1 + {}^1\!/_2\,\dfrac{e}{R}}$$

für den Ausdruck der Bedingungen des Gleichgewichtes dieses Ringes, abgesehn von der Wirkung der Schwere und dem Widerstande der Arme.

Für das weiche Eisen nimmt man $T = 3000000$ Kilogr. und für das dehnbare Eisen $T = 12000000$ Kilogr., um sicher zu sein, daß die Elasticität dieser Substanzen nicht geändert wird.

Nehmen wir ferner an, daß die Dicke e des Ringes gegen seinen Halbmesser sehr gering ist, wie dieses immer stattfindet; so geht die obige Relation in folgende einfachere über:

$$\frac{\pi}{g}\,\omega^2 R_1^{\,2} = \frac{\pi}{g}\,V_1^{\,2} = T,$$

woraus folgt:

$$V_1 = \sqrt{\frac{g}{\pi}\,T}.$$

Hieraus erhellet, daß es eine absolute Grenze der mittlern Geschwindigkeit V_1 gibt, welche auch bei keiner Constructionsart überschritten werden darf. Setzt man für das weiche Eisen $\pi = 7100$ Kilogr., so findet man $V_1{}' = 64^m{,}38$ für die Secunde. Die Grenzgeschwindigkeit ist für einen Ring aus geschmiedetem und gut geschweißtem Eisen fast doppelt so groß.

Nöthige Stärke der Arme der Schwungräder und ihrer Bänder, um der Wirkung der Centrifugalkraft widerstehn zu können.

§. 130. 2) Wenn der Kranz oder Ring des Schwungrades aus mehreren Theilen besteht (Fig. 27), welche an ihren Enden durch die Arme festgehalten werden; so muß man die Centrifugalkräfte der Elemente irgend eines dieser Theile in zwei andere Kräfte zerlegen, welche an den Endpuncten nach der mittlern Richtung der entsprechenden Arme wirken, die Summe dieser Componenten bilden und sie doppelt nehmen, um die Kraft zu erhalten, welche jeden Arm oder das Band, welches denselben mit der Felge verbindet, zu zerreißen strebt, wozu man auch noch das Gewicht der Felge selbst addiren kann, um die Wirkung der Schwere auf den untern Theil des Ringes in Betracht zu ziehen.

Diese Zerlegung wird übrigens durch folgenden leicht zu beweisenden Satz sehr erleichtert: Wenn sich ein um eine feste Axe drehender Körper in unendlich dünne, auf dieser Axe senkrechte ebene Schichten zerlegen läßt, deren Schwerpuncte auf einer zu der erwähnten Axe parallelen geraden Linie liegen, indem der Körper übrigens eine beliebige Form und Lage hat, oder indem diese Schwerpuncte in einer beliebigen Linie liegen, welche ganz in der durch diese Axe gelegten Ebene liegt, und der Körper wird durch eine gewisse auf dieser Axe senkrechten Ebene, worin der Schwerpunct liegt, in zwei symmetrische Theile getheilt; so ist die Centrifugalkraft dieses Körpers dieselbe, als wenn seine ganze Masse in seinem Schwerpuncte vereinigt wäre. Wenn also G der Schwerpunct des Theiles AB und $\frac{P'}{i}$ sein Gewicht ist, so wirkt die Centrifugalkraft dieses Theiles nach der Richtung CG und wird der Intensität nach ausgedrückt durch:

$$\frac{P'}{ig}\,\omega^2\,CG = \frac{P'}{ig}\,\omega^2 . \, 2\,\frac{\sin.\,{}^1/_2\,\alpha}{\alpha}\,R_1,$$

wo α den Bogen bezeichnet, welcher den von zwei Armen gebildeten Winkel ABC in dem Kreise von dem Halbmesser $= 1$ mißt.

Die Kraft, welche die Felgen aus ihren Verbindungen in A oder B loszureißen und nach der Richtung der entsprechenden Arme CA oder CB fortzubewegen strebt, wird ausgedrückt durch:

$$4\,\omega^2\,\frac{\sin.^2\,{}^1/_2\,\alpha R_1}{\alpha\,\sin.\,\alpha g}\,\frac{P'}{i},$$

oder, wenn das Gewicht einer Felge zu der Wirkung der Centrifugalkraft hinzugefügt wird, durch:

$$\left(4\,\omega^2\,\frac{\sin.^2\,{}^1/_2\,\alpha R_1}{\alpha\,\sin.\,\alpha g} + 1\right)\frac{P'}{i}.$$

Aber da auf die verschiedenen Theile der Arme selbst die Centrifugalkraft wirkt, so muß man bei der Bestimmung des Querschnittes des leichtesten Zerreißens dieser Arme und der Bänder, wodurch sie mit den Felgen verbunden sind, auf diesen Umstand Rücksicht nehmen, wenn man ihre Dicke von dem Umfange gegen den Mittelpunct zu nicht in dem gehörigen Verhältnisse vergrößert hätte.

Der Fall, wo der Ring des Schwungrades stark genug durch die Arme und Bänder festgehalten wird, so daß nur an den Vereinigungspuncten dieser Bänder in Folge der Rotationsgeschwindigkeit ein Bruch entstehen kann.

§. 131. 3) Endlich sieht man leicht ein, daß das Zerreißen des Ringes auch in der Mitte jeder Felge AB von Innen nach Außen stattfinden kann, wo man alsdann jede Felge als auf zwei unerschütterlichen Unterlagen mit ihren Enden ruhend betrachten muß, wenn die Felgen von einander getrennt sind, oder als ein an beiden Enden befestigtes Stück, wenn der Ring aus einem Stücke besteht. Die Aufgabe besteht alsdann darin, das Moment der gesammten Centrifugalkraft in Beziehung auf den Rotationspunct A oder B der Theile der Felge, den Momenten der Cohäsionskräfte, welche dieses Zerreißen zu verhindern streben, gleich zu setzen, wie die Theorie des Widerstandes der festen Körper lehrt.

Tredgold's Meinung in Beziehung auf die Festigkeit der Ringe und der Arme der Schwungräder.

§. 132. Nach Tredgold sollen gußeiserne Arme der bei dem plötzlichen Stillstande eines Schwungrades, dessen Felgen dasselbe Gewicht als die Arme haben, und mit einer Geschwindigkeit von $5^m,5$ in der Secunde bewegt werden, stattfindenden Wirkung nicht widerstehn können. Wenn die Geschwindigkeit größer als 4^m in der Secunde sein muß, so müßte man Arme von dehnbarem Eisen anwenden, und eine Geschwindigkeit von 10^m am Umfange sei ungefähr die äußerste Grenze, welche ein Schwungrad annehmen kann, selbst wenn der Ring aus ductilem Eisen verfertigt wäre, und endlich meint Tredgold, daß es in keinem Falle vernünftig sei, die Geschwindigkeit von $5^m,5$ für die Secunde zu überschreiten. Allein diese Resultate scheinen auf keinen genauen Beobachtungsdaten zu beruhn, und stehn überdies mit der Erfahrung im Widerspruche; denn man sieht oft bei Walzwerken Schwungräder von 5 bis 6^m im Durchmesser, bei welchen häufige und beträchtliche Geschwindigkeitsveränderungen stattfinden, und welche 60 und sogar 90 Umdrehungen in der Minute machen, was eine Geschwindigkeit von wenigstens 15 bis 25^m in der Secunde voraussetzt. Wegen der Unglücksfälle, welche durch das Zerreißen der Schwungräder entstehn können, muß man den Grad der Festigkeit ihrer verschiedenen Theile mit der größten Genauigkeit bestimmen, und dieser Umstand wird es daher auch rechtfertigen, wenn wir in dem Vorhergehenden in Beziehung auf die Bestimmung der Wirkungen der Centrifugalkraft und der Trägheit in diesem Apparate etwas ausführlich gewesen sind.

Berechnung des Schwungrades der einfach- oder doppeltwirkenden Kurbeln in den einfachsten Voraussetzungen.

Vorläufige Betrachtungen und Bemerkungen.

§. 133. In dem Folgenden wollen wir die Dimensionen des Schwungrades bestimmen, welches die Bewegung der Welle einer Kurbel gleichförmig machen kann, die vermittelst einer Lenkstange von constanter Wirkung und Richtung (§. 97 und folgg.) wirkt, indem wir das Gewicht und die Trägheit der Theile des Systemes unberücksichtigt lassen, welche eine alternative Bewegung haben. Zunächst wollen wir mit Navier, welcher diesen Gegenstand zuerst behandelt hat, annehmen, daß die auf die Kurbel wirkende Kraft F (Fig. 28) vermittelst eines Rades von dem Halbmesser r an der Welle der Kurbel oder des Schwungrades, dessen Trägheit wir unberücksichtigt lassen, das Gewicht Q heben soll, worauf wir wir diese besondere Hypothese verlassen und die Definitivformeln für die numerischen oder practischen Anwendungen einfacher machen wollen, als es Navier thut.

Besonderer Fall einer einfachwirkenden Kurbel, auf welche ein constantes Gewicht wirkt.

§. 134. Betrachten wir zunächst den Fall, wo die Kraft F bloß während des Niedersteigens bei dem halben Umgange ECG wirkt, und behalten alle Bezeichnungen in §. 98 und folgg. bei; so haben wir die Bedingungsgleichung (§. 40):

$$2bF = 2\pi r Q \text{ oder } bF = \pi r Q,$$

um auszudrücken, daß die Kräfte F und Q bei jedem Umgange der Welle der Kurbel gleiche Quantitäten Arbeit hervorbringen, so daß die Bewegung fortdauert, wenn das System die mittlere Geschwindigkeit angenommen hat, welche es beibehalten muß, und welche wir mit Ω bezeichnen wollen.

Da das Moment der Kraft F für eine beliebige Lage der Kurbel $= Fb\, sin.\, \alpha$ und das der Kraft Q beständig $= Qr$ ist, so halten diese beiden Kräfte einander in den Lagen der Kurbel das Gleichgewicht, für welche $Fb\, sin.\, \alpha = Qr$ ist, welches wegen $Fb = \pi r Q$ den Werth $sin.\, \alpha = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183$ gibt, welcher den beiden Supplementarwinkeln EAB, EAB' und den beiden gegen den horizontalen Durchmesser symmetrisch liegenden Halbmessern AB, AB' entspricht.

Nun ist aber leicht einzusehn, daß die Quantität Arbeit $F(b - b\, cos.\, \alpha) - Qr\alpha$, welche dem Systeme durch diese beiden Kräfte von der verticalen Lage AE der Kurbel aus, für welche $\alpha = 0$ ist, ertheilt wird, sowohl als die Geschwindigkeit und die lebendige Kraft ihren kleinsten Werth in B und ihren größten Werth in B' erreicht, und dann, so wie diese Geschwindigkeit und lebendige Kraft, beständig abnimmt, während der Kurbelarm den Bogen $B'GHB$ beschreibt; an dessen Ende diese Größen wieder dieselben Werthe annehmen, wie zuvor, indem sie ihren mittlern Werth gegen C und H erreichen und so abwechselnd fort, weil die während eines ganzen Umganges hervorgebrachte Quantität Arbeit vermöge der Relation $Fb = \pi r Q$ Null ist.

Die Aehnlichkeit dieser Betrachtungen mit den in §. 106 angestellten scheint übrigens einleuchtend zu sein, wenn man bemerkt, daß hier das System nach der Voraussetzung eine lebendige Kraft besitzt, welche das Maximum $2F(b - b\, cos.\, \alpha) - 2Qr\alpha$ übersteigt, oder demselben wenigstens gleich ist, welches die an demselben Systeme angebrachten Kräfte F und Q demselben gleichzeitig ertheilen können. Da nun die in dem Intervalle BCB' von diesen beiden Kräften einzeln hervorgebrachten Quantitäten Arbeit resp.

$$BB'.F = 2b\cos.\alpha F = 2b\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}F$$

und $$Q\,arc.BCB' = Qr.\,2\,arc.\left(\cos. = \frac{1}{\pi}\right)$$

sind, so wird die gleichzeitig von diesen Kräften der Maschine in demselben Intervalle mitgetheilte Quantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$2\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\,bF - 2\,arc.\left(\cos. = \frac{1}{\pi}\right)rQ,$$

welche der Hälfte der dem Gewichte Q und dem Schwungrade zwischen den beiden in Rede stehenden Lagen des Systemes ertheilten lebendigen Kraft gleichgesetzt werden muß.

Man hat also nach Abschnitt 1, §. 38 zur Bestimmung der lebendigen Kraft $\frac{P}{g}\Omega^2R^2$, oder $\frac{P}{g}V^2$ des Schwungrades, wenn das Verhältniß $n = \frac{\Omega}{d}$, welches man zwischen der mittlern Geschwindigkeit und dem Ueberschusse der größten über die kleinste der wirklichen Geschwindigkeiten herstellen will, gegeben ist, die Gleichung:

$$PV^2 + Q\Omega^2r^2 = 2ng\left\{\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\,Fb - arc.\left(\cos. = \frac{1}{\pi}\right)rQ\right\},$$

welche mit der von Navier abgeleiteten Gleichung übereinstimmt. Auch ließe sich leicht mit Navier zeigen, daß man zu einem gleichbedeutenden Resultate gelangt, wenn man untersucht, was in dem Intervalle $B'HB$ stattfindet.

Bestimmung der gesammten Trägheitskraft der Arme in diesem Falle.

§. 135. Wenn man in den gegenwärtigen Voraussetzungen den Ausdruck des Maximums der Größe $\frac{d\omega}{dt}$ (§. 128) haben will, welcher zur Berechnung der Stärke dient, die man den Armen des Schwungrades geben muß, damit sie den bewegenden und Trägheitskräften widerstehen können, welche aus den augenblicklichen Veränderungen der Geschwindigkeit entspringen; so braucht man nur zu bemerken, daß die während des Beschreibens des Winkels $d\alpha$ hervorgebrachte Quantität Arbeit durch $Fb\sin.\alpha d\alpha$ ausgedrückt wird, so daß man allgemein für den ersten halben Umgang

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Fb\sin.\alpha - Qr}{A} = g.\frac{(Fb\sin.\alpha - Qr)}{PR_1{}^2 + Qr^2}$$

hat, wenn wieder das Gewicht und die Trägheit der Kurbelstangen, rc. unberücksichtigt bleiben. Dieser Ausdruck erreicht aber sein absolutes Maximum für $\sin.\alpha = 1$ oder $\alpha = {}^1/_2\pi$, so daß dieses Maximum ausgedrückt wird durch:

$$\frac{g(Fb-Qr)}{PR_1^2+Qr^2},$$

und die an dem Endpuncte des Halbmessers R_1 (§. 128) wirkende totale Trägheitskraft durch:

$$X=\frac{(Fb-Qr)\,PR}{PR_1^2+Qr^2}.$$

Doppeltwirkende Kurbeln.

§. 136. Wenn die Kraft F in beiden halben Umgängen der Kurbel zugleich wirkte, so müßte man alsdann zur Bestimmung der Gleichgewichtslagen, denen es bei jedem halben Umgange offenbar zwei gibt, und welche in Beziehung auf die Durchmesser CH und EG symmetrisch sind, so daß die Geschwindigkeit und die lebendige Kraft für die Puncte B, B' und die ihnen resp. in dem Halbkreise $EH'S$ diametral gegenüberliegenden Puncte dieselben werden:

$$4bF=2\pi rQ \text{ oder } 2bF=\pi rQ$$

und wieder:

$$Fb\,sin.\,\alpha=Qr$$

setzen (§. 99 und 108). Man braucht also wieder nur zu untersuchen, was während des ersten halben Umganges ECG stattfindet, wofern man für den Winkel EAB, dessen Sinus vorhin $=\frac{1}{\pi}$ war, den Winkel nimmt, dessen Sinus jetzt vermöge der obigen Gleichungen $=\frac{2}{\pi}$ ist.

Demnach erhält man in den gegenwärtigen Voraussetzungen und unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen die Gleichung:

$$PV^2+Q\Omega^2r^2=2ng\left\{\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\,Fb-arc.\left(cos.=\frac{2}{\pi}\right)rQ\right\},$$

welche auch Navier gefunden hat.

Was die größten Werthe von $\frac{d\omega}{dt}$ und der gesammten Trägheitskraft X anlangt, so ist klar, daß sie dieselben bleiben, wie im vorhergehenden Falle, und für jeden halben Umgang bei den horizontalen Lagen des Kurbelarmes stattfinden.

Vereinfachung der Formeln, wenn für das Gewicht irgend eine andere Kraft ohne Trägheit substituirt wird.

§. 137. Die eben abgeleiteten Gleichungen und Ausdrücke beziehen sich, wie man sieht, einzig und allein auf den Fall, wo die Kraft Q ein wirkliches Gewicht ist, dessen Trägheit in Betracht gezogen werden muß, weil sie zur Regulirung der Wirkung der Kraft F beiträgt. Wenn Q eine bloße constante Kraft ist, welche an dem Umfange des Rades von dem Halbmesser r wirkt und man läßt außerdem die Trägheit dieses Rades unberücksichtigt, wie es auch sein muß; so muß das Glied $Q\Omega^2r^2$ aus den vorhergehenden Gleichungen verschwinden und diese Gleichungen verwandeln sich resp. 1) für einfachwirkende Kurbeln in:

$$PV^2 = 10,8109\, n\pi Qr,$$

weil

$$\pi = 3,1416,\ arc.\left(cos. = \frac{1}{\pi}\right) = 0,39692\pi,\ g = 9^m,8088$$

und

$$Fb = \pi Qr$$

ist, und 2) für doppeltwirkende Kurbeln in:

$$PV^2 = 2,0645\, n\pi Qr,$$

weil $arc.\left(cos. = \frac{2}{\pi}\right) = 2,8036\pi,\ Fb = \frac{\pi}{2} Qr$ ist.

Ausdruck der lebendigen Kraft des Schwungrades in Pferdekräften und der Anzahl der Umgänge der Maschine in der Minute.

§. 138. Man bestimmt in der Industrie gewöhnlich die Kraft der Maschinen in Pferdekräften (§. 7) und ihre Geschwindigkeit nach der Anzahl der Umgänge, welche der Receptor oder der Operator in einer Minute macht. Wenn nun m diese letzte Zahl ausdrückt, so ist in dem uns beschäftigenden Falle $m\frac{2\pi r}{60}Q$ offenbar die in der Secunde als Zeiteinheit von Q oder F hervorgebrachte Arbeit, und wenn man folglich die Anzahl der Pferdekräfte der Maschine, wovon jede 75^{km} beträgt (§. 7) mit N bezeichnet, so hat man:

$$N = \frac{m2\pi r}{60 \times 75} Q, \text{ also } \pi Qr = \frac{2550}{m} N.$$

Substituirt man diesen Werth in die obigen Gleichungen der lebendigen Kraft des Schwungrades, so erhält man für den Fall einfachwirkender Kurbeln:

$$PV^2 = 24324 \frac{n}{m} N,$$

und für den Fall doppeltwirkender Kurbeln:

$$PV^2 = 4645 \frac{n}{m} N.$$

Diese Formeln stimmen mit den in §. 107 und folgg. erhaltenen Resultaten überein, wo gezeigt wurde, daß die doppeltwirkenden Kurbeln zur Regulirung der Bewegung der Maschine, unabhängig von der Wirkung des Schwungrades, am vortheilhaftesten sind. Man sieht, daß sich diese Formeln leicht numerisch berechnen lassen, wenn man die Zahlen m, n und N kennt, wovon die letzte immer für die Zahl der Pferdekräfte der Kraft genommen werden muß, welche alle auf die Welle des Schwungrades wirkende Widerstände zusammengenommen ausdrückt (§. 125), während sich die erste Zahl m, welche die Anzahl der Umgänge der Maschine in der Minute bezeichnet, nothwendig auf diese Welle selbst, und nicht auf das Schwungrad bezieht, welches zuweilen an einer andern Welle angebracht ist, um demselben eine größere Geschwindigkeit zu geben.

Werth, welchen man der Zahl n geben muß, die den zu erhaltenden Grad der Regelmäßigkeit ausdrückt.

§. 139. Der kleinste Werth, welchen man in den obigen Ausdrücken der lebendigen Kraft des Schwungrades für die Zahl n annehmen kann, bezieht sich auf die Voraussetzung, wo die Geschwindigkeit und die kleinste lebendige Kraft des Systemes Null sind, was $n = \frac{1}{2}$ entspricht, weil alsdann $\Omega = \frac{d}{2}$ ist (§. 38). Welchen Werth muß man aber der Zahl n über diese Grenze hinaus geben? Diese Frage läßt sich offenbar nur in jedem besondern Falle und nach den Erfahrungsdaten über die Constitution, die Art und den Zweck der Maschine beantworten, weil man die Vortheile der größern oder geringern Gleichförmigkeit ihrer Geschwindigkeit mit den Nachtheilen vergleichen muß, welche mit der Vergrößerung der Trägheitsmomente und der Gewichte nothwendig verbunden sind.

Um wenigstens von dem Werthe der Zahl n einen Begriff zu geben, welcher bei der Aufstellung des Schwungrades einiger durch Kurbeln bewegter Maschinen angenommen werden muß, wollen wir als Beispiel eine Dampfmaschine nehmen, welche von den Engländern speciell untersucht ist, die zur Berechnung ihrer Schwungräder practische Regeln aufgestellt haben, welche aus ähnlichen particulären Betrachtungen, wie die, welche wir vorhin nach Navier angestellt haben, abgeleitet sind, aber in der Wirklichkeit auf weit weniger genügenden und strengen Principien beruhen.

Betrachtungen über die Anwendung der vorhergehenden Formeln auf die Dampfmaschinen.

§. 140. Bekanntlich werden die Dampfmaschinen durch einen Kolben in Bewegung gesetzt, welcher vermittelst eines ähnlichen Systemes wie die in §. 115 und folgg. beschriebenen auf die Welle eines bewegenden Rades wirkt, woran sich auch ein Schwungrad befindet, welches zur Regulirung der Bewegung bestimmt ist. Bald geschieht es, daß die Bewegung direct von dem Kolben auf die Kurbel durch eine Stange ohne Balancier übergetragen wird, wie in den oscillirenden Cylindermaschinen von Aitkin und Steel, und bald wird ein Balancier angewandt, wie bei den Maschinen von Watt, Woolff, Oliver-Evans, ꝛc. In allen Fällen trifft man aber die Einrichtung, daß die Nebengeschirre im Gleichgewichte sind, oder daß die Wirkung der Gewichte gegen die der Kraft, welche auf eine doppeltwirkende Kurbel gerichtet ist, so viel als möglich vermindert wird.

Endlich sind die Geschwindigkeiten, die Rotations- und Abweichungswinkel der oscillirenden Maschinentheile im Allgemeinen so klein, daß man bei einer ersten Annäherung so verfahren kann, als wenn die Kolbenstange unmittelbar an der Kurbel angebracht wäre und in einer unveränderlichen Richtung wirkte, wie wir es auch bei den vorhergehenden Rechnungen angenommen haben. Jedoch können die Reibungen und Trägheitskräfte, welche aus dem Drucke und der Veränderung der Bewegung dieser oscillirenden Maschinentheile entspringen, so wie die Veränderungen der Kraft selbst bei den sogenannten Maschinen mit

Expansion nicht ganz unberücksichtigt bleiben. In practischer Beziehung wird darauf die gehörige Rücksicht genommen, wenn man einerseits annimmt, daß diese Reibungen mit in der Wirkung oder Leistung der Kraft und des Widerstandes begriffen sind, welche auf die Kurbel und auf das bewegende Rad des Systemes wirken (§. 125); und wenn man andererseits die lebendige Kraft der Arme des Schwungrades und der übrigen Theile seiner Welle unberücksichtigt läßt, wenn man nicht zu befürchten hat, daß diese Trägheitskräfte einen gewissen Einfluß ausüben, und wenn man endlich für die veränderliche Kraft eine mittlere substituirt, welche während jeder Oscillation dieselbe Wirkung hervorbringt.

Art und Weise, wie diese Anwendung zu verstehn ist, und Bedeutung der Zahl n.

§. 141. Nach dem im Vorhergehenden und in §. 38 über die Theorie der Schwungräder Gesagten ist leicht einzusehn, daß die Gleichung für die Einrichtung der Schwungräder, sobald man die Trägheit der oscillirenden Maschinentheile unberücksichtigt läßt, folgende Form annimmt:

$$PV^2 = ngS = ngKQ.2\pi r,$$

wo K eine rein numerische Function ist, welche einzig und allein von der Natur des Systemes und dem Gesetze der Kraft F in Beziehung auf den beschriebenen Raum oder Winkel abhängt. Man hat daher unter den vorhergehenden Voraussetzungen, und wenn K' eine constante oder der Größe g proportionale Größe bezeichnet, für alle Maschinen derselben Art, d. h. worin die Wirkungsart der Kräfte dieselbe bleibt und bloß ihre Intensitäten sich ändern, allgemein:

$$PV^2 = \frac{nK}{m} N.$$

Diese Betrachtungen können zur Rechtfertigung der Anwendungen dienen, welche man von den fraglichen Formeln macht, und zugleich zeigen, daß der aus directen Beobachtungsdaten abgeleitete Factor n auch in den Fällen, wo die Maschine den gemachten Voraussetzungen nahezu entspricht, eine Bedeutung haben kann, welche im Grunde ganz von der verschieden ist, welche man geneigt sein würde, ihm beizulegen, so daß es in jedem Falle zweckmäßig sein würde, das Product nK' dafür zu substituiren, dessen aus der Erfahrung abgeleiteter Werth bei der Aufstellung der Schwungräder der Dampfmaschinen jeder Art nicht weniger von Nutzen sein wird, indem man übrigens bemerkt, daß in dem gegenwärtigen Falle das Schwungrad bloß zur Regulirung der Wirkung der Dampfmaschine selbst, und nicht zur Regulirung der Wirkung der übrigen Theile des Mechanismus, welche sich zwischen ihr und dem Operator befinden, bestimmt ist.

Wir kommen nun zu den practischen Regeln der Engländer.

Vergleichung dieser Formeln mit den practischen Regeln der Engländer. — Werthe, welche sich daraus für n ergeben.

§. 142. Oliver-Evans nimmt folgenden Satz an: Um das Gewicht des Schwungrades einer Dampfmaschine in Centnern zu erhalten, muß man die Anzahl ihrer Pferdekräfte durch 2000 multipliciren und das Product durch das Quadrat der Zahl dividiren, welche ausdrückt, wie viele Fuße der Ring des Schwungrades in der Secunde durchläuft.

Diese von Murray und Wood gegebene Regel wird für französische Maaße durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$PV^2 = 9436\ N.$$

Sie ist, wie man sieht, von der Zahl m der Umgänge der Kurbel in der Minute unabhängig, und kann deswegen nicht allgemein in der Praxis angewandt werden. Die Regel, welche Tredgold in seinem Werke über Dampfmaschinen dafür substituirt hat, hat denselben Fehler und unterscheidet sich auch nur durch die darin vorkommenden Data davon. Nach Tredgold's Theorie wird die Grenze der Veränderungen der Geschwindigkeit $= {}^1/_{10}$ der mittlern Geschwindigkeit gesetzt, was aber ein ganz unzulässiges Resultat ist.

Die aus der von Evans angenommenen Regel abgeleitete obige Gleichung, welche wir mit der Gleichung $PV^2 = \frac{4645}{m} N$ in §. 138 für die doppeltwirkenden Kurbeln verglichen haben, würde, wenn man annähme, daß sie auf die Wattschen Maschinen anwendbar wäre, für welche die Anzahl der Umgänge der Kurbel im Mittel $= 15$ ist, auf den Werth $n = 30{,}2$ führen. Endlich hat Morin durch genaue Beobachtungen von Dampfmaschinen mit niederm Druck und ohne Expansion, welche die besten englischen Maschinenbauer in dem Departement des Oberrheins aufgestellt haben, für n einen zwischen 37 und 45 liegenden Werth erhalten, was sich wenig von dem Resultate entfernt, welches sich aus einer andern von Farey nach Watt mitgetheilten Regel ergibt. Nach dieser Regel muß die Hälfte der lebendigen Kraft des Schwungrades 375mal so groß sein, als die während eines Kolbenzuges hervorgebrachte Arbeit, so daß man nach unsern Bezeichnungen hat:

$$ {}^1/_2 \frac{P}{g} V^2 = n\,Qr \times 3{,}75 = \frac{8437}{m} N,$$

woraus sich durch Vergleichung mit der Gleichung:

$$PV^2 = \frac{4645}{m} nN$$

der Werth von $n = 35{,}8$ ergibt, so daß die Veränderung der Geschwindigkeit ungefähr ${}^1/_{36}$ der mittlern Geschwindigkeit beträgt. Es ist aber einleuchtend, daß diese Zahl, so wie die vorhergehenden, nur auf Maschinen anwendbar sind, bei welchen eine sehr große Regelmäßigkeit der Bewegung erforderlich ist, wie z. B. bei den in Maschinenspinnereien der Wolle oder Baumwolle angewandten Dampfmaschinen, wogegen sie offenbar für Getraidemühlen, ꝛc., deren Mühlsteine (Läufer) schon von selbst gewissermaßen die Stelle eines Schwungrades vertreten, übertrieben wären, und zwar um so mehr, wenn bei der Bestimmung dieses Werthes von n die lebendige Kraft der Arme des Schwungrades, welche, wie wir gesehn haben (§. 127), immer beträchtlich ist, nicht in Betracht gezogen ist.

Werth von n oder nK' in den Woolfschen Maschinen mit Expansion und zwei Cylindern.

§. 143. Für zwei Woolfsche Dampfmaschinen mit Expansion und zwei Cylindern, welche ebenfalls in dem Departement des Oberrheins aufgestellt und in England von Hall verfertigt sind, und welche resp. die Stärke von 45 und von 20 Pferdekräften haben, hat Morin resp. $n = 32$ und $n = 26$ gefunden. Aber obgleich man den Ring des Schwungrades der letzten dieser beiden Maschinen noch belastet hat; so hat sie für den Zweck, wozu sie bestimmt war, nämlich für eine Baumwollenspinnerei doch noch keinen regelmäßigen Gang, wogegen die andere zum Spinnen sehr hoher oder feiner Nummern bestimmte Maschine vortreffliche Waare liefert.

Der Unterschied zwischen diesen Zahlen und den vorhergehenden berechtigt noch nicht zu der Annahme, daß die von den englischen Maschinenbauern bei der Construction der Schwungräder der Woolfschen Maschinen befolgte Regel eine andere sei, als die, welche sie bei den Wattschen Dampfmaschinen anwenden; denn es herrscht in den directen Beobachtungsresultaten der in Rede stehenden Art, namentlich in der Bestimmung der Zahl N, eine zu bedeutende Unsicherheit, als daß man den Werth von n oder vielmehr den von nK' (§. 140) mit Genauigkeit daraus ableiten könnte.

Wenn man also nach Watt bei Maschinen, welche eine sehr gleichförmige Bewegung erfordern,

$$nK' = 4645 \times 36 = 167220$$

setzt und außerdem bemerkt, daß K' in den beiden betrachteten Systemen von Dampfmaschinen keine sehr verschiedenen Werthe haben kann, so kann man in diesen Fällen als allgemeine practische Regel die Gleichung:

$$PV' = \frac{167220}{m} N$$

aufstellen, wo m wieder die Anzahl der Umgänge der Kurbel in der Minute bezeichnet, welche, wie schon bemerkt, von der Anzahl der Umläufe des Schwungrades sehr verschieden sein kann.

Auflösung derselben Aufgaben, wenn das Gewicht, die Trägheit und die wirkliche Bewegung der oscillirenden Maschinentheile in Rechnung gebracht wird.

Gleichung der lebendigen Kräfte in diesen allgemeinen Voraussetzungen für den in §. 110 betrachteten und in Fig. 22 dargestellten Apparat.

§. 144. Bei der in §. 134 und folgg. gegebenen Auflösung des Problemes der Aufstellung der zur Regulirung der Bewegung der Maschinen bestimmten Schwungräder ist der Einfluß der Trägheit und des Gewichtes der zur Fortpflanzung der Wirkung der Kraft oder des Widerstandes dienenden Maschinentheile ganz unberücksichtigt gelassen, wodurch wir auf ganz einfache und ähnliche Regeln, wie die von den Engländern aufgestellten geführt wurden. Aber obgleich die Aufgabe, wenn man diesen Einfluß und den wahren Bewegungszustand in Betracht zieht, so complicirt wird, daß die Resultate für die Praxis fast unbrauchbar werden, so glauben wir doch, hier wenigstens den Weg andeuten zu müssen, welchen man bei dieser allgemeinen Untersuchung einschlagen muß, und die Art und Weise näher anzugeben, wie man die Schwierigkeiten beseitigen kann, welche alsdann die wirkliche Auflösung der Aufgabe darbietet.

Betrachten wir zunächst den in §. 110 untersuchten Apparat, auf welchen eine verticale, constante oder veränderliche, positive oder negative Kraft F wirkt, d. h. eine Kraft, welche nach demselben Sinne wirkt als die Schwere, oder nach entgegengesetztem Sinne, indem aber dieser Sinn für dieselbe halbe Umdrehung EBG (Fig. 22) derselbe bleibt. Ferner wollen wir die Kraft Q, welche in tangentialer Richtung an dem Umfange eines auf der Welle der Kurbel AB befindlichen Rades von dem Halbmesser r wirkt, als nahezu constant annehmen, was in den in §. 39 gemachten Voraussetzungen, wo für gewisse Fälle ein doppeltes Schwungrad angewandt wird, immer der Fall ist; aber ihre Wirkung ist der der Kraft F immer entgegengesetzt, und um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß sie ein Widerstand ist, welcher in einem dem von dem Pfeile angedeuteten Sinne entgegengesetzten Sinne wirkt, wie bei den Maudslayschen Dampfmaschinen.

Dieses vorausgesetzt, bezeichne p das in C wirkende Gewicht des Geschirres (Fig. 29), q das der Lenkstange, welches in der Mitte G derselben wirkt, ω_0 die Winkelgeschwindigkeit des Kurbelarmes AB, wenn derselbe die verticale Lage AE annimmt und welche nach der Voraussetzung sehr wenig von der mittlern Geschwindigkeit Ω verschieden ist, so daß man ohne merklichen Fehler Ω für ω_0 substituiren, und in allen Fällen annehmen kann, daß ω_0 eine gegebene Größe ist, welche bei jedem Umlaufe dieselbe wird. Wenn wir ferner alle übrigen Voraussetzungen in §. 110 und folgg. beibehalten und uns das Gewicht q in zwei andere, jedes $= {}^1/_2 q$ zerlegt denken, wovon das eine in C wirkt, welches sich zu p, dessen virtuelle Geschwindigkeit df ist (§. 110), addirt, während das andere in B wirkende das virtuelle Moment ${}^1/_2 qb \sin. \alpha d\alpha$ hat und sich zu der Componente des Gewichtes des Kurbelarmes AB addirt und eine Summe gibt, welche wir mit q' bezeichnen wollen; so haben wir für den ersten halben Umgang EBL nach dem Principe der lebendigen Kräfte und dem in §. 112 u. folg. Gesagten:

$$A(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{b^2}{(BI)^2}\left(\frac{q}{g} G^2 + I\right)\omega^2 - \frac{b^2}{l^2}\left(\frac{q}{4g} l^2 + I\right)\omega_0^2 + \frac{p}{g}(AO)^2 . \omega^2$$
$$= 2\int_0^\alpha (p + {}^1/_2 q + F)\, df + 2 q' b\, (1 - \cos. \alpha) - 2 Q r \alpha,$$

weil der in dem Trägheitsmomente $\frac{q}{g} G^2 + I$ der Lenkstange vorkommende Werth von G für $\alpha = 0$ oder $\omega = \omega_0$ gleich ${}^1/_2 l$ wird und die Geschwindigkeit der Masse $\frac{p}{g}$, nämlich:

$$\frac{df}{dt} = \frac{(AO)}{b} \frac{bd\alpha}{dt} = (AO)\, \omega \text{ (§. 112)}$$

mit α zugleich verschwindet.

Vereinfachung dieser Gleichung und Werth der Winkelgeschwindigkeit der Kurbel für eine beliebige Lage.

§. 145. Die Form dieser Gleichung wird etwas vereinfacht, wenn man nach §. 23 u. folgg. des Anhanges zu diesem Abschnitte $I = K\frac{q}{g}l^2$ setzt, wo K eine Zahl ist, welche einzig und allein von den Dimensionen der Lenkstange abhängt und dann durch den Punct A zu IG die Parallele AQ zieht, welche BO in Q in zwei gleiche Theile theilt, wie BCG von IG in zwei gleiche Theile getheilt wird, wodurch man die ähnlichen Dreiecke ABQ, BGI erhält, welche, weil Q die Mitte von BO ist, geben:

$$G \text{ oder } IG = AQ\frac{BI}{AB} = \frac{BI}{b}AQ,\ \frac{b}{BI} = \frac{BO}{l},$$

$$(AQ)^2 = {}^1/_2(AB)^2 + {}^1/_2(AO)^2 - {}^1/_4(BO)^2,$$

und substituirt man diese Werthe in die fragliche Gleichung, so erhält man in der That ohne alle Schwierigkeiten:

$$\omega^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c} Ag\omega_0^2 + b^2q(K + {}^1/_4)\omega_0^2 + 2q'bg(1 - \cos.\alpha) - 2Qrg\alpha \\ + 2g\int_0^\alpha Fdf + 2q(p + {}^1/_2 q)f \end{array}\right\}}{Ag + {}^1/_2 qb^2 + q(K - {}^1/_4)(BO)^2 + (p + {}^1/_2 q)(AO)^2},$$

in welchem Ausdrucke $\omega_0 = \Omega$ und $df = AO.d\alpha$ oder näherungsweise $= \sin.\alpha\left(\frac{l + b\cos.\alpha}{l}\right)d\alpha$ gesetzt werden kann (§. 112). Da aber F gewöhnlich unmittelbar als Function des von dem Puncte C beschriebenen Weges f gegeben ist, so wollen wir das Integral $\int_0^\alpha Fdf$, welches die von der Kraft F wirklich hervorgebrachte Arbeit ausdrückt, während der Kurbelarm AB den Winkel α beschreibt, unter seiner gegenwärtigen Form beibehalten, und bemerken, daß die eben erwähnte Arbeit nur negativ werden kann, wenn Q selbst sein Zeichen verändert, oder eine wirkliche Kraft wird.

Um den Werth von ω für den zweiten halben Umgang LNE der Kurbel zu erhalten, braucht man nur anzunehmen, daß der Winkel α von 0 bis 2π wächst, indem das Integral $\int_0^\alpha Fdf$ selbst unbestimmt zunimmt, wenn es nicht Null wird, weil F eine bewegende Kraft ist, und $(p + {}^1/_2 q)f$ den Werth behält, welcher der absoluten Größe von $f = b + l - h$ entspricht.

Zusammengesetztheit der analytischen Auflösung des Problemes der Schwungräder in den gegenwärtigen Voraussetzungen.

§. 146. Dieser Werth läßt sich, wie man sieht, für jede Lage der Maschine vermittelst der Linien der Figur berechnen, weil $\int_0^\alpha Fdf$ nach der Voraussetzung selbst gegeben, oder vemittelst der bekannten Methoden der Quadraturen berechenbar ist, und man für die Bedingung der Fortdauer der Bewegung oder der Unveränderlichkeit von ω_0 die Relation hat:

$$2\pi r Q = \int_0^{2\pi} F df,$$

welche ebenfalls die constante oder mittlere Kraft Q gibt. Dieses setzt aber voraus, daß das Trägheitsmoment A der Kurbelwelle und des Schwungrades a priori gegeben ist, und läßt sich folglich nicht auf die gegenwärtige Aufgabe anwenden, bei welcher es sich um die Einrichtung des Schwungrades selbst handelt. Um so mehr ist es aber unmöglich, aus diesem Ausdrucke von ω^2 die entwickelten Werthe der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit der Maschine oder der Winkel α abzuleiten, deren Kenntniß, wie wir gesehn haben, bei der Aufstellung des Schwungrades unumgänglich nothwendig ist, und überdies von einer transcendenten Gleichung eines sehr hohen Grades abhängt, selbst wenn man F als constant annimmt und näherungsweise

$$(AO)^2 = \frac{\sin.^2 \alpha\,(l + b\cos.\alpha)^2}{l^2},\quad h = b\cos.\alpha + l - \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l}\sin.^2\alpha,$$

$$f = b\,(1 - \cos.\alpha) - \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l}\sin.^2\alpha,\quad df = b\sin.\alpha\left(1 + \frac{b}{l}\cos.\alpha\right)d\alpha,$$

$$BO = \frac{lAO}{h\,\mathrm{tang}.\alpha} = \frac{(l + b\cos.\alpha)\cos.\alpha}{l + b\cos.\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l}\sin.^2\alpha}$$

setzt (§. 111 und 112), wo sich der letzte dieser Ausdrücke unmittelbar aus der Vergleichung der Seiten der Dreiecke ABO und ABC mit den Sinussen der Winkel ergibt.

Auflösungsmethode, welche auf Probiren beruht.

§. 147. Das Problem der Aufstellung der Schwungräder läßt sich also hier nicht direct durch die Analysis lösen und man muß nothwendig von der geometrischen Methode des Probirens, welche sich auf die Data der Figur selbst gründet, Gebrauch machen.

Zu diesem Zwecke nimmt man das Trägheitsmoment A des Schwungrades und seiner Welle willkürlich an, oder vielmehr, man bestimmt einen ersten Näherungswerth nach der practischen Regel in §. 142, indem man hier bloß $n = \tfrac{1}{20}$ setzt, wenn keine sehr große Regelmäßigkeit erforderlich ist, und indem man das Gewicht und die Trägheit der oscillirenden Maschinentheile in Rechnung bringt. Erwägt man alsdann, daß ω_0 fast $= \Omega = \frac{m 2\pi}{60} = 0{,}10472 m$ ist, wo m die Anzahl der Umgänge der Maschine in der Minute bezeichnet, so sucht man umgekehrt den Grad der wirklichen Regelmäßigkeit zu bestimmen, welcher sich aus der Annahme dieses particulären Werthes von A ergibt, oder wie groß der größte Unterschied zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der mittlern Geschwindigkeit Ω ist, welcher nach §. 38 durch:

$$d = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\Omega}$$

ausgedrückt wird, wo ω_1^2 und ω_2^2 resp. der größte und kleinste der Werthe ist, welche der obige Ausdruck von ω^2, während eines Umganges der Maschine gibt.

Wenn dieser Unterschied die für d angenommene Grenze merklich überschreitet, oder beträchtlich kleiner ist, so wiederholt man dieselben Operationen, indem man für A einen kleinern oder größern Werth annimmt, u. s. f., bis man zu einem hinreichend genäherten Resultate gelangt, was nach den besondern Daten, welche man für die Grenzen der Auflösung besitzt, und wenn man sich der sogenannten Regel Falsi bedient, nicht lange dauern kann.

Construction des Werthes der Winkelgeschwindigkeit des Systemes und der Curve, welche das Maximum und Minimum derselben gibt.

§. 148. Um den in Rede stehenden größten und kleinsten Werth von ω^2 zu erhalten, construire man die Curve, deren Abscissen die successiven Werthe des Bogens ab von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$ und deren Ordinaten y die entsprechenden Werthe von ω^2 für die verschiedenen Lagen des Kurbelarmes sind. Da alle Glieder des Zählers und Nenners dieses Bruches ω^2 mit Einschluß derer, worin A vorkommt, und welche von der Form $\frac{P}{g} R_1^2$ sind, das Product aus einer Zahl, einem Gewichte und dem Quadrate oder Rechtecke, deren Seiten unmittelbar durch die Figuren 22 oder 29 gegeben werden, sind; so kann man sie so umformen, daß sie nur noch bloße Entfernungen ausdrücken, wenn man den Zähler und Nenner des Bruches durch das Product aus g und einem gewissen Gewichte π', z. B. von 100 Kilogr. dividirt, um in gewissen Fällen nicht zu große Linien zu bekommen.

Was das Integral $\int_0^a Fdf$ anlangt, welches die Fläche des der Curve $I'C'M'$ entsprechenden gemischtlinigen Trapezes $II'CC'$ ausdrückt, wo die Werthe CI von f die Abscissen und die Werthe CC' von F die Ordinaten der erwähnten Curve sind; so erhält man sie sehr leicht durch die bekannte graphische Methode, welche darin besteht, daß man die ganze Fläche $II'M'MI$, welche dem ganzen Wege von C entspricht, durch gleichweit von einander abstehende Ordinaten in hinreichend kleine Trapeze zertheilt, wovon CC' für ein beliebiges derselben genommen werden muß; denn wenn $x'y'y''x''$ (Fig. 30) eins dieser Trapeze ist, x_1y_1 die mittlere oder von den beiden äußern Ordinaten $x'y'$ und $x''y''$ gleichweit abstehende Ordinate, m ihr Durchschnittspunct mit der Sehne $y'y''$ und g ein Punct, welcher so liegt, daß er um ein Drittel von my_1 von dem Puncte m entfernt ist; so hat man sehr nahe:

$$\text{Fläche } x'y'y_1y''x'' = gx_1 \, {}^1/_6 \, x'x'' = gx_1 \, {}^1/_3 \, x'x_1,$$

so daß man, da die Länge ${}^1/_6 \, x'x''$ oder ${}^1/_3 \, x'x$ constant ist, nur noch die den verschiedenen Elementartrapezen entsprechenden Ordinaten gx_1 successive zusammen zu addiren braucht, um den Werth zu erhalten, welcher der Fläche eines beliebigen Trapezes $II'CC'$ (Fig. 22 und 29) proportional ist, und welchen man durch ${}^1/_3 \, x'x$ multipliciren muß, um das Integral $\int_0^a Fdf$ zu erhalten.

Auf diese Weise hat man alsdann bloß noch Größen von der Form:

$$\frac{q}{\pi'}(K-{}^1/_4)\frac{(BO)^2}{g},\ \frac{q}{\pi'}(K+{}^1/_4)\frac{b^2}{g},\ \frac{2q}{\pi'}b(1-cos.\,\alpha),\ etc.$$

zu construiren, was sehr leicht durch dritte oder vierte Proportionalen geschehn kann, wenn man ein für allemal auf dem Maaßstabe die Längen:

$$\frac{\pi'}{(K-{}^1/_4)q}\,g,\ \frac{\pi'}{(K+{}^1/_4)q}\,g,\ etc.$$

nimmt, vermittelst welcher man den Werth von $y=\omega^2$ für jede beliebige Einheit durch eine letzte vierte Proportionale construiren kann. Um aber die Verwirrung der Figur zu vermeiden und eine Art von Stetigkeit in die Operationen zu bringen, wird man wohlthun, wenn man die Curven einzeln construirt, deren Ordinaten durch die Zähler und Nenner von ω^2 ausgedrückt werden, um daraus durch symmetrische Zeichnungen die abzuleiten, welche der gesuchten Curve angehören. Dieselbe Symmetrie und dieselbe Continuität müssen auch bei den Constructionen jedes der einzelnen Glieder dieses Zählers und Nenners beobachtet werden, so daß man mit den eigenen Daten der nach einem entsprechenden Maaßstabe construirten Figur 22 operiren kann. Uebrigens brauchen wir uns bei diesen Bemerkungen, deren Zweck und Geist leicht zu begreifen ist, nicht länger aufzuhalten.

Directere Auflösung der Aufgabe vermittelst der beiden äußern Curven.

§. 149. Die Anzahl der Versuche oder der Hülfscurven, welche die Bestimmung des Trägheitsmomentes A nothwendig macht, wird sehr vermindert, wenn man auf folgende Weise verfährt.

Wir wollen durch φ und ψ die veränderlichen Theile des Zählers und Nenners von ω^2, welche Functionen von $x=\alpha b$ sind und durch $C\Omega^2$ und e resp. ihre constanten Bestandtheile bezeichnen, d. h. wir wollen

$$\frac{2q'b}{\pi'}(1-cos.\,\alpha)-\frac{2Qr\alpha}{\pi'}+\frac{2}{\pi'}\int_o^\alpha Fdf+2\left(\frac{p+{}^1/_2q}{\pi'}\right)f=\varphi,$$

$$(K-{}^1/_4)\frac{q}{\pi'}\frac{(BO)^2}{g}+\frac{(p+{}^1/_2q)}{\pi'}\frac{(AO)^2}{g}=\psi,$$

$$\frac{A}{\pi'}\Omega^2+(K+{}^1/_4)\frac{q}{\pi'}\frac{b^2}{g}\Omega^2=C\Omega^2,$$

$$\frac{A}{\pi'}+{}^1/_2\frac{q}{\pi'}\frac{b^2}{g}=e$$

setzen, so daß wir bloß

$$\omega^2=\frac{C\Omega^2+\varphi}{e+\psi}$$

haben, und wenn wir in Beziehung auf α oder x differentiiren, so wird die Bedingung des Maximums und Minimums von ω^2 durch die Gleichung:

$$(e + \psi)\,\varphi' - (C\Omega^2 + \varphi)\,\psi' = 0$$

oder:
$$\frac{C\Omega^2 + \varphi}{e + \psi} = \frac{\psi'}{\varphi'}$$

ausgedrückt, worin

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\alpha} =$$

$$\frac{2q'b}{\pi'}\,sin.\alpha - \frac{2\,Q}{\pi'}\,r + 2\,\frac{F}{\pi'}\,\frac{df}{d\alpha} + \frac{2\,(p + {}^1/_2 q)}{\pi'}\,\frac{df}{d\alpha},$$

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\alpha} =$$

$$2\,(K - {}^1/_4)\,\frac{q}{\pi'}\,\frac{BO}{g}\,\frac{d\,(BO)}{d\alpha} + 2\,\frac{(p + {}^1/_2 q)}{\pi'}\,\frac{AO}{g}\,\frac{d\,(AO)}{d\alpha}$$

ist, und lineariſche Größen ſind, welche ſich, wie ſpäter gezeigt werden wird, leicht conſtruiren laſſen.

Da dieſe Gleichung zu gleicher Zeit für alle Werthe der Abſciſſe $x = ab$ erfüllt werden muß, welche irgend einem Maximum oder Minimum von ω^2 für particuläre Werthe der Conſtanten C, e oder A entſprechen, ſo brauchte man offenbar, wenn die erwähnten Abſciſſen für einen dieſer letzten Werthe bekannt wären, ſie bloß in die von A unabhängige Function $\frac{\psi'}{\varphi'}$ zu ſubſtituiren, um das entſprechende Maximum oder Minimum zu erhalten, und wenn man folglich die durch die Gleichung:

$$y = \frac{\psi'}{\varphi'}$$

ausgedrückte Curve conſtruirt, ſo drücken die Ordinaten derſelben die Geſammtheit der Maxima und Minima für die verſchiedenen particulären Werthe aus, welche man der Größe A beilegen kann, und welchen eben ſo viele verſchiedene Gruppen von Abſciſſen dieſer Curve entſprechen, die, wenn ſie vermittelſt jedes dieſer Werthe beſtimmt werden könnten, unmittelbar zu der Auflöſung der vorgelegten Aufgabe führen würden. Hierzu gelangt man aber, wie man ſogleich ſehn wird, durch die Conſtruction einer neuen, ebenfalls von A unabhängigen Hülfscurve.

Denn der allgemeine Ausdruck von ω^2 kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{(c - e)\,\Omega^2 + \varphi - \psi\Omega^2}{e + \psi}$$

$$= \Omega^2 + \frac{i + \varphi - \psi\Omega^2}{e + \psi},$$

wo: $$i = (c - e)\,\Omega^2 = \left(\frac{(K + {}^1/_4)\,qb^2}{\pi' g} - {}^1/_2\,\frac{q}{\pi'}\,\frac{b^2}{g}\right)\Omega^2$$

$$= (K - {}^1/_4)\,\frac{q}{\pi'}\,\frac{b^2}{g}\,\Omega^2 \text{ iſt.}$$

Wenn man den Differentialcoefficienten dieses Ausdruckes $=0$ setzt, und aus der so erhaltenen neuen Gleichung den Werth der Constante e, welche bloß von A abhängig ist, ableitet; so erhält man die Relation:

$$e = \frac{(i+\varphi)\psi' - \psi\varphi}{\varphi' - \psi'\Omega^2},$$

welche diesen Werth mit den Werthen der Abscissen x in Verbindung setzt, welche sich auf die Maxima oder Minima der Function ω^2 beziehen.

Construirt man die durch die Gleichung:

$$y = \frac{(i+\varphi)\psi' - \psi\varphi'}{\varphi' - \psi'\Omega^2}$$

ausgedrückte Curve und sucht die Abscissen, welche ihren Durchschnittspuncten mit einer durch die Gleichung:

$$y = e = \frac{A}{\pi'} + {}^1/_2 \frac{q}{\pi'} \frac{b^2}{g}$$

ausgedrückten Parallele zu der Axe der x entsprechen, so sind diese genau diejenigen, welche dem gewählten particulären Werthe von e oder A entsprechen, und dessen Größe in der ersten Curve $y = \frac{\psi'}{\varphi}$ die Werthe der Ordinaten bestimmt, welche das entsprechende Maximum oder Minimum von ω^2 ausdrücken. Nimmt man endlich den Unterschied zwischen der größten und kleinsten dieser Ordinaten für diesen nämlichen Werth von A, so drückt derselbe den Werth von $\omega_1^2 - \omega_2^2$ aus, woraus sich sofort der von d oder von n, *etc.* ergibt.

Constructionsart dieser Hülfscurven.

§. 150. Die ganze Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, ein für allemal über derselben Abscissenaxe zwei Hülfscurven zu construiren, deren resp. Ordinaten y_1 und y_2 z. B. durch die Relationen:

$$y_1 = \frac{\psi'}{\varphi'},\; y_2 = \frac{(i+\varphi)y_1 - \psi}{1 - \Omega^2 y_2}$$

miteinander verbunden sind, vermittelst welcher sich die zweite Ordinate direct aus der ersten durch sehr einfache graphische Verfahrungsarten ableiten läßt, und in Beziehung, auf welche wir hier bloß zu zeigen brauchen, wie man die Werthe der Differentialcoefficienten oder der in den Ausdrücken von φ' und ψ' vorkommenden Glieder in Linien erhalten kann.

Nun wissen wir aber bereits, daß $\frac{df}{d\alpha} = AO$ ist (§. 112). Was die Glieder $\frac{d(AO)}{d\alpha}$, $\frac{d(BO)}{d\alpha}$ anlangt, so erinnere man sich, daß der Punct I (Fig. 29 und 31) der augenblickliche Rotationsmittelpunct der Stange oder der geraden Linie BO ist (§. 114), so daß der Fußpunct P des von diesem Mittelpuncte auf diese gerade Linie gefällten Perpendikels betrachtet werden muß, als der Durchschnittspunct der successiven oder einander unendlich nahe kommenden Richtungen dieser geraden Linie, woraus sich durch Vergleichung der Linien der Figur für diese beiden Lagen und nach den bereits in §. 110 folgg. aufgestellten Relationen ohne Schwierigkeit ergibt:*)

$$\frac{d(AO)}{d\alpha} = \frac{AO}{AC}\,\frac{PO}{PC},\quad \frac{d(BO)}{d\alpha} = -BO\,\frac{CO}{CB}.$$

Vermittelst dieser Data ist alsdann nichts leichter, als die Construction des Werthes von ψ' und φ'. Nimmt man z. B. auf der Verlängerung von CA nach dem Maaßstabe der Zeichnung eine Länge:

$$AG' = \frac{\pi'}{2(p + {}^1\!/_2 q)}\, g,$$

und errichtet in dem Endpuncte O von OC ein unbegrenztes Perpendikel VOM, welches AG' in M trifft, zieht durch diesen letzten Punct zu $G'O$ die Parallele MN; so erhält man auf AO das Stück AN, welches man auf CI von C' nach N' trägt, durch welchen letzten Punct man wieder die gerade Linie $N'P$ zieht, welche die Verlängerung von OA in einem solchen Puncte X trifft, daß

$$OX = \frac{OP}{C'P}CN' = \frac{OP}{CP}\cdot\frac{AO.AM}{AG'}$$

$$= 2\,\frac{(p + {}^1\!/_2 q)}{\pi'}\,\frac{AO}{g}\,\frac{AO}{AC}\,\frac{PO}{PC} = 2\,\frac{(p + {}^1\!/_2 q)}{\pi'}\,\frac{AO}{g}\,d\frac{(AO)}{d\alpha}$$

der Werth des zweiten Gliedes von ψ' ist.

Um das erste Glied zu construiren, braucht man auf OM nur eine Länge:

$$OG'' = \frac{\pi'}{2(K - {}^1\!/_4)\,q}\, g$$

zu nehmen und in dem Endpuncte von $G''B$ das Perpendikel BV zu errichten, welches auf der Verlängerung von MO die Länge OV gibt, die man auf CI von C nach V' tragen muß. Zieht man alsdann CY parallel zu BV', so ist AY der gesuchte Werth, und man hat folglich:

$$\psi' = AX - AY = -XY.$$

*) Es braucht hier bloß bemerkt zu werden, daß, da $C'PB'O'$ die unendlich nahe Lage von CBO und OO'' der aus dem Puncte I als Mittelpunct mit dem Halbmesser OI beschriebene unendlich kleine Bogen ist, so daß $B'O'' = BO$, man hat $d(AO) = OO'$, $d(BO) = O'O''$, $bd\alpha = BB'$, $df = CC' = AOd\alpha$, $OO'' = BB'\frac{OI}{BI}$; und durch die Betrachtung der unendlich kleinen Dreiecke PCC', POO', $OO'O''$ erhält man die Relationen: $\frac{CC'}{CP} = \frac{sin.\,CPC'}{sin.\,ACO}$, $\frac{OO'}{OP} = \frac{sin.\,OPO'}{sin\,AOC} = \frac{sin.\,CPC'}{sin.\,AOC}$, $\frac{O'O''}{OO''} = \frac{sin.\,O'OO''}{sin.\,OO'O''} = \frac{cos.\,OIC}{sin.\,AOC}$, woraus sich unmittelbar die Ausdrücke im Texte ergeben, wenn man bemerkt, daß $OI\,cos.\,OIC = AC$, etc. ist.

Es ist kaum nöthig, zu bemerken, daß man, um die Figur nicht zu verwirren, die Constructionslinien, welche in der Figur bloß punctirt sind, und wovon man bloß die Enden gebraucht, um das gesuchte Resultat zu erhalten, nicht wirklich gezogen werden müssen. Was die Größe φ' anlangt, so bietet ihre Construction noch weniger Schwierigkeiten dar, als die von φ und ψ, weil $\frac{df}{d\alpha} = AO$, $b \sin. \alpha$ der Sinus des Bogens $BE = ab = X$ (Fig. 29) und $b\,(1 - \cos. \alpha)$ der Sinusversus ED ist.

Bestimmung der größten Torsionskraft, welche auf die Welle des Schwungrades und auf seine Arme insbesondere wirken darf.

§. 151. Wenn es darauf ankäme, die Stärke zu bestimmen, welche man den Armen des Schwungrades geben muß, damit sie den Torsionskräften widerstehn können, welche sie zu zerbrechen streben; so hätte man, wie wir in §. 129 gesehn haben, das absolute Maximum der Function:

$$\frac{d\omega}{dt} = {}^1/_2 \frac{d\omega^2}{d\alpha} = {}^1/_2 \frac{d\left(\frac{c\Omega^2 + \varphi}{e + \psi}\right)}{d\alpha}$$
$$= {}^1/_2 \frac{(e + \psi)\,\varphi' - (c\Omega^2 + \varphi)\,\psi'}{(e + \psi)^2}$$

zu bestimmen, welche Aufgabe auf eine ähnliche Weise gelöst wird, wie die, welche sich auf die Aufstellung des Schwungrades selbst bezieht, aber nur die Zeichnung einer einzigen Curve erfordert, deren Ordinaten die Werthe der in Rede stehenden Function sind, weil c, e oder A hier als **a priori** gegeben, oder als nach den vorhergehenden Untersuchungen bekannt, angenommen werden. Nun ist es aber in Beziehung auf diesen letzten Fall vielleicht nicht nutzlos, wenn wir bemerken, daß das Maximum von $\frac{d\omega}{dt}$ unmittelbar durch die Hälfte der trigonometrischen Tangente des Winkels gegeben wird, welchen die am wenigsten geneigte Tangente der Curve, deren Ordinaten die Werthe der Function:

$$\omega^2 = \frac{c\Omega^2 + \varphi}{e + \psi}$$

sind, und deren Construction wir angegeben haben (§. 148), mit der Axe der Abscissen bildet, und welche Tangenten offenbar den verschiedenen Inflexionspuncten dieser Curve entsprechen.

Hat man auf diese Weise die größte Torsionskraft gefunden, welche am Ende der Arme des Schwungrades wirkt, oder die Summe der Momente ähnlicher Kräfte, welche auf jeden materiellen Theil der Welle oder der Kurbel wirken (§. 129); so läßt sich daraus leicht die größte Kraft ableiten, welche auf einen beliebigen andern Punct dieser Welle, z. B. auf das Ende des Kurbelarmes, auf die Zähne des bewegenden Rades von Q, *etc.* wirken darf, und welche man kennen muß, um die Dimensionen dieser Theile zu bestimmen.

Auflösung derselben Aufgaben bei Anwendung eines Balanciers (§. 115).

§. **152.** Wenn man dieselben Aufgaben für den in §. **115** beschriebenen und in Figur 23 dargestellten Apparat mit einem Balancier auflösen wollte, so ließe sich dieses sofort vermittelst der in den folgenden Paragraphen gemachten Bemerkungen und auf einem ähnlichen Wege, wie der vorhin befolgte, bewerkstelligen. Denn werden alle Bezeichnungen in §§. **116**, **119** und **146** beibehalten und außerdem das Gewicht des Balanciers mit P' und sein Trägheitsmoment in Beziehung auf die Drehungsaxe D (Fig. 23), in welcher auch immer der Schwerpunct desselben liegt, mit $\frac{K'P'B^2}{d}$ bezeichnet, wo dieses Trägheitsmoment vermittelst der am Ende dieses Abschnittes gegebenen Regeln bestimmt wird, bezeichnet außerdem p das in F wirkende Gewicht des zugehörigen Geschirres, $^1/_2\,q$ die Componente des Gewichtes der Stange BC, welches in C wirkt, um dem vorhergehenden das Gleichgewicht zu halten und welchem man außerdem ohne merklichen Fehler dieselbe virtuelle Geschwindigkeit df beilegen kann, und ist endlich F die bewegende Kraft nach Abzug der sie begleitenden Widerstände und Q der active Widerstand, welcher an dem Rade von dem Halbmesser r angebracht und um die Kraft vermehrt ist, welche der Reibung der Kurbelwelle, 2c. das Gleichgewicht halten würde; so findet man ohne alle Schwierigkeiten:

$$\omega^2 = \frac{\left\{\begin{array}{l} Ag\Omega^2 + (K + {}^1/_4)\,qb^2\Omega^2 + 2q'(1 - \cos.\alpha)\,b \\ -2\,Qrg\alpha + 2g\int_0^\alpha Fdf + 2g\,({}^1/_2\,q - p)\,f \end{array}\right\}}{Ag + {}^1/_2\,qb^2 + (K - {}^1/_4)\,q\,(BO)^2 + (K'P' + {}^1/_2\,q)\,(AO)^2 + p\,(DV)^2},$$

in welchem Ausdrucke man zur Bestimmung von Q für den Fall, wo F sowohl während des Auf= als des Niedersteigens wirkt, ebenfalls

$$2\pi r Q = \int_0^{2\pi} Fdf$$

hat. *)

---

*) Wenn man die Zapfenreibung des Balanciers in Rechnung bringen wollte, welche in gewissen Fällen einen merklichen Einfluß haben kann, so müßte man bemerken, daß der darauf ausgeübte Druck während des Aufsteigens des Punctes F näherungsweise durch $P' + p + {}^1/_2\,q - 2F$ und während des Niedersteigens des Punctes F durch $P' + p + {}^1/_2\,q + 2F$ ausgedrückt wird, so daß man von dem Zähler des Ausdruckes für ω^2 im 1. Falle einen Ausdruck von der Form:

$$2g\mu\,(P' + p + {}^1/_2\,q)\,S - 4g\mu\varrho\int_0^\alpha F\left(d\Theta + \frac{df}{DO}\right),$$

und im 2. Falle einen Ausdruck von der Form:

$$2g\mu\,(P' + p + {}^1/_2\,q)\,S - 4g\mu\varrho\left(\int_0^\pi \frac{Fdf}{DO'} - \int_\pi^\alpha \frac{Fdf}{DO'}\right)$$

abzuziehen hat, wo μ der Coefficient der Reibung des Zapfens (Absch. 3), ϱ der Halbmesser desselben und S die absolute oder totale Größe des

Bestimmung der Größen, wovon die Auflösung der Aufgabe hauptsächlich abhängt.

§. 153. Man sieht, daß der Werth von ω^2 für jede Lage des Systemes durch dieselben Verfahrungsarten wie in §. 144 construirt werden kann; aber die Bestimmung der Function:

$$\psi' = \frac{(K - {}^1/_4)}{g\pi'} q \frac{d(BO)^2}{d\alpha} + \frac{(K'P' + {}^1/_2 q)}{g\pi'} d \frac{(AO)^2}{d\alpha} + \frac{p}{g\pi'} \frac{d(DV)^2}{d\alpha}$$

veranlaßt hier etwas mehr Schwierigkeiten.

Durch die Vergleichung der ähnlichen Dreiecke AOK und DCK (Fig. 24), welche durch die Verlängerungen der Seiten AD und BC des Viereckes $ABCD$ gebildet werden, erhält man zunächst:

$$AO = CD \frac{AK}{DK} = B - B \frac{AO}{DK}, \quad \frac{d(AO)}{d\alpha} = B \frac{AD}{DK^2} \frac{d(DK)}{d\alpha},$$

und wenn man alsdann wie in §. 149 bemerkt, daß der Punct I der augenblickliche Rotationsmittelpunct des Dreieckes BCI und daß der Fußpunct P des von diesem Puncte auf die Verlängerung von BC gefällten Perpendikels der successive Durchschnittspunct der letztern bei einer unendlich kleinen Verrückung des Systemes ist; so hat man:

$$\frac{d(DK)}{d\alpha} = \frac{PK}{PC} \frac{cos.\, KCD}{sin.\, CKD} AO,$$

woraus sich durch Vergleichung der Linien der Figur leicht ergibt:

$$\frac{d(AO)}{d\alpha} = AO \frac{AD}{DK} \frac{PK}{PC} cotg.\, KCD$$

$$= AO \frac{AD}{DK} \frac{PK}{PI} = AO \frac{PX}{PI},$$

Reibungsbogens für die erste oder zweite Periode, welcher dem von der Kurbel beschriebenen Winkel α entspricht, ist.

Da sich die Größe $2\mu(P' + p + {}^1/_2 q) S$ für jede Lage des Systemes leicht berechnen oder construiren läßt, so sieht man, daß die Auflösung der Aufgabe durch die neue Voraussetzung nur insofern complicirter geworden ist, als für das ursprüngliche Integral $\int_0^\alpha Fdf$ das Integral $\int_0^\alpha \left(1 \pm \frac{2\mu\varrho}{DO'}\right) dFf$ oder für die Kraft F die Kraft $F\left(1 \pm \frac{2\mu\varrho}{DO'}\right)$ an die Stelle getreten ist, welche Ausdrücke sich aber ebenfalls leicht für jede Lage des Systemes construiren lassen, und worin sich das Zeichen + auf die erste, und das Zeichen — auf die zweite Periode der Bewegung bezieht. Aber es ist zu bemerken, daß diese Resultate voraussetzen, daß $P' + p + {}^1/_2 q$ immer größer ist als $2F$ und daß man im entgegengesetzten Falle das Zeichen von μ verändern und S algebraisch nehmen, d. h. die in der zweiten Periode beschriebenen Bogen negativ setzen muß, welche auch von denen der ersten Periode abgezogen werden müssen, um den absoluten Werth von S zu erhalten.

wo AX eine auf BK begrenzte Parallele zu PD ist. Man hat also endlich:

$$\frac{d\,(AO)^2}{d\alpha} = 2\,(AO)^2\,\frac{PX}{PI}.$$

Da die Dreiecke ADI und ABO geben:

$$d.\,AID + d\Theta + d\alpha = 0,$$
$$(BO)^2 = (AO)^2 + (AB)^2 - 2\,AB.\,AO\cos.\,AID,$$

so hat man ebenfalls:

$$\frac{d\,(BO)^2}{d\alpha} =$$
$$\frac{d\,(AO)^2}{d\alpha} - 2b\cos.\,AID\,\frac{d\,(AO)^2}{d\alpha} - 2b\sin.\,AID\left(AO + \frac{(AO)^2}{B}\right),$$

welches gibt, wenn man auf die Verlängerung von AO das Perpendikel Bp fällt und bemerkt, daß $DU = AO$ genommen ist (§. 119):

$$\frac{d\,(BO)^2}{d\alpha} = -2\,AO\left(pO\,\frac{PX}{PI} + pB\,\frac{CU}{CO}\right),$$

und da endlich

$$DV = \frac{uu'}{B} = \frac{DO'.\,AO}{B} \quad (§.\,116)$$

ist, so kommt:

$$\frac{dDV}{d\alpha} = \frac{DO'}{B}\,\frac{dAO}{d\alpha} + \frac{AO}{B}\,\frac{dBO'}{d\alpha}.$$

Da nun der Punct I' der augenblickliche Rotationsmittelpunct des Dreieckes $I'FE$ ist (§. 116) und der Fußpunct P' des von diesem Puncte auf die Verlängerung von EF gefällten Perpendikels wieder als der Durchschnittspunct dieser letzten Geraden mit ihrer unendlich nahen Richtung betrachtet werden muß; so findet man ohne Schwierigkeiten:

$$\frac{d\,(DO')}{d\alpha} = \frac{DO'AO}{B}\,\frac{P'O'}{P'I'} = DV\,\frac{P'O}{P'I'}$$

und folglich:

$$\frac{d\,(DV)^2}{d\alpha} = 2\,DV\,\frac{(DO')}{B}\left(\frac{d\,(AO)}{d\alpha} + \frac{AO^2}{B}\,\frac{P'O'}{P'I'}\right)$$
$$= 2\,DV^2\left(\frac{PX}{PI} + \frac{DV}{DO'}\,\frac{P'O'}{P'I'}\right),$$

in welchem Ausdrucke man fast immer das zweite Glied seiner Kleinheit wegen gegen das erste vernachlässigen kann.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 154. Alle diese Werthe, welche in dem Ausdrucke von ψ' durch gewisse Brüche von g dividirt werden müssen, lassen sich, wie man sieht, sehr einfach construiren, und man kann diese Construction noch dadurch sehr vereinfachen, daß man die unmittelbar von der Figur gelieferten Data zweckmäßig zu benutzen sucht; allein es ist hier hinreichend, den Weg der graphischen Auflösung der gewöhnlichen Aufgabe gezeigt zu haben, wo das System der Kurbel, des Balanciers, rc. einer Dampfmaschine zum Voraus construirt ist und es bloß darauf ankommt, das Trägheitsmoment des Schwungrades zu bestimmen, welches die Rotationsgeschwindigkeit der Kurbelwelle zwischen bestimmten Grenzen zu erhalten vermag. Was die Aufgabe betrifft, welche darin besteht, die Dimensionen des Balanciers selbst so zu bestimmen, daß die Abweichung der veränderlichen Geschwindigkeit von der mittlern Geschwindigkeit so viel als möglich, und zwar unabhängig von dem Schwungrade, verbessert wird, so verweisen wir auf die gelehrte Abhandlung von Coriolis im 21. Hefte des Journals der polytechnischen Schule zu Paris: „Ueber den Einfluß des Trägheitsmomentes des Balanciers der Dampfmaschinen, rc." S. 228, indem wir bemerken, daß die vorhergehenden analytischen und geometrischen Betrachtungen dazu dienen können, die Auflösungen, welche Coriolis angegeben und wobei er der Zusammengesetztheit der Rechnung wegen den Einfluß der Trägheit der Lenkstange unberücksichtigt gelassen hat, welche aber fast immer ein sehr beträchtliches Gewicht hat, und dem der Kolben und ihrer Stangen das Gleichgewicht halten kann, in einigen Puncten zu vereinfachen und zu vervollständigen.

Von den Räderwerken

oder den geometrischen Mitteln, die Geschwindigkeit der Maschinentheile gleichförmig zu machen, bei welchen es möglich ist.

Es gibt drei Hauptmittel, die gleichförmige Geschwindigkeit von einer rotirenden Welle auf die andere zu übertragen.

§. 155. Bei den allgemeinen Betrachtungen über die Maschinen (§. 22 und 29) haben wir gesehn, wie wichtig es ist, gewisse Maschinentheile, und namentlich die Räder, so einzurichten, daß sie einander die geometrische Geschwindigkeit für alle Lagen des Systemes in einem unveränderlichen Verhältnisse mittheilen. Es ist durchaus nothwendig, die Hauptbedingungen der Zeichnung dieser Maschinentheile gegenwärtig zu haben, damit man im Stande ist, die von den passiven Widerständen, welche sie in die Maschinen einführen, herrührenden Quantitäten Wirkung oder Leistung zu bestimmen, und dieses ist auch der Hauptgrund, weswegen wir hier einige Grundbegriffe über diesen Gegenstand beibringen wollen.

Bei zwei Rädern, deren Wellen parallel sind, oder einen gewissen Winkel miteinander bilden, sind drei Hauptmittel zur Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe bekannt, nämlich 1) durch bloße Berührung und Rollung der Radkränze aneinander, 2) durch Anwendung von Ketten oder Riemen ohne Ende, welche um die Radkränze gelegt werden, und 3) durch Verzahnungen an dem Umfange der Räder.

Ueber die Mittheilung der Bewegung durch bloße Berührung oder Rollung der Radkränze aneinander.

§. 156. 1. Fall (Fig. 32). Wenn sich die cylindrischen oder kegelförmigen Radkränze durch bloße Berührung ohne Gleitung in Bewegung setzen, so ist klar, daß die jeden Augenblick beschriebenen oder sich gewissermaßen jeden Augenblick einander abwickelnden Bogenelemente der Berührungskreise einander gleich sind, und daß die Winkelgeschwindigkeiten der Räder in dem umgekehrten und constanten Verhältnisse ihrer Halbmesser stehn.

Die ganze Schwierigkeit besteht hier, wie man sieht, in der Verhinderung des Gleitens, und es ist daher, wenn die an den Umfängen der Räder wirkenden Tangentialkräfte beträchtlich sein müssen, nothwendig, die Radumfänge gehörig gegeneinander zu drücken, was durch Federn, Keile, Druckschrauben und Hebel bewirkt wird, welche auf die Wellen oder auf die Zapfenlager wirken. Es lassen sich eine Menge von Vorrichtungen zur Erreichung dieses Zweckes angeben, und in gewissen englischen Maschinenanlagen überzieht man die äußere Fläche der Radkränze mit Büffelleder, so daß die geringen Erhabenheiten und Vertiefungen desselben gewissermaßen in einander eingreifen und kein Gleiten stattfinden kann.

Dieses System scheint aber nur angewandt werden zu können, wenn die Kräfte gleichförmig und regelmäßig auf die Maschinen wirken, so daß die Geschwindigkeit der Räder und der auf sie ausgeübte Druck constant ist. In gewissen Mühlen wird dasselbe als Sackzug angewandt, wobei die Bewegung sehr sanft sein muß. Aber wenn die Kraft, oder der Widerstand veränderliche Wirkungen auf die Räder ausübt, oder wenn Stöße und überhaupt plötzliche Geschwindigkeitsveränderungen stattfinden, wie dieses bei den meisten Maschinen der Fall ist; so würde es offenbar sehr schwierig sein, das aneinander Hingleiten der Räder zu verhindern, wofern sie nicht stark gegeneinander gedrückt würden, wodurch aber die passiven Widerstände vergrößert würden, und man den Zweck, welchen man bei der Anwendung dieses Systemes zu erreichen suchte, folglich ganz verfehlte.

Ueber die Mittheilung der Bewegung durch Ketten oder Riemen ohne Ende.

§. 157. 2. Fall (Fig. 33, 34 und 35). Die Vorrichtung, bei welcher man den Rädern vermittelst Schnüren, Ketten oder Riemen ohne Ende eine gleichförmige Bewegung ertheilt, gibt zu denselben Ueberlegungen Veranlassung, wie die, welche wir bereits in Beziehung auf die Räder angestellt haben, welche einander durch bloße Berührung die Bewegung mittheilen, und sie bietet auch ähnliche Nachtheile dar. Diese Vorrichtung wird hauptsächlich in dem Falle mit Nutzen angewandt, wo es darauf ankommt, die Bewegung in eine gewisse Entfernung fortzupflanzen, weswegen man auch häufig Gebrauch davon macht.

Bei dieser Vorrichtung kann man die Mittheilung der Bewegung auch leicht beliebig unterbrechen, indem man die Schnur oder den Riemen über eine lose oder eine Leitrolle gehn läßt. Endlich kann man diese Vorrichtung mit Vortheil anwenden, wenn man auf gewisse rotirende Wellen eine große Geschwindigkeit übertragen will, wie bei den Schleifmühlen, den Kreissägen, 2c.

Die Mittel zur Erhaltung der Spannung der Riemen sind denen ähnlich, von welchen bei den sich durch bloße Berührung in Bewegung setzenden Rädern die Rede gewesen ist, d. h. sie bestehen darin, daß man die eine der Radwellen (Fig. 33) beweglich macht; aber da diese

Beweglichkeit immer Schwierigkeiten darbietet, oder in gewissen Fällen ganz unmöglich ist, so erreicht man denselben Zweck auch durch Anwendung sogenannter Spannungsrollen (Fig. 34), welche auf die Schnur oder den Riemen einen Druck ausüben.

Wenn man Schnüre ohne Ende anwendet, so müssen bekanntlich die Räder an ihrem Umfange auch einen Schnurlauf haben, wie die gewöhnlichen Rollen (Fig. 36) und wenn man Riemen anwendet, welche gewöhnlich eine Breite von 8 bis 16 Centimeter haben, so muß man im Gegentheil dem äußern Durchschnitte des Radkranzes eine gewisse Convexität geben (§. 37), um das Herabgleiten des Riemens zu verhindern, was nothwendig stattfinden würde, wenn man dem äußern Umfange des Rades eine concave Form gäbe. Zuweilen gibt man jedoch der äußersten Fläche des Radkranzes eine ebene Form, aber alsdann müssen auf dem äußern Umfange des Rades wenigstens kleine Quereinschnitte angebracht werden. Wenn man endlich Ketten anwendet, so scheint es am zweckmäßigsten zu sein, sie auf die weiter unten in dem von der Reibung der Ketten handelnden §. anzugebende Weise einzurichten. Die platten, sogenannten Vaucansonschen Ketten und die ihnen ähnlichen scheinen in der That nur dann angewandt werden zu müssen, wenn die Spannung gering ist, und die Reibung nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. In allen Fällen kann man aber von diesen Mitteln nur Gebrauch machen, wenn die Bewegung nicht zu unregelmäßig ist, oder wenn man sie durch Anwendung eines Schwungrades fast gleichförmig gemacht hat. Es gibt wirklich Sägemühlen mit einer alternativen Bewegung und selbst Hammerwerke, wo man diese Mittel zur Uebertragung der Geschwindigkeit anwendet, aber alsdann bringt man das Schwungrad auf der Kurbel- und Daumenwelle an.

Wenn man sich genöthigt sieht, zur Uebertragung der Bewegung auf Räder, auf die beträchtliche oder unregelmäßige Kräfte wirken, Ketten anzuwenden, und befürchten muß, daß diese Ketten auf den Radkränzen fortgleiten; so versieht man die Radumfänge mit Spitzen oder Zähnen, welche in die Kettenglieder eingreifen (Fig. 38). Da es nothwendig ist, die Spannung auf den beiden Theilen der Kette zu vermeiden, so macht man den einen etwas länger als den andern und sorgt für eine gehörige Einrichtung der Zwischenräume der Zähne und der Kettenglieder. Wenn man die Stifte oder Zähne hinweg läßt, so muß man wenigstens den Radkranz aus Schmiede- oder Gußeisen verfertigen, um das Gleiten zu verhindern. In allen Fällen kann man aber die äußern Umfänge der Rollen und Räder nicht genau genug auf ihren Axen centriren.

Uebertragung der Bewegung durch Zahnräder.

§. 158. 3. Fall. Das Mittel, welches am allgemeinsten zur Uebertragung der kreisförmigen Bewegung von einem Rade auf ein anderes angewandt wird, besteht darin, die äußern Umfänge dieser Räder mit vorspringenden Theilen zu versehn, welche in einander eingreifen und so die Uebertragung der Bewegung von einem Rade auf das andere bewirken. Eine solche Vorrichtung nennt man Zahnräder (Verzahnungen).

Namen der verschiedenen Theile, woraus die Zahnräder bestehn.

§. 159. Die verschiedenen Theile, woraus ein solches System besteht, bekommen nach ihren Formen, ihren Dimensionen und ihrem Zwecke verschiedene Namen, welche man kennen muß.

Von zwei in einander eingreifenden Rädern heißt das größte das Rad und das kleinste das Getriebe. Die Vorsprünge am Umfange der Räder, vermittelst welcher sie einander in Bewegung setzen, heißen Zähne. Wenn sie mit dem Radkranze nicht aus einem Stücke bestehn, wie dieses bei gußeisernen Rädern mit hölzernen Zähnen der Fall ist, so heißen sie zuweilen Kämme.

Statt der Getriebe wendet man oft ein System an, welches aus zwei kreisförmigen Scheiben besteht, die eine parallele Lage auf einer rotirenden Welle zu einander haben und durch hölzerne oder metallene cylindrische Stäbe mit einander verbunden sind, welche Triebstöcke genannt werden, während der ganze Apparat eine Lanterne, ein Stockgetriebe oder ein Drilling genannt wird.

Wenn das Räderwerk eine alternative oder intermittirende Bewegung hervorbringen muß, so haben die Zähne besondere Dimensionen und sind gewöhnlich weit größer, als bei den Rädern, welche eine stetige Bewegung hervorbringen, und man nennt alsdann diese Zähne Hebedaumen.

Damit die Zähne der Räder in einander eingreifen können, müssen sich zwischen ihnen hinreichend große Intervalle befinden, welche man leere Zwischenräume oder Kammsassen nennt.

Wenn die Axen oder Wellen der beiden in einander eingreifenden Räder parallel sind, und folglich die beiden Räder selbst zwischen zwei auf ihren Axen senkrechten Ebenen liegen, so nennt man sie ebene Räder; aber wenn sich die Axen oder Wellen dieser Räder durchschneiden, oder einen Winkel mit einander bilden, so werden sie Winkelräder, oder wegen ihrer Form, Kegelräder genannt.

Bedingungen, welchen die Zahnräder genügen müssen.

§. 160. Die Zeichnung und die Dimensionen der Radzähne müssen den drei folgenden Bedingungen genügen: 1) Die Bewegung muß nach einem gegebenen Gesetze von einem Rade auf das andere übertragen werden. 2) Die Zähne müssen die nöthige Festigkeit haben, um den bekannten Kräften, welche sie übertragen sollen, widerstehn zu können. 3) Die Quantität Arbeit, welche durch die Reibung der Zähne aneinander consumirt wird, muß ein Minimum sein.

Die zweite Bedingung gehört zu der Lehre von der Festigkeit oder dem Widerstande der Materialien, und wir haben uns in dem gegenwärtigen Abschnitte nur mit der ersten Bedingung zu beschäftigen. Da die dritte Bedingung von dem Gegenstande des vierten Abschnittes dieses Lehrbuches abhängig ist, so haben wir hier bloß in möglichster Kürze die Regeln in Erinnerung zu bringen, welche man befolgt, um der ersten Bedingung zu genügen.

Bedingungen der Zeichnung der Verzahnungen.

§. 161. Aus der Bedingung, daß die Geschwindigkeiten constante Verhältnisse zu einander behalten, fließt für die Zahnräder eine Folgerung, welche die Grundlage zu ihrer Zeichnung bildet. Denn wenn wir die Mittelpuncte der beiden Räder C, C' betrachten und die Verbindungslinie dieser Mittelpuncte in zwei Theile Ct und $C't$ theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehn; so berühren sich die beiden Kreise Ct und $C't$ in t, und wenn die Räder mit einer hinreichenden Kraft gegeneinander gedrückt werden, so wird, wenn sich das eine um seinen Mittelpunct dreht, auch das andere mit herum gedreht, so daß sie gewissermaßen übereinander hinrollen, ohne zu gleiten, wie dieses bei den in §. 156 beschriebenen beiden Trommeln der Fall ist.

Wenn man also die resp. Winkelgeschwindigkeiten der Kreise Ct, $C't$ mit ω und ω' bezeichnet, so sind die auf beiden Kreisen abgewickelten Bogen, während sie übereinander hinrollen, einander gleich, und man hat:

$$\omega \times Ct = \omega' \times C't, \text{ folglich } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{C't}{Ct},$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeiten stehn in einem constanten und umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser.

Umgekehrt, sollen die Winkelgeschwindigkeiten ein constantes Verhältniß zu einander behalten, so muß der Punct t die Verbindungslinie der Mittelpuncte in zwei Theile theilen, welche diesen Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sind. Die Zähne der Räder müssen also immer eine solche Form haben, daß die Bewegung des einen auf das andere gerade so übertragen wird, wie wenn die beiden Kreise Ct und $C't$ ohne Gleitung übereinander hinrollten, und umgekehrt.

Die Kreise Ct und $C't$, deren Halbmesser in umgekehrtem Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten stehn, werden aus diesem Grunde Proportionalkreise genannt; allein gewöhnlich nennt man sie Grundkreise (Theilriß), weil sie der Zeichnung der Zahnräder zur Grundlage dienen.

Folgerung, welche die Grundlage der Zeichnung der Zahnräder bildet.

§. 162. Wenn amb und $a'mb'$ (Fig. 40) die Krümmungen zweier Zähne darstellen, die sich an zwei Rädern befinden, deren Grundkreise die Halbmesser Ct und $C't$ haben, und diese Curven nach der Voraussetzung der Bedingung der Gleichförmigkeit der Bewegung genügen; so folgt aus dem Vorhergehenden, daß die gemeinschaftliche Normale der beiden Curven in m durch den Punct t gehen muß. Denn da die Bewegung ebenso übertragen werden muß, als wenn die beiden Kreise Ct und $C't$ übereinander hinrollten; so folgt, daß, wenn der Zahn amb den Zahn $a'mb'$ fortschiebt, der Punct m im ersten Augenblicke einen kleinen Kreisbogen zu beschreiben strebt, welcher beide Curven berührt, und daß folglich die Normale in m, welche dieser kleine Kreisbogen und die beiden Curven mit einander gemein haben, durch den Punct t geht.

Zu derselben Folgerung gelangt man auch, wenn man bemerkt, daß der Widerstand, welchen das in Bewegung gesetzte Rad der auf das bewegende Rad wirkenden Kraft N entgegenstellt, dieser Kraft gleich und entgegengesetzt ist, und folglich die durch diese nach der Richtung der gemeinschaftlichen Normale mt wirkenden Kräfte hervorgebrachten Elementarquantitäten Arbeit einander gleich sein müssen, so ist:

$$N \times CK.\, d\Theta = N.\, C'K'd\Theta',$$

folglich:
$$\frac{CK}{C'K} = \frac{d\Theta'}{d\Theta} = \frac{\omega'}{\omega},$$

wo ω und ω' die Winkelgeschwindigkeiten der Räder bezeichnen, welche nach der Voraussetzung ein constantes Verhältniß zu einander behalten müssen.

Nun geben aber ferner die ähnlichen Dreiecke CKt und $C'K't$:

$$\frac{CK}{C'K'} = \frac{Ct}{C't} = \frac{\omega'}{\omega},$$

und folglich muß der Durchschnittspunct t der gemeinschaftlichen Normale mt die Mittelpunctslinie CC' in zwei Theile theilen, welche den Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt proportional sind, und für alle Lagen dieselben bleiben.

Erste Zeichnungsmethode der Zahnräder.

§. 163. Dieses führt unmittelbar auf eine sehr einfache graphische Auflösung des Problemes der Verzahnungen; denn wenn z. B. eine der Zahncurven amb beliebig gegeben ist, so braucht man, da die andere zu bestimmende Curve so beschaffen sein muß, daß die Bewegung der Räder ebenso stattfindet, wie wenn sie übereinander hinrollten, den Kreis Ct nur auf dem Kreise $C't$ fortrollen zu lassen und auf der Ebene des letztern die successiven Lagen der Curve amb zu zeichnen, und alsdann ist die Reihe der successiven Durchschnittspuncte dieser Curven oder ihre Umhüllungscurve die gesuchte Zahncurve $a'mb'$, weil sie jeden Augenblick die Curve amb berühren muß. Allein dieses in theoretischer Hinsicht so einfache Verfahren würde in der Praxis mit Schwierigkeiten verbunden sein, welche bei dem folgenden Verfahren nicht stattfinden.

Allgemeines Verfahren zur Verzeichnung der Zahnräder.

§. 164. Wenn eine Curve amb gegeben ist, welche das Profil der an dem Kreisumfange Cm (Fig. 41) befindlichen Zähne bildet, so kommt es darauf an, der Curve $a'mb'$ oder dem Profile der Zähne des Rades $C'm$ eine solche Form zu geben, daß diese beiden Curven, indem sie einander fortschieben, der Bedingung genügen, daß sich die beiden Grundkreise so um ihre Mittelpuncte drehen, wie wenn sie aufeinander hinrollten. Zu dem Zwecke wollen wir auf beiden Seiten des der Mittelpunctslinie CC' entsprechenden Punctes m auf jedem der Grundkreise gleich lange Bogen $m1$, $m2$, *etc.* nehmen, so ist nach der Bedingung, welcher die Curven nach der Voraussetzung genügen müssen, einleuchtend, daß die entsprechenden Theilungspuncte 11, 22, *etc.* successive miteinander in Berührung kommen. Zeichnen wir nun die diesen Theilungspuncten entsprechenden Zahncurven, was darauf hinaus läuft, daß wir ihre successiven Lagen betrachten. Es seien mn_2, mn_1 die Normalen der Berührungspuncte vor der Mittelpunctslinie und mn', mn'' hinter dieser Linie, und wir wollen bemerken, daß diese Linien die Halbmesser der Berührungskreise der beiden Curven im Berührungspuncte sind, und daß, wenn die Curve amb gegeben ist, es immer leicht sein wird, ihre Länge vermittelst des Cirkels zu bestimmen.

Nehmen wir nun an, um die Figur nicht zu complicirt zu machen, daß die gesuchte Curve $a'mb'$ in $a_1'm_1b_1'$ construirt sei, daß von dem Puncte m_1 aus, wo sie den Grundkreis Cm_1 durchschneidet, zu beiden Seiten Bogen $m_1 1$, $m_1 2$, *etc.* genommen werden, welche den vorhergehenden gleich sind, und daß von den Puncten 1, 2, *etc.* aus, mit Halbmessern, welche den Längen mn_1, mn_2, *etc.* der erhaltenen Normalen gleich sind, Kreisbogen beschrieben werden; so ist klar, daß diese Bogen die gesuchte Curve berühren, und wenn man endlich zu beiden Seiten des Punctes m_1 und mit den Längen der jedem Theilungspuncte entsprechenden Normalen ebenso verfährt; so erhält man eine Reihe von Kreisbogen, deren Umhüllungscurve die gesuchte Curve ist, wodurch sie also vollständig bestimmt wird.

Um die Längen der den verschiedenen Lagen der Zahncurve amb entsprechenden Normalen zu erhalten, ist es nicht nöthig, die Figur auf die eben angegebene Weise zu zeichnen, sondern es genügt, sie in einer beliebigen Lage zu betrachten, und von dem Puncte aus, wo sie den Grundkreis schneidet, Bogen zu nehmen, welche den auf dem andern Kreise genommenen Theilen gleich sind und aus allen den Puncten 1, 2, *etc.* als Mittelpuncten Kreisbogen zu beschreiben, welche die Zahncurve berühren, deren Halbmesser die gesuchten Längen der Normalen sind, und dann endlich den noch übrigen Theil der Construction auf die eben angegebene Weise auszuführen.

Bemerkungen über die Art und Weise, wie die Radzähne einander fortschieben.

§. 165. Man sieht, daß in Figur 39 die Mittelpuncte der an den innerhalb des Grundkreises liegenden Theil am, oder $a'm'$ der Zahncurve gezogenen Berührungskreise auf einer andern Seite des Punctes m liegen, als die, welche dem äußern Theile mb oder $m'b'$ entsprechen, daß der Theil der gegebenen Curve amb, welcher mb' fortschiebt, von dem ersten Augenblicke der gegenseitigen Berührung der Zähne bis zu dem Augenblicke, worin die Puncte m und m' nach t gelangen, der Theil am ist und daß jenseits dieser Lage der Theil mb der Zahncurve amb den innerhalb liegenden Theil $a'm$ der andern Zahncurve fortschiebt.

Die außerhalb der Grundkreise liegenden Theile der Zahncurven mb, $m'b'$ heißen die Köpfe der Zähne und die innerhalb liegenden Theile ma, $m'a'$ heißen die Füße derselben.

Bemerkungen über die Anwendung dieser allgemeinen Auflösung auf beliebige Curven.

§. 166. Die eben angegebene Zeichnungsart der Zahncurve ist auf alle Formen der Zähne anwendbar; aber wenn die Auflösung des Problemes in rein geometrischer Hinsicht auch für jede beliebige Curve möglich ist, so ist dieses doch nicht in practischer Beziehung der Fall. Denn aus der vorhergehenden Bemerkung folgt, daß, wenn die gegebene Zahncurve amb so beschaffen wäre, daß die Mittelpuncte der Berührungskreise ihrer beiden äußern und innern Theile auf derselben Seite des Punctes m' lägen, die beiden correspondirenden Theile der Zahncurve $a'mb'$ ebenfalls auf derselben Seite des Punctes m liegen würden, und daß man, obgleich man sie auf dem Papiere zeichnen kann, sie doch nicht materiell würde herstellen können, weil sie sich gegenseitig durchdringen würden. Man müßte also in diesem Falle zwischen diesen beiden Theilen wählen, d. h. darauf verzichten, daß die Zähne einander vor und hinter der Mittelpunctslinie fortschieben, und da es, wie man in der Folge (Absch. 4) sehen wird, immer vortheilhafter ist, die Zähne hinter als vor der Mittelpunctslinie eingreifen zu lassen, so müßte man den Theil der Zahncurve hinweglassen, welcher vor der Mittelpunctslinie eingreift. Die eben erwähnten Umstände bieten sich namentlich in dem Falle dar, wo man Lanternen und auf der innern Seite gezahnte Räder anwendet.

Es kann auch noch ein anderer Umstand eintreten, welcher die gefundenen Zahncurven unbrauchbar macht, obgleich sie in rein geometrischer Beziehung der Aufgabe genügen, nämlich wenn eine der Zahncurven ganz oder zum Theil concav ist, weil diese Form der Zähne den Nachtheil hat, daß sie leicht fremdartige Körper aufnimmt, wodurch ein Einklemmen der Zähne bewirkt werden kann, und endlich läßt sich diese Zahnform auch nur mit Schwierigkeiten ausführen.

Aus diesen verschiedenen Gründen haben sich die Geometer mit particulären Auflösungen der Aufgabe begnügt, und die ausgewählt, welche sich am leichtesten practisch ausführen lassen und wovon wir nun in der Kürze reden wollen.

Epicycloidenverzahnungen.

§. 167. Die Form der Zähne, welche am allgemeinsten angewandt wird, ist die der Epicycloiden, und welche auf folgende Weise gezeichnet wird.

Es sei CC' (Fig. 42) die Mittelpunctslinie und Ct, $C't$ seien die Halbmesser der Proportional- oder Grundkreise. Wenn man innerhalb der Kreise von den Halbmessern Ct und $C't$ andere Kreise, welche diese Halbmesser zu ihren Durchmessern haben, fortrollen läßt, so durchläuft ein beliebiger Punct m des beweglichen Kreises den Halbmesser, welcher der Lage dieses Punctes m entspricht, wo dieser der Berührungspunct der beiden Kreise war. Denn da t der Berührungspunct ist, so haben die in Folge des Rollens der beiden Kreise abgewickelten Bogen tm und tt' gleiche Längen, und folglich hat der erste eine doppelt so große Anzahl von Graden, als der zweite. Die Winkel $tC't'$ und $tC'm$, welche resp. in dem Kreise von dem Halbmesser $C't$ die Anzahl der in dem Bogen tt' enthaltenen Grade und in dem Kreise von dem Durchmesser $C't$ die Hälfte der Anzahl der Grade des Bogens tm zum Maaße haben, sind einander gleich, und die Linien $C't'$, $C'm$ fallen zusammen.

Dieses vorausgesetzt, beschreibt ein beliebiger Punct der Kreise von den Durchmessern Ct und $C't$, indem sie auf den Grundkreisen von den Halbmessern $C't$ und Ct fortrollen, eine Epicycloide, welche nach der allgemeinen Methode durch die Umhüllungscurve der Kreisbogen bestimmt wird, welche successive aus den gleichweit von einander entfernten Puncten 1, 2, 3, *etc.* der Kreise $C't$ und Ct als Mittelpuncten, und mit den Halbmessern $t1$, $t2$, $t3$, *etc.* beschrieben sind, die resp. den Sehnen der gleichlangen Bogen $t1$, $t2$, $t3$, *etc.* der Kreise von den Durchmessern Ct und $C't$ gleich sind.

Bei diesen beiden Bewegungen der Kreise von den Durchmessern Ct und $C't$ erzeugt ein beliebiger beschreibender Punct m von demselben Berührungspuncte t aus außerhalb des einen Kreises eine Epicycloide und innerhalb des andern einen diese Epicycloide berührenden Halbmesser, so daß die Curve die Krümmung des Zahnkopfes des einen Rades und der Halbmesser das entsprechende Profil des Zahnfußes des andern Rades ist, und umgekehrt. Denn es ist einleuchtend, daß für eine beliebige Lage der Halbmesser $C'm$ die Curve $t'm$ in m berührt, weil der beschreibende Punct m während des Rollens um t ein kleines Kreisbogenelement zu beschreiben strebt, welches in m beide zugleich berührt und die Linie tm zur Normale hat.

Da diese Zeichnungsart der Bedingung genügt, daß die Normale beständig durch den Punct t geht, so wird die Geschwindigkeit in einem constanten Verhältnisse übertragen, wie es Bedingung ist.

Außerdem sieht man, daß sich der beschreibende Punct immer im Durchschnitte des Bogens tm und des nach dem Endpuncte des Bogens $tt' = tm$ gezogenen Halbmessers Ct' befindet, und daß man folglich für jede Berührung der Kreise die absolute Lage des beschreibenden Punctes auf dem kleinen Berührungskreise bestimmt, wenn man aus C als Mittelpunct mit dem Halbmesser Cm einen Kreisbogen beschreibt. Die Zahncurve wird also durch Puncte und durch die Umhüllungscurve bestimmt, und da die Entfernungen der Berührungspuncte von den Mittelpuncten C und C' der Räder durch die Längen $Cm = C2$, *etc.* gegeben sind; so sieht man, daß sich die Berührungspuncte vor und nach der Mittelpunctslinie resp. den Mittelpuncten C und C' desto mehr nähern, je entfernter die Berührung von dieser Linie stattfindet, und daß folgeich die Neigung der Normale in m gegen die Linie CC' desto mehr zunimmt, je weiter von CC' die Berührung stattfindet. Da die Richtung dieser Normale die der Druckkräfte ist, welche die Zähne auf einander ausüben, so folgt, daß diese bestimmten Kräfte z. B. für einen an dem Umfange der Grundkreise mit einer constanten Intensität wirkenden gegebenen Widerstand oder für eine gegebene Kraft desto mehr zunehmen müssen, je mehr sich der Berührungspunct den Mittelpuncten C und C' nähert, und je weiter von der Mittelpunctslinie die Berührung stattfindet. Hieraus erhellt, daß bei den Epicycloidenverzahnungen die Druckkräfte, welche die Zähne auf einander ausüben, nothwendig veränderlich und gegen die Enden der Zähne am größten sind.

Anzahl der Zähne, welche einander zugleich berühren müssen.

§. 168. Zur Stetigkeit der Bewegung ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß immer zwei Zähne zu gleicher Zeit miteinander in Berührung sind, und man erfüllt gewöhnlich diese Bedingung dadurch, daß man die Verzahnung so einrichtet, daß jeder Zahn aufhört zu wirken, wenn der folgende in die Mittelpunctslinie gelangt und die Länge der Zähne alsdann begrenzt ist. Denn da der Bogen tt' der Theilung gleich, und m der entsprechende Berührungspunct ist, welcher auf die eben angegebene Weise bestimmt wird, so braucht man den Zahn in diesem Puncte nur abzuschneiden, um sicher zu sein, daß derselbe nicht über die vorgeschriebene Grenze hinaus wirkt, und dieses geschieht, wenn man aus dem Mittelpuncte C einen Kreis von dem Halbmesser Cm beschreibt, welcher alle Zähne des Rades C begrenzt. Der wirksame Theil des Zahnfußes würde auch durch den aus dem Mittelpuncte C' mit dem Halbmesser Cm beschriebenen Kreis begrenzt; sollen aber die Zähne frei in die Zwischenräume eingreifen können, so muß man den Fuß der Zähne etwas länger machen,* und wir werden, nachdem wir die Form des Kopfprofiles des Zahnes bestimmt haben, eine untere Grenze angeben.

Die Zähne müssen eine symmetrische Form haben, damit sie sowohl nach dem einen, als nach dem andern Sinne wirken können.

§. 169. In fast allen Maschinen werden die Räder zuweilen zufällig oder periodisch nach entgegengesetztem Sinne bewegt, und folglich müssen die Zähne so construirt sein, daß sie sich nach dem einen Sinne sowohl, als nach dem andern bewegen können, weshalb man denselben auch eine symmetrische Form gibt. Wenn die Ausführung der Verzahnungen vollkommen genau wäre, so brauchte offenbar der Zwischenraum zwischen den Zähnen nur der Dicke der letztern gleich zu sein; allein da sich diese Vollkommenheit in der Praxis nie erreichen läßt, so macht man die Zwischenräume etwas breiter, als die Zahndicke. Dieser Ueberschuß braucht höchstens $^1/_{12}$ bis $^1/_{10}$ der Zahndicke zu betragen und bei den mit der Feile gemachten oder nachgearbeiteten Verzahnungen, so wie bei den durch mechanische Verfahrungsarten erhaltenen braucht dieser Ueberschuß nur $^1/_{20}$ dieser Zahndicke zu betragen. Demnach ist die Theilung, welche der Summe aus der Zahndicke und der Breite des Zwischenraumes gleich ist, $= 2{,}10$, $2{,}084$ oder $2{,}05$ Zahndicken. Nachdem die Eintheilung der Grundkreise und die Unterabtheilung der Theilungen bewerkstelligt ist, begrenzt man die Zähne auf beiden Seiten durch zwei symmetrische Kopf- und Fußprofile und die Länge des Kopfes der Zähne oder des Vorsprunges derselben über den Grundkreis wird, wie wir bereits bemerkt haben, durch die Kreise von den Halbmessern Cm und $C'm$ begrenzt. Um die Tiefe der Zwischenräume zu erhalten, bestimmt man die Durchschnittspuncte dieser Kreise mit der Mittelpunctslinie in n und n', und wenn man diesseits dieser Puncte ungefähr $ni = n'h = 0^m{,}005$ nimmt, so erhält man die innern Halbmesser Ch und $C'i$ des Zwischenraumes jedes Zahnes. Bei dieser Einrichtung ist man sicher, daß die Zähne immer den gehörigen Spielraum haben.

Gegeneinanderstemmen der Räder. — Nachtheile desselben.

§. 170. Wenn das Treibrad das Getriebe vor der Mittelpunctslinie ergreift, so kann einige Unebenheit der Zähne, da die Summe der Linien Cm und $C'm$ größer ist als CC', die Bewegung verhindern, so daß ein Gegeneinanderstemmen der Räder, und folglich ein Zerbrechen derselben stattfinden kann, während sich hinter der Mittelpunctslinie die Berührungspuncte immer entfernen, die Entfernungen Cm und $C'm$ größer zu werden streben und sich der Trennung der Zähne nichts entgegen stellt. Diese Gefahr des Ineinanderklemmens der Räder ist desto größer, je weiter vor der Mittelpunctslinie die Zähne miteinander in Berührung kommen.

Um dieses zu vermeiden, war es bei den alten Maschinenbauern Regel, die Bewegung oder den Eingriff nur nach der Mittelpunctslinie stattfinden zu lassen; aber da die Dicke der Zähne und folglich ihre Köpfe seitdem durch verschiedene Betrachtungen bedeutend vermindert und ihre Länge parallel zu der Rotationsaxe dagegen vergrößert ist, so ergreifen die Zähne der jetzigen Räderwerke einander nur in einer geringen Entfernung vor und hinter der Mittelpunctslinie, so daß durch diesen Umstand, in Verbindung mit der großen Vollkommenheit, womit die Zahnräder jetzt ausgeführt werden, jeder Nachtheil der in Rede stehenden Art beseitigt ist. Auch ist es jetzt Gebrauch, die Räder ebenso viel vor als nach der Mittelpunctslinie einander fortschieben zu lassen.

Nachtheile der Epicycloidenverzahnungen.

§. 171. Die Nachtheile der Epicycloidenverzahnungen sind:

1) Daß die Intensität der auf die Zähne ausgeübten Druckkräfte desto mehr zunimmt, je weiter sich der Berührungspunct von der Mittelpunctslinie entfernt, wodurch sie in den verschiedenen Puncten ungleich abgenutzt werden.

2) Daß, da die Form der Zähne des einen Rades von dem Halbmesser des Grundkreises des andern Rades abhängt, dasselbe Rad keine Getriebe von verschiedenen Durchmessern in Bewegung setzen kann.

3) Daß der Eingriff der Räder nicht mehr genau stattfindet, wenn die Axen etwas verrückt werden, obgleich sie parallel bleiben.

Kreisevolventenverzahnung.

§. 172. Eine andere Auflösungsart des Problemes der Verzahnungen, wobei diese Nachtheile nicht stattfinden, besteht darin, daß man den Zahnprofilen die Form von Kreisevolventen gibt, und sie beruht auf der folgenden Construction.

Durch den Punct t (Fig. 44), welcher die Mittelpunctslinie CC' in zwei Theile theilt, die sich umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten, womit sich die Räder bewegen sollen, ziehe man die gegen CC' geneigte Linie KtK', fälle dann von den Puncten C und C' Perpendikel CK und $C'K'$ auf diese Linie, und beschreibe mit diesen Perpendikeln als Halbmessern Kreise; so ist die Linie KK' offenbar eine gemeinschaftliche Tangente dieser beiden Kreise, und wenn man die Theile tK und tK' auf die Kreise CK und $C'K'$ aufwickelt, so beschreibt der Punct t die resp. Evolventen dieser Kreise.

Stellt man sich nun vor, daß die eine Curve die andere fortschiebt, so findet diese Wirkung immer nach der gemeinschaftlichen Normale statt, und da die Normalen jeder der beiden Curven den abgewickelten Kreis berühren müssen, so ist klar, daß die, welche beiden Curven gemeinschaftlich ist, die Tangente KK' sein wird. Bei dieser Verzahnungsart bleibt also der Berührungspunct immer auf derselben Linie, nämlich auf der Normale, und folglich ist der auf einen Zahn ausgeübte Druck während der ganzen Dauer der Berührung derselbe.

Da die Räder einander sowohl nach dem einen, als nach dem andern Sinne vor und nach der Mittelpunctslinie müssen herumdrehen können, so müssen die Zähne auf beiden Seiten dieselbe Form haben, und um zu vermeiden, daß das Ende derselben durch die gegenseitige Annäherung der Curven nicht zu schwach wird, muß man der gemeinschaftlichen Tangente KK' die möglichst geringste Neigung geben. Hierzu gelangt man aber durch die folgende Construction, indem man sich z. B. die Bedingung stellt, daß die Zähne zu beiden Seiten der Mittelpunctslinie auf eine der als bekannt vorausgesetzten Theilung gleiche Entfernung wirken. Von dem Berührungspuncte t der Grundkreise aus nehme man auf dem des Getriebes den Bogen tt' gleich der Theilung, ziehe den Halbmesser $C't'$ und von dem Puncte t fälle man auf $C't'$ ein Perpendikel, welches die gesuchte gemeinschaftliche Tangente ist. Denn es ist klar, daß der in eine der Theilung gleiche Entfernung gelangte Zahn des Getriebes nur durch das erste Element fortgeschoben werden kann. Außerdem wird es zweckmäßig sein, die Neigung dieser Tangente etwas größer als diese Grenze zu nehmen, wenn dieses geschehn kann, ohne daß die Zähne am Ende zu schwach werden, um die geringen Mängel der Ausführung in's Gleiche zu bringen.

Was die Totallänge der Zähne anlangt, so kann man sie leicht bestimmen, wenn man die Zähne in ihrer äußersten Lage, worin sie vor und nach der Mittelpunctslinie noch wirken, zeichnet und in dieser Entfernung durch concentrische Kreisbogen zu den Grundkreisen abschneidet. Da das Profil des Zahnfußes keine gerade Linie ist, so muß man an den Anfangspunct desselben zwei berührende Halbmesser ziehn, welche die Zwischenräume begrenzen, indem man diesen die zum freien Spiele der Zähne erforderliche Tiefe gibt.

Bemerkung über den Fall, wo sich die gegenseitige Entfernung der Axen verändert.

§. 173. Man sieht leicht ein, daß, wenn die gegenseitige Entfernung der beiden Mittelpuncte C und C' wegen eines Mangels der Construction der Maschine, oder wegen Abnutzung der Zapfenlager verändert wird, die Zähne doch noch nach einer gemeinschaftlichen Normale wirken, welche bloß eine andere Neigung hat, als die bestimmte, und daß die übertragenen Kräfte noch in einem constanten Verhältnisse stehn, so daß bei der Verzahnung nach Kreisevolventen selbst in diesem Falle noch die Eigenthümlichkeit stattfindet, daß auf die Zähne fortwährend ein constanter Druck ausgeübt wird, und folglich die Abnutzung der Zähne bei dieser Form mehr gleichförmig geschieht, als bei jeder andern Form.

Die Zeichnung der Zahncurve des Getriebes ist nur von seinem Halbmesser und von der Neigung der Tangente abhängig, und man sieht folglich, daß, wenn diese z. B. für das kleinste Getriebe bestimmt ist, welches ein Treibrad in Bewegung setzen soll, es immer leicht ist, die abzuwickelnden Bogen und folglich die Zahncurven für beliebig viele Getriebe von andern Halbmessern zu bestimmen.

Wegen dieser Vortheile müssen die Evolventenverzahnungen den Epicycloidenverzahnungen in vielen Fällen vorgezogen werden; aber wenn man die Zeichnung ausführt, so findet man, daß bei der ersten Art, wenn die Halbmesser der Räder sehr klein sind, die Enden der Zähne wegen der zu starken Convergenz der Zahncurven sehr schwach werden, was in gewissen Fällen ein großer Nachtheil ist, welcher bei der Epicycloidenverzahnung weit weniger stattfindet.

Zeichnungsart der Verzahnungen, welche die Practiker anwenden.

§. 174. Wir haben eben die beiden gebräuchlichsten geometrischen Zeichnungsmethoden der Verzahnungen angegeben; aber obgleich ihre Ausführung sehr einfach ist, so wenden die Practiker doch eine andere, noch schneller zum Ziele führende Methode an, welche man daher kennen muß, und besonders bei der Epicycloidenverzahnung anwendbar ist. Wir haben vorhin gesehen, daß diese Curven als die Umhüllungscurven einer Reihe von Kreisbogen betrachtet werden können, welche aus verschiedenen Puncten ihres Umfanges als Mittelpuncten mit Halbmessern beschrieben sind, welche den entsprechenden Sehnen des Erzeugungskreises gleich sind. Hieraus folgt, daß die Zahncurve bis auf eine gewisse Entfernung fast mit den entsprechenden Kreisen zusammen fällt, und da die Berührungsbogen immer auf einen kleinen Theil dieser Curve beschränkt werden, so kann man in den meisten, gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fällen einen der Bogen des Berührungskreises dafür substituiren. Durch eine genaue Zeichnung findet man in der That, daß, wenn der Mittelpunct des Kreises, welchen man für die Curve substituiren will, schicklich gewählt ist, dieser Kreis in der ganzen wirksamen Ausdehnung der Zahncurve mit letzterer zusammen fällt, und sich noch nicht um die Dicke einer feinen mit der Reißfeder gezogenen Linie davon entfernt. Diese Genauigkeit ist aber für die Praxis mehr als hinreichend, und rechtfertigt die Anwendung dieser expeditiven Methode zur Genüge.

In den gewöhnlichsten Fällen, wo die Kreise gegen die Dimensionen der Zähne nicht zu klein sind, und wo folglich eine etwas rasche Krümmung stattfindet, pflegt man den Anfang des folgenden Zahnes auf dem Grundkreise zum Mittelpuncte der Curve, und die auf demselben Kreise gemessene Theilung der Verzahnung zum Halbmesser zu nehmen. Wenn sehr kleine Getriebe zur Uebertragung beträchtlicher Kräfte bestimmt sind, also sehr dicke Zähne und folglich eine beträchtliche Krümmung haben müssen; so kann man den Mittelpunct und folglich den Halbmesser des Kreises, welcher für die Curve substituirt werden soll, durch die Bedingung bestimmen, daß derselbe durch den Anfang und durch das Ende oder den letzten Berührungspunct der Zahncurve gehn muß, welcher sich immer leicht aus der angenommenen Amplitude der Berührung zu beiden Seiten der Mittelpunctslinie ableiten läßt. Denn wenn man in der Mitte der Verbindungslinie dieser beiden Puncte ein Perpendikel errichtet, so trifft dasselbe den Grundkreis in einem Puncte, welcher der gesuchte Mittelpunct ist, und der Halbmesser ist alsdann unmittelbar gegeben.

Diese practische Methode würde übrigens offenbar nur in dem Falle anwendbar sein, wo die Zähne eine geringe Länge haben.

Wir haben die Zeichnung der Zähne der Räder, welche Lanternen in Bewegung setzen müssen, bisher mit Stillschweigen übergangen, weil sie unmittelbar auf die allgemeine Auflösung zurück geführt werden kann, wenn man den Kreis der Grundfläche der Triebstöcke als die gegebene Curve betrachtet. Uebrigens ergibt sich durch die wirkliche Ausführung der Construction, daß die Zähne einander nur nach oder vor der Mittelpunctslinie fortschieben können, und daß es zweckmäßig ist, immer den ersten Fall zu wählen, um das Ineinanderklemmen zu vermeiden, welches folglich auch bei den Lanternen verhindert, sie als Treibräder anwenden zu können. Wegen dieses Nachtheiles, so wie wegen der beträchtlichen Dimensionen, welche man den Triebstöcken und Zähnen bei dieser Art von Räderwerk geben muß, kann dasselbe da, wo eine große Genauigkeit erforderlich ist, nicht angewandt werden.

Construction der Hebedaumen.

§. 175. Das, was wir bisher über die gewöhnlichsten Formen der Verzahnungen gesagt haben, würde sich auch leicht auf die verschiedenen besondern Fälle anwenden lassen, welche vorkommen können, und namentlich auf die Hebedaumen, welche zur Uebertragung intermittirender Bewegungen bestimmt sind.

Hebedaumen für Hammerwerke.

§. 176. So haben z. B. die Hebedaumen mit einer stetigen Rotationsbewegung, welche einem beweglichen Hebel $C't$ (Fig. 45) eine alternative und unterbrechende Rotationsbewegung um den Mittelpunct C' ertheilen sollen, die Form einer Epicycloide, welche durch das Fortrollen eines Kreises von dem Durchmesser $C't$ auf dem Kreise Ct, welcher dem Stücke mit einer stetigen Rotationsbewegung entspricht, erzeugt wird. Da der Punct t die Linie CC' immer in zwei Theile theilt, welche sich umgekehrt wie die zu übertragenden Winkelgeschwindigkeiten verhalten, so wirkt diese Curve auf eine geradlinige Fläche von der Richtund $C't$ und schiebt sie von der Mittelpunctslinie aus fort.

Hebedaumen für Stampfer (Fig. 46).

§. 177. Wenn der Hebedaumen einen Stampfer heben oder eine geradlinige Bewegung hervorbringen sollte, so würde die Zahncurve eine Kreisevolvente, weil der Durchmesser $C't$ unendlich groß wird. Kennt man in diesem Falle die Größe, um welche sich der Stampfer während der Dauer der Berührung bewegen muß und den dieser Berührung entsprechenden Theil des Kreisumfanges; so ergibt sich daraus leicht der Halbmesser des Kreises, welcher abgewickelt werden muß, um die gegebene Bewegung hervorzubringen. Uebrigens muß man der Hebedaumencurve auch eine Art von Fuß geben, damit der Stampfer einen freien Spielraum behält.

Wir wollen uns bei der Untersuchung der vorkommenden besondern Fälle, deren Auflösung sich immer leicht auf die im Vorhergehenden mitgetheilte allgemeine Auflösung zurückführen läßt, nicht länger aufhalten, sondern bloß noch ein Paar Worte über die Zeichnung der Winkelräder sagen.

Allgemeine Begriffe über die Kegel- oder Winkelräder (Fig. 47).

§. 178. Indem wir zu den Kegel- oder Winkelrädern übergehn, besteht die ganze Schwierigkeit darin, das, was wir in Beziehung auf den Fall zweier in derselben Ebene liegenden Räder gesagt haben, auf den Fall zu erstrecken, wo diese Räder eine beliebige Lage im Raume haben.

Wenn die Lage der Axen CS, $C'S$ der Räder bestimmt ist, so theilt man den von ihnen gebildeten Winkel CSC' in zwei andere CST, $C'ST$, deren Sinus sich umgekehrt wie die diesen Axen zu ertheilenden Rotationsgeschwindigkeiten verhalten. Läßt man diese Winkel sich resp. um die entsprechenden Axen drehn, so erhält man die Grundkegel, welche sich nach der gemeinschaftlichen Kante TS berühren. Auf den kreisförmigen Grundflächen dieser Kegel, und in der Mitte der Breite des Radkranzes, woran sich die Zähne befinden, wird gewöhnlich die Theilung vorgenommen, so daß alles, was wir in Beziehung auf zwei in derselben Ebene liegende Räder gesagt haben, auch auf den gegenwärtigen Fall anwendbar ist, wenn man statt der betrachteten geraden Linien Ebenen, welche durch die Spitze S der Kegel gehn, und statt der krummen Linien Kegel substituirt, welche denselben Punct S zur Spitze haben. Sollen z. B. die Kegeloberflächen der Zähne, indem sie einander fortschieben, den Rädern gleichförmige Geschwindigkeiten ertheilen können, so muß die Normalebene der gemeinschaftlichen Berührungskante dieser Kegelflächen durch die Berührungskante ST der Grundkegel gehn; statt der epicycloidischen Zahncurven für die in derselben Ebene liegenden Räder hat man hier epicycloidische Kegelflächen, welche durch die Bewegung einer Kante des einen Grundkegels, während seines Hinrollens über den andern erzeugt wird, und wenn man bloß die Grundflächenkreise CT, $C'T$ betrachtet, welche man die Grundkreise nennen kann, so verhält sich auf der Kugelfläche, worin diese Kreise liegen und deren Mittelpunct S ist, noch alles auf eine ähnliche Weise, wie für zwei in derselben Ebene liegende Räder; nur hat man statt der geraden Linien Bogen größter Kreise und statt der ebenen Epicycloiden, Evolventen, ꝛc. sphärische Epicycloiden und Evolventen, ꝛc.

Wegen dieser Analogie zwischen beiden Fällen, nämlich wenn die Axen der Räder zu einander parallel sind, oder einen Winkel mit einander bilden, ist es nicht nöthig, in Beziehung auf die Einrichtung der Winkelräder nach den verschiedenen Umständen weiter ins Einzelne zu gehn, und die ganze Schwierigkeit besteht offenbar in den graphischen Operationen, welche erforderlich sind, um die verschiedenen Zahncurven oder Flächen nach den Principien der darstellenden Geometrie zu zeichnen. Bemerken wollen wir aber hier noch, daß man durch ein völlig strenges Verfahren bei dieser Zeichnung z. B. durch die in dem Werke von Hachette angegebenen Methoden wegen der Zusammengesetztheit der zur Zeichnung einer Zahnfläche oder auch nur eines einzigen Punctes ihrer Grundflächencurve erforderlichen Operationen doch nur sehr unsichere Resultate erhält, und wir glauben, daß das folgende Verfahren für die Praxis hinreichend genau ist, und diese Nachtheile nicht darbietet.

Vereinfachte, aber für die Praxis hinreichend genaue Construction der Winkel- oder Kegelräder (Fig. 48).

§. 179. Man sieht leicht ein, daß die Radkränze oder Felgen, woran sich die Zähne oder Triebstöcke befinden, im Allgemeinen auf der der Spitze S der Kegel entgegengesetzten Seite ebenfalls von Kegelflächen $mnpT$, $m'n'p'T'$ begrenzt werden müssen, deren Spitzen S_1, S_1' auf den Axen SC und SC' der Räder und deren, in der Ebene dieser Axen liegenden Kanten S_1T, $S_1'T$ auf der Berührungskante ST der Grundkegel senkrecht sind, so daß sie die Verlängerung von einander bilden und in der Ebene liegen, welche auf ST senkrecht ist und zugleich die beiden Kegel (S_1), (S_1') berührt. Auf der Oberfläche dieser Kegel werden die Füllungen der Zähne angebracht und die allgemeine Zeichnung der Verzahnung geprüft. Wegen der geringen Ausdehnung, welche das Profil einer Zahncurve und der durch sie fortgeschobenen auf diesem Kegel einnimmt, kann man ohne einen für die Praxis merklichen Fehler den diesen Zähnen entsprechenden kleinen Theil der Kegelflächen (S_1), (S_1') als mit der Berührungsebene S_1TS_1' zusammenfallend betrachten, wenn sie einander in ihrem gegenseitigen Berührungspuncte T fortschieben.

Wickelt man also die beiden Kegelflächen (S_1) und (S_1') auf die erwähnte gemeinschaftliche Berührungsebene ab, was keine Schwierigkeit hat, weil man die Längen der Kanten und den Umfang der Grundflächen kennt, und bemerkt man, daß bei dieser Abwickelung die Längen in dem Sinne der Kanten und die Breiten in dem Sinne der in Beziehung auf die Spitzen concentrischen Meridiankreise ungeändert bleiben; so wird das Problem der Construction der Kegelräder unmittelbar auf das der Construction der in derselben Ebene liegenden Räder zurück geführt; denn die Grundkreise der Zähne auf den Kegelflächen sind durch die Abwicklung Kreisbogen geworden, welche sich gegenseitig berühren, und welche man wie die Grundkreise in derselben Ebene liegender Räder betrachten kann, welche, je nach der anzuwendenden Verzahnungsart, vermittelst der einen oder der andern der oben angegebenen Methoden gezeichnet werden können. Man hat auf diese Weise alle erforderlichen Füllungen, um die Zähne auf der Oberfläche der Grenzkegel (S_1), (S_1') zeichnen zu können, worauf man die Zähne leicht ganz ausführt (Fig. 49).

Man kann übrigens eine neue Füllung für die Kegelfläche, welche innerhalb den Radkranz auf der Seite von S_1 begrenzt, deren Kanten zu denen der ersten Grenzkegel parallel sind, und für die Zähne ganz ähnliche Profile oder Figuren gibt, vorbereiten, so daß man die ersten Füllungen nur in einem gehörigen Verhältnisse, nämlich in dem der Kanten ST und ST' zu verkleinern braucht.

Dimensionen der Zähne.

§. 180. Zu dem bisher über die Zeichnung der Verzahnungen Gesagten wollen wir bloß noch einige Worte über die Bestimmungsart der Dimensionen der Zähne hinzufügen.

Die Breite der Zähne, parallel zu der Rotationsaxe oder in der Richtung der Erzeugungslinien der Kegel gemessen, wird gewöhnlich

4mal größer genommen, als ihre auf dem Umfange des Grundkreises gemessene Dicke, wenn die Geschwindigkeit eines Punctes dieses Grundkreises nicht größer ist, als $1^m,5$ und man nimmt diese Breite 5mal größer als die Dicke, um die größere Abnutzung zu compensiren, wenn die Geschwindigkeit größer ist. Wenn endlich die Zähne benetzt und mit Sand beschmutzt werden, so daß die Abnutzung noch beträchtlicher ist, so gibt man ihnen eine Breite, welche wohl 6mal größer ist, als die Dicke.

Der Vorsprung der Zähne über den Ring, worauf sie befestigt sind, wird durch Zeichnung bestimmt, wenn der Winkel gegeben ist, unter welchem sie vor und hinter der Mittelpunctslinie wirken müssen. Da aber der Zerbrechungswiderstand im umgekehrten Verhältnisse dieser Länge steht, so muß sie zwischen gewissen Grenzen liegen. Sie darf höchstens 1,5mal größer sein, als die auf dem Grundkreise gemessene Dicke, oder wenn die Zeichnung einen größern Vorsprung gibt, so muß man zunächst untersuchen, ob man nicht, wenn man die Breite etwas vergrößert, die Dicke oder Theilung, und folglich den Vorsprung vermindern kann, und wenn dieses Mittel nicht genügt, so müßte man die Zähne vor und hinter der Mittelpunctslinie nur bis auf eine Entfernung wirken lassen, wo sie den Grenzvorsprung erreichen; aber selten bieten sich hierbei Schwierigkeiten dar.

Sind diese Verhältnisse zwischen der Breite, dem Vorsprunge und der Dicke der Zähne einmal festgesetzt, so bleibt nur noch übrig, die Dicke zu bestimmen, und nach der Beobachtung der von den besten Maschinenbauern angenommenen Dimensionen kann sie aus folgenden Formeln abgeleitet werden, worin b die auf dem Grundkreise gemessene Zahndicke und P den Druck in Kilogr. bezeichnet, welchen ein Zahn auf den andern ausübt:

Für Zähne von Gußeisen . . . . . $b = 0{,}105\sqrt{P}$

" " " Bronze oder Kupfer . $b = 0{,}131\sqrt{P}$

" " " Weißbuchen-, Birnbaum- und Eschenholz . . $b = 0{,}183\sqrt{P}$.

Bezeichnet ferner l die Breite in Centm. und s den Vorsprung, so hat man für die vorhin angegebenen Fälle höchstens

$$l = 4b,\ l = 5b \text{ oder } l = 6b \text{ und } s = 1{,}50b$$

und wenn man endlich die Theilung mit a bezeichnet und der Spielraum $= 0{,}1b$ gesetzt wird, so hat man:

$$a = 2{,}1b.$$

Diese Relationen sind also zur Bestimmung aller Dimensionen einer Verzahnung hinreichend, wenn die Zähne der beiden Räder aus derselben Substanz bestehen. Wenn aber die Zähne der beiden Räder aus verschiedenen Substanzen beständen, und zwar die des einen aus Gußeisen und die des andern aus Holz, wie dieses oft der Fall ist, so würde die Dicke der hölzernen Zähne ausgedrückt durch:

$$b' = 0{,}183\sqrt{P},$$

und die der gußeisernen durch:

$$b' = 0{,}105\,\sqrt{P}.$$

Wenn die Breite l der Zähne beider Räder dieselbe sein müßte, so nähme man sie gleich

$$l = 4b',$$

und die Theilung, welche alsdann auch dieselbe sein müßte, würde ausgedrückt durch:

$$a = b + 1{,}1\,b' = 2{,}84\,b.$$

Wenn die Zähne aus Metall bestehn, so gießt man sie gewöhnlich mit dem Ringe, woran sie sitzen, aus einem Stücke und gibt diesem Ringe, parallel zu der Axe, dieselbe Breite, als den Zähnen, während man seine Dicke in der Richtung des Halbmessers der auf dem Grundkreise gemessenen Dicke der Zähne gleich macht.

Wenn die Zähne aus Holz bestehn und in dem gußeisernen Ringe befestigt sind, so hat dieser Ring eine Breite, welche der der Zähne gleich und außerdem auf jeder Seite der Zähne um ihre Dicke vermehrt ist, und endlich ist die Dicke des Ringes in der Richtung des Halbmessers der der Zähne gleich.

Nach diesen practischen Regeln, welche nur auf Räder angewandt werden können, die keinen Stößen ausgesetzt sind, lassen sich die Dimensionen der Zähne, so wie die Theilung a für jeden Fall leicht bestimmen.

Wenn die Halbmesser $R = Ct$ und $R' = C't$ gegeben sind, so muß, wenn man die Anzahl der Zähne der Räder C und C' resp. mit m und m' bezeichnet

$$ma = 2\pi R \text{ und } m'a = 2\pi R'$$

sein, woraus sich m und m' ergibt. Aber da diese Zahlen ganze sein müssen, und es in vielen Fällen der Leichtigkeit der Zusammensetzung wegen wünschenswerth ist, daß sie durch die Anzahl der Arme jedes Rades theilbar sind; so muß man für m die kleinste ganze Zahl nehmen, welche zugleich durch die Anzahl der Arme des Rades und durch das Verhältniß $\frac{R}{R'}$ theilbar ist, worauf man aus der Relation:

$$ma = 2\pi R$$

einen neuen Werth für die Theilung ableitet, welcher etwas größer ist, als der zuerst gefundene, was aber von weiter keinem Nachtheile ist. Hierauf hat man für die Anzahl der Zähne des Getriebes:

$$m' = \frac{mR'}{R},$$

welche ebenfalls nothwendig eine ganze Zahl ist, weil das Verhältniß $\frac{R}{R'}$ genau eine bestimmte Anzahl von Malen in m enthalten ist.

Anhang.

Ueber die verschiedenen Werthe der Trägheitsmomente.

Da wir in der Folge nur homogene Körper zu betrachten haben werden, so wollen wir das Volumenelement statt des Massenelementes nehmen, so daß, wenn $g = 9^m,809$ die Geschwindigkeit bezeichnet, welche ein freifallender Körper am Ende der ersten Secunde seines Falles erlangt und π das Gewicht der Volumeneinheit der Masse oder ihre Dichtigkeit, man alle Resultate durch $\frac{\pi}{g}$ multipliciren muß, und namentlich den Werth des Integrales $\int r^2 dm$, worin dm das in der Entfernung r von der Rotationsaxe liegende Volumenelement bezeichnet.

Allgemeines Princip.

§. 1. Bezeichnet man allgemein das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser mit π, das Totalvolumen eines Körpers mit M, sein Trägheitsmoment in Beziehung auf eine beliebige Axe mit I und sein Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende zu der ersten parallele und um d von ihr entfernte Axe mit $i = MK^2$; so hat man nach einem bekannten Satze:

$$I = Md^2 + i = M(d^2 + K^2),$$

d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine beliebige Axe ist gleich der Summe aus seinem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende parallele Axe und aus dem Producte seines Volumens und dem Quadrate der gegenseitigen Entfernung der beiden Axen.

Aus diesem Satze folgt insbesondere, daß, wenn die in Rede stehende Entfernung gegen die Abstände der Molecule des Körpers von der durch seinen Schwerpunct gehenden parallelen Axe sehr groß ist, das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf eine beliebige Axe näherungsweise durch das Product aus dem Volumen M und dem Quadrate der Entfernung d des Schwerpunctes von dieser Axe ausgedrückt wird.

Betrachtung der Körper, welche sich in dünne parallele und symmetrische Schichten zerlegen lassen.

§. 2. Betrachten wir einen Körper, welcher sich in ebene parallele und unendlich dünne Schichten zerlegen läßt, wovon für eine beliebige ω die Fläche und de die Dicke derselben, auf einer auf den Schichten senkrechten geraden Linie gemessen, bezeichnet. Ferner sei ρ die Entfernung des Schwerpunctes der betrachteten Schicht von einer beliebigen Rotationsaxe, und i das Trägheitsmoment der Fläche ω derselben in Beziehung auf eine durch ihren Schwerpunct gehende parallele Axe; so hat man nach dem Vorhergehenden, wenn man bemerkt, daß ωde das Volumen dieser Schicht und ide ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf die erwähnte parallele Axe ist:

$$I = \int \varrho^2 \omega de + \int ide,$$

und diese Größe läßt sich durch eine einzige Integration zwischen den den Grenzen der Körper entsprechenden Werthen von e erhalten, wenn ω und i für eine beliebige Lage der betrachteten Schicht als Functionen der Entfernung e gegeben sind.

Diese Betrachtung ist besonders bei den Körpern anwendbar, welche sich in gleiche oder ähnliche und ähnlich liegende parallele Schichten zerlegen lassen.

Wenn ein Körper durch ein constantes Profil erzeugt wird, welches sich normal auf einer Curve fortbewegt, indem der Schwerpunct der Fläche ω dieses Profiles das Curvenelement ds beschreibt; so kann man ebenso das Trägheitsmoment des zwischen zwei successiven Profilen liegenden unendlich kleinen Volumens ωds zerlegen: 1) in das Trägheitsmoment $\varrho^2 \omega ds$ in Beziehung auf die gegebene Rotationsaxe und 2) in das Trägheitsmoment, welches sich auf die durch den Schwerpunct von ω gehende parallele Axe bezieht. Wenn aber die Entfernung dieses Schwerpunctes von dem entferntesten Puncte des Körpers gegen seine Entfernung ϱ von der Rotationsaxe immer sehr klein bleibt und wenn außerdem die ganzen Längen der von diesem Puncte des Körpers und von diesem Schwerpuncte beschriebenen Curven sehr wenig verschieden sind; so kann man das letzte dieser beiden Trägheitsmomente gegen das erste vernachlässigen, und man hat dann bloß

$$I = \omega \int \varrho^2 ds,$$

d. h. das Trägheitsmoment des Körpers wird näherungsweise durch das Product aus der constanten Fläche seines Profiles und dem Trägheitsmomente der Richtlinie ausgedrückt.

Diese Bestimmung des Trägheitsmomentes ist besonders bei geraden oder krummen, prismatischen oder cylindrischen Stangen anwendbar, welche constante Profile haben, deren Dimensionen gegen die Längenausdehnung des Körpers und gegen ihre Entfernung von der Rotationsaxe sehr klein sind.

Rotationskörper.

§. 3. Es sei y der Halbmesser und πy^2 der Flächeninhalt eines beliebigen Durchschnittes der Rotationsfläche mit einer auf ihrer Axe der Figur senkrechten Ebene; so hat man, wenn dx die auf der erwähnten Axe gemessene Dicke der entsprechenden unendlich dünnen Schicht bezeichnet, und wenn diese Axe zur Rotationsaxe genommen wird:

$$I = \frac{\pi}{2} \int y^4 dx,$$

wo das Integral zwischen den den Enden der Axe der Figur des Körpers entsprechenden Grenzen genommen werden muß, und wenn man eine beliebige in einer auf der Axe der Figur senkrechten Ebene liegende gerade Linie, welche von dieser Axe um d entfernt ist, zur Rotationsaxe nimmt, so hat man, wenn die Abscisse x des Querschnittes πy^2 von der fraglichen Ebene aus gezählt wird:

$$I = \frac{\pi}{4}\int y^4 dx + \pi\int x^2 y^2 dx + Md^2,$$

welche Größen man durch einfache Integrationen erhält, wenn man bemerkt, daß y die der Abscisse x in dem erzeugenden Profile entsprechende Ordinate ist.

Auch hat man hier bekanntlich zur Berechnung des Volumens M des Körpers und der Abscisse x_1 seines Schwerpunctes in Beziehung auf eine beliebige auf der Axe der Figur senkrechte Ebene die Ausdrücke:

$$M = \pi\int y^2 dx, \; x_1 = \frac{\pi}{M}\int x y^2 dx.$$

Körper, für welche es eine Axe der Symmetrie gibt.

§. 4. Zu ähnlichen Resultaten gelangt man für die Körper, welche eine Axe der Symmetrie haben, und deren auf dieser Axe senkrechte Durchschnitte einander ähnlich sind; aber bei den Rotationskörpern ist die Axe der Figur und jede in einem beliebigen Puncte derselben darauf senkrechte gerade Linie eine Hauptaxe, für welche die Trägheitsmomente resp. durch:

$$\frac{\pi}{2}\int y^4 dx, \; \frac{\pi}{4}\int y^4 dx + \pi\int x^2 y^2 dx$$

ausgedrückt werden.

Nun folgt aber aus einem andern bekannten Satze, daß man, wenn man den Schwerpunct für den in Rede stehenden Punct nimmt, das Trägheitsmoment der Rotationsflächen in Beziehung auf eine ganz willkürliche Axe bestimmen kann.

Bemerkung über die Hauptaxen und Hauptebenen.

§. 5. Im Allgemeinen ist jede Ebene, welche einen Körper in zwei symmetrische Theile theilt, bekanntlich eine Hauptebene, d. h. sie enthält wenigstens zwei Hauptaxen dieses Körpers. Zwei solche Ebenen der Symmetrie schneiden sich also nach einer Hauptaxe und drei solche Ebenen nach drei Hauptaxen, welche auf einander senkrecht sind, wenn der Körper nicht unendlich viele Hauptaxen hat, und wenn der Körper eine symmetrische Form hat, so gehen diese Hauptaxen durch den Schwerpunct.

Allgemeiner Ausdruck des Trägheitsmomentes in Beziehung auf eine beliebige durch den Durchschnittspunct der drei Hauptaxen gehende gerade Linie.

§. 6. Wenn A, B und C die Trägheitsmomente in Beziehung auf die drei aufeinander senkrechten Hauptaxen und α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche sie resp. mit einer beliebigen durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct gehenden geraden Linie bilden; so hat man, wenn man diese gerade Linie zur Rotationsaxe nimmt:

$$I = A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma$$

(vergl. Poisson's Mechanik, Bd. 2, S. 56).

Nachdem wir so die Hauptsätze erörtert haben, vermittelst welcher man die Bestimmung der Trägheitsmomente in jedem Falle vereinfachen kann, wollen wir die Trägheitsmomente verschiedener Körper anführen, indem wir mit den der Linien oder Stangen mit sehr kleinem constanten Querschnitte den Anfang machen.

Trägheitsmomente der Linien oder Stangen von einem sehr kleinen constanten Querschnitte:

1) der geraden Linie.

§. 7. Bezeichnet L die Länge der betrachteten geraden oder krummen Linie und i ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf eine beliebige Axe, welche durch die Mitte derselben geht und einen Winkel α mit ihr bildet, so hat man:

$$i = {}^1/_{12}\sin.^2\alpha . L^2,$$

und in Beziehung auf eine beliebige zu der vorhergehenden parallele Axe, welche um die Länge d davon entfernt ist:

$$i = d^2L + {}^1/_{12}\sin.^2\alpha . L^2.$$

2) des Kreisbogens.

§. 8. Das Trägheitsmoment eines Kreisbogens von der Länge s und dem Halbmesser r in Beziehung auf den durch einen seiner Endpuncte gehenden Durchmesser wird ausgedrückt durch:

$$i = \frac{r^2}{2}(s - {}^1/_2\sin.2s)$$

und das des ganzen Kreisumfanges folglich durch:

$$i = \pi r^3.$$

Das Trägheitsmoment desselben Bogens in Beziehung auf eine zu dem erwähnten Durchmesser parallele und um die Länge a darunter liegende Axe wird folglich ausgedrückt durch:

$$i = \left(a^2 + \frac{r^2}{2}\right)s - \frac{r^2}{4}\sin.2s + 2ar\left\{r - \cos.s\right\},$$

wo $\sin.2s$ und $\cos.s$ Linien sind.

Wenn die Axe in Beziehung auf den Durchmesser auf der Seite des Bogens s liegt, so muß man das Zeichen von a verändern, und in allen Fällen ist zu bemerken, daß die in den Formeln vorkommenden trigonometrischen Linien lineare Sinus und Cosinus sind, deren Werth durch r multiplicirt werden muß, wenn man denselben aus den Tafeln nimmt. Dieselben Formeln führen übrigens durch bloße Additionen oder Subtractionen zu dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes eines beliebigen Kreisbogens.

3) der doppelten Parabelbogen.

§. 9. Das Tragheitsmoment eines Parabelbogens s, welcher von der Axe in zwei symmetrische Theile getheilt wird, dessen Sehne oder doppelte Ordinate $= b$ und die von dem Scheitel aus gezählte zugehörige Abscisse $= a$ ist, wird 1) in Beziehung auf die Axe ausgedrückt durch:

$$i = -\frac{1}{4 \times 64}\frac{b^4}{a^4}a^2 s + {}^1/_4 \frac{b^2}{a^2}\frac{(b^2+16a^2)^{\frac{3}{2}}}{64},$$

und 2) in Beziehung auf eine beliebige auf der Axe der Curve senkrechte und vom Scheitel der Curve um die Länge c entfernte Axe, welche innerhalb der Curve liegt, durch:

$$i = \left(1 + {}^1/_{32}\frac{a}{c}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{32.64}\frac{a^2}{c^2}\frac{b^4}{a^4}\right)c^2 s$$
$$- \left(2\frac{c}{a} + {}^1/_{32}\frac{b^2}{a^2} - {}^2/_3\right)\frac{(b^2+16a^2)^{\frac{3}{2}}}{64},$$

worin

$$s = {}^1/_2\sqrt{b^2+16a^2} + {}^1/_8\frac{b^2}{a}\log.\left(4\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\sqrt{b^2+16a^2}\right),$$

und $\log.$ Neper'sche Logarithmen bezeichnet.

Wenn $b < {}^1/_3 a$ und $c > {}^1/_2 a$ ist, so braucht man nur zu nehmen:

im 1. Falle . . . . $i = {}^1/_4 ab^2$

„ 2. „ . . . . $i = c^2 s - {}^2/_3\left(\frac{3c}{a} - 1\right)a^3$,

und . . . . $s = 2a + \frac{b^2}{8a}\log.\, 8\frac{a}{b}$.

4) des einfachen Parabelbogens.

§. 10. Nimmt man die Hälfte dieser Werthe von i, so erhält man die Trägheitsmomente der einfachen Parabelbogen, welche sich im Scheitel endigen, woraus man alsdann leicht das Trägheitsmoment eines beliebigen Parabelbogens in Beziehung auf die Axe der Curve und in Beziehung auf die durch einen Endpunct des Bogens gehende Ordinate, ꝛc. ableiten kann. Addirt man endlich die Trägheitsmomente des Parabelbogens in Beziehung auf zwei sich unter einem rechten Winkel durchschneidende Axen, so erhält man offenbar das Trägheitsmoment dieses Bogens in Beziehung auf das durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct gehende Perpendikel auf ihrer Ebene.

So ist z. B. in dem obigen Falle eines symmetrischen Parabelbogens s gegen die Axe der Figur das Trägheitsmoment in Beziehung auf das Perpendikel auf der Ebene dieser Parabel, welches um die Länge c von ihrem Scheitel entfernt ist:

$$c^2 s\left(1 + {}^1/_{32}\frac{ab^2}{ca^2} - \frac{7}{32.64}\frac{a^2}{c^2}\frac{b^4}{a^4}\right)$$
$$- a^3\left(1 + {}^1/_{16}\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2c}{a} - {}^7/_{32}\frac{b^2}{a^2} - {}^2/_3\right),$$

oder bloß: $c^2 s - a^3\left(\frac{2c}{a} - {}^7/_{32}\frac{b^2}{a^2} - {}^2/_3\right)$, wenn $b < {}^1/_3 a$.

Dieselben Bemerkungen sind auch auf den Fall der geraden Linien, der Kreisbogen, ꝛc. anwendbar, und wenn man diese verschiedenen Linien für die Richtlinien eines constanten Profiles nimmt, welches sich längs derselben fortbewegt, indem es darauf senkrecht bleibt und die Richtlinie durch seinen Schwerpunct geht, ferner angenommen wird, daß die Fläche des Profiles in Beziehung auf die Dimensionen der Curven und ihre Entfernung von der Rotationsaxe sehr klein ist, und sie endlich durch die nach der vorhergehenden Methoden gefundenen Trägheitsmomente multiplicirt wird; so erhält man das Trägheitsmoment des erzeugten Körpers in Beziehung auf die erwähnte Axe (§. 2).

Trägheitsmomente der Flächen oder der unendlich dünnen ebenen Scheiben:

1) des Kreises.

§. **11.** Bezeichnet allgemein A die betrachtete Fläche und i ihr Trägheitsmoment, so hat man für das Trägheitsmoment eines Kreises von dem Halbmesser r in Beziehung auf irgend einen seiner Durchmesser:

$$i = \frac{\pi r^4}{4} = {}^1/_4\, A r^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Kreisringes, für welchen r', r'' und r_1 resp. den größten, kleinsten und mittlern Halbmesser bezeichnet, und $l = r' - r''$ die Breite ist, und in Beziehung auf einen Durchmesser wird ausgedrückt durch:

$$i = \pi \frac{(r'^4 - r''^4)}{4} = \frac{2\pi l r_1}{2}\left(1 + {}^1/_4 \frac{l^2}{r_1^{\,2}}\right) r^2$$

$$= {}^1/_2\left(1 + {}^1/_4 \frac{l^2}{r_1^{\,2}}\right) A r_1^{\,2} = {}^1/_2\, A r_1^{\,2},$$

wenn man den Bruch ${}^1/_4 \dfrac{l^2}{r_1^{\,2}}$ gegen die Einheit vernachlässigen kann.

2) der Ellipse.

§. 12. Das Trägheitsmoment einer Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die Axe $2a$ durch:

$$i = {}^1/_4\, \pi b^4 \frac{a}{b} = {}^1/_4\, A b^2$$

2) in Beziehung auf die Axe $2b$ durch:

$$i = {}^1/_4\, \pi a^4 \frac{b}{a} = {}^1/_4\, A a^2$$

und 3) in Beziehung auf einen beliebigen Durchmesser, welcher mit der Axe $2a$ den Winkel α bildet, durch:

$$i = {}^1/_4\, A\,(a^2 \sin.^2 \alpha + b^2 \cos.^2 \alpha).$$

Das Trägheitsmoment eines Viertelkreises von dem Halbmesser r in Beziehung auf eine Axe, welche zu einem der äußersten Halbmesser parallel ist, und in einer Entfernung c liegt, wird ausgedrückt durch:

$$i = \frac{\pi r^2}{4}\left(c^2 + {}^1/_4\, r^2 \pm {}^8/_3 \frac{cr}{\pi}\right) = A\left\{(c \pm {}^1/_2\, r)^2 \mp 0{,}15\, cr\right\},$$

wo die obern Zeichen dem Falle entsprechen, wenn die Axe auf der Seite der Concavität des Viertelkreises liegt und die untern Zeichen dem Falle, wo sie auf der Seite der Convexität liegt.

3) des Parabelsegmentes.

§. 13. Das Trägheitsmoment eines Parabelsegmentes, welches von einer Sehne von der Länge b begrenzt wird, die auf der Axe der Parabel in der Entfernung a vom Scheitel senkrecht ist, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die Axe a durch:

$$i = {}^1/_{30}\, ab^3 = {}^1/_{20}\, Ab^2,$$

2) in Beziehung auf ein in der Entfernung c vom Scheitel der Curve auf ihrer Axe errichtetes Perpendikel innerhalb derselben durch:

$$i = {}^1/_2\, b\,(c^3 - c^2 a + {}^3/_5\, a^2 c - {}^1/_7\, a^3)$$

$$= {}^1/_2\, Aa^2\left(\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^2}{a^2} + {}^3/_5 \frac{c}{a} - {}^1/_7\right),$$

wo in diesen Ausdrücken übrigens:

$A = {}^2/_3\, ab$ ist.

4) des Rechteckes.

§. 14. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes von den Seiten a und b wird ausgedrückt 1) in Beziehung auf die durch seinen Schwerpunct und durch die Mitte der Seiten a gehende Hauptaxe durch:

$$i = {}^1/_{12}\, ab^3 = {}^1/_{12}\, Ab^2,$$

2) in Beziehung auf die auf der Mitte der Seiten b senkrechte Axe durch:

$$i = {}^1/_{12}\, ba^3 = {}^1/_{12}\, Aa^2,$$

und 3) in Beziehung auf eine beliebige Axe, welche mit der Seite a einen Winkel α bildet, durch:

$$i = {}^1/_{12}\, A\,(a^2 \sin.^2 \alpha + b^2 \cos.^2 \alpha).$$

5) des Trapezes.

§. 15. Das Trägheitsmoment eines Trapezes, dessen parallele Seiten b und b' sind, und dessen auf der Mitte dieser Seiten senkrechte Axe der Symmetrie $= a$ ist, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die Axe a durch:

$$i = a\left(\frac{b + b'}{48}\right)(b^2 + b'^2) = {}^1/_{24}\, A\,(b^2 + b'^2)$$

2) in Beziehung auf die Seite b durch:

$$i = \frac{a^3}{12}(b + 3b') = \frac{Aa^2}{6}\left(1 + \frac{2b'}{b + b'}\right).$$

Allgemeine Bemerkungen.

Polares Trägheitsmoment.

§. 16. Wenn man die Trägheitsmomente derselben Fläche in Beziehung auf zwei sich in dieser Fläche rechtwinklig durchschneidende Axen zusammen addirt, so erhält man das Trägheitsmoment dieser Fläche in Beziehung auf das im Durchschnittspuncte der beiden erwähnten Axen auf der Ebene der Fläche errichtete Perpendikel, welches Trägheitsmoment Persy **polares Trägheitsmoment** genannt hat, weil es sich auch auf einen zum **Pole** genommenen Punct der Ebene bezieht.

So wird z. B. in dem Falle der Parabel (§. 13), welche sich um eine Axe dreht, die in der Mitte der Sehne b auf ihrer Ebene errichtet ist, das Trägheitsmoment in Beziehung auf diese Axe ausgedrückt durch:

$$i = {}^1/_{20}Ab^2 + {}^1/_2 Aa^2\left(\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^2}{a^2} + {}^3/_5\frac{c}{a} - {}^1/_7\right).$$

Multiplicirt man das so erhaltene Trägheitsmoment durch die Höhe des senkrechten Prismas, welches die betrachtete Fläche A zur Grundfläche hat, so erhält man den genauen Ausdruck des Trägheitsmomentes dieses Prismas.

Trägheitsmoment der Prismen.

§. 17. Im Allgemeinen, wenn man die verschiedenen, vorhingefundenen Trägheitsmomente durch die Höhe oder Dicke des Prismas oder der Scheibe multiplicirt, welches diese Fläche zur Grundfläche hat; so erhält man das Trägheitsmoment dieser Scheibe oder dieses Prismas mit einem desto größern Grade von Annäherung, je kleiner diese Höhe oder Dicke gegen die mittlern Dimensionen der entsprechenden Scheibe ist.

Zusammengesetztere Figuren muß man in andere einfachere zerlegen, und die Trägheitsmomente derselben einzeln bestimmen, und wenn man endlich die in dem gegenwärtigen Artikel erhaltenen Resultate mit denen im vorhergehenden Artikel sich auf bloße Linien beziehenden verbindet; so erhält man vermöge des Satzes im §. 2 die Trägheitsmomente der durch constante Profile beschriebenen Volumina, ꝛc.

Trägheitsmomente der Körper oder Volumina von beliebigen Dimensionen:

1) des Cylinders mit kreisförmiger Basis.

§. 18. Das Trägheitsmoment eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Basis von dem Halbmesser r, und dessen Axe der Figur eine Länge a hat, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf diese Axe durch:

$$I = {}^1/_2 \pi a r^4 = {}^1/_2 M r^2,$$

2) in Beziehung auf eine gerade Linie, welche in der Ebene einer der Grundflächen in der Entfernung d von der Axe der Figur liegt, durch:

$$I = \frac{\pi}{4} r^4 a + \frac{\pi}{3} r^2 a^3 + \pi r^2 a d^2 = \frac{M}{12}(3r^2 + 4a^2 + 12d^2).$$

2) eines Rotationsringes.

§. 19. Das Tragheitsmoment eines Rotationsringes von einem rechteckigen Querschnitte, dessen zu der Axe parallele Breite $= l$, dessen Dicke in der Richtung des Halbmessers $= e$ und dessen mittlerer Halbmesser $= r_1$ ist, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf diese Axe durch:

$$I = 2\pi r_1 l e (r_1^2 + {}^1/_4 e^2) = M\left(1 + {}^1/_4 \frac{e^2}{r_1^2}\right) r_1^2,$$

wo $M = 2\pi r_1 l e$ ist;

2) in Beziehung auf eine beliebige gerade Linie, welche in der Ebene einer der Grundflächen des Ringes in der Entfernung d von der Axe der Figur liegt, durch:

$$I = M(d^2 + {}^1/_3 l^2 + {}^1/_2 r_1^2 + {}^1/_8 e^2).$$

Wenn $e < {}^1/_4 r_1$ ist, so kann man in diesen letzten Ausdrücken das Glied mit e vernachlässigen und alsdann sind die vereinfachten Ausdrücke auch auf Ringe anwendbar, deren Axenquerschnitte ein beliebiges Profil haben und deren größte Dicke ebenfalls kleiner als $^1/_4$ des mittlern Halbmessers, d. h. der Entfernung des Schwerpunctes des Querschnittes von der Axe ist.

3) eines massiven abgestumpften Kegels.

§. 20. Das Trägheitsmoment eines abgestumpften Kegels mit kreisförmigen Grundflächen von den Halbmessern r und r', dessen Höhe $= a$, und dessen mittlerer Halbmesser $r_1 = {}^1/_2(r + r')$ und endlich der Unterschied der Halbmesser der Grundflächen $l = r - r'$ ist, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die Axe der Figur durch:

$$I = {}^1/_{10} \pi a \frac{r^5 - r'^5}{r - r'} = {}^1/_2 \pi a r_1^2 \left(1 + {}^1/_2 \frac{l^2}{r_1^2} + {}^1/_{80} \frac{l^4}{r_1^4}\right) r_1^2,$$

wo $M = {}^1/_3 \pi a \frac{(r^3 - r'^3)}{r - r'} = \pi a r_1^2 \left(1 + {}^1/_{12} \frac{l^2}{r_1^2}\right)$ das Volumen ist;

oder näherungsweise, wenn $l < {}^1/_2 r_1$ ist:

$$M = \pi a r_1^2,\ I = {}^1/_2 M \left(1 + {}^1/_2 \frac{l^2}{r_1^2}\right) r_1^2;$$

2) in Beziehung auf eine beliebige gerade Linie, welche in der Ebene einer der Grundflächen in der Entfernung d von der Axe des Kegels liegt, durch:

$$I = {}^1/_{20}\pi a\left(\frac{r^5 - r'^5}{r - r'}\right) + {}^1/_{10}\,\pi a^3\,({}^1/_3 r'^2 + rr' + 2r^2) + \frac{d^2 M}{3} =$$

$${}^1/_{20}\pi a r_1^2\left(1 + {}^1/_2\frac{l^2}{r_1^2} + {}^1/_{80}\frac{l^4}{r_1^4}\right) r_1^2 +$$

$${}^1/_3\,\pi a r_1^2\left(1 + {}^1/_2\frac{l}{r_1} + {}^1/_{10}\frac{l^2}{r_1^2}\right) a^2 + Md^2,$$

oder mit einer hinreichenden Annäherung, wenn $l < {}^1/_2 r_1$ ist:

$$I = M\left\{d^2 + {}^1/_3\left(1 + {}^1/_2\frac{l}{r_1}\right)a^2 + {}^1/_{20}\left(1 + {}^1/_2\frac{l^2}{r_1^2}\right)r_1^2\right\}.$$

Vermittelst dieser Formeln erhält man durch bloße Subtractionen die Trägheitsmomente für hohle abgestumpfte Kegel und Ringe, 2c., und in Beziehung auf diese letztern kann man noch bemerken, daß das Verhältniß $\frac{l}{r_1}$ für den innern und äußern Kegel dasselbe ist, wenn diese Kegel dieselbe Spitze haben, wodurch die Rechnungen in diesem Falle sehr vereinfacht werden.

4) Eines Abschnittes des Rotationsparaboloides.

§. 21. Das Trägheitsmoment eines Abschnittes des Rotationsparaboloides, welcher zwischen dem Scheitel und einem beliebigen in der Entfernung a von diesem Scheitel liegenden kreisförmigen Querschnitte von dem Halbmesser r liegt, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die Axe der Figur durch:

$$I = {}^1/_6\,\pi a r^4 = {}^1/_3\,Mr^2,$$

wo $M = {}^1/_2\pi a r^2$,

2) in Beziehung auf ein beliebiges Perpendikel auf dieser Axe im Schwerpuncte, welcher um ${}^2/_3\,a$ von dem Scheitel entfernt ist, durch:

$$I = {}^1/_6\,M\,(r^2 + {}^1/_3\,a^2).$$

Vermittelst dieser Formeln findet man leicht das Trägheitsmoment eines Abschnittes des Paraboloides, welcher zwischen zwei beliebigen Durchschnitten desselben liegt, und in Beziehung auf eine beliebige gegebene Axe.

5) Des Kugelabschnittes.

§. 22. Das Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes von der Höhe a und dem Halbmesser r wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf den durch seine Mitte gehenden Durchmesser durch:

$$I = {}^2/_3\,\pi a^3\left(1 - {}^3/_4\frac{a}{r} + {}^3/_{20}\frac{a^2}{r^2}\right)r^2 =$$

$${}^2/_3\,Ma\left(r - {}^5/_{12}\,a + {}^4/_{360}\frac{a^2}{r - {}^1/_3\,a}\right),$$

wo $M = \pi a^2 (r - \frac{1}{3} a)$ ist, oder wenn $a < \frac{2}{3}$ ist, bis auf $\frac{1}{100}$ genau durch:

$$I = \frac{2}{3} Ma (r - \frac{5}{12} a),$$

2) in Beziehung auf ein beliebiges Perpendikel im Endpuncte des Durchmessers durch:

$$I = \frac{1}{3} \pi a^3 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{9}{20} \frac{a^2}{r^2}\right) r^2 =$$

$$\frac{1}{3} Ma \left(r + \frac{13}{12} a - \frac{4}{45} \frac{a^2}{r - \frac{1}{3} a}\right),$$

oder wenn $a < \frac{2}{3} r$ ist, wenigstens bis auf $\frac{1}{37}$ genau durch:

$$I = \frac{1}{3} Ma (r + \frac{13}{12} a).$$

6) des Ellipsoides und der Kugel.

§. 23. Für ein beliebiges Ellipsoid, dessen drei Hauptaxen a, b, c sind, wird das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Axe a ausgedrückt durch:

$$I = \frac{2}{5} M (b^2 + c^2), \text{ wo } M = \frac{4}{3} \pi abc \text{ ist.}$$

Das Trägheitsmoment einer ganzen Kugel von dem Halbmesser r in Beziehung auf einen beliebigen Durchmesser, wird ausgedrückt durch:

$$I = \frac{2}{5} Mr^2, \text{ wo } M = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ ist.}$$

7) des rechtwinkligen Parallelepipedums.

§. 24. Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen Kanten a, b, c sind, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf eine durch seinen Mittelpunct gehende und zu den Kanten c parallele Axe durch:

$$I = \frac{1}{12} abc (b^2 + a^2) = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2),$$

2) in Beziehung auf eine zu der Kante c parallele und durch die Mitte der Fläche von den Seiten b und c gehende Axe durch:

$$I = \frac{1}{12} M (b^2 + 4a^2),$$

3) in Beziehung auf die Kante c selbst durch:

$$I = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2).$$

8) der geraden Cylinder oder Prismen mit einer beliebigen Grundfläche.

§. 25. Für einen geraden Cylinder oder ein Prisma mit beliebiger Grundfläche, dessen constanter Querschnitt $= a$ und dessen Länge $= l$ ist, wird das Trägheitsmoment:

1) in Beziehung auf die Axe a, welche durch die Schwerpuncte aller Querschnitte geht, ausgedrückt durch:

$$I = il,$$

wo i das polare Trägheitsmoment dieser Querschnitte bezeichnet (§. 16),

2) in Beziehung auf eine Axe b, welche auf der vorhergehenden in ihrer Mitte senkrecht ist, d. h. durch den Schwerpunct des Körpers geht, durch:

$$I = \tfrac{1}{12} A l^3 + i l,$$

wo i das Trägheitsmoment der constanten Querschnitte A des Prismas in Beziehung auf eine zu der Axe b parallele und durch ihren Schwerpunct gehende Axe bezeichnet.

9) des geraden Prismas, dessen Grundfläche ein Trapez ist.

§. 26. Das Trägheitsmoment eines geraden Prismas, dessen Grundfläche ein Trapez ist, dessen parallele Seiten b, b' sind, dessen Höhe $= a$, und wo die Höhe des Prismas $= c$ ist, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die gerade Linie, welche durch die Mitten der Kanten b der Grundflächen geht, durch:

$$I = ac\,\frac{(b+b')}{2}\left\{\frac{b^2+b'^2}{24} + \tfrac{1}{6} a^2 \frac{(b+3b')}{b+b'}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{6} M a^2 \left(\frac{b+3b'}{b+b'} + \tfrac{1}{4}\,\frac{b^2+b'^2}{a^2}\right),$$

2) in Beziehung auf die gerade Linie, welche zu b parallel und auf der vorhergehenden in ihrer Mitte senkrecht ist, durch:

$$I = \tfrac{1}{6} M a^2 \left(\frac{b+3b'}{b+b'} + \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\right),$$

3) in Beziehung auf die Axe der Symmetrie des Prismas, welche auf den vorhergehenden geraden Linien in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte senkrecht ist, durch:

$$I = \tfrac{1}{24} M (2c^2 + b^2 + b'^2).$$

10) eines Prismas mit parabolischer Grundfläche.

§. 27. Das Trägheitsmoment eines geraden Prismas von der Höhe c, dessen Grundflächen Parabelsegmente sind, welche durch eine Sehne von der Länge b begrenzt werden, die auf der Axe der Figur in der Entfernung a vom Scheitel senkrecht ist, wird ausgedrückt:

1) in Beziehung auf die durch die Mitten der Seiten b der Grundflächen gehende gerade Linie durch:

$$I = M(\tfrac{16}{70} a^2 + \tfrac{1}{20} b^2), \text{ wo } M = \tfrac{2}{3} abc,$$

2) in Beziehung auf die gerade Linie, welche auf der vorhergehenden in ihrer Mitte senkrecht ist, durch:

$$I = abc(\tfrac{16}{105} a^2 + \tfrac{1}{18} c^2) = M(\tfrac{16}{70} a^2 + \tfrac{1}{12} c^2),$$

3) in Beziehung auf die Axe der Symmetrie des Körpers, welche auf den vorhergehenden beiden geraden Linien senkrecht ist, durch:

$$I = abc(\tfrac{1}{5} b^2 + c^2) = \tfrac{3}{2} M(c^2 + \tfrac{1}{5} b^2).$$

Bemerkung über den Fall, wo die Rotationsaxen nicht auf der Axe der Figur senkrecht sind.

§. 28. Die zuletzt betrachteten Fälle beziehen sich hauptsächlich auf die Arme der Balanciers und der Räder, auf die Verstärkungsrippen dieser Arme, auf die rotirenden Wellen, rc. Aber obgleich vorhin vorausgesetzt wurde, daß die Rotationsaxen auf der Axe der Figur in der Ebene einer Grundfläche senkrecht sei, so ist doch nichts leichter, als durch eine bloße Subtraction, oder Addition das Trägheitsmoment in Beziehung auf die in einer beliebigen Entfernung von dieser Grundfläche liegenden Perpendikel zu erhalten.

11) des trapezoidischen Prismas (Fig. 50).

§. 29. Für das an beiden Enden symmetrisch abgestumpfte trapezoidische Prisma, dessen Vertical- und Horizontalprojection durch die beiden Trapeze $ABB'A'$, $CDD'C'$ dargestellt wird, welche durch die Axe OO' in zwei symmetrische Theile getheilt werden, und deren Ebenen nach der Voraussetzung resp. mit denen zusammenfallen, welche das Prisma selbst in zwei symmetrische Theile theilen, wird das Trägheitsmoment

1) in Beziehung auf die durch den Punct O gehende horizontale gerade Linie, welche zu den Kanten $c = CD$ und $c' = C'D'$ parallel und auf der Axe $OO' = a$ senkrecht ist, wenn $AB = b$, $A'B' = b'$ gesetzt wird, ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} I = {}& {}^1/_5\, a^3 (c'b' + {}^1/_6\, cb) + {}^1/_{20}\, a^3 (cb' + bc') \\ & + {}^1/_{240}\, ac\, (b'^3 + 2bb'^2 + 3b'b^2 + 4b^3) \\ & + {}^1/_{240}\, ac'\, (b^3 + 2b'b^2 + 3bb'^2 + 4b'^3), \end{aligned}$$

2) in Beziehung auf die durch den Punct O gehende Verticale, welche zu den Kanten b und b' parallel und auf der Axe OO' senkrecht ist, durch:

$$\begin{aligned} I = {}& {}^1/_5\, a^3 (c'b' + {}^1/_6\, cb) + {}^1/_{20}\, a^3 (cb' + bc') \\ & + {}^1/_{240}\, ab\, (c'^3 + 2cc'^2 + 3c'c^2 + 4c^3) \\ & + {}^1/_{240}\, ab'\, (c^3 + 2c'c^2 + 3cc'^2 + 4c'^3), \end{aligned}$$

welches Resultat sich auch der Symmetrie wegen unmittelbar aus dem vorhergehenden ergibt.

Das Volumen des Körpers wird ferner ausgedrückt durch:

$$M = {}^1/_6\, a \left\{ b\,(2c + c') + b'\,(2c' + c) \right\}.$$

Vereinfachung der vorhergehenden Formeln für die gewöhnlichen Fälle.

§. 30. Diese Formeln, welche sich speciell auf gewisse Räderarme und auf große Hammerhelme beziehn, lassen sich vereinfachen, weil die Differenzen $b - b'$, $c - c'$ in der Praxis gewöhnlich ziemlich kleine Brüche der mittlern Dimensionen ${}^1/_2\,(b + b')$, ${}^1/_2\,(c + c')$ sind. Denn setzt man

$${}^1/_2\,(b + b') = b_1,\ b - b' = nb_1,\ {}^1/_2\,(c + c') = c_1,\ c - c' = mc_1,$$

folglich: $n = 2\frac{b - b'}{b + b'}$, $m = 2\frac{c - c'}{c + c'}$;

so erhält man resp.

$$1)\ I = \frac{1}{60} b_1 c_1 a^3 (20 - 5m - 5n + 2mn) + \frac{1}{240} c_1 b_1^3 a \left\{ 20(1 + \frac{1}{4}n^2) + 5mn + \frac{1}{4}mn^3 \right\}$$

und $M = ab_1c_1(1 + \frac{1}{12}mn)$,

$$2)\ I = \frac{1}{60} b_1 c_1 a^3 (20 - 5m - 5n + 2mn) + \frac{1}{240} b_1 c_1^3 a \left\{ 20(1 + \frac{1}{4}m^2) + 5mn + \frac{1}{4}nm^3 \right\}.$$

Setzt man n und $m < 1$, b_1 und $c_1 < \frac{1}{3}a$, so sind die Werthe der zweiten Glieder der Ausdrücke von I kleiner als $\frac{1}{240}$ der Werthe der ersten Glieder und man kann sie alsdann völlig vernachlässigen.

Allgemeine Bemerkungen und Anwendungen.

Eisenhämmer.

§. 31. Wenn man die Trägheitsmomente von Maschinentheilen zu berechnen hat, so braucht man einen jeden dieser Theile nur in solche Formen zu zerlegen, welche mit den vorhin betrachteten übereinstimmen, indem man gewisse Stücke, deren Trägheitsmomente sich leicht berechnen lassen, sich hinzugesetzt oder hinweggenommen denkt.

Betrachtet man z. B. den Eisenhammer B (Fig. 51), welcher an dem Ende eines hölzernen Helmes CB befestigt ist, welches sich um die Zapfen des Bandes der Hülse A dreht; so berechnet man zunächst das Volumen M und das Trägheitsmoment I der beiden Theile des Helmes in Beziehung auf die Axe A vermittelst der Formeln des vorhergehenden §, nämlich:

$$M = ab_1c_1(1 + \frac{1}{12}mn),$$
$$I = \frac{1}{60} b_1 c_1 a^3 (20 - 5m - 5n + 2mn),$$

und multiplicirt die erhaltenen Resultate resp. durch das Gewicht π und durch die Masse $\frac{\pi}{g}$ der Volumeneinheit des Holzes, um das wirkliche Gewicht und Trägheitsmoment der fraglichen Theile des Helmes zu erhalten.

Ebenso berechnet man die Werthe von M und I in Beziehung auf den gußeisernen Ring A und seine beiden kegelförmigen Zapfen durch die Formeln im §. 19 und 20, welche geben, wenn man den mittlern Halbmesser, die Dicke und die ganze Breite des Ringes resp. mit r_1, e, l und den gemeinschaftlichen Halbmesser der Grundflächen der beiden Kegel mit r, und ihre Höhen über dem Ringe mit a, a' bezeichnet

1) für den Ring, indem man $\frac{1}{8}e^2$ vernachlässigt:

$$M = 2\pi r_1 el,\quad I = \frac{1}{6}M(2l^2 + 3r_1^2),$$

2) für die beiden Kegel:

$$M = \frac{1}{3}\pi(a + a')r^2,\quad I = \frac{3}{10}Mr^2.$$

Was den gußeisernen Hammer B anlangt, so kann man denselben als ein rechtwinkliges Parallelepipedum betrachten, dessen Höhe $= h$, Breite $= l$ und reducirte Dicke $= e'$ ist, welche man näherungsweise durch die Zeichnung der Figur, oder an Ort und Stelle selbst erhält, wenn man nach dem Augenmaaße auf der Ebene seines Kopfes die Parallelen ab, cd zieht, welche in Beziehung auf die verticale Axe BB' symmetrisch liegen, und wenn man an dem obern Theile etwas mehr hinwegnimmt, als an dem untern Theile des Profiles hinzukommt. Bezeichnet ferner h' und e'' resp. die Höhe und die Breite des Loches, d und d' die Entfernungen seines Schwerpunctes g und des Schwerpunctes G des auf eine parallelepipedische Form zurückgeführten massiven Theiles von der Axe A, und setzt man endlich $l'e'h = M'$, $l'e''h' = M''$; so hat man nach §. 1 und 24:

$$M = M' - M'',$$
$$I = M'd^2 - M''d'^2 + \tfrac{1}{12}M'(l'^2 + h^2) - \tfrac{1}{12}M''(l'^2 + h'^2)$$
$$= M'(d^2 + \tfrac{1}{12}h^2 + \tfrac{1}{12}l'^2) - M''(d'^2 + \tfrac{1}{12}h'^2 + \tfrac{1}{12}l'^2).$$

Wenn man sich mit einer bloßen Annäherung begnügen will, so kann man in dieser letzten Formel die Glieder mit h^2, h'^2 und l'^2 vernachlässigen, deren Werthe gegen d^2 und d'^2 immer sehr klein sind, dann den Werth von d^2, welcher der größte ist und der Mitte der Höhe h des Hammers entspricht, für den gemeinschaftlichen Werth von d^2 und d'^2 nehmen, und endlich den geringen Einfluß der Zapfen der Hülse unberücksichtigt lassen, wodurch man Formeln erhält, welche sich leicht berechnen lassen, zumal wenn man das Gewicht der verschiedenen Theile in Voraus kennt.

Räder.

§. 32. Betrachten wir noch das gußeiserne Rad B (Fig. 52), dessen Arme aus trapezoidischen parallelen und auf der Axe AA' senkrechten Kreuzstücken bestehen, und nehmen der Einfachheit wegen an, daß diese Arme von dieser Axe bis zu dem mittlern Kreisumfange des Ringes reichen, und vernachlässigen folglich den zwischen diesen Armen liegenden Theil des Kernes, welcher übrigens von geringem Einfluß ist, bezeichnen alsdann den mittlern Halbmesser des Ringes von der Axe bis zum Schwerpuncte seines Profiles mit R, mit:

E seine reducirte Dicke und mit l seine Breite, mit
B und B' die Breiten an der Grundfläche und an der Spitze der nach der Axe AA' gerichteten Verstärkungsrippen, mit
b und b' die der darauf senkrechten Verstärkungsrippen, mit
e ihre gemeinschaftliche Dicke, mit
$\pi = 7200$ Kilogr. das Gewicht des Cubikmeters Gußeisen, mit
i die Anzahl der Arme, und endlich mit:

$$U = eR\left(\frac{B + B'}{2}\right),\ u = eR\left(\frac{b + b'}{2}\right),\ W = 2\pi REl$$

die resp. Volumina der Rippen, welche denselben Arm bilden und des Ringes; so haben wir nach §. 19 und 25, wenn wir die Glieder mit den Quadraten der Verhältnisse der Dicken e und E zu R vernachlässigen, für den genäherten Ausdruck des Gesammtträgheitsmomentes des Rades:

$$I =$$

$$\frac{\pi}{g}\left\{\frac{i}{6}U\left(\frac{B+3B'}{B+B'}\right)+{}^1/_6\,u\left(\frac{b+3b'}{b+b'}+{}^1/_4\,\frac{b^2+b'^2}{R^2}\right)+W\right\}R^2.$$

Wenn R gegen b, b' sehr groß ist, während B und b höchstens ${}^1/_5 B'$ und b' erreichen, wie dieses bei den Schwungrädern der Maschinen der Fall ist, so kann man näherungsweise bis ${}^1/_{40}$ genau $\frac{B+3B'}{B+B'} = 1,95$, $\frac{b+3b'}{b+b'} = 1,95$ oder $= 0$ setzen, wenn keine Querrippen vorkommen, und wenn man endlich $b^2 + b'^2$ gegen R^2 vernachlässigt, so erhält man ohne merklichen Fehler:

$$I = \frac{\pi}{g}(W + 0,325\,U_1)\,R^2,$$

wo U_1 das Totalvolumen und πU_1 das entsprechende Gewicht der Arme und ihrer Rippen bezeichnet.

Balancier.

§. 33. Zuletzt wollen wir noch den in §. 115 erwähnten Balancier betrachten, dessen Arme aus zwei gleichen parabolischen und in Beziehung auf die Rotationsaxe D symmetrischen Segmenten besteht, welche an ihrem Umfange und längs der Axe der Figur mit Verstärkungsrippen versehn sind, wie in dem in Figur 53 dargestellten Normalprofile angegeben ist. Bezeichnet alsdann:

R die gemeinschaftliche Länge der Arme oder der parabolischen Segmente,
B ihre durch den Mittelpunct gehende gemeinschaftliche Sehne,
E die Dicke ihrer ebenen Theile,
a die constante Fläche des Profiles der äußern parabolischen Rippen,
a' die analoge Fläche des Profiles der Rippen der Horizontalaxe des Balanciers,
P das Totalgewicht des letztern,
I das Gesammtträgheitsmoment der Masse,
u, u', u'', *etc.* die Näherungswerthe der Volumina der Ringe und Rippen, welche die in E, N, C befindlichen Zapfen tragen,
D, D', D'', *etc.* die resp. Entfernungen dieser Zapfen von der Rotationsaxe,
$\pi = 7200$ Kilogr. das Gewicht eines Cubikmeters Gußeisen, und endlich
S den halben Umfang des äußern Profiles;

so hat man nach §§. 9, 21, 24, und wenn man bemerkt, daß B hier kleiner ist, als ${}^1/_3 R$, und daß die Dimensionen der Querprofile der Rippen im Allgemeinen gegen ihre Entfernungen von der Rotationsaxe vernachlässigt werden können, näherungsweise (§. 10):

$$P = 2\pi\,(aS + a'R + {}^2/_3\,BER + u + u' + etc.),$$

$$S = 2R + {}^1/_8 \frac{B^2}{R} \log. 8 \frac{R}{B},$$

$$I = 2\frac{\pi}{g} \left\{ \begin{array}{l} aS - aR\left({}^4/_3 - {}^7/_{32} \frac{B^2}{R^2}\right) + {}^1/_3\, a'R + \\ BER\left({}^{16}/_{70} + {}^1/_{20} \frac{B^2}{R^2}\right) + u\frac{D^2}{R^2} + {}^1/_2\, u' \frac{D'^2}{R^2} \end{array} \right\} R^2.$$

Zu bemerken ist hierbei, daß der in der zweiten dieser Gleichungen vorkommende Logarithmus ein Neperscher ist und mit 2,303 multiplicirt werden muß, wenn derselbe aus den gewöhnlichen Tafeln genommen wird. Ebenso ist zu bemerken, daß sich die Längen R, S und B auf den Schwerpunct des Profiles der äußern Rippen beziehen, und daß die Flächen a und a' die Theile nicht mit in sich begreifen, welche der ebenen Scheibe des Balanciers angehören. Wenn diese Flächen nicht constant wären, wie dieses der Einfachheit der Construction wegen gewöhnlich der Fall ist, sondern von dem Ende der Arme gegen die Rotationsaxe nach der parabolischen Form zunehmen, welche die Theorie für die festen Körper gleiches Widerstandes angibt; so ließe sich das Trägheitsmoment des Balanciers auf eine eben so leichte Weise berechnen, wenn man seine Masse in verschiedene hohle oder massive Prismen zerlegte, welche sämmtlich parabolische Segmente von derselben Axe und von demselben Scheitel zu ihren Grundflächen haben.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der passiven Widerstände in den Maschinentheilen, welche eine constante Bewegung haben und auf welche fast unveränderliche Wirkungen ausgeübt werden.

Zerlegung der zusammengesetzten Maschinen in einfache.

Vorläufige Betrachtungen.

§. 181. Als wir von der Einrichtung der Maschinen im Allgemeinen redeten (§. 44), haben wir zugleich einen kurzen Begriff von der Art und Weise gegeben, wie man bei der Berechnung der bewegenden Kraft verfährt, welche alle Widerstände zusammengenommen überwinden soll, und zwar besteht dieses Verfahren darin, jeden besondern und beweglichen Maschinentheil als eine einfache Maschine zu betrachten, auf welche selbst eine Kraft und Widerstände wirken, die einander jeden Augenblick das Gleichgewicht halten oder deren Summe der momentanen Quantitäten Arbeit beständig gleich Null ist (§. 15). Da die bewegende Kraft und der Nutzwiderstand, welche an jedem dieser Maschinentheile angebracht sind, in der That nichts anders sind, als die Reactionskräfte, welche derselbe von Seiten des Maschinentheiles erfährt, welcher auf der Seite des Bewegers unmittelbar vor dem betrachteten Maschinentheile vorhergeht, oder auf der Seite des Operators unmittelbar darauf folgt; so ist leicht einzusehen, wie man vermittelst der gewöhnlichen Regeln der Statik, wenn man von einem der äußersten Maschinentheile ausgeht, nach und nach die verschiedenen, auf den betrachteten Maschinentheil in einem gegebenen Augenblicke wirkenden passiven oder activen Kräfte als Function der bewegenden Kraft des Receptors oder des Nutzwiderstandes des Operators berechnen und folglich auch für jede dieser Kräfte die positive oder negative Quantität Arbeit (§. 19) bestimmen kann, welche sie der Maschine in jedem Zeitelemente oder zwischen zwei beliebigen gegebenen Lagen ertheilt (§. 8 u. folg.).

Specieller Gegenstand dieses Abschnittes.

§. 182. Diese Rechnungen bieten im Allgemeinen sehr große Schwierigkeiten dar, so oft sich die Geschwindigkeiten und die Kräfte in Beziehung auf ihre Intensität und Richtung für die verschiedenen Lagen der zu betrachtenden einfachen Maschinen nach beliebigen Gesetzen ändern, was namentlich bei den Maschinentheilen der Fall ist, welche eine mehr oder weniger complicirte und excentrische Oscillationsbewegung haben (§§. 22, 26 und 36). Wir haben aber im Vorhergehenden (§§. 34—44) gesehen, daß in den meisten bei den Maschinen vorkommenden Fällen die virtuellen oder geometrischen Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte und die der activen sowohl, als der passiven Kräfte, sowie die Intensitäten und die augenblicklichen oder totalen Quantitäten Arbeit derselben nahezu constante Verhältnisse behalten, so daß man zwischen diesen Kräften und diesen Quantitäten Arbeit Relationen aufstellen kann, welche von der Lage des Systemes unabhängig sind und sofort die Mittel an die Hand geben, die Werthe der unbekannten Größen nach denen aller übrigen zu berechnen. In dem gegenwärtigen Abschnitte werden wir uns vorzugsweise mit den Maschinen oder Maschinenelementen beschäftigen, bei welchen die vorhin erwähnten Umstände stattfinden und in Beziehung auf den Fall, wo die virtuellen und wirklichen Geschwindigkeiten, die Richtung und Intensität der Kräfte sich nach mehr oder weniger complicirten Gesetzen ändern können, verweisen wir auf den folgenden Abschnitt.

Beschaffenheit der einfachen Maschinen, welche in diesem Abschnitte betrachtet werden, und Voraussetzungen, unter welchen man sie berechnen kann.

§. 183. Die Rollen, die verschiedenen Arten Winden oder Haspel, die geneigte Ebene, die Schraube u. s. w., welche die sogenannten einfachen Maschinen bilden, gehören offenbar zu der Klasse von mechanischen Organen, womit wir uns hier zu beschäftigen haben, und welche man dadurch definiren könnte, indem man sagte: daß die gleichförmige Bewegung darin unter der Wirkung der betrachteten Kräfte in aller Strenge möglich ist. In der Voraussetzung einer solchen gleichförmigen Bewegung oder selbst der absoluten oder statischen Ruhe betrachtet man gewöhnlich die Theorie der einfachen Maschinen in den Lehrbüchern der Mechanik, indem man von den Trägheitskräften, welche auf ihre verschiedenen materiellen Bestandtheile wirken können, ganz abstrahirt, und in dieser Voraussetzung wollen wir sie zunächst hier auch zu berechnen suchen; jedoch darf man bei den Anwendungen nicht vergessen, daß die Trägheitskräfte, und namentlich die Centrifugalkräfte, in gewissen Fällen einen merklichen Einfluß haben, wenn sich die Druck- und Spannkräfte ändern (§. 14), woraus im Allgemeinen passive Widerstände in den Maschinen entstehen.

Obgleich wir in Beziehung auf alles das, was den Einfluß der Trägheit und die Veränderlichkeit der Wirkung der Kräfte betrifft, auf die folgenden Abschnitte verweisen müssen, so wollen wir zur Erleichterung der Anwendungen doch schon hier bemerken, daß dieser Einfluß in den folgenden Fällen ganz unberücksichtigt bleiben kann: 1) Wenn die Bewegung langsam vor sich geht, wie dieses z. B. bei den Maschinen der Fall ist, welche zum Heben oder Fortziehen sehr großer Lasten angewandt werden. 2) Wenn die Bewegung zwar sehr schnell ist, aber nur unmerkliche Veränderungen erfährt und die Massen der materiellen Bestandtheile um die Rotationsaxen gleichförmig vertheilt sind, was auch bei sehr vielen technischen Maschinen der Fall ist (§. 29, 34 und 44). 3) Wenn endlich die an jedem einfachen Maschinentheile angebrachten Widerstände und Kräfte nahezu von constanter Wirkung oder so beschaffen sind, daß man in den Rechnungen für ihre veränderlichen Wirkungen die Wirkungen der sogenannten **mittlern** Kräfte von constanter Intensität substituiren kann (§. 9).

Allgemeine Begriffe über die Art und Weise, wie man bei der Berechnung der passiven Widerstände und der ihnen entsprechenden Quantitäten Arbeit verfährt.

§. 184. Um nun einzusehn, wie im Allgemeinen die passiven oder schädlichen Widerstände für die Maschinentheile berechnet werden können, auf welche constante Wirkungen ausgeübt werden und welche eine gleichförmige Bewegung haben, muß man bemerken, daß die ganze Schwierigkeit darauf hinausläuft: für eine gegebene Lage des Systemes die Druck- oder Zugkräfte zu bestimmen, welche diese Widerstände direct hervorrufen, und vermittelst welcher man sie nach Daten der Erfahrung direct abschätzen kann (§. 17 und §. 18). Die allgemeine Methode besteht bekanntlich darin, daß man das System als völlig frei betrachtet und die in Rede stehenden Kräfte, sowie die daraus entspringenden Widerstände als unbestimmte Größen unter die übrigen Kräfte des Systemes aufnimmt. Allein diese allgemeine Methode führt oft auf sehr complicirte Rechnungen, und es kann alsdann vortheilhaft sein, in jedem besondern Falle andere directere Methoden anzuwenden, wie man in der **Theorie der einfachen Maschinen** von **Coulomb** sehn kann.

Will man sich z. B. mit einer ersten Annäherung begnügen, so kann man die in Rede stehenden Wirkungen in der Voraussetzung berechnen, daß kein passiver Widerstand vorhanden ist, was sich oft durch die gewöhnlichen Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte bewerkstelligen läßt, wenn man annimmt, daß der Werth der Kraft P, welche dem activen Widerstande Q das Gleichgewicht hält und welches außer den Gewichten der Maschinentheile nach der Voraussetzung die allein auf die Maschine wirkenden Kräfte sind, zum Voraus bestimmt ist. Auf diese Weise erhält man also einen genäherten, aber etwas zu kleinen Werth der Kräfte, welche die passiven Widerstände selbst hervorrufen, und wenn man diese letztern resp. durch die Wegelemente multiplicirt, welche ihre Angriffspunkte während einer gegebenen Zeit in ihrer als unveränderlich vorausgesetzten Richtung durchlaufen, indem ihre Intensität ebenfalls als constant vorausgesetzt wird, und bildet endlich die Summe aller ähnlichen Producte; so erhält man einen ersten Näherungswerth für die von den passiven Widerständen in dem betrachteten Zeitintervalle absorbirte Quantität Arbeit. Addirt man alsdann diese Summe zu der Quantität Arbeit, welche der als bekannt vorausgesetzte active Widerstand Q in derselben Zeit hervorbringt; so erhält man die Quantität Arbeit, welche die Kraft P muß hervorbringen können. Was den der Größe und Richtung nach als constant betrachteten Werth der Kraft P selbst anlangt, so erhält man denselben, wenn man entweder das gefundene Resultat durch den von ihrem Angriffspunkte in dem betrachteten Zeitraume und in ihrer Richtung durchlaufenen Weg dividirt oder, was allgemeiner ist, wenn man direct die Kraft bestimmt, welche dem activen Widerstande Q und den schon berechneten passiven Widerständen zusammengenommen das Gleichgewicht hält. Wenn diese erste Annäherung lehrte, daß die passiven Widerstände einen beträchtlichen Einfluß ausüben, so müßte man die Rechnungen wiederholen, indem man den neuen Werth von P für den frühern substituirt. Aber da die passiven Widerstände im Allgemeinen sehr gering sind, so erhält man oft schon durch die erste Operation eine für die Bedürfnisse der Praxis hinreichende Genauigkeit.

Betrachtungen über den Fall, worin sich die Wirkung der Kräfte mit der Lage des Systemes ändert.

§. 185. Hieraus sieht man, daß man, wenn die Kraft und die verschiedenen Widerstände, statt constant zu sein, wie wir eben vorausgesetzt haben, sich mit den verschiedenen Lagen des Systemes merklich ändern könnten, genöthigt wäre, ihren Werth und den ihrer augenblicklichen Leistung für jede dieser Lagen zu berechnen, um daraus alsdann die Gesammtquantitäten Arbeit ableiten zu können, welche sie zwischen zwei gegebenen Augenblicken hervorbringen, wozu also die Hilfe der Integralrechnung oder der in §. 9 erwähnten Näherungsmethoden, welche den besondern Vortheil gewähren, daß man das Gesetz oder den analytischen Ausdruck jeder Kraft nicht als Function des von ihrem Angriffspunkte beschriebenen Weges zu kennen braucht, erfordert wird. In vielen Fällen werden aber diese Schwierigkeiten vermieden, wenn man für die veränderlichen Widerstände ihre ein für allemal berechneten mittlern Werthe substituirt (§. 9), wie wir in dem folgenden Abschnitte, welcher der speciellen Untersuchung der Systeme gewidmet ist, worin die Bewegungen und Wirkungen veränderlich sind, an einzelnen Beispielen sehen werden.

Wir glauben, daß es nach diesen Entwickelungen durchaus keine Schwierigkeiten haben wird, den Zweck der folgenden Anwendungen einzusehn, und daß man vollkommen im Stande sein wird, die Resultate derselben zu benutzen, wenn es darauf ankommt, in jedem besondern Falle die Quantitäten Nutzleistung zu berechnen, welche dem Operator einer Maschine durch eine gegebene bewegende Kraft, die erforderlich ist, um einen bestimmten Nutzeffect hervorzubringen und auf den Receptor wirken muß, zu ertheilen ist. Uebrigens ist zu bemerken, daß die einzigen passiven Widerstände, womit wir uns hier beschäftigen wollen, die verschiedenen Arten der Reibung, die Adhäsion und die Steifigkeit der Seile sind, weil der Widerstand des Mittels unberücksichtigt bleiben kann, wenn dieses Mittel die Luft ist, und die Widerstandsflächen, sowie die Geschwindigkeiten nicht sehr beträchtlich sind, was bei fast allen technischen Anwendungen der Fall ist.

Von dem directen Widerstande der Reibung und der Adhäsion der einander berührenden Körper.

Resultate der von den ältern Physikern angestellten Versuche.

§. 186. Wenn man die Oberflächen zweier Körper ohne Rollen übereinander hingleiten läßt, so entsteht in den verschiedenen Berührungspunkten nach der Richtung des von diesen Punkten beschriebenen Weges ein Widerstand, dessen Intensität zugleich von dem gegenseitigen Drucke der Körper und von der Beschaffenheit und dem Zustande ihrer Oberflächen abhängt.

Die Physiker haben seit langer Zeit den Einfluß dieses Widerstandes erkannt und sich mit der Bestimmung der Gesetze und der Intensität desselben beschäftigt. Amontons *) scheint der erste gewesen zu sein, welcher die Reibung und die Steifigkeit der Seile in den Maschinen zu bestimmen gesucht hat, und Coulomb sagt, daß derselbe durch seine Versuche gefunden habe, daß die Größe der Berührungsflächen durchaus keinen Einfluß auf die Reibung habe, deren Intensität vielmehr einzig und allein von dem Drucke der Berührungsflächen aufeinander abhänge. Er schloß hieraus, daß die Reibung in allen Fällen diesem Drucke proportional sei und in dem Verhältnisse 1 : 2 zu demselben stehe. Nach Amontons schloß Muschembroek **) aus seinen eigenen Versuchen, daß die Reibung nicht genau dem Drucke proportional sei, und sowohl von der Größe der Berührungsflächen, als von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängig sei.

Resultate der Coulomb'schen Versuche.

§. 187. Die ausgedehntesten Untersuchungen, welche bis auf die neueste Zeit über diesen Gegenstand angestellt sind, rühren von Coulomb her ***). Dieser ausgezeichnete Physiker unterscheidet den Widerstand, welcher sich bei dem Uebereinanderhingleiten zweier Körper zeigt, wenn sie schon einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind, von dem Widerstande, welcher stattfindet, wenn sie sich über einander hinbewegen. Er fand, daß der erste Widerstand oft weit beträchtlicher ist, als der zweite, jedoch jeder dem Drucke proportional; aber er glaubte auch gefunden zu haben, daß dieser Widerstand von der Größe der Berührungsfläche abhängig sei, so daß nach seiner Meinung der Werth dieses Widerstandes aus einem Theile bestehen sollte, welcher für dieselben Körper in einem gegebenen Zustande dem Drucke proportional sei, und aus einem andern Theile, welcher der Größe der Berührungsfläche proportional sei und von der Adhäsion herrühren sollte, welche die Körper bei der gegenseitigen Annäherung ihrer Oberflächen zeigen.

Endlich glaubte Coulomb durch Beobachtung der Zeit, welche die Körper bei dem Versuche zum Durchlaufen der beiden Hälften eines

---

*) Mémoire de l'Académie des sciences, pour 1699.

**) Cours de physique expérimentale, par P. Muschembroek, tom. I., pag. 202 et suivantes.

***) Mémoires de mathématiques et de physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savans, tom. X., pag. 163 et suivantes.

Weges von 4 Fuß Länge gebrauchten, gefunden zu haben, daß die durch eine constante Kraft hervorgebrachte Bewegung eine gleichförmig beschleunigte sei, so daß die Reibung von der Geschwindigkeit unabhängig wäre. Aber wegen der geringen Genauigkeit seiner Beobachtungsmittel konnte Coulomb dieses Gesetz nicht auf eine entscheidende Weise darthun und fügte für viele Fälle, namentlich für die übereinander hingleitenden Metalle oder Hölzer mit und ohne Schmiere, besondere Beschränkungen dieses Gesetzes an.

Der englische Physiker Rennie hat im Jahre 1829 Versuche bekannt gemacht *), welche sich speciell auf den Fall beziehen, wo sich die Berührungsflächen gegenseitig abnutzen, was gewöhnlich von dem Mangel an Schmiere oder einem zu starken Drucke herrührt; aber leider waren seine Apparate nicht vollkommen genug, um genaue Resultate und bestimmte Gesetze liefern zu können.

Resultate der neuen Versuche, welche Morin in den Jahren 1831 — 1834 angestellt hat.

§. 188. In den letzten Jahren hat der Artilleriecapitain Morin die Coulomb'schen Versuche wiederholt und auf die meisten der bei den Constructionen der Maschinen vorkommenden Körper und Schmieren ausgedehnt, indem derselbe Apparate angewandt hat, vermittelst welcher man in jedem Augenblicke der Bewegung die zum Hervorbringen derselben ausgeübte Kraft und das geometrische Gesetz derselben erhalten kann. Diese Instrumente sind in vier Abhandlungen beschrieben, welche Morin der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt hat und wovon die drei ersten in dem 5. und 6. Bande der Mémoires des savans étrangers gedruckt sind. Auf diese Abhandlungen beziehen wir uns hinsichtlich der Art der bei diesen Versuchen angewandten Beobachtungen und Rechnungen, und wir wollen hier bloß die Gesetze und die Hauptfacta, welche sich daraus ergeben, erörtern.

Aus diesen über die Reibung der Metalle, der Hölzer und der Steine mit oder ohne Schmiere bei ebenen Flächen und Zapfen angestellten Versuchen ergibt sich:

1) daß die Reibung zu dem Drucke in einem constanten Verhältnisse steht, welches bloß von der Beschaffenheit der einander berührenden Körper und der Schmiere abhängt;
2) daß die Reibung von der Größe der Berührungsfläche unabhängig ist, und
3) daß sie ebenfalls von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig ist.

Es ist ferner, wie Coulomb dargethan hatte, wahr, daß für viele Körper, und namentlich für die Hölzer, die Reibung größer ist, wenn ihre Oberflächen schon einige Zeit in Berührung gewesen sind, als wenn die Bewegung bereits begonnen hat; aber aus vielen Beobachtungen folgt auch, daß dieser Unterschied durch eine geringe Erschütterung der Oberfläche des einen der beiden Körper verschwinden gemacht

*) Philosophical Transactions für 1829.

und die Trennung durch eine Zugkraft bewirkt werden kann, welche bloß fähig ist, die einmal hervorgebrachte Bewegung zu unterhalten. Diese wichtige Bemerkung muß auf die Constructionen anwendbar sein, worin die Reibung vermöge ihres Widerstandes die Stabilität der verschiedenen Theile mitbewirkt und wobei Erschütterungen zu befürchten sind, so daß man also in diesem Falle die Reibung so berechnen muß, als wenn die Bewegung bereits begonnen hätte, ohne daß man auf die Dauer der Berührung Rücksicht nimmt.

Die Resultate aller von Morin angestellten Versuche sind in den drei folgenden Tafeln enthalten, wovon sich die 1. auf die Reibung ebener Flächen im Augenblicke des Beginnens der Bewegung und wenn sie einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind, die 2. auf die Reibung sich übereinander hinbewegender ebener Flächen und die 3. auf die Reibung der sich in ihren Lagern bewegenden Zapfen bezieht.

§. 189. **Reibung der ebenen Flächen im Augenblicke des Beginnens der Bewegung und wenn sie einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind.**

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungs-coefficient.
Eiche auf Eiche	parallel	ohne Schmiere	0,62
	″	mit trockener Seife	0,44
	rechtwinklig	ohne Schmiere	0,54
	″	mit Wasser befeuchtet ...	0,71
	Hirn auf platt liegendem ..	ohne Schmiere	0,43
Eiche auf Ulme	parallel	″	0,38
Ulme auf Eiche	″	″	0,69
	″	mit trockener Seife	0,41
	rechtwinklig	ohne Schmiere	0,57
Esche, Tanne, Buche, Vogelbeer auf Eiche .	parallel	″	0,53
Gegerbtes Leder auf Eiche	das Lederplatt liegend	″	0,61
	das Leder auf der Kante ..	″	0,43
		mit Wasser befeuchtet ...	0,79
Schwarze lederne Riemen auf ebener Eichenfläche auf einer eichenen Trommel	parallel	ohne Schmiere	0,74
	rechtwinklig	″	0,47
Ungesponnener Hanf auf Eiche	parallel	″	0,50
Hanfseil auf Eiche	″	mit Wasser	0,87
	″	ohne Schmiere	0,80

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient.
Eisen auf Eiche	parallel	ohne Schmiere	0,62
	"	mit Wasser	0,65
Gußeisen auf Eiche	parallel	mit Wasser	0,65
Gelbguß auf Eiche	"	ohne Schmiere	0,62
Rindsleder bei Kolben auf Gußeisen	platt oder auf der Kante	mit Wasser	0,62
		mit Oel, Seife oder Schweinefett	0,12
Lederne Riemen auf gußeisernen Rollen	platt liegend	ohne Schmiere	0,28
		mit Wasser	0,38
Gußeisen auf Gußeisen	"	ohne Schmiere	0,16 [1]
Schmiedeisen auf Gußeisen	"	"	0,19
Eiche, Ulme, Weißbuche, Eisen, Gußeisen und Bronze, zwei und zwei eines auf dem andern	"	mit Talg	0,10 [2]
		mit Oel oder Schweinefett	0,15 [3]
Rogenstein auf Rogenstein	"	ohne Schmiere	0,74
Muschelkalk auf Rogenstein	"	"	0,75
Backstein auf Rogenstein	"	"	0,67
Eichen auf Rogenstein	auf dem Hirn	"	0,63
Schmiedeisen auf Rogenstein	"	"	0,49
Muschelkalk auf Muschelkalk	"	"	0,70
Rogenstein auf Muschelkalk	"	"	0,75
Backstein auf Muschelkalk	"	"	0,67
Schmiedeisen auf Muschelkalk	"	"	0,42
Eiche auf Muschelkalk	"	"	0,64
Rogenstein auf Rogenstein	"	mit Mörtel aus drei Theilen feinem Sand und einem Theil hydraulischem Kalk	0,74 [4]

1. Die Oberflächen wenig fett. — 2. Die Berührung dauerte nicht lange genug, um die Schmiere hinauszudrücken. — 3. Die Berührung dauerte lange genug, die Schmiere wegzudrücken und einen nur wenig fettigen Zustand herbeizuführen. — 4. Nach einer Berührung von 10′ bis 15′.

§. 190. Reibung ebener Flächen, welche sich über einander hinbewegen.

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient.
Eiche auf Eiche	parallel	ohne Schmiere	0,48
	"	mit trockener Seife	0,16
	rechtwinklig	ohne Schmiere	0,34
	"	mit Wasser	0,25
	Hirnholz auf den Fasern	ohne Schmiere	0,19
Ulme auf Eiche......	parallel	"	0,43
	rechtwinklig	"	0,45
	parallel	"	0,25
Esche, Tanne, Buche, wilder Birnbaum und Vogelbeer auf Eiche ..	"	"	0,36—0,40
Schmiedeisen auf Eiche ..	"	"	0,62
		mit Wasser	0,26
		mit trockener Seife	0,21
Gußeisen auf Eiche ...	"	ohne Schmiere	0,49
		mit Wasser	0,22
		mit trockener Seife	0,19
Gelbguß auf Eiche	"	ohne Schmiere	0,62
Schmiedeisen auf Ulme .	"	"	0,25
Gußeisen auf Ulme....	"	"	0,20
Lederne Riemen auf Eiche	"	"	0,27
Gegerbtes Leder auf Eiche	platt oder auf der Kante..	"	0,30—0,35
		mit Wasser	0,29
Gegerbtes Leder auf Gußeisen oder Bronze ...	platt oder auf der Kante..	ohne Schmiere	0,56
		mit Wasser	0,36
		fett und mit Wasser	0,23
		mit Oel geschmiert	0,15
Ungesponnener Hanf oder Hanfseile	parallel	ohne Schmiere	0,52
	rechtwinklig	naß	0,33
Eiche und Ulme auf Gußeisen	parallel	ohne Schmiere	0,38
Wilder Birnbaum auf Gußeisen	"	"	0,44
Schmiedeisen auf Schmiedeisen	"	"	0,44 [1]
Schmiedeisen auf Gußeisen und Bronze	"	"	0,18 [2]

1. Die Oberflächen greifen sich ohne Schmiere an. — 2. Die Oberflächen waren noch wenig fett.

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungs-coefficient.
Gußeisen auf Gußeißen und Bronze	parallel	ohne Schmiere	0,15 [1]
Bronze auf Bronze . . .	"	"	0,20
Bronze auf Gußeisen . .	"	"	0,22
Bronze auf Schmiedeisen	"	"	0,16 [1]
Eiche, Ulme, Weißbuche, wilder Birnbaum, Gußeisen, Schmiedeisen, Stahl und Bronze eines auf dem andern oder sich selbst	"	auf gewöhnliche Art geschmiert mit Talg, Schweinefett, Oel, Wagenschmiere rc. . .	0,07–0,08 [1]
		nur wenig fettes Anfühlen	0,15
Rogenstein auf Rogenstein	"	ohne Schmiere	0,64
Muschelkalk " "	"	"	0,67
Backstein " "	"	"	0,65
Eiche " "	auf dem Hirn	"	0,38
Schmiedeisen " "	parallel	"	0,38
Muschelkalk auf Muschelkalk	"	"	0,69
Rogenstein " "	"	"	0,65
Backstein " "	"	"	0,60
Eiche " "	auf dem Hirn	"	0,38
Schmiedeisen " "	parallel	"	0,24
	"	naß	0,30

§. 191. Reibung der Zapfen, welche sich in Lagern bewegen.

Angabe der Oberflächen.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird: auf gewöhnliche Art.	ununterbrochen.
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07—0,08	0,054
	mit denselben Schmieren, naß	0,08	"
	mit Asphalt	0,054	"
	fettig	0,14	"
	fettig und naß	0,14	"

1. Ist die Schmiere fortwährend erneuert und gleichförmig vertheilt, so kann dieses Verhältniß bis zu 0,05 herabsinken.

Angabe der Oberflächen.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird: auf gewöhnliche Art.	ununterbrochen.
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07—0,08	0,054
	fettig	0,16	"
	fettig und naß	0,16	"
	sehr wenig fettig	0,19	"
	ohne Schmiere	0,18	"
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Franzosenholz . . .	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	"	0,090
	fettig von Oel oder Schweinefett	0,10	"
	fettig von Schweinefett und Graphit	0,14	"
Zapfen von Schmiedeisen auf gußeisernen Lagern	geschmiert mit Olivenöl, Talg, Schweinefett oder Schweinefett und Graphit	0,07—0,08	0,054
Zapfen von Schmiedeisen auf Lagern von Bronze . . .	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett od. Talg	0,07—0,08	0,054
	geschmiert mit fester Wagenschmiere	0,09	"
	fett und naß	0,19	"
	sehr wenig fett	0,25	"
Schmiedeiserne Zapfen auf Lagern von Franzosenholz . . .	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	0,11	"
	fett	0,19	"
Zapfen von Bronze auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Oel . . .	0,10	"
	geschmiert mit Schweinefett	0,09	"
Zapfen von Bronze auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Oel oder Talg	"	0,045 bis 0,052
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Gußeisen . . .	geschmiert mit Schweinefett	0,12	"
	fett	0,15	"
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Franzosenholz .	geschmiert mit Schweinefett	"	0,07

Summarische Resultate aus den vorhergehenden Tafeln.

§. 192. Aus der Vergleichung dieser verschiedenen Tafeln ergibt sich die leicht im Gedächtnisse zu behaltende und bei fast allen gewöhnlichen technischen Maschinen anwendbare Folgerung: daß das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke bei ebenen Flächen und Zapfen von Holz, Eisen, Bronze, mit Oel, Talg oder Schweinefett geschmiert, fast constant und gleich:

0,07 oder 0,08

ist und daß der mittlere Werth dieses Verhältnisses gleich

0,15

ist, wenn diese Oberflächen bloß fettig sind.

Endlich geht aus diesen Tafeln der Nutzen der Apparate hervor, welche zur fortwährenden Erneuerung und Ausbreitung der Schmiere auf den reibenden Flächen bestimmt sind, weil mit Hilfe derselben das Verhältniß der Reibung bei denselben Schmieren, wie oben, bis auf:

0,05

herabgebracht wird.

Vermittelst dieser Resultate läßt sich in jedem Falle leicht die Intensität der Reibungen bestimmen, wenn man den auf die Berührungsflächen wirkenden Druck kennt.

Was die Reibung anlangt, welche bei dem Uebereinanderhinrollen der Körper stattfindet und die Reibung der zweiten Art (rollende Reibung) genannt wird, so kann sie bekanntlich gegen die der erstern Art gewöhnlich vernachlässigt werden, und man abstrahirt davon sogar bei allen Rechnungen in Beziehung auf die festen oder starren Körper, welche bei dem Baue der Maschinen angewandt werden; aber da sie unter gewissen Umständen eine wesentliche Rolle spielen kann, so wird es nicht überflüssig sein, hier die kleine Anzahl der sich darauf beziehenden Erfahrungsdata anzuführen.

Widerstand, welcher bei dem Uebereinanderhinrollen der Körper entsteht.

Begriffe und Erfahrungsresultate über die rollende Reibung.

§. 193. Es sei C (Fig. 54) eine cylindrische Rolle, welche auf einer horizontalen Ebene AB liegt, und worauf ein verticaler Druck P wirkt, der sowohl von dem eigenen Gewichte der Rolle, als von irgend einer äußer Kraft herrührt; so werden die Rolle und die Ebene wegen ihrer Zusammendrückbarkeit unter der Wirkung dieser Druckkraft gewissermaßen in einander eingreifen, und wenn man sich eine horizontale Kraft F denkt, welche in tangentialer Richtung an dem obern Theile T des Umfanges der Rolle angebracht ist; so muß diese Kraft den Widerstand überwinden, welcher von den Unebenheiten in ab auf der Seite, wo die rollende Bewegung auf der Ebene AB stattfindet und dessen Wirkung darin besteht, die Rolle in normaler Richtung auf der Berührungsfläche ab, d. h. nach den durch den Mittelpunkt C gehenden Richtungen zurückzutreiben. Da ferner die augenblickliche Drehung der

Rolle um den Berührungspunkt a stattfindet, so sieht man leicht ein, wie sich zwischen der Kraft F und den verschiedenen in Rede stehenden Repulsionskräften mit Rücksicht auf ihre resp. Hebelarme in Beziehung auf diesen Punkt jeden Augenblick das Gleichgewicht herstellt.

Wir besitzen sehr wenige Versuche über die rollende Reibung, welche hauptsächlich von Coulomb herrühren, die derselbe bei Gelegenheit seiner schönen Untersuchungen über die Steifigkeit der Seile, deren Resultate weiter unten mitgetheilt werden, angestellt hat. Coulomb ließ nämlich auf einer eichenen ebenen Platte Cylinder von Pockholz von 2 und 6 Zoll im Durchmesser unter Druckkräften von 100 bis 1000 Pfund fortrollen und fand so: daß der Werth der Kraft F nahezu dem Drucke P direct und dem Durchmesser der Rollen umgekehrt proportional war, so daß man hat:

$$F = A\frac{P}{D},$$

wo D diesen Durchmesser und A einen constanten Coefficienten bezeichnet, welcher nur mit der Natur der sich berührenden Substanzen veränderlich ist.

Was den Werth dieser Constante anlangt, so hat sie Coulomb für den Cylinder von Pockholz $= 0{,}036$ und für den von Ulmenholz $= 0{,}06$ gefunden, indem die Druckkraft P in Pfunden und der Durchmesser der Rollen in Zollen ausgedrückt ist. Wenn also P in Kilogrammen und D in Metern ausgedrückt wird, so hat man für die Rolle von Pockholz:

$$F = 0{,}00097\frac{P}{D}\text{ Kilogr.}$$

und für die von Ulmenholz:

$$F = 0{,}00162\frac{P}{D}\text{ Kilogr.}$$

Diese Formeln geben für F nur etwas große Werthe, wenn der Durchmesser der Rolle sehr klein ist, und wenn man z. B. in der letzten Formel $D = 0{,}^m02$ setzt; so gibt sie $F = 0{,}0081\,P$. Aber da nach der zweiten der vorhergehenden Tafeln die Reibung $= 0{,}44\,P$ wäre, wenn Ulmenholz auf Eichenholz fortgleitet, d. h. bloß 5mal so groß ist, als die rollende Reibung; so sieht man, daß es in gewissen Fällen nöthig sein wird, die rollende Reibung in Betracht zu ziehen.

Begriff und Maaßstab des absoluten Widerstandes der rollenden Reibung.

§. 194. Man sieht leicht ein, daß die obigen Formeln nicht den absoluten Werth dieser Reibung, sondern bloß ihren Werth in Beziehung auf den Hebelarm der Kraft F für den Berührungspunkt a der Rolle und der Ebene AB geben, wo dieser Hebelarm ein beliebiger sein kann. Wenn man annimmt, daß diese Kraft in tangentialer Richtung an dem Umfange eines zu dem gegebenen concentrischen Cylinders wirkt, welcher selbst einen beliebigen Durchmesser hat; so wirkt der Widerstand im Berührungspunkte a nach entgegengesetzter Richtung von der des von diesem Punkte längs der Ebene AB beschriebenen Weges, so daß, da seine virtuelle Geschwindigkeit nur die Hälfte von der von F beträgt, seine Intensität auch als doppelt so groß, wie die angenommen werden muß, welche die in Rede stehenden Formeln geben.

Um diese Umstände in ihr volles Licht zu setzen, braucht man nur zu bemerken, daß die an dem Umfange der Rolle in tangentialer Richtung angebrachte Kraft F (Fig. 55) einen Weg beschreibt, welcher zugleich aus dem von den Berührungspunkten T_1a beschriebenen Wege $TT' = aa'$ und aus dem Bogen $TT' = aa'$ zusammengesetzt ist, welcher sich in diesen Punkten gewissermaßen abgewickelt hat und dem in Rede stehenden Wege gleich ist. Dieses ist vollkommen einleuchtend, wenn man annimmt, daß die Kraft F an einem sehr dünnen und auf den Cylinder von F gegen T' gewickelten Faden wirkt. Wenn man also den absoluten Werth der in a wirkenden Tangentialkraft, welche das Fortgleiten der Rolle verhindert, mit f, das Wegelement, welches ihr Angriffspunkt in der Richtung von AB gleichförmig beschreibt, mit de bezeichnet; so wird ihre augenblickliche Quantität Arbeit durch fde und die von F durch $F.2de$ ausgedrückt, so daß man hat:

$$fde = 2Fde, \text{ oder } f = 2F = 2\frac{P}{D}.$$

Dieses ist also der absolute Werth, welchen man dem Widerstande beilegen muß, abgesehen von dem Punkte, woran die Kraft F angebracht ist, welche denselben in der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung überwinden muß. Wenn die Kraft F z. B. in tangentialer Richtung an dem Punkte T wirkt, so hat man $F = {}^1/_2 f$, und wenn sie in tangentialer Richtung an dem Umfange eines concentrischen Cylinders des gegebenen und von dem Durchmesser d wirkt; so hat man, wenn man bemerkt, daß das von ihrem Angriffspunkte beschriebene Wegelemeut zu dem von f in dem Verhältnisse $d + D$ zu D steht:

$$F = f\frac{D}{D+d} = \frac{2AP}{D+d},$$

und dieser Werth verwandelt sich für $d = 0$, oder wenn die Kraft direct in C wirkt, in:

$$F = \frac{2AP}{D} = f,$$

was a priori einleuchtend ist.

Wenn endlich die Kraft F beständig an einem und demselben Punkte, aber in einer sonst ganz willkürlichen Richtung, statt in tangentialer Richtung an einem zu der Rolle concentrischen Kreisumfange in veränderlichen Punkten desselben, wirkte; so wäre ihr Ausdruck von dem eben angegebenen sehr verschieden und einzig und allein von dem Verhältnisse der virtuellen Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes zu der des Angriffspunktes a von f abhängig.

Was den Fall betrifft, wo die Rolle eine beliebige cylindrische und von der Kreisform verschiedene Form hat, so ist klar, daß die rollende Reibung noch durch die Formel:

$$f = 2A\frac{P}{D}$$

ausgedrückt wird, wofern man für P den Normaldruck nimmt, welcher aus allen auf die Rolle in der betrachteten Lage in einem gewissen Augenblicke wirkenden Kräften entspringt, und wenn D den Durchmesser des Krümmungskreises für den dieser Lage der Rolle entsprechenden Berührungspunkt bezeichnet. Offenbar fände man den Ausdruck für die rollende Reibung bei converen Oberflächen von einer beliebigen stetigen Form auf ähnliche Weise; allein wir können uns bei diesen rein theoretischen Betrachtungen, welche bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Erfahrungskenntnisse ohne allen reellen Nutzen sind, nicht länger aufhalten.

Anwendung der Rollen oder Walzen zum leichtern Transport großer Lasten.

§. 195. **Regnier** hat mit seinem Dynamometer einen Versuch über die Anwendung der kreisrunden Rollen zur Fortschaffung von Lasten auf einer horizontalen Straße angestellt *). Indem er zuerst auf dieser Straße einen mit einem Gewichte von 240 Kilogr. belasteten hölzernen Kasten unmittelbar fortziehn ließ, fand er, daß die in der Richtung des beschriebenen Weges hierzu erforderliche Kraft 140 Kilogr. betrug, und als er denselben Kasten auf Rollen von 0,^{m}086 im Durchmesser stellte, fand er, daß zur Fortbewegung derselben Last nur noch eine Kraft von 25 Kilogr. oder von ungefähr $^1/_6$ der vorhergehenden Kraft erforderlich war; aber da zugleich unter dem Kasten und auf dem Pflaster eine rollende Reibung stattfand, so läßt sich nicht entscheiden, wie groß der Werth jeder einzelnen dieser beiden Reibungen war.

Diese Versuche können also bloß dazu dienen, den Vortheil darzuthun, welchen die Anwendung der Rollen bei dem Transporte großer Lasten gewähren kann und welchen man auch erhalten muß, wenn man statt der Rollen Kugeln, z. B. von Gußeisen, anwendet, wie dieses zu Petersburg bei dem Transporte der enormen Granitsäule geschehen ist, welche den Fuß der Statue Peters des Großen bildet **).

Bemerkungen über die Art und Weise, wie man den Widerstand bei diesem Transporte bestimmen kann.

§. 196. Wenn eine Last auf diese Weise auf Rollen transportirt wird, so durchläuft sie nothwendig einen doppelt so langen Weg, als der ist, welchen der Mittelpunkt der Rolle beschreibt (§. 194), wobei man die Rollen häufig von dem hintern Ende des Gestelles, worauf die Last ruht, nach dem vordern Ende bringen muß. Diese Operation verursacht nothwendig einen gewissen Verlust an Zeit und Arbeit, welcher bei dem Transporte durch Fuhrwerk, wo die Kraft unmittelbar an der Are jedes Rades angebracht ist, nicht stattfindet; aber es tritt alsdann an die Stelle dieses Verlustes der von der Arenreibung herrührende Verlust, welchen wir bald werden berechnen lernen. Was die Bestimmung des Totalwiderstandes in dem uns beschäftigenden Falle anlangt, so ergibt sich dieselbe unmittelbar aus den vorhergehenden Betrachtungen.

---

*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 5. cahier, page 171.
) **Rondelet: „Kunst zu bauen"; Transport der Lasten.

Denn es ist einleuchtend, daß, wenn ein Körper P (Fig. 56) vermittelst einer ebenen und horizontalen Platte DE auf einer oder zwei Rollen ruht, die Kraft, welche in horizontaler Richtung wirken muß, um zugleich die unter dieser Platte und auf dem horizontalen Boden AB stattfindende rollende Reibung zu überwinden, ausgedrückt wird durch:

$$\tfrac{1}{2}(f+f') = \tfrac{1}{2}\left(2\,A\,\frac{P}{D} + 2\,A'\,\frac{P}{D}\right) = \frac{P}{D}(A+A') = F,$$

wo f' den absoluten Werth des in T und T' stattfindenden Tangentialwiderstandes bezeichnet und A' ein Coefficient ist, welcher sich auf die in diesen Punkten berührenden Substanzen bezieht.

Um sich hiervon direct zu überzeugen, braucht man nur zu bemerken, daß man in der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung, wenn e das in einem gewissen Augenblicke von den Mittelpunkten der Rollen beschriebene Wegelement bezeichnet, nothwendig

$$2\,Fe = fe + f'e$$

haben muß, weil der in T abgewickelte Bogen bloß dem in a abgewickelten gleich ist, während der gleichzeitig von dem Angriffspunkte der Kraft F beschriebene Weg das Doppelte dieses Bogens ist (§. 195). Nehmen wir z. B. an, daß in dem angeführten Versuche von Regnier (§. 195) die Rollen aus Ulmenholz und der Kasten aus Eichenholz besteht, so haben wir nach Coulomb (§. 193):

$$A' = 0{,}00162\,,$$

ferner:

$$P = 240 \text{ Kilogr.},\; D = 0{,}^{m}036,\; F = 25 \text{ Kilogr.},$$

und wenn wir diese Werthe in die erste der obigen Gleichungen substituiren, so erhalten wir den Werth:

$$A = 0{,}00738\,,$$

welcher 5mal größer ist, als der von A', was nicht befremden kann, weil sich der Werth von A auf den Widerstand eines Pflasters bezieht, welches beträchtliche Unebenheiten und Widerstände darbot.

Von der Steifigkeit der Seile und Riemen.

Begriffe und Formeln über den von der Steifigkeit der Seile herrührenden Widerstand.

§. 197. Wenn ein Seil PMQ (Fig. 57) um eine Rolle gelegt ist, welche sich um die Axe C drehen kann, und an seinem einen Ende durch ein Gewicht Q gespannt wird, welches durch eine an dem andern Ende des Seiles wirkende Kraft P im Gleichgewichte gehalten oder bewegt werden soll; so bemerkt man, daß der Theil BQ des Seiles auf der Seite des Widerstandes wegen seiner Steifigkeit eine von der Richtung der Kraft Q verschiedene Richtung annimmt, so daß der Hebelarm dieser Kraft vergrößert wird. Der der Kraft P entsprechende Theil AP des Seiles scheint dagegen eine Richtung anzunehmen, welche mit der dieser Kraft zusammenfällt, weil die Elasticität des Seiles seine Abwickelung von der Rolle eher zu begünstigen, als zu verhindern strebt, und hieraus folgt, daß die Vergrößerung des Widerstandes, welchen die Kraft P zu überwinden hat, bloß von der Aufwickelung des Seiles in B herrührt.

Wenn das Seil keine Steifigkeit hätte, so wäre im Gewichtszustande $P = Q$; aber wegen dieser Steifigkeit muß die Kraft P um eine gewisse Größe vermehrt werden, welche nach den Coulomb'schen Versuchen von der Geschwindigkeit der Bewegung fast unabhängig ist und bei den gewöhnlichen Seilen durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$R = \frac{d^\mu}{D}(a + bQ) \text{ Kilogr.},$$

worin d und D resp. den Durchmesser des Seiles und der Rolle (Welle) in Metern, Q die Spannung des sich in B aufrollenden Theiles des Seiles in Kilogr., a ein sich auf die natürliche Steifigkeit des Seiles, welche von der größern oder geringern Spannung oder Drehung der einfachen Fäden (Litzen), woraus das Seil besteht *), beziehendes constantes Gewicht, b eine ebenfalls constante und sich bloß auf die von der Spannung durch das Gewicht Q herrührende Zunahme der Steifigkeit des Seiles beziehende Zahl, und endlich μ eine andere Zahl, welche sich nothwendig mit dem Zustande des Seiles ändert, bezeichnet.

Für die gewöhnlichen weißen oder ungetheerten Seile liegt der Werth von μ, je nach der größern oder geringern Abnutzung oder der natürlichen Biegsamkeit des Seiles, zwischen 1 und 2. Für dicke neue Seile hat man $\mu = 2$, für mehr als halb abgenutzte Seile $\mu = 1{,}5 = {}^3/_2$ und endlich für sehr dünne und sehr biegsame Schnüre $\mu = 1$.

Bei getheerten Seilen ist es genauer, statt d^μ die Zahl ~~m~~ n der Schnüre oder Litzen zu setzen, woraus sie zusammengesetzt sind, so daß sich die obige Formel in folgende verwandelt:

$$R = \frac{n}{D}(a + bQ) \text{ Kilogr.}$$

und der Widerstand sich nicht mehr merklich mit dem Grade der Abnutzung der Seile ändert.

Coulomb's Erfahrungsresultate.

§. 198. Die Resultate der Versuche, welche Coulomb zur Bestimmung der Werthe der Größen $d^\mu a$ oder na, $d^\mu b$ oder nb angestellt hat, wovon die erste die constante Steifigkeit eines Seiles von einer gegebenen Art und einem gegebenen Durchmesser, und die zweite seine Steifigkeit für das Kilogr. der Belastung oder Spannung Q ausdrückt, sind in folgender Tafel enthalten.

*) Diese Seile bestanden aus 3 Schnüren oder dünnern Seilen, welche durcheinander geflochten und gedreht waren und selbst aus einer gewissen Anzahl noch dünnerer Schnüre oder Litzen bestanden.

Tafel der Gewichte, welche erforderlich sind, um verschiedene Seile um eine Welle von 1 Meter im Durchmesser zu biegen *).

Art der Seile.	Durchmesser der Seile $= d$.	Gewicht von 1 Meter Länge der Seile.	Constante Steifigkeit $= d^{\mu}a$.	Steifigkeit für 1 Kil. der Last $= d^{\mu}b$.
	Meter.	Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.
Weiße Seile von 30 Litzen	0,0200	0,2834	0,222460	0,0097382
„ „ „ 15 „	0,0144	0,1448	0,063514	0,0055182
„ „ „ 6 „	0,0088	0,0522	0,010604	0,0023804
Getheerte Seile von 30 „	0,0236	0,3326	0,349600	0,0125514
„ „ „ 15 „	0,0168	0,1632	0,105928	0,0060592
„ „ „ 6 „	0,0096	0,0693	0,212080	0,0025968

Anmerk. Für angefeuchtete weiße Seile von $0,^{m}02$ im Durchmesser und darüber muß man für $d^{\mu}a$ das Doppelte der in der vorhergehenden Tafel angegebenen Zahlen nehmen. Der Werth $d^{\mu}a$ nimmt für getheerte Seile auch etwas zu, wenn die Temperatur unter 0° ist, und er ist etwas kleiner für Seile, welche neu um eine Rolle gelegt werden, woraus hervorgeht, daß eine gewisse Zeit erforderlich ist, damit die Steifigkeit der Seile ihre Gränze erreicht, und daß, wenn die Seile über mehrere auf einander folgende Rollen gehn, der Widerstand wegen ihrer Steifigkeit geringer ist, als die Zahlen in der obigen Tafel angeben. Die Steifigkeit der Seile wird übrigens bedeutend vermindert, wenn sie mit einer fettigen Substanz getränkt oder mit Seife bestrichen werden.

Anwendungsart dieser Resultate auf die Berechnung der Steifigkeit der Seile.

§. 199. Wenn man vermittelst der vorhergehenden Tafel die Steifigkeit eines gegebenen Seiles berechnen will, so sucht man in der Tafel dasjenige Seil auf, welches sich hinsichtlich der Constitution und Dicke so wenig als möglich von dem gegebenen unterscheidet und substituirt die zugehörigen Werthe von $d^{\mu}a$, $d^{\mu}b$ in die Formel:

$$\frac{1}{D}(d^{\mu}a + d^{\mu}bQ).$$

*) Die von Coulomb angewandten Seile waren neu und bestanden aus drei dünnern Seilen, deren Litzen bei der Verfertigung durch die Drehung auf $^{1}/_{3}$ ihrer ursprünglichen Länge reducirt waren. Die Versuche gaben für diese Seile im Mittel $\mu = 1{,}75$ und für fast ganz unbrauchbare Seile fand Coulomb $\mu = 1{,}40$. Die obigen Zahlen sind etwas größer angenommen, um in der Praxis desto sicherer zu sein. (S. die Theorie der einfachen Maschinen von Coulomb in den Mémoires des Savans étrangers, Tome 10.)

indem man für D und Q die dem betrachteten Falle entsprechenden Werthe setzt, was, wie man sieht, darauf hinausläuft, die Steifigkeit des auf dieselbe Trommel gewickelten und durch dasselbe Gewicht Q gespannten Seiles der Tafel zu berechnen.

Wenn nun d' der Durchmesser des Seiles ist, dessen Steifigkeit man berechnen soll; so wird dieselbe ausgedrückt durch:

$$\frac{d'^{\mu}}{D}(a + bQ),$$

weil a, b, Q und D dieselben Werthe haben, wie oben. Man braucht also nur das für das Seil in der Tafel enthaltene Resultat durch das Verhältniß $\frac{d'^{\mu}}{d^{\mu}} = \left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$ zu multipliciren, indem man für μ nach dem weiter oben Gesagten eine Zahl setzt, welche dem Grade der Abnutzung des Seiles entspricht *).

Für die getheerten Seile muß man dasselbe Resultat durch das Verhältniß $\frac{n'}{n}$ multipliciren.

Ueber die absolute Stärke und das Gewicht der Seile.

§. 200. Um in Beziehung auf die Seile nichts Wesentliches zu übergehn, wollen wir nach Coulomb noch bemerken, daß man sie niemals über 40 Kilogr. für jeden Faden (Litze) belasten muß, obgleich sie im Allgemeinen 50 bis 60 Kilogr. tragen können, ohne zu zerreißen. Die angefeuchteten Seile verlieren nahezu $1/3$ ihrer Stärke, welche für getheerte Seile bei gleichem Durchmesser kaum noch $2/3$ oder $3/4$ von der Stärke der weißen Seile beträgt.

Nach den Versuchen von Duhamel ist die Zerreißungsstärke der weißen Seile dem Quadrate ihres Durchmessers proportional; aber sie nimmt in einem etwas größern Verhältnisse, als das Gewicht ihrer Längeneinheit und als die Anzahl der Fäden (Litzen), woraus sie bestehn, zu. Wenn d den Durchmesser eines solchen Seiles in Centimetern ausdrückt, so kann man nach Navier die zum Zerreißen des Seiles erforderliche Kraft durch $400\,d^2$ Kilogr. oder durch $40{,}50\,c^2$ Kilogr. ausdrücken, wo c den ebenfalls in Centimetern ausgedrückten Umfang des Seiles bezeichnet. Dieser Werth kann übrigens um $1/5$ größer oder kleiner sein, als der wahre Werth, je nach der Beschaffenheit des Hanfes und der Fabrikationsart des Seiles.

Diese verschiedenen Resultate sind übrigens nur auf die nach der alten Methode verfertigten Seile anwendbar; denn die nach dem Ver-

*) Nach der letzten Note müßte man, um eine größere Genauigkeit zu erhalten, das gefundene Resultat durch das Verhältniß $\frac{d'^{\mu}}{d'^{1,75}}$ multipliciren; aber da der Exponent 1,75 von den für die Seile von einer gewissen Dicke angenommenen Gränzwerthen 2 und 1,50 sehr wenig verschieden ist, so kann man mit Navier ohne Nachtheil den Exponenten d' gleich μ setzen.

fahren von Hubert verfertigten Seile sind nicht bloß feiner, sondern haben auch eine größere Stärke, welche der Anzahl der Fäden (Litzen) proportional zunimmt.

Zuweilen ist es von Nutzen, das Gewicht der Längeneinheit der Seile von einem gegebenen Durchmesser zu kennen, und nach der uns von dem erwähnten berühmten Ingenieur mitgetheilten Regel muß man $^1/_5$ des Quadrates des in Zollen ausgedrückten Umfanges des Seiles nehmen, um das Gewicht einer Länge von 5 Fuß dieses Seiles zu erhalten. Bezeichnet also c wieder die Länge des Umfanges des Seiles in Centimetern, so wird das Gewicht des laufenden Meters desselben ausgedrückt durch:

$$0{,}00826\, c^2 \text{ Kilogr.}$$

Art und Weise, wie man die Steifigkeit der Riemen in Betracht ziehn kann.

§. 201. Im zweiten Abschnitte haben wir gesehn, daß man bei den Maschinenanlagen statt der Seile und Schnüre oft lederne Riemen von der gehörigen Breite und einer geringen Dicke anwendet, welche an den äußern Rändern verstärkt sind. Da diese Riemen gewöhnlich eine sehr große Biegsamkeit haben, so ist der von ihrer Steifigkeit herrührende Widerstand so gering, daß man denselben in den Rechnungen eigentlich vernachlässigen könnte. Wenn man denselben aber dennoch in Rechnung bringen will, so kann man bis dahin, daß specielle Versuche über diesen Gegenstand angestellt sind, annehmen, daß der Widerstand der Riemen wegen ihrer Steifigkeit dem Widerstande gleich ist, welchen mehrere aneinandergelegte Seile oder Schnüre darbieten, deren Durchmesser der Dicke dieser Riemen an den verschiedenen Stellen gleich ist, d. h. man bedient sich zur Berechnung dieses Widerstandes noch der obigen Formel in §. 197, die man alsdann durch einen Zahlencoefficienten multipliciren muß, der die Anzahl der dem Riemen entsprechenden Seile oder Schnüre ausdrückt. Uebrigens nimmt man für den in dieser Formel vorkommenden Exponenten Werthe, welche zu dem größern oder geringern Grade der Biegsamkeit des Riemens, je nach der Dauer seiner Anwendung und der Beschaffenheit des Leders, woraus er besteht, im Verhältniß steht.

Zu Anzin angestellte und zu Metz wiederholte Versuche beweisen, daß, wenn gehörig gespannte Riemen zur Uebertragung der Bewegung von einer Welle auf die andere angewandt werden, die Geschwindigkeit ohne einen merklichen Verlust übertragen wird, und dasselbe ist wahrscheinlich auch bei den zu demselben Zwecke angewandten Seilen oder Schnüren ohne Ende der Fall. Der Grund davon liegt in der an den verschiedenen Berührungspunkten der Riemen oder Seile mit den Wellen stattfindenden Reibung, deren Intensität sehr schnell mit der Spannung und mit dem von dem Riemen umgebenen Bogen der Welle zunimmt und verhindert, daß der Riemen unter der Wirkung der an seinen beiden Enden wirkenden ungleichen Kräfte auf der Welle gleitet. Da diese Eigenschaft in sehr vielen Fällen von hoher Wichtigkeit ist, so wollen wir hier die Theorie derselben mittheilen.

Reibung der um unbewegliche cylindrische Wellen gelegten Seile oder Riemen.

Allgemeine Relation zwischen der Kraft und dem Widerstande.

§. 202. Es sei P eine Kraft, welche vermittelst der um den unbeweglichen Cylinder, dessen Axe C (Fig. 58) ist, gelegten Schnur MAN auf den Widerstand Q wirkt; so ist klar, daß die Intensität der Kraft P in dem Augenblicke, wo sie den Widerstand Q überwindet, so daß die Schnur über den Cylinder hingleitet, der Summe aus der Intensität von Q und der Intensität der Reibung gleich ist, welche längs des Bogens MAN durch die Normaldruckkräfte hervorgerufen wird, die aus den an den verschiedenen Punkten der Schnur stattfindenden Spannungen entspringen.

Bezeichnet r den Halbmesser des Cylinders, t die Spannung eines beliebigen Elementes $ab = ds$ der Schnur, $t' = t + dt$ die Spannung des auf der Seite von P folgenden Elementes bc, α den Winkel, welchen diese Elemente oder Spannungsrichtungen in b außerhalb des Cylinders miteinander bilden, und f den Reibungscoefficienten für die einander berührenden Substanzen; so ist der Spannungszuwachs dt offenbar der Reibung gleich, welche auf dem Elemente ab in Folge des darauf ausgeübten Normaldruckes, der nichts anders ist, als die auf der Richtung dieses Elementes senkrechte Componente, welche man, wenn unendlich kleine Größen von den höhern, als von der ersten Ordnung vernachlässigt werden, gleich $t\alpha$ setzen kann, entsteht.

Aber da der von den beiden aufeinander folgenden Elementen ab und bc des Kreises gebildete Winkel dem Winkel gleich ist, welchen die entsprechenden Normalen oder Halbmesser, die den Bogen ds zwischen sich fassen, miteinander bilden; so hat man $ds = \alpha r$ und folglich:

$$dt = ft\alpha = \frac{ftds}{r}, \text{ oder } \frac{dt}{t} = \frac{fds}{r}.$$

Integrirt man diese letzte Gleichung von dem Punkte N, für welchen $s = 0$ und $t = Q$ ist, bis zu dem Punkte M, für welchen $s =$ Bog. MAN und $t = P$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$log. P - log. Q = log. \frac{P}{Q} = f\frac{s}{r},$$

welche man, wenn $e = 2{,}718282$ die Basis der Neper'schen oder hyperbolischen Logarithmen bezeichnet, auf folgende Form bringen kann:

$$P = Qe^{\frac{fs}{r}},\ l.P = l.Q + 0{,}4342945\frac{fs}{r}\ ^{*)},$$

wo l die Logarithmen der gewöhnlichen Tafeln bezeichnet.

---

*) Bezeichnet θ den Bogen auf dem Kreisumfange von dem Halbmesser $= 1$, welcher den von den äußersten Normalen des Bogens s gebildeten Winkel mißt, so hat man die Relation:

$$s = \theta r,\ P = Qe^{f\theta},$$

Wenn die Kraft P, statt Q mit sich fortzubewegen, so beschaffen wäre, daß sie selbst von Q fortgezogen würde, so hätte man offenbar:

$$P = Qe^{\frac{-fs}{r}} = \frac{Q}{e^{\frac{fs}{r}}},\ l\,.\,P = lQ - 0{,}4342945\,\frac{fs}{r}.$$

Die Werthe von f ergeben sich aus den Tafeln in §. 187 u. f. und für Hanfseile kann man vorläufig, bis ausgedehntere Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt sind, bloß $f = 0{,}33$ setzen, wenn diese Seile abgenutzt und auch die Cylinder oder Wellen durch die Reibung polirt sind.

Anwendung der Reibung der Seile in den Künsten und Gewerben.

§. 203. Oft benutzt man in den Künsten und Gewerben die Reibung der Seile zur Verminderung der Kraft, welche erforderlich ist, um eine Last zu halten oder irgend einen sehr großen Widerstand ins Gleichgewicht zu bringen. Wenn z. B. die Weinküper ein schweres Weinfaß längs einer steilen Treppe in einen Keller lassen wollen, so legen sie dasselbe auf eine Schleife oder auf zwei Stücke Holz, welche eine geneigte Ebene bilden, deren Widerstand die Bewegung schon bis zu einem gewissen Punkte verzögert; aber da dieses noch nicht hinreichend ist, damit ein oder zwei Menschen ohne Gefahr das Weinfaß gegen die Wirkung der Schwere halten können, so wickeln sie die beiden Enden des Zugseiles um zwei geneigte cylindrische Stücke Holz, welche sich unten auf den Boden und oben gegen die Mauer des Kellerhalses stützen, so daß durch das Aufwickeln der Seile ein Widerstand entsteht, wodurch der Kraftaufwand, welcher erforderlich ist, um das Weinfaß unmittelbar an den Seilen festzuhalten, bedeutend vermindert wird.

Wir wollen annehmen, daß die Spannung dieser Seile, welche sich nach der Theorie der schiefen Ebene, die wir bald mittheilen werden, leicht berechnen läßt, 500 Kilogr. beträgt, daß der Halbmesser der Cylinder $= 0^m{,}08$ ist, und daß endlich das Seil drei Windungen um diese Cylinder bildet; so hat man, wenn man annimmt, daß das Seil abgenutzt ist und die Cylinder durch die Reibung polirt sind:

---

welche auf den Kreisbogen oder auf eine beliebige Curve MAN anwendbar ist, wenn θ wieder den Bogen bezeichnet, welcher den zwischen den Normalen der Endpunkte M und N dieser Curve liegenden Winkel mißt.

Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur zu bemerken, daß man unter denselben Voraussetzungen die Relationen:

$$\alpha = d\theta,\ \frac{dt}{t} = fd\theta$$

hat, wovon sich die letzte unmittelbar integriren läßt auf welche Weise sich θ und der Krümmungshalbmesser in jedem Punkte auch ändern mag. Man sieht also, daß die Reibung der Seile auf den Cylindern nicht sowohl von der Form und der Größe des umschlossenen Bogens, als von der Größe des Winkels abhängt, welcher zwischen den Normalen der Endpunkte dieses Bogens liegt.

$$Q = 500 \text{ Kilogr.}, \; r = 0^m,08, \; f = 0,33, \; \frac{fs}{r} = 6,217,$$

$$0,43429 \frac{fs}{r} = 2,6999809,$$

und endlich:

$$l.P = l.Q - 0,43429 \frac{fs}{r} = -0,00101 \text{ und } P = 0,9977 \text{ Kilogr.}$$

für die Kraft, welche an jedem der beiden Zugseile wirken muß.

Reibung eines Körpers auf einer schiefen Ebene.

Wenn die auf den Körper wirkende Kraft eine beliebige Neigung hat.

§. 204. Es sei Q (Fig. 59.) das Gewicht eines Körpers, welcher auf einer geneigten Ebene AB liegt, die mit dem Horizonte einen Winkel $ABC = \alpha$ bildet. Auf diesen Körper wirke von unten nach oben eine Kraft P, welche mit der Richtung der Ebene AB den Winkel β bildet und in einer auf der schiefen Ebene senkrechten Verticalebene liegt; so ist der von P und Q herrührende Normaldruck auf AB in diesem Falle:

$$Q \cos.\alpha - P \sin.\beta$$

und die entsprechende Reibung:

$$f(Q \cos.\alpha - P \sin.\beta).$$

Die nach der Richtung der schiefen Ebene wirkenden Componenten sind resp. $Q \sin.\alpha$ und $P \cos.\beta$, und man hat folglich zur Berechnung der Kraft P, welche den Körper längs der schiefen Ebene AB aufwärts zu bewegen im Stande ist, die Gleichung:

$$P \cos.\beta - Q \sin.\alpha = f(Q \cos.\alpha - P \sin.\beta);$$

folglich:

$$P = \frac{\sin.\alpha + f \cos.\alpha}{\cos.\beta + f \sin.\beta} Q.$$

Wenn man in diesem Ausdrucke das Zeichen von f in das entgegengesetzte verwandelt, so erhält man die Kraft, welche gerade erforderlich ist, um zu verhindern, daß der Körper nicht vermöge seines eigenen Gewichtes von der schiefen Ebene herabgleitet, und wenn diese Kraft $= 0$ sein soll, so muß man offenbar haben:

$$\sin.\alpha - f \cos.\alpha = 0 \text{ oder } \tang.\alpha = f,$$

d. h. die Ebene AB muß mit dem Horizonte einen Winkel bilden, dessen trigonometrische Tangente dem Reibungscoefficienten f gleich ist, und welcher daher der **Reibungswinkel** genannt wird. Die directe Beobachtung des Winkels, bei welchem ein auf einer schiefen Ebene liegender Körper eben anfangen will, längs dieser Ebene herabzugleiten, würde folglich den Werth des Verhältnisses der Reibung zu dem Drucke geben; allein es ist zu bemerken, daß dieser Werth fast immer größer ist, als der, welcher während der Bewegung des Körpers stattfindet. (§§. 187 — 189).

Wenn es übrigens nothwendig wäre, die Adhäsion zwischen dem Körper und der schiefen Ebene in Rechnung zu bringen (§. 186), so hätte man offenbar weiter nichts zu thun nöthig, als zu P den Quotienten aus seinem Werthe und $\cos.\beta + f\sin.\beta$ zu addiren, indem man demselben das Zeichen von f beilegte.

Untersuchung verschiedener besonderer Fälle.

§. 205. Wenn die Richtung der Kraft P zu AB (Fig. 60.) parallel ist, so ist $\beta = 0$; wenn P nach einer unter der schiefen Ebene liegenden Richtung wirkt, so ist β negativ, und wenn endlich P eine horizontale Richtung hat, so ist $\beta = \alpha$ und man hat:

$$P = Q\,\frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\alpha + f\sin.\alpha} = Q\,\frac{\text{tang.}\,\alpha + f}{1 - f\,\text{tang.}\,\alpha}.$$

Dieser Werth wird unendlich für $\text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{f}$, und hieraus folgt, daß die Kraft P, was für eine Intensität sie auch haben möge, den Körper nicht längs der Ebene AB würde bewegen können. Derselbe Umstand würde übrigens auch in dem allgemeinen Falle für einen Werth von β stattfinden, welcher so beschaffen ist, daß $\text{tang.}\,\beta = -\frac{1}{f}$ ist.

Was die Größe des auf die schiefe Ebene ausgeübten Druckes anlangt, wenn P horizontal ist, so wird derselbe offenbar durch folgende Formel ausgedrückt:

$$N = Q\cos.\alpha + P\sin.\alpha = Q\left(\cos.\alpha + \sin.\alpha\,\frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\alpha - f\sin.\alpha}\right)$$

$$= \frac{Q}{\cos.\alpha - f\sin.\alpha}.$$

Vortheilhaftester Zugwinkel. Betrachtung des Falles, wo auf den Körper eine Kraft wirken muß, um sein Herabgleiten von der schiefen Ebene zu bewirken.

§. 206. Wenn man den allgemeinen Ausdruck von P in Beziehung auf β differentiirt und das erhaltene Resultat gleich Null setzt, so findet man, daß zum Aufziehen des Körpers Q längs der schiefen Ebene AB die kleinste Kraft erfordert wird, wenn $\text{tang.}\,\beta = f$ ist, indem diese Kraft übrigens nach einer über der schiefen Ebene AB liegenden Richtung wirkt, wie in der Figur angegeben ist; allein man darf daraus noch nicht schließen, daß auch die Leistung oder Arbeit dieser Kraft in Beziehung auf die der Hebung des Gewichtes Q entsprechende Nutzleistung ein Minimum ist. Denn das Verhältniß dieser Quantitäten Arbeit wird offenbar ausgedrückt durch (§. 8):

$$\frac{P\cos.\beta}{Q\sin.\alpha} = \frac{1 + f\cot.\alpha}{1 + f\,\text{tang.}\,\beta},$$

welche Größe ohne Ende abnimmt, wenn $\text{tang.}\,\beta$ ohne Ende zunimmt.

Zur Vervollständigung dieser Untersuchung, welche bei der Bestimmung der Reibung der Schraube, wovon später die Rede sein wird, zur Anwendung kommt, wollen wir noch bemerken, daß es, wenn der Neigungswinkel α kleiner ist, als der Reibungswinkel, d. h. $tang.\ \alpha < f$, nicht bloß unnütz ist, auf den Körper eine Kraft wirken zu lassen, um sein Herabgleiten von der schiefen Ebene zu verhindern, sondern daß man sogar eine gewisse Kraft anwenden muß, um dieses Herabgleiten zu bewirken. Wenn z. B. in dem in Fig. 60 angegebenen Falle auf den Körper Q eine der Kraft P entgegengesetzte horizontale Kraft P' wirkte; so müßte, um das Herabgleiten des Körpers von der schiefen Ebene zu bewirken,

$$P' = Q \frac{f \cos.\ \alpha - \sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha + f \sin.\ \alpha} = Q \frac{f - tang.\ \alpha}{1 + f\, tang.\ \alpha}$$

sein, welchen Werth man auch erhält, wenn man in der obigen Gleichung (§. 205) zugleich das Zeichen von f und von P oder Q in das entgegengesetzte verwandelt.

Reibung des Keiles.

Vorläufige Begriffe.

§. 207. Im Allgemeinen kann man jeden festen Körper, welcher sich zwischen zwei oder mehreren andern festen Körpern befindet und auf welchen beliebige Kräfte wirken, welche durch die von diesen letzten Körpern auf den ersten in normaler Richtung auf den Berührungsflächen ausgeübten Rückwirkungen im Gleichgewichte gehalten werden, einen Keil nennen. Denn wenn man für die Berührungsflächen die entsprechenden Berührungsebenen substituirt, so bilden diese Berührungsebenen in Folge ihres gegenseitigen Durchschneidens einen körperlichen Winkel oder eine Art von Keil, welchen man statt des ersten Körpers betrachten kann und welcher sich in Beziehung auf die physischen Wirkungen ganz unter denselben Umständen befindet. Wir werden jedoch in dem Folgenden nur die Theorie des gewöhnlichen Keiles, wie er in den Elementen der Statik definirt wird, aufstellen, indem wir bemerken, daß diese Theorie auch auf eine ähnliche Weise auf die verschiedenen möglicherweise vorkommenden Fälle anwendbar ist.

Es sei daher ABC (Fig. 61 und 62) ein dreikantiger Keil, dessen Seitenflächen AC und BC sich in T und T' gegen zwei andere Körper oder Theile desselben festen Körpers stützen, die durch eine gewöhnlich in normaler Richtung auf den Rücken AB des Keiles wirkende Kraft P aus einander getrieben werden sollen, und es bezeichnen N, N' die in T und T' in normaler Richtung auf den Seitenflächen AC und BC von außen nach innen stattfindenden Reactionskräfte; so bewirken diese Kräfte längs derselben Seitenflächen AC, BC von unten nach oben Reibungen, welche durch:

$$fN,\ fN'$$

ausgedrückt werden und, wie gesagt, nach einer Richtung wirken, welche der entgegengesetzt ist, nach welcher sich der Keil unter der Wirkung der Kraft P zu bewegen strebt. In dem allgemeinen Falle, wo auf den Keil beliebige Kräfte wirken oder auch nur eine einzige auf dem Rücken des Keiles senkrechte, aber in einem beliebigen Punkte desselben angebrachte Kraft, ist einleuchtend, daß der Keil ein Bestreben haben könnte, sich seitwärts oder transversal zu drehen oder fortzugleiten, wodurch neue Widerstände hervorgerufen würden, welche man in Rechnung bringen müßte; allein da diese Wirkungen der hervorzubringenden fremdartig sind und die bewegende Kraft ohne Nutzen consumiren würden; so sucht man sie in den Künsten und Gewerben immer zu vermeiden. Hierzu wird erfordert, daß die Kraft P in der Ebene der Reactionskräfte N, N', fN, $f'N'$ liegt und daß diese letzten Kräfte eine gemeinschaftliche Resultante haben, welche der Kraft P gleich und direct entgegengesetzt ist. Uebrigens kann man hierbei von der Wirkung der Schwere oder von dem Gewichte des Keiles ganz abstrahiren, weil dieselbe gegen die in den meisten Fällen auf den Keil wirkenden Kräfte äußerst gering ist.

Endlich ist auch einleuchtend, daß die Kräfte N und N', fN $f'N'$, wenn der Keil ABC die Körper, zwischen welchen er sich befindet, in mehreren oder selbst in unendlich vielen Punkten berührt, alsdann nichts anders sind, als die allgemeinen Resultanten der parallelen Kräfte jeder Art, welche in diesen verschiedenen Berührungspunkten wirken und nicht einzeln bekannt zu sein brauchen.

Gleichgewicht des Keiles, wenn derselbe kein Bestreben hat, sich zu drehen.

§. 208. Um in dieser Voraussetzung die Theorie des Keiles mit Rücksicht auf die Reibung aufzustellen, wollen wir uns jede auf denselben wirkende Kraft in zwei andere zerlegt denken, wovon die eine zu dem Rücken AB des Keiles parallel und die andere darauf senkrecht ist. Bezeichnen wir alsdann die Winkel A, B, C des Dreieckes ABC, welches ein Durchschnitt des Keiles bildet, resp. mit α, β, γ und ziehen zugleich den Sinn der Wirkung jeder Kraft in Betracht; so erhalten wir, wenn wir ausdrücken, daß die Summe der parallelen Kräfte jeder Gruppe gleich Null ist, die beiden Gleichungen:

$$P - N\cos.\alpha - N'\cos.\beta - fN\sin.\alpha - f'N'\sin.\beta = 0,$$

$$N\sin.\alpha - N'\sin.\beta - fN\cos.\alpha + f'N'\cos.\beta = 0,\text{*)}$$

woraus sich ergibt:

$$N' = N\,\frac{\sin.\alpha - f\cos.\alpha}{\sin.\beta - f'\cos.\beta},$$

$$N = \frac{P(\sin.\beta - f\cos.\beta)}{(1-ff')\sin.\gamma + (f+f')\cos.\gamma},$$

$$N' = \frac{P(\sin.\alpha - f\cos.\alpha)}{(1-ff')\sin.\gamma + (f+f')\cos.\gamma},$$

wenn man bemerkt, daß hier

$$\sin.(\alpha+\beta) = \sin.\gamma \text{ und } \cos.(\alpha+\beta) = -\cos.\gamma$$

ist.

*) Um auszudrücken, daß der Keil kein Bestreben hat, sich in der Ebene ABC zu drehen, braucht man nur auszudrücken, daß die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf einen beliebigen Punkt dieser Ebene gleich Null ist. Nimmt man z. B. die Winkelspitze C für diesen Punkt und fällt aus demselben das Perpendikel CK auf die Richtung von P,

Diese verschiedenen Relationen zeigen, daß die Reactionskräfte N und N' bestimmt sind, wenn die Kraft P, sowie die übrigen Größen, wovon sie abhängen, gegeben sind, und wenn man $f=0$, $f'=0$ setzt; so erhält man die gewöhnlichen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht des Keiles wieder.

Betrachtung des Falles, wo der Keil durch die Reaction der beiden Körper, zwischen welchen er sich befindet, zurückgetrieben wird, und Merkmal, woran man diesen Umstand erkennt.

§. 209. Wenn sich der Keil in Folge der mehr oder weniger langen Wirkung der Kraft P bis zu einer gewissen Tiefe zwischen die beiden zu trennenden Körper eingelassen hat, so geschieht es gewöhnlich, daß die Reactionskräfte N und N' wegen der Elasticität der Körper oder der darauf wirkenden activen Widerstände, noch fortwirken, obgleich die Kraft P ganz aufgehört hat zu wirken, und alsdann wird entweder der Keil wieder zurückgetrieben, oder durch die in T und T' stattfindenden Reibungen in dieser Lage erhalten. Im ersten Falle müßte man in senkrechter Richtung auf dem Rücken des Keiles von oben nach unten eine gewisse Kraft P_1 wirken lassen, um denselben in der einmal angenommenen Lage zu erhalten. Um jeden dieser Fälle näher zu untersuchen und zu erkennen, braucht man nur zu bemerken, daß bei der aufwärts gerichteten Bewegung des Keiles die Reibungen fN, $f'N'$ nach einer Richtung wirken, welche genau der entgegengesetzt ist, in welcher sie nach der Voraussetzung im ersten Falle wirkten. Wenn wir also in den obigen Gleichungen die Zeichen dieser Reibungen in die entgegengesetzten verwandeln, so drückt der sich daraus ergebende Werth P_1 die Kraft aus, welche man auf den Keil wirken lassen muß, um den Kräften M und M' das Gleichgewicht zu halten, und auf diese Weise erhält man:

$$P_1 = \frac{N\left\{(1-ff')\,sin.\,\gamma-(f+f')\,cos.\,\gamma\right\}}{sin.\,\beta+f'\,cos.\,\beta}$$

$$= \frac{N'\left\{(1-ff')\,sin.\,\gamma-(f+f')\,cos.\,\gamma\right\}}{sin.\,\alpha+f\,cos.\,\alpha}.$$

Was die Relation zwischen N und N' anlangt, so drückt sie bloß eine Bedingung aus, welcher diese Kräfte genügen müssen, damit das Gleichgewicht möglich sei und der Keil sich nicht in der zu seinem Rücken parallelen Richtung bewegt.

Wenn nun der aus der vorhergehenden Gleichung abgeleitete Werth von P_1 positiv ist, so ist dieses ein Zeichen, daß sich der Keil in Folge der auf ihn wirkenden Reactionskräfte zu heben strebt, und wenn dieser

so erhält man, wenn man den Sinn der Wirkung der Kräfte in Betracht zieht und bemerkt, daß die Hebelarme von $fN, f'N'$ Null sind (Fig. 61):

$$P\,.\,CK + N'\,.\,CT' - N\,.\,CT = 0,$$

woraus sich CK und folglich AS ergibt, wenn CT und CT' gegeben sind.

Werth negativ ist, so hebt sich der Keil nicht bloß nicht von selbst, sondern es ist auch eine von unten nach oben wirkende gewisse Kraft erforderlich, um die Reibungen desselben zu überwinden, und wenn endlich $P_{,}=0$ ist, so daß die Gleichung:

$$(1-ff') \sin.\gamma - (f+f') \cos.\gamma = 0 \text{ oder } \tang.\gamma = \frac{f+f'}{1-ff'}$$

stattfindet; so ist dieses ein Zeichen, daß die Kräfte N und N' die Reibungen fN und $f'N'$ eben zu überwinden oder ihnen das Gleichgewicht zu halten im Stande sind, so daß die geringste auf den Rücken des Keiles wirkende Kraft denselben tiefer hinein- oder weiter heraustreiben würde.

Hieraus folgt also, daß der Keil zurückgetrieben, oder zwischen den beiden Körpern mehr oder weniger stark festgehalten wird, je nachdem

$$(1-ff') \sin.\gamma > \text{ oder } < (f+f') \cos.\gamma,$$

d. h.

$$\tang.\gamma > \text{ oder } < \frac{f+f'}{1-ff'} \text{ ist.}$$

Gränzen von P und N.

§. 210. Indem wir zu unserer ersten Voraussetzung zurückkehren, wo der Keil als der Wirkung der in normaler Richtung auf seinen Rücken AB (Fig. 63) wirkenden Kraft P folgend betrachtet wurde, wollen wir bemerken, daß das Verhältniß von P zu N' ohne Ende zunimmt, je mehr sich der Werth von $\tang.\alpha$ dem von f nähert, und selbst unendlich groß wird, wenn genau $\tang.\alpha = f$ ist. Dieser Umstand ist aber ganz dem analog, wovon weiter oben (§. 206) die Rede gewesen ist, wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene herabgleitet, und er beweist bloß, daß die Reibung auf der Fläche AC des Keiles nicht überwunden werden kann, wie groß die Intensität der Kraft P auch sein mag. Dies ist einleuchtend, weil, wenn P gegeben ist, der Druck N' auf die Fläche $BC=0$ sein muß, nach den weiter oben abgeleiteten Gleichungen (§. 208), welche alsdann bloß geben:

$$N'=0,\ N=\frac{P}{\cos.\alpha + f \sin.\alpha} = P\cos.\alpha = \frac{P}{\sqrt{1+f^2}},$$

weil $\tang.\alpha = f$ ist.

In der That setzt die Auflösung in §. 208 stillschweigend voraus, daß sich der Keil nicht dreht, wozu in dem gegenwärtigen Falle erfordert wird, daß die Relation stattfindet:

$$P.CK = N.CT = P\cos.\alpha.CT \text{ oder } CK = CT\cos.\alpha,$$

welche zeigt, daß die Richtung von P durch den Punkt T gehen muß. Wenn dieses nicht der Fall wäre, so wären die Bedingungen der Aufgabe ganz verändert, und der Keil hätte ein Bestreben, sich um den Punkt T ohne Reibung zu drehen, so daß man in der Voraussetzung einer solchen Bewegung und ohne Rücksicht auf die Reibung fN bloß das Gleichgewicht zwischen den Kräften N', $f'N'$ und P herzustellen hätte.

Keilverbindungen.

§. 211. Sehr oft wendet man in den Künsten und Gewerben mehrere sich gegen einander stützende Keile an, um gewisse Körper, welche einen größern oder geringern Widerstand leisten können, zusammen zu drücken, was z. B. bei den sogenannten Keilpressen und bei allen Verbindungen der Fall ist, worin Körper durch ihre gegenseitige Aneinanderpressung mit einander verbunden werden. Wenn die eine Kraft oder die verschiedenen Kräfte, welche gleichzeitig und äußerlich auf diese Keile wirken, gegeben sind, so lassen sich nach dem Vorhergehenden vermittelst dieser Kräfte die Compressions- oder Reactionskräfte immer leicht berechnen, welche auf jeden Keil wirken, und endlich auch die Kräfte, welche die äußern Keile gegen die betrachteten Hindernisse ausüben, sowie man umgekehrt, wenn diese letzten Kräfte bekannt sind, die Werthe der Kräfte finden kann, welche sie überwinden könnten, wenn die Keile gelöst würden. Bei dieser Berechnung muß man aber bemerken, daß für jeden Berührungspunkt oder für jede gemeinschaftliche Fläche zweier an einander liegender Keile, die gegenseitigen Zusammendrückungskräfte, wie N und N' und die daraus entspringenden Widerstände fN, $f'N'$, nothwendig einander gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind, d. h. für beide Körper denselben absoluten Werth und dieselbe Richtung haben, aber einander entgegengesetzt sind. Wenn man endlich die Quantitäten Arbeit der verschiedenen an diesen Keilen wirkenden Kräfte oder Widerstände in der Voraussetzung einer sehr langsamen oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung berechnen will, so braucht man nur die Intensität jeder dieser Kräfte mit dem Wege zu multipliciren, welchen ihr Angriffspunkt zwischen zwei gegebenen Lagen des Systemes in der Richtung seiner eigenen Bewegung beschreibt (Abschnitt 1, §. 8 und folg.), was, wie man sogleich sehen wird, durchaus mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

Maaß der Nutzleistung des Keiles.

§. 212. Wir wollen den in §. 208 besprochenen Keil ABC (Fig. 64) wieder betrachten, dessen sämmtliche Punkte eine zu der Richtung der Kraft P parallele Bewegung haben mögen. Es sei de der unendlich kleine Weg, welchen der Angriffspunkt der Kraft P in ihrer eigenen Richtung in einem gewissen Augenblicke beschreibt oder, was auf dasselbe hinausläuft, der gegenseitige Abstand der Parallelen AB und ab, welche die beiden successiven Lagen des Rückens des Keiles darstellen sollen; so wird die von der Kraft P zwischen den beiden betrachteten Lagen hervorgebrachte Quantität Arbeit offenbar ausgedrückt durch:

$$Pde = Nde\,\frac{(1-ff')\,\sin.\gamma + (f+f')\cos.\gamma}{\sin.\beta - f'\cos.\beta}.$$

Wenn man diese Quantität Arbeit mit denen vergleichen will, welche die Normaldruckkräfte N und N' in entgegengesetztem Sinne wirklich hervorbringen; so braucht man nur zu bemerken, daß die virtuelle Geschwindigkeit Tt der ersten $= de\cos.\alpha$ und die der zweiten $T't' = de\cos.\beta$ ist, so daß die fragliche Quantität Arbeit ausgedrückt wird durch:

$$N de \cos.\alpha + N' de \cos.\beta = N de \left\{ \cos.\alpha + \frac{N'}{N} \cos.\beta \right\}$$

$$= N de \frac{\sin.\gamma - (f + f') \cos.\alpha \cos.\beta}{\sin.\beta - f' \cos.\beta},$$

welche man offenbar auch erhält, wenn man bemerkt, daß die erste der Gleichungen in §. 208, wenn man $f = 0$, $f' = 0$ setzt und dann alle Glieder derselben mit de multiplicirt, für Pde genau den Werth der gesuchten Quantität Arbeit geben muß (Abschn. 1. §. 15).

Das Verhältniß dieser Quantität Arbeit zu der, welche die Kraft P vermöge der auf den Keil wirkenden fremdartigen Widerstände in Verbindung mit den Normaldruckkräften N und N' wirklich hervorbringt, wird also ausgedrückt durch:

$$\frac{\sin.\gamma - (f + f') \cos.\alpha \cos.\beta}{(1 - ff') \sin.\gamma + (f + f') \cos.\gamma}.$$

Einfluß der Form und der Dimensionen des Keiles auf den Nutzeffect.

§. 213. Dieser Ausdruck zeigt, daß die Arbeit oder Leistung der Druckkräfte N und N', welche, abgesehen von Nebenumständen *), als der Nutzeffect betrachtet werden muß, für einen gegebenen Winkel γ der Schärfe oder Schneide des Keiles ein Maximum wird, wenn

$$\cos.\alpha \cos.\beta = 0$$

ist, was voraussetzt, daß einer der Winkel in A und B ein rechter sei.

Wenn $\beta = 90^\circ$ ist, so verwandelt sich das vorhergehende Verhältniß in folgendes:

$$\frac{\tang.\gamma}{(1 - ff') \tang.\gamma + f + f'} = \frac{1}{1 - ff' + (f + f') \tang.\alpha},$$

welches desto größer wird, je mehr α abnimmt oder je mehr γ zunimmt. Dagegen wird der allgemeine Ausdruck des Verhältnisses des Nutzeffectes zu der angewandten Quantität Arbeit ein Minimum, wenn der Ausdruck:

$$\cos.\alpha \cos.\beta$$

seinen größten Werth bekommt, d. h. wenn:

$$\cos.\alpha = \cos.\beta;\ \text{folglich}\ \alpha = \beta,\ \gamma = 180^\circ - 2\alpha,$$

$$\tang.\gamma = -\frac{2 \tang.\alpha}{1 - \tang.^2 \alpha},$$

*) Denn man sieht leicht ein, daß die Normaldruckkräfte N und N' nicht bloß die gegenseitige Entfernung der beiden Körper bewirken, zwischen welchen sich der Keil befindet, sondern auch die Zusammendrückung und das Zurücktreiben der Molecule in der Nähe der Berührungspunkte T und T' dieser Körper, welche Wirkungen dem wirklich hervorzubringenden Effecte fremdartig sein können und desto beträchtlicher werden, je größer der Winkel γ ist, so daß man sich die virtuelle Geschwindigkeit de von P in zwei andere zerlegt denken muß, wovon die eine der Neben- und die andere der Hauptwirkung des Keiles entspricht.

d. h. wenn der Keil gleichschenklig ist, wie derselbe in der That in den Künsten und Gewerben häufig angewandt wird.

Der Werth, welchen alsdann das in Rede stehende Verhältniß annimmt, ist offenbar:

$$\frac{sin.\,\gamma - (f+f')\,cos.^2\,\alpha}{sin.\,\gamma\,(1-ff') + (f+f')\,cos.\,\gamma}$$

$$=\frac{2\,tang.\,\alpha - f - f'}{2\,tang.\,\alpha\,(1-ff') - (f+f')\,(1-tang.^2\,\alpha)}.$$

Zur nähern Untersuchung dieses Ausdruckes wollen wir $f = f'$ setzen, was bei den Anwendungen gewöhnlich der Fall ist; so wird derselbe im Zähler und Nenner durch die Größe $2\,(tang.\,\alpha - f)$ theilbar und reducirt sich nach verrichteter Division auf den Ausdruck:

$$\frac{1}{1+f\,tang.\,\alpha},$$

welcher desto größer wird, je kleiner α wird.

Verschiedene Folgerungen und Bemerkungen.

§. 214. Sowohl aus dieser letzten, als aus der vorhergehenden Untersuchung erhellet deutlich, daß es unter übrigens gleichen Umständen vortheilhaft ist, den Winkel γ so groß als möglich zu nehmen; aber da dieser Winkel eine gewisse Gränze nicht überschreiten darf, wenn der Keil bei unterbrochener Wirkung der Kraft P nicht wieder zurückgetrieben werden soll, und da bei den verschiedenen Anwendungen des Keiles derselbe Winkel auch gehörig klein sein muß, um die zu spaltenden Körper leichter und schneller von einander zu trennen; so sieht man, daß durch die schädlichen Widerstände immer ein beträchtlicher Theil der Leistung der Kraft P verloren geht.

Wir wollen z. B. annehmen, daß der Keil gleichschenklig und seine Basis oder sein Rücken der Hälfte seiner Höhe gleich sei, so ist:

$$tang.\,\alpha = 4,$$

und wenn wir außerdem $f = 0{,}62$ setzen, wie sich aus den Versuchen von Morin für Eisen auf trocknem Eichenholze ergibt; so findet sich, daß der Nutzeffect des Keiles ungefähr nur $^1/_7$ der angewandten Quantität Arbeit beträgt.

Anwendung des Vorhergehenden auf Keilpressen.

Nach dem Vorhergehenden hat man für die Druckkräfte N und N' als Functionen der Kraft P die Relationen (§. 208):

$$N = \frac{P\,(sin.\,\beta - f'\,cos.\,\beta)}{(1-ff')\,sin.\,\gamma + (f+f')\,cos.\,\gamma},$$

$$N' = \frac{P\,(sin.\,\alpha - f\,cos.\,\alpha)}{(1-ff')\,sin.\,\gamma + (f+f')\,cos.\,\gamma},$$

und andererseits hat man für die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den Druckkräften N, N' und dem Widerstande Q und endlich dem vertical auf die Unterlage der Presse ausgeübten Drucke N'':

$N \cos. \alpha + f' N \sin. \alpha - N'' = 0$, $N \sin. \alpha - fN \cos. \alpha - Qf'' N'' = 0$,

folglich:

$$N'' = N(\cos. \alpha + f \sin. \alpha),$$

$$N(\sin. \alpha - f \cos. \alpha) = Q + f'' N(\cos. \alpha + f \sin. \alpha),$$

und hieraus ergibt sich in Verbindung mit dem Werthe von N als Function von P:

$$Q = \frac{P(\sin. \beta - f' \cos. \alpha)}{(1 - ff')\sin. \gamma + (f + f')\cos. \gamma}\left(\sin. \alpha(1 - ff') - (f + f'')\cos. \alpha\right).$$

Wenn $f = f' = f''$ ist, wie dieses gewöhnlich der Fall ist, so reducirt sich dieser Werth von Q auf:

$$Q = \frac{P(\sin. \beta - f \cos. \beta)}{(1 - f^2)\sin. \gamma + 2f \cos. \gamma}\left(\sin. \alpha(1 - f^2) - 2f \cos. \alpha\right),$$

und wenn ferner $\beta = 90°$, $\alpha = 90° - \gamma$ ist, so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$Q = \frac{P(\cos. \gamma(1 - f^2) - 2f \sin. \gamma)}{(1 - f^2)\sin. \gamma + 2f \cos. \gamma} = \frac{P(1 - f^2) - 2f \tang. \gamma}{(1 - f^2)\tang. \gamma + 2f}.$$

Was die Nutzleistung des Widerstandes Q anlangt, so wird dieselbe, wenn de' das von seinem Angriffspunkte beschriebene Wegelement bezeichnet, während der Angriffspunkt von P das Wegelement de durchläuft, ausgedrückt durch:

$$Qde' = Qde \tang. \gamma, \text{ weil } \frac{de'}{de} = \tang. \gamma,$$

und folglich ist das Verhältniß des Nutzeffectes zu der angewandten Quantität Arbeit Pde:

$$E = \frac{Qde'}{Pde} = \frac{Q \tang. \gamma}{P} = \frac{1 - f^2 - 2f \tang. \gamma}{(1 - f^2)\tang. \gamma + 2f} \tang. \gamma.$$

Für $f = 0{,}08$, d. h. für gut geschmierte Flächen von Holz, und für $\tang. \gamma = \frac{1}{4}$ wird dieses Verhältniß

$$= 0{,}583,$$

d. h. die Nutzleistung beträgt 0,583 der bewegenden Kraft. Aber wenn man statt des mit Fett geschmierten Holzes bloß mit Wasser angefeuchtetes Holz anwendet, wie dieses häufig geschieht, z. B. Eichenholz, für welches $f = 0{,}25$ ist, und man setzt wieder $\tang. \gamma = \frac{1}{4} = 0{,}25$; so findet man:

$$E = 0{,}276,$$

woraus erhellet, wie vortheilhaft es ist, gut mit Fett oder Talg geschmierte Körper anzuwenden.

Da der Keil in den Künsten und Gewerben häufig angewandt wird und die Grundlage aller Schneideinstrumente bildet, so hielten wir es für zweckmäßig, uns einige Augenblicke bei seiner Theorie aufzuhalten, wovon wir übrigens im Verlaufe dieses Werkes mehrere Anwendungen zu machen Gelegenheit haben werden.

Reibung der Maschinentheile, welche durch Leitungen, Nuten rc. in einer unveränderlichen Richtung erhalten werden.

Betrachtung des Falles, wo die Kräfte alle in derselben Ebene liegen, welche zugleich die der Leitungen ist.

§. 215. Betrachten wir einen beliebigen Maschinentheil, welcher durch eine prismatische Stange AB (Fig. 66), die sich zwischen Leitungen oder Haltern a und a' bewegt, und zwar nach der Richtung ihrer Axe, eine Bewegung von einer bestimmten Richtung bekommt. Wir wollen zunächst annehmen, daß die auf diesen Maschinentheil wirkenden Kräfte in derselben durch diese Axe und durch die Stützpunkte a und a' der Berührungsflächen der Stange und der Leitungen gelegten Ebene liegen, indem diese Berührungsflächen als eine geringe Ausdehnung habend und auf dieser Ebene senkrecht angenommen werden. Der Einfachheit wegen wollen wir uns jede der gegebenen Kräfte in ihrem Angriffspunkte in zwei andere zerlegt denken, wovon die eine zu der Axe der Stange AB parallel und die andere darauf senkrecht ist; so entstehen durch die Reaction aller dieser Kräfte in den Stützpunkten a und a' Normaldruckkräfte N und N', wodurch Reibungen fN und $f'N'$ hervorgerufen werden, welche zu den Widerständen gezählt werden müssen, die der Bewegung der Stange AB entgegenwirken.

Um im Allgemeinen zu zeigen, wie man die Normaldruckkräfte N und N' bestimmen kann, wollen wir irgend einen Angriffspunkt m dieser Kräfte betrachten. Ferner bezeichne X und Y resp. die Summen der auf diesen Punkt wirkenden, auf AB senkrechten und dazu parallelen Componenten, y den Abstand des Stützpunktes a' von X, x den Abstand der Kraft Y von AB, d. h. mb und l den gegenseitigen Abstand der Punkte a und a', auf der Richtung der Axe AB gemessen. Endlich wollen wir jede Componente als positiv betrachten, welche die Stange von B gegen A oder von b gegen m zu bewegen strebt, so daß sie sich in diesem letzten Falle gegen die Halter zur Linken stützt, und folglich müssen wir die Componenten als negativ betrachten, welche dieselbe Stange in entgegengesetztem Sinne zu bewegen streben, wo der Sinn dieser Componenten übrigens durch die Pfeile in der Figur gegeben ist. Die Kraft $+X$ kann folglich in zwei andere parallele Kräfte zerlegt werden, welche die Druckkraft:

$$+\frac{Xy}{l} \text{ in } a \text{ und } +\frac{X(l-y)}{l} \text{ in } a'$$

hervorrufen.

Was die Kraft $+Y$ anlangt, so kann man sie bekanntlich nach der Theorie der Kräftepaare durch eine nach der Axe AB wirkende Kraft $+Y$ und durch ein auf AB senkrechtes Kräftepaar ersetzen, wodurch die Normaldruckkraft:

$$-\frac{Yx}{l} \text{ in } a \text{ und } +\frac{Yx}{l} \text{ in } a'$$

entsteht. Die aus der Wirkung von X und Y entspringenden Totaldruckkräfte sind also:

$$\frac{Xy}{l}-\frac{Yx}{l} \text{ in } a, \ \frac{X(l-y)}{l}+\frac{Yx}{l} \text{ in } a'.$$

Verfährt man auf dieselbe Weise mit allen zu AB parallelen oder darauf senkrechten Componenten und bemerkt überdieß, daß die in der Richtung dieser Axe selbst wirkenden keine Kräftepaare geben; so kann der Totaldruck:

in a durch $N = \Sigma\left(X\frac{y}{l} - Y\frac{x}{l}\right)$ und in a' durch $\Sigma\left(X\left(\frac{l-y}{l} + Y\frac{x}{l}\right)\right)$

dargestellt werden und die Stange AB wird durch jede dieser Druckkräfte gegen die linke oder rechte Leitung gedrückt, je nachdem sie positiv oder negativ ist.

Da ferner die Resultante oder die Summe der nach der Richtung der Axe AB wirkenden Kräfte durch:

$$\Sigma Y$$

ausgedrückt werden kann; so hat man für die Gleichung des Gleichgewichtes aller Kräfte, wenn die Bewegung von B gegen A zu geschieht:

$$\Sigma(Y) = f(N + N')$$

$$= f\Sigma\left(X\frac{y}{l} - Y\frac{x}{l}\right) + f\Sigma\left(X\frac{(l-y)}{l} + \frac{Yx}{l}\right),$$

welche die Kraft als Function der Widerstände gibt und worin man nur die absoluten Werthe von N und N' oder der zwischen den Klammern stehenden Größen nehmen muß, weil die Reibung immer in einem der Bewegung entgegengesetzten Sinne wirkt, in welcher Richtung die sie verursachenden Druckkräfte auch wirken mögen.

Wenn es geschieht, daß diese Größen in einem besonderen Falle beide dasselbe Zeichen haben, so hat man bloß, wenn man sie zusammen addirt:

$$\Sigma(Y) = f\Sigma(X);$$

allein dieser Umstand tritt nur zufällig ein, und es ist daher zweckmäßiger, die Untersuchung gleich von vorn herein in der allgemeinsten Voraussetzung anzustellen, wie weiter unten (§. 217) näher gezeigt werden wird.

Beispiel an der Reibung der Stampfer.

§. 216. Wir wollen z. B. annehmen, daß AB (Fig. 67) ein verticaler Stampfer sei, dessen Gesammtgewicht Q ist und auf welchen nach verticaler Richtung von unten nach oben der Druck P eines Hebedaumens wirkt, welcher in m die untere Fläche einer horizontalen Hebelatte mb berührt. Da dieser Druck eine nach mb von der rechten gegen die linke wirkende Reibung hervorruft, welche durch $f'P$ gemessen wird, wenn f' den Reibungscoefficienten für die einander berührenden Substanzen bezeichnet; so hat man in diesem Falle:

$$X = f'P,\ Y = P,\ N = f'P\frac{y}{l} - \frac{Px}{l},$$

$$N' = f'P\frac{(l-y)}{l} + \frac{Px}{l},$$

und folglich:

$$P - Q = f\left(P\frac{x}{l} - f'P\,\frac{y}{l}\right) + f\left(P\,\frac{x}{l} + ff'P\,\frac{(l-y)}{l}\right)$$

$$= 2fP\frac{x}{l} - 2ff'\,\frac{Py}{l} + ff'\,\frac{Pl}{l},$$

indem man bemerkt, daß hier im Allgemeinen $f'P\frac{y}{l} < \frac{Px}{l}$, und folglich N negativ ist. Hieraus ergibt sich der Ausdruck:

$$P = \frac{Ql}{l - 2fx - ff'(l - 2y)} = Q + fQ\,\frac{2x + f'(l - 2y)}{l - 2fx - ff'(l - 2y)},$$

welcher zeigt, daß es für die Kraft P vortheilhaft ist, x zu vermindern und die gegenseitige Entfernung l der beiden Stützpunkte a und a' zu vergrößern.

Wenn dagegen $f'P\frac{y}{l} > P\frac{x}{l}$ oder $x < f'y$ wäre, so hätte man bloß:

$$P = \frac{Q}{1 - ff'} = Q + fQ\,\frac{f'}{1 - ff'},$$

welcher Werth sehr von dem vorhergehenden verschieden ist.

Bemerkungen über den Fall, wo die reibenden Flächen der Leitungen eine gewisse Ausdehnung haben.

§. 217. Wenn die reibenden Flächen der Leitungen eine große Ausdehnung haben, was z. B. der Fall ist, wenn statt der Halter a und a' stetige Nuten oder Falzen angewandt werden; so scheinen die Werthe der Druckkräfte N und N' ganz unbestimmt zu sein, weil sie sich auf eine unendlich große Anzahl von Punkten vertheilen; allein wenn man bemerkt, daß die vordern und hintern Flächen der Leitungen oder Nuten parallel sind und zwischen ihnen und der Stange des Stampfers ein nothwendiger Spielraum bleibt, so überzeugt man sich leicht, daß diese Unbestimmtheit nicht stattfindet; denn die Stange des Stampfers stützt sich entweder ganz gegen dieselbe Fläche der Nute, oder mit dem einen Ende gegen die eine und mit dem andern Ende gegen die entgegengesetzte Fläche derselben. In dem ersten Falle haben die Druckkräfte N und N' dasselbe Zeichen, und ihre Summe, welche den Totaldruck ausdrückt, ist unabhängig von der Betrachtung der einzelnen Druckkräfte in jedem Punkte und reducirt sich einfach auf die Summe $\Sigma(X)$ der Componenten der auf der Axe AB der Stange senkrechten Kräfte. In dem zweiten Falle stützt sich diese Stange mit ihren entgegengesetzten Flächen auf die Kanten, welche oben und unten die Flächen der Nuten begränzen, so daß die Druckkräfte N und N' in bestimmten Punkten wirken, wie in dem obigen Falle, wo die Berungsflächen der Leitungen sehr klein waren. Aber da man zum voraus nicht weiß, welcher von den beiden Fällen stattfindet, so muß man die Aufgabe zuerst in der zweiten allgemeinern Voraussetzung lösen und sich nach den Resultaten der Rechnung überzeugen, ob die sich daraus ergebenden Werthe für N und N' nicht dasselbe Zeichen haben, in welchem Falle man, abgesehen von diesem Zeichen, nach dem weiter oben Gesagten bloß:

$$f(N+N') = \Sigma(X)$$

nehmen müßte.

Diese Betrachtungen sind hauptsächlich auf die Gatter anwendbar, welche als Träger der Operatoren oder Werkzeuge der Maschinen dienen und in ihren Bewegungen durch vorspringende Halter oder Kanten geleitet werden, die sich in Nuten von einem ähnlichen Profile fortbewegen. Da man aber alsdann zwei verschiedene Systeme von Leitungen zu betrachten hat, so ist wohl zu bemerken, daß der Gang der Auflösung derselbe bleibt, als wenn nur ein einziges System vorhanden wäre, wofern die Kräfte in Beziehung auf die auf dem Gatter oder Rahmen senkrechte Ebene, welche das Intervall zwischen den Leitungen in zwei gleiche Theile theilt, auf eine symmetrische Weise wirken, was in der That bei gut eingerichteten Maschinen fast immer der Fall ist. Im entgegengesetzten Falle müßte man jede Kraft in ihrer Ebene auf die in §. 215 angegebene Weise zerlegen und dann die sich daraus ergebenden perpendiculären, auf die beiden Enden des Gatters wirkenden Druckkräfte wieder in andere zerlegen, welche in jedem wirklichen Stützpunkte wirken, was in gewissen Fällen auf besondere Schwierigkeiten führen würde, welche man nur beseitigen könnte, wenn man die größere oder geringere Elasticität des Gatters oder Rahmens in Betracht zöge.

Betrachtung des Falles, wo auf das Gatter oder den Rahmen eine Kraft wirkt, welche zu seiner Ebene parallel und auf der Richtung der Leitungen senkrecht ist.

§. 218. Wenn auf das Gatter oder den Rahmen Kräfte wirken, welche zu der Ebene desselben parallel und auf der Richtung der Bewegung senkrecht sind; so entsteht nicht bloß auf der obern Fläche der vorspringenden Kanten oder Rippen ein Druck und eine Reibung, sondern auch Druckkräfte auf die zu dem Gatter parallelen Flächen dieser Rippen, wodurch die von den andern Componenten der Kräfte herrührenden Druckkräfte verändert werden.

Es sei Fig. 68 der Transversaldurchschnitt des Rahmens mit einer auf der Richtung der Leitungen a und a' senkrechten Ebene; Z bezeichne eine Kraft, welche in dieser Ebene parallel zu der Axe CD des Profiles wirkt; x bezeichne die Entfernung mb dieser Kraft oder ihres Angriffspunktes von der Axe CD, z sei die Entfernung der Projection b dieses Punktes von dem Stützpunkte der einen Nute und endlich sei l die auf der Axe CD gemessene gegenseitige Entfernung der beiden Stützpunkte a und a'.

Für die Kraft Z kann man eine andere ihr gleiche Kraft, welche in der Richtung der Axe CD wirkt und auf der oberen Fläche der Rippe in a eine Reibung hervorruft, die durch fZ ausgedrückt werden kann, und ein Kräftepaar substituiren, welches in a und a' in normaler Richtung auf den Flächen der Leitungen mit einer Stärke wirkt, die durch:

$$Z\frac{x}{l}$$

ausgedrückt wird, abgesehen von dem Zeichen, welches in jedem Falle nach dem weiter oben Gesagten bestimmt werden kann, und diese Kraft muß außerdem mit den Druckkräften verbunden werden, welche von den übrigen Componenten der gegebenen Kräfte herrühren, die auf die oberen und unteren Enden des Gatters wirken.

Reibung der Zapfen rotirender Maschinentheile.

Ausdruck dieser Reibung vermittelst der allgemeinen Resultante der Kräfte für cylindrische Zapfenlager.

§. 219. Es sei A (Fig. 69) ein Zapfen eines beliebigen Rades, welcher in dem cylindrischen Zapfenlager amb, dessen Mittelpunkt C ist, dreht, und es sei Bm die Richtung der Resultante N aller auf diesen Zapfen wirkenden Kräfte. Betrachtet man die Bewegung des Rades von der Ruhe aus, wo der Berührungspunkt des Zapfens und seines Lagers in m' liegt und die Resultante N nach dem Halbmesser $m'C$ gerichtet ist; so sieht man, daß die Wirkung der an diesem Rade angebrachten Kräfte zunächst dahin geht, den Zapfen A auf dem Kreisbogen amb z. B. von m' gegen m fortrollen zu machen, welches Fortrollen so lange stattfindet, als die Resultante N nicht durch den Berührungspunkt m des Zapfens und seines Lagers geht und die tangentiale Componente in diesem Punkte die Reibung nicht überwinden kann, welche von dem Drucke der normalen Componente herrührt.

Bezeichnen wir also mit f das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die mit einander in Berührung kommenden Substanzen und mit α den Winkel, welchen die Richtung von N mit der Normale mC bildet; so ist $N\,cos.\,\alpha$ der Druck im Punkte m, $fN\,cos.\,\alpha$ die daraus entspringende Reibung und $N\,sin.\,\alpha$ die tangentiale Componente von N. Man hat also zur Bestimmung des Winkels α die Gleichung:

$$fN\,cos.\,\alpha = N\,sin.\,\alpha;$$

woraus folgt:

$$tang.\,\alpha = f.$$

Die Intensität der Reibung wird also ausgedrückt durch:

$$fN\,cos.\,\alpha = \frac{fN}{\sqrt{1+f^2}} = f'N, \text{ wenn } \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f'$$

gesetzt wird, und ihr Moment in Beziehung auf die Axe A des Rades, welche eine feste Lage behält, so lange N sich nicht ändert, ist gleich:

$$\frac{fN}{\sqrt{1+f^2}}\,\varrho = f'N\varrho,$$

wo ϱ den Halbmesser mA des Zapfens bezeichnet.

Wenn der Zapfen A (Fig. 70) ganz fest liegt und nicht mehr mit dem Rade fest verbunden ist, sondern letzteres in seiner Mitte mit einem cylindrischen Loche oder Auge zur Aufnahme des Zapfens durchbrochen ist; so findet offenbar noch dasselbe statt, nur mit dem Unterschiede, daß, da die Drehung um den Mittelpunkt C des Loches geschieht, man für ϱ den Halbmesser mC desselben und nicht mehr mA nehmen muß.

Reibung in prismatischen Zapfenlagern.

§. 220. Wenn das Zapfenlager, statt cylindrisch zu sein, einen Polygonaldurchschnitt hätte, wie solches leider in der Praxis zuweilen vorkommt (Fig. 71); so müßte man die Resultante N in zwei andere, n und n', zerlegen, welche in den Punkten m und m' der beiden Flächen wirken, welche den Zapfen unmittelbar tragen, und in diesen Punkten würden die Reibuugen fn und $f'n'$ hervorgerufen, oder man müßte vielmehr den Zapfen als eine Art Keil betrachten (§. 207), welcher durch die Reactionskräfte n und n' und durch die Reibungen fn, $f'n'$ im Gleichgewichte erhalten wird. Denn bezeichnet γ den Winkel, welchen die beiden Stützflächen mit einander bilden, und sind α, β die Winkel, welche die Perpendikel Am, Am' auf diesen Flächen resp. mit der Richtung von N zu beiden Seiten bilden; so findet man durch ähnliche Schlüsse, wie in §. 208, wenn man bemerkt, daß hier $-f$ für f' gesetzt werden muß:

$$n = N \frac{(sin.\,\beta + f\,cos.\,\beta)}{(1+f^2)\,sin.\,\gamma},\quad n' = N \frac{(sin.\,\alpha - f\,cos.\,\alpha}{(1+f^2)\,sin.\,\gamma},$$
$$sin.\,\gamma = sin.\,(\alpha+\beta).$$

Diese Druckkräfte bringen in m und m' die Totalreibung:

$$f(n+n') = fN \frac{sin.\,\alpha\,sin.\,\beta - f\,cos.\,\alpha + f\,cos.\,\beta}{(1+f^2)\,sin.\,\gamma}$$

hervor, deren Werth im Allgemeinen größer ist, als der weiter oben gefundene; denn durch die bekannten Regeln ergibt sich leicht, daß dieser Werth ein Minimum werden würde, wenn man hätte:

$$tang.\,\alpha = f,\ \text{folglich}\ n' = 0,\ n = \frac{N}{(1+f^2)\,cos.\,\alpha} = \frac{N}{\sqrt{1+f^2}}\ (\S.\,210)$$

$$f(n+n') = \frac{fN}{\sqrt{1+f^2}},$$

woraus erhellet, daß alles wie in dem Falle cylindrischer Zapfenlager vor sich geht, und da der Zapfen auf der Fläche m von selbst im Gleichgewichte ist und die Kraft N durch den Punkt m geht; so hat er weder ein Bestreben, gegen den untern Theil m', noch gegen den obern Theil m'' des Zapfenlagers einen Druck auszuüben. Wenn dagegen $sin.\,\alpha > f\,cos.\,\alpha$ wäre, so wäre der obige Werth von n' positiv und es fände zu gleicher Zeit in m und m' ein Druck statt. Wenn endlich $sin.\,\alpha < f\,cos.\,\alpha$ wäre, so wäre m' negativ und der Zapfen hätte ein Bestreben, sich in m'' gegen die obere Fläche zu stützen, so daß man folglich den in dem obigen allgemeinen Ausdrucke der Reibung vorkommenden Werth von β verändern und namentlich α für β und β' für α setzen müßte, wo β' den Winkel bezeichnet, welchen Am'' mit der alsdann offenbar zwischen m und m'' liegenden Richtung von N bildet.

Gränze des Rollungswinkels der Zapfen.

§. 221. Indem wir zu dem in Fig. 68 dargestellten Falle zurückkehren, wollen wir bemerken, daß die Relation:

$$tang.\,\alpha = f$$

die Lage des Punktes m auf dem Zapfenlager und folglich die Länge des Bogens mm' vollständig bestimmt. Denn bezeichnet r den Halbmesser $mC = m'C$ der Höhlung des Zapfenlagers, γ den unbekannten Winkel mCm', welchen diese beiden Halbmesser mit einander bilden, β den Winkel mBm', welchen die Richtung von N mit der verlängerten Richtung von $m'C$ bildet, und ist ferner $\alpha = CmB$, $\varrho = Am$; so hat man in dem Dreiecke mBC zur Bestimmung von γ und mm' die Relationen:

$$\gamma = \alpha + \beta, \quad mm' = (\alpha + \beta) r,$$

worin man das Zeichen von β verändern müßte, wenn der Durchschnittspunkt B von Nm und $m'C$ auf der andern Seite von m läge.

Was den Winkel betrifft, welchen das System um die Axe A beschrieben hat, während der Zapfen von m' bis m fortgerollt ist, so ist leicht zu bemerken, daß, wenn man auf dem Umfange des Zapfens den Bogen $mm_1 = mm'$ nimmt, der in Rede stehende Winkel kein anderer ist, als der, welchen die verlängerte Richtung des Halbmessers Am_1 mit seiner ursprünglichen Richtung $m'C$ bildet. Bezeichnet also θ diesen Winkel, so gibt das Dreieck ACD die Gleichung:

$$\theta = mAm_1 - mCm' = \frac{mm_1}{\varrho} - \frac{mm'}{r}$$

$$= mm'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) = (\alpha + \beta)\left(\frac{r}{\varrho} - 1\right),$$

worin außer θ alles bekannt ist, weil $\alpha = arc\,(tang. - f)$ ist.

Die Gränze des Winkels, welchen ein Rotationssystem in Folge des bloßen Fortrollens seiner Zapfen auf ihren Lagern beschreibt, ist besonders in dem Falle zu bestimmen von Nutzen, wo die ganze Amplitude der Bewegung des Systemes selbst eine Gränze hat, wie dieses bei den Aufhängungsarten an scharfen Kanten oder Schneiden, bei den Balanciers und gewissen Gelenksystemen der Fall ist; denn vermittelst der vorhergehenden Relationen kann man die Zapfenreibung auf eine rollende Reibung oder auf die Reibung der zweiten Art zurückführen, deren Intensität weit geringer ist, als die der ersten Art (§. 193), besonders bei metallenen und sehr harten Körpern, welche man bei diesen Arten von Systemen anwendet. Denn es kommt nur darauf an, zwischen den Halbmessern ϱ und r eine schickliche Relation aufzustellen, damit der Winkel θ größer, als der der Amplitude der Schwingungen entsprechende Winkel, oder wenigstens ihm gleich ist.

In dem Falle einer stetigen Rotationsbewegung hat die Verkleinerung des Winkels θ offenbar keinen merklichen Vortheil. Auch gibt man alsdann dem Halbmesser r der Zapfenlager einen Werth, welcher den Halbmesser der Zapfen nur um so viel übertrifft, als der nöthige Spielraum durchaus erfordert, durch welche Einrichtung die Stabilität der Bewegung vergrößert und in den Augenblicken, wo eine Unterbrechung der Wirkung der Kräfte stattfindet, nachtheilige Stöße vermieden werden (§. 24 und §. 33).

Reibung der stehenden Zapfen, Vorsprünge der Axen ꝛc.

Moment und mittlerer Hebelarm der Reibung kreisförmiger Scheiben und Ringe.

§. 222. Es sei NC (Fig. 72) die Axe eines stehenden cylindrischen Zapfens, welcher von einer kreisförmigen Grundfläche ab begränzt wird und sich auf den ebenen Boden $abef$ eines Zapfenlagers stützt, gegen dessen Ränder zu derselbe seitwärts eine Ausladung oder einen Vorsprung hat. Wir wollen annehmen, daß die allgemeine Resultante der auf diese Axe wirkenden Kräfte in zwei andere zerlegt sei, wovon die eine nach der Richtung dieser Axe und die andere nach einer darauf senkrechten Richtung wirkt; so ruft diese letzte eine Reibung hervor, deren Intensität und Moment auf die weiter oben (§§. 219 und 220) für die liegenden Zapfen angegebene Weise berechnet werden können. Was die erste Kraft anlangt, welche wir mit N bezeichnen wollen und welche von N gegen C zu wirken soll; so bringt sie auf der Grundfläche ab einen Widerstand hervor, dessen absoluter Werth durch fN ausgedrückt wird, wo f den Reibungscoefficienten der einander berührenden Substanzen bezeichnet, aber deren Hebelarm nicht **a priori** bekannt ist.

Um denselben zu bestimmen, denkt man sich den Druck N gleichförmig auf alle Punkte der Grundfläche ab vertheilt, d. h. man nimmt an, daß dieser Druck für jeden Theil dieser Fläche der Größe dieses Theiles proportional ist. Wenn also n den auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck bezeichnet, so wird der auf einen Ring von den Halbmessern ϱ und $\varrho + d\varrho$ ausgeübte Druck durch das Product $2n\pi\varrho d\varrho$ ausgedrückt, die Reibung dieses Ringes durch $2fn\pi\varrho d\varrho$ und das Moment dieser Reibung durch:

$$2fn\pi\varrho^2 d\varrho,$$

wo π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet.

Wenn man dieses Moment von einem beliebigen Werthe $\varrho = r'$ bis zu einem andern Werthe $\varrho = r$ integrirt, so erhält man für das Totalmoment der Reibung des Ringes, welcher zwischen den Kreisen von den Halbmessern r und r' liegt:

$$2fn\pi \int_r^{r'} \varrho^2 d\varrho = {}^2/_3 fn\pi\,(r^3 - r'^3).$$

Aber die Fläche dieses Ringes wird ausgedrückt durch:

$$\pi\,(r^2 - r'^2),$$

und seine Totalreibung durch:

$$fN = fn\pi\,(r^2 - r'^2).$$

Bezeichnet man also den mittlern Hebelarm dieser letzten Reibung mit x, so hat man:

$$fNx = fn\pi\,(r - r'^2)\,x = {}^2/_3 fn\pi\,(r^3 - r'^3),$$

folglich:

$$x = {}^2/_3\,\frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} = {}^2/_3\,\frac{r^2 + rr' + r'^2}{r + r'}.$$

Wenn man ferner die Breite des Ringes mit l und seinen mittleren Halbmesser mit r_1 bezeichnet, so hat man:

$$r = r_1 + \frac{1}{2} l,\ r' = r_1 - \frac{1}{2} l \text{ und } x = r_1 + \frac{l^2}{12 r_1},$$

woraus erhellet, daß man ohne merklichen Fehler r_1 für x nehmen kann, so oft z. B. l kleiner ist, als $\frac{1}{3} r_1$.

Reibung der stehenden Zapfen der verschiedenen Arten.

§. 223. In dem besonderen Falle, wo die Grundfläche des stehenden Zapfens ein ganzer Kreis von dem Halbmesser ϱ ist, wird $r' = 0$ und $r = \varrho$, so daß man bloß hat:

$$x = \frac{2}{3} \varrho.$$

Kennt man auf diese Weise den Werth des mittlern Hebelarms der Reibung, so braucht man denselben bloß noch durch fN zu multipliciren, um das Moment dieser Reibung zu erhalten, und wenn man die Quantität Arbeit direct bestimmen will, welche diese Reibung bei einer ganzen Umdrehung der Axe consumirt; so braucht man offenbar dieses Moment nur durch 2π zu multipliciren. Wenn man endlich für die Reibung eine Kraft X substituiren will, deren Richtung den äußern Cylinder des Zapfens von dem Halbmesser r berührt und dieselbe Quantität Arbeit hervorzubringen im Stande ist; so braucht man in dem allgemeinen Falle eines Kreisringes nur zu setzen:

$$2\pi r X = 2\pi \cdot \frac{2}{3} fN \frac{r^2 + rr' + r'^2}{r + r'},$$

woraus folgt:

$$X = \frac{2}{3} fN \left(1 + \frac{r'^2}{r(r + r')}\right),$$

als der Ausdruck des mittleren Werthes dieser Reibung, welche als im Endpunkte des Halbmessers r wirkend angesehen wird.

Zuweilen ist die untere Fläche des stehenden Zapfens ein Kugelabschnitt (Fig. 73) und er steht auf einem ähnlichen converen Vorsprunge des Zapfenlagers, um dadurch die Arbeit der Reibung oder ihren mittleren Hebelarm zu vermindern. In andern Fällen sind die Ränder des Zapfenlagers weggenommen, und der Zapfen wird unterwärts von einem kegelförmigen Stücke mit einem sphärischen Boden begränzt und tritt in eine ähnliche Vertiefung des Zapfenlagers (Fig. 74). Endlich bildet auch oft das Lager den Zapfen, während sich in der Welle die entsprechende Vertiefung zur Aufnahme des Zapfens befindet (Fig. 75), welche Einrichtung den Vortheil gewährt, daß die reibenden Flächen nicht durch die abgeriebenen Theilchen angegriffen werden, welche sich in dem Zapfenlager anhäufen könnten, wenn die Axe vertical steht; aber diese Einrichtung bietet auch den Nachtheil dar, daß die Schmiere sich leicht entfernen kann. In allen diesen Fällen ist es wegen der geringen Ausdehnung der reibenden Flächen hinreichend genau, für den mittleren Hebelarm des Widerstandes fN nur $\frac{2}{3}$ des größten Hebelarmes zu nehmen, an dessen Ende derselbe wirkt *).

*) Wenn man annimmt, daß jedes zu der Axe concentrische Ringelement der reibenden Fläche nach der Richtung dieser Axe mit einem Theile

Was den mittleren Hebelarm der von den transversalen oder auf der Axe senkrechten Druckkräften herrührenden Reibung anlangt, so setzt man denselben gleich der Entfernung dieser Axe von dem Schwerpunkte der Erzeugungslinie des reibenden Theiles des Zapfens, was auf die Annahme hinausläuft, daß diese Druckkräfte auf alle Stützpunkte dieser Erzeugungslinie gleichförmig vertheilt sind.

Reibung der Vorsprünge der Wellen, der Ringe, Scheiben ꝛc.

§. 224. Gewöhnlich sind die Wellen der Räder weit stärker, als ihre Zapfen, deren Durchmesser und Vorsprung so weit vermindert werden, als es die Haltbarkeit gestattet, um den Hebelarm der Reibung, welche, wie wir gesehen haben, eine wesentliche Rolle spielt, so viel als möglich zu verkleinern. Wenn auf die Wellen nach der Richtung ihrer Axe Kräfte wirken, so geschieht es oft, daß sich die eine der Flächen, wovon diese Wellen begränzt werden, seitwärts gegen die Zapfenlager stützt und daselbst eine Reibung hervorruft, deren mittlerer Hebelarm nach §. 222 durch die Formel:

$$x = r_1 + \frac{l^2}{12\, r_1}$$

---

von N belastet ist, welcher seiner Projection auf eine auf dieser Axe senkrechte Ebene proportional ist, was in dem gegenwärtigen Falle sehr nahe mit der Wirklichkeit übereinstimmen muß, weil der Normaldruck auf die verticalen Elemente offenbar Null ist, und man bezeichnet die äußersten Halbmesser des kegelförmigen sich reibenden Theiles des Zapfens mit r, r' und mit R den Halbmesser der den Zapfen begränzenden Kugelkappe und bemerkt endlich, daß r' der Halbmesser der Grundfläche dieser Kugelkappe ist; so findet man für das Moment der Reibung des kegelförmigen Stückes:

$$^2/_3\, fNr \sqrt{1 - \frac{r'^2}{R^2}} \left(1 - \frac{r'^3}{r^3}\right) =$$

$$^2/_3\, fNr \left(1 - \frac{r'^3}{r^3}\right)\left(1 - {}^1/_2 \frac{r'^2}{R^2} - {}^1/_8 \frac{r'^4}{R^4} - {}^1/_{16} \frac{r'^6}{R^6} - \dots\right)$$

und für das der Kugelkappe:

$$\frac{2fN}{r^2}\int_{r'}^{0} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}\, \varrho^2 d\varrho =$$

$$^2/_3\, fNr \frac{r'^3}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2.5}\frac{r'^3}{R^2} - \frac{3}{8.7}\frac{r'^4}{R^4} - \frac{3}{16.9}\frac{r'^6}{R^6} - \dots\right).$$

Addirt man diese Momente zusammen und läßt die höhern Potenzen von $\frac{r'}{R}$ als die zweite hinweg, so erhält man, wenn R weit größer ist, als r', für das Totalmoment den Ausdruck:

$$\left(^2/_3\, fN \cdot r \left(1 - {}^1/_2 \frac{r'^2}{R^2} + {}^1/_5 \frac{r'^3}{r^3} \frac{r'^2}{R^2}\right)\right).$$

Diese Resultate würden offenbar auf die Reibung der Hähne und der Frictionskegel, deren kleine Grundfläche nicht unterstützt ist, nicht mehr anwendbar sein, und man müßte alsdann zu der in §. 207 u. f. aufgestellten Theorie des Keiles seine Zuflucht nehmen, um die Normaldruckkräfte und Reibungen für jedes Ringelement zu erhalten.

berechnet werden muß, wo l die mittlere Breite des sich auf dem Vorsprunge der Welle reibenden Ringes und r_1 den mittleren Halbmesser dieses Ringes bezeichnet, woraus man sieht, wie wichtig es ist, jede dieser beiden Größen so viel als möglich zu verkleinern.

Bei gut eingerichteten Maschinen reducirt man die Vorsprünge oder reibenden Theile der Welle auf Ringe, deren Durchmesser sehr wenig größer ist, als der der Zapfen, diese Ringe mögen übrigens an der Welle fest sitzen, oder davon abgemacht werden können und sogenannte Scheiben bilden, deren man oft mehrere auf einander legt, wenn man den Einfluß zufälliger Widerstände vermeiden will, welche der Bewegung einer derselben hinderlich sein könnten (Fig. 76 u. 77). Zuweilen erhält man auch einen unveränderlichen Spielraum zwischen den Vorsprüngen der Wellen und der Zapfenlager vermittelst kegel- oder ringförmiger Verstärkungen, welche an dem Umfange der Zapfen angebracht sind und nach unten einen Ausschnitt oder eine Nute darbieten, damit der Hebelarm der tangentialen Reibung nicht unnütz vergrößert wird (Fig. 78).

Wenn auf die Welle in der Richtung ihrer Axe beträchtliche Kräfte wirken, so ist es vortheilhafter, wenn sich die Zapfen in eine abgerundete Spitze endigen und sich gegen einen äußern Vorsprung stützen (Fig. 79); denn auf diese Weise kann man den Hebelarm der Reibung gewissermaßen beliebig verkleinern. Bei den Drehbänken, Hämmern ꝛc. werden die gewöhnlichen Zapfenlager fast gar nicht angewandt und die Welle stützt sich alsdann einzig und allein auf die Spitzen der Zapfen, welche sich schnell abnutzen, und wobei es alsdann nothwendig wird, daß die Vorsprünge oder Widerlager durch Keile oder Druckschrauben einander mehr genähert werden.

Wenn große ebene Stücke, wie die Muttern großer Schrauben, gewisse sich drehende Platten ꝛc. auf Punkten ruhen müssen, welche sich in einer gewissen Entfernung von der Rotationsaxe befinden, so vermindert man den Hebelarm der Reibung und ihre Intensität, wenn man zwischen diese Platten und die Vorsprünge (Fig. 80) einen zu der Axe concentrischen eisernen Ring legt, welcher sich in einem kupfernen Lager drehen kann, das man mit einer fettigen Substanz versieht. Zuweilen wendet man auch statt dieses Ringes kleine Laufräder oder Rollen an, weßhalb wir hier etwas näher auf die Theorie des Widerstandes dieser Rollen eingehen wollen, welche mit sehr großen Nachtheilen verbunden sind, wenn man denselben kleine Dimensionen gibt, und diese Nachtheile bestehen hauptsächlich darin, daß sie sich nicht auf allen Seiten gleich stark abnutzen und sich alsdann bald nicht mehr drehen.

Widerstand der Räder und Rollen.

Widerstände der Rollen mit festen Axen.

§. 225. Wir wollen eine Rolle mit der festen Axe C (Fig. 81) betrachten, auf welche eine auf einer Platte AB liegende Last drückt, die in horizontaler Richtung von der Kraft F fortbewegt wird; so ist klar, daß diese Kraft nur die gleitende Reibung in C und die rollende Reibung in T zu überwinden hat, wovon die letzte von der Last, dem Gewichte p des Rades oder der Rolle und der Kraft F herrührt, deren

Resultante $= \sqrt{(P+p)^2 + F^2}$ ist. Wenn sich die Rolle oder Walze nicht um ihre Axe C drehen könnte, so würde durch die Reibung in T ein Widerstand fP entstehen, welchem für einen von dem Angriffspunkte der Kraft F durchlaufenen Weg e die Quantität Arbeit:

$$Fe = fPe$$

entspräche, wo f wieder den Reibungscoefficienten für die einander berührenden Substanzen bezeichnet (§. 188).

Wenn sich dagegen die Walze um ihre Axe dreht, so entsteht an dieser Axe eine Reibung, welche nach §. 219 ausgedrückt wird durch:

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{(P+p^2)^2+F^2} = f'(P+p),$$

wenn F^2 gegen $(P+p^2)^2$ vernachlässigt werden kann, und außerdem entsteht in dem Berührungspunkte T der Walze und der Platte eine Reibung der zweiten Art, welche ausgedrückt wird durch:

$$2A\frac{P}{D},$$

wenn die Bezeichnungen und Benennungen in §§. 194 und 195 beibehalten werden.

Bezeichnet ferner $R = {}^1/_2 D$ den Halbmesser der Walze, r den ihrer Axe, so ist klar, daß, wenn der von F in T beschriebene Weg $= e$ ist, der Angriffspunkt der Reibung $f'(P+p)$ dieser Axe einen Weg $= \frac{re}{R}$ beschreibt, so daß man nach §§. 194, 196 und 219 in den gegenwärtigen Voraussetzungen für die von der Kraft F längs des Weges e hervorgebrachte Quantität Arbeit hat:

$$Fe = A\frac{P}{R}e + f'\frac{(P+p)r}{R}e,$$

und folglich:

$$F = A\frac{P}{R} + f'\frac{(P+p)}{R}r,$$

woraus erhellet, daß die Intensität der Kraft desto mehr abnimmt, je größer der Halbmesser der Walze wird, sowohl an und für sich, als in Beziehung auf den der Axe.

Die vorhergehende Relation setzt jedoch voraus, daß die Platte AB und die Walze genau gearbeitet sind und daß sich namentlich die Walze wirklich dreht, wozu erfordert wird, daß die Reibung fP in T, vermittelst welcher die Wirkung der Kraft F auf die Walze übertragen wird und allein wirken würde, wenn die Walze unbeweglich wäre, keinen kleinern Werth hat, als:

$$A\frac{P}{R} + f\frac{(P+p)r}{R}.$$

Nun würde aber die Rotationsbewegung auf jeden Fall verhindert werden, wenn die Platte oder Walze durch die Abnutzung oder irgend welche andere Ursache so beträchtliche Unebenheiten bekäme, daß das

Moment von P in Beziehung auf C größer wäre, als das der Reibung fP.

Einfluß der Unebenheiten des Bodens auf die Bewegung der Walzen.

§. 226. Betrachtet man z. B. ein festes Hinderniß, welches sich in Beziehung auf die Kraft F (Fig. 81) hinter dem Berührungspunkte T in a befindet, auf dem Umfange der Rolle oder Walze eine Höhe $ab = h$ hat und vom Punkte T um die Länge $aF = l$ entfernt ist; so sieht man leicht ein, daß das Rollen, statt um den Punkt T, um den Punkt a stattzufinden strebt, so daß die Kraft F, welche im ersten Augenblicke mit dem Hebelarme $CT = cb = R$ wirkt, vermittelst der Reibung fP, welche im Punkte a hervorgerufen wird, die Last P heben muß, welche in diesem Punkte in Beziehung auf die Axe C an dem Hebelarme $CD = aT = l$ wirckt, wodurch in diesem ersten Augenblicke der von der Axe C herrührende Widerstand $f'(P+p)\frac{r}{R}$ um die Größe:

$$\frac{Pl}{R} = P\sqrt{\frac{ab(2R + ab)}{R^2}} = P\sqrt{\frac{h(2R+h)}{R^2}} = P\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

zunimmt, wenn h gegen R als sehr klein angenommen wird. Man hat folglich alsdann:

$$F = \frac{Pl}{R} + f'\frac{(P+p)r}{R} = P\sqrt{\frac{2h}{R}} + f'\frac{(P+p)r}{R},$$

wenn die Reibung der zweiten Art, welche in a in Folge der relativen Bewegung der Platte und der Rolle oder Walze hervorgerufen wird und deren virtuelle Geschwindigkeit gegen die Geschwindigkeit dieser Platte Null oder unendlich klein ist, unberücksichtigt bleibt. Wenn dieser Werth von F größer wäre, als die in a verursachte directe Reibung fP, indem die Walze unbeweglich bleibt; so würde sie sich auch nicht drehen und der Widerstand würde bloß gemessen durch fP, wie bei dem gewöhnlichen Uebereinanderhingleiten fester Körper.

Was die Quantität Arbeit anlangt, welche die Kraft F hervorbringen muß, um das Hinderniß zu überwinden oder den Punkt b nach T zu bringen, so wird dieselbe offenbar ausgedrückt durch (§. 9):

$$Ph + f'(P+p)\frac{r}{R}\,arc.\,bT = Ph + f'(P+p)\,r\,arc.\,tang.\,\frac{l}{R},$$

und da der Weg, der von ihrem Angriffspunkte a in ihrer Richtung beschrieben ist, eine Länge $aT = l$ hat; so sieht man, daß hierzu eine mittlere Kraft erforderlich ist, welche ausgedrückt wird durch (§. 9):

$$\frac{Ph}{l} + f'(P+p)\frac{r}{l}\,arc.\,tang.\,\frac{l}{R}$$

$$= P\sqrt{\frac{h}{2R}} + f'(P+p)\frac{r}{\sqrt{2Rh}}\,arc.\left(tang. = \sqrt{\frac{2h}{R}}\right),$$

wenn h wieder gegen $2R$ vernachlässigt werden kann.

Uebrigens ist die obige Quantität Arbeit nicht ganz für die Walze verloren; denn man sieht leicht ein, daß, wenn das Hinderniß über den Punkt T hinaus ist, ein durch Ph ausgedrückter Theil dieser Arbeit während des Herabsinkens von P restituirt wird; allein da das Hinderniß die Platte nicht erreichen oder verlassen kann, ohne daß ein Stoß stattfindet, so sieht man leicht ein, daß durch die Unregelmäßigkeit der Bewegung nothwendig ein meßbarer Verlust an lebendiger Kraft bewirkt wird (§. 19), welchen wir in der Folge berechnen lernen werden, abgesehen davon, daß sehr viele Fälle vorkommen, wo die aufwärts gerichtete Bewegung der Platte durch unüberwindliche Hindernisse verhindert wird, wodurch ein Einklemmen bewirkt wird und Widerstände hervorgerufen werden, welche unüberwindlich sind oder wenigstens die Drehung der Walze verhindern.

Widerstände der Räder und Walzen mit beweglicher Axe.

§. 227. Die meisten dieser Bemerkungen sind auf den Fall eines Rades (Fig. 82) anwendbar, an dessen Axe C unmittelbar eine Kraft T angebracht ist, so daß sich diese Axe nicht mehr dreht, sondern mit dem Rade gleichzeitig parallel zu dem horizontalen Boden AB fortrückt.

Wenn P wieder die Last bezeichnet, welche hier unmittelbar auf der Axe ruht, und p das eigene Gewicht des Rades, so hat man offenbar:

$$Fe = \frac{A(P+p)e}{R} + f'\frac{r}{R}e\sqrt{P^2+F^2}$$

$$F = \frac{A(P+p)}{R} + f'P\frac{r}{R},$$

wenn unter dem Wurzelzeichen F^2 gegen P^2 vernachlässigt werden kann.

Wenn sich zwischen dem Boden und dem Umfange des Rades irgend ein festes Hinderniß ab (Fig. 82) befindet, so muß man, wie vorhin, für das Glied $A\frac{(P+p)}{R}$ die Größe:

$$(P+p)\frac{bD}{CD} = (P+p)\sqrt{\frac{h(2R-h)}{(R-h)^2}} = (P+p)\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

oder:

$$(P+p)\frac{aT}{CT} = (P+p)\sqrt{\frac{h(2R+h)}{R^2}} = (P+p)\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

setzen, wenn h wieder gegen R vernachlässigt werden kann und die Höhe des Widerstandes ausdrückt. Die Drehung findet in b oder in a statt, je nachdem sich das Hinderniß an dem Boden, oder an dem Umfange des Rades befindet.

Aus diesen Ausdrücken erhellet übrigens, daß die zur Ueberwindung des Hindernisses erforderliche Kraft im directen Verhältnisse von $\sqrt{R}$ abnimmt, d. h. die Kraft verhält sich wie die Quadratwurzel aus dem Halbmesser des Rades.

§. 228. Da durch die obige Gleichung zwischen der Constante A, welche sich nur mit der physischen Beschaffenheit des Bodens und des

Rades zu ändern scheint, und den verschiedenen übrigen Größen F, r, R, P, f', welche **a priori**, oder durch das Experiment erhalten werden, eine Relation aufgestellt wird; so sieht man, daß, wenn das von Coulomb in Beziehung auf den Widerstand bei dem Rollen beobachtete Gesetz in diesen verschiedenen Fällen anwendbar ist, die Werthe dieser Constante für jeden speciellen Fall bestimmt werden können; denn die erwähnte Gleichung gibt:

$$A = R\left(\frac{F}{P+p} - f'\frac{r}{R}\sqrt{\frac{F^2}{(P+p)^2} + \frac{P^2}{(P+p)^2}}\right)$$

So lange, bis man directe Versuche über diesen Gegenstand angestellt hat, kann man sich der von Rumfort, Boulard und verschiedenen anderen Ingenieuren über die Zugkraft bei Fuhrwerken auf Straßen und Eisenbahnen erhaltenen Resultate bedienen, welche für den Coefficienten A die in der folgenden Tafel enthaltenen Werthe geben, worin sich auch die aus den Coulomb'schen Versuchen ergebenden und bereits früher angeführten Werthe befinden.

Widerstände der Räder oder Walzen, welche sich auf ebenen Flächen von verschiedener Beschaffenheit bewegen *).

Angabe der Art der Räder und der Wege.	Beobachtete Werthe von $\frac{F}{P+p}$	Entsprechende Werthe von A.	Bemerkungen.
Mit Eisen beschlagene Räder auf einer horizontalen Chaussee:			Vergl. **Journal de Physique, 1785**, und **Biblioth. brit. T. 47.**
Mit Sand oder Kieselsteinen, neu	$^1/_8$	0,0634	
Mit zerschlagenen Kieselsteinen im gewöhnlichen Zustande der Erhaltung	$^1/_{12}$	0,0414	
Gepflastert im gewöhnlichen Zustande	$^1/_{20}$	0,0238	Geschwindigkeit $0^m,8$ bis 1^m in der Secunde.
Mit fester und ebener Erde	$^1/_{26}$	0,0185	
Mit zerschlagenen Kieselsteinen und gewalzt	$^1/_{30}$	0,0150	Versuche auf engl. Eisenbahnen.
Mit rauhen eichenen Bohlen . . .	$^1/_{46}$	0,0102	**Journal de l'École Polytech. Cah. 5^e.**

*) Bei der Berechnung der in dieser Tafel vorkommenden Zahlen haben wir die folgenden Werthe und Relationen angewandt: 1) Für gewöhnliche Wagenräder:

$$R = 0^m,60,\ \frac{r}{R} = {}^1/_{24},\ f' = 0^m,12,\ \frac{P}{P+p} = {}^{22}/_{25},$$

und 2) für Räder der Wagen auf Eisenbahnen:

$$R = 0^m,40,\ \frac{r}{R} = {}^1/_{12},\ f' = 0^m,08,\ \frac{P}{P+p} = {}^7/_8.$$

Diese Werthe, sowie die von $\frac{F}{P+p}$ in der vorhergehenden Tafel, stim-

Angabe der Art der Räder und der Wege.	Beobachtete Werthe von $\frac{F}{P+p}$	Entsprechende Werthe von A.	Bemerkungen.
Gußeiserne Räder auf horizontalen Gleisen:			
1) platt	$^1/_{60}$	0,0035	Gleise und Räder im gewöhnlichen Zustande.
2) schmal und vorspringend	$^1/_{100}$	0,0012	
3) . . . . . gut erhalten und gereinigt	$^1/_{150}$	0,0007	
Walzen von Ulmen- oder Eichenholz auf ebenem Pflaster	„	0,0074	
. . . . . von Ulmenholz auf einem horizontalen Wege von Eichenholz	„	0,016	
. . . . . von Mahagoniholz auf einem Wege von demselben Holze . . .	„	0,0010	Walze und Weg genau gearbeitet.

Der Werth von $\frac{F}{P+p}$, und folglich der von A, scheint von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig zu sein; allein auf einem gepflasterten Wege nehmen diese Werthe in Folge des Verlustes an lebendiger Kraft durch die Stöße merklich zu.

Die Rumfort'schen Versuche für diesen Fall beziehen sich auf Fuhrwerke mit Federn, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf einer gepflasterten Straße bewegen. Die Resultate werden mit hinreichender Genauigkeit durch die Formel:

$$F = (P + p)\,(0{,}017 + 0{,}00575\,V^2)$$

ausgedrückt, worin $P + p = 1060$ Kilogr. gesetzt werden muß, und die Geschwindigkeit V für den langsamen Schritt gleich $0^m{,}85$, für den schnellen Schritt $= 1^m{,}10$, für den langsamen Trab $= 2^m{,}10$ und endlich für den schnellen Trab $= 2^m{,}80$ gesetzt ist; aber es ist zu bemerken, daß die Verluste an lebendiger Kraft hier geringer sind, als für Wagen ohne Federn.

Gränze, bei welcher das Rollen aufhört und das Gleiten beginnt.

§. 229. Die Bedingung, daß die sich längs einer Ebene AB (Fig. 82) fortbewegenden Räder gleiten, ohne sich auf dieser Ebene zu drehen, wird wieder ausgedrückt durch die Ungleichheit:

---

men auch mit den von Navier angenommenen überein, und was den Werth von A für gewöhnliche Fuhrwerksräder, welche sich auf horizontalen Bohlen bewegen, anlangt, so haben wir dabei $R = 0{,}60$, $\frac{r}{R} = {}^1/_{12}$, $f' = 0^m{,}05$ gesetzt, indem die Axen aus Holz bestanden und mit Fett geschmiert waren, und endlich ist bei allen diesen Rechnungen vorausgesetzt, daß die Last auf die ungleichen Räder der Wagen ihren resp. Durchmessern proportional vertheilt ist.

$$f(P+p) < F = \frac{A(P+p)}{R} + f\frac{Pr}{R},$$

oder:

$$f < \frac{A}{R} + f'\frac{r}{R}\,\frac{P}{(P+p)}.$$

Diese Bedingung wird aber zuweilen wirklich erfüllt, selbst bei gewöhnlichen Fuhrwerken, wenn sie niedrige Räder haben, schlecht geschmiert sind und sich auf einem vollkommen ebenen Wege bewegen, besonders wenn derselbe mit Eis oder festem Schnee bedeckt ist, wofür sich der Werth von f auf 0,0140 reduciren kann (§. 189). Setzt man z. B.:

$$\frac{P}{(P+p)} = {}^{22}/_{25},\ f' = 0{,}12,\ \frac{r}{R} = {}^{1}/_{24},\ R = 06,$$

so hat man:

$$F = 1.67\,A + 0{,}0046,$$

und diese Größe muß größer sein, als 0,014, wenn ein Gleiten des Rades ohne Rollen stattfinden soll, wozu erfordert wird, daß A größer ist, als $(0.014 - 0.0046)\,0{,}6 = 0.0056$, welches Resultat sehr wohl zulässig ist und dessen Ueberschuß über die meisten der in der obigen Tafel angegebenen Werthe seine ganz natürliche Erklärung in der hinreichend großen Zusammendrückbarkeit des Eises oder Schnees findet. Dieses Ueberwiegen des Widerstandes für das Rollen der Räder wird übrigens auch durch die Verdickung der Axenschmiere bei kaltem Wetter begünstigt, weßwegen man sich auch in den Ländern, wo der Winter intensiv und von langer Dauer ist, fast ausschließlich der Schlitten bedient.

Theoretische Nachweisung dieser Gränze.

§. 230. Um sich **a priori** zu überzeugen, wie die obige Bedingung für das Gleiten der Räder ohne Drehung auch in dem gegenwärtigen Falle noch stattfinden kann *), obgleich die Kraft F nicht unmittelbar an dem Berührungspunkte des Rades mit dem Boden

*) Wenn sich an dem Rade ein Vorsprung ab (Fig. 82) befindet, z. B. ein Nagelkopf rc., und derselbe kommt mit dem horizontalen Boden AB in Berührung, so wird die Bedingung, daß kein Gleiten in dem Punkte a stattfindet, offenbar ausgedrückt durch (§§. 226 u. 227):

$$f(P+p) > F = \frac{(P+p)}{R}l + f'\frac{r}{R}\sqrt{P^2+F^2},$$

wo $aT = l$ ist. Aber wenn sich das feste Hinderniß ab an dem Boden befände, so müßte, wenn sich das Rad im ersten Augenblicke um den Stützpunkt b drehen soll, ohne nach der Berührungsebene in diesem Punkte fortzugleiten,

$$F < (P+p)\frac{f + tang.\,\alpha}{1 - f\,tang.\,\alpha},\ \text{folglich:}\ f > \frac{F - (P+p)\,tang.\,\alpha}{P+p+f\,tang.\,\alpha}$$

sein, damit das Rad bei dem Aufsteigen nicht gleitet, und

$$F > (P+p)\frac{f + tang.\,\alpha - f}{1 + f\,tang.\,\alpha},\ \text{folglich:}\ f < \frac{(P+p)\,tang\,\alpha - F}{P+p+F\,tang.\,\alpha},$$

angebracht ist, braucht man nur zu bemerken, daß, wenn sich das Rad nicht drehte, die Kraft F genau $= f(P + p)$ wäre, und daß, wenn diese Kraft größer würde, als die zum Drehen und Fortbewegen des Rades zugleich erforderliche Kraft:

$$A\,\frac{(P+p)}{R} + f'\,\frac{r}{R}\sqrt{P^2 + F^2},$$

die rollende Bewegung in dem Augenblicke beginnen würde, wo die Kraft F

$$= A\,\frac{(P+p)}{R} + f'\,\frac{r}{R}\sqrt{P^2 + F^2}$$

wird, d. h. früher, als diese Kraft die directe Reibung $f(P + p)$ überwinden kann, welche man sich als aus zwei anderen Kräften zusammengesetzt denken kann, wovon die erste von dem Widerstande des Bodens bei dem Zurücktreiben seiner Bestandtheile vor dem Rade, und die zweite von dem bloßen tangentialen Gleiten der Folge des Rades auf dem Boden des Gleises herrührt, welches Gleiten dem analog ist, welches stattfände, wenn sich das Rad bloß an derselben Stelle um seine Axe drehte, indem der Druck $P + p$ darauf wirkt.

Da die Quantität Arbeit, welche zum Zurücktreiben der Bestandtheile des Bodens vor dem Rade erfordert wird, von der Art und Weise, wie dieses Zurücktreiben geschieht, unabhängig ist; so sieht man, daß unter übrigens gleichen Umständen der entsprechende Widerstand dasselbe Maaß haben muß, es mag ein Rollen des Rades stattfinden, oder nicht, und folglich kann derselbe durch die Formel:

$$A'\,\frac{(P+p)}{R}$$

ausgedrückt werden, worin man für A' in vielen Fällen einen etwas größern Werth setzen kann, als der bei dem Rollen des Rades. Was den andern Theil von $f(P + p)$ anlangt, welcher sich auf das bloße tangentiale Gleiten, das sich an derselben Stelle um seine Axe drehenden Rades bezieht; so kann derselbe nach dem über den Widerstand der Zapfen Gesagten (§. 191) durch einen Ausdruck von der Form $f_1(P + p)$ dargestellt werden, worin f_1 einen kleineren Werth als f hat. Man hat also für den Gesammtwiderstand des unmittelbar auf dem Boden fortgezogenen Rades:

$$f(P+p) = A'\,\frac{(P+p)}{R} + f_1(P+p).$$

Nach dieser Untersuchung muß es vollkommen einleuchtend sein, wie die Bedingung:

$$f(P+p) = \text{oder} > \frac{A(P+p)}{R} + f'\,\frac{r}{R}\sqrt{F^2 + P^2}$$

---

damit es bei dem Niedersteigen nicht gleitet, wo α den Winkel bezeichnet, welchen die Berührungsebene mit dem Horizonte bildet, und die Kraft F ist hier offenbar:

$$F = (P + p)\,tang.\,\alpha + f'\,\frac{r}{R}\sqrt{F^2 + P^2}.$$

hinreichend ist, damit zugleich eine Drehung um die Axe und ein Fortrollen des Rades auf dem Wege stattfindet; denn da die Constante A' wenigstens $= A$ ist, so sieht man, daß sich die vorhergehende Bedingung auf die einfachere:

$$f_1(P+p) = \text{oder} > f' \frac{r}{R} \sqrt{F^2+P^2}$$

reducirt, auf welche man unmittelbar kommt, wenn man die Aufgabe über die Bewegung der Räder allgemein der Rechnung unterwirft, indem man die verschiedenen Compressions- und Reactionskräfte in Betracht zieht, welche einander an den Rädern selbst, sowie an ihren Axen das Gleichgewicht halten, was wir später thun werden; aber für jetzt war es hinreichend, über die Theorie des Widerstandes der Räder und der Walzen nur einige vorläufige Begriffe mitzutheilen, welche uns bei der Berechnung der Maschinen von Nutzen sein können.

Anwendung der Frictionsräder und Rollen zur Verminderung der Reibung der sich über einander hinbewegenden Maschinentheile.

§. 231. Wenn man sich der vorhergehenden Data bedient, so kann man in der That den Widerstand näherungsweise berechnen, welchen die zur Verminderung der directen Reibung der sich über einander hinbewegenden Körper angewandten Laufräder oder Rollen darbieten, woran sich sehr oft eine Nute oder eine Vertiefung befindet, welche zur Aufnahme von vorspringenden Leisten oder Stäben dient, welche alsdann gewissermaßen den Weg bilden und verhindern, daß das System nicht seitwärts von seinem Wege abweichen kann. Wenn es z. B. darauf ankommt, gewissen Maschinentheilen eine geradlinige Bewegung zu ertheilen und dabei die Reibung so viel als möglich zu vermindern, wie bei den in §. 214 und folg. betrachteten Maschinen, indem man entweder an den Maschinentheilen selbst, oder in den Leitungen, Rollen oder Räder anbringt; so braucht man nur auf die in diesem Paragraphen angegebene Weise den Druck zu berechnen, welcher sowohl auf die Axe, als auf den Stützpunkt jedes Rades oder jeder Rolle wirkt, und dann nach den vorhergehenden Betrachtungen die Widerstände zu bestimmen, welche dadurch hervorgerufen werden, um sie für die der unmittelbaren oder directen Reibung entsprechenden Widerstände fN, fN' in die Gleichung des Gleichgewichtes in §. 214 zu substituiren.

Was den Fall anlangt, wo sich die Frictionsrollen oder Räder zwischen zwei Platten befinden, wovon die eine fest liegt und die andere sich um eine gegebene Axe dreht, von welcher Einrichtung bereits in §. 222 die Rede gewesen ist; so bietet derselbe keine Schwierigkeiten weiter dar, wenn die Zapfenlager der Rollen oder Räder mit der einen Platte fest verbunden sind. Denn wie sich der Druck auf das System dieser Rollen oder Räder auch vertheilen mag, so ist man doch immer im Stande, den absoluten oder totalen Widerstand in der Richtung des von dem Punkte der beweglichen Platte, welcher der Mitte der Axe der Rollen entspricht, beschriebenen Weges zu bestimmen, und es kommt alsdann bloß noch darauf an, diesen Widerstand durch die Entfernung des erwähnten Punktes von der allgemeinen Rotationsaxe des Systemes zu multipliciren, um die Quantität Arbeit oder das Moment in Beziehung auf diese letzte Axe zu erhalten.

Denn wenn wir die Bezeichnungen in §. 226 und §. 227 beibehalten, so ist für jede einzelne Rolle, wenn die Zapfenlager an der beweglichen Platte festsitzen, näherungsweise:

$$F = \frac{A(P+p)}{R} + f' \frac{r}{R} P,$$

und wenn sich diese Zapfenlager an der festen Platte befinden:

$$F = A \frac{P}{2R} + f' \frac{r}{R} (P+p).$$

Da P hier der unbestimmte Druck ist, welchen die letzte Platte auf die Rolle ausübt, so ist es unmöglich, den individuellen Widerstand F zu berechnen; aber wenn man für jeden der beiden Fälle die Summe aller dieser Widerstände bestimmt, so hat man im ersten Falle:

$$\Sigma F = \frac{A}{R} \Sigma (P - p) + f' \frac{r}{R} \Sigma P,$$

und im zweiten:

$$\Sigma F = \frac{A}{2R} \Sigma (P) + f' \frac{r}{R} \Sigma (P+p),$$

in welchen Formeln keine Unbestimmtheit mehr stattfindet, weil $\Sigma (P)$ die Summe der auf die Rollen oder Laufräder ausgeübten Druckkräfte ausdrückt.

Einrichtung der Laufräder für die sich um eine Axe drehenden Plattformen.

§. 232. Sehr oft geschieht es und ist auch zur Vermeidung des Widerstandes an den Axen der Rollen oder Räder vortheilhaft, daß letztere von den beiden Plattformen unabhängig gemacht werden, so daß das Rollen auf jeder Plattform stattfindet, wie in dem in §. 196 betrachteten Falle, nur daß hier die Axen einen größeren Widerstand veranlassen, dessen Intensität gewissermaßen unbestimmt ist, und nicht sowohl von dem gegenseitigen Drucke der beiden Plattformen, als vielmehr von den Unebenheiten der Oberfläche der Rollen oder Räder und der Flächen, welche sie berühren, welche letztere man zu dem Zwecke aus Eisen verfertigt, herrühren.

Die Laufräder oder Rollen können in diesem Falle nicht ganz frei sein, sondern müssen sich ebenfalls um eine Axe drehen, damit sie einen bestimmten Weg durchlaufen, weil sie sonst durch das kleinste Hinderniß von ihrem Wege abgelenkt, einander gegenseitig hinderlich und mehr schädlich als nützlich sein würden.

Um also den Laufrädern oder Rollen eine bestimmte Richtung bei ihrer Bewegung zu geben, werden sie zwischen zwei großen, zu der allgemeinen Rotationsaxe concentrischen eisernen Ringen angebracht (Fig. 83), und diese Ringe selbst sind mit der erwähnten Axe durch Arme verbunden, welche ihre Oberfläche mit sanfter Reibung berühren, indem der gehörige Spielraum zwischen beiden bleibt. Zuweilen sind diese Ringe zur Rechten jeder Rollen- oder Radaxe mit Gelenken versehen, um jede Art von Hinderniß der Bewegung zu beseitigen; allein welche Sorgfalt man auch auf die Ausführung und Erhaltung der einander berührenden Flächen anwenden mag, so kann die Axenreibung dadurch doch nicht ganz beseitigt werden, weil auf diese Axen das Gewicht der Ringe und ungefähr die Hälfte des Gewichtes der Arme, wodurch diese Ringe mit der allgemeinen Rotationsaxe verbunden sind, drückt. Wenn man dieses Gewicht mit q und das auf dem reibenden Ringe, durch welchen die Arme mit der fraglichen Axe verbunden sind, lastende Gewicht mit q' bezeichnet, so hat man offenbar für den Totalwiderstand X eines solchen Systemes in Beziehung auf den mittleren Kreis der Axen der Rollen:

$$X = \Sigma F = \frac{A}{2R}\,\Sigma\,(P+p) + \frac{A'}{2R}\,\Sigma\,(P)$$

$$+ f'\frac{r}{R}\,p + f\frac{q'}{r_1}\left(r_1 + \frac{l^2}{12 r_1}\right),$$

wenn die Annahmen und Bezeichnungen in §§. 196, 222 und 228 beibehalten werden und die Kraft an der sich drehenden Plattform angebracht ist, wie es zur Verminderung der absoluten Intensität des Widerstandes (§. 196) zweckmäßig ist, indem man den von dem Angriffspunkte der bewegenden Kraft beschriebenen Weg vergrößert, und wenn man zugleich beträchtliche und veränderliche Zugkräfte vermeiden will, welche in der Richtung des beschriebenen Weges auf die Axen der Rollen wirken würden, wenn diese Kraft unmittelbar an den großen Ringen angebracht wäre.

Diese sehr sinnreichen Vorrichtungen werden bei den Brücken des St. Martins-Kanales zu Paris angewandt, wovon wir in dem Theile dieses Lehrbuches ein Mehreres mittheilen werden, welcher von den wirklich existirenden Maschinen handeln wird.

Anwendung der Frictionsrollen zur Verminderung des Widerstandes der Zapfen der Räder.

§. 233. Zuweilen wendet man auch zur Verminderung der Reibung der Zapfen der Wellen der Maschinen Frictions- oder Laufräder an, auf deren Umfange man diese Zapfen unmittelbar ruhen läßt, wie z. B. in der Atwood'schen Fallmaschine. Aber abgesehen davon, daß bis jetzt zur Bestimmung des tangentialen Widerstandes des Rollens keine directen Versuche angestellt sind, muß man auch bemerken, daß sich in diesem Falle die berührenden Flächen weit mehr verändern müssen, als in den vorhergehenden Fällen, weil bei gleicher Festigkeit der Materialien die Eindrücke tiefer und folglich von längerer Dauer sein müssen. Was diesen Widerstand selbst anlangt, so kann man denselben bis dahin, daß entscheidende Versuche angestellt sind,

$$= A\frac{P}{R} + A'\frac{P}{R'}, \text{*)}$$

setzen, wo A und A' zwei Constanten sind, welche bloß von den einander berührenden Substanzen abhängen, R, R' die Halbmesser der

*) Wenn sich zwischen den beiden Rädern oder Rollen in der Entfernung l von ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte ein sehr kleines Hinderniß befände und sich das eine Rad, wie das in §. 226 und §. 227

Räder und P die Kraft, mit welcher sie sich gegenseitig zusammendrücken.

Da sich dieser Ausdruck übrigens auf $\frac{AP}{R}$ reducirt, wenn der Halbmesser R' unendlich groß oder die entsprechende Fläche eine Ebene wird, so wird man ganz natürlich zu der Annahme geführt, den Constanten A und A' dieselben Werthe beizulegen, als wenn der entsprechende Cylinder auf einer Ebene von derselben Substanz, wie der andere Cylinder, fortrollte, so daß man diese Werthe aus der Tafel im §. 228 nehmen müßte; allein aller Wahrscheinlichkeit nach sind die wirklichen Werthe von A und A' etwas kleiner, weil sich die cylindrischen Flächen leichter von einander trennen. Diese Annahmen müssen jedoch nur als vorläufige betrachtet werden, welche der Bestätigung durch das Experiment bedürfen, aber bis dahin in der Praxis in gewissen Fällen von Nutzen sein können.

Berechnung des Widerstandes der auf Frictionsrollen oder Rädern ruhenden Zapfen.

§. 234. Um nun zu zeigen, welchen Einfluß die Frictionsrollen oder Räder haben würden, wenn man ihren Rollungswiderstand vernachlässigen und von ihrer ungleichen Abnutzung, welche desto schneller erfolgt, je kleiner die Halbmesser und die Berührungskanten der über einander hinrollenden Räder oder Rollen sind, abstrahiren könnte, wollen wir annehmen, daß a (Fig. 84) der Mittelpunkt eines Zapfens von dem Halbmesser r sei, auf welchen Kräfte wirken, deren allgemeine Resultante N ist. Wenn sich dieser Zapfen in einem gewöhnlichen Lager drehte, so würde seine Reibung durch einen Theil f' von N gemessen, und die entsprechende Quantität Arbeit wäre für eine ganze Umdrehung der Welle

$$= f' N 2\pi r \text{ (§. 218).}$$

Aber wenn dieser Zapfen auf zwei gleichen Rollen b und c von dem Halbmesser R ruht, deren Axen oder Zapfen einen Halbmesser ρ haben; so wird der Druck N in zwei andere zerlegt, welche durch die Axen b, c gehen, und, wenn N in Beziehung auf diese Axen eine symmetrische Lage hat, offenbar durch:

$$\frac{N}{2 \cos. \frac{1}{2} \alpha}$$

ausgedrückt werden, wo der Winkel $bac = \alpha$ gesetzt ist.

---

betrachtete, heben könnte; so würde der totale Tangentialwiderstand offenbar ausgedrückt durch:

$$Pl\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

in welchem Ausdrucke übrigens der Theil des Widerstandes nicht mit begriffen ist, welcher von der Axenreibung herrührt, wenn sie stattfindet, und welchen man ebenfalls erhält, wenn man sich statt des materiellen Hindernisses ein gemeinschaftliches ebenes Element der beiden Räder von der Breite l denkt, welches in Folge ihrer gegenseitigen Zusammendrückung unter der Last P entsteht.

Diese Druckkräfte bewirken auf den Axen b und c Reibungen, welche durch:

$$\frac{f' N}{2 \cos. {}^1/_2 \alpha}$$

gemessen werden, und wenn man den in d und e stattfindenden Reibungswiderstand unberücksichtigt läßt, so wird der entsprechende Verlust an Arbeit für eine ganze Umdrehung des Zapfens a offenbar ausgedrückt durch:

$$\frac{f' N}{\cos. {}^1/_2 \alpha} 2 \pi r \frac{\varrho}{R},$$

weil der auf den Rollen in den Berührungspunkten d und e abgewickelte Bogen $= 2 \pi r$ und folglich der von den Flächen der Axen b und c beschriebene Bogen $= 2 \pi r \frac{\varrho}{R}$ ist. Folglich ist auch der tangentiale Widerstand für die Drehung des Zapfens a, welcher im ersten Falle $= f' N$ ist, im zweiten Falle nur:

$$= \frac{f' N}{\cos. {}^1/_2 \alpha} \cdot \frac{\varrho}{R},$$

was übrigens **a priori** einleuchtend ist, weil dieser Widerstand die Summe der Tangentialkräfte ist, welche in d und e angebracht werden müßten, um die Reibung in b und c aufzuheben.

Vortheilhafteste Einrichtung der Frictionsrollen.

§. 235. Der in Rede stehende Widerstand und die ihm entsprechende Quantität Arbeit werden übrigens desto größer, je mehr $\cos. {}^1/_2 \alpha$ ab- oder der Winkel bac zunimmt *), und es ist daher von

*) Man sieht leicht ein, daß der Halbmesser ϱ der Axen der Frictionsrollen mit dem Halbmesser r der Zapfen der Welle in einer nothwendigen Beziehung steht. Da auf letztere ein Normaldruck $= \frac{N}{\sqrt{1+f^2}}$ (§. 219) und auf die beiden ersten ein Normaldruck $= \frac{N}{4 \cos. {}^1/_2 \alpha}$ wirkt, weil jede Frictionsrolle auf zwei gleichen und symmetrisch liegenden Axen ruht; so muß man nach den Regeln der Stabilität die Größe von ϱ durch die Proportion:

$$\frac{N}{\sqrt{1+f^2}} : \frac{N}{4 \cos. {}^1/_2 \alpha} = r^3 : \varrho^3$$

bestimmen, woraus folgt:

$$\varrho = \frac{r \sqrt[6]{1+f^2}}{\sqrt[3]{4 \cos. {}^1/_2 \alpha}} = \frac{r}{\sqrt[3]{4 \cos. {}^1/_2 \alpha}},$$

und folglich ist der vereinigte Widerstand beider Rollen:

$$\frac{f' N}{\cos. {}^1/_2 \alpha} \frac{\varrho}{R} = \frac{f' N r}{R \sqrt[3]{4 (\cos. {}^1/_2 \alpha)^{4/3}}} = 0{,}625 \frac{f' N r}{R (\cos. {}^1/_2 \alpha)^{4/3}},$$

während der Widerstand eines einzigen Zapfens in einem gewöhnlichen Zapfenlager $= f' N$ ist.

Wichtigkeit, die Axen b, c der Rollen einander möglichst zu nähern, weßwegen man in gewissen Fällen den Zapfen a (Fig. 85) unmittelbar auf einer Rolle c ruhen läßt, so daß die Richtung ac nahezu mit der Richtung der Resultante N der auf den Zapfen a wirkenden Kräfte zusammenfällt, und seitwärts wird dieser Zapfen durch zwei andere Rollen b, b', deren Mittelpunktslinie auf ac senkrecht ist, in seiner Lage erhalten. Der Tangentialwiderstand des Zapfens a reducirt sich folglich auf:

$$fN\frac{\varrho}{R}$$

und der einer ganzen Umdrehung entsprechende Verlust an Arbeit auf:

$$fN2\pi r\frac{\varrho}{R},$$

wenn dieselben Bezeichnungen, wie weiter oben, beibehalten werden und außerdem vorausgesetzt wird, daß auf die Welle des Zapfens a keine andere Kräfte als N wirken.

Eine der Glocken der Domkirche zu Metz ist auf eine ähnliche Weise, wie die in Fig. 85 angegebene, aufgehangen; aber da diese Glocke zu beiden Seiten der Verticale nur kleine Schwingungen macht, so hat man statt der Rollen nur Sectoren angewandt, wovon die beiden zur Rechten und Linken bei ihrer hin- und hergehenden Bewegung durch einen an dem obern Ende der Träger der Zapfen a angebrachten Balancier dirigirt werden.

Bedingungen des Gleichgewichtes der Radwelle mit Rücksicht auf die Reibung und die Steifigkeit der Seile.

Betrachtung des Falles, wo die Axe horizontal ist und die Kräfte in senkrechten Ebenen auf dieser Axe liegen.

§. 236. Es sei AA' (Fig. 86) die horizontale Welle, welche an ihren Enden zwei Zapfen hat, womit sie auf den festen Lagern A und A' ruht und woran die Kraft P und der Widerstand Q vermittelst eines Seiles oder Riemens wirken, deren Richtungen in senkrechten Ebenen auf der Axe AA' liegen. Ferner bezeichne:

M das Totalgewicht der Radwelle, deren Schwerpunkt G auf der Axe AA' liegen soll,

R und r resp. die Halbmesser der Räder, an deren Ende P und Q wirken,

ϱ und ϱ' die Halbmesser der Zapfen A und A',

d den Durchmesser des Seiles, woran die Last Q hängt,

p, q, m und l die resp. Entfernungen von P,

Q, M und A von dem Stützpunkte A',

α und β die Winkel, welche die Richtungen von P und Q mit der Verticale bilden,

N und N' die Resultanten der auf die Stützpunkte A und A' wirkenden Kräfte,

θ und θ' die Winkel, welche die Richtungen dieser Resultanten mit der Verticale bilden,

f_1, f_1' die Werthe von $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ für die Zapfen A, A' und $\frac{ad'' + bd''}{2r}$ der von der Steifigkeit des Seiles der Last Q herrührende Widerstand (§. 197).

Zunächst wollen wir jede der beiden Kräfte P und Q nach verticaler und horizontaler Richtung in zwei andere zerlegen und diese letzteren, sowie das Gewicht M der Radwelle, wieder in zwei andere Kräfte, welche zu ihnen parallel sind und in Ebenen liegen, welche in A und A' auf der Axe der Radwelle senkrecht sind, indem sie in gleichen Entfernungen von dieser Axe liegen; so findet man auf diese Weise für den Punkt A die Summe der verticalen Componenten

$$= \frac{Mm}{l} + Q\frac{q}{l}\cos.\beta + P\frac{p}{l}\cos.\alpha = Y,$$

und die Summe der horizontalen Componenten

$$= Q\frac{q}{l}\sin.\beta - P\frac{p}{l}\sin.\alpha = X,$$

und für den Punkt A' die Summe der verticalen Componenten

$$= M\frac{(l-m)}{l} + Q\frac{(l-q)}{l}\cos.\beta + P\frac{(l-p)}{l}\cos.\alpha = Y',$$

und die Summe der horizontalen Componenten

$$= Q\frac{(l-q)}{l}\sin.\beta - P\frac{(l-p)}{l}\sin.\alpha = X',$$

in welchen Ausdrücken man das Zeichen von p oder q in das entgegengesetzte verwandeln muß, wenn P oder Q nicht zwischen den Punkten A, A' liegt.

Man hat also, wenn man bemerkt, daß die Resultanten aus den in jeder der beiden Ebenen liegenden Kräften durch die entsprechenden Stützpunkte der Zapfen gehen müssen, wenn sich die Radwelle im Gleichgewicht befindet:

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2} =$$
$$\frac{1}{l}\sqrt{(Mm + Qq\cos.\beta + Pp\cos.\alpha)^2 + (Qq\sin.\beta - Pp\sin.\alpha)^2},$$

$$N' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} =$$
$$\frac{1}{l}\sqrt{\left\{\begin{matrix}[M(l-m) + Q(l-q)\cos.\beta + P(l-p)\cos.\alpha]^2 + \\ [Q(l-q)\sin.\beta - P(l-p)\sin.\alpha]^2\end{matrix}\right\}},$$

$$tang.\,\theta = \frac{X}{Y},\quad tang.\,\theta = \frac{X'}{Y'},$$

wo diese letzten Werthe in Verbindung mit den Zeichen von X, Y und X' und Y' die Richtung und den Sinn der Wirkung der Resultanten N und N' bestimmen. Da um die Axe C der Radwelle zwischen der

Kraft P, der Last Q, der Steifigkeit des Seiles, woran Q hängt, und den Reibungen $f_1 N$, $f_1' N'$ das Gleichgewicht stattfinden muß; so hat man nach der gewöhnlichen Theorie der Momente die Gleichung:

$$PR = Qr + \frac{d'' (a + bQ) r}{2 r} + f_1 N \varrho + f_1' N' \varrho',$$

in welche man nur die absoluten Werthe von N und N' einführen muß und welche im Allgemeinen in Beziehung auf P vom vierten Grade ist.

Betrachtung des Falles, wo die Kräfte beliebige Richtungen haben.

§. 237. Wenn auf das System eine oder mehrere Kräfte wirkten, welche nicht in senkrechten Ebenen auf der Axe AA' liegen, so müßte man, wie im §. 214, für jede dieser Kräfte zwei andere setzen, welche in demselben Punkte wirken und wovon die eine, in einer Normalebene auf der Axe AA' liegende, wie die Kräfte P, Q behandelt werden muß, und für die andere, zu dieser Axe parallele Kraft kann man eine ihr gleiche und nach derselben Axe wirkende Kraft und ein Kräftepaar substituiren, welches in den Stützpunkten A, A' der Zapfen auf der Axe AA' senkrecht ist und zu den übrigen auf diese Zapfen wirkenden Kräften gezählt werden muß, um die neuen Werthe der Resultanten N, N' zu erhalten.

Was die nach der Axe AA' wirkenden Componenten anlangt, so kann man sie in eine einzige zusammensetzen, welche ihrer Summe gleich ist, deren absolute Intensität gleich N_1 ist, und eine Reibung des Kopfes des Zapfens oder des Vorsprunges der Welle an dem Zapfenlager wirkt, deren Intensität $= f N_1$ ist, deren mittlerer Hebelarm auf die im §. 223 angegebene Weise berechnet und deren Moment endlich zu den Momenten der übrigen Widerstände in der obigen Gleichung des Gleichgewichtes addirt werden muß.

Näherungsmethoden zur Auflösung der obigen Gleichung für das Gleichgewicht der Radwelle.

§. 238. Um die numerische Auflösung dieser Gleichung zu vereinfachen, bedient man sich gewöhnlich der Methode der successiven Substitutionen, und wenn man zunächst die Glieder mit f_1 und f_1' unberücksichtigt läßt, so erhält man:

$$P = Q \frac{r}{R} + \frac{d'' (a + bQ)}{2 r} \cdot \frac{r}{R}.$$

Wenn man diesen ersten, etwas zu kleinen Näherungswerth für P unter die Wurzelgrößen setzt, so erhält man einen zweiten, viel genaueren Werth von P, welchen man wieder in dieselben Wurzelgrößen substituiren kann, um einen dritten mehr genäherten Werth von P zu erhalten u. s. f.

Allein man kann in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen wegen des geringen Einflusses der Reibung fast immer bei der ersten Substitution stehen bleiben, und vermittelst der Resultate in der Note am Ende dieses Abschnittes ist man immer im Stande, die in Rede stehende Gleichung in jedem Falle mit einer hinreichenden Annäherung aufzulösen, wodurch sie auf eine Gleichung des ersten Grades zwischen P und Q zurückgeführt wird.

Man kann z. B. für die Wurzelgröße $\sqrt{X^2 + Y^2}$, welche den Werth von N ausdrückt, bei einer Annäherung bis auf $^1/_6$ genau die Rationalgröße:

$$0{,}828\,(X + Y)$$

setzen, wenn man die Größenordnung der Componenten X und Y, wovon man bloß die absoluten Zahlenwerthe zu betrachten hat, nicht kennt, oder bei einer Annäherung bis auf $^1/_{25}$ genau die Größe:

$$0{,}96\,Y + 0{,}4\,X,$$

wenn man zum voraus weiß, daß $Y > X$ ist.

Substituirt man diesen Näherungswerth von N und den analogen Werth von N' in die obige Gleichung des Gleichgewichtes, so ergibt sich daraus der Werth von P unmittelbar als Function von Q mit einer Annäherung, welche wegen des geringen Einflusses der Zapfenreibung selbst in der ersten Voraussetzung vollkommen genügend ist.

Vereinfachung der fraglichen Gleichung in den gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fällen.

§. 239. In den meisten Fällen hat man:

$$\varrho = \varrho',\ f_1 = f_1' \text{ und } f_1 N \varrho + f_1' N' \varrho' = f_1 \varrho\,(N + N'),$$

und da ferner die Kräfte P und Q in demselben Sinne wirken, wie M, um auf die Zapfen einen Druck auszuüben; so sind die obigen Werthe von Y, Y' und X, X' alle positiv, so daß man, wenn, wie dieses oft geschieht, zu gleicher Zeit $Y > X$, $Y' > X'$ ist, mit einer Annäherung bis auf $^1/_{25}$ genau setzen kann:

$$N + N' = 0{,}96\,(Y + Y') + 0{,}4\,(X + X')$$
$$= 0{,}96\,(M + Q\cos.\beta + P\cos.\alpha) + 0{,}4\,(Q\sin.\beta - P\sin.\alpha),$$

oder nur bis auf $^1/_6$ genau, wenn man über die Größenordnung von X, X', Y und Y' keine nähern Aufschlüsse hat:

$$N + N' = 0{,}83\,(Y + Y' + X + X')$$
$$= 0{,}83\,(M + Q\cos.\beta + P\cos.\alpha + Q\sin.\beta - P\sin.\alpha).$$

Diese beiden letzten Gleichungen würde man offenbar directer erhalten, wenn man, statt jede der gegebenen Kräfte in den auf der Axe, in dem Stützpunkte jedes Zapfens senkrechten Ebenen, zu zerlegen, um daraus die Resultanten N und N' einzeln abzuleiten, gleich von vorn herein angenommen hätte, daß sie in derselben Ebene liegen und in demselben Punkte wirken, wodurch man für die allgemeine Resultante die Wurzelgröße:

$$\sqrt{(M + \varrho\cos.\beta + P\cos.\alpha)^2 + (Q\sin.\beta - P\sin.\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{M^2 + Q^2 + P^2 + 2M(Q\cos.\beta + P\cos.\alpha) + 2P\varrho\cos.(\alpha + \beta)}$$

erhalten hätte, welche man in der That gewöhnlich für den Werth der auf die Zapfen wirkenden und ihre Reibung verursachenden Gesammtkraft nimmt. Allein diese Annahme führt nur zu mehr oder weniger genäherten Resultaten, welche unrichtig werden können, sobald die Componenten Y und Y', X und X' die Zapfen gegen entgegengesetzte Punkte der Zapfenlager zu drücken streben. Denn in diesem letzten Falle ist man, da man nur die absoluten Werthe dieser Kräfte in die Summen $X+X'$, $Y+Y'$ substituiren muß, genöthigt, das algebraische Zeichen der Kraft, welche negativ ist, zu verändern, so daß die obige Reduction nicht mehr stattfindet. Es könnte z. B. in gewissen Fällen geschehen, daß zu gleicher Zeit:

$$Q\frac{q}{l}\,sin.\,\beta > P\frac{p}{l}\,sin.\,\alpha\,,\quad Q\,\frac{(l-q)}{l}\,sin.\,\beta < P\,\frac{(l-p)}{l}\,sin.\,\alpha$$

wäre, und alsdann hätte man statt der Gleichung:

$$X+X'=Q\,sin.\,\beta - P\,sin.\,\alpha\,,$$

die ganz andere Gleichung:

$$X+X'=Q\,sin.\,\beta\left(\frac{2\,q}{l}-1\right)-P\,sin.\,\alpha\left(1-\frac{2\,P}{l}\right).$$

Diese Bemerkungen sind offenbar den in §. 216 in Beziehung auf die Reibung geradliniger Maschinentheile in ihren Leitungen gemachten analog und zeigen, daß man in jedem Falle den Sinn der Wirkung der Kräfte und die Relationen zwischen ihren Intensitäten sorgfältig unterscheiden muß, um beurtheilen zu können, was für Zeichen die Componenten Y, Y', X und X' haben, und ob man eine einzige Resultante für die der verschiedenen Resultanten N und N' substituiren darf, was immer möglich ist, wenn die Data und die Bedingungen des Systemes numerisch und vollständig ausgedrückt sind (s. weiter unten §. 242).

Anwendung des Vorhergehenden auf eine zum Heben von Lasten bestimmte Radwelle.

§. 240. Bei der zum Heben von Lasten bestimmten Radwelle findet keine Unbestimmtheit statt; denn die Kraft Q wirkt nach der verticalen Richtung, und folglich ist $\beta=0$, und die horizontalen Componenten X, X' von N, N' reduciren sich auf die Kräfte:

$$P\frac{p}{l}\,sin.\,\alpha\,,\quad P\,\frac{(l-p)}{l}\,sin.\,\alpha\,,$$

welche nach demselben Sinne wirken und auf die Zapfen einen Druck ausüben *). Die Gleichung des Gleichgewichtes kann also, wenn man

*) Wenn P in Beziehung auf den Punkt A jenseits A' wirkte, so würde p negativ, und man hätte:

$$N=0{,}96\left(M\,\frac{m}{l}+Q\,\frac{q}{l}-P\,\frac{p}{l}\,cos.\,\alpha\right)+0{,}4\,P\frac{p}{l}\,sin.\,\alpha\,,$$

$$N'=0{,}96\left\{M\,\frac{(l-m)}{l}+Q\,\frac{(l-q)}{l}+P\,\frac{(l+p)}{l}\,cos.\,\alpha\right\}+0{,}4\,P\,\frac{(l+p)}{p}\,sin.\,\alpha\,,$$

und folglich:

bemerkt, daß die in Rede stehenden Componenten resp. kleiner sind, als die verticalen Componenten Y und Y', durch folgende ersetzt werden:

$$PR = Qr\,\frac{d^{\mu}(a+bQ)}{2r}\,r$$
$$+ f_1\varrho \left\{ 0{,}96\,(M+Q+P\cos.\alpha) + 0{,}4\,P\sin.\alpha \right\},$$

woraus mit einem für die gewöhnlichen Anwendungen hinreichenden Grade von Annäherung folgt:

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{\mu}(a+bQ) + 0{,}96\,f_1\varrho\,(M+Q)}{R - f_1\varrho\,(0{,}96\cos.\alpha + 0{,}4\sin.\alpha)}.$$

Da die allgemeinen Werthe von N und N' (§. 236) in dem besondern Falle, wo auch die Kraft P nach einer verticalen Richtung wirkt, folglich auch $\alpha = 0$ ist, von selbst rational werden; so erhält man einen genaueren Werth von P, nämlich:

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{\mu}(a+bQ) + f_1\varrho\,(M+Q)}{R - f_1\varrho},$$

wenn man für die Zahlencoefficienten 0,96 und 0,4 resp. die Zahlen 1 und 0 setzt, weil hier die Verhältnisse $Y:X$ und $Y':X'$ unendlich werden. (Vergl. die 1. Note am Ende dieses Abschnittes.)

Im Allgemeinen darf man hierbei nicht vergessen, daß diese Coefficienten mit den in Rede stehenden Verhältnissen ihre Werthe verändern können.

Specielle Untersuchung des Falles, wo die Kraft nach einer zu der Richtung der Last parallelen, aber entgegengesetzten Richtung wirkt und der Last gleich ist.

§. 241. Wenn der Winkel $\alpha = 180°$ ist, d. h. wenn die Kraft P nach verticaler Richtung, aber nach einem dem Sinne von M und Q entgegengesetzten Sinne wirkt, so ist derselbe Ausdruck noch anwendbar, wenn man in dem Nenner desselben nur das Zeichen von $f_1\varrho$ in das entgegengesetzte verwandelt; denn die Componenten von P, welche auf die Zapfen wirken, haben im Allgemeinen einen kleineren Werth, als die Summe der von M und Q herrührenden Componenten. Aber

---

$$N + N' = 0{,}96\,(M + Q + P\cos.\alpha) + 0{,}4\,P\,\frac{(l+2p)}{l}\sin.\alpha,$$

also:

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{\mu}(a+bQ) + 0{,}96\,f_1\varrho\,(M+Q)}{R - f_1\varrho\left\{0{,}96\cos.\alpha + 0{,}4\,\frac{(l+2p)}{l}\sin.\alpha\right\}},$$

welcher Werth sich von dem im Texte nur dadurch unterscheidet, daß im Nenner $\frac{(l+2p)}{l}\sin.\alpha$, statt $\sin.\alpha$, vorkommt; aber da die Festigkeit der Welle in den gegenwärtigen Voraussetzungen erfordert, daß der Vorsprung p gegen l sehr klein ist, so kann man sich fast immer mit dem Werthe im Texte begnügen, dessen Nenner sich jedesmal vereinfachen läßt, wenn der Winkel α spitz und $\cos.\alpha > \sin.\alpha$ ist; denn alsdann wird der Factor $0{,}96\cos.\alpha + 0{,}4\sin.\alpha = 1$, bis auf $\frac{1}{25}$ genau.

wenn, indem $\alpha = 0°$ und folglich $P\cos.\alpha$ positiv ist, $\beta = 180°$ wäre, so würde $Q\cos.\beta = -Q$, und man müßte die einzelnen Ausdrücke von N und N' betrachten, welche sich alsdann auf folgende reducirten (§. 236):

$$N = \frac{Mm}{l} + \frac{Pp}{l} - \frac{Qp}{l},$$

$$N' = \frac{M(l-m)}{l} + \frac{P(l-p)}{l} - \frac{Q(l-q)}{l},$$

wovon man immer nur die absoluten Werthe nehmen muß, um sie in die allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes zu substituiren.

Wenn wir z. B. annehmen, daß sich aus einer vorläufigen Untersuchung der Data der Aufgabe sofort ergibt, daß N und N' nothwendig positiv sind, was wegen $P > Q\frac{r}{R}$ jedesmal der Fall ist, wenn zu gleicher Zeit

$$Mm + Q\frac{r}{R}p > Qq,\ M(l-m) + Q\frac{r}{R}(l-p) > Q(l-q),$$

oder:

$$\frac{M}{Q} > \frac{q}{m} - \frac{r}{R}\ .\ \frac{p}{m} > \frac{l-q}{l-m} - \frac{r}{R}\,\frac{(l-p)}{l-m},$$

ist, so kommt:

$$N + N' = M + P - Q,$$

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d''(a + bQ) + f_1\varrho(M - Q)}{R - f_1\varrho},$$

was voraussetzt, daß auch $M + P > Q$ ist, wie aus den beiden vorhergehenden Ungleichheiten von selbst folgt.

Wenn dagegen die vorläufige Untersuchung gelehrt hätte, daß N und N' wesentlich negativ sind; so brauchte man offenbar in dem allgemeinen Werthe von P nur das Zeichen von f_1 zu verändern.

Wenn endlich N und N' verschiedene Zeichen hätten, so hätte man:

$$N + N' = \pm\left\{M\left(\frac{2m}{l} - 1\right) - Q\left(\frac{2q}{l} - 1\right) + P\left(\frac{2p}{l} - 1\right)\right\},$$

folglich:

$$P = \frac{Qrl + \frac{1}{2}d''(a + bQ)\,l \pm f_1 Q\left\{M(2m - l) - Q(2q - l\right\}}{R \pm f_1\varrho(2p - l)},$$

wo das obere Zeichen von f_1 dem Falle entspricht, wo die Größe:

$$M\left(\frac{2m}{l} - 1\right) - Q\left(\frac{2q}{l} - 1\right) + P\left(\frac{2p}{l} - 1\right)$$

positiv ist, und das untere Zeichen dem Falle, wo diese Größe negativ ist.

Nähere Untersuchung der jedem Falle entsprechenden besondern Auflösungsart.

§. 242. Aus dieser Untersuchung erhellet, von welcher Beschaffenheit die Schwierigkeiten sind, auf welche man im Allgemeinen bei der Berechnung in Beziehung auf das Gleichgewicht der Radwelle, woran passive Widerstände wirken, stoßen kann; denn da die Größen N und N' implicirte Functionen der zu bestimmenden Größe P sind, so läßt sich nicht immer **a priori** das Zeichen derselben mit Gewißheit bestimmen. Aber abgesehen davon, daß diese Fälle sehr selten vorkommen, kann man auch bemerken, daß sie sich nur dann darbieten, wenn die Summe der ganz bekannten Glieder in N und N' sehr wenig von dem Gliede mit P verschieden ist und das entgegengesetzte Zeichen hat; denn nur alsdann können die Zeichen von N und N' zweifelhaft sein. Nun sind aber auch in diesem Falle die absoluten Werthe der in Rede stehenden Druckkräfte sehr klein, und die von diesen Druckkräften herrührenden Reibungen können gegen die übrigen Widerstände vernachlässigt werden, wofern man es der größeren Genauigkeit wegen nicht vorzieht, sie zu berechnen, indem man für P bloß den Näherungswerth:

$$Q\frac{r}{R} \text{ oder } \frac{Qr}{R} + {}^1/_2\, d''(a + bQ)$$

nimmt, so daß man alsdann aus der allgemeinen Gleichung, welche die Bedingungen des Gleichgewichtes ausdrückt, den Werth von P mit einer Genauigkeit ableiten kann, welche in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen mehr als hinreichend ist.

Da übrigens dieselben Bemerkungen auf den in §. 236 und §. 237 untersuchten allgemeinen Fall anwendbar sind; so ist hinsichtlich der Unbestimmtheit der Zeichen der einzelnen Größen X und Y, X' und Y' nicht zu befürchten, daß man bei etwas Aufmerksamkeit von den angegebenen Rechnungsmethoden jemals eine falsche Anwendung machen könnte; denn die Fälle, worin das Zeichen dieser Größen zweifelhaft ist, entsprechen auch hier wieder den Fällen, wo ihre absoluten und einzelnen Werthe sehr klein sind, und die Untersuchung wird sehr erleichtert, wenn man die Ausdrücke von X, X', Y, Y' einzeln $= 0$ setzt, und dann die sich daraus ergebenden Werthe von P unter sich und mit dem wahren Werthe von P, welcher nothwendig als positiv betrachtet werden muß, vergleicht. Denn diejenigen dieser Werthe, welche kleiner als Null gefunden werden, zeigen sofort an, daß der Ausdruck, wovon sie herrühren, positiv ist, und die übrigen Werthe lehren bloß, daß dieser Ausdruck negativ werden kann, wenn der wirkliche Werth von P, wie er sich aus den Daten der Aufgabe ergibt, größer gefunden wird, als der aus der hypothetischen Gleichung $X = 0$, $Y = 0$ ꝛc. abgeleitete Werth.

Wenn man z. B. unter den allgemeinen Voraussetzungen in §. 236 $Y = 0$ setzt, so ergibt sich daraus für P ein gewisser Werth:

$$P_1 = -\frac{Mm + Qq\cos.\beta}{p\cos.\alpha},$$

welcher von dem wahren Werthe verschieden ist, und wenn dieser ganz bekannte Werth negativ wäre, so wäre dieses ein sicheres Zeichen, daß

Y selbst positiv wäre. Dasselbe würde offenbar noch stattfinden, wenn dieser Werth positiv wäre, und kleiner gefunden würde, als der wahre Werth P, und um so mehr, wenn er kleiner wäre als:

$$Q\frac{r}{R} \text{ oder } Q\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\, d'' (a + bQ).$$

Aber Y ist in dem entgegengesetzten Falle, d. h. wenn der als positiv betrachtete Werth von P_1 größer ist, als P, wovon man im Allgemeinen keine obere Gränze kennt, wie man eine untere Gränze desselben kennt, negativ, weßwegen man auch zum voraus keine allgemeine und bestimmte Bedingung mehr angeben kann, nach welcher sich mit Sicherheit beurtheilen ließe, ob Y wirklich kleiner als Null ist.

Wenn jedoch P_1 den Näherungswerth von P, d. h. $Q\frac{r}{R}$ merklich überträfe und z. B. $\frac{5}{4}$ desselben betrüge, so könnte man in den meisten Fällen auch mit Gewißheit annehmen, daß Y negativ wäre; denn die schädlichen Widerstände der sich um sich selbst drehenden Wellen der Maschinen betragen niemals mehr, als $\frac{1}{4}$ des Werthes, welchen die bewegende Kraft heben würde, wenn diese Widerstände nicht vorhanden wären.

Die Unbestimmtheit des Zeichens von Y findet also nur in dem einen Falle statt, wo P_1 sehr wenig von P oder $Q\frac{r}{R}$ verschieden und folglich Y fast Null ist, was mit der bereits weiter oben gemachten Bemerkung übereinstimmt, und beweist, daß man alsdann in der That ohne Nachtheil die Größe Y ganz unberücksichtigt lassen, oder für ihren Werth bloß den nehmen kann, welcher der Voraussetzung von $P = Q\frac{r}{R}$ entspricht.

Berechnung der Widerstände der Rollen, der chinesischen Radwelle (Gegenwinde) und der Erdwinde.

Von der festen Rolle.

§. **243**. In dem besondern Falle der Rolle wirken die Kräfte P und Q in derselben Entfernung r von der Axe und liegen in einer Ebene, welche das Intervall zwischen den Zapfen in zwei gleiche Theile theilt, so daß man bloß zu untersuchen braucht, was in dieser mittleren Ebene stattfindet. Betrachten wir zunächst die feste Rolle C (Fig. 87) und bezeichnen mit T die Spannung des Seiles, woran die Kraft wirkt, mit T' die Spannung des Seiles, welche dem Widerstande entspricht, mit φ den Winkel, welchen die Richtungen dieser Spannungen zu beiden Seiten der Linie bilden, welche den Vereinigungspunkt A mit dem Mittelpunkte C der Rolle verbindet, mit m das Gewicht dieser Rolle, welches gegen T und T' immer sehr klein ist, mit ψ den Winkel, welchen die Verlängerung der geraden Linien AC mit der Verticale bildet, und behalten außerdem dieselben Benennungen und Annahmen bei, wie in §. **236** und §. **238**; so erhalten wir, wenn wir die Kräfte

m, T und T' nach Richtungen zerlegen, welche zu der Richtung von AC resp. parallel und darauf senkrecht sind, die Gleichung:

$$Tr = T'r + \frac{d^{\mu}(a + bT')}{2r}$$

$$+ f\varrho\sqrt{\left\{(T+T')\cos.\varphi + m\cos.\psi\right\}^2 + \left\{(T-T')\sin.\varphi - m\sin.\psi\right\}^2},$$

worin $(T+T')\cos.\varphi + m\cos.\psi$ offenbar positiv und größer als $(T-T')\sin.\varphi - m\sin.\psi$ ist, welches selbst so lange größer als Null bleibt, als $\sin.\varphi$ nicht sehr klein ist. Setzt man also für die Wurzelgröße ihren bis auf $^1/_{25}$ genauen Werth (§. 238) und leitet aus der vorhergehenden Gleichung den Werth von T ab; so erhält man:

$$T = \frac{\left[\begin{array}{c} T'r + {}^1/_2\, d^{\mu}(a + bT') + \\ f'\varrho\left\{(0{,}96\cos.\varphi - 0{,}4\sin.\varphi)\,T' + (0{,}96\cos.\psi - 0{,}4\sin.\psi)\,m\right\} \end{array}\right]}{r - f'\varrho(0{,}96\cos.\varphi + 0{,}4\sin.\varphi)}.$$

Wenn die Seilstücke zu einander parallel wären oder $\varphi = 0$, so brauchte man offenbar in dieser Formel nur das Zeichen von $\sin.\psi$ zu verändern, weil alsdann die Größe:

$$(T - T')\sin.\varphi - m\sin.\psi$$

negativ würde, und wenn endlich diese beiden Seilstücke vertical wären, so hätte man statt des vorhergehenden Näherungswerthes den streng richtigen Werth:

$$F = \frac{T'r + {}^1/_2\, d^{\mu}(a + bT') + f'\varrho\,(T' + m)}{r - f'\varrho}.$$

Von der beweglichen Rolle.

§. 244. In dem Falle der beweglichen Rolle (Fig. 88) ist es einfacher, die Spannungen T und T' nach der verticalen und horizontalen Richtung zu zerlegen; denn der Unterschied der in dieser letzten Richtung wirkenden Componenten muß von selbst gleich Null sein, und die Summe der nach der verticalen Richtung wirkenden Componenten muß der Summe aus dem Gewichte m der Rolle und aus der von ihr getragenen Last Q gleich sein, wo in dieser Last das Gewicht des Biegels und des übrigen Zubehöres mitbegriffen ist, und wenn α, β die Winkel bezeichnen, welche die Richtungen von T und T' resp. mit der Verticale bilden; so hat man die Gleichungen:

$$T\sin.\alpha - T'\sin.\beta = 0,\; T\cos.\alpha + T'\cos.\beta - m = Q,$$

welche in Verbindung mit der Gleichung des Gleichgewichtes der Rolle, welche hier bloß:

$$Tr = T'r + {}^1/_2\, d^{\mu}(a + bT') + f'\varrho Q$$

ist, weil Q die Resultante aus den auf die Axe C wirkenden Kräften bezeichnet, zur Bestimmung der Winkel α, β und der Werthe von T, T' dienen.

Um aus diesen Gleichungen die Werthe von T und T' abzuleiten, substituire man die aus den beiden ersten, als Functionen von α und β

abgeleiteten Werthe in die dritte, welche alsdann vermittelst der geometrischen Bedingungen, welche die Lage des Systemes bestimmen, zur Berechnung dieser Winkel dient. Hat man auf diese Weise die Werthe von α und β gefunden, so berechnet man die Werthe von T und T' vermittelst der Gleichungen:

$$T' = \frac{T \sin. \alpha}{\sin. \beta} = (Q + m) \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)},$$

$$T = (Q + m) \frac{\sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} =$$

$$\frac{(r + {}^1/_2\, d''b)\,(Q + m) + ({}^1/_2\, d''a + f'\varrho\, Q) \cos. \beta}{r\,(\cos. \beta + \cos. \alpha) + {}^1/_2\, d''b \cos. \alpha}.$$

Was die Relation zwischen α und β anlangt, so reducirt sie sich auf folgende:

$$\frac{\sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)} \left(1 + {}^1/_2 \frac{d''b}{r}\right) + \frac{{}^1/_2\, d''a + f'\varrho\, Q}{r\,(Q + m)},$$

welche zeigt, daß $\sin. \beta$ den Werth von $\sin. \alpha$ nur um einen sehr kleinen Bruch übertrifft.

Wenn die Seilstücke nahezu vertical sind, so kann man ohne Verminderung der Genauigkeit für die drei vorhergehenden Gleichungen die drei folgenden setzen, indem man von α und β die höhern Potenzen als die erste unberücksichtigt läßt:

$$T\alpha - T'\beta = 0, \quad T + T' = Q + m,$$

$$Tr = T'r + {}^1/_2\, d''\,(a + bT') + f'\varrho\,(T + T' - m),$$

welche geben:

$$T = \frac{(r + {}^1/_2\, d''b)\,(Q + m) + {}^1/_2\, d''a + f'\varrho\, Q}{2r + {}^1/_2\, d''b},$$

$$T' = \frac{r\,(Q + m) - {}^1/_2\, d''a - f'\varrho\, Q}{2r + {}^1/_2\, d''b}.$$

Lombard's Hebezeug (Gegenwinde).

§. 245. Die vorhergehenden Rechnungen sind unmittelbar auf das Lombard'sche Hebezeug (Gegenwinde) (Fig. 89), welches die Engländer den Chinesen zuschreiben, anwendbar. Wenn wir dieselben Benennungen und Bezeichnungen, wie im vorhergehenden §. bei der beweglichen Rolle, beibehalten und annehmen, daß die Kraft P an einem Rade von dem Halbmesser R eine Last Q heben soll, indem ihre Richtung mit der Verticale einen Winkel α bildet, und es bezeichnet ferner:

M das Gewicht der Welle mit Einschluß des Gewichtes des Rades und der Seile,

ϱ' den Halbmesser der Zapfen A, A',

R' den Halbmesser der Trommel, auf welche sich das Seil von der Spannung T wickelt,

r' den Halbmesser der Trommel, auf welche sich das Seil von der Spannung T' wickelt,

$\frac{d''(a+bT)}{2R'}$ die Steifigkeit des ersten Seiles und

f_1 den Werth von $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ für die Zapfen A und A';

so haben wir zur Berechnung von T und T' zunächst die Gleichungen:

$$T=\frac{(r+{}^1/_2\,d''b)\,(Q+m)+{}^1/_2\,d''a+f'\varrho Q}{2r+{}^1/_2\,d''b},$$

$$T'=\frac{r\,(Q+m)-{}^1/_2\,d''a-f'\varrho Q}{2r+{}^1/_2\,d''b},$$

wobei noch zu bemerken ist, daß Q die Resultante aus den auf die Zapfen drückenden Spannungen T und T' ist, und daß diese Spannungen selbst als nahezu vertical betrachtet werden, wenn man der Rolle C die entsprechenden Dimensionen gegeben hat. Wenn man ferner bemerkt, daß alle Kräfte hier in demselben Sinne wirken und auf die Zapfen einen Druck ausüben, und daß die horizontale Componente $P\,sin.\,\alpha$ gegen $M+Q+m+P\,cos.\,\alpha$ eine sehr kleine Größe ist, wovon man das Quadrat in der Wurzelgröße hinweglassen kann, welche den Gesammtdruck auf die Zapfen ausdrückt (§. 240); so hat man zur Berechnung von P die Gleichung:

$$PR=TR'+\frac{d''(a+bT)}{2R'}R'-T'r'+f_1\varrho\,(M+Q+m+P\,cos.\,\alpha),$$

woraus sich unmittelbar der Werth von P ergibt, nachdem man darin für T und T' ihre obigen Werthe gesetzt hat.

Wenn keine passiven Widerstände stattfänden, so hätte man offenbar:

$$T=T'=\frac{Q+m}{2},\ P=(Q+m)\frac{(R'-r')}{2R},$$

welches zeigt, daß man die Kraft P beliebig vermindern kann, wenn man den Unterschied $R'-r'$ der Halbmesser der Trommeln, auf welche sich die um die bewegliche Rolle gehenden Seile wickeln, entsprechend verkleinert.

Wenn man ferner für eine ganze Umdrehung der Welle die von der Kraft P hervorgebrachte Quantität Arbeit berechnen wollte, so brauchte man den vorhergehenden Werth von P nur mit der Länge $2\pi R$ des von ihrem Angriffspunkte in ihrer eigenen Richtung beschriebenen Kreisumfanges zu multipliciren, und man erhielte die Quantität Arbeit in dem Falle, wo keine passiven Widerstände vorhanden sind, d. h. für den Nutzeffect, den Ausdruck:

$$(Q+m)\,\pi\,(R'-r'),$$

worin offenbar $\pi\,(R'-r')$ die Höhe ausdrückt, um welche die Last $Q+m$ während dieser Umdrehung der Welle gestiegen ist.

Erdwinde, Göpel ꝛc.

§. 246. Die vorhin mitgetheilten Auflösungen und Gleichungen für die Radwelle mit horizontaler Axe sind ebenfalls auf Radwellen und beliebige Rotationssysteme mit verticalen Axen anwendbar; denn man braucht in diesen Gleichungen nur $M = 0$ zu setzen und in ihrem zweiten Theile ein Glied von der Form $^2/_3 fM\varrho$ hinzuzufügen, um die Reibung an dem Kopfe des untern Zapfens, worauf die Last M drückt, in Rechnung zu bringen.

Betrachten wir z. B. die gewöhnliche Erdwinde (Fig. 90), woran eine Kraft P in dem Endpunkte eines Hebels von einer Länge R nach einer darauf senkrechten Wirkung wirkt, um den Widerstand Q zu überwinden, welcher an dem sich auf die verticale Welle der Winde wickelnden Seile befestigt ist, und bezeichnet mit α den Winkel, welchen die Richtung der Kraft P in einer gewissen Lage des Systemes mit der unveränderlichen Richtung von Q bildet, indem wir ferner alle übrigen Bezeichnungen und Annahmen in §. 236 beibehalten, und endlich bemerken, daß hier der obere Zapfen A' im Allgemeinen stärker ist, als der untere Zapfen A, daß ferner das Zeichen von p verändert werden muß, und daß die auf diese Zapfen wirkenden Componenten von Q die überwiegen, welche von der Zerlegung der Kraft P herrühren; so haben wir für den vorliegenden Fall die Relationen:

$$PR = Qr + \frac{d^{\mu}(a + bQ)}{2r} r + f_1 \varrho N + f_1' \varrho' N' + {}^2/_3 fM\varrho,$$

$$N = \frac{1}{l} \sqrt{(Qq + Pp\cos.\alpha)^2 + P^2 p^2 \sin.^2\alpha}$$

$$= 0{,}96\, Q \frac{q}{l} + \frac{Pp}{l}(0{,}96\cos.\alpha + 0{,}4\sin.\alpha),$$

$$N' = \frac{1}{l} \sqrt{\left\{Q(l-q) - P(l+p)\cos.\alpha\right\}^2 + P^2(l+p)^2\sin.^2\alpha}$$

$$= 0{,}96\, Q \frac{(l-q)}{l} - \frac{P(l+p)}{l}(0{,}96\cos.\alpha - 0{,}4\sin.\alpha),$$

worin $\sin.\alpha$ immer absolut, aber $\cos.\alpha$ mit dem entsprechenden Zeichen genommen werden muß.

Wenn P die Summe mehrerer gleicher und um die Axe AA' symmetrisch vertheilter Kräfte ist, wie solches bei den von Menschen in Bewegung gesetzten Erdwinden der Fall ist; so heben sich die auf die Zapfen wirkenden Componenten dieser Kräfte gegenseitig auf und man hat alsdann bloß:

$$PR = Qr + \frac{d^{\mu}(a + bQ)}{2r} r + f_1 \varrho Q \frac{q}{l}$$

$$+ f_1' \varrho' Q \frac{(l-q)}{l} + {}^2/_3 fM\varrho,$$

woraus sich unmittelbar der Werth von Q ergibt. Wenn endlich P beliebig, aber $f_1' = f$, $\varrho' = \varrho$ wäre, so verwandelte sich die Gleichung des Gleichgewichtes in folgende:

$$PR = Qr + \frac{d''(a+bQ)}{2r}r$$

$$+ f_1\varrho \left\{0{,}96\, Q - 0{,}96 \cos.\alpha P + 0{,}4 \frac{(l+2p)}{l} P \sin.\alpha\right\} + {}^2/_3 fM\varrho,$$

und gäbe für P den Werth:

$$P = \frac{Qr + {}^1/_2 d''(a+bQ) + 0{,}96 f_1\varrho Q + {}^2/_3 fM\varrho}{R + f_1\varrho\left\{0{,}96 \cos.\alpha - 0{,}4 \frac{(l+2p)}{l} \sin.\alpha\right\}},$$

und diese Formel ist auf alle Lagen der Arme des Göpels anwendbar, wenn man der Größe $\cos.\alpha$ das entsprechende Zeichen gibt und für $\sin.\alpha$ nur die absoluten Werthe nimmt.

Wellen, welche durch Seile oder Riemen ohne Ende umgedreht werden.

Fundamentalgleichungen und Data der Aufgabe.

§. 247. Um an einem Beispiele zu zeigen, wie die von der Spannung und von der Steifigkeit der Seile in einem solchen Systeme herrührenden Widerstände berechnet werden, wollen wir die beiden Radwellen A und A' (Fig. 91) betrachten, welche horizontal und zu einander parallel sind, indem die Bewegung vermittelst eines über beide Wellen von den Halbmessern R, R' gehenden Seiles ohne Ende $BB'D'D$ von der einen auf die andere übertragen wird. Wir wollen annehmen, daß auf die Radwelle A an dem Umfange eines Rades von dem Halbmesser r nach der verticalen Richtung ein Widerstand Q wirkt, welcher zugleich alle in dem Angriffspunkte entstehende passive Widerstände, wie die Steifigkeit der Seile ꝛc., in sich begreifen soll; so besteht die ganze Schwierigkeit offenbar in der Bestimmung der einzelnen Spannungen der beiden Stücke BB', DD' des Seiles ohne Ende, deren Unterschied den Werth der Kraft ausdrückt, welche zu gleicher Zeit den activen Widerstand Q, die Steifigkeit des Seiles im Aufwickelungspunkte D und die Reibungen der Zapfen A, welche sowohl von dem Gewichte der Radwelle und der Last Q, als von der Resultante der fraglichen Spannungen herrühren, überwinden muß. Es bezeichne ferner:

- T die in Rede stehende Spannung, welche auf der Seite der Kraft mit dem Halbmesser R wirkt,
- T' die Spannung, welche auf der Seite des Widerstandes mit demselben Halbmesser wirkt,
- φ den Winkel, welchen die Richtungen dieser Spannungen mit der Horizontale AA' bildet,
- ϱ den Halbmesser der Zapfen der Welle A,
- f_1 den entsprechenden Werth von $\dfrac{f}{\sqrt{1+f^2}}$,
- M das Gewicht der Radwelle und ihres Zubehöres, welches an der Axe wirken soll,

$\frac{d^\mu (a + bT')}{2r}$ die der Spannung T' entsprechende Steifigkeit des Seiles,

und außerdem wollen wir bemerken, daß, da die horizontalen und verticalen Componenten der Kräfte nach demselben Sinne auf die Zapfen drücken, sie sämmtlich in denselben Punkt der Axe verlegt werden können (Fig. 239), so daß man zur Berechnung von T und T' die Gleichung hat:

$$(T - T') R = Qr + \frac{d^\mu (a + bT')}{2R} R + f_1 \varrho N,$$

worin man:

$$N = \sqrt{\left\{M + Q - (T - T') \sin. \varphi\right\}^2 + (T + T')^2 \cos.^2 \varphi}$$

$$= 0{,}96 \left\{M + Q - (T - T') \sin. \varphi\right\} + 0{,}4 (T + T') \cos. \varphi$$

nehmen muß, wenn die Summe der verticalen Componenten größer ist, als die der horizontalen, wie es in den meisten Fällen der Praxis geschieht, und wenn außerdem die Kräfte Q, T und T' zwischen den beiden Zapfen wirken; aber wenn dieser letzte Umstand nicht stattfindet, so muß man jede dieser Kräfte in den Stützpunkten zerlegen und wie bei der Erdwinde (§. 246) oder in der Note zu §. 240 verfahren.

Da die obige Gleichung zur Bestimmung von T und T' nicht hinreichend ist, so sieht man, daß das Seil oder der Riemen ohne Ende, welches um die Trommeln geht, eine natürliche oder eigene Spannung hat, welche von der Wirkung der an den beiden Rädern angebrachten Kräfte unabhängig ist und deren Intensität einzig und allein von der Willkühr des Maschinenbauers abhängt. Diese Spannung ist die, welche in dem Augenblicke stattfindet, wo sich das System in Ruhe befindet und die Kraft, sowie die Widerstände noch nicht wirken. Wenn diese ursprüngliche Spannung, welche für beide Seilstücke gleich ist und welche wir mit T_1 bezeichnen wollen, bekannt wäre; so ließen sich die Werthe von T und T' vermittelst der obigen Gleichung leicht bestimmen; denn sobald die Kraft anfängt zu wirken, um den Widerstand Q in Bewegung zu setzen, nimmt die Spannung des obern Seilstückes BB' genau um eben so viel zu, als die des untern Seilstückes DD' abnimmt, und zwar aus dem Grunde, weil die Verlängerungen und Verkürzungen dieser schon wegen T_1 stark gespannten Seilstücke einander gleich sein müssen, und die Entfernungen BB', DD' unveränderlich bleiben. Man hat daher für eine beliebige Lage des Systemes, worin die Spannung von BB' gleich T und die von DD' gleich T' geworden ist, die Relation:

$$T + T' = 2\,T_1,$$

welche in Verbindung mit der obigen Gleichung des Gleichgewichtes unmittelbar T und T' als Functionen von T_1 und Q gibt.

Bedingungen, nach welchen man die eigene ursprüngliche Spannung des Seiles oder Riemens ohne Ende bestimmen kann.

§. 248. Die ursprüngliche Spannung T_1 des Seiles oder Riemens ohne Ende ist nothwendig, damit dasselbe unter der Wirkung des Widerstandes Q auf den Trommeln nicht fortgleitet, wenn diese die ungünstigsten Lagen annehmen, nämlich die, wo die Differenz $T - T'$ ihren größten Werth haben muß (§. 201 und §. 202). Denn wenn man das System in dieser Lage betrachtet, welche man für jeden Fall, worin sich die Intensität der Kräfte ändern kann, bestimmen muß; so hat man zwischen T, T' und T_1 dieselben Relationen, wie weiter oben, und damit kein Gleiten stattfindet, die Relation:

$$T = T' e^{\frac{fs}{R}},$$

worin e, f, s und R die in §. 202 angegebene Bedeutung haben und welche in Verbindung mit den beiden ersten zur Bestimmung des kleinsten Werthes von T_1 dient, welcher zur Verhütung des Gleitens erfordert wird, und welchen man nach den Umständen etwas, z. B. $1/_{10}$ oder $1/_5$, vergrößern muß, um den nachtheiligen Einfluß der Stöße und anderer Umstände, welche die Widerstände augenblicklich vergrößern oder das ziehende Seil- oder Riemenstück abspannen können, zu verhüten.

Dieser letzte Umstand kommt gewöhnlich für lederne Riemen bei feuchtem und für hänfene Seile bei trockenem Wetter vor; aber auch häufig in den ersten Tagen ihrer Arbeit, und die Aufseher der Maschinen dieser Art sind alsdann genöthigt, die Seile oder Riemen durch die im vorhergehenden Abschnitte angegebenen Mittel, und wovon die Spannungsrollen unstreitig die besten sind, weil man vermittelst derselben die Spannung beliebig reguliren kann, bis kein Gleiten mehr stattfindet, oft wieder anzuspannen. Aber gewöhnlich gibt man zur Verhütung jeder Art von Nachtheil den Riemen oder Seilen eine größere Spannung, so daß in Folge der dadurch bewirkten größern Zapfenreibung wieder alle Vortheile verloren gehen, welche diese Uebertragungsart der Bewegung darbieten kann, was besonders bei Maschinen mit absetzenden Wirkungen oder Bewegungen und ohne Schwungrad, welches die Geschwindigkeit der Riemenwellen gleichförmig erhalten kann, der Fall ist.

Berechnungsart dieser Spannung in den verschiedenen Fällen.

§. 249. Bei einer vollständig construirten Maschine, welche sich mit Riemen und Spannungsrollen gleichförmig bewegt, kann man sich zur directen Berechnung der auf die Riemen wirkenden Kräfte jedesmal der Relationen in §. 243 und §. 244 bedienen, wenn der Druck der Rolle a priori gegeben oder bestimmbar ist; denn diese Kraft ist in allen Fällen der Resultante aus den entsprechenden Spannungen gleich und direct entgegengesetzt. Aber wenn keine Spannungsrolle vorhanden ist, so muß man T_1 durch Versuche bestimmen. Nachdem man z. B. der Radwelle A' (Fig. 91) alle Freiheit zur Bewegung genommen und Q, sowie das Zubehör, woran diese Kraft wirkt, hinweggelassen hat, bringt man an dem Ende eines horizontalen, hinreichend langen und mit dem Rade A fest verbundenen Hebels ein Gegengewicht an, welches eben zu bewirken im Stande ist, daß die Trommel nach einer ihrer natürlichen Bewegung entgegengesetzten Richtung unter dem Riemen hingleitet, und wenn man dieses Gegengewicht mit Q_1, seinen Hebelarm mit r_1 und die entsprechenden Spannungen der Seilstücke BB',

DD' wieder mit T, T' bezeichnet; so hat man offenbar (§. 247 und §. 248):

$$Q_1 r_1 = (T - T') R + f_1 \varrho \,.\, 0{,}96 \left\{ M + Q_1 + (T - T') \sin.\varphi \right\}$$
$$+ f_1 \varrho \,.\, 0{,}4 (T + T') \cos.\varphi,$$
$$T = e^{\frac{fs}{R}} T', \quad T + T' = 2 T_1.$$

Um aus diesen Gleichungen den Werth von T_1 abzuleiten, setze man:

$$T + T' = \left(1 + e^{\frac{fs}{R}}\right) T' = KT', \quad T - T' = \left(e^{\frac{fs}{R}} - 1\right) T' = K'T',$$

und wenn man diese Werthe in die erste der fraglichen Gleichungen substituirt, so gibt sie unmittelbar T' und folglich:

$$T_1 = {}^1/_2 (T + T') = {}^1/_2 KT'$$
$$= {}^1/_2 K \frac{Q_1 r_1 - 0{,}96 f_1 \varrho (M + Q_1)}{K'R + f_1 \varrho (0{,}96 K' \sin.\varphi + 0{,}4 K \cos.\varphi)}.$$

Wenn das Gleiten des Riemens nicht auf der Trommel A, sondern auf A' stattfände, so bliebe die Auflösung dieselbe, weil die Ausdrücke von K und K' nur von dem Verhältnisse $\frac{s}{R_1}$, welches auch für beide Trommeln dasselbe ist, abhängen (s. die Note in §. 202).

Im Allgemeinen hat man kein directes Mittel zur Bestimmung der eigenen Spannung T_1 der Riemen ohne Ende, und alsdann muß man auf die weiter oben (§. 247 und §. 248) angegebene Weise wenigstens einen Näherungswerth von T_1 zu berechnen suchen. Setzt man wieder:

$$(T + T') = \left(1 + e^{\frac{fs}{R}}\right) T' = KT', \quad T - T' = \left(e^{\frac{fs}{R}} - 1\right) T' = K'T'$$

und substituirt diese Werthe von $T + T'$, $T - T'$ in die Gleichungen in §. 247; so ergibt sich daraus zunächst T' und dann:

$$T_1 = {}^1/_2 K \frac{Qr + {}^1/_2 d'' + 0{,}96 f_1 \varrho (M + Q)}{K'R - {}^1/_2 d'' b - f_1 \varrho \left\{ 0{,}96 K' \sin.\varphi + 0{,}4 \cos.\varphi \right\}},$$

wovon nach dem in §. 247 Gesagten der Werth für die ungünstigste Lage des Systemes genommen werden muß, welche hier dem Maximum von $Qr + 0{,}96 f_1 \varrho Q$ entspricht, und außerdem muß dieser Werth um $^1/_{10}$ oder $^1/_5$ vergrößert werden, je nachdem die Bewegung der Maschine mehr oder weniger regelmäßig ist.

Definitive Auflösung der Aufgabe.

§. 250. Nachdem man durch das eine oder durch das andere der eben angegebenen Verfahren den wahren, oder genäherten Werth von T_1 erhalten hat, schreitet man zu der Berechnung der Spannungen T und T' für eine beliebige gegebene Lage des Systems, indem man successive diese Spannungen zwischen der Gleichung des Gleichgewichtes in §. 247 und der Relation:

$$T + T' = 2 T_1$$

eliminirt. Substituirt man z. B. den Werth $2\,T_1 - T'$ von T in die erwähnte Gleichung, so findet man:

$$T' = \frac{\left[T_1 \left\{ R - f_1 \varrho \,(0{,}96\, sin.\, \varphi + 0{,}4\, cos.\, \varphi) \right\} - \frac{d''a}{4} - \frac{0{,}96 f_1 \varrho\,(M + Q)}{2} - \frac{Qr}{2} \right]}{R - 0{,}96 f_1 \varrho\, sin.\, \varphi + \frac{d''b}{4}},$$

und folglich:

$$T = \frac{\left[T_1 \left\{ R - f_1 \varrho \,(0{,}96\, sin. - 0{,}4\, cos.\, \varphi) + {}^1/_2\, d''b \right\} + \frac{d''a}{4} + 0{,}96 f_1 \varrho \frac{M + Q}{2} + \frac{Qr}{2} \right]}{R - 0{,}96 f_1 \varrho\, sin.\, \varphi + \frac{d''b}{4}}.$$

Da das in dem Ausdrucke von N vorkommende Glied $(T - T')\, sin.\, \varphi$ (§. 246) im Allgemeinen gegen die übrigen Glieder sehr klein ist, so kann man zur Vereinfachung der Rechnung und ohne Nachtheil für die Genauigkeit dafür den Näherungswerth $\frac{Qr}{R}\, sin.\, \varphi$ substituiren, welcher dem Falle entspricht, wo keine passiven Widerstände stattfinden. Hierdurch erhält man sofort:

$$N = 0{,}96 \left\{ M + Q + \frac{r}{R}\, Q\, sin.\, \varphi \right\} + 0{,}8\, T_1\, cos.\, \varphi,$$

und kann folglich den Werth des Gliedes $fN\varrho$, welches in der Gleichung des Gleichgewichtes das Moment der Reibung der Zapfen der betrachteten Welle A ausdrückt, a priori berechnen.

Sind diese Rechnungen einmal ausgeführt, so bieten die in Beziehung auf die Welle A', woran die Kraft P unmittelbar angebracht ist, durchaus keine Schwierigkeiten mehr dar; denn man hat zur Bestimmung von P eine Gleichung von der Form:

$$PR' = (T - T')\, R' + \frac{d''\,(a + bT)\, R'}{2\, R'}$$

$$+ f_1 \varrho \sqrt{\left(M' + (T - T')\, sin.\, \varphi + P\, cos.\, \alpha\right)^2 + \left((T + T')\, cos.\, \varphi - P\, sin.\, \alpha\right)^2},$$

worin bloß die unbekannte Größe P vorkommt, welche man sofort durch die bereits zu wiederholten Malen angegebenen Methoden daraus ableiten kann.

Für die Anwendungen dieser verschiedenen Auflösungen auf jeden besondern Fall kann man noch bemerken: 1) daß, wenn die Seilstücke BB' und DD' (Fig. 92) zu einander parallel sind, oder wenn $R = R'$ ist, keine Veränderung in den Resultaten hinsichtlich der Zahlencoefficienten 0,96 und 0,4 vorzunehmen ist (§. 240), so daß man bloß $sin.\, \varphi = 0$, $cos.\, \varphi = 1$ zu setzen braucht, und 2) daß man, wenn diese Seilstücke einen beliebigen Winkel mit einander bilden, zur directen Berechnung von $sin. \varphi$ und $cos. \varphi$ die Relation hat:

$$BB' = AA' \cos. \varphi\,,\ A'B' - AB = R' - R = AA' \sin. \varphi\,,$$

worin BB' und AA' **a priori** gegeben sind.

Von den Flaschen und Flaschenzügen.

Flaschenzug mit gleichen Rollen und fast parallelen Seilen.

§. 251. Die vorhergehenden Betrachtungen setzen uns in den Stand, die Reibung und die Steifigkeit der Seile in allen zusammengesetzten Maschinen, wie die Flaschen, Flaschenzüge, Hebezeuge, Krahnen rc., worin Rollen und Trommeln vorkommen, welche durch diese Seile in Thätigkeit gesetzt werden, in Rechnung zu bringen, und wir wollen jetzt einige besondere Beispiele davon anführen.

Zunächst wollen wir den aus zwei gleichen Flaschen oder Systemen gleicher Rollen, welche sich an zwei besonderen Axen in Biegeln befinden, wovon der eine an einem festen Punkte aufgehangen ist und der andere irgend eine Last trägt, bestehenden Flaschenzug (Takel) betrachten, indem wir die verschiedenen Seilstücke als zu einander parallel ansehen und ihre Gewichte, sowie die der Rollen unberücksichtigt lassen, weil sie in den meisten Fällen nur einen geringen Einfluß haben.

In dieser Voraussetzung und unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen, wie in §. 243 und §. 244, hat man für die Bedingungen des Gleichgewichtes irgend einer der Rollen der einen oder der andern Flasche:

$$Tr = T'r + {}^1\!/_2\, d'' (a + bT') + f'\varrho\, (T + T'),$$

woraus folgt:

$$T = T' \frac{(r + f'\varrho + {}^1\!/_2\, d''b)}{r - f'\varrho} + \frac{{}^1\!/_2\, d''a}{r - f'\varrho},$$

und wenn wir der Kürze wegen:

$$\frac{r + f'\varrho + {}^1\!/_2\, d''b}{r - f'\varrho} = \beta\,,\ \frac{{}^1\!/_2\, d''a}{r - f'\varrho} = \alpha$$

setzen, so haben wir für eine beliebige Rolle die Gleichung:

$$T = \alpha + \beta T',$$

worin α und β constante Größen sind.

Bezeichnet nun Q die Last, welche der untere Biegel trägt, mit Einschluß des Zubehöres, und sind $t_1,\ t_2,\ t_3 \ldots\ldots t_n,\ t_{n+1}$ die Spannungen der successiven Seile, wovon das erste an der obern oder festen Flasche befestigt ist und das letzte über die letzte Rolle der obern Flasche geht, indem die Kraft unmittelbar an diesem Seile wirkt; so hat man, wenn man bemerkt, daß die Last Q zugleich von allen Seilen, mit Ausnahme des letzten, getragen wird, die Gleichung:

$$t_1 + t_2 + t_3 \ldots\ldots\ldots + t_n = Q.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich für die successiven Rollen:

$$t_2 = \alpha + \beta t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha \frac{(1-\beta)}{(1-\beta)} + \beta t_1,$$

$$t_3 = \alpha + \beta t_2 = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 t_1$$

$$= \alpha(1+\beta) + \beta^2 t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha \frac{(1-\beta^2)}{1-\beta} + \beta^2 t_1,$$

$$t_4 = \alpha + \beta t_3 = \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 t_1$$

$$= \alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^3 t_1 \ldots\ldots\ldots = \alpha \frac{(1+\beta^3)}{1-\beta} + \beta^3 t_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_n = \alpha + \beta t_{n-1} = \alpha(1+\beta+\beta^2+\ldots\ldots+\beta^{n-2})$$

$$+ \beta^{n-1} t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha \frac{(1-\beta^{n-1})}{1-\beta} + \beta^{n-1} t_1,$$

und folglich:

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n = \alpha \left\{ \frac{n-1-\beta-\beta^2-\ldots\ldots-\beta^{n-1}}{1-\beta} \right\}$$

$$+ (1+\beta+\beta^2+\ldots\ldots+\beta^{n-1})\, t_1,$$

oder:

$$Q = \alpha \left\{ \frac{n}{1-\beta} - \frac{(1-\beta^n)}{(1-\beta)^2} \right\} + \frac{(1-\beta^n)}{1-\beta}\, t_1;$$

folglich:

$$t_1 = Q\,\frac{(1-\beta)}{1-\beta^n} - \alpha\left(\frac{n}{1-\beta^n} - \frac{1}{1-\beta}\right).$$

Man hat also endlich zur Berechnung von t_n und t_{n+1} die Formeln:

$$t_n = \alpha \frac{(1-\beta^{n-1})}{1-\beta} + \beta^{n-1} t_1$$

$$= \alpha\left(\frac{n\beta^{n-1}}{\beta^n-1} - \frac{1}{\beta-1}\right) + \frac{(\beta-1)\,\beta^{n-1}}{\beta^n-1}\, Q,$$

$$t_{n+1} = \alpha + \beta t_n = \alpha\left(\frac{n\beta^n}{\beta^n-1} - \frac{1}{\beta-1}\right) + \frac{(\beta-1)\,\beta^n}{\beta^n-1}\, Q,$$

wovon die erste angewandt wird, wenn das Seil, woran die Kraft wirkt, direct nach einer Rolle der beweglichen Flasche geht.

Dieselbe Analyse würde offenbar auch auf jede Verbindung gleicher Rollen anwendbar sein, wenn die Seile derselben unter sich, oder mit der Verticale dieselben Winkel bilden, was zuweilen bei den zum Heben von Lasten bestimmten Maschinen der Fall ist. Denn nach §. 243 und §. 244 ist einleuchtend, daß man für die beweglichen Rollen, wie für die festen, wenn die Bezeichnungen in §. 243 beibehalten werden, nahezu hat:

$$Tr = T'r + {}^1/_2\, d''(a + bT')$$

$$+ f\varrho \sqrt{(T+T')^2 \cos.^2 \varphi + (T-T')^2 \sin.^2 \varphi},$$

woraus mit einem hinreichenden Grade von Annäherung folgt:

$$T = \frac{\left\{r + \frac{1}{2} d^\mu b + f'\varrho\,(0{,}96\,cos.\,\varphi - 0{,}4\,sin.\,\varphi)\,T + \frac{1}{2} d^\mu a\right\}}{r - f'\varrho\,(0{,}96\,cos.\,\varphi + 0{,}4\,sin.\,\varphi)},$$

in welchem Ausdrucke nach der Voraussetzung nur T und T' veränderlich sind.

Numerische Anwendung auf das Takel der Schiffer.

§. 252. Das Takel, welches bei den Schiffsbrücken angewandt wird (Fig. 93), besteht aus zwei Systemen oder Flaschen, jede mit vier gleichen messingenen Rollen, von dem gemeinschaftlichen Halbmesser $r = 0^m{,}0593$, bis zur Mitte des Seiles gemessen, welches selbst einen Durchmesser $d = 0^m{,}018$ hat. Diese Rollen sind mit einem Auge von dem Halbmesser $\varrho = 0^m{,}0105$ durchbrochen (§. 219) und drehen sich ohne Schmiere um einen eisernen Bolzen, so daß hier nach den Versuchen von Coulomb (§. 191)

$$f = 0{,}155 \text{ und } f' = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = 0{,}153,$$

folglich:

$$r + f'\varrho = 0^m{,}06093 \text{ und } r - f'\varrho = 0^m{,}05767$$

ist.

Die Tafel in §. 198 gibt für ein Seil von einem Durchmesser $d' = 0^m{,}02$, welches auf eine Trommel von 1 Meter im Durchmesser gewickelt wird:

$$d'^\mu a = 0{,}2246 \text{ Kilogr.}, \quad d'^\mu b = 0{,}00974 \text{ Kilogr.},$$

wo der Exponent μ ungefähr $= 1^m{,}75$ ist und fast neuen Seilen entspricht. Wenn wir also annehmen, daß sich das Seil des Takels in demselben Zustande befindet, so haben wir nach §. 199:

$$d^\mu a = d'^\mu a \left(\frac{d'}{d}\right)^\mu = 0{,}22246 \left(\frac{9}{10}\right)^{1,75} = 0{,}184997 \quad 0{,}15$$

$$d^\mu b = d'^\mu b \left(\frac{d'}{d}\right)^\mu = 0{,}00974 \left(\frac{9}{10}\right)^{1,75} = 0{,}0080997 \quad 0{,}081,$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} d^\mu a}{r - f'\varrho} = 1{,}6039, \quad \beta = \frac{r + f'\varrho + \frac{1}{2} d^\mu b}{r - f'\varrho} = 1{,}1267.$$

Substituirt man diese Werthe in die Formel:

$$t_{n+1} = \alpha \left(\frac{n\beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right) + \frac{(\beta - 1)\,\beta^n}{\beta^n - 1}\ Q$$

und bemerkt, daß hier $n = 8$ und folglich:

$$\beta^n = 2{,}596, \quad \frac{\beta^n}{\beta^n - 1} = 1{,}6265$$

ist, so kommt:

$$t_{n+1} = 12^k{,}18 + 0{,}228\,Q,$$

und wenn man die passiven Widerstände unberücksichtigt ließe, so hätte man offenbar:

$$t_{n+1} = P = 8^k,213 + 0,2061\ Q.$$

Diese Widerstände erfordern also einen Kraftaufwand, welcher ausgedrückt wird durch:

$$8^k,213 + 0,081\ Q,$$

und dessen Verhältniß zu der Last Q desto größer wird, je kleiner diese Last wird, welcher Umstand von dem constanten Theile $d''a$ der Steifigkeit des Seiles herrührt (§ 197). Nehmen wir z. B. an, daß die zu hebende Last ein Gewicht von 2800 Kilogr. hat, so ist zum Heben derselben eine Kraft von ungefähr $585^k,29$ erforderlich, während bloß eine Kraft $= 0,125\ Q = 350$ Kilogr. erforderlich wäre, wenn die schädlichen Widerstände nicht vorhanden wären. Diese Widerstände absorbiren folglich $\frac{235,29}{585,29} = 0,402$ der bewegenden Kraft oder, was dasselbe ist, der Nutzeffect wird auf $\frac{350}{585,29} = 0,598$ der angewandten Quantität Arbeit reducirt, wo beide hier offenbar den entsprechenden und auf denselben Angriffspunkt oder denselben durchlaufenen Weg bezogenen Kräften proportional sind (§. 188).

Flaschenzüge mit ungleichen Rollen und parallelen Seilen. — Anwendungsbeispiel.

§ 253. Der in Fig. 94 dargestellte Flaschenzug wird häufig bei Bauten zum Heben der Baumaterialien angewandt. Die Seile desselben sind wieder nahezu parallel, aber die Rollen jeder Flasche verschieden und befinden sich in demselben Biegel an verschiedenen Axen. Da sich also die Werthe von α und β (§. 250) von einer Rolle zu der folgenden ändern, so muß man die den auf einander folgenden Rollen entsprechenden Spannungen $t_2, t_3, \ldots\ldots t_n, t_{n+1}$ als Functionen der Spannung t_1 des ersten Seiles berechnen, so daß man die Reihe von Gleichungen hat:

$$t_2 = \alpha + \beta t_1,\ t_3 = \alpha_1 + \beta_1 t_1,\ t_4 = \alpha_2 + \beta_2 t_1, \ldots\ldots\ldots$$
$$t_n = \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} t_1,\ t_{n+1} = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} t,$$

woraus man den Werth von t_1, dann den von t_n und von t_{n+1} ableitet, indem man wieder die Gleichung bildet:

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots t_n =$$
$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_{n-2} + (1 + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_{n-2})\, t_1.$$

Diese Rechnungen vereinfachen sich in den meisten Fällen, weil die in beiden Flaschen symmetrisch liegenden Rollen, sowie ihre Zapfen, gleiche Halbmesser bekommen.

Um ein Zahlenbeispiel zu geben, wollen wir annehmen, daß für die beiden ersten Rollen, um welche die Seile von den Spannungen t_1, t_2 und t_3 gehen:

$$r = 0^m,043,\ \varrho = 0^m,0075,\ f' = 0^m,125$$
$$d = 0^m,016,\ d''a = 0,0635,\ d''b = 0,00552$$

ist, so folgt, wenn man in die Relationen in §. 250 substituirt:

$$\alpha = 0^k{,}756, \ \beta = 1{,}1119, \ t_2 = 0{,}756 + 1{,}1119\, t_1,$$
$$t_3 = \alpha(1+\beta) + \beta^2 t_1 = 1{,}597 + 1{,}2363\, t_1.$$

Für die dritte Rolle wollen wir ebenfalls:

$$r = 0^m{,}056, \ \varrho = 0^m{,}0075, \ f' = 0{,}125,$$
$$d''a = 0{,}0635, \ d''b = 0{,}00552$$

setzen, so kommt:

$$\alpha = 0^k{,}577, \ \beta = 1{,}0854,$$
$$t_4 = 0^k{,}577 + 1{,}0854\, t_3 = 2^k{,}310 + 1{,}3419\, t_1 \ \ldots\ldots$$

Man hat folglich, wenn die Kraft unmittelbar an dem Seile t_4 wirkt:

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4^k{,}663 + 4{,}690\, t_1,$$

folglich:

$$t_4 = 1^k{,}005 + 0{,}2861\, Q,$$

während man $t_4 = 0{,}25\, Q$ hätte, wenn keine passiven Widerstände stattfänden.

Wenn z. B. $Q = 532$ Kilogr. ist, so muß mit Berücksichtigung der erwähnten Widerstände

$$t_4 = 1^k{,}005 + 152^k{,}205 = 153^k{,}21$$

sein, während, wenn keine Widerstände stattfänden, bloß $t_4 = 133$ Kilogr. wäre.

Diese Rechnungen beziehen sich speciell auf einen Flaschenzug, womit Morin bei seinen Untersuchungen über die Reibung directe Versuche angestellt hat, und der Werth, welchen er für t_4 gefunden hat, ist nur um 6,80 Kilogr. größer, als der durch die obige Rechnung erhaltene, welcher Unterschied sich dadurch erklärt, daß wir den Einfluß des Gewichtes des Seiles und der Rollen unberücksichtigt gelassen und der Kürze wegen die Steifigkeit dieses Seiles von $0^m{,}016$ im Durchmesser bloß der in der Tafel in §. 198 angegebenen Steifigkeit des Seiles von $0^m{,}014$ im Durchmesser gleich gesetzt haben.

Berechnung des Artilleriehebezeuges.

§. 254. Betrachten wir z. B. das Artilleriehebezeug (Fig. 95) und behalten in Beziehung auf die Rollen die Bezeichnungen in §. 251 bei, so ist zunächst zu bemerken, daß das Seil, woran die Kraft wirkt, und dessen Spannung t_{n+1} ist, hier nicht zu den übrigen Seilen parallel ist, weil es sich auf die Welle des Hebezeuges wickelt, so daß man das Gleichgewicht der letzten obern Rolle unter der Wirkung der Spannungen t_{n+1} und t_n besonders betrachten muß.

Zur Berechnung der Spannung t_n hat man zunächst die Gleichung (§. 253):

$$t_n = \alpha\left(\frac{n\beta^{n-1}}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right) + \frac{(\beta-1)\,\beta^{n-1}}{\beta^n - 1}\, Q,$$

und zur Berechnung der Spannung t_{n+1} des letzten Seiles, welches mit der Verticale einen Winkel φ bildet, hat man die Gleichung (§. 243):

$$t_{n+1}\, r = t_n\, r + \frac{d'' (a + b t_n)}{2r}$$

$$+ f' \varrho \sqrt{(t_n + t_{n+1} \cos. \varphi)^2 + t^2_{n+1} \sin.^2 \varphi},$$

welche, wenn man:

$$\sqrt{(t_n + t_{n+1} \cos. \varphi)^2 + t^2_{n+1} \sin.^2 \varphi} =$$
$$0{,}986\,(t_n + t_{n+1} \cos. \varphi) + 0{,}233\, t_{n+1} \sin. \varphi$$

setzt, welcher Werth bis auf $^1/_{71}$ genau ist, weil $t_n + t_{n+1} \cos. \varphi$ wenigstens doppelt so groß ist, als $t_{n+1} \sin. \varphi$ (s. die Note am Ende dieses Abschnittes) gibt:

$$t_{n+1} = \frac{t_n (r + {}^1/_2\, d'' b + 0{,}986\, f' \varrho) + {}^1/_2 d'' a}{r - f' \varrho\, (0{,}986 \cos. \varphi + 0{,}233 \sin. \varphi)}$$

$$= \frac{t_n (r + {}^1/_2\, d'' b + 0{,}986\, f' \varrho) + {}^1/_2 d'' a}{r - f' \varrho},$$

wenn man ferner bemerkt, daß, weil $2 \sin. \varphi$ immer kleiner als $\cos. \varphi$ ist, die im Nenner vorkommende Größe $0{,}986 \cos. \varphi + 0{,}233 \sin. \varphi$ bis auf $^1/_{71}$ genau der Werth von $\cos.^2 \varphi + \sin.^2 \varphi = 1$ hat.

Nachdem die Spannung t_{n+1} des sich auf die Welle des Hebezeuges wickelnden Seiles auf diese Weise bekannt ist, schreitet man zu der Berechnung der Kraft, welche auf die Radwelle wirken muß, um alle Widerstände zu überwinden; allein es bietet sich hier eine Schwierigkeit dar, welche daher rührt, daß die an dem Hebezeuge arbeitenden Menschen weder mit derselben Intensität, noch unter demselben Winkel, noch auf denselben Punkt der Hebel, deren Neigung sich außerdem jeden Augenblick ändert, wirken. Man ist daher genöthigt, die mittlere Kraft oder Leistung der Arbeiter für jede Umdrehung der Hebel, oder für eine gegebene Zeit näherungsweise zu bestimmen, und muß sich dann überzeugen, ob sie diese zur Ueberwindung aller Widerstände erforderliche Kraft oder Leistung wirklich hervorbringen können.

Zu dem Zwecke muß man bemerken, daß sich die Wirkung der Arbeiter auf die Maschine immer als in zwei andere zerlegt denken läßt, wovon die eine auf den Hebeln senkrecht ist und allein die Bewegung hervorbringt, während die andere, nach diesen Hebeln selbst gerichtete, nur die Zapfen der Radwelle gegen ihre Lager drückt, und ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden kann, weil sie nur auf die sehr geringe Reibung dieser Welle Einfluß hat. Bezeichnet man folglich mit P die erste Kraft, mit α den Winkel, welchen ihre Richtung mit der Verticale bildet, und mit R ihren mittleren Abstand von der Axe, welcher ungefähr zu $^3/_4$ oder $^2/_3$ der Länge der Hebel angenommen werden kann; so hat man zur Bestimmung von P, wenn man bemerkt, daß hier die auf die Zapfen wirkenden Componenten von t_{n+1} nothwendig die von M und P herrührenden Componenten überwiegen, die Gleichung:

$$PR = t_{n+1}\, r + {}^1/_2\, d'' (a + b t_{n+1})$$

$$+ f_1' \varrho' \sqrt{(t_{n+1} \cos. \varphi - M - P \cos. \alpha)^2 + (t_{n+1} \sin. \varphi - P \sin. \alpha)^2},$$

worin r', f_1', ϱ' und M die bereits wiederholt angegebene Bedeutung haben, und welche man auf die gewöhnliche Weise auflösen muß, indem man z. B. für die Wurzelgröße den Näherungswerth:

$$(0{,}96\, cos.\, \varphi + 0{,}4\, sin.\, \varphi)\, t_{n+1} - 0{,}96\, M - (0{,}96\, cos.\, \alpha + 0{,}4\, sin.\, \alpha)\, P$$
$$= t_{n+1} - 0{,}96\, M - (0{,}96\, cos.\, \alpha + 0{,}4\, sin.\, \alpha)\, P$$

setzt, weil hier der Winkel $\varphi < 45^{\circ}$ ist und wieder bis auf $^1/_{25}$ genau $0{,}96\, cos.\, \varphi + 0{,}4\, sin.\, \varphi = 1$ ist. Da sich aber der Winkel α von 0° bis ungefähr zu 90° ändern kann und wir das Gewicht der Hebel, sowie die nach ihrer Richtung wirkenden Componenten der Kraft der Arbeiter unberücksichtigt gelassen haben; so kann man für den Ausdruck $0{,}96\, cos.\, \alpha + 0{,}4\, sin.\, \alpha$ auch seinen größten Werth 1 setzen, welcher dem Winkel entspricht, für welchen $0{,}4\, cos.\, \alpha = 0{,}96\, sin.\, \alpha$ ist. Hiernach findet man für die mittlere Kraft:

$$P = \frac{t_{n+1}\,(r' + {}^1/_2\, d''b + f_1'\varrho') + {}^1/_2\, d''a - 0{,}96\, f_1'\varrho' M}{R + f_1'\varrho'}.$$

Numerisches Anwendungsbeispiel.

§. 255. Um von den vorhergehenden Formeln ein numerisches Anwendungsbeispiel zu geben, wollen wir annehmen, daß vermittelst eines Hebezeuges mit vier Seilstücken eine 16pfünder Kanone, deren Gewicht Q ungefähr 2000 Kilogr. beträgt, gehoben werden soll. Setzt man hier, wie gewöhnlich:

$$n = 4,\ d = 0^m{,}04,\ r = 0^m{,}107,\ \varrho = 0^m{,}017,\ \mu = 1{,}75,\ f = 0{,}153,$$

so kommt (§. 198 und 199):

$$ad'' = 0^k{,}74835,\ bd'' = 0^k{,}03276,\ \alpha = 3{,}5977,\ \beta = 1{,}2152 \text{ und}$$
$$t_n = 5^k{,}1636 + 0{,}3271 \cdot Q,$$

und:

$$t_{n+1} = 3^k{,}5977 + 1{,}2152\, t^n = 9^k{,}872 + 0{,}397\, Q = 803^k{,}87.$$

Da die Länge der Hebel, von der Axe der Welle an gerechnet, höchstens 2 Meter beträgt, so wollen wir $R = 1^m{,}50$ setzen, und wenn der Halbmesser des Seiles in Rechnung gebracht wird, so hat man $r' = 0^m{,}1045$, ferner $\varrho' = 0^m{,}0405$, $M = 80^k$, und $f_1' = 0{,}07$ (§§. 189 und 191), weil die Zapfen und Zapfenlager aus Holz bestehen und bloß fettig oder schon lange geschmiert sind. Wenn man also bemerkt, daß hier ferner:

$$d''a = 0^k{,}74835,\quad d''b = 0{,}03276$$

ist, so erhält man:

$$P = 0^k{,}104 + 0{,}0823\, t_{n+1} = 66^k{,}262.$$

Dieses ist die mittlere Kraft, welche die Arbeiter in normaler Richtung auf den Hebeln und in einer Entfernung von $1^m{,}50$ von der Axe ausüben müssen. Wenn keine Reibung stattfände, so hätte man offenbar:

$$t_{n+1} = \frac{Q}{4} = 500^k,\ PR = t_{n+1}\, r' = 0{,}25\, Q\, r';$$

folglich:

$$P = \frac{0{,}25\, r'\, Q}{R} = 0{,}0174\, Q = 35^{k}{,}80.$$

Es werden also nur $\frac{35{,}80}{66{,}26} = 0{,}54$ der bewegenden Kraft wirklich auf die Last übertragen, und die übrigen 0,46 derselben werden durch die schädlichen Widerstände absorbirt; denn es verhalten sich auch hier die Quantitäten Arbeit für denselben Punkt und für dieselben durchlaufenen Wege, wie die ihnen entsprechenden Kräfte.

Kraft und Leistung der Arbeiter in diesem Falle.

§. 256. Es arbeiten gewöhnlich an dem Hebezeuge sechs Menschen, wovon vier die Hebel successive einstecken und ausziehen und die beiden anderen jenen bei dem Hebelumlegen behülflich sind, so daß nur vier Menschen an diesen Hebeln zugleich arbeiten und nach einer darauf senkrechten Richtung eine mittlere Kraft von 16,56 Kilogr. ausüben müssen, welche nothwendig kleiner ist, als die größte Kraft, welche sie in gewissen Augenblicken bei dieser Arbeit ausüben können, indem sie einen großen Theil ihres Gewichtes mitwirken lassen, und der Ueberschuß dieser letzten Kraft über die erste dient offenbar zur Beschleunigung der Bewegung des Systemes, oder zur Ueberwindung seiner Trägheit, deren Einfluß wir später untersuchen werden. Auch ist zu bemerken, daß in der Nähe der verticalen Lage der Hebel die Muskelkraft der Arbeiter fast allein wirkt, und zwar in einer Entfernung von höchstens $0^{m}{,}8$ von der Axe, und welcher folglich eine auf diesen Hebeln senkrechte Kraft $= \frac{1{,}5}{0{,}8}\, 16^{k}{,}56 = 31^{k}{,}05$ entspricht, die sich der Gränzkraft sehr nähert, welche sie in dieser ungünstigen Lage ausüben können.

Vier Arbeiter konnten ohne Gehülfen eine 16pfünder Kanone in ungefähr 3′ oder 180″ auf eine Höhe von 1 Meter heben, welches für die Secunde eine Höhe von $0^{m}{,}005587$ gibt, so daß die entsprechende Nutzleistung

$$= 2000^{k} \times 0^{m}{,}005587 = 11^{km}{,}172$$

ist, und folglich ist die von diesen vier Arbeitern in derselben Zeit wirklich hervorgebrachte Quantität Arbeit

$$= \frac{11^{km}{,}172}{0{,}54} = 20^{km}{,}68$$

gewesen; also für jeden Arbeiter in der Secunde $= 5^{km}{,}17$. Dieses Resultat ist weit größer, als das, welches man erhält, wenn die Arbeiter vermittelst eines Seiles und einer Rolle eine längere Zeit Lasten heben müssen; allein man muß bemerken, daß die Arbeit an dem Hebezeuge nur kurze Zeit dauert.

Aus der Tafel am Ende des 6. Abschnittes, welche die Quantitäten Arbeit angibt, welche die Menschen an der Kurbel oder an den Treträdern täglich hervorbringen können, sieht man, daß diese Arbeit auf 6 bis 9 Kilometer in der Secunde steigen kann, weßwegen man in den technischen Werkstätten die festen Krahne dem eben betrachteten

Hebezeuge allgemein vorzieht, dessen Vorzüge seinerseits hauptsächlich darin bestehen, daß es sich leicht transportiren und repariren läßt, welches man aber in mechanischer Beziehung wesentlich verbessern und namentlich die Gefahr für die Arbeiter vermindern könnte, wenn man statt der Hebel ein Vorgelege mit kleinen Rädern anwendete, welche eine doppelarmige Kurbel in Bewegung setzt, auf welche auch bei den schwersten Lasten nur vier Menschen zu wirken brauchen, welche zugleich schneller und mit weniger Anstrengung arbeiten würden, wie wir in der Folge sehen werden, wenn wir die Formeln zur Berechnung der Reibung der Räderwerke abgeleitet haben werden.

Bemerkungen über die Einrichtung der zum Heben von Lasten bestimmten Maschinen. — Einfluß der Trägheit und des Gewichtes der Seile.

§. 257. Wir haben uns bei dieser Anwendung absichtlich etwas länger aufgehalten, um die Art und Weise zu zeigen, wie man bei der Berechnung der zum Heben von Lasten bestimmten Maschinen, woran Menschen arbeiten, verfahren und zugleich ihre relativen Vorzüge bestimmen muß. Im Allgemeinen muß man bei der Construction und Aufstellung solcher Maschinen die Erfahrungsdata in Beziehung auf die mittlere tägliche Arbeit, welche die Arbeiter nach den verschiedenen Umständen oder den verschiedenen Anwendungsarten ihrer Kraft hervorbringen können, und an dem bereits angeführten Orte in Abschn. 6 werden mitgetheilt werden, in Betracht ziehen. Um übrigens zu zeigen, welchen geringen Einfluß die Veränderlichkeit der Bewegung oder die ungleiche Wirkung der Arbeiter bei den in Rede stehenden Maschinen hat (§. 183), brauchen wir nur zu bemerken, daß bei dem Hebezeuge, welches in Vergleich zu den übrigen zum Heben von schweren Lasten bestimmten Maschinen mit einer gewissen Schnelligkeit arbeitet, doch nur eine mittlere Geschwindigkeit der Last von $0^m,005586$ in der Secunde stattfindet, so daß die entsprechende lebendige Kraft

$$=\frac{(0^m,005586)^2 \times 2000^k}{9,8083}=0,0063$$

ist, welche selbst einer Quantität Arbeit von $0^{km},0032$ entspricht, die nur $^1/_{6000}$ von der beträgt, welche die Arbeiter in der Secunde hervorbringen. Zwar ist die Geschwindigkeit gegen die Mitte jeder Hebelumlegung größer, als die obige Zahl angibt; aber wenn man auch annimmt, daß sie 3 Meter in der Secunde und in der Entfernung von 2 Met. von der Axe beträgt, so daß die Geschwindigkeit des sich auf die Welle wickelnden Seiles $=\frac{0^m,1045}{2^m}\times 3^m = 0^m,05225$ und die der Last von 2000 Kilogr. gleich $^1/_4 \times 0^m,05225 = 0^m,01306$ ist; so ergibt sich doch wieder nur eine lebendige Kraft

$$=\frac{(0^m,01306)^2}{9,81}\cdot 2000 = 0,348,$$

welche einer Quantität Arbeit von nur $0^{km},174$ entspricht, die man übrigens nicht als ganz für die Kraft verloren betrachten kann, weil die den Hebeln ertheilte Geschwindigkeit sich so verzögert, daß sie gegen das Ende jeder Hebelumlegung fast Null wird.

Aehnliche Umstände bieten sich bei allen zum Heben von Lasten bestimmten Maschinen dar; aber bei mehreren derselben kann das Gewicht der Seile einen merklichen Einfluß haben, was namentlich bei den in §. 253 betrachteten Flaschenzügen der Fall ist, wo die Arbeit der Menschen durch das Herabsinken eines ziemlich beträchtlichen Gewichtes der Seile begünstigt wird, und wir wollen daher in dem folgenden §. zeigen, wie man den Einfluß dieses Gewichtes bei der Aufstellung der Bedingungen des Gleichgewichtes und bei der Bestimmung der Arbeit in Rechnung bringen muß, zumal, da dieser Einfluß sehr beträchtlich werden kann, wenn man statt der Seile ziemlich schwere Ketten anwendet.

Art und Weise, wie man das Gewicht der Seile und Riemen bei der Aufstellung der Bedingungen des Gleichgewichtes der zum Heben von Lasten bestimmten Maschinen in Rechnung bringt.

Allgemeines Gesetz der Spannungen in jedem Punkte eines schweren Seiles, welches üb r Rollen, oder beliebige Flächen geht.

§. 258. Es sei $abcd \ldots g$ (Fig. 96) ein Seil, an dessen Enden beliebige Kräfte wirken und welches über feste Leitrollen A, B, C geht, die sich um ihre Mittelpunkte drehen können; so sieht man leicht ein, daß das Gewicht dieses Seiles auf die Bedingungen des Gleichgewichtes Einfluß haben muß, 1) weil es auf die Stützpunkte A, B, C einen Druck ausübt und 2) weil es die natürliche Spannung in jedem Punkte verändert. Ferner wollen wir annehmen, daß die übrigen auf das Seil wirkenden Kräfte so beträchtlich sind, daß man annehmen kann, daß es an jeder Rolle genau anliegt und zwischen den Rollen, also von b bis c und von d bis e, geradlinig gespannt ist, was bei den Anwendungen fast immer der Fall ist. Ferner wollen wir annehmen, daß an dem unteren Ende g des Seiles ein Gewicht Q hängt und daß das obere Ende a desselben an einer Welle befestigt sei, woran eine Kraft P wirkt, welche das ganze System mit Einschluß der passiven oder schädlichen Widerstände im Gleichgewichte hält.

Wenn p das Gewicht des laufenden Meters des Seiles bezeichnet, so wird das Gewicht eines beliebigen Elementes $mn = ds$ des Seiles, es mag an einer Rolle liegen, oder nicht, ausgedrückt durch pds, und wenn α den Winkel bezeichnet, welchen dieses Element mit der Verticale bildet; so kann man sich das Gewicht pds in zwei Kräfte zerlegt denken, wovon die eine $pds \cos. \alpha$ in der Richtung des Seiles von oben nach unten wirkt, während die andere $pds \sin. \alpha$ normal auf dieser Richtung wirkt, und bloß den Druck auf die Stützpunkte A, B, C vermehrt, so daß sie direct durch den Widerstand in jedem Punkte der Rollen, oder indirect durch die eigene Steifigkeit des Seiles *) in den freien oder zwischen den Rollen liegenden Theilen aufgehoben wird.

*) Für die Theile, welche Kettenlinien bilden, ist das Gewicht pds jedes Elementes bekanntlich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Resultante aus den successiven Spannungen gleich; die Comronente $pds \sin. \alpha$ wird durch die Summe der Componenten dieser Spannungen nach der Normale oder durch die Kraft $td\theta = td\alpha$ aufgehoben, wo t

Betrachtet man zunächst den Inbegriff der ersten Componenten, so sieht man leicht ein, daß jede derselben, nämlich $pds \cos. \alpha$, das Gewicht eines Stückes des Seiles ausdrückt, welches der Projection $m'n'$ des Elementes mn auf eine beliebige Verticale LM, d. h. der Höhe dh dieses Elementes gleich ist und auf das Seil nach der Richtung der Schwere wirkt. Die Spannung nimmt also von dem tiefsten Punkte jeder Rolle bis zu dem höchsten Punkte des Seiles auf dieser Rolle oder auf den benachbarten Rollen fortwährend zu, und zwar um Größen ph, welche der Höhe h der erwähnten tiefsten Punkte proportional und folglich von der Natur der Curve, welche das Seil bildet, und der der Flächen, worauf es ruht, unabhängig sind. Allgemein, wenn t_1 die Spannung in einem beliebigen Punkte, dessen Höhe über einer gegebenen Horizontalebene gleich h_1 ist, und t die Spannung in einem andern beliebigen Punkte von der Höhe h über derselben Ebene bezeichnet; so hat man, wenn man bloß das Gewicht des Seiles in Betracht zieht:

$$t = t_1 + \int_h^{h_1} pdh = t_1 + p(h - h_1),$$

von welcher Größe das zweite Glied positiv, oder negativ ist, je nachdem h größer oder kleiner als h_1 ist.

Es kann also z. B. die Spannung in dem höchsten Punkte der Rolle B, oder in dem tiefsten Punkte der Rolle A, oder endlich in dem Befestigungspunkte a des Seiles an dieser letzten Rolle als aus zwei anderen Spannungen zusammengesetzt betrachtet werden, wovon die eine der Spannung gleich ist, welche in diesem Punkte stattfinden würde, wenn das Seil kein Gewicht hätte, während die andere Spannung dem Gewichte einer Länge dieses Seiles gleich ist, welche der positiven oder negativen Differenz zwischen der Höhe dieses Punktes und der des Befestigungspunktes g an der Last Q gleich kommt; d. h. die Spannung, welche im Punkte a dem Gewichte des Seiles allein das Gleichgewicht hält, ist dem erwähnten Gewichte gleich, und wirkt zu Gunsten der Kraft P, oder des Widerstandes Q, je nachdem dieser Punkt unter oder über dem Befestigungspunkte g liegt.

Besondere Folgerungen über den Einfluß des Gewichtes der Seile bei Vorrichtungen mit Seilen ohne Ende, bei den Flaschenzügen 2c.

§. 259. Wenn sich die beiden Enden des Seiles genau mit einander verbinden, dasselbe also ein Seil ohne Ende bildet, wie das in **§. 247** betrachtete (Fig. 91); so bewirkt das Gewicht desselben nur einen Druck auf die Stützpunkte und kann die Wirkung der Kraft weder vergrößern, noch verkleinern, so daß man von diesem Satze ausgehen könnte, um den vorhergehenden daraus abzuleiten; allein das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gibt einen andern sehr einfachen Beweis dafür an die Hand.

---

wieder die Spannung in dem betrachteten Punkte und $d\theta$ die Veränderung des Berührungswinkels bezeichnet, welche offenbar der Veränderung des Winkels α gleich ist.

Wenn das Ende g des Seiles nicht frei, oder mit einem Gewichte Q belastet, sondern an einem festen Punkte befestigt ist; so wird das entsprechende Gewicht des Seiles gewöhnlich durch den Widerstand dieses Punktes aufgehoben, und alsdann muß man das Gleichgewicht dieses Seiles von seinem tiefsten Punkte auf der beweglichen Rolle aus betrachten. Dieser Fall findet namentlich bei den Flaschenzügen und dem Hebezeuge der Artilleristen statt, womit wir uns in §§. 251, 253 und 254 beschäftigt haben. Wenn man also für jede Lage des Systemes die Höhe zwischen dem untersten Punkte der beweglichen Rollen und dem Endpunkte des Seiles, woran die Kraft wirkt, durch das Gewicht der Längeneinheit dieses Seiles multiplicirt, so erhält man die Größe, um welche man die Spannung t_{n+1} des letzten Seiles vermehren oder vermindern muß, je nachdem sich die bewegliche Flasche unter oder über der durch den erwähnten Punkt gehenden Horizontale befindet.

Betrachten wir z. B. den Flaschenzug mit nngleichen Rollen in §. 253 (Fig. 94) und bezeichnen für einen gewissen Augenblick mit h die Höhe der kleinsten Rolle der festen Flasche über den Boden und mit H die constante Höhe des Punktes, nach welchem das letzte Seil geht, oder wo es sich aufwickelt; so muß die Spannung t_{n+1} um die Größe $p(H-h)$ vergrößert werden, so daß man hat, wenn P die Kraft bezeichnet:

$$P = t_{n+1} + p(H-p).$$

Es sei dh die Höhe, um welche die an der beweglichen Flasche, deren gegenüberliegende Seile vertical sind, aufgehangene Last Q in einem gewissen Augenblicke gestiegen ist, so ist der während dieses Zeitelementes von dem Angriffspunkte der Kraft P in ihrer eigenen Richtung, welche als mit der Richtung der Spannung t_{n+1} zusammenfallend betrachtet wird, durchlaufene Weg offenbar $= ndh$; denn dieses ist in der That die Länge des Seiles, welches sich von der oberen, der Spannung t_{n+1} entsprechenden Rolle abgewickelt hat, und folglich ist das Element der von der Kraft P längs des Weges ndh hervorgebrachten Arbeit (§. 9):

$$Pndh = nt_{n+1}\,dh + np\,(H-h)\,dh.$$

Integrirt man diese Gleichung von einem gegebenen Werthe h' von h bis zu einem anderen beliebigen Werthe von h und bezeichnet den entsprechenden **mittleren** Werth von P mit P_1, so erhält man für die zwischen diesen beiden Höhen von der Kraft hervorgebrachte Quantität Arbeit:

$$P_1 n(h-h') = nt_{n+1}(h-h') + \frac{np\,(h-h')}{2}(2H-h-h'),$$

wo das sich auf das Gewicht der Seile beziehende Glied Null wird, wenn $h+h' = 2H$ ist, und negativ, sobald $h+h' > 2H$ ist; d. h. alsdann wird die Kraft P gegen das Ende des Aufsteigens der Last durch das Gewicht der Seile nicht beeinträchtigt, sondern vielmehr begünstigt, was auch a priori einleuchtend ist, weil die Werthe des Theiles von P, welcher diesem Gewichte das Gleichgewicht hält, von der Lage aus, für welche $h = H$ ist, negativ werden.

Dieselben Betrachtungen sind offenbar auch auf das Hebezeug der Artilleristen und auf jede andere Verbindung von Rollen und Flaschen anwendbar.

Art und Weise, wie man bei der Berechnung der Flaschenzüge mit verticalen Seilen das Gewicht derselben in Rechnung bringt.

§. 260. Was die normalen Componenten $pds \sin. \alpha$ anlangt (§. 258), welche zur Vergrößerung der Zapfenreibung der Rollen beitragen, so kann man sie fast immer gegen die Druckkräfte vernachlässigen, welche auf dieselben Zapfen durch die Spannungen ausgeübt werden, die in den verschiedenen Punkten durch die an dem Systeme wirkenden Kräfte P und Q hervorgerufen werden. Wenn man übrigens ganz streng verfahren wollte, so müßte man untersuchen, was bei dem Uebergange von dem einen Seile zu dem folgenden stattfindet, indem man von dem ausgeht, woran das Gewicht Q unmittelbar aufgehangen, oder welches an dem festen Punkte befestigt ist, und auf diese Weise allmählig die Spannung des Seiles in seinen Berührungspunkten mit den verschiedenen Rollen und die daraus entspringenden Druckkräfte auf jeden Zapfen bestimmen, wodurch die Rechnungen zwar etwas complicirter, aber nicht schwieriger gemacht werden, wenn die Seile nahezu nach geraden Linien gespannt sind.

Wenn diese Seile vertical sind, so verfährt man hinreichend genau, wenn man annimmt, daß die Zapfen der oberen Rollen von dem ganzen Gewichte der beiden nach einer solchen Rolle gehenden Seile belastet sind, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn man in den Gleichungen des Gleichgewichtes die Spannungen in den Berührungspunkten jedes Seiles mit den oberen Rollen um das Gewicht dieser Seile vergrößert. Betrachtet man z. B. den Flaschenzug in §. 251 und bezeichnet mit $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ nicht mehr die Spannungen der successiven Seile in beliebigen Punkten derselben, sondern in ihren Berührungspunkten mit den unteren Rollen, und nimmt $t_2 + pl$, $t_3 + pl, \ldots t_n + pl$ für die Spannungen in ihren Berührungspunkten mit den oberen Rollen; so muß man, da das Gewicht des Seiles hier einen merklichen Einfluß haben soll, auch das der Rollen in Rechnung bringen, welches übrigens um das Gewicht der ihren halben Umfang umgebenden Seilstücke vermehrt werden muß, und wenn z. B. m die Summe dieser beiden letzten Gewichte bezeichnet; so hat man für die Gleichung des Gleichgewichtes der ersteren unteren Rolle, woran die Spannungen t_1 und t_2 unmittelbar wirken:

$$t_2 r = t_1 r + \tfrac{1}{2} d^{\mu} (a + bt_1) + (t_1 + t_2 - m) f' \varrho,$$

und für die erste obere Rolle, auf welche die Spannungen $t_2 + pl$ und $t_3 + pl$ wirken, ist die Gleichung des Gleichgewichtes:

$$(t_3 + pl) r = (t_2 + pl) r + \tfrac{1}{2} d^{\mu} \left\{ a + b\,(t_2 + pl) \right\} + (t_3 + t_2 + 2pl + m) f' \varrho,$$

woraus sich respective ergibt:

$$t_2 = \alpha + \beta t_1 - \varepsilon m, \quad t_3 = \alpha + \beta t_2 + \varepsilon m + p\gamma l,$$

wenn man setzt:

$$\alpha = \frac{{}^1/_2\, d'' a}{r - f' \varrho}, \quad \beta = \frac{r + {}^1/_2\, d'' b + f' \varrho}{r - f' \varrho},$$

$$\varepsilon = \frac{f' \varrho}{r - f' \varrho}, \quad \gamma = \frac{{}^1/_2\, d'' b + 2 f' \varrho}{r - f' \varrho},$$

welche Werthe für die verschiedenen Rollen constant sind und wovon die beiden ersten den in §. 251 betrachteten Werthen von α und β gleich sind.

Da die unteren und oberen Rollen jede auf ähnliche Gleichungen führt, und die Gleichung:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots + t_n = Q$$

ebenfalls noch stattfindet; so ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung, wie die in §. 251:

$$t_1 = \alpha \left\{ \frac{r}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1} \right\} + \frac{(\beta - 1)}{\beta^n - 1}\, Q + \frac{\varepsilon m}{1 + \beta}$$
$$+ \left\{ \frac{n - 1}{2(\beta^n - 1)} - \frac{\beta^2 (\beta^{n-2} - 1)}{(\beta^2 - 1)(\beta^n - 1)} \right\} p \gamma l,$$

und:

$$t_n = \alpha \left\{ \frac{n \beta^{n-1}}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1} \right\} + \frac{(\beta - 1)\, \beta^{n-1}}{\beta^n - 1}\, Q$$
$$- \frac{\varepsilon m}{1 + \beta} + \left\{ \frac{n \beta^{n-1}}{2(\beta^n - 1)} - \frac{\beta}{\beta^2 - 1} \right\} p \gamma l,$$

in welchen Formeln die beiden ersten Glieder mit α und Q genau die in §. 251 gefundenen Werthe von t_1 und t_n sind.

Was die Spannung t_{n+1} anlangt, so erhält man sie, wenn l' die gegebene und constante Länge des entsprechenden Theiles des Seiles bezeichnet, dessen Gewicht auf das System wirkt, durch die Formel:

$$t_{n+1} = \alpha + \beta t_n + \varepsilon m + p \gamma l + p (l - l'),$$

oder:

$$t_{n+1} = \alpha \left\{ \frac{n \beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1} \right\} + \frac{(\beta - 1)\, \beta^n}{\beta^n - 1}\, Q + \frac{\varepsilon m}{1 + \beta}$$
$$+ \left\{ \frac{n \beta^n}{2(\beta^n - 1)} - \frac{1}{\beta^2 - 1} \right\} p \gamma l + p (l - l'),$$

wovon die drei letzten Glieder den Theil des Widerstandes ausdrücken, welcher von dem Gewichte des Seiles herrührt, und mit ndl multiplicirt, dann wie in §. 260 zwischen zwei gegebenen Werthen von l integrirt, die Quantität Arbeit gibt, welche die Kraft t_{n+1} zwischen den entsprechenden Lagen des Systemes hervorbringen muß. Da übrigens der Factor ε immer eine sehr kleine Zahl ist, so kann man das Glied, worin derselbe vorkommt und welches sich auf das Gewicht der Rollen bezieht, immer unberücksichtigt lassen. Was das Glied mit $p\gamma l$ betrifft, so bekommt dasselbe nur dann einen merklichen Einfluß, wenn l sehr groß und die Last Q hinreichend klein ist. Für die Data in §. 252, und wenn man $l = 3$ Met., $p = 3$ Kilogr., $m = 1$ Kilogr. nimmt, findet man:

$$\frac{\varepsilon}{1+\beta} = 0^k,472, \ \left\{\frac{n\beta^n}{2\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta^2 - 1}\right\} p\gamma l = 4^k,085,$$

während das Glied mit α allein nach §. 252 gleich $12^k,18$ ist. Wenn man also Q kleiner, als 200 Kilogr., oder das entsprechende Glied kleiner, als $0,1038 \times 200^k = 20^k,96$ nimmt, so braucht man die Glieder nicht in Rechnung zu bringen, welche die Zunahme der durch das Gewicht der Seile veranlaßten passiven oder schädlichen Widerstände ausdrücken.

Betrachtung des Falles, wo die Seile eine beliebige Neigung gegen die Verticale haben.

§. 261. Wenn die Seile, statt vertical zu sein, eine beliebige Neigung hätten, so würden die Spannungen an ihren oberen Enden nach dem Principe in §. 258 noch durch die Spannungen ihrer tiefsten Punkte bestimmt sein, d. h. die ersten würden die letzten um Größen übertreffen, welche dem Gewichte der Seilstücke gleich sind, die eine der Höhe zwischen den Endpunkten jedes Seilstückes gleiche Länge haben. Allein man würde auch die normalen Componenten $pds \sin. \alpha$ (§. 258) in Rechnung zu bringen haben, welche den Druck auf die Zapfen der Rollen vergrößern, was keine Schwierigkeiten hat, wenn die Seilstücke zwischen ihren respectiven Berührungspunkten auf diesen Rollen als geradlinig gespannt angenommen werden können, was bei den meisten Anwendungen der Fall ist.

Denn wenn l die Länge einer dieser geraden Linien bezeichnet, welche sich nach der Voraussetzung wenig von der von dem entsprechenden Seile gebildeten Kettenlinie entfernt, α den Winkel, welchen sie mit der Verticale bildet, und t_1, t_2 die in ihrem unteren und oberen Endpunkte wirkenden Spannungen; so kann man sich ihr Gewicht pl parallel und senkrecht zu ihrer Richtung zerlegt denken, wodurch man einerseits für die Componente, welche sich zu t_1 addirt, das Gewicht $pl \cos. \alpha$ der verticalen Projection von l erhält, so daß man hat:

$$t_2 = t_1 + pl \cos. \alpha,$$

wie es sich unmittelbar aus dem Principe in §. 258 ergibt, und andererseits für die normale Componente das Gewicht $pl \sin. \alpha$ der Horizontalprojection von l, welches man sich wieder in zwei andere gleiche Gewichte $= \frac{1}{2} pl \sin. \alpha$ zerlegt denken kann, welche in den Endpunkten des Seiles wirken, und in Verbindung mit dem Gewichte des die Rolle umgebenden Stückes des Seiles und den Resultanten der tangentialen Spannungen, deren Relation wir eben für die unteren und oberen Rollen bestimmt haben, auf die Zapfen der Rollen einen Normaldruck ausüben.

Das Gewicht der die Rollen umgebenden Seilstücke könnte ganz unberücksichtigt bleiben; aber wenn man es in Rechnung bringen will, so kann man es sich in dem sich auf die Zapfenreibung beziehenden Gliede mit dem Gewichte dieser Rollen vereinigt denken, und addirt alsdann das Moment desselben zu dem der übrigen Kräfte, indem man nach dem Principe in §. 258 bemerkt, daß dieses Moment durch das Product aus dem Halbmesser der Rollen und dem Gewichte eines Stückes des Seiles, welches der Projection des umschlungenen Bogens gleich ist und in dem tiefsten Endpunkte dieses Bogens wirkt, ausgedrückt wird.

Reibung der Schraube mit vierkantigem Gewinde.

Ausdruck des Momentes der Widerstände in Beziehung auf die Axe der Schraube.

§. 262. Es sei AB Fig. 97 die verticale Axe einer Schraube mit einem quadratischen oder vierkantigen Gewinde, d. h. dessen Durchschnitt ein Quadrat ist, und vermittelst welcher ein Gewicht Q durch eine in dem Endpuncte eines Hebels K nach einer auf demselben senkrechten und horizontalen Richtung wirkende Kraft P gehoben werden soll, indem die Schraubenmutter $abcd$ als fest betrachtet wird. Die Last Q kann man sich immer auf eine gewisse Schraubenlinie der Schraube oder der Schraubenmutter gleichförmig vertheilt denken, welche wir daher die mittlere Schraubenlinie nennen wollen, so daß sich alles so verhält, wie wenn die Last Q auf einer geneigten Ebene läge, welche mit dem Horizonte einen Winkel bildet, der dem Winkel gleich ist, welchen die Tangente an der Schraubenlinie mit der Horizontale bildet. Bezeichnet also:

r den Halbmesser des Cylinders, auf dessen Oberfläche die mittlere Schraubenlinie liegt,

p die horizontale Kraft, welche diesen Cylinder berührt und den Widerstand Q nebst den daraus auf der mittleren Schraubenlinie springenden Reibungen zu überwinden im Stande ist,

h die Höhe des Schraubenganges oder die Schraubenweite,

$\pi = 3{,}1415926$ das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser,

α den constanten Neigungswinkel des mittleren Schraubenfadens gegen den Horizont, und

f den Reibungscoefficienten für die einander berührenden Substanzen; so hat man nach § 204:

$$p = Q\,\frac{tang.\,\alpha + f}{1 - f\,tang.\,\alpha} = Q\,\frac{h + 2\pi fr}{2\pi r - fh},$$

wovon das Moment in Beziehung auf die Axe der Schraube ist:

$$pr = Qr\,\frac{tang.\,\alpha + f}{1 - f\,tang.\,\alpha} = Qr\,\frac{h + 2\pi fr}{2\pi r - fh},$$

welches in die Gleichung des Gleichgewichtes der auf die Schraube oder Schraubenmutter bei ihrer drehenden Bewegung um die feste Axe AB wirkenden Kräfte eingeführt werden muß (§ 236 u. folg.).

Bestimmung des Einflusses der Reibung in der Schraube und Schraubenmutter.

§. 263. Da der obige Werth von p auf die Form:

$$p = Q\,tang.\,\alpha + fQ\,\frac{1 + tang.^2\alpha}{1 - f\,tang.\,\alpha}$$

$$= Q\,\frac{h}{2\pi r} + fQ\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r\,(2\pi r - fh)}$$

gebracht werden kann, so sieht man, daß der zur Ueberwindung der Reibung angewandte Theil von p ausgedrückt wird durch:

$$fQ\frac{1 + tang.^2\,\alpha}{1 - f\,tang.\,\alpha}$$

und mit $tang.\,\alpha$ fortwährend zunimmt, bis er zuletzt unendlich groß wird, wenn $tang.\,\alpha = \frac{1}{f}$ ist, über welche Grenze hinaus die horizontale Kraft p oder P die Schraube nicht mehr würde in Bewegung setzen können (§. 205).

Hieraus scheint zu folgen, daß es im Allgemeinen vortheilhaft sei, den Neigungswinkel α so klein als möglich zu machen; allein man gelangt zu einer ganz entgegengesetzten Folgerung, wenn man bemerkt, daß das Verhältniß:

$$\frac{f\,(1 + tang.^2\,\alpha)}{tang.\,\alpha\,(1 - f\,tang.\,\alpha)} = \frac{2f}{sin.\,2\,\alpha - f\,(1 - cos.\,2\,\alpha)}$$

des der Reibung entsprechenden Gliedes zu dem der Nutzleistung der Kraft entsprechenden Gliede von $\alpha = o$, wofür dieses Verhältniß unendlich wird, bis zu dem Werthe von α, für welchen $tang.\,2\alpha = \frac{1}{f}$ ist, und welcher dieses Verhältniß zu einem Minimum macht, fortwährend abnimmt. Dieselbe Folgerung ergiebt sich auch direct aus der Vergleichung der Nutzleistung mit der von der Kraft p hervorgebrachten Arbeit, deren Verhältniß hier offenbar ist:

$$\frac{tang.\,\alpha\,(1 - f\,tang.\,\alpha)}{tang.\,\alpha + f} = \frac{sin.\,2\,\alpha - f\,(1 - cos.\,2\,\alpha)}{sin.\,2\,\alpha + f\,(1 + cos.\,2\,\alpha)}$$

$$= 1 - \frac{2f}{sin.\,2\,\alpha + f\,(1 + cos.\,2\,\alpha)}.$$

Dieses Verhältniß, dessen Minimum $tang.\,2\,\alpha = \frac{1}{f}$ entspricht, verschwindet für den Werth von α, welcher $tang.\,\alpha = \frac{1}{f}$ entspricht, d. h. für denselben Werth, welcher den Ausdruck der Reibung unendlich macht.

Wenn man z. B. $f = 0{,}12$ setzt, welcher Werth dem Falle entspricht, wo die Schraubenmutter aus Kupfer und die Schraube aus Eisen besteht, indem die einander berührenden Flächen fettig sind und $tang.\,\alpha = \frac{1}{25}$, welcher Werth sich häufig darbietet, namentlich in den Schraubenpressen; so wird das obige Verhältniß $= 0{,}249$, und folglich wäre die von der Kraft zum Heben der Last Q ausgeübte Arbeit fast das Vierfache von der dem Nutzeffekte entsprechenden. Wenn $tang.\,\alpha = {}^1/_4$ wäre, so würde dasselbe Verhältniß $= 0{,}655$, und aus diesen Resultaten sieht man zugleich deutlich, welchen beträchtlichen Einfluß die zwischen der Schraube und der Schraubenmutter stattfindende Reibung hat.

Eigenschaften und verschiedene Anwendungsarten der Schraube.

§. 264. Aus dem in §. 204 und §. 206 über die schiefe Ebene Gesagten folgt, daß wenn $tang. \alpha < f$ ist, die Schraube nicht nur kein Bestreben hat, unter der Wirkung der Last sich von selbst abwärts zu bewegen, sondern daß man eine Kraft p nach einem dem frühern entgegengesetzten Sinne wirken lassen muß, um die Schraube in Bewegung zu setzen, indem diese Kraft p ausgedrückt wird durch:

$$p = Q \frac{f - tang. \alpha}{1 + f \, tang. \alpha} = fQ \frac{(1 + tang.^2 \alpha)}{1 + f \, tang. \alpha} - Q \, tang. \alpha.$$

Dieser Fall findet bei den Schrauben statt, welche angewandt werden, um gewisse Körper gegen einander zu drücken und mit einander zu befestigen. Ganz anders verhält es sich dagegen bekanntlich mit den Schrauben der Balanciers, welche in den Münzen angewandt werden und mit doppelten oder dreifachen Schraubengängen versehen sind, um ihren mittleren Schraubenlinien eine beträchtliche Neigung gegen die Axe zu geben. Es geschieht übrigens zuweilen auch bei den Schrauben, für welche die Relation $tang. \alpha < f$ erfüllt wird, daß sie durch Erschütterungen gelöst werden, was man dadurch verhindern kann, daß man zwei Schraubenmuttern anwendet, oder die Bewegung der einfachen Schraubenmutter durch leicht anzugebende Mittel direct zu verhindern sucht.

Art und Weise, wie die Seitenreibung der Schraube in Rechnung gebracht wird, wenn keine andere Leitung, als die Schraubenmutter, angewandt ist.

§. 265. Die im §. 262 angeführten Resultate würden offenbar dieselben bleiben, wenn die Kraft P unmittelbar an der Schraubenmutter angebracht wäre; aber der Werth dieser Kraft ändert sich im Allgemeinen mit ihrem Hebelarme R und der Art und Weise, wie die Schraube und die Schraubenmutter unterstützt oder bei ihrer Bewegung geleitet werden, und es bieten sich in der That hier verschiedene Fälle zur Untersuchung dar. Wir wollen z. B. annehmen, daß die Schraubenmutter $abcd$ Fig. 97 ganz fest liegt und die Schraube ein Gewicht heben soll, welches sich mit ihr drehen kann, indem sie keine andere Leitung als die Schraubenmutter hat; so kommt, da die Kraft P in einer gewissen Entfernung von der Axe AB wirkt, die äußere cylindrische Fläche des Schraubengewindes leicht mit der entsprechenden inneren cylindrischen Fläche der Schraubenmutter in Berührung (§. 217 und § 236), und man muß daher die Kraft P in zwei andere parallele Kräfte zerlegen, welche in der obern und untern Begrenzungsebene ab, cd der Schraubenmutter liegen, und worin zugleich die Schraubenlinien liegen, auf welche der Seitendruck ausgeübt wird.

Wenn man die Entfernungen der Ebene, worin die Kraft P wirkt, von den Ebenen ab, cd der Schraubenmutter respective mit a, b und mit l die Dicke dieser Schraubenmutter oder die gegenseitige Entfernung der beiden Ebenen ab, cd bezeichnet; so hat man für die nach ab in dem Sinne der Kraft P wirkende Componente den Ausdruck:

$$\frac{P.b}{l},$$

und für die nach cd in dem der Kraft P entgegengesetzten Sinne wirkende Componente den Ausdruck:

$$\frac{P.a}{l}.$$

Diese Druckkräfte veranlassen auf der äußern cylindrischen Fläche des Schraubengewindes die Reibungen $fP\frac{b}{l}$, $fP\frac{a}{l}$, welche den Halbmesser r' dieser cylindrischen Fläche, der etwas größer ist als r, zum Hebelarme haben, und man hat folglich, wenn man bemerkt, daß die Normaldruckkräfte und die Tangentialreibungen auf der Schraubenfläche des Gewindes ganz symmetrisch um die Axe der Schraube vertheilt sind, und folglich die Richtung derselben nicht zu verändern streben, die Gleichung des Gleichgewichtes:

$$P.R = Q\,r\,\frac{tang.\,\alpha + f}{1 - f\,tang.\,\alpha} + f\left(\frac{P\,b}{l} + \frac{P\,a}{l}\right) r'.$$

Wenn übrigens die Kraft P aus zwei oder mehreren gleichen Kräften bestände, welche gegen die Axe der Schraube eine symmetrische Lage haben, so würde das letzte Glied der vorhergehenden Gleichung offenbar verschwinden.

Reibung in den Leitungen oder Bändern der Schraube.

§. 266. Wenn man besondere Ringe oder Bänder als Leitungen der Schraube anwendet, was häufig geschieht, um die Druckkräfte $\frac{P\,b}{l}$, $\frac{P\,a}{l}$ und die daraus entspringenden Reibungen möglichst zu verhüten; so muß man für diese Reibungen die auf den äußeren Kanten dieser Bänder oder Ringe stattfindenden Reibungen substituiren, wo a, b, l alsdann ihre Entfernungen von der Ebene der Kraft P und unter sich bezeichnen.

Art und Weise, wie in gewissen Fällen die Reibung der Bänder oder Ringe und der Leitungen der Last in Rechnung gebracht werden.

§. 267. Wenn sich das Gewicht Q nicht frei mit der Schraube drehen kann, sondern sich parallel mit sich selbst fortbewegen muß, so ist es mit der Schraube nur durch ein Band oder einen Ring verbunden, wodurch eine Reibung entsteht, deren Hebelarm auf die in §. 222 angegebene Weise bestimmt und deren Moment durch einen Ausdruck von der Form:

$$\tfrac{2}{3} f' Q\,\frac{\varrho^2 + \varrho\varrho' + \varrho'^2}{\varrho + \varrho'}$$

dargestellt wird, welchen man zu dem zweiten Theile der obigen Gleichung hinzufügen muß. Aber da diese Reibung einen Druck auf die Leitungen des Gewichtes Q veranlassen kann, so wird es in gewissen Fällen nöthig, den daraus auf diesen Leitungen entspringenden Widerstand in Rechnung zu bringen.

Bezeichnet L die Entfernung dieses Widerstandes der Reibung von der Axe der Schraube (§. 217) und f'' den entsprechenden Coefficienten, so wird seine absolute Intensität ausgedrückt durch:

$$f'' \, {}^2/_3 \, f' \, Q \frac{(\varrho^2 + \varrho\varrho' + \varrho'^2)}{(\varrho + \varrho') \, L} = {}^2/_3 \frac{(\varrho^2 + \varrho\varrho' + \varrho'^2)}{(\varrho + \varrho') \, L} f' f'' Q,$$

denn das Moment des Druckes, welcher diesen Widerstand veranlaßt, muß offenbar dem Momente der Reibung auf dem Bande der Last gleich sein, und der obige Ausdruck muß überdies zu Q in der Gleichung des Gleichgewichtes der Schraube addirt werden, d. h. man muß darin für Q die Größe:

$$Q \left(1 + {}^1/_2 \frac{\varrho^2 + \varrho\varrho' + \varrho'^2}{(\varrho + \varrho') \, L} f' f''\right)$$

setzen, wozu noch das eigene Gewicht der Schraube und ihres Zubehöres addirt werden muß, um die Gesammtlast der Schraubenmutter zu erhalten.

Reibung des Zapfens der Compressionsschrauben.

§. 268. Es geschieht zuweilen, daß die Schraubenmutter fest und die Schraube dazu bestimmt ist, gewisse Körper zusammenzudrücken, oder fortzuschieben, wo alsdann an ihrem untern Ende B (Fig. 97) sich ein Zapfen befindet, welcher eine Reibung verursacht, die in Rechnung gebracht wird, wenn man zu dem zweiten Theile der Gleichung des Gleichgewichtes ein Glied von der Form:

$${}^2/_3 \, f_1 \, Q \, \varrho$$

addirt, wo ϱ den größten Halbmesser des reibenden Theiles, Q die Compressionskraft und folglich $Q - q$ die wirkliche Last bezeichnet, welche die Schraubenmutter von unten nach oben zu bewegen strebt.

Einfluß der Reibung der Leitungen, worin sich die Schraubenmutter ohne Drehung bewegt.

§. 269. In anderen Fällen kann sich die Schraube bloß um ihre Axe AB (Fig. 98) drehen, ohne daß diese verrückt wird, indem sich die Schraubenmutter $abcd$ nur längs dieser Axe parallel zu sich selbst fortbewegt. Alsdann findet an dem untern Zapfen B oder auf einem an dem Kopfe der Schraube angebrachten Vorsprunge mn eine Reibung statt, während die Schraubenmutter durch Leitungen in einer parallelen Richtung erhalten wird, und es läßt sich daher auch für diesen Fall leicht die Gleichung des Gleichgewichtes aufstellen, wenn man bemerkt, daß die Last der Schraube aus dem Gewichte Q der Schraubenmutter und ihrem Zubehöre nebst der Reibung in den Leitungen besteht, deren Werth hier offenbar

$$= f'' \frac{p \, r}{L}$$

ist, wo r und p dieselbe Bedeutung, wie im §. 262 haben, und L den Abstand des Stützpunctes der Leitungen von der Axe der Schraube bezeichnet, so daß man in dem gegenwärtigen Falle zur Bestimmung des Werthes von p die Gleichung hat:

$$p = \left(Q + f'' \frac{p \, r}{L}\right) \frac{tang. \, \alpha + f}{1 - f \; tang. \, \alpha},$$

woraus folgt:

$$p = Q \frac{tang.\,\alpha + f}{1 - f\,tang.\,\alpha - \frac{f'' r}{L}\,(tang.\,\alpha + f)},$$

welchen Werth man für:

$$Q \frac{tang.\,\alpha + f}{1 - f\,tang.\,\alpha}$$

in die obige Gleichung des Gleichgewichtes (§. 265) einführen muß.

Was den auf den oberen Vorsprung, oder auf den untern Zapfen der Schraube ausgeübten Druck anlangt, so wird derselbe, wenn q das Gewicht dieser Schraube und ihres Zubehöres bezeichnet, durch:

$$Q + f'' \frac{p\,r}{L} + q = Q \frac{(1 - f\,tang.\,\alpha)}{1 - f\,tang.\,\alpha - f'' \frac{r}{L}\,(tang.\,\alpha + f)} + q$$

ausgedrückt, woraus sich leicht das Moment der Reibung dieses Zapfens oder dieses Vorsprunges ableiten läßt (§. 222).

Betrachtung des Falles, wo die Kraft unmittelbar an der Schraubenmutter angebracht ist. — Allgemeine Bemerkungen.

§. 270. Endlich kann es geschehen, daß die Kraft unmittelbar an der Schraubenmutter angebracht ist (Fig. 99), welche sich alsdann um sich selbst dreht und auf einer Scheibe oder einem Ringe reibt, und es ist einleuchtend, daß sich die Gleichung des Gleichgewichtes des Systems auf eine ganz ähnliche Weise aufstellen läßt, wenn man die verschiedenen Umstände berücksichtigt, unter welchen sich die reibenden Bestandtheile des Systems befinden.

Im Allgemeinen geben die vorhergehenden Formeln die Mittel zur Berechnung der verschiedenen Widerstände und zur möglichsten Verminderung ihres Einflusses durch entsprechende Einrichtungen an die Hand, indem man ihr Moment in Beziehung auf die Axe dir Schraube vermindert, und namentlich die Reibung der Zapfen für die der Vorsprünge oder Ringe substituirt, deren mittlerer Hebelarm niemals sehr klein werden kann, und immer mit dem mittleren Halbmesser der Schraube und der Schraubenmutter vergleichbar sein muß. Uebrigens sieht man leicht ein, von welcher Wichtigkeit es ist, diesen Halbmesser so viel als möglich zu vermindern, ohne der Haltbarkeit der Schraube und der Schraubenmutter zu schaden, indem man sich dabei nach den Regeln richtet, welche die Theorie der Festigkeit der Materialien vorschreibt.

Werth des mittleren Halbmessers des Schraubengewindes.

§. 271. Was den Werth anlangt, welchen man dem Halbmesser r der mittleren Schraubenlinie des Schraubengewindes beilegen muß, so ist es offenbar in den meisten Fällen hinreichend genau, denselben der halben Summe der Halbmesser der beiden äußersten Schraubenlinien zu nehmen; aber da es auch geschehen kann, daß der Unterschied dieser Halbmesser oder die Dicke des Schraubengewindes sehr wohl mit der Dicke des Schraubenkernes, d. h. des Cylinders, um welchen das Gewinde herumgeht, vergleichbar sein kann, namentlich bei den Schrauben, welche eine Zugkraft ausüben müssen; so ist auf der andern Seite ebenfalls einleuchtend, daß man sich sehr irren könnte, wenn man dem mittleren Hebelarme r einen solchen Werth beilegen wollte, und wir haben es daher für nöthig gehalten, diesen Fall in der zweiten Note am Ende dieses Abschnittes besonders zu untersuchen.

Bestimmung der Reibung der dreikantigen Schraube.

§. 272. Es sei $MM'Q$ (Fig. 100) die verticale Axe einer solchen Schraube, und AH das dem mittleren Schraubenfaden entsprechende Element, worauf wir uns auch hier wieder die ganze Last der Schraube gleichförmig vertheilt denken wollen, weil die Breite des Schraubengewindes gegen den Halbmesser des Schraubenkernes sehr klein ist. Es sei ferner AB die Tangente in einem beliebigen Puncte A der diesem Elemente entsprechenden Schraubenlinie, MAC die zugehörige Erzeugungslinie, welche die Axe der Schraube in M trifft, und endlich sei AA' eine durch den Punct A gehende Verticale, welche folglich zu der Axe MM' parallel ist. Ferner seien B, C, A' die Durchschnittspuncte dieser geraden Linien mit einer beliebigen Horizontalebene, so sind die Projectionen $A'B$, $A'C$ von AB, AC auf diese Ebene resp. die Richtungen der Tangente und des Halbmessers für den Punkt A' des Grundflächenkreises des Cylinders, worauf die Schraubenlinie AH liegt, und die Ebene ABC berührt die Oberfläche des Schraubengewindes in dem Puncte A. Wenn man ferner aus dem Puncte A' das Perpendikel $A'O$ auf diese Ebene fällt, welches dieselbe im Puncte O trifft, und aus den Puncten B, A die Perpendikel BJ, AE auf die geraden Linien AC, BC; so gehen diese letztern offenbar durch den Punct O und $A'AE$, $A'BJ$ sind die Winkel, welche die Berührungsebene ABC resp. mit der Verticale AA' und mit der Horizontale $A'B$ oder Ap bildet. Ferner bezeichnen φ und ψ resp. die beiden Winkel $A'AE$, $A'BJ$, a und b resp. die Winkel, welche die Verticale AA' mit der Tangente AB und der Erzeugungslinie AC für den Punct A bildet,

r den Halbmesser $AG = A'M'$ der mittlern Schraubenlinie,

h die Schraubenweite,

Q die Gesammtlast, welche parallel zu der Axe der Schraube auf das Gewinde oder auf die mittlere Schraubenlinie AH drückt, und

p die horizontale Kraft, welche, im Endpuncte des Hebelarmes $AG = r$ angebracht, die Last Q längs AH würde aufwärts bewegen können.

Da die Schraube als ein freier Körper betrachtet werden kann, welcher sich drehend längs der festen Axe MM' fortbewegt, wofern man auf die Normaldruckkräfte Rücksicht nimmt, welche von der Schraubenmutter in dem der Wirkung der Last Q entgegengesetzten Sinne auf sie ausgeübt werden, und wenn man zugleich die daraus entspringenden Reibungen in Betracht zieht; so ist klar, daß zwischen allen diesen Kräften, der Kraft p und der Last Q das Gleichgewicht statt findet, wenn man, nachdem jede derselben in zwei andere zerlegt ist, wovon die eine vertical oder zu der Axe der Schraube parallel und die andere horizontal ist, oder in einer auf dieser Axe senkrechten Ebene liegt, ausdrückt: 1) daß die Summe aller zu der Axe der Schraube parallelen Componenten gleich Null ist, und 2) daß die Summe der Momente der horizontalen Componenten, welche das System in einem gewissen Sinne um die Axe zu drehen streben, gleich ist die Summe der Momente der horizontalen Componenten, welche das System nach einem entgegengesetzten Sinne zu drehen streben. Da sich aber diese letzte Gleichung nicht leicht ableiten läßt, so wollen wir dafür die substituiren, welche das auf die wirkliche Bewegung der Schraube oder der Schraubenmutter angewandte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt, indem wir also von den Normaldruckkräften abstrahiren, wodurch diese Bewegung zu einer gezwungenen gemacht würde.

Bestimmung der horizontalen Kraft, welche die Last im Gleichgewichte zu erhalten vermag.

§. 273. Wenn dN den auf ein beliebiges Element A der mittlern Schraubenlinie AH wirkenden Normaldruck bezeichnet, so wird die in dem entsprechenden Puncte nach der Tangente AB wirkende Reibung durch fdN ausgedrückt, und da die verticalen Componenten dieser beiden Kräfte resp. gleich $dN\, sin.\, \varphi$, $fdN\, cos.\, a$ sind; so hat man, wenn man bemerkt, daß die Componente $dN\, sin.\, \varphi$ und alle ähnlichen nach einem der Last Q entgegengesetzten Sinne wirken, als erste Gleichung des Gleichgewichtes:

$$Q = \int sin.\, \varphi\, dN - f \int cos.\, a\, dN = N(sin.\, \varphi - f\, cos.\, a),$$

worin N die Summe $\int dN$ aller Normaldruckkräfte ausdrückt, welche man sich in eine einzige zusammengesetzt, und nach der Normale im Puncte A der mittleren Schraubenlinie wirkend vorstellen kann.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt ferner für die Bedingungen des Gleichgewichtes in Beziehung auf die wirkliche Bewegung der Schraube und für eine ganze Umdrehung genommen, was hier erlaubt ist:

$$p . 2\pi r = Qh + \int \frac{h}{cos.\, a}\, fdN = Qh + fN \frac{h}{cos.\, a},$$

woraus folgt, wenn man für N seinen aus der vorhergehenden Gleichung abgeleiteten Werth substituirt:

$$p = Q\, \frac{h}{2\pi r} + fQ\, \frac{h}{2\pi r}\, \frac{1}{cos.\, a\, (sin.\, \varphi - f\, cos.\, a)} =$$

$$Q\, cot.\, a + fQ\, \frac{1}{sin.\, a\, (sin.\, \varphi - f\, cos.\, a)} = Q\, \frac{(sin.\, \varphi\, cos.\, a + f\, sin.\, a)}{sin.\, \varphi - f\, cos.\, a}.$$

Wenn man bemerkt, daß:

$$cot.\, a = \frac{h}{2\pi r},$$

und folglich:

$$cos.\, a = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}},\quad sin.\, a = \frac{2\pi r}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}$$

ist; so bleibt bloß noch der Werth von $sin.\,\varphi$ als Function der bekannten Größen zu finden übrig, um den Werth von p berechnen zu können.

Nun geben aber die in O rechtwinkligen Dreiecke OJA', OAA' und das in J rechtwinklige Dreieck $AA'J$:

$$sin.\,\varphi = sin.\,OAA' = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'J\ sin.\,OJA'}{AA'} = sin.\,b\ cos.\,\psi,$$

und wegen der in A' rechtwinkligen Dreiecks $A'BJ$, $A'BA$ hat man:

$$tang.\,\psi = \frac{A'J}{A'B} = \frac{AA'\ sin.\,b}{AA'\ tang.\,a} = \frac{sin.\,b}{tang.\,a};$$

folglich:

$$sin.\,\psi = \frac{sin.\,b}{\sqrt{sin.^2 b + tang.^2 a}} = \frac{h\ sin.\,b}{\sqrt{h^2\ sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}},$$

$$cos.\,\psi = \frac{tang.\,a}{\sqrt{sin.^2 b + tang.^2 a}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{h^2\ sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}},$$

und mithin:

$$sin.\,\varphi = \frac{tang.\,a\ sin.\,b}{\sqrt{sin.^2 b + tang.^2 a}} = \frac{2\pi r\ sin.\,b}{\sqrt{h^2\ sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man durch die bekannten Principien, wenn man die geraden Linien $A'B$, $A'C$, $A'A$ welche sich im Puncte A' rechtwinklig durchschneiden, zu den Axen der positiven x, y, z nimmt, und bemerkt, daß die Projectionen des Perpendikels $A'O$ auf der Berührungsebene ABC auf die Ebenen der xz und yz auf den Durchschnittslinien BC und AC selbst senkrecht sind, so daß ihre Gleichungen resp. folgende sind:

$$x = z\ cot.\,a,\ y = z\ cot.\,b.$$

Hieraus folgt in der That, daß man die Winkel, welche das Perpendikel $A'O$ mit den Axen der x und z bildet, durch folgende Relationen erhält:

$$cos.\,OA'B = sin.\,\psi = \frac{cot.\,a}{\sqrt{1 + cot.^2 b + cot.^2 a}} =$$

$$\frac{sin.\,b}{\sqrt{sin.^2 b + tang.^2 a}} = \frac{h\ sin.\,b}{\sqrt{h^2\ sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}},$$

$$cos.\,OA'A = sin.\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + cot.^2 b + cot.^2 a}} =$$

$$\frac{tang.\,a\ sin.\,b}{\sqrt{sin.^2 b + tang.^2 a}} = \frac{2\pi r\ sin.\,b}{\sqrt{h^2\ sin.\,b + 4\pi^2 r^2}},$$

welche mit den vorhin gefundenen übereinstimmen. Substituirt man folglich die Werthe von $sin.\,\varphi$, $sin.\,a$ und $cos.\,a$ in dem Ausdruck von p, so erhält man endlich:

$$p = Q\,\frac{cot.a + f\,sin.a\,\sqrt{1 + cot.^2 a + cot.^2 b}}{1 - f\,cos.a\,\sqrt{1 + cot.^2 a + cot.^2 b}} =$$

$$Q\,\frac{h\,sin.\,b\,\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} + 2\pi r f\,\sqrt{h^2\,sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{2\pi r\,sin.\,b\,\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} - hf\,\sqrt{h^2\,sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}.$$

Betrachtungen über diese Auflösung und Angabe einer anderen.

§. 274. Diese von Perry zuerst angegebene Formel stimmt nicht mit den von andern Schriftstellern erhaltenen überein; aber es ist leicht zu zeigen, daß sie die allein richtige ist, und daß die Unrichtigkeit der andern Formeln von der falschen Zerlegung der Kräfte herrührt. Denn es ist zwar gestattet, sich die ganze Last Q im Puncte A der mittleren Schraubenlinie angebracht und auf der Berührungsebene in diesem Puncte, wie auf einer schiefen Ebene, längs welcher sie durch die Wirkung der horizontalen Kraft p gehoben würde, ruhend vorzustellen; allein man darf dabei nicht vergessen, daß der Angriffspunct A bei seiner Bewegung auf dieser Ebene in einer constanten Entfernung $r = AG$ von der Axe MM' der Schraube bleiben muß, wozu gewisse Kräfte erfordert werden, welche nach den horizontalen Halbmessern AG der mittleren Schraubenlinie wirken, und durch die Festigkeit der Schraube oder der Schraubenmutter aufgehoben werden.

Hiernach ist einleuchtend, daß man, wenn man ausdrücken will, daß zwischen den im Puncte A auf die Schraube wirkenden Kräften N, fN, Q und p das Gleichgewicht stattfindet, die Kraft N in drei andere zerlegen muß, welche parallel zu den Axen $A'A$, $A'B$, $A'C$ wirken und wovon die letzte als durch die Festigkeit der Schraube aufgehoben betrachtet werden muß, während die beiden andern allein der horizontalen Kraft p und der tangentialen Reibung fN das Gleichtgewicht halten. Bezeichnet man also wie vorhin mit φ und ψ die Winkel, welche die Berührungsebene in A mit der Verticale AA' und mit der Horizontale $A'B$ oder Ap bildet; so hat man offenbar:

$$Q = N\,sin.\,\varphi - fN\,cos.\,a,\quad p = N\,sin.\,\psi + fN\,sin.\,a;$$

woraus folgt:

$$N = \frac{Q}{sin.\,\varphi - f\,cos.\,a},\quad p = \frac{sin.\,\psi + f\,sin.\,a}{sin.\,\varphi - f\,cos.\,a},$$

oder wenn man für $sin.\,\varphi$, $sin.\,\psi$, $sin.\,a$ und $cos.\,a$ ihre Werthe setzt:

$$N = Q\,\frac{\sqrt{1 + cot.^2 b + cot.^2 a}}{1 - f\,cos.a\,\sqrt{1 + cot.^2 b + cot.^2 a}},$$

$$p = Q\,\frac{cot.\,a + f\,sin.\,a\,\sqrt{1 + cot.^2 b + cot.^2 a}}{1 - f\,cos.\,a\,\sqrt{1 + cot.^2 b + cot.^2 a}},$$

wo diese letzte Formel genau mit der im vorhergehenden §. 273 auf einem andern Wege erhaltenen übereinstimmt.

Vergleichung dieser Auflösung mit der durch eine andere Zerlegungsart der Kräfte erhaltenen.

§. 275. Wenn man die horizontale Kraft p und das Gewicht Q nicht auf die eben angegebene Weise, sondern nach der Normale auf der Oberfläche des Schraubenganges zerlegt und die Summe:

$$p \sin.\psi + Q \sin.\varphi$$

der so erhaltenen Componenten für den Normaldruck, folglich:

$$f(p \sin.\psi + Q \sin.\varphi)$$

für den Werth der längs der mittleren Schraubenlinie stattfindenden Reibung genommen hätte, weil man diesen Werth der Differenz:

$$p \sin.a - Q \cos.a$$

der Componenten von p und Q nach dieser Schraubenlinie gleich gesetzt hätte; so hätte man die Formel:

$$p = Q \frac{\cos.a + f \sin.\varphi}{\sin.a - f \sin.\psi}$$

$$= Q \frac{\cos.a \sqrt{1 + \cot.^2 a + \cot.^2 b} + f}{\sin.a \sqrt{1 + \cot.^2 a + \cot.^2 b} - f \cot.a}$$

erhalten, welche wesentlich von der vorhergehenden verschieden ist, obgleich sie auf die im §. 262 gefundene zurückkommt, wenn man darin $b = 90°$ oder $\cot.b = 0$ setzt; allein die letzte Zerlegungsart der Kräfte p und Q wird durch nichts gerechtfertigt.

Um einzusehen, worin der Unterschied dieser Auflösungen besteht, braucht man nur in den beiden Formeln $h = 0$ oder $\cot.a = 0$ zu setzen, wodurch die Schraubenflächen des Gewindes der Schraube und der Schraubenmutter auf kreisförmige Kegelflächen reducirt werden, deren Erzeugungslinie mit der Axe den Winkel d bildet. Die letzte Formel verwandelt sich alsdann in:

$$p = Q f \sin.b,$$

und die vorhergehende in:

$$p = Q f \frac{1}{\sin.b},$$

so daß diese $p = \infty$ gäbe, wenn die andere den Werth $p = 0$ giebt, wo das letzte Resultat der gewöhnlichen Betrachtungsweise der Theorie des Keiles, worauf sich der betrachtete besondere Fall offenbar bezieht, besser zu entsprechen scheint (§. 207). Denn die Schraubenmutter umgiebt hier die Schraube, wie ein kegelförmiger Hahn von seiner Büchse umgeben wird, so daß man zur Bestimmung des auf diese Büchse ausgeübten Druckes nicht bloß die Componente $Q \sin.b$ der Last Q nach der Normale des Kegels nehmen, sondern vielmehr Q in unendlich viele auf den Berührungsflächen normale Kräfte zerlegen muß, deren Summe offenbar $\frac{Q}{\sin.b}$ ist, wenn man die Reibung unberücksichtigt läßt, welche längs der Erzeugungslinien dem Gewichte Q entgegenwirkt, um sein Herabsinken wegen der größeren oder geringeren Zusammendrückbarkeit der Substanz der Hülse oder Büchse zu verhindern.

Nachweisung der Nothwendigkeit, daß man die Elasticität der Substanz der Schraube und der Schraubenmutter in Betracht ziehen muß, an dem Beispiele der Frictionskegel.

§. 276. Diese letzte Bemerkung zeigt übrigens, daß die Pery'sche Formel nicht ganz von jedem Einwurfe frei ist, sondern für die practischen Anwendungen nach den in §. 207 u. folg. erörterten Theorien modificirt werden muß.

Denn betrachtet man einen kreisförmigen Kegel ABC (Fig. 101), dessen Axe vertical ist, und welcher sich in einer ebenfalls conischen Büchse $abcd$ dreht, gegen welche er durch die nach der Verticale wirkende Last Q gedrückt wird; so ist nach den Resultaten in §. 208 einleuchtend, daß die Summe der auf die Berührungsfläche ausgeübten Normaldruckkräfte durch den Ausdruck:

$$N = 2\,Q\,\frac{\cos. b - f \sin. b}{(1 - f^2)\sin. 2b + 2f \cos. 2b} = \frac{Q}{\sin. b + f \cos. b}$$

angegeben wird, welcher nicht mehr für $\sin. b = 0$ unendlich, sondern $= \frac{Q}{f}$ wird; und folglich wird die Reibung, welche die horizontale Kraft p, indem sie in tangentialer Richtung an dem mittleren Kreise der Berührungsfläche, welche hier eine sehr kleine Ausdehnung hat (§. 272), wirkt, zu überwinden hätte, durch den Ausdruck:

$$\frac{f\,Q}{\sin. b + f \cos. b}$$

bestimmt, welcher sich für $b = 0$ auf Q reducirt, wie es der Fall sein muß, weil die durch die gegenseitige Berührung der beiden Körper hervorgerufene Reibung immer ihr Uebereinanderhingleiten muß verhindern können.

§. 277. Der eben betrachtete besondere Fall begreift offenbar auch den Fall zweier beliebiger einander umgebender Rotationsflächen in sich, welche sich nach einem Kreise berühren, dessen Halbmesser für den Hebelarm der Kraft p oder der Reibung genommen werden muß. Was die kegelförmigen Stöpfel oder Bolzen im Allgemeinen, die sich drehenden Hähne, oder die Friktionskegel anlangt, welche in den Maschinen als Ein- und Ausrückungsmittel angewandt werden, und deren Berührungsflächen eine gewisse Ausdehnung haben; so muß man nach Note 2 am Ende dieses Abschnittes für den mittleren Hebelarm der Reibung den Ausdruck:

$$\tfrac{2}{3}\,\frac{r'^2 + r' r'' + r''^2}{r' + r''}$$

nehmen, welcher dem ähnlich ist, welchen man für kreisförmige reibende Ringe erhält (§. 222), und worin r', r'' die äußern Halbmesser der einander berührenden Flächen sind.

Ferner sieht man leicht ein, daß das Vorhergehende voraussetzt, daß die gegenseitige Zusammendrückung der Kegel einzig und allein von der Wirkung der Last Q und von keiner andern Ursache herrührt, wodurch diese Körper ursprünglich in einander getrieben und ihre Molecularwirkungen oder ihre Elasticität in Thätigkeit gesetzt werden; denn da der von diesen Kräften herrührende Spannungszustand nach dem in §. 209 Gesagten noch fortdauern kann, wenn auch die Ursache schon aufgehört hat zu wirken, wofern der Winkel $2b$ an der Spitze des Kegels der Bedingung:

$$tang. 2b < \frac{2f}{1-f^2}, \text{ oder } b < arc. (tang. = f)$$

genügt; so scheint es einleuchtend zu sein, daß der von der Kraft p zu überwindende Widerstand, wenigstens in den ersten Augenblicken und bis dahin, daß sich die Körper gehörig getrennt haben, auch einen beliebigen von P unabhängigen und lediglich von der Stärke der ursprünglichen Zusammendrückung abhängigen Werth haben könnte.

Allgemeine Auflösung des Problemes der dreikantigen Schraube mit Rücksicht auf den Einfluß der Elasticität der Materialien.

§. 278. Nach diesen verschiedenen Betrachtungen über die sich an einander reibenden Kegelflächen, hat es bei Anwendung des Verfahrens in §. 274 durchaus keine Schwierigkeit, die Reibung in Betracht zu ziehen, welche in der Richtung der Erzeugungslinien der Schraube mit dreikantigem Gewinde der gegenseitigen Zusammendrückung der Schraube und der Schraubenmutter entgegenwirkt, oder verhindert, daß sich diese Schraube ohne Drehung um ihre Axe in Folge der erwähnten Zusammendrückung niederwärts bewegt. Da die absolute Intensität dieser Kraft $= fN$ und der Winkel, welchen sie mit der Verticale oder mit der Axe der Schraube bildet, $= b$ ist, so giebt sie nach dieser Axe die Componente $fN \cos. b$, welche der Last Q entgegenwirkt oder sich zu N addirt, und die horizontale Componente $fN \sin. b$, welche den auf die Axe der Schraube ausgeübten Druck zu vermindern strebt. Man hat daher, wenn man wie in dem angeführten §. verfährt, zur Bestimmung von N und p die Gleichungen:

$$Q = N \sin. \varphi + fN \cos. b - fN \cos. a,$$
$$p = N \sin. \psi + fN \sin. a;$$

woraus folgt:

$$N = \frac{Q}{\sin. \varphi + f(\cos. b - \cos. a)},$$
$$p = Q\,\frac{\sin. \psi + f \sin. a}{\sin. \varphi + f(\cos. b - \cos. a)},$$

und wenn man für $\sin. \varphi$, $\sin. \psi$, $\sin. a$, $\cos. a$ ihre respectiven Werthe setzt (§. 273):

$$p = Q\,\frac{\cot. a + f \sin. a \sqrt{1 + \cot.^2 a + \cot.^2 b}}{1 - f(\cos. a - \cos. b)\sqrt{1 + \cot.^2 a + \cot.^2 b}} =$$

$$Q\,\frac{h \sin. b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} + 2\pi r f \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\left[\begin{array}{c} 2\pi r \sin. b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} \\ - f(h - \cos. b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}) \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2} \end{array}\right]}.$$

Wenn man in dieser Formel $a = 90°$ setzt, so erhält man die obige Formel für die Frictionskegel wieder, wie es der Fall sein muß, und stimmt genau mit der in §. 262 für die Schraube mit vierkantigem Gewinde erhaltenen überein, wenn man auch $b = 90°$ setzt, woraus folgt, was übrigens auch für sich klar ist, daß bei dieser Art von Schrauben die Elasticität der Substanzen keinen directen Einfluß auf die Intensität der Reibung hat.

Vergleichung der durch die neue Formel und durch die frühern Formeln erhaltenen Resultate.

§. 279. Wenn man sich nun einen Begriff von der Grenze der Abweichungen bilden will, welche die Resultate der in den drei untersuchten Voraussetzungen erhaltenen Formeln darbieten können; so muß man bemerken, daß der Winkel b in der Praxis niemals kleiner ist als 45°, und diese Grenze nur für die hölzernen Schrauben und Schraubenmuttern von einem geringen Widerstande, wie z. B. die von Eichenholz, erreicht, während gewöhnlich der spitze Winkel der Schraubengänge höchstens 60° beträgt, und b größer ist als 60°. Was den Winkel a anlangt, so ist seine Cotangente $\frac{h}{2\pi r}$ selten größer als $\frac{1}{2}$; aber sie kann ohne Ende abnehmen, und es geschieht sogar in vielen Fällen, daß sie kleiner als 0,04 ist (§. 263). Wenn man daher zuerst in den in Rede stehenden Formeln:

$$cot.\, b = 1,\ sin.\, b = cos.\, b = 0{,}7071,\ cot.\, a = 0{,}5,\ sin.\, a = 0{,}8944,$$
$$cos.\, a = 0{,}4472$$

und außerdem $f = 0{,}1$ setzt, welche Zahl nach den Versuchen von Coulomb (§. 189) und nach den neuen im Jahre 1832 von Morin zu Metz angestellten Versuchen den mittleren Werth des Verhältnisses der Reibung zu dem Drucke für die verschiedenen über einander hingleitenden und mit Fett geschmierten Hölzer und Metalle mit hinreichender Genauigkeit ausdrückt, so findet man:

für die 1te Formel . . . $p = 0{,}5\, Q + 0{,}18\ \ Q = 0{,}68\ \ Q$,
" " 2te " . . . $p = 0{,}5\, Q + 0{,}097\ Q = 0{,}597\ Q$,
" " 3te " . . . $p = 0{,}5\, Q + 0{,}16\ \ Q = 0{,}66\ \ Q$.

Was die Formel in §. 262 für Schrauben mit vierkantigem Gewinde anlangt, so giebt sie für dieselben Werthe von $f = 0{,}1$ und $cot.\, a = tang.\, \alpha = 0{,}5$:

$$p = 0{,}5\, Q + 0{,}13\, Q = 0{,}63\, Q.$$

Wenn man zweitens bloß $cot.\, a = 0{,}04$ setzt, um sich von den Abweichungen der Formeln für sehr geringe Neigungen der Schraubengewinde einen Begriff zu machen, und die übrigen Data dieselben bleiben; so erhält man ebenfalls:

für die 1te Formel . . . $p = 0{,}04\, Q + 0{,}1424\, Q = 0{,}1824\, Q$,
" " 2te " . . . $p = 0{,}04\, Q + 0{,}0349\, Q = 0{,}0749\, Q$,
" " 3te " . . . $p = 0{,}04\, Q + 0{,}1249\, Q = 0{,}1649\, Q$,

und endlich für die sich auf die Schraube mit vierkantigem Gewinde beziehende Formel:

$$p = 0{,}04\, Q + 0{,}1006\, Q = 0{,}1406\, Q.$$

Folgerungen, welche sich aus dieser Vergleichung ergeben.

§. 280. Die Vergleichung dieser verschiedenen Resultate führt uns auf die nachstehenden Folgerungen:

1) Die Formeln in §. 273 und §. 278 geben Resultate, welche desto weniger von einander verschieden sind, je kleiner der Neigungswinkel a der mittleren Schraubenlinie gegen die Axe der Schraube ist, so daß man sich für sehr kleine Werthe von a bei practischen Anwendungen der ersten dieser Formeln, welche etwas einfacher ist, ohne Nachtheil bedienen kann.

2) Die Formel in §. 205 führt auf Resultate, welche im Allgemeinen viel kleiner sind, als die, welche die zuletzt erhaltene Formel giebt, so daß man in keinem Falle bei den Rechnungen davon Gebrauch machen darf, und zwar um so weniger, da sie für dreikantige Schrauben kleinere Werthe von p giebt, als für vierkantige, was offenbar unzulässig ist.

3) Endlich zeigen alle diese Formeln übereinstimmend, daß die Reibung in den verschiedenen Arten von Schrauben sehr beträchtlich ist; aber die Formel in §. 278, welche alles Zutrauen verdient, zeigt, wie die in §. 273, daß diese Reibung für Schrauben mit vierkantigem Gewinde unter übrigens gleichen Umständen geringer ist, so daß man diese Schrauben bei Maschinenanlagen, wo es sich um Kraftersparniß handelt, vorziehen muß.

Allgemeine Bemerkung.

§. 281. Was die Aufstellung der Bedingungen des Gleichgewichtes der Schraube mit dreikantigem Gewinde in den verschieden vorkommenden Fällen anlangt, so verweisen wir auf das in dieser Beziehung für die vierkantige Schraube Gesagte, und hinsichtlich des Werthes, welchen man in gewissen Fällen dem mittleren Hebelarme der Widerstände beilegen muß, auf die zweite Note, welche bereits wiederholt angeführt ist.

Ueber die Reibung der Zahnräderwerke.

Vorläufige Betrachtungen.

§. 282. Ehe wir das Verfahren angeben, welches zur Berechnung der durch die Reibung der Verzahnungen consumirten Quantität Arbeit angewandt wird, müssen wir die demselben zum Grunde liegenden vorläufigen Betrachtungen voranschicken. Wir wollen zu dem Zwecke zwei cylindrische Rollen C und C' (Fig. 102) betrachten, welche sich in m berühren und durch eine Kraft N gegen einander gedrückt werden. Wenn die Rolle oder Walze C über der als an ihrer Axe fest betrachteten Rolle C' hinrollt, oder wenn beide Rollen gleichzeitig über einander hinrollen, so daß an ihren Umfängen gleiche Bogen abgewickelt werden; so findet nur eine rollende Reibung statt, welche man in den meisten Fällen, und besonders bei den gewöhnlich aus wenig zusammendrückbaren Substanzen verfertigten Zahnrädern unberücksichtigt lassen kann. Aber wenn der Cylinder C statt zu rollen, über dem unbeweglichen Cylinder C' hingleiten müßte, so würde an der Berührungsstelle eine gleitende Reibung fN entstehen, und wenn man das in dem Zeitelemente dt beschriebene Wegelement mm' mit ds bezeichnet; so würde durch diese Reibung eine Quantität Arbeit hervorgebracht, welche durch $f.Nds$ ausgedrückt wird.

Wenn sich die Rolle C' ebenfalls um ihre Axe und in demselben Sinne als C drehte, und wenn der Bogen $mm'' = ds'$ von dem Puncte m in dem Zeitelemente dt durchlaufen würde; so ist klar, daß sich die beiden Cylinder um eine Größe $mm' - mm'' = ds - ds'$ über einander hingerollt hätten. Der von dem Angriffspuncte des dem Rollen entgegen wirkenden Widerstandes durchlaufene Weg wäre also für beide Rollen dem kleinsten der beiden Bogen mm', mm'' und der von dem Angriffspuncte der gleitenden Reibung durchlaufene Weg der Differenz dieser beiden Bogen gleich. Die dieser zweiten Reibung entsprechende Quantität Arbeit würde also ausgedrückt durch:

$$fN(ds - ds'),$$

indem die der rollenden Reibung entsprechende Quantität Arbeit gegen die andere unberücksichtigt gelassen wird.

Wenn sich endlich die Rolle C' statt nach demselben Sinne wie C, nach entgegengesetztem Sinne drehte, so fände offenbar kein Rollen mehr statt, und wenn in diesem Sinne ein Bogenelement $mm_1 = ds'$ beschrieben wäre, so wäre der von dem Angriffspuncte der gleitenden Reibung bei dieser gleichzeitigen Bewegung beider Rollen durchlaufene Weg $= mm' + mm_1 = ds + ds'$, und die durch diesen Widerstand in dem der Bewegung entgegengesetzten Sinne hervorgebrachte Quantität Arbeit würde ausgedrückt durch:

$$fN\,(ds + ds').$$

Hieraus folgt also, daß die bei dem Uebereinanderhinrollen durch die gleitende Reibung hervorgebrachte Quantität Arbeit durch:

$$fN\,(ds - ds') \text{ oder } fN\,(ds + ds')$$

ausgedrückt werden muß, je nachdem sich der ursprüngliche Berührungspunct jeder der beiden Rollen gegen den neuen Berührungspunct auf derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten befindet.

Bestimmung der Größe, um welche die Zähne eines Räderwerkes bei einer unendlich kleinen Verrückung über einander hingleiten.

§. 283. Nun seien amb, $a'mb'$ zwei Zahncurven, welche der geometrischen Bedingung der Zeichnung, daß nämlich ihre gemeinschaftliche Normale durch den Berührungspunct t der Grund- oder Theilkreise geht, Genüge leisten, und wir wollen annehmen, daß sie sich in Folge einer unendlich kleinen Verrückung in einem neuen Puncte m_1 berühren. Ferner seien

$Ct = R$ der Halbmesser des Grundkreises von dem Mittelpuncte C,
$C't$ . . . . C',
$tCm = \theta$, $tC'm = \theta'$ die Winkel, welche in dem betrachteten Augenblicke von der Mittelpunctslinie CC' aus beschrieben sind,
N der Normaldruck, welchen ein Zahn gegen den andern ausübt,

und wenn $a_1\ m_1\ b_1$ und $a_1'\ m_1'\ b_1'$ die neuen Lagen der gegebenen Zahncurven sind; so wollen wir durch die aus den Mittelpuncten C, C' beschriebenen Kreisbogen mm', mm'' den frühern Berührungspunct auf diese Curven übertragen. Aus der Betrachtung der Figuren 103 u. 104

erhellet, daß, wenn der Berührungspunct m für die betrachtete Lage dem Puncte t näher ist, als die Mitte der Sehne, welche durch die Verlängerung der Linie tm gebildet wird (Fig. 103), die beiden Puncte m' und m'' auf derselben Seite von m_1 liegen, und daß dagegen, wenn dieser Punct jenseits der Mitte dieser Sehne (Fig. 104) liegt, die Puncte m' und m'' auf entgegengesetzten Seiten von m_1 liegen. Im ersten Falle ist also das in dem Sinne der gleitenden Reibung oder der gemeinschaftlichen Tangente beider Zahncurven durchlaufene Wegelement $= m_1 m' + m_1 m''$ und im zweiten Falle $= m_1 m' + m_1 m''$. Aber zu gleicher Zeit sieht man, daß im ersten Falle diese gemeinschaftliche Tangente zwischen den beiden Mittelpunkten C und C' hindurch geht und daß diese Puncte im zweiten Falle beide auf derselben Seite dieser Tangente liegen. Diese Bemerkung ist wegen der Veränderungen des Zeichens, welche daraus für gewisse Größen entspringen, von Wichtigkeit.

Wir wollen zunächst den ersten Fall untersuchen und dann zeigen, daß der zweite zu denselben Resultaten führt. Die Bogenelemente $m_1 m'$ und $m' m''$ wollen wir auf die gemeinschaftliche Tangente in m der beiden Curven projiciren, so sind die Längen $m m_1'$ und $m m_1''$ den projicirten Bogen gleich, weil die Verrückung als unendlich klein angenommen ist. In den resp. in m_1' und m_1'' rechtwinkligen Dreiecken $m m' m_1'$ und $m m'' m_1''$ ist aber:

$$m m_1' = m m' \cos. m' m m_1' \text{ und } m m_1'' = m m'' \cos. m'' m m_1'',$$

und da tm auf der gemeinschaftlichen Tangente oder auf $m m_1'$ und $m m_1''$ senkrecht ist, sowie Cm und $C'm$ resp. auf $m m'$ und $m m''$; so hat man:

$$\cos. m' m m_1' = \cos. Cmt \text{ und } \cos. m'' m m_1'' = \cos. C'mt.$$

Ferner ist:

$$mm' = Cm \,.\, d\theta \text{ und } mm'' = C'm \,.\, d\theta,$$

und folglich wird der von dem Angriffspuncte der Reibung durchlaufene Weg ausgedrückt durch:

$$mm_1' - mm_1'' = Cm \cos. Cmt \,.\, d\theta - C'm \cos. C'mt \,.\, d\theta'.$$

Wir wollen die gemeinschaftliche Tangente zu beiden Seiten verlängern und aus den Mittelpuncten C, C' auf diese Linie die Perpendikel Cp, $C'p'$ fällen, so geben die Dreiecke Cmp und $C'mp'$:

$$Cp = Cm \cos. mcp = Cm \cos. tmC$$

$$C'p' = C'm \cos. mC'p' = Cm \cos. tmC',$$

und folglich ist:

$$mm_1' - mm_1'' = Cpd\theta - C'p'd\theta'.$$

Aber da die Geschwindigkeiten so übertragen werden, wie wenn die Grundkreise über einander hinrollten, so hat man:

$$R\theta = R'\theta' \text{ oder } Rd\theta = R'd'\theta',$$

und folglich:

$$mm_1' - mm_1'' = n\,(d\theta + d\theta').$$

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß der Punct m näher bei t liegt, als die Mitte der von der verlängerten geraden Linie tm gebildeten Sehne, und zugleich haben wir gesehen, daß in dem entgegengesetzten Falle der von dem Angriffspuncte der Reibung durchlaufene Weg gleich:

$$mm' + mm''$$

gewesen wäre; aber da alsdann die beiden Mittelpuncte auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente im Puncte m liegen; so hat man:

$$Cp = n + R\cos. tCp \text{ und } C'p' = n - R'\cos. tC'p',$$

und hieraus folgt, daß auch:

$$mm' + mm'' = mm_1' + mm_1'' = Cpd\theta + C'p'd\theta' = n\,(d\theta + d\theta')$$

ist, und man erhält folglich in beiden Fällen für das von dem Angriffspuncte der Reibung durchlaufene Wegelement denselben Ausdruck.

Die Relation:

$$Rd\theta = R'd\theta'$$

giebt:

$$d\theta' = \frac{Rd\theta}{R'}.$$

Man hat also im ersten Falle:

$$mm' - mm'' = n\,\frac{R + R'}{R}\,d\theta,$$

und im zweiten:

$$mm' + mm'' = n\,\frac{R + R'}{R'}\,d\theta.$$

Quantität Arbeit, welche durch die Reibung der Zahnräder bei einer unendlich kleinen Verrückung consumirt wird.

§. 284. Da die dem Drucke N entsprechende Reibung $= fN$ ist, wenn f das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke bezeichnet; so folgt, daß die von der Reibung der Verzahnung in dem Zeitelemente dt hervorgebrachte Quantität Arbeit in allen Fällen ausgedrückt wird durch:

$$fN.\,n\frac{R + R'}{R'}\,.\,d\theta.$$

Wenn Q die auf der Mittelpunctslinie senkrechte Kraft bezeichnet, welche in tangentialer Richtung an den Grundkreisen wirken muß, um den der Bewegung des Getriebes entgegenwirkenden Widerstand zu überwinden, und φ den Winkel, welchen die Normale mit der Richtung dieser Kraft bildet; so haben wir offenbar:

$$N \times CR = QR,$$

oder:

$$N\cos.\varphi = Q,$$

folglich:

$$N = \frac{Q}{\cos.\varphi},$$

und mithin das Arbeitselement der Reibung gleich:

$$fQ\;.\;n\frac{R + R'}{R'}\;\frac{d\theta}{\cos.\varphi}.$$

In diesem Ausdrucke ist die Kraft Q gewöhnlich bekannt, und zwar die mittlere Kraft, welche an dem Umfange des Grundkreises des Getriebes wirken muß, um alle anderen Widerstände, als die Reibung der Verzahnung zu überwinden; aber die Größen n und φ ändern sich mit dem Winkel θ, und man muß in jedem Falle ihren genauen oder genäherten Werth als Function dieses Winkels kennen, damit man diesen

Ausdruck für das Element der Arbeit integriren kann, um daraus die totale Quantität Arbeit abzuleiten, welche durch die Reibung der Verzahnung während der ganzen Dauer der Berührung zweier Zähne absorbirt wird. Zu diesem Zwecke wollen wir nun diese Formel auf die verschiedenen Arten der gebräuchlichen Verzahnungen anwenden.

Anwendung auf die Epicycloidenverzahnung.

§. 285. Die Epicycloidenverzahnung (Fig. 42) bestehe aus einem Treibrade und aus einem Getriebe, so ist in diesem Falle $\varphi = \theta'$, weil die Normale tm auf der Flanke $C'm$ senkrecht ist, und außerdem hat man:

$$n = R' \sin. \theta'.$$

Das Element der Arbeit der Reibung der Verzahnung wird folglich wegen $Rd\theta = R'd\theta'$ ausgedrückt durch:

$$fQ \,.\, \frac{(R+R')}{R'} R' \frac{\sin. \theta' d\theta}{\cos. \theta'} = fQR' \frac{R+R'}{R} \tang. \theta' d\theta'.$$

Ferner ist bekanntlich:

$$\tang. \theta' = \theta' + \frac{\theta'^3}{3} + \text{rc.},$$

und folglich hat man, wenn der Winkel θ' so klein ist, daß man bei dem ersten Gliede dieser Reihe stehen bleiben kann:

$$fQR' \left(\frac{(R+R')}{R}\right) \tang. \theta' d\theta' = fQ \frac{R+R'}{R} R'\theta' d\theta'.$$

Integrirt man alsdann von $\theta = 0$ bis zu dem Werthe von θ', welcher der größten Entfernung des Punctes m von der Mittelpunctslinie entspricht; so erhält man für die von der Reibung in diesem Intervalle hervorgebrachte gesammte Quantität Arbeit den Ausdruck:

$$fQ \,.\, \frac{R+R'}{R} R' \frac{\theta'^2}{2}.$$

Wenn die Zähne einander vor der Mittelpunktslinie während des einem Winkel θ'' entsprechenden Intervalles ergriffen, so hätte man ebenso für die während dieser Periode consumirte Quantität Arbeit den Ausdruck:

$$fQ \,.\, \frac{R+R'}{R} R' \frac{\theta''^2}{2},$$

und folglich für die während des ganzen Berührungsintervalles $\theta' + \theta''$ consumirte Quantität Arbeit den Ausdruck:

$$fQ \frac{R+R'}{R} R' \left\{\frac{\theta'^2 + \theta''^2}{2}\right\} = fQ \,.\, \left(\frac{R+R'}{R}\right) R' \left\{\frac{(\theta'+\theta'')^2}{2} - \theta'\theta''\right\}.$$

Es ist vortheilhaft, wenn die Zähne einander sowohl vor, als nach der Mittelpunctslinie fortschieben.

§. 286. Aus diesem letzten Ausdrucke erhellet, daß es für eine gegebene Berührungsamplitude oder Winkelbewegung $\theta' + \theta''$ hinsichtlich der Oeconomie der durch die Reibung consumirten Arbeit vortheilhaft

18*

ist, daß sich die Zähne vor und nach der Mittelpunctslinie ergreifen, weil, wenn dieses gegenseitige Fortschieben der Zähne nur vor, oder nur hinter dieser Linie stattfände, die durch diesen Widerstand consumirte Quantität Arbeit nach dem Obigen ausgedrückt würde durch:

$$fQ\frac{R+R'}{R}\ R'\ \frac{(\theta'+\theta'')^2}{2}.$$

Da die Größe $fQ\,.\,\frac{R+R'}{R}\,R'\theta'\theta''$ in dem vorletzten Ausdrucke negativ ist, so folgt, daß es vortheilhaft ist, die Zähne des Räderwerkes einander vor und nach der Mittelpunctslinie ergreifen zu lassen, und da sie offenbar für $\theta'=\theta''=\frac{\theta'+\theta''}{2}$ ein Maximum wird, wo $\theta'+\theta''$ der ganze gegebene Drehungswinkel ist; so folgt, daß es in der jetzt fraglichen Rücksicht vortheilhaft ist, wenn der Eingriff eben so weit vor, als nach der Mittelpunktslinie stattfindet.

Mittlere Kraft, welche in tangentialer Richtung an dem Grundkreise wirken muß, um die Reibung der Verzahnung zu überwinden.

§. 287. Oft ist es zur Erleichterung der Rechnungen von Wichtigkeit, den Werth der in t an den beiden Grundkreisen nach tangentialer Richtung wirkenden mittleren Kraft, welche eine hinreichende Quantität Arbeit hervorbringt, um die von der Reibung der Verzahnung consumirte Quantität Arbeit zu compensiren, zu finden. Nun ist aber der von der Mittelpunctslinie bis zu der Winkeldistanz θ' durchlaufene Weg in der Richtung der gesuchten mittleren Kraft $=R'\theta'$, und wenn a die Theilung $R'\theta'=R\theta$ der Verzahnung bezeichnet; so wird diese mittlere Kraft ausgedrückt durch:

$$fQ\,.\,\frac{R+R'}{RR'}\ \frac{\theta'}{2}=fQ\,.\,\frac{R+R'}{R}\ \frac{a}{2}.$$

Wenn die Zähne des Räderwerkes vor der Mittelpunctslinie einander um eine Winkelgröße θ'' und nach dieser Linie um eine Winkelgröße θ' fortschieben, so ist der von der gesuchten mittleren Kraft in ihrer eigenen Richtung durchlaufene Weg gleich $R'(\theta'+\theta'')$, und ihr Werth wird ausgedrückt durch:

$$\frac{fQ\,.\,\frac{R+R'}{R}R'\left\{\frac{\theta'^2}{2}+\frac{\theta''^2}{2}\right\}}{R'(\theta'+\theta'')}=\frac{fQ\,.\,\frac{R+R'}{RR'}\left\{\frac{R'^2(\theta'+\theta'')^2}{2}-R'^2\theta'\theta''\right\}}{R'(\theta'+\theta'')}$$
$$=fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\left\{\frac{R'(\theta'+\theta'')}{2}-\frac{R'\,.\,\theta'\theta''}{\theta'+\theta''}\right\}.$$

Diese mittlere Kraft ist offenbar kleiner als die, welche zur Ueberwindung der Reibung in dem Falle erforderlich ist, wo der Winkel $\theta'+\theta''$ auf derselben Seite der Mittelpunctslinie beschrieben würde, weil diese letztere Kraft ausgedrückt würde durch:

$$fQ\,.\,\frac{R+R'}{R}\ \frac{\theta'+\theta''}{2}.$$

In dem Falle, wo $\theta' = \theta''$ ist, welches der größten Differenz entspricht, ist die auszuübende mittlere Kraft, wenn die beiden Räder einander vor und nach der Mittelpunctslinie fortschieben:

$$fQ \cdot \frac{R + R'}{RR'} \frac{R'\theta'}{2} = fQ \frac{R + R'}{RR'} \cdot \frac{a}{2},$$

wenn $R'\theta' = a$ ist, und in dem Falle, wo das Fortschieben bloß nach der Mittelpunctslinie auf eine Winkeldistanz $R'(\theta' + \theta'') = 2R'\theta' = 2a$ stattfände, wäre sie:

$$= fQ \cdot \frac{R + R'}{RR'} \cdot a,$$

d. h. doppelt so groß als die vorhergehende.

Da in den meisten Fällen der Eingriff vor und nach der Mittelpunctslinie stattfindet, so wollen wir für den Werth der in tangentialer Richtung an den beiden Grundkreisen in t wirkenden und zur Ueberwindung der Reibung erforderlichen mittleren Kraft:

$$fQ \cdot \frac{R + R'}{RR'} \cdot \frac{a}{2} = fQ \cdot \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right) \frac{a}{2}$$

nehmen; aber in andern besondern Fällen uns der entsprechenden Formel bedienen.

Wenn die Anzahl der Zähne des Rades von dem Halbmesser R mit m und die der Zähne des Rades von dem Halbmesser R' mit m' bezeichnet wird, so hat man:

$$ma = 2\pi R, \; m'a = 2\pi R', \text{ folglich } \frac{a}{2R} = \frac{\pi}{m}, \; \frac{a}{2R'} = \frac{\pi}{m'},$$

und mithin:

$$fQ \cdot \frac{R + R'}{RR'} \cdot \frac{a}{2} = fQ\pi \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right\} = fQ\pi \cdot \frac{m + m'}{mm'}.$$

Unter dieser Form werden wir den Ausdruck der mittleren Kraft gewöhnlich anwenden, weil die Anzahlen der Zähne immer unmittelbar durch die Beobachtung schon construirter Maschinen erhalten werden. Sie zeigt, daß diese Kraft desto kleiner ist, je größer die Anzahl der Zähne ist, und daß es folglich in dieser Beziehung vortheilhaft ist, die Anzahl der Zähne möglichst groß zu nehmen.

Eingriff eines Rades und einer Lanterne.

§. 288. Die vorhergehenden Ausdrücke sind unmittelbar auf den Fall anwendbar, wo eine Lanterne mit cylindrischen Triebstöcken durch ein Rad umgedreht wird, wenn man annimmt, daß der auf dem Grundkreise beschriebene Bogen der Theilung oder dem Intervalle zwischen den Axen zweier auf einander folgender Triebstöcke der Lanterne gleich ist.

Eingriff eines innerhalb eines Rades liegenden Getriebes.

§. 289. In dem Falle, wo sich ein Getriebe innerhalb eines Rades befindet, ergiebt sich aus der Untersuchung der Figur 105, worin C und C' resp. die Mittelpuncte des Rades und des Getriebes sind, leicht, daß, wenn der Berührungspunct m der beiden Zahncurven auf der als Sehne des innern Grundkreises betrachteten gemeinschaftlichen Normale tm diesseits ihrer Mitte gegen t zu liegt, die gemeinschaftliche Tangente nicht zwischen den beiden Mittelpuncten hindurchgeht, und daß im Gegentheil, wenn dieser Punct m jenseits der Mitte der Sehne liegt, diese Tangente zwischen den beiden Mittelpuncten hindurchgeht, was gerade das Umgekehrte wie bei den äußern Verzahnungen ist.

Wenn die frühern Bezeichnungen beibehalten werden, so hat man offenbar im ersten Falle für den von dem Angriffspuncte der Reibung durchlaufenen Weg die Ausdrücke:

$$m_1m' - m_1m'' = m_1'm - m_1''m$$

$$= mm' \cos. Cmt - mm'' \cos. C'mt,$$

$$= Cmd\theta \cos. Cmt - C'md\theta' \cos. C'mt,$$

$$Cm \cos. Cmt = Cp = R \cos. tCp - n,$$

$$C'm \cos. C'mt = C'p' = R' \cos. tCp - n,$$

und folglich:

$$m_1m' - m_1m'' = (Rd\theta - R'd\theta') \cos. tCp + n(d\theta' - d\theta) = n \cdot \frac{R-R'}{R'} d\theta,$$

weil

$$Rd\theta = R'd\theta'$$

ist.

Im zweiten Falle dagegen hat man:

$$m_1m' + m_1m'' = m_1'm + m_1''m$$

$$= mm' \cos. Cmt + mm'' \cos. C'mt$$

$$= Cmd\theta \cos. Cmt + C'md\theta' \cos. C'mt,$$

$$Cm \cos. Cmt = Cp = R \cos. tCp - n,$$

$$C'm \cos. C'mt = C'p' = n - R' \cos. tCp,$$

und folglich:

$$m_1m' + m_1m'' = (Rd\theta - R'd\theta) \cos. tCp + n(d\theta' - d\theta) = n \frac{R-R'}{R'} d\theta.$$

In beiden Fällen wird also das von dem Angriffspuncte der Reibung durchlaufene Wegelement durch denselben Ausdruck bestimmt, und die während des Momentes dt durch diesen Widerstand consumirte Quantität Arbeit wird ausgedrückt durch:

$$fN \cdot n \frac{R - R'}{R'} d\theta.$$

Diese Verzahnung läßt sich nur ausführen bei epicycloidischen Zahncurven, und man findet, wie vorhin, für den Näherungswerth der von der Reibung consumirten Quantität Arbeit, während die Räder auf ihrem Grundkreise einen Bogen $R'\theta'$ beschreiben, die Größe:

$$fQ \cdot \frac{R - R'}{R} \cdot \frac{R'\theta'^2}{2},$$

welche offenbar weit kleiner ist, als für äußere Verzahnungen von denselben Dimensionen und unter denselben Umständen.

Die Bedingungen der Zeichnung zeigen, daß, wenn das Rad das Getriebe umdrehen soll, dieses nur geradlinige Flanken haben, und daß der Eingriff nur nach der Mittelpunctslinie stattfinden kann. Wenn der während der Berührung durchlaufene Bogen $R'\theta'$ der Theilung a gleich ist, was stattfinden muß, damit immer wenigstens ein Zahn in Thätigkeit ist; so wird die mittlere Kraft, welche das Rad ausüben muß, um die Reibung der Verzahnung zu überwinden, ausgedrückt durch:

$$fQ \cdot \frac{R-R'}{RR'} \cdot \frac{R'\theta'}{2} = fQ\left\{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right\}\frac{a}{2} = fQ\pi \cdot \frac{m-m'}{mm'},$$

wenn m und m' wieder resp. die Anzahlen der Zähne des Rades und des Getriebes bezeichnen.

Anwendung der allgemeinen Formel auf die Evolventenverzahnung.

§. 290. Wenn die Zahncurven Kreisevolventen sind (Fig. 44), deren Halbmesser die aus den Mittelpuncten C und C' auf die constante und gegebene Richtung der gemeinschaftlichen Normale tm gefällten Perpendikel CK und $C'K'$ sind; so läßt sich der allgemeine Ausdruck für das Element der von der Reibung consumirten Quantität Arbeit vollständig integriren. Denn da in diesem Ausdrucke:

$$fN \cdot n \cdot \frac{R+R'}{R'} d\theta,$$

die Länge n der Normale tm dem abgewickelten Bogen gleich ist, so hat man $n = tm = CK \cdot \theta$ und $N \times CK = QR$, folglich:

$$fNn \cdot \frac{R+R'}{R'} d\theta = fQ \cdot \frac{R+R'}{R'} R\theta d\theta,$$

wovon das Integral:

$$fQ\frac{R+R'}{R'} \cdot R\frac{\theta^2}{2}$$

die von der Reibung consumirte Quantität Arbeit, während die Räder auf ihren Grundkreisen einen Bogen $R\theta$ beschrieben haben, genau ausdrückt.

Die mittlere Kraft, welche in tangentialer Richtung an diesen Grundkreisen in t wirken muß, um diesen Widerstand zu überwinden, wird folglich ausgedrückt durch:

$$fQ \cdot \frac{R+R'}{RR'} \cdot \frac{R\theta}{2} = fQ \cdot \frac{R+R'}{RR'} \frac{a}{2}$$

wenn $R\theta = a$ ist.

Es wäre nun der Fall zu untersuchen, wo der Eingriff zum Theil vor und zum Theil nach der Mittelpunctslinie stattfindet, und dann die Resultate mit denen zu vergleichen, wo dieser Eingriff nur auf einer einzigen Seite der Mittelpunctslinie stattfindet, wodurch man wieder ganz auf dieselbe Folgerung geführt würde, nämlich: daß es vortheilhaft ist, wenn die Zähne der Räder einander sowohl vor, als nach der Mittelpunctslinie fortschieben.

Wenn man auch in den obigen Ausdruck der mittleren Kraft die Zahlen m und m' der Zähne des Rades und des Getriebes einführt, so erhält man in diesem Falle für die gesuchte mittlere Kraft den ganz strengen Ausdruck:

$$fQ\left\{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right\}\frac{a}{2}=fQ\pi\cdot\frac{m+m'}{mm'}.$$

Eingriff eines Getriebes und einer Zahnstange.

§. 291. Wenn ein Getriebe eine Zahnstange in Bewegung setzen soll, so braucht man in dem vorhergehenden Ausdrucke der mittleren Kraft nur $R=\infty$ zu setzen, wodurch man für den Werth derselben erhält:

$$fQ\cdot\frac{a}{2R}.$$

Reibung zwischen einem Hebedaumen und der Hebelatte eines Stampfers.

§. 292. Wenn ein Hebedaumen, welcher die Form einer Kreisevolvente hat (Fig 46), die Hebelatte eines sich in Leitungen bewegenden Stampfers fortschiebt und man bezeichnet den beschriebenen Winkel wieder mit θ, oder vielmehr den in der Richtung des Stampfers durchlaufenen geradlinigen Weg mit a; so har man wieder für die mittlere Kraft, welche die Reibung überwinden muß, den genauen Ausdruck:

$$fQ\cdot\frac{a}{2R'},$$

wo R' der Halbmesser des abgewickelten Kreises ist, welcher die von dem Berührungspuncte durchlaufene gerade Linie berührt.

Hebedaumen von epicycloidischer Form.

§. 293. Um auf einen um eine Axe beweglichen Hebel eine stetige Bewegung so zu übertragen, daß die übertragenen Geschwindigkeiten in einem constanten Verhältnisse stehen, giebt man, wie bereits bemerkt worden, dem Hebedaumen die Form einer Epicycloide (Fig. 45), indem der Angriff von der Mittelpunctslinie aus geschieht. In diesem Falle ist es wegen der Länge der Curve nicht mehr gestattet, in dem Ausdrucke für das Element der Arbeit:

$$fQ\cdot R'\cdot\frac{R+R'}{R}\,tang.\,\theta' d\theta'$$

nur das erste Glied der Reihe:

$$tang.\,\theta'=\theta+\frac{\theta'^3}{3}+ \text{rc.}$$

als Näherungswerth von $tang.\,\theta'$ zu nehmen, sondern man muß wenigstens zwei Glieder dieser Reihe nehmen, wodurch man für die Quantität Arbeit, welche consumirt wird, während der Grundkreis des Hebedaumens den Bogen $R'\theta'$ durchläuft, den Ausdruck erhält:

$$fQ\cdot R'\cdot\frac{R+R'}{R}\left\{\frac{\theta'^2}{2}+\frac{\theta'^4}{3\cdot 4}\right\},$$

und für die zur Ueberwindung dieser Reibung erforderliche mittlere Kraft den Ausdruck:

$$fQ \cdot \frac{R+R'}{RR'} \frac{a}{2} \left\{1 + \frac{\theta'^3}{2 \cdot 3}\right\}.$$

Wenn der Winkel $\theta' = 45^\circ$ ist, so hat man:

$$\theta' = \frac{45}{180}\pi = 0^m{,}785, \; \frac{\theta'^2}{2 \cdot 3} = 0^m{,}103,$$

welche Größe nicht gegen die Einheit vernachlässigt werden kann.

Betrachtung des Falles, wo die Form der Hebedaumen der Bedingung der Gleichförmigkeit nicht genügt.

§. 294. Oft trifft man in Maschinenanlagen, und namentlich bei Gebläsen, Hebedaumen an, deren durch mehr oder weniger richtige specielle Betrachtungen bestimmte Krümmung der Bedingung nicht genügt, daß sie eine Geschwindigkeit übertragen, welche zu der der Daumenwelle in einem constanten Verhältnisse steht, und in diesem Falle muß man zu Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen, wovon wir hier eine Probe mittheilen wollen.

Es sei *amb* (Fig. 106) irgend eine Curve, welche die Kolbenstange eines Gebläses in einer constanten Richtung fortschiebt, Q sei das Gewicht dieser Stange, oder die Kraft, welche man nach der Richtung ihrer Länge ausüben muß, um sie in Bewegung zu setzen, und α sei der Winkel, welchen die Normale im Berührungspuncte mit ihrer Richtung bildet; so ist der Normaldruck $= Q \cos. \alpha$ und die Reibung $fQ \cos. \alpha$ consumirt für ein in dem Zeitelemente dt von dem Hebedaumen durchlaufenes Bogenelement ds eine Quantität Arbeit, welche ausgedrückt wird durch:

$$fQ \cos. \alpha \,.\, ds,$$

welchen Ausdruck man von a bis b oder durch den ganzen Bogen s integriren muß, um die von der Reibung während eines Kolbenhubes consumirte totale Quantität Arbeit zu erhalten. Alsdann wendet man das Simpson'sche Theorem an und theilt den ganzen Bogen s, welchen man aus der Zeichnung durch directe Messung erhalten kann, in eine gerade Anzahl gleicher Theile, und bestimmt durch diese Zeichnung für jede Abtheilung den correspondirenden Werth von $Q \cos. \alpha$.

In den meisten Fällen braucht man den Bogen s nur in vier Theile zu theilen, und wenn man für die:

$$s = 0, \; s = {}^1/_4\, s, \; s = {}^1/_2\, s, \; s = {}^3/_4\, s, \; s = s,$$

entsprechenden Werthe von $Q \cos. \alpha$ hat:

$$Q_1 \cos. \alpha_1, \; Q_2 \cos. \alpha_2, \; Q_3 \cos. \alpha_3, \; Q_4 \cos. \alpha_4, \; Q_5 \cos. \alpha_5;$$

so erhält man mit einer hinreichenden Annäherung:

$$f\int Q \cos. \alpha ds =$$

$$\frac{fs}{12}\left\{Q_1 \cos. \alpha_1 + 4\,(Q_2 \cos. \alpha_2 + Q_4 \cos. \alpha_4) + Q_3 \cos. \alpha_3 \, Q_5 + \cos. \alpha_5\right\}.$$

Reibung der Kegelräder.

§. 295. In den genau construirten Kegel- oder Winkelrädern macht man die Zähne und folglich auch die Theilung immer so klein als möglich, so daß die Bewegung und das Uebereinanderhingleiten der Zähne nahezu so stattfindet, wie wenn es in der Berührungsebene der mittleren und auf der Länge der Zähne normalen Kegelflächen stattfände.

Wenn man also dieselben Bezeichnungen beibehält, aber sie auf die Abweichung dieser mittleren Kegelflächen anwendet, so hat man wieder für die mittlere Kraft, welche in der betrachteten Berührungsebene und senkrecht auf der Mittelpunctslinie der abgewickelten Kreise wirkt, und dieselbe Quantität Arbeit hervorbringt, als die Reibung der Verzahnung, den Ausdruck:

$$fQ \cdot \frac{R+R'}{RR'} \cdot \frac{a}{2},$$

worin R, R' die Halbmesser der abgewickelten Grundkreise, Q die Kraft oder der Widerstand, welcher in der Berührungsebene der Bewegung des Getriebes entgegenwirkt und a die auf den Umfängen der mittleren Kreise gemessene Theilung bezeichnen.

Erste Note.

Ueber den genäherten, linearen und rationalen Werth der Wurzelgrößen von der Form $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ 2c.

Linearer Ausdruck von $\sqrt{a^2+b^2}$ von $a = kb$ bis $a = \infty \cdot b$. — Grenze des Fehlers.

Da der genäherte Werth der Wurzelgröße $\sqrt{a^2+b^2}$ eine rationale und lineare Form in Beziehung auf a und b haben soll, so wollen wir

$$\sqrt{a^2+b^2} = \alpha a + \beta b$$

setzen, wo a und b absolute positive und α, β unbestimmte Zahlen sind, welche der Bedingung genügen müssen, daß innerhalb gegebener Grenzen, z. B. von $a = kb$ bis $a = \infty \cdot b$ der Fehler, welchen man begeht, wenn man $\alpha a + \beta b$ statt $\sqrt{a^2+b^2}$ nimmt, in Verhältniß zu dem wahren Werthe der Wurzelgröße so klein als möglich sei. Da der absolute Fehler $= \alpha a + \beta b - \sqrt{a^2+b^2}$ ist, so wird der relative oder verhältnißmäßige Fehler, welchen wir mit z bezeichnen wollen, ausgedrückt durch:

$$z = \frac{\alpha a + \beta b}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1 = \frac{\alpha n + \beta}{\sqrt{1+n^2}} - 1,$$

wenn man $\frac{a}{b} = n$ oder $a = nb$ setzt, und es kommt darauf an, denselben für alle zwischen den betrachteten Grenzen von $n = k$ bis $n = \infty$ liegenden Werthe von a und b oder n zu einem Minimum zu machen, indem man den unbestimmten Größen α und β die entsprechenden Werthe beilegt, was darauf hinausläuft, die Zahlenwerthe dieser Größen so anzunehmen, daß sich die Curve, deren Abscissen und Ordinaten resp. n und z sind, zwischen den Grenzen $n = k$ und $n = \infty$ der Abscissenaxe so viel als möglich nähert.

Zu dem Zwecke muß man den Verlauf der Function z zwischen den Grenzen, innerhalb welcher die Werthe der Wurzelgröße $\sqrt{a^2+b^2}$ berechnet werden sollen, genau untersuchen. Nun überzeugt man sich aber leicht, daß die Ordinate z von $n = 0$ bis $n = \infty$ ein absolutes Maximum gestattet, von welchem aus der Fehler in algebraischem Sinne fortwährend und ohne Ende abnimmt, d. h. durch Null geht und dann negativ wird, oder was auf dasselbe hinausläuft, dieser Fehler nimmt von seinem Maximum aus fortwährend ab, wird Null und nimmt dann unter der Abscissenaxe wieder zu, indem er Werthe von entgegengesetztem Zeichen annimmt.

Denn wenn man die Zahlen α und β als gegeben betrachtet, den obigen Werth von z zweimal in Beziehung auf n differentiirt und dann den Differentialcoefficienten der ersten Ordnung gleich Null setzt, um den dem Maximum des Fehlers entsprechenden Werth von n zu erhalten; so findet man, daß die Bedingungen des Maximums erfüllt werden für:

$$n = \frac{\alpha}{\beta}, \quad z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1.$$

Sucht man ferner die Ausdrücke des Fehlers z, welche den beiden betrachteten Grenzen entsprechen, so findet man:

$$\text{für } n = k, \quad z = \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1 + k^2}} - 1$$

$$\text{für } n = \infty, \quad z = \alpha - 1.$$

Wenn man folglich **a priori** gewiß wäre, daß das obige Maximum für die gesuchten Werthe von α und β zwischen diesen Grenzen liegt, d. h. daß das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ nothwendig positiv und größer als k ist; so hätte man diese Werthe bloß noch so zu bestimmen, daß sich die algebraischen Ausdrücke der drei in Rede stehenden Fehler so viel als möglich dem Werthe Null nähern, d. h. daß der größte derselben, abgesehen von dem Zeichen, möglichst klein wird, was keine Schwierigkeiten haben würde, weil es, wie man sogleich sehen wird, bloß darauf ankäme, auszudrücken, daß die absoluten Werthe dieser ersten Fehler genau einander gleich sind. Da aber die Grenze des Verhältnisses $\frac{\alpha}{\beta}$ völlig unbekannt ist, so wird es unumgänglich nothwendig, in Beziehung auf die Werthe der unbestimmten Größen α und β besondere Annahmen zu machen. Nimmt man z. B. an, daß sie die sich auf die Grenzen $n = \infty$ und $n = k$ beziehenden Fehler zu Null machen sollen, so hat man:

$$\alpha - 1 = 0, \text{ folglich } \alpha = 1; \quad \frac{\alpha k \beta}{\sqrt{1 + k^2}} - 1 = 0,$$

$$\text{also } \beta = \sqrt{1 + k^2} - \alpha k = \sqrt{1 + k^2} - k.$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, daß das Verhältniß:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2} - k} = \sqrt{1 + k^2} + k$$

hier in der That größer ist, als k, so daß der größte Fehler $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$ wirklich zwischen den Grenzen $n = k$ und $n = \infty$ liegt, was nicht der Fall sein kann, wofern die den besondern Werthen $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{1 + k^2} - k$ entsprechenden Fehler, welche positiv sind und mit α', β' bezeichnet werden sollen, nicht fortwährend von der untern

Grenze $n = k$, oder von der obern Grenze $n = \infty$ bis zu dem größten Werthe $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$, welcher ebenfalls positiv ist, zunehmen.

Da ferner die Function $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$ einen desto kleineren Werth annimmt, je kleinere Werthe von α und β in Vergleich zu α' und β' in dieselbe substituirt werden, so ist klar, daß, obgleich sie die den Grenzen $n = \infty$, $n = \alpha$ entsprechenden Fehler $\alpha - 1$ und $\frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}} - 1$ in dem negativen Sinne vergrößern, sie doch vortheilhafter sind, als die Werthe von α' und β', so lange diese letzten mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Fehler kleiner bleiben, als der entsprechende größte Fehler $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$. Aber da im Gegentheil dieses nicht mehr der Fall sein würde, sobald der letzte Fehler kleiner wäre, als α' oder β', so sieht man, daß die Werthe von α und β, welche für das ganze Intervall von $n = k$ bis $n = \infty$ den möglichst kleinsten Fehlern entsprechen, der doppelten Bedingung:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1 = 1 - \alpha = 1 - \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}}$$

genügen müssen, woraus zunächst folgt:

$$\beta = \alpha \left\{ \sqrt{1 + k^2} - k \right\},$$

aus welchem Ausdrucke erhellet, daß das Verhältniß:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2} - k} = \sqrt{1+k^2} + k$$

in der That größer ist, als k, so daß der größte Fehler $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$ wirklich zwischen den Grenzen $n = k$ und $n = \infty$ liegt, wie es die vorhergehenden Betrachtungen voraussetzen.

Ferner ergiebt sich aus denselben Bedingungsgleichungen:

$$\alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{2(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}}},$$

$$\beta = \frac{2(\sqrt{1+k^2} - k)}{1 + \sqrt{2(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}}}$$

und für die Grenze ε der Fehler, welche man begehen kann, wenn man

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \alpha a + \beta b$$

nimmt, der Ausdruck:

$$1 - \alpha = 1 - \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}} - 1}{\sqrt{2(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}} + 1} = \varepsilon.$$

Spezielle Beispiele.

Wir wollen z. B. annehmen, daß man das Größenverhältniß von a und b nicht kennt, d. h. durchaus nicht weiß, ob a größer oder kleiner als b ist; so sind die Grenzen, zwischen welchen man die Werthe von $\sqrt{a^2 + b^2}$ nehmen muß, $n = 0$ und $n = \infty$, so daß man in den obigen Ausdrücken von α, β und ε die Größe $k = 0$ setzen muß, wodurch man folgende Werthe erhält:

$$\alpha = \beta = 0{,}8284,\ \varepsilon = 0{,}1716.$$

Man hat daher wenigstens bis auf 0,1716 oder ungefähr $1/_6$ genau für alle positiven Werthe von a und b:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}83\ (a + b),$$

wo das **Maximum** 0,1716 der relativen und positiven Fehler für $n = \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = 1$ und das der negativen Fehler für $n = 0$ und $n = \infty$ oder $a = 0$ und $b = 0$ stattfindet.

Wenn man ebenso annimmt, daß man weiß, daß $a > b$ oder $n > 1$ sein muß, so hat man:

$$k = 1 \text{ und } \alpha = 0{,}96046,\ \beta = 0{,}39783,\ \varepsilon = 0{,}03954 < \frac{1}{25},$$

wo diese Grenze ε der positiven und negativen Fehler für die Werthe:

$$n = 1,\ n = \infty \text{ und } n = \frac{\alpha}{\beta} = 2{,}44$$

oder:

$$a = b,\ a = \frac{b}{0} \text{ und } a = 2{,}44\, b$$

genau erreicht wird. Hieraus sieht man, daß die rationalen Werthe $\alpha a + \beta b$ von $\sqrt{a^2 + b^2}$ um so mehr genähert sind, je größer a gegen b wird, was auch aus der folgenden von **Gosselin** berechneten Tafel erhellet.

Tafel der Zahlenwerthe der Coefficienten der linearen Function $\alpha a + \beta b$ und der Fehlergrenzen.

Relationen zwischen a und b.	Werthe von k.	Werthe von α.	Werthe von β.	Grenzen des Fehlers oder Werthe von $1 - \alpha$.	Näherungswerthe von $\sqrt{a^2+b^2}$
a und b	0	0,82840	0,82840	0,17160 oder $\frac{1}{6}$	$0{,}8284\ (a + b)$
$a > b$	1	0,96046	0,39783	0,03954 〃 $\frac{1}{25}$	$0{,}96046 . a + 0{,}39783 . b$
$a > 2 . b$	2	0,98592	0,23270	0,01408 〃 $\frac{1}{71}$	$0{,}98592 . a + 0{,}23270 . b$
$a > 3 . b$	3	0,99350	0,16123	0,00650 〃 $\frac{1}{154}$	$0{,}99350 . a + 0{,}16123 . b$
$a > 4 . b$	4	0,99625	0,12260	0,00375 〃 $\frac{1}{266}$	$0{,}99625 . a + 0{,}12260 . b$
$a > 5 . b$	5	0,99757	0,09878	0,00243 〃 $\frac{1}{417}$	$0{,}99757 . a + 0{,}09878 . b$
$a > 6 . b$	6	0,99826	0,08261	0,00174 〃 $\frac{1}{589}$	$0{,}99826 . a + 0{,}08261 . b$
$a > 7 . b$	7	0,99875	0,07098	0,00125 〃 $\frac{1}{800}$	$0{,}99875 . a + 0{,}07098 . b$
$a > 8 . b$	8	0,99905	0,06220	0,00095 〃 $\frac{1}{1049}$	$0{,}99905 . a + 0{,}06220 . b$
$a > 9 . b$	9	0,99930	0,05535	0,00070 〃 $\frac{1}{1428}$	$0{,}99930 . a + 0{,}05535 . b$
$a > 10 . b$	10	0,99935	0,04984	0,00065 〃 $\frac{1}{1538}$	$0{,}99935 . a + 0{,}04984 . b$

Vereinfachung der numerischen Berechnung der Coefficienten α, β und der Fehlergrenze ε vermittelst der Logarithmentafeln.

Die numerische Berechnung der Werthe von α, β und ε wird sehr erleichtert, wenn man setzt:

$$k = cot.\,4\varphi \text{ oder } \varphi = \tfrac{1}{4}\,arc.(cot. = k) = \tfrac{1}{4}\,arc.\left(tang. = \frac{1}{k}\right);$$

denn alsdann erhält man die Ausdrücke:

$$\alpha = 1 - tang.^2\varphi,\ \beta = 2\,tang.\,\varphi,\ \varepsilon = tang.^2\varphi,$$

welche man sofort vermittelst der trigonometrischen Tafeln berechnen kann, wenn man zuvor den Winkel 4φ berechnet, wovon der Logarithmus der Tangente $= 10 - log.\,k$ sein muß, und dann succ. die Werthe von φ, $tang.\,\varphi$ und $tang.^2\varphi$.

Setzt man z. B. $k = 3$, so hat man:

$$log.\,tang.\,4\varphi = 10 - log.\,3 = 9{,}52287875$$
$$= log.\,tang.\,(18^0 - 26' - 7'',065);$$

folglich

$$\varphi = 4^0\,36'\,31'',766,\ log.\,tang.\,\varphi = 8{,}9064056,$$
$$tang.\,\varphi = 0{,}0806131,$$

wo man von der Kennziffer von $log.\,tang.\,\varphi$ die Zahl 10, als den Logarithmus des Halbmessers der Tafel abziehen muß.

Man hat daher auch:

$$log.\,tang.^2\varphi = 2\,log.\,tang.\,\varphi = \bar{3}{,}8128112 = log.\,0{,}00649847$$

und endlich:

$$\varepsilon = 0{,}0064985,\ \beta = 2\,tang.\,\varphi = 0{,}1612262,\ \alpha = 1 - tang.^2\varphi$$
$$= 0{,}993502,$$

welches genau die in der obigen Tafel für $k = 3$ angegebenen Werthe sind.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf beliebige zusammengesetzte Functionen.

Das Verfahren, durch welches wir die allgemeinen Ausdrücke von α, β und ε als Functionen von k oder φ erhalten haben, ist offenbar auch auf jede zusammengesetzte Function zweier Veränderlicher a und b anwendbar, wenn man dafür eine lineare Function von der Form $\alpha a + \beta b + \gamma$ als Näherungswerth substituiren will, wofern der analytische Ausdruck des verhältnißmäßigen oder relativen Fehlers, welcher aus dieser Substitution entspringt, innerhalb der Grenzen der betrachteten Werthe der Veränderlichen a und b ein Maximum oder Minimum gestattet.

Diese Methode würde sich in gewissen Fällen sogar auch leicht auf eine Funktion von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen $a, b, c, d \ldots$ anwenden lassen, wenn man sich auf ähnliche Betrachtungen stützte, wie die, durch welche Laplace und Fourier die Werthe der unbekannten Größen einer Reihe von Bedingungsgleichungen so bestimmt haben, daß der größte der Fehler, auf welche sie führen, wenn man für die Unbekannten durch die Beobachtung gegebene Werthe substituirt, abgesehen vom Zeichen, so klein als möglich wird *). Denn die ganze Schwierigkeit besteht in jedem Falle darin, den analytischen Ausdruck der Fehlergrenzen zu finden und sie dann, abgesehen vom Zeichen, einander gleich zu setzen, so daß man, wenn die Anzahl der auf diese Weise erhaltenen Gleichungen der Anzahl der unbestimmten Größen α, β, γ.... gleich ist, die Werthe der letzteren berechnen kann, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.

Aus diesen Bemerkungen erhellet zur Genüge, daß sich die in Rede stehende Methode in sehr vielen Fällen anwenden läßt, und so die Mittel
2
an die Hand giebt, für jede zusammengesetzte Function von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen eine andere einfachere zu substituiren, welche sich der numerischen Berechnung oder gewissen analytischen Transformationen leichter fügt. Aus dem vorhergehenden Beispiele kann man auch entnehmen, welche Mittel in jedem besondern Falle angewandt werden müssen, und welche Vortheile dieses Verfahren in gewissen Fällen vor den gewöhnlichen Methoden, welche in der Entwicklung der Functionen in Reihen oder in Kettenbrüchen bestehen, gewähren kann.

Geometrische Betrachtungen, welche zu demselben ~~Zwecke~~ Ziele führen.

Nun wollen wir bemerken, daß sich verschiedene Mittel darbieten, welche wesentlich auf geometrischen Betrachtungen beruhen, und vermittelst welcher man den gewünschten Zweck gewissermaßen durch die bloße Anschauung erreichen kann. Denn betrachten wir die obige Aufgabe wieder, bezeichnen den genauen Werth der Wurzelgröße $\sqrt{a^2+b^2}$ mit c und betrachten die veränderlichen Größen a, b, und c als die Coordinaten eines gewissen Punctes im Raume in Beziehung auf die drei rechtwinkligen Axen oa, ob, oc (Fig. 107); so drückt die Gleichung:

$$\sqrt{a^2+b^2}=c, \text{ oder } a^2+b^2=c^2$$

eine Kegelfläche mit kreisförmiger Basis aus, deren Spitze der Anfangspunct o und deren Axe die Axe oc ist, welche wir als vertical annehmen wollen, und deren Erzeugungswinkel endlich gleich 45° ist. Ebenso drückt die Gleichung:

$$c=\alpha a+\beta b$$

zwischen den Coordinaten c, a, b eine durch den Anfangspunct o oder durch die Spitze des Kegels gehende Ebene aus, so daß die in Rede stehende Aufgabe darauf hinausläuft: die in der Gleichung dieser Ebene vorkommenden Constanten α und β so zu bestimmen, daß die verticalen Ordinaten c dieser Ebene innerhalb einer gegebenen Ausdehnung so wenig als möglich von denen verschieden sind, welche der Kegelfläche entsprechen und auf derselben Verticale liegen, d. h. welche den Werthen von a und b entsprechen, die in dem Intervalle liegen, für welches der kleinste Werth von $\frac{a}{b}=k$ und der größte $=\infty$ ist, oder welches zwischen der Axe oa und der geraden Linie om liegt, welche mit dieser Axe den Winkel nom bildet, dessen Cotangente $=k$ ist.

*) Mécanique céleste, 2e édition, Tom. II, pag. 126 et suivantes. Analyse des équations, par Fourier, 1ère partie, pag. 81, No. 21.

Bezeichnet man also diesen Winkel mit ψ, oder setzt:

$$mon = \psi = arc.(cotg. = k) = arc.\left(tang. = \frac{1}{k}\right),$$

so liegen alle zu betrachtenden Puncte der Kegelfläche und der Ebene zwischen den Erzeugungslinien und den geraden Linien, deren Projectionen auf der Ebene der a, b resp. oa und om sind.

Wir wollen annehmen, daß die erste Ebene und die Kegelfläche mit einer durch die Axe oc (Fig. 108) gelegten Ebene durchschnitten werden, und es sei op'' der Durchschnitt der ersten, op' der der zweiten und ob der der Ebene $a'b$ mit der schneidenden Ebene; so trifft die einem beliebigen Puncte p von ob entsprechende verticale Ordinate den Durchschnitt op'' der Ebene in einem Puncte p'' und den der Kegelfläche in einem Puncte p'. Alsdann ist der absolute Fehler, welchen man begeht, wenn man pp'' für pp' nimmt, $= p'p''$ und der relative oder verhältnißmäßige Fehler ist $= \frac{p'p''}{pp'}$, und dieser Fehler muß für alle Lagen der Durchschnittsebene um die Axe oc zu einem Minimum gemacht werden.

Man sieht, daß das Verhältniß $\frac{p'p''}{pp'}$ von der Lage des Punctes p auf der Horizontale od unabhängig ist, so daß man z. B. nur alle die Puncte p' der Kegelfläche zu betrachten braucht, welche derselben Niveauebene $o'p'$ angehören, die diese Kegelfläche nach einem Kreise durchschneidet, dessen Projection auf die Ebene der a, b (Fig. 107) durch den Bogen mpn dargestellt wird, welcher alle zu betrachtenden Puncte p enthält und dessen Durchschnitt mit der Ebene $c = \alpha a + \beta b$ in derselben Projection durch die gerade Linie rs dargestellt wird, die ebenfalls von den Schenkeln des Winkels mon begrenzt wird, welcher alle Puncte p enthält.

Da aber q' in dem obigen Profile (Fig. 108) der Punct der Ebene $c = \alpha a + \beta b$ ist, welcher in derselben Höhe, als der Punct p' der Kegelfläche über od oder der Ebene der a, b liegt, und da ferner q auf dieser letzten Ebene die Projection von q', wie p von p' ist; so hat man offenbar:

$$\frac{p'p''}{pp'} = \frac{pq}{oq}.$$

Folglich muß die gerade Linie rs (Fig. 107), welche der gesuchten Ebene angehört, deren Gleichung $c = \alpha a + \beta b$ ist, so gewählt werden, daß sie sich in der Ausdehnung zwischen on und om dem Kreisbogen npm möglichst nähert, so daß der größte Werth des Verhältnisses der Intervalle pq, op, auf den verschiedenen in dem Winkel mon liegenden Radienvectoren op gemessen, abgesehen von den Zeichen der Lage von pq und oq, so klein als möglich wird.

Uebrigens ist zu bemerken, daß diese Schlüsse von der besondern Beschaffenheit der Curve mpn oder der betrachteten Function mit a und b unabhängig sind, wofern man, wenn man letztere $= c$ setzt, die Gleichung einer Kegelfläche erhält, deren Spitze im Anfangspuncte der Coordinaten a, b, c liegt, oder was auf dasselbe hinausläuft, welche in Beziehung auf diese Coordinaten homogen ist.

Hiernach scheint **a priori** einleuchtend zu sein, daß, wenn das Curvenstück mpn zwischen zwei einander hinreichend naheliegende parallele gerade Linien eingeschlossen werden kann, sich die Aufgabe ohne Schwierigkeit und auf eine genügende Weise lösen läßt, wenn man das System dieser Parallelen bestimmt, für welches die gegenseitige Entfernung derselben möglichst klein ist und für die durch die Gleichung $c = \alpha a + \beta b$ ausgedrückte gerade Linie rs die nimmt, welche das fragliche Intervall in zwei gleiche Theile theilt.

Wenn die Curve mpn von n bis m überall convex ist, so hat die Linie rs offenbar die vortheilhafteste Lage, wenn sie zwischen der Sehne mn und der dazu parallelen Tangente $m'n'$ liegt, und entspricht nothwendig der geraden Linie $n''m''$, welche das Intervall von nm bis $n'm'$ in zwei gleiche Theile theilt, so daß die drei Grenzen:

$$\frac{n\,n''}{n''\,o},\ \frac{p\,p''}{p''\,o},\ \frac{m\,m''}{m''\,o}$$

der positiven oder negativen Fehler, welche man begeht, wenn man die gerade Linie für die Curve setzt, abgesehen vom Zeichen, einander gleich sind *).

Wenn man diese Resultate auf den besondern Fall des Kreises oder der Function $\sqrt{a^2 + b^2}$ anwendet und bemerkt, daß der Winkel, welcher von $n''m''$ oder der Sehne mn und dem Bogen oa gebildet wird, $= 90° - \frac{1}{2}\psi$ ist, so hat man, da die Gleichung dieser ersten geraden Linie mit der Gleichung:

---

*) Allgemeiner, wenn man eine beliebige Function $F(a, b)$ oder eine durch die Gleichung $c = F(a, b)$ ausgedrückte Fläche betrachtet und die Ebene $c = \alpha a + \beta b + \gamma$ so bestimmen will, daß die denselben Abscissen oder denselben Werthen von a, b entsprechenden Ordinaten c beider möglichst wenig von einander verschieden sind innerhalb der ganzen Ausdehnung eines convexen Segmentes der Fläche $c = F(a, b)$, welches von der Ebene, deren Gleichung $c = ma + nb + p$ gegeben ist, begrenzt wird; so legt man durch den Durchschnitt dieser letzten Ebene mit der der a, b, welcher durch die Gleichung $ma + nb + p = 0$ ausgedrückt wird, eine Berührungsebene an das gegebene Segment, oder allgemeiner eine Ebene, welche die äußere Grenze dieses Segmentes bildet, läßt dann zwischen dieser Ebene und der Ebene $c = ma + nb$ und durch die gerade Linie $ma + nb + p = 0$ eine neue Ebene so hindurchgehen, daß ihre Ordinaten die harmonischen Mittel zwischen den entsprechenden Ordinaten der beiden andern Ebenen sind, so daß, wenn c', c'' die Ordinaten dieser beiden letzten Ebenen und c die der fraglichen Ebene für dieselben Werthe von a, b bezeichnen,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c'} + \frac{1}{c''}\right) \text{ oder } \frac{c' - c}{c'} = \frac{c - c''}{c''}$$

ist. Die Gleichung dieser Ebene ist die der gesuchten Ebene, und wenn man sie mit der Gleichung $c = \alpha a + \beta b + \gamma$ indentificirt, so ergeben sich daraus die Werthe der unbestimmten Größen, α, β, γ, und die Grenze des Fehlers wird offenbar ausgedrückt durch

$$\frac{c' - c}{c'} = \frac{c - c''}{c''}.$$

$$c = \alpha a + \beta b$$

identisch sein muß:

$$\frac{\alpha}{\beta} = cot.\, {}^1/_2\, \psi,$$

$$on'' = \frac{on + on'}{2} = {}^1/_2 \left(c + \frac{co}{cos.\, {}^1/_2 \psi}\right) = \frac{c\,(1 + cos.\, {}^1/_2\, \psi)}{2\, cos.\, {}^1/_2\, \psi} = \frac{c}{\alpha};$$

folglich:

$$\alpha = \frac{2\, cos.\, {}^1/_2\, \psi}{1 + cos.\, {}^1/_2 \psi} = 1 - tang.^2\, {}^1/_4\, \psi,\ \beta = \frac{2\, sin.\, {}^1/_2\, \psi}{1 + cos.\, {}^1/_2 \psi} = 2\, tang.\, {}^1/_4 \psi$$

und endlich für den Ausdruck der Grenze des relativen Fehlers:

$$\varepsilon = \frac{{}^1/_2\, nn'}{on'} = \frac{{}^1/_2\left(\frac{c}{cos.\, {}^1/_2\, \psi} - c\right)}{{}^1/_2\left(\frac{c}{cos.\, {}^1/_2\, \psi} + c\right)} = \frac{1 - cos.\, {}^1/_2 \psi}{1 + cos.\, {}^1/_2 \psi} = tang.^2\, {}^1/_4\, \psi,$$

welche Werthe resp. mit denen übereinstimmen, welche zuerst angegeben sind, wenn man

$$\varphi = {}^1/_4\, \psi = {}^1/_4\, (arc.\, cot. = k)$$

setzt.

Formeln für den Fall, wo das Verhältniß $a : b$ zwischen beliebigen Grenzen liegt.

In dem Vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, daß der Werth der Function $\sqrt{a^2 + b^2}$ zwischen den Grenzen von $\frac{a}{b} = k$ bis $\frac{a}{b} = \infty$, oder von $cot.\, \psi = 0$ bis $cot.\, \psi = k$ genommen werden muß; allein die Schlüsse würden ganz dieselben bleiben, wenn man die Werthe dieser Function zwischen beliebigen Grenzen, z. B. von der geraden Linie on (Fig. 109), für welche der Winkel $aon = \psi'$, $\frac{a}{b} = cotg.\, \psi' = k'$ ist, bis zu der geraden Linie om, für welche der Winkel $aom = \psi$, $\frac{a}{b} = cot.\, \psi = k$ ist, betrachten wollte. Da die gerade Linie $m''n''$, welche das Intervall zwischen der Sehne mn des zu betrachtenden Curvenstückes und der Tangente $m'n'$, welche zu der Sehne parallel ist, immer für die gerade Linie genommen werden muß, deren Gleichung $c = \alpha a + \beta b$ ist; so findet man ohne alle Schwierigkeit:

$$\frac{\alpha}{\beta} = cot.\, {}^1/_2\, (\psi + \psi'),\ \frac{c}{\alpha} = \frac{c\left\{1 + cos.\, {}^1/_2\, (\psi - \psi')\right\}}{2\, cos.\, {}^1/_2\, (\psi + \psi')},$$

folglich:

$$\alpha = \frac{2\, cos.\, {}^1/_2\, (\psi + \psi')}{1 + cos.\, {}^1/_2\, (\psi - \psi')} = \frac{cos.\, {}^1/_2\, (\psi + \psi')}{cos.^2\, {}^1/_4\, (\psi + \psi')},$$

$$\beta = \frac{2\, sin.\, {}^1/_2\, (\psi + \psi')}{1 + cos.\, {}^1/_2\, (\psi - \psi')} = \frac{sin.\, {}^1/_2\, (\psi + \psi')}{cos.^2\, {}^1/_4\, (\psi + \psi')}.$$

Ferner hat man offenbar, wenn p und p' die Durchschnittspuncte der Sehne und des Bogens mn mit der Halbirungslinie op des Winkels $mon = \psi - \psi'$ sind:

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}(op - op')}{\frac{1}{2}(op + op')} = \frac{1 - cos.\, \frac{1}{2}\ (\psi - \psi')}{1 + cos.\, \frac{1}{2}\ (\psi - \psi')} = tang.^2\, \tfrac{1}{4}(\psi - \psi'),$$

so daß die drei Zahlen α, β, ε auch noch in diesem Falle sehr leicht vermittelst der trigonometrischen Tafeln berechnet werden können. Setzt man z. B:

$$tang.\ \psi = \frac{1}{k} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7072,$$

$$tang.\ \psi' = \frac{1}{k'} = \tfrac{1}{10}\sqrt{10} = 0{,}316228,$$

so findet man:

$$\alpha = 0{,}901042,\ \beta = 0{,}4477,\ \varepsilon = 0{,}0059934 < \tfrac{1}{166}.$$

Linearer Näherungsausdruck der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - b^2}$ für beliebige Grenzen von a und b.

Als eine zweite einfache Anwendung des zuletzt aufgestellten Princips wollen wir den linearen Näherungswerth der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - b^2}$ suchen. Setzt man daher:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = c = \alpha a + \beta b,$$

und wird angenommen, daß es darauf ankomme, die unbestimmten Größen α und β für das Intervall von $\frac{a}{b} = k = cot.\ \psi$ bis $\frac{a}{b} = k' = cot.\ \psi'$ zu bestimmen; so hat man die gleichseitige Hyperbel cnm (Fig. 110), welche durch die Gleichung $a^2 - b^2 = c^2$ ausgedrückt wird, und $oc = c$ zur halben reellen Axe hat, oder vielmehr den Theil mpn dieser Hyperbel zu betrachten, welcher in dem Winkel aob der positiven a, b zwischen der geraden Linie on, welche mit der Axe oa den Winkel $noc = \psi'$ bildet, und der geraden Linie om, welche mit derselben Axe den Winkel $moc = \psi$ bildet, liegt. Nun besteht aber nach dem Vorhergehenden die ganze Schwierigkeit der Aufgabe darin, die Gleichung der geraden Linie $m''n''$ zu finden, welche das Intervall zwischen der Sehne mn der Hyperbel und der dazu parallelen nächsten Tangente $m'n'$ in zwei gleiche Theile theilt; denn diese Gleichung muß mit der Gleichung $c = \alpha a + \beta b$ identisch sein, und die Grenze des Fehlers wird durch das Verhältniß:

$$\frac{n\,n''}{o\,n''} = \frac{\eta\,\eta''}{o\,\eta''} = \frac{o\,\eta - o\,\eta'}{o\,\eta + o\,\eta'}$$

ausgedrückt, wo η, η', η'' resp. die Durchschnittspuncte der Axe oa mit den hinreichend verlängerten geraden Linien mn, $m'n'$, $m''n''$ sind.

Es seien a', b' die Coordinaten des Punctes m und a'', b'' die des Punctes n, so ist die Gleichung der unbegrenzten geraden Linie mn:

$$b - b' = \frac{b' - b''}{a' - a''}\,(a - a'),$$

oder:

$$b = \frac{b' - b''}{a' - b''}\, a + b' - a' \frac{b' - b''}{a' - a''}.$$

Ferner hat man zur Bestimmung von a', b', a'', b'' als Functionen von ψ, ψ' und c die Relationen:

$$\frac{a'}{b'} = cot.\, \psi,\ \frac{a''}{b''} = cot.\, \psi',\ a'^2 - b'^2 = c^2,\ a''^2 - b''^2 = c^2,$$

woraus folgt:

$$\frac{b' - b''}{a' - a''} = \frac{a' + a''}{b' + b''} =$$

$$\frac{\sqrt{1 - tang.^2 \psi} + \sqrt{1 - tang.^2 \psi'}}{tang.\, \psi \sqrt{1 - tang.^2 \psi'} + tang.\, \psi' \sqrt{1 - tang.^2 \psi}}.$$

Wenn man bemerkt, daß in diesem Ausdrucke die Größen $tang.\, \psi$ und $tang.\, \psi'$ die Einheit nicht überschreiten können, so kann man der Einfachheit wegen setzen:

$$tang.\, \psi = cos.\, \omega,\ tang.\, \psi' = cos.\, \omega',$$

woraus folgt:

$$\frac{b' - b''}{a' - a''} = \frac{sin.\, \omega + sin.\, \omega'}{sin.\, (\omega + \omega')}.$$

Ebenso findet man in denselben Voraussetzungen:

$$b' - a' \frac{b' - b''}{a' - a''} = - c\, \frac{1 - cos.\, (\omega + \omega')}{sin.\, (\omega + \omega')}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich auf eine noch einfachere Form bringen, wenn man:

$$\omega + \omega' = 2\, \sigma,\ \ \omega' - \omega = 2\delta$$

setzt; denn alsdann erhält man:

$$\frac{b' - b''}{a' - a''} = \frac{sin.\, \omega + sin.\, \omega'}{sin.\, (\omega + \omega')} = \frac{cos.\, \delta}{cos.\, \sigma},$$

$$b' - a' \frac{b' - b''}{a' - a''} = - c\, \frac{1 - cos.\, (\omega + \omega')}{sin.\, (\omega + \omega')} = - tang.\, \sigma$$

und die Gleichung der Sehne mn wird:

$$b = \frac{cos.\, \delta}{cos.\, \sigma}\, a - tang.\, \sigma \cdot c.$$

Es ist nun noch die Gleichung der zu dieser Sehne parallelen Tangente $m'n'$ zu finden. Um diese Gleichung zu erhalten, braucht man in der vorhergehenden offenbar nur $\psi' = \psi$, $\omega' = \omega$, und folglich $\delta = 0$ zu setzen, oder den Punct m mit dem Puncte n zusammenfallen zu lassen, wo σ alsdann einen unbekannten Werth bekommt, welchen wir mit σ' bezeichnen wollen. Die Gleichung der Tangente $m'n'$ ist demnach:

$$b = \frac{1}{cos.\,\sigma'}\,a - tang.\,\sigma'\,.\,b,$$

und zur Bestimmung von σ' hat man:

$$\frac{1}{cos.\,\sigma'} = \frac{cos.\,\delta}{cos.\,\sigma} \text{ oder } cos.\,\sigma' = \frac{cos.\,\sigma}{cos.\,\delta},$$

weil die Tangente zu der Sehne mn parallel sein muß.

Die Gleichung der äquidistanten Parallele $m''n''$ ist folglich:

$$b = \frac{cos.\,\delta}{cos.\,\sigma}\,a - \frac{c}{2}\,(tang.\,\sigma + tang.\,\sigma'),$$

und da sie mit der Gleichung $c = \alpha a + \beta b$ identisch sein muß, so erhält man endlich:

$$\alpha = \frac{2\,cos.\,\delta}{cos.\,\sigma\,(tang.\,\sigma + \sigma')} = \frac{2\,cos.\,\delta\;cos.\,\sigma'}{sin.\,(\sigma + \sigma')} = \frac{2\,cos.\,\sigma}{sin.\,(\sigma + \sigma')},$$

$$\beta = \frac{2}{tang.\,\sigma + tang.\,\sigma'} = -\frac{2\,cos.\,\sigma\;cos.\,\sigma'}{sin.\,(\sigma + \sigma')} = -\frac{2\,cos.^2\,\sigma}{cos.\,\delta\,sin.\,(\sigma + \sigma')}.$$

Was die Grenze ε der relativen Fehler anlangt, so findet man sie, wenn man bemerkt, daß die obigen Gleichungen der geraden Linien mn und $m'n'$ für $b = 0$ geben:

$$o\eta = c\,\frac{tang.\,\sigma\;cos.\,\sigma}{cos.\,\delta} = c\,\frac{sin.\,\sigma}{cos.\,\delta},\quad o\eta' = c\,sin.\,\sigma',$$

und folglich:

$$\varepsilon = \frac{o\eta - o\eta'}{o\eta + o\eta'} = \frac{sin.\,\sigma - sin.\,\sigma'\;cos.\,\delta}{sin.\,\sigma + sin.\,\sigma'\;cos.\,\delta} = \frac{sin.\,\sigma - tang.\,\sigma'\;cos.\,\sigma}{sin.\,\sigma + tang.\,\sigma'\;cos.\,\sigma}$$
$$= \frac{sin.\,(\sigma - \sigma')}{sin.\,(\sigma + \sigma')}.$$

Bei der numerischen Rechnung zu befolgender Gang.

Alle diese Größen lassen sich, wie man sieht, leicht vermittelst der trigonometrischen Tafeln berechnen. Da k' und k resp. die obere und untere Grenze des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ sind, so daß man $\frac{1}{k'} < \frac{1}{k} < 1$, oder höchstens $k = 1$ hat; so berechnet man die Winkel ω und ω' vermittelst der Relationen:

$$\omega = arc.\left(cos. = \frac{1}{k}\right),\quad \omega' = arc.\left(cos. = \frac{1}{k'}\right),$$

oder:

$$log.\,cos.\,\omega = 10 - log.\,k,\quad log.\,cos.\,\omega' = 10 - log.\,k',$$

worauf man leicht die Winkel:

$$\sigma = \frac{\omega' + \omega}{2},\quad \delta = \frac{\omega' - \omega}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\cos\delta}{\cos\sigma\,(tg\,\sigma + tg\,\sigma')}$$

und folglich den Winkel σ' durch die Relation:

$$cos.\ \sigma' = \frac{cos.\ \sigma}{cos.\ \delta},$$

oder:

$$log.\ cos.\ \sigma' = 10 + log.\ cos.\ \sigma - log.\ cos.\ \delta$$

bestimmt. Kennt man σ, σ' und δ, so wie die Logarithmen von $cos.\ \sigma$ und $cos.\ \delta$, so braucht man nur noch die Logarithmen von $sin.(\sigma + \sigma')$, $sin.(\sigma - \sigma')$ in den Tafeln zu suchen, um durch bloße Additionen oder Subtractionen die von α, β und ε zu erhalten.

Specielle Beispiele und Begriffsbestimmung der Approximationsgrenzen.

Um von den Grenzen, zwischen welchen die Function $\alpha a + \beta b$ mit Vortheil für die Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - b^2}$ substituirt werden kann, einen genauen Begriff zu erhalten, wollen wir zunächst annehmen, daß $k = 1$ und k' irgend eine größere Zahl als die Einheit sei, d. h. wir wollen annehmen, daß die Wurzelgröße von $a = b$, wo sie verschwindet, bis $a = \infty \cdot b$, wo sie sich auf a reducirt, genommen werden soll. Da nun in dieser Voraussetzung

$$\omega = 0,\ \sigma = {}^1/_2\,\omega',\ \delta = {}^1/_2\,\omega',\ cos.\ \sigma' = 1,\ \sigma' = 0,\ \varepsilon = 1$$

ist, so sieht man, daß die begangenen Fehler dem Werth der Wurzelgröße selbst gleich werden könnten, wenn $a = b$, oder $b = 0$ wäre, was unzulässig ist; aber wie nahe k der Einheit auch kommen mag, wofern es nur der Größe k' noch näher kommt; so kann man doch immer einen hinreichend genäherten linearen Ausdruck der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - b^2}$ finden.

Wir wollen z. B. $k = 1{,}01$, $k' = 1{,}02$ setzen, oder annehmen, daß der Werth der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - b^2}$ von $a = 1{,}01 \cdot b$ bis $a = 1{,}02 \cdot b$ genommen werden solle; so findet man:

$$\delta = \frac{\omega' - \omega}{2} = 3^\circ\, 17'\, 50'',607,\ \sigma = 9^\circ\, 43'\, 5''347,\ \sigma = 9^\circ\, 8'\, 43''65$$

$$\text{und } \varepsilon = 0{,}0309,$$

so daß der begangene Fehler höchstens ${}^1/_{32}$ von $\sqrt{a^2 - b^2}$ beträgt.

Die Werthe von α und β sind in denselben Voraussetzungen: $\alpha = 6{,}09718$, $\beta = 6{,}0197$, und man hat folglich in dem Intervalle von $a = 1{,}01 \cdot b$ bis $a = 1{,}02 \cdot b$ wenigstens bis auf ${}^1/_{32}$ genau:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 6{,}097 \cdot a - 6{,}02 \cdot b.$$

Je mehr sich alsdann die obere Grenze k des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ von der Einheit entfernt, desto mehr kann sich auch die untere Grenze davon entfernen und sich dem Unendlichen nähern, ohne daß man bei der linearen Approximation der Wurzelgröße grobe Fehler zu befürchten hat. Setzt man z. B. $k' = \infty$ oder $cos.\ \omega' = 0$, und $k = 1{,}1$, so hat man:

$$\omega' = 90^\circ,\ \omega = 24^\circ\, 37'\, 28'',\ \sigma = 57^\circ\, 18'\, 44'',\ \cos.\sigma' = \cot.\sigma,$$
$$\sigma' = 50^\circ\, 5',$$

folglich:

$$\varepsilon = 0{,}1319,\ \alpha = 1{,}1319 = 1 - \varepsilon,\ \beta = 0{,}72636.$$

Es ist also in der ganzen Ausdehnung von $b = 0$ bis ungefähr $b = 0{,}91 \cdot a$ wenigstens bis auf $^1/_7$ genau:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 1{,}1319 \cdot a - 0{,}72636 \cdot b.$$

Es würde nutzlos sein, diese Untersuchung noch weiter fortzusetzen, weil die Wurzelgrößen von der Form $\sqrt{a^2 - b^2}$ bei den Anwendungen der Mechanik auf Maschinen selten vorkommen.

Lineare Approximation der Wurzelgrößen von der Form $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Dasselbe kann man von der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sagen, welche die Resultante dreier auf einander senkrechter Kräfte im Raume ausdrückt. Wenn man aber die Grenzen kennt, zwischen welchen die Verhältnisse der Componenten a, b, c oder ihrer partiellen Resultanten $\sqrt{a^2 + b^2}$, 2c. bleiben; so kann man diesen Fall immer auf den zuerst betrachteten zurückführen. Kennt man z. B. die Grenzen, zwischen welchen die Verhältnisse $\frac{a}{\sqrt{b + c^2}}$ und $\frac{b}{c}$ liegen, so hat man successive:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \alpha a + \beta \sqrt{b^2 + c^2} = \alpha a + \beta(\alpha' b + \beta' c)$$
$$= \alpha a + \beta\alpha' b + \beta\beta' c,$$

wo α, β, α', β' Zahlen sind, welche auf die vorhin angegebene Weise erhalten werden; aber es können sich hier die einzelnen Fehler für jede Operation addiren, und wenn man mit ϑ, ϑ' die Grenzen der bei der ersten und zweiten Operation begangenen Fehler bezeichnet; so wird der größte absolute Fehler, welchen man begehen kann, offenbar ausgedrückt durch:

$$\vartheta \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \beta\vartheta' \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\left(\vartheta + \beta\vartheta' \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}\right),$$

welche Größe kleiner ist, als $(\vartheta + \beta\vartheta')\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Wenn man bloß weiß, daß $a^2 > b^2 + c^2$ und $b^2 > c^2$ ist, so hat man:

$$\alpha = \alpha' = 0{,}96,\ \beta = \beta' = 0{,}4,\ \vartheta = \vartheta' = 0{,}03954,$$

und die Grenze des zu befürchtenden Fehlers ist, wenn man bemerkt, daß hier $a^2 + b^2 + c^2 > 2(b^2 + c^2)$ ist, kleiner als die Größe:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,(\vartheta + {}^1/_2 \sqrt{2\beta\vartheta'}) = 0{,}0507\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Zweite Note.

Ueber das Totalmoment und den mittleren Hebelarm der Widerstände in der vier- und dreikantigen Schraube und in den Frictionskegeln.

Bestimmung des Totalmomentes der Widerstände in der Voraussetzung, daß die Last nach Verhältniß der Größe der Projection der Schraubenflächenelemente auf eine auf der Axe der Schraube senkrechte Ebene vertheilt ist.

Die in dieser Note zu behandelnde Aufgabe besteht in der Bestimmung der Summe der Momente der Reibung auf den verschiedenen Elementen der Oberfläche des Schraubengewindes, und wir wollen uns bei der Auflösung dieser Aufgabe auf die Betrachtungen in §. 273 stützen, indem wir als Thatsache annehmen, daß die parallel zu der Axe der Schraube wirkende Last auf die Elemente der Oberfläche des Schraubengewindes nach Verhältniß der Größe ihrer Projection auf eine auf der Axe der Schraube senkrechte Ebene vertheilt sei, und hierauf wollen wir endlich eine Auflösung derselben Aufgabe mittheilen, welche auf Voraussetzungen beruht, die mehr mit der physischen Natur der Körper übereinzustimmen scheinen.

Größerer Allgemeinheit wegen wollen wir die dreikantige Schraube betrachten, womit wir uns in §§. 189, 192, 273 und folg. beschäftigt haben, indem wir alle dortigen Annahmen und Benennungen beibehalten, und außerdem mit

r' den größten Halbmesser des Schraubengewindes, mit

r'' den kleinsten Halbmesser desselben, mit

dQ den Theil der Gesammtlast Q, welcher auf das Schraubenflächenelement wirkt, dessen horizontale Projection der Kreisring von dem mittlern Halbmesser r, von der Breite dr und von der Fläche $2\pi r dr$, und endlich mit

dp den Theil der horizontalen Kraft p bezeichnen, welche der Last Q und der durch diese auf dem betrachteten Elemente hervorgerufenen Reibung direct das Gleichgewicht hält; so ist einerseits nach den obigen Voraussetzungen einleuchtend, daß das Lastelement dQ ausgedrückt wird durch:

$$dQ = \frac{2\pi r dr}{\pi (r'^2 - r''^2)} \; Q = \frac{2 r dr}{r'^2 - r''^2} \; Q,$$

und andererseits, daß das entsprechende Kraftelement dp durch die letzte der Relationen in §. 273 ausgedrückt wird, wenn man darin dQ und dp resp. für Q und p setzt. Man hat daher:

$$dp = dQ \frac{h \sin.b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} + 2\pi r f \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{2\pi r \sin.b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} - f h \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}},$$

und folglich wird das Totalmoment der Kräfte dp, deren mittlerer Hebelarm ϱ' ist, ausgedrückt durch:

$$p\varrho = \int_{r''}^{r'} r dp =$$

$$\frac{2Q}{r'^2 - r''^2} \int_{r''}^{r'} \frac{h \sin.b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} + 2\pi r f \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{2\pi r \sin.b \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} - f h \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}\, r^2\, dr.$$

Diese letzte Formel läßt sich leicht auf elliptische Transcendenten zurückführen und ist folglich nicht unter endlicher Form zu integriren, und man würde durch Aufstellung des allgemeinen Ausdruckes derselben wegen der Zusammengesetztheit desselben auch wenig gewonnen haben. Man muß sich daher hier mit einer bloßen Annäherung begnügen. Wenn man aber den unter dem Integrationszeichen stehenden Bruch auf die Form:

$$\frac{\cot.a \sqrt{1 + \cot.^2 a} + \frac{f}{\sin.b} \sqrt{1 + \sin.^2 b \cot.^2 a}}{\sqrt{1 + \cot.^2 a} - \frac{f}{\sin.b} \cot.a \sqrt{1 + \sin.^2 b \cot.^2 a}}$$

bringt, dann setzt:

$$\frac{f}{\sin.b} = f', \quad \cot.a = \frac{h}{2\pi r} = z, \quad \sin.b = b', \quad \cos.b = b'',$$

und endlich nach den steigenden Potenzen der Größe z, welche immer kleiner als die Einheit ist, in eine Reihe entwickelt; so erhält man:

$$\frac{z\sqrt{1+z^2} + f'\sqrt{1 + b'^2 z^2}}{\sqrt{1+z^2} - f'z\sqrt{1 + b'^2 z^2}}$$

$$= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + \text{etc.},$$

worin:

$$A_0 = f_1', \; A_2 = f'(1 + f'^2) - \tfrac{1}{2} f' b''^2,$$
$$A_1 = 1 + f'^2, \; A_3 = f'^2 (1 + f'^2) - f'^2 b''^2,$$
$$A_4 = f'^3 (1 + f'^2) - \tfrac{1}{8} f' b''^4 - \tfrac{3}{2} f'^2 b''^2 \text{ etc.}$$
$$A_5 = f'^4 (1 + f'^2) - 2 f'^4 < b''^2 \text{ etc.}$$

ist, und welche Reihe so schnell convergirt, daß man in allen in der Praxis vorkommenden Fällen bloß die drei ersten Glieder in Betracht zu ziehen braucht. Substituirt man also diese Reihe für den entsprechenden Bruch in das obige Integral und integrirt dann von r' bis r'', nachdem man ebenfalls für z seinen Werth $\frac{h}{2\pi r}$ substituirt hat; so erhält man endlich:

$$p\varrho = \int_{r''}^{r'} r dp = {}^2/_3 \frac{r'^2 + r'r'' + r''^2}{r' + r''} Q A_0 + \frac{h}{2\pi} Q A_1 +$$

$$\frac{h}{2\pi} \frac{h}{\pi(r' + r'')} Q A_2 + {}^1/_2 \frac{h}{2\pi} \frac{h^2}{\pi^2(r'^2 - r''^2)} \log. \frac{r'}{r} A_3 + \text{rc.},$$

von welcher Reihe man ebenfalls nur die drei ersten Glieder zu nehmen braucht, und welche für $p\varrho$ Werthe giebt, die im Allgemeinen wenig von denen verschieden sind, welche sich unmittelbar aus der Formel in §. 273 ergeben.

Besonderer Fall der Schraube mit vierkantigem Gewinde.

Wir wollen z. B. b' oder $\sin. b = 1$ setzen, was sich auf den Fall der vierkantigen Schraube bezieht, so erhält man die Werthe:

$$f' = f,\ A_0 = f,\ A_1 = 1 + f^2,\ A_2 = f(1 + f^2),\ A_3 = f^2(1 + f^2),$$
$$A_4 = f^3(1 + f^2),\ \text{rc.}$$

welche schnell abnehmen und deren Gesetz in die Augen fällt. Man hat folglich:

$$p\varrho = \int_{r''}^{r'} r dp$$

$$= {}^2/_3 \frac{(r'^2 + r'r'' + r''^2)}{r' + r''} fQ + (1+f^2)\frac{h}{2\pi} Q + f(1+f^2)\frac{h^2}{2\pi^2(r' + r'')}$$
$$+ f^2(1+f^2)\frac{h^2}{4\pi^3(r'^2 - r''^2)} \log. \frac{r'}{r''} + \text{rc.}$$

Man sieht aber leicht ein, daß sich das Integral in dem betrachteten besondern Falle unter endlicher Form erhalten läßt; denn durch die Summation der letzten Glieder der obigen Reihe, oder durch die directe Betrachtung der rationalen Form, welche alsdann dieses Integral annimmt, erhält man:

$$\int_{r''}^{r'} r dp$$

$$= {}^2/_3 \frac{r'^2 + r'r'' + r''^2}{r' + r''} fQ + (1 + f^2)\frac{h}{2\pi} Q + f(1+f^2)\frac{h^2}{2\pi^2(r' + r'')}$$
$$+ f^2(1 + f^2)\frac{h^3}{4\pi^3(r'^2 - r''^2)} \log. \left(\frac{2\pi r' - fh}{2\pi r'' - fh}\right) Q.$$

Wegen $\sin. b = 1$ (§. 272) ist in der That hier:

$$\int r dp = \frac{2Q}{r'^2 - r''^2} \int \frac{hr^2 + 2\pi f r^3}{2\pi r - fh} dr =$$

$$\frac{2Q}{r'^2 - r''^2} \int \left\{ fr^2 + (1+f)\frac{h}{2\pi} r + f\frac{(1+f^2)h^2}{4\pi^2} + \frac{f^2(1+f^2)h^3}{4\pi^2(2\pi r - fh)} \right\} dr,$$

welches Integral, wenn es von $r = r''$ bis $r = r'$ genommen wird, offenbar das vorhergehende Resultat wiedergiebt.

Besonderer Fall der Frictionskegel.

Betrachtet man ferner den Fall, wo $h=0$ ist, und welcher sich auf die Frictionskegel bezieht (§. 276); so erhält man augenblicklich:

$$p\varrho = {}^2/_3 \frac{r'^2 + r'r'' + r''^2}{r' + r''} fQ = {}^2/_3 \frac{r'^2 + r'r'' + r''^2}{r' + r''} \frac{fQ}{sin.b},$$

und da in den gegenwärtigen Voraussetzungen auch:

$$p = \int \frac{dQ}{sin.b} = \frac{2fQ}{r'^2 - r''^2} \int \frac{rdr}{sin.b} = \frac{fQ}{sin.b}$$

ist (§. 275), so erhält man für den Werth des mittlern Hebelarmes der Reibung den Ausdruck:

$$\varrho = \frac{(r'^2 + r'r'' + r''^2)}{r' + r''},$$

welcher mit dem für den mittleren Hebelarm der sich reibenden kreisförmigen Ringe (§. 222) übereinstimmt.

Was den Werth des mittleren Hebelarmes ϱ der Reibung in dem allgemeinen Falle der drei- oder vierkantigen Schraube anlangt, so erhielte man denselben auch, wenn man zunächst den Werth von p durch die Relation:

$$p = \frac{2Q}{r'^2 - r''^2} \int_{r''}^{r'} \Big((A_0 + A_1 \frac{h}{2\pi r} + A_2 \frac{h^2}{4\pi^2 r^2}$$
$$+ A_3 \frac{h^3}{8\pi^3 r^3} + \text{ꝛc.} \Big) rdr$$

berechnete, und dann durch denselben den obigen Werth von $p\varrho$ dividirte; allein diese Rechnungen würden ganz ohne alles Interesse sein.

Kritische Bemerkungen über die Voraussetzung, worauf die vorhergehende Auflösung beruht.

In der That beruhen sie auf einer Hypothese, nämlich, daß die Last Q gleichförmig auf die Fläche der Horizontalprojection der Schraubenfläche vertheilt sei, welche Voraussetzung viel zu precär ist, als daß sie bei den Anwendungen zu genauen Resultaten führen könnte, und sie scheint sogar nicht einmal auf plausibeln physikalischen Betrachtungen zu beruhen. Beim ersten Anblicke scheint die fragliche Hypothese für den Fall sich reibender kreisförmiger Ringe (§. 222) ziemlich natürlich zu sein; allein aus einer gleichförmigen Vertheilung des Druckes auf die Elemente der Berührungsflächen scheint nothwendig auch zu folgen, daß die Intensität der Reibung der Ausdehnung dieser Elemente proportional sei, und daß folglich ein desto schnelleres Abnutzen stattfinde, je weiter diese Elemente vom Drehungsmittelpuncte entfernt sind, oder je größere Wege sie durchlaufen. Dieses ungleiche Abnutzen ist aber mit der Hypothese der gleichförmigen Vertheilung des Druckes unverträglich, wofern man nicht annimmt, daß sich die nahe an der Axe liegenden Theile allmählig erniedrigen, so daß sich fortwährend eine gleiche Berührung oder Zusammendrückung von dem Mittelpuncte gegen den Umfang zu wieder herstellt, was im Allgemeinen nicht für jede

Art von Körpern, oder für alle Arten der Wirkung der Kraft, welche die Zusammendrückung in dem zu der Axe parallelen Sinne bewirkt, zulässig ist. Vielmehr ist im Gegentheil anzunehmen, daß in den meisten Fällen der Druck und der Grad der gegenseitigen Annäherung der sich an einander reibenden Flächen gegen den Mittelpunct zu größer ist, als am Umfange, so daß der mittlere Hebelarm der Reibung, und folglich ihr Moment auch kleiner sind, als nach den aus der in Rede stehenden Hypothese abgeleiteten Formeln (§. 222). Da man aber endlich genöthigt ist, in den Rechnungen eine Menge von Umständen unberücksichtigt zu lassen, welche den Einfluß der passiven Widerstände mehr oder weniger zu vergrößern streben, so kann es bei ebenen Flächen mit keinem Nachtheile verbunden sein, wenn man die Voraussetzung annimmt, welche für das Moment dieser Widerstände den größten Werth giebt.

Uebrigens sieht man leicht ein, daß das Gesetz der Vertheilung der Druckkräfte wesentlich von der physischen Constitution und der Form der Körper, so wie von der Wirkungsart der Kräfte abhängt, so daß man weder über die Natur dieses Gesetzes, noch über das Gesetz der Proportionalität der Reibung zu dem Drucke für die verschiedenen Elemente der einander berührenden Flächen, welches bis jetzt nur für die in einer unveränderlichen Richtung über einander hingleitenden Körper dargethan ist, zum Voraus etwas Bestimmtes aussagen kann. Durch die von Coulomb über die Reibung der Spitzen der Zapfen angestellten Versuche kann man zu der Entdeckung dieser Gesetze gelangen, deren Wichtigkeit und practischer Nutzen nicht in Zweifel gezogen werden kann.

Einwurf gegen die in Rede stehende Hypothese.

Auch wenn man als wahr annimmt, daß die Druckkräfte auf gleiche Elemente der reibenden Flächen einander gleich sind, was auf die Annahme hinausläuft, daß der Druck auf die Einheit dieser Flächen constant ist; so ist man dadurch doch noch nicht berechtigt, für die dreikantige Schraube den Druck als der Größe der Horizontalprojection jedes Flächenelementes proportional anzunehmen, wie wir im Vorhergehenden gethan haben. Denn da sich die Neigung dieser Elemente mit ihrer Lage gegen die Axe der Schraube ändert, so heißt dieses im Grunde nichts anders, als den Normaldruck auf die Flächeneinheit dieser Elemente verschieden annehmen, und zwar, daß dieser Druck desto kleiner ist, je geringer die Neigung jedes Elementes ist, oder je mehr es sich der verticalen Richtung der Axe der Schraube nähert. Diese Annahme scheint aber nach den obigen Betrachtungen unzulässig zu sein, wornach vielmehr die Druckkräfte auf die der Axe der Schraube näher liegenden Theile, welche sich nicht so schnell abnutzen, größer sein müßten, als die auf die weiter von der Axe entfernten Elemente wirkende Druckkräfte.

Allgemeine Auflösung in dieser neuen Hypothese.

Um unter der Voraussetzung eines constanten Druckes auf die Flächeneinheit den Werth der Kraft p zu finden, welche der Reibung und der Last Q der Schraube in der allgemeinsten Voraussetzung das Gleichgewicht hält, wollen wir wieder wie in §. 278 verfahren, und, indem wir diesen constanten Druck für die verschiedenen Elemente der

Schraubenfläche mit n bezeichnen, bemerken, daß die Fläche des Elementes, dessen Horizontalprojection der Kreisring $2\pi r dr$ von dem Halbmesser r und der Breite dr ausgedrückt wird durch:

$$\frac{2\pi r dr}{sin.\,\varphi},$$

weil φ der constante Neigungswinkel dieses Elementes gegen die Axe der Schraube ist. Der Gesammtnormaldruck dN auf dieses Element wird folglich ausgedrückt durch:

$$dN \frac{2\pi r dr}{sin.\,\varphi},$$

und wenn man diesen Werth, sowie dp, dQ für N, p und Q in die Gleichungen des angeführten §. 278 substituirt; so erhält man:

$$dQ = n\left(2\pi r dr + \frac{2f\pi\, cos.\, b\, r dr}{sin.\,\varphi} - \frac{2f\pi\, cos.\, a r dr}{sin.\,\varphi}\right)$$

$$dp = n\left(2\pi \frac{sin.\,\psi\, r dr}{sin.\,\varphi} + 2f\pi \frac{sin.\, a}{sin.\,\varphi}\, r dr\right),$$

oder wenn man für $sin.\, a$, $cos.\, a$, $sin.\,\varphi$ ihre Werthe als Functionen von r substituirt (§. 273):

$$r dp = n\left(h r dr + \frac{2f\pi}{sin.\, b}\, \frac{\sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, r^2 d r\right).$$

Integrirt man diese verschiedenen Ausdrücke von $r = r''$ bis $r = r'$, indem man n als constant betrachtet, so giebt der erste den Werth von n, und wenn man alsdann diesen Werth in die beiden andern Ausdrücke substituirt, so erhält man den Werth von p und den des Gesammtmomentes $p\varrho = \int r dp$ der horizontalen Kräfte p.

Besonderer Fall der Frictionskegel.

Betrachtet man zunächst den besondern Fall der Frictionskegel, so muß man in den obigen Gleichungen $h = 0$ setzen und sie geben alsdann durch Integration:

$$n = \frac{Q}{\pi\,(r'^2 - r''^2)\,(1 + f\, cot.\, b)},\quad p = \frac{fQ}{sin.\, b + f\, cos.\, b},$$

$$\int_{r'}^{r''} r dp = p\varrho = {}^2/_3\, \frac{r'^2 + r'' r' + r''^2}{r' + r''} \cdot \frac{fQ}{sin.\, b + f\, cos.\, b}.$$

Der Werth von p stimmt, wie man sieht, mit dem in §. 276 für denselben Fall erhaltenen überein, und die Vergleichung dieses Werthes mit dem von $p\varrho$ zeigt, daß der mittlere Hebelarm der Reibung hier nach der Formel:

$$\varrho = {}^2/_3\, \frac{r'^2 + r' r'' + r''^2}{r' + r''},$$

welche ebenen Kreisringen entspricht (§. 222), berechnet werden muß. Endlich stimmt dieser Ausdruck von ϱ auch mit dem überein, welcher im Vorhergehenden in der Voraussetzung einer gleichförmigen Vertheilung der Last Q auf die Horizontalprojection der reibenden Kegelflächen erhalten ist, was vorher einzusehen war, weil die Neigung der Erzeugungslinien dieser Kegel constant ist, und folglich die Druckkräfte für die Flächeneinheit der reibenden Theile und ihrer Projectionen auf eine, auf der Axe der Schraube senkrechte Ebene auch in einem constanten Verhältnisse stehen müssen.

Besonderer Fall der vierkantigen Schraube.

Betrachten wir noch den einfachen Fall der vierkantigen Schraube, für welche $b = 90^\circ$, oder $cot. b = 0$, $sin. b = 1$ ist, so erhält man, wenn man die Werthe von dQ, dp, rdp, von $r = r''$ bis $r = r''$ integrirt:

$$n = \frac{Q}{\pi(r'^2 - r''^2) - fh(r' - r'')}, \quad p = Q\frac{h + f\pi(r' + r'')}{\pi(r' + r'') - fh},$$

$$\int_{r''}^{r'} rdp = p\varrho = Q\frac{\frac{1}{2}h(r' + r'') + \frac{2}{3}f\pi(r'^2 + r'r'' + r''^2)}{\pi(r' + r'') - fh},$$

und wenn man:

$$\tfrac{1}{2}(r' + r'') = r_1, \quad \tfrac{2}{3}\frac{(r'^2 + r'r'' + r''^2)}{r' + r''} = \varrho_1$$

setzt, so nehmen die Ausdrücke von p und $p\varrho$ die sehr einfache Form an:

$$p = Q\frac{h + 2f\pi r_1}{2\pi r_1 - fh}, \quad p\varrho = Q\frac{h + 2f\pi\varrho_1}{2\pi r_1 - fh},$$

woraus sich für den Ausdruck des mittleren Hebelarmes ϱ der Kräfte dp ergiebt:

$$\varrho = \frac{h + 2f\pi\varrho}{h + 2f\pi\varrho_1} r_1,$$

welcher Werth nahezu mit dem von r_1 übereinstimmt, wenn r_1 selbst sehr wenig von ϱ_1 verschieden ist.

Setzt man z. B. $r' - r'' < \frac{1}{3} r_1$ oder $r' < \frac{7}{5} r''$, so hat man $\varrho_1 = r_1$, wenigstens bis auf $\frac{1}{100}$ genau, wodurch das für die vierkantige Schraube angegebene Rechnungsverfahren (§. 222) gerechtfertigt wird, weil hier außerdem der Werth von p genau der ist, welcher dem mittleren Schraubenfaden von dem Halbmesser $r_1 = \frac{1}{2}(r' + r'')$ entspricht.

Bestimmung der Integrale für den allgemeinen Fall der dreikantigen Schraube durch die Betrachtungen in der vorhergehenden Note.

Wir wollen nun wieder den allgemeinen Fall der dreikantigen Schraube betrachten, so hat man zunächst zur Berechnung des Druckes n auf die Flächeneinheit des Schraubengewindes die Formel:

$$Q = n\Big\{\pi(r'^2 - r''^2) + f\cot. b\int_{r'}^{r''}\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}\,dr$$
$$- \frac{fh}{\sin. b}\int_{r'}^{r''}\frac{\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\,dr\Big\},$$

und dann zur Bestimmung von p und $p\varrho$ die Formeln:

$$p = n \left\{ h(r' - r'') + \frac{2f\pi}{sin.\, b} \int_{r'}^{r''} \frac{\sqrt{h^2 \, sin.^2 b + 4\pi r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} \, rdr \right\},$$

$$p\varrho = \int_{r'}^{r''} rdp = n \left\{ {}^1/_2 \, h(r'^2 - r''^2) \right.$$

$$\left. + \frac{2f\pi}{sin.\, b} \int_{r'}^{r''} \frac{\sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} \, r^2\, dr \right\}.$$

Es bleibt nun noch der Werth der in diesen verschiedenen Ausdrücken vorkommenden Integrale zu finden übrig. Nun hat man aber unmittelbar:

$$\int \sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}\, dr = {}^1/_2\, r \sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}$$

$$- \pi \log. \left(2\pi r + \sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}\right).$$

Setzt man ferner $h^2 + 4\pi^2 r^2 = h^2\, cos.^2 b x^2$, so kommt:

$$\int \frac{\sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, rdr = \frac{h^2\, cos.^2 b}{4\pi^2} \int dx \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \frac{h^2\, cos.^2 b}{8\pi^2} \left\{ x \sqrt{x^2 - 1} - \log. (x + \sqrt{x^2 - 1}) \right\},$$

und folglich:

$$\int \frac{\sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, rdr$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} \sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}$$

$$- \frac{h^2 cos.^2 b}{8\pi^2} \log. \left\{ \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2} + \sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2} \right\},$$

wo dieses und das vorhergehende Integral von $r = r''$ bis $r = r'$ genommen werden muß, und der vorkommende Logarithmus ein hyperbolischer ist.

Was die beiden andern Integrale:

$$\int \frac{\sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, dr, \quad \int \frac{\sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, r^2 dr$$

anlangt, so überzeugt man sich leicht, daß sie von elliptischen Transcendenten abhängen, und nicht unter gewöhnlicher endlicher Form erhalten werden können, so daß man sich mit einer näherungsweisen Berechnung derselben begnügen muß.

Zu diesem letzten Zwecke bemerke man, daß man wegen $\frac{h}{2\pi r} = cot.\, a$ hat:

$$dr = \frac{h}{2\pi}\frac{da}{cos.^2 a},$$

$$\frac{\sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} = sin.\, b \sqrt{1 + cot.^2 b\, sin.^2 a}\,,$$

und wenn man nach der vorhergehenden Note:

$$\sqrt{1 + cot.^2 b\, sin.^2 a} = \alpha + \beta\, cot.\, b\, sin.\, a$$

setzt, so kommt:

$$\int \frac{\sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, dr$$

$$= \alpha \frac{h}{2\pi}\, sin.\, b \int \frac{da}{cos.^2 a} + \beta \frac{h}{2\pi}\, cos.\, b \int \frac{sin.\, a da}{cos.\, a}$$

$$= \frac{h}{2\pi}\left(\alpha\, sin.\, b\, tang.\, a + \beta \frac{cos. b}{cos. a}\right),$$

$$\int \frac{\sqrt{h^2 sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, rdr$$

$$= \frac{h^3}{8\pi^3}\left(\alpha\, sin.\, b \int \frac{sin.^2 a da}{cos.^4 a} + \beta\, cos.\, b \int \frac{sin.^3 a da}{cos.^4 a}\right),$$

$$= \frac{h^3}{24\pi^3}\left\{\alpha\, sin.\, b\, tang.^3 a + \frac{\beta\, cos.\, b}{cos.\, a}(tang.^2 a - 2)\right\},$$

welche Integrale ihrerseits von $cot.\, a = cot.\, a'' = \frac{h}{2\pi r''}$, bis $cot.\, a' = cot.\, a' = \frac{h}{2\pi r'}$ genommen werden müssen.

Approximationsgrenzen.

Was den Grad der so erhaltenen Annäherung betrifft, so ist zu bemerken, daß die obere Grenze des zu befürchtenden Fehlers, wenn man $\alpha + \beta\, cot.\, b\, sin.\, a$ für $\sqrt{1 + cot.^2 b\, sin.^2 a}$ setzt, nach der vorhergehenden Note bei den Anwendungen den größten Werthen von $cot.\, b\, sin.\, a$, d. h. $cot.\, b = 1$ entspricht (279). Aber da der Werth der Integrale von $cot.\, a'' = \frac{h}{2\pi r''}$ bis $cot.\, a' = \frac{h}{2\pi r'}$ genommen werden muß, und die erste dieser Grenzen immer kleiner als die Einheit, und die zweite größer als $^1/_3\, \frac{h}{2\pi r''}$ bleibt; so sieht man, daß die größten Werthe der Größe $cot.\, b\, sin.\, a$, deren Quadrat in der obigen Wurzelgröße vorkommt, immer zwischen den Grenzen:

$$sin. a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } sin. a = \frac{1}{\sqrt{1 + cot.^2 a}} = \frac{3}{\sqrt{1+9}}$$

$$= 0{,}3 \sqrt{10} \text{ oder } 0{,}70711 \text{ und } 94865$$

liegen. Setzt man daher nach der vorhergehenden Note:

$$\psi = arc. tang. 0{,}94865 = 43^\circ\ 29'\ 25'',85,$$

$$\psi = arc. tang. 0{,}70711 = 35^\circ\ 15'\ 52'',26,$$

so findet man:

$$\alpha = \frac{cos. \tfrac{1}{2}(\psi + \psi')}{cos.^2 \tfrac{1}{4}(\psi + \psi')} = 0{,}7740,\ \beta = \frac{sin. \tfrac{1}{2}(\psi + \psi')}{cos.^2 \tfrac{1}{4}(\psi + \psi')} = 0{,}7997.$$

Berechnet man ebenso die Grenze ε des zu befürchtenden relativen Fehlers, wenn man $\alpha + \beta\, cot. b\, sin. a$ für $\sqrt{1 + cot.^2 b\ sin.^2 a}$ substituirt, so findet man:

$$\varepsilon = tang.^2 \tfrac{1}{4}(\psi + \psi') = 0{,}00129 < \tfrac{1}{775}.$$

Dieser Fehler bleibt, wie man sieht, immer sehr klein, und kann in dem vorliegenden Falle immer ohne Nachtheil vernachlässigt werden.

Da aber die Berechnung der vorhergehenden Integrale, so wie die der zuerst gefundenen immer etwas mühsam ist, so kann man sich in gewissen Fällen auch der Reihenentwicklungen mit Vortheil bedienen.

Entwicklung derselben Integrale in Reihen.

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{h}{2\pi r} = cot. a = z,\ sin. b = b',$$

so hat man zunächst die Reihen:

$$\frac{\sqrt{h^2\, sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{2\pi r} =$$

$$(1 + b'^2 z^2)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2} b'^2 z^2 - \frac{1.\ 1}{2.\ 4} b'^4 z^4 + \frac{1.\ 1.\ 3}{2.\ 4.\ 6} b'^6 z^6 -$$

$$\frac{1.\ 1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 8} b'^8 z^8 + \text{etc.},$$

$$\frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}{2\pi r} =$$

$$(1 + z^2)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2} z^2 - \frac{1.\ 1}{2.\ 4} z^4 + \frac{1.\ 1.\ 3}{2.\ 4.\ 6} z^6 -$$

$$\frac{1.\ 1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 8} z^8 + \text{etc.},$$

welche nothwendig convergent sind, so lange nicht $z > 1$ ist.

Setzt man ferner:

$$\frac{\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}} = \frac{(1 + b'^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6\ a_8 z^8 + \text{rc.},$$

so findet man, wenn man den Exponenten $^1/_2$ der Wurzelgrößen der Allgemeinheit wegen und damit sich das Gesetz der Coefficienten a_0, a_2, $a_4 \ldots$ besser herausstellt, mit p bezeichnet:

$$a_0 = 1,\ a_2 = -p\,(1-b'^2),\ a = -\frac{p\,(p-1)}{1.\quad 2}(1-b'^4) + \frac{p}{1} \cdot (1-b'^2);$$

$$a_6 = -\frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1.\quad 2.\quad 3}\,(1-b'^6) + \frac{p\,(p-1)}{1.\quad 2.}\ \frac{p}{1}\,(1-b'^4)$$
$$-\frac{p}{1} \cdot \frac{p\,(p+1)}{1.\quad 2}\,(1-b'^2);$$

$$a_8 = -\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}(1-b'^8) + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1.\quad 2.\quad 3}\frac{p}{1}(1-b'^6)$$
$$-\frac{p\,(p-1)}{1.\quad 2} \cdot \frac{p(p+1)}{1.\quad 2}(1-b'^4) + \frac{p}{1} \cdot \frac{p\,(p+1)\,(p+2)}{1.\quad 2.\quad 3}(1-b'^2)$$

. . . .

. . . .

$$a_{2n} = -\frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.\quad 2\quad .\ .\ .\quad 3}\,(1-b'^{2n})$$
$$+\frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+2)}{1.\quad 2\quad .\ .\ .\quad (n-1)}\ \frac{h}{1}\,(1-b'^{2n-2})$$
$$-\frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+3)}{1.\quad 2\quad .\ .\ .\quad (n-2)} \cdot \frac{p\,(p+1)}{1.\quad 2}\,(1-b'^{2n-4})\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \mp \frac{p\,(p-1)}{1.\quad 2} \cdot \frac{p\,(p+1)\ldots(p+n-3)}{1.\quad 2\quad .\ .\ .\quad (n-2)}\,(1-b'^4)$$
$$\pm \frac{p}{1} \ldots \frac{p\,(p+1)\ldots(p+n-2)}{1.\quad 2\quad .\ .\ .\quad (n-1)}\,(1-b'^2),$$

oder wenn man für p seinen Werth $^1/_2$ in dem gegenwärtigen Falle substituirt:

$$a_0 = 1,\ a_2 = -\,^1/_2\,(1-b'^2),\ a_4 = \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}(1-b'^4) + {}^1/_2 \cdot {}^1/_2\,(1-b'^2),$$

$$a_6 = -\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}(1-b'^6) - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4} \cdot {}^1/_2\,(1-b'^4) - {}^1/_2 \cdot \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,(1-b'^2),$$

$$a_8 = \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}(1-b'^8) + \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\ {}^1/_2(1-b'^6)$$
$$+\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4} \cdot \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,(1-b'^4) + {}^1/_2 \cdot \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,(1-b'^2),$$

$$a_{10} = -\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}(1-b'^{10}) - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\,{}^1\!/_2\,(1-b'^8)$$
$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1.3}{2.4}(1-b'^6) - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}(1-b'^4)$$
$$-{}^1\!/_2\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(1-b'^2),$$

. . . .

Das Gesetz dieser Coefficienten ist in die Augen fallend: sie sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen fortwährend ab, je größer der Rang des Gliedes wird, was man auch leicht für einen beliebigen Werth von p, wofern derselbe nur kleiner als die Einheit ist, darthun kann; denn wenn man die Differenz zwischen irgend einem Gliede und dem folgenden nimmt, oder was dasselbe ist, sie mit ihrem respectiven Zeichen zusammenaddirt; so sieht man, daß das Zeichen des Resultates, da $b' > 1$ ist, einzig und allein von dem Zeichen der Summe der Glieder abhängt, welche von b' unabhängig sind, d. h. es ist genau dasselbe, als das Zeichen, welches man erhielte, wenn man in dem Ausdrucke der in Rede stehenden Coefficienten $b' = 0$ setzte. In dieser Voraussetzung wird aber die obige Reihenentwicklung identisch mit der der Function:

$$\frac{1}{(1+z^2)}\,p = (1+z^2)^{-p} = 1 - pz^2 + \frac{p}{1}\frac{(p+1)}{2}z^4$$
$$-\frac{p\,(p+1)\,(p+2)}{1.\quad 2.\quad 3.}z^6 + \frac{p\,(p+1)\,(p+2)\,(p-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.}z^8 - \text{etc.},$$

deren Coefficienten in der That die angeführte Eigenschaft haben und mit den gegebenen identisch sein müssen, wenn man $b' = 0$ setzt, wodurch man die allgemeine Relation erhält:

$$\frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.\quad 2.\quad\ldots\quad n} - \frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+2)}{1.\quad 2.\quad\ldots\quad(n-1)}\cdot\frac{p}{1}$$
$$+\frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+3)}{1.\quad 2\quad\ldots\quad(n-2)}\cdot\frac{p\,(p+1)}{1.\quad 2.}$$
$$-\frac{p\,(p-1)\ldots(p-n+4)}{1.\quad 2\quad\ldots\quad(n-3)}\cdot\frac{p\,(p+1)\,(p+2)}{1.\quad 2.\quad 3} + \ldots$$
$$\pm\frac{p\,(p-1)}{1.\quad 2}\cdot\frac{p\,(p+1)\ldots(p+n-3)}{1.\quad 2\quad\ldots\quad(n-2)}$$
$$\mp\frac{p}{1}\cdot\frac{p\,(p+1)\ldots(p+n-2)}{1.\quad 2\quad\ldots\quad(n-1)}$$
$$\pm\frac{p\,(p+1)\,(p+2)\ldots(p+n+1)}{1.\quad 2.\quad 3\quad\ldots\quad n} = 0,$$

deren Gesetz leicht einzusehen ist und welche gelegentlich bemerkt zu werden verdient.

Kehren wir wieder zu der gegebenen Reihe zurück und bemerken, daß sie stets convergent ist, so lange z oder $\frac{h}{2\pi r}$ die Einheit nicht übersteigt, welches alle Fälle der Praxis umfaßt. Substituirt man also diese Reihe für die entsprechende Function in die obigen Integrale und setzt ebenfalls für die Wurzelgröße:

$$\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}$$

ihre zuerst gefundene Reihenentwicklung, bemerkt ferner, daß:

$$b' = \sin. b, \; r = \frac{h}{2\pi z}, \; dr = -\frac{h}{2\pi}\frac{dz}{z^2},$$

$$rdr = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{dz}{z^3}, \; r^2 dr = -\frac{h^3}{8\pi^3}\frac{dz}{z^4}$$

ist, und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{z'}{z''} = \frac{r''}{r'} = \omega, \int_{r'}^{r''} \sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}\, dr$$

$$= -\frac{h^2}{2\pi}\int_{z'}^{z''} \sqrt{1 + b'^2 z^2}\, \frac{dz}{z^3} = R = 2\pi r''^2 R',$$

$$\int_{r'}^{r''} \frac{\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, rdr$$

$$= -\frac{h^2}{4\pi^2}\int_{z'}^{z''} \frac{\sqrt{1 + b'^2 z^2}}{\sqrt{1 + z^2}}\, \frac{dz}{z^3} = S = r''^2 S',$$

$$\int_{r'}^{r''} \frac{\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, dr$$

$$= -\frac{h}{2\pi}\int_{z'}^{z''} \frac{\sqrt{1 + b'^2 z^2}}{\sqrt{1 + z^2}}\, \frac{dz}{z^2} = T = r'' T',$$

$$\int_{r'}^{r''} \frac{\sqrt{h^2 \sin.^2 b + 4\pi^2 r^2}}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}}\, r^2 dr$$

$$= -\frac{h^3}{8\pi^2}\int_{z'}^{z''} \frac{\sqrt{1 + b'^2 z^2}}{\sqrt{1 + z^2}}\, \frac{dz}{z^4} = U = r''^3 U',$$

so findet man leicht:

$$R = {}^1\!/_2\, \frac{(1-\omega^2)}{\omega^2} + {}^1\!/_2 \log. \frac{1}{\omega}\, b'^2 z''^2 - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\frac{(1-\omega^2)}{2}\, b'^4 z''^4$$

$$+ \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{(1-\omega^4)}{4}\, b'^6 z''^6 - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\frac{(1-\omega^6)}{6}\, b'^8 z''^8 + \text{rc.}$$

$$S = {}^1/_2 \frac{(1-\omega^2)}{\omega^2} a_0 + log. \frac{1}{\omega} a_2 z''^2 + \frac{(1-\omega^2)}{2} a_4 z''^4$$
$$+ \frac{(1-\omega^4)}{4} a_6 z''^6 + \frac{(1-\omega^6)}{6} a_8 z''^8 + \text{rc.}$$

$$T = \frac{(1-\omega)}{\omega} a_0 + \frac{(1+\omega)}{1} a_2 z''^2 + \frac{(1-\omega^3)}{3} a_4 z''^4$$
$$+ \frac{(1-\omega^5)}{5} a_6 z''^6 + \frac{(1-\omega^7)}{7} a_8 z''^8 + \text{rc.}$$

$$U = {}^1/_3 \frac{(1-\omega^3)}{\omega^3} a_0 + \frac{(1-\omega)}{\omega} a_2 z''^2 + \frac{(1-\omega)}{1} a_4 z''^4$$
$$+ \frac{(1-\omega^3)}{3} a_6 z''^6 + \frac{(1-\omega^5)}{5} a_8 z''^8 + \text{rc.}$$

worin man:

$$log. \frac{1}{\omega} = 2 \left\{ \frac{1-\omega}{1+\omega} + {}^1/_3 \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^3 + {}^1/_5 \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^5 + {}^1/_7 \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^7 + \text{rc.} \right.$$

nehmen muß, wenn man nicht, was besser wäre, diesen hyperbolischen Logarithmus vermittelst der später (Abschnitt 6) mitzutheilenden Tafel direct berechnen will, indem man nöthigenfalls Proportionaltheile anwendet.

Die in Rede stehenden Reihen convergiren in den gewöhnlichen Fällen der Praxis sehr schnell, weil ω der Einheit immer sehr nahe kommt, und z'' kleiner als $^1/_2$ oder $^1/_3$ ist, und da die Größen a_2, a_4, a_6 . . . . ., welche den Gliedern, worin sie vorkommen, abwechselnd positive und negative Zeichen ertheilen, nothwendig ziemlich kleine Brüche von $a_0 = 1$ sind; so kann man in den meisten Fällen bei den beiden ersten Gliedern der Werthe von R', S', T' und U' stehen bleiben. Substituirt man alsdann diese Werthe, oder die von R, S, T und U für die Integrale, welche sie in den Gleichungen:

$$Q = n \left\{ \pi (r'^2 - r''^2) + f \, cot.b \, R - \frac{fh}{sin.b} T \right\}$$
$$= n\pi r''^2 \left\{ \frac{1}{\omega^2} - 1 + \frac{2f}{sin.b} (R' \, cos.b - T' z'') \right\},$$

$$p = n \left\{ h (r' - r'') + \frac{2f\pi}{sin.b} S \right\}$$
$$= n \cdot 2\pi r''^2 \left\{ \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) z'' + \frac{f}{sin.b} S \right.$$

$$p = n \left\{ {}^1/_2 \, h (r'^2 - r''^2) + \frac{2f\pi}{sin.b} U \right\}$$
$$= n \cdot \pi r''^3 \left\{ \left(\frac{1}{\omega^2} - 1\right) z'' + \frac{2f}{sin.b} U' \right\},$$

ausdrücken; so ergiebt sich daraus sofort der Werth von n, und folglich auch die Werthe von p, $p\varrho$ und ϱ, wovon der letzte überdieß von n unabhängig ist.

Vergleichung der Resultate, welche die neuen Formeln geben, mit den in §. 278 erhaltenen.

1. Für sehr große Neigungen des Schraubenganges.

Um nun zu sehen, in wie weit die aus diesen Formeln abgeleiteten Resultate sich von den aus der Formel in §. 278, wo der mittlere Hebelarm von p dem Halbmesser $^1/_2\,(r' + r'')$ der mittleren Schraubenlinie gleich angenommen ist, entfernen können, wollen wir die Data des ersten Beispieles in §. 279 nehmen, wornach man hat:

$$f = 0{,}1,\ b'^2 = sin.^2 b = cos.^2 b = {}^1/_2,$$

$$cot.\,a = \frac{h}{\pi\,(r' + r'')} = {}^1/_2 \text{ oder } = h\ {}^1/_2\,\pi\,(r' + r''),$$

und folglich:

$$z'' = \frac{h}{2\,\pi\,r''} > {}^1/_2,$$

welches in Beziehung auf die Convergenz der obigen Reihen der ungünstigste Fall ist, der für die dreikantige Schraube bei den Anwendungen niemals vorkommt, und bloß dazu dienen soll, einen Begriff von der Verschiedenheit der Resultate zu geben, welche die vorhin erörterten verschiedenen Rechnungsmethoden geben. Uebrigens sieht man aus dem obigen Werthe von h, daß sich der Werth von z'' der Einheit desto mehr nähert, je mehr r' von r'' verschieden ist, und daß derselbe die Grenze 1 genau erreichen würde, wenn $r' = 3\,r''$ wäre, welche Voraussetzung in dem vorliegenden Falle von $b = 45°$ unzulässig ist; aber nebst den übrigen Voraussetzungen beibehalten werden soll, um die Grenze der Abweichungen für den Fall zu erhalten, wo für den mittleren Hebelarm der Widerstände der Halbmesser $^1/_2\,(r' + r'')$ der mittleren Schraubenlinie, welcher hier $= 2\,r''$ ist, genommen wird.

Wenn man in den Ausdrücken von a_0, a_2, a_4, a_6, ... die Größe $b'^2 = {}^1/_2$ setzt, so findet man zunächst die Werthe:

$$a_0 = 1,\ a_2 = -0{,}25,\ a_4 = 0{,}21875,\ a_6 = -0{,}19531,$$

$$a_8 = 0{,}17725,\ a_{10} = -0{,}162964,\ a_{12} = 0{,}151565,$$

welche fortwährend, aber sehr langsam abnehmen. Bemerkt man ferner, daß $z'' = 1$, $\omega = {}^1/_3$ ist, so findet man:

$$log.\,\frac{1}{\omega} = log.\,3 = 1{,}098612,\ R' = 4{,}26137,$$

$$S' = 3{,}7923,\ T' = 1{,}8802,\ U' = 8{,}2709,$$

wofern man die Berechnung der in den drei letzten Reihen vorkommenden Glieder sehr weit treibt, deren wenigstens bis auf eine Einheit der dritten Decimalordnung genaue Werthe übrigens durch ein weniger mühsames Näherungsverfahren erhalten sind, dessen allgemeine Erörterung hier aber am unrechten Orte sein würde.

Substituirt man endlich diese Werthe von von R', S', T' und U' in die obigen Gleichungen mit Q, z, p, ϱ, so geben sie:

$$p = 0{,}6703\, Q\,,\quad \varrho = 2{,}0383\, r'',\quad p\varrho = 1{,}3663\, Qr'',$$

und nach den Resultaten in §. 279 hätte man unter den gegenwärtigen Voraussetzungen:

$$p = 0{,}66\, Q\,,\ \varrho = {}^1\!/_2\,(r' + r'') = 2\, r'',\ p\varrho = 1{,}32\, Q\, r''.$$

Man sieht also, daß die Formel in §. 278 etwas kleinere Werthe giebt, und namentlich für das Moment $p\varrho$, was besonders bemerkt zu werden verdient. Da aber der Unterschied für dieses Moment ungefähr nur $^1/_{30}$ des größten der beiden obigen Werthe, welcher als der genaueste betrachtet werden muß, beträgt; so kann man sich bei vielen practischen Anwendungen mit einer solchen Annäherung begnügen und sich der Leichtigkeit der Rechnungen wegen auf die Anwendung der Formel in §. 278 beschränken.

2. Für geringe Neigungen des Gewindes gegen die Axe der Schraube.

Betrachten wir nun den Fall, wo die Schraubenwindungen eine sehr geringe Neigung gegen die Axe haben, so wollen wir, wie in dem zweiten Beispiele in §. 279, $cot.\, a = \dfrac{h}{\pi\,(r' + r'')} = 9{,}04$, und wieder $cot.\, b = 1$ oder $sin.\, b = {}^1\!/_2\, \sqrt{2} = 0{,}7071$ setzen, so daß, wenn die Schraube ein einfaches Gewinde hat, $r' - r'' = {}^1\!/_2\, h$ ist, und wenn man diese Relation mit der vorhergehenden verbindet, so hat man:

$$r' = 1{,}13409\, r'',\ \omega = \frac{r''}{r'} = 0{,}88177,\ log.\frac{1}{\omega} = 1{,}12583\,,$$

$$z'' = \frac{h}{2\pi r''} = 0{,}02\left(1 + \frac{r'}{r''}\right) = 0{,}04268,$$

woraus erhellet, daß man der Genauigkeit unbeschadet alle Glieder der Reihen für R', S', T', U', welche z'' auf höhern Potenzen, als die zweite enthalten, hinweglassen kann, und man hat alsdann bloß:

$$R = {}^1\!/_2\left(\frac{1}{\omega^2} - 1\right) + {}^1\!/_2\, log.\,\frac{1}{\omega}\; b'^2\, z''^2 = 0{,}14314,$$

$$S' = {}^1\!/_2\left(\frac{1}{\omega^2} - 1\right) a_0 + log.\,\frac{1}{\omega}\, a_2\, z''^2 = 0{,}14302,$$

$$T' = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) a_0 + (1 - \omega)\;\, a_2 z''^2 = 0{,}13404\,,$$

$$U' = {}^1\!/_3\left(\frac{1}{\omega^3} - 1\right) a_0 + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)\, a_2\, z''^2 = 0{,}15286.$$

Substituirt man diese und die vorhergehenden Werthe in die Gleichungen mit Q, p und ϱ, so ergiebt sich daraus:

$$p = 0{,}1657\, Q,\ \varrho = 1{,}0684\, r'',\ p\varrho = 0{,}18117\, Qr'',$$

während man nach den aus der Formel in §. 278 abgeleiteten Resultaten in §. 279 hätte:

$$p = 0{,}1649\,Q,\ \varrho = {}^1/_2\,(r' + r'') = 1{,}06705\,r'',$$
$$p\varrho = 0{,}1649 \cdot 1{,}06705 \cdot Qr'' = 0{,}17596\,Qr''.$$

Diese Werthe sind von den correspondirenden noch weniger verschieden, als in dem ersten Beispiele, was vorher einzusehen war, weil die Resultate beider Methoden genau übereinstimmen müssen, wenn $r' = r''$ oder $\omega = 1$ ist, und ω hier in der That sehr wenig von der Einheit verschieden ist. Man könnte sich sogar wegen dieser geringen Differenz wundern, daß die Resultate in dem vorliegenden Falle nicht mehr übereinstimmen, wenn man nicht den beträchtlichen Einfluß der Reibung wegen der geringen Neigung des Schraubenganges in Betracht zöge (§. 279). Man kann sich in der That durch ein neues Beispiel überzeugen, daß für die Werthe von $cot.\,a$, welche zwischen den beiden vorhergehenden liegen, der Unterschied zwischen den durch die Formel in §. 278 und den in dieser Note erhaltenen Resultaten kleiner ist, als wir gefunden haben, selbst wenn der Vorsprung des Gewindes mit dem Halbmesser des Schraubenkernes sehr wohl vergleichbar ist. Setzt man z. B.:

$$cot.\,a = \frac{h}{\pi\,(r' + r'')} = {}^1/_1\,,\ h = r' - r'',\ cot.\,b = {}^1/_2,$$

welche Relationen Schrauben mit einfachen Gewinden entsprechen, für welche die Grundlinie des erzeugenden Dreieckes seiner Höhe oder dem Vorsprunge $r' - r''$ des Gewindes gleich ist, so folgt:

$$r' = 1{,}91613\,r'',\ \omega = 0{,}5219,\ z'' = \frac{h}{2\,\pi\,r''} = 0{,}1458,$$

$$b'^2 = sin.^2 b = a_1 8,\ cos.^2 b = 1 - b'^2 = 0{,}2,$$

welches giebt:

$$a_0 = 1,\ a_2 = -0{,}1,\ a_4 = 0{,}095,\ a_6 = -0{,}0905 \text{ etc.}$$

$$log.\,\frac{1}{\omega} = log.\,1{,}91613 = 0{,}650304,$$

und zeigt, daß man hier bloß:

$$R' = {}^1/_2\left(\frac{1}{\omega^2} - 1\right) + {}^1/_2\,log.\,\frac{1}{\omega}\ b'^2 z''^2 = 1{,}34144,$$

$$S' = {}^1/_2\left(\frac{1}{\omega^2} - 1\right) + log.\,\frac{1}{\omega}\ a_2 z''^2 = 1{,}33719,$$

$$T' = \frac{1}{\omega} - 1 + (1 - \omega)\ a_2 z''^2 = 0{,}91717,$$

$$U' = {}^1/_3\left(\frac{1}{\omega^3} - 1\right) + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)\ a_2 z''^2 = 2{,}01372$$

zu nehmen braucht, woraus sich ergiebt, wenn man wieder $f = 0{,}1$ nimmt:

$$p = 0{,}203984\,Q,\ \varrho = 1{,}48336\,r'',\ p\varrho = 0{,}30258\,Qr'',$$

während man durch die Formel in §. 278 die Werthe:

$$p = 0{,}203721\,Q,\ \varrho = 1{,}45806\,r'',\ p\varrho = 0{,}29704\,Qr''$$

findet, welche sehr wenig von den vorhergehenden verschieden sind, obgleich r' fast das Doppelte von r'' ist.

Schluß.

Aus diesen verschiedenen Zusammenstellungen dürfen wir also schließen, daß es in den gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fällen, auf welche sich das zuletzt betrachtete Beispiel bezieht, hinreichend genau ist, wenn man sich der Formel in §. 278 oder selbst der in §. 273, welche etwas größere Werthe für p giebt und die Unrichtigkeit der ersten zum Theil verbessert, bedient.

Vierter Abschnitt.

Einfluß der plötzlichen Veränderungen der Geschwindigkeit.

Von den allgemeinen Gesetzen des Stoßes der Körper, welche sich parallel zu sich selbst bewegen.

§. 296. In §. 23 und 24 haben wir auf eine allgemeine Weise kurz angegeben, wie die bei plötzlichen Veränderungen der Geschwindigkeit stattfindenden Verluste an Arbeit in Rechnung gebracht werden müssen; allein wir müssen hier diesen Gegenstand weiter entwickeln, um zu den speciellen Anwendungen übergehen zu können, welche wir in dem vorliegenden Werke zu machen beabsichtigen.

Zunächst wollen wir wieder in Erinnerung bringen (§. 18):

1) daß die Dauer der Stöße, wie sie in den Maschinen vorkommen, gegen die Zeit, während welcher man ihre Bewegung betrachtet, im Allgemeinen unberücksichtigt bleiben kann, was seinen Grund in der geringen Zusammendrückbarkeit der Körper hat, woraus die Maschinenbestandtheile verfertigt werden; und folglich können die Quantitäten Arbeit, welche während des Stoßes von den andern Kräften als die Compressions-, Reactions- oder Trägheitskräfte hervorgebracht werden, gegen die von diesen letztern Kräften hervorgebrachten Quantitäten Arbeit vernachlässigt werden, so daß man nur diese letztern zu betrachten hat;

2) daß, da die dem Stoße ausgesetzten Maschinentheile so beschaffen sind, daß ihre Formveränderungen nur sehr gering sind, das System sich nach dem Stoße nahezu unter denselben Bedingungen des geometrischen Zusammenhanges befindet, als zuvor, woraus folgt, daß die Geschwindigkeiten jedes der mit einander in Berührung stehenden Maschinentheile in jedem Augenblicke des Stoßes und nach demselben in denselben Verhältnissen zu einander stehen als zuvor.

Hierauf wollen wir bemerken, daß die Richtung, nach welcher sich die Körper zusammendrücken und auf einander wirken, die der gemeinschaftlichen Normale im Berührungspuncte dieser Körper ist, so daß die während des Stoßes hervorgerufenen Compressionskräfte, so wie die in jedem Augenblicke verlorenen und gewonnenen Geschwindigkeiten der beiden auf einander einwirkenden Körper nach dieser Normale gerichtet sind. Da ferner die Dauer des Stoßes, obgleich sehr kurz, doch niemals ganz Null ist, so ändert sich der Druck und die Geschwindigkeit stetig von dem Augenblicke an, wo die Zusammendrückung beginnt, bis zu dem, wo sie aufhört.

Aus dem Principe: daß die Wirkung der Rückwirkung gleich und entgegengesetzt ist (§. 13) folgt, daß die ersten Kräfte der Resultante aus den bewegenden oder Trägheitskräften $\varphi = m \frac{dv}{dt}$, welche von der in demselben Augenblicke für jeden Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale hervorgebrachten Geschwindigkeitsveränderung herrühren, das Gleichgewicht halten müssen. Wenn also dm und dm' zwei Massenelemente der beiden Körper m und m' sind, welche wir der Einfachheit wegen als Kugeln annehmen wollen, die sich mit parallelen Geschwindigkeiten v und v' bewegen; so hat man, wenn P den in einem beliebigen Augenblicke von dem einen dieser Körper gegen den andern ausgeübten Druck bezeichnet:

$$P = \Sigma\, m \frac{dv}{dt} = \Sigma\, m' \frac{dv'}{dt}.$$

Der Druck und die Trägheitskräfte $dm \frac{dv}{dt}$, welche im Augenblicke des Beginnens der Zusammendrückung Null sind, nehmen in den folgenden Augenblicken fortwährend zu, bis zu dem Augenblicke der größten Zusammendrückung, wo diese Kräfte ihren größten Werth erreichen und die Geschwindigkeiten der beiden Körper mit einander gleich sind. Nach diesem Augenblicke strebt die Elasticität, dem stoßenden Körper einen Theil seiner verlorenen Geschwindigkeit wieder zu ertheilen und die gewonnene Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers noch zu vergrößern, so daß, wenn die Körper vollkommen elastisch wären, die Summe der lebendigen Kräfte genau wieder dieselbe werden würde, wie vor dem Stoße, während die Geschwindigkeiten v und v' nach der Normale so geändert würden, daß der absolute Verlust und Gewinn an Geschwindigkeit für jeden Körper verdoppelt würde. Uebrigens ist klar, daß diese Wiederherstellung der während des Stoßes verlorenen lebendigen Kraft nur für elastische Körper stattfindet, und zwar nach Verhältniß ihrer Elasticität.

Bei ganz unelastischen Körpern endet der Stoß in dem Augenblicke der größten Zusammendrückung, wo die Normalgeschwindigkeiten einander gleich geworden sind. Nun ist aber in diesem Augenblicke die von beiden Körpern zugleich verlorene lebendige Kraft nach dem Carnot'schen Principe genau gleich der Summe der von den verlorenen oder gewonnenen Geschwindigkeiten herrührenden lebendigen Kräfte, so daß nach der Bemerkung in §. 12 die Hälfte dieser lebendigen Kraft die absolute Quantität der Wirkung während der Zusammendrückung ausdrückt, und von der Quantität der Wirkung des Bewegers der Maschine abgezogen werden muß.

Allgemeine Ausdrücke der verlorenen Geschwindigkeit und lebendigen Kraft jedes Körpers. — Betrachtung des Falles, wo diese Ausdrücke unmittelbar anwendbar sind.

§. 297. Da in den meisten Fällen die Stöße zwischen wenig elastischen Körpern stattfinden, so daß ~~am Ende~~ der größten Zusammendrückung nur ein sehr kleiner Theil der absorbirten Quantität Arbeit restituirt wird; so wird dieses Prinzip, welches für eine beliebige Anzahl gleichzeitiger Stöße stattfindet, besonders dann jedesmal von Nutzen sein, wenn man die Geschwindigkeit der Körper vor und nach dem Stoße, so wie ihre Richtung **a priori** kennt. Denn es seien V, v diese respectiven Geschwindigkeiten für eine beliebige Masse M, u die verlorene Geschwindigkeit, und uV, uv die Winkel, welche die Richtungen von V und v mit dem entsprechenden Theile der gemeinschaftlichen Normale des gestoßenen Körpers M und des stoßenden Körpers auf der Seite von V bildet, so daß $cos.uV$ und V wesentlich positiv sind; so hat man für die verlorene Geschwindigkeit und die verlorene lebendige Kraft des Körpers M (Fig. 111):

$$u = V\cos.uV - v\cos.uv,\quad mu^2 = m(V\cos.uV - v\cos.uv)^2,$$

was nach dem Vorhergehenden einleuchtend ist, oder wenn man bemerkt, daß die Geschwindigkeit u nichts andres ist, als die Resultante aus der Geschwindigkeit V vor dem Stoße und der Geschwindigkeit v nach demselben, in entgegengesetztem Sinne genommen; denn diese Resultante ist die Summe der Projectionen der Componenten auf ihre eigene Richtung.

Wenn die Geschwindigkeit nach dem Stoße nicht unmittelbar gegeben ist, so ist das Carnot'sche Princip von keinem besondern Nutzen mehr, weil man alsdann genöthigt ist, diese Geschwindigkeit vermittelst der aus dem D'Alembert'schen Principe abgeleiteten Gesetze des Stoßes direct zu suchen, wie man bald an besondern Beispielen sehen wird. Der allgemeinste und zugleich der gewöhnliche Fall, wo der Carnot'sche Lehrsatz anwendbar ist, ist der, wo der eine Körper eine Geschwindigkeit behält, welche man vor und nach dem Stoße als fast constant betrachten kann, weil seine Quantität der Bewegung gegen die des andern Körpers sehr groß ist, oder weil die Quantitäten der Bewegung, welche er durch den Stoß bekommen oder verloren hat, unmittelbar durch andere Kräfte oder Widerstände, wie die von dem Stoße herrührenden, consumirt oder restituirt sind. Dieser letzte Fall findet gewöhnlich statt, wenn mehr oder weniger schwache Stöße nach gleichen Intervallen sehr schnell und so zu sagen stetig auf einander folgen, wovon wir bei dem Stoße der Flüssigkeiten gegen ihre eigene Molecule, oder gegen fremde Körper, wie die Wasserräder, deren Geschwindigkeit wegen irgend welcher Ursache fast gleichförmig bleibt, kennen lernen werden. In diesen verschiedenen Fällen braucht man für den Verlust an lebendiger Kraft nur den von der verlornen Geschwindigkeit des Körpers, dessen Bewegung sich merklich geändert hat, herrührenden zu nehmen, indem man annimmt, daß dieser Körper nach dem Stoße die constante Geschwindigkeit des andern Körpers behalten hat.

Ausdruck der lebendigen Kraft, welche durch den Stoß zweier Körper verloren geht, wovon der eine eine fast constante Geschwindigkeit behält.

§. 298. Da dieser Satz nicht a priori einleuchtend und bei den Anwendungen von großem Nutzen ist, so halten wir es für nöthig, denselben hier zu beweisen.

Es seien m, m' zwei unelastische Massen, welche mit Geschwindigkeiten zusammenstoßen, deren Componenten v, v' nach der gemeinschaftlichen Normale in dem Berührungspuncte nach demselben Sinne gerichtet sind; u, u' seien die verlorenen Normalgeschwindigkeiten der beiden Körper, und endlich sei v die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, welche sie am Ende des Stoßes nach der Normale haben; so ist bekanntlich:

$$w = \frac{mv + m'v'}{m + m'}, \quad u = v - w = \frac{m'(v - v')}{m + m'},$$

$$u' = v' - w = -\frac{m(v - v')}{m + m},$$

und die gesammte verlorene lebendige Kraft wird folglich nach dem Carnot'schen Principe ausgedrückt durch:

$$mu^2 + m'u'^2 = \frac{m\,m'}{m + m'}(v - v')^2.$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit der Masse m' am Ende des Stoßes in dem nächsten Augenblicke durch irgend eine Ursache unmittelbar aufgehoben werde, so daß sie im Anfange eines zweiten, dem ersten gleichen Stoßes wieder die Geschwindigkeit v' annimmt, u. s. f.; so folgt, daß die Geschwindigkeit von m' nach der gemeinschaftlichen Normale in dem Puncte, worin die Wirkung stattfindet, obgleich sie veränderlich ist, zwischen den sehr engen Grenzen v' und w oscillirt, und daß man diese Geschwindigkeit als nahezu gleichförmig betrachten kann, indem sie einen mittleren Werth ω hat, welcher sehr wenig von dem arithmetischen Mittel $\frac{v' + w}{2}$ der beiden Grenzgeschwindigkeiten verschieden ist. Man kann folglich $\omega = \frac{v' + w}{2}$ nehmen, zumal wenn v in dem obigen Ausdrucke der verlorenen lebendigen Kraft beträchtlich von v' verschieden ist. Setzt man nun für w seinen Werth:

$$\frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

in die Relation:

$$2\omega = w + v',$$

so erhält man:

$$2(m + m)\,\omega = mv + (2m' + m)\,v',$$

oder wenn man zu beiden Theilen die Größe $(2m' + m)v$ addirt:

$$v - v' = \frac{2(m + m')(v - \omega)}{2m' + m}$$

und:

$$\frac{m\,m'}{m+m'}(v-v')^2 = \frac{4\,m\,m'\,(m+m')}{(2m'+m)^2}(v-\omega)^2.\ ^{*)}$$

Dieser letzte Ausdruck der lebendigen Kraft, welcher streng richtig ist, wenn man für ω das arithmetische Mittel zwischen v' und w nimmt, ändert sich sehr wenig mit m', wofern jedoch m' nicht kleiner ist als m; denn wenn man darin successive:

$$m' = m,\ m' = 2m,\ \ldots\ldots\ m' = \infty$$

setzt, so nimmt derselbe die Werthe an:

$$8/_9\, m\,(v-\omega)^2,\ 24/_{25}\, m\,(v-\omega)^2,\ \ldots\ldots\ m\,(v-\omega)^2,$$

wovon der erste und letzte nur um $1/_9$ des größten derselben, welcher zugleich der größte von allen ist, von einander verschieden sind. Man kann folglich ohne merklichen Fehler den Verlust an lebendiger Kraft $= m\,(v-\omega)^2$ setzen, wofern die Masse m', welche nach der gemeinschaftlichen Normale der beiden zusammenstoßenden Körper eine fast gleichförmige Geschwindigkeit behält, nicht geringer ist, als die des andern Körpers, was bei fast allen Anwendungen der Fall ist. Wenn ferner die Massen m und m' entgegengesetzte Geschwindigkeiten hätten, so würde die verlorene lebendige Kraft ausgedrückt durch:

$$m\,(v+\omega)^2,$$

und sie würde ausgedrückt durch:

$$m\,\omega^2 \text{ oder } m\,v^2,$$

wenn $v = \omega = 0$ wäre. Man darf aber in allen diesen Fällen nicht vergessen, daß die Geschwindigkeiten v und ω nach der gemeinschaftlichen Normale der beiden Körper in dem Puncte, worin der Stoß stattfindet, geschätzt werden.

Allgemeines Verfahren zur Berechnung des Verlustes an lebendiger Kraft, welcher in den Maschinen von den Stößen und von den dabei hervorgerufenen passiven Widerständen herrührt.

§. 299. Kehren wir nun wieder zu dem allgemeinen Probleme des Stoßes zurück. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Körper

*) Für nicht ganz unelastische Körper gelangt man zu einem ähnlichen Resultate; denn wenn n^2 den durch die Elasticität nach dem Augenblicke der größten Zusammendrückung restituirten Theil der verlorenen lebendigen Kraft bezeichnet, so findet man für den Ausdruck der wirklich verlorenen lebendigen Kraft, wenn ω die mittlere gegebene Geschwindigkeit von m' nach der Normale bezeichnet, welche hier zwischen den Grenzen v' und $w + n\,(w - v')$ oscillirt:

$$\frac{(1-n^2)\,m\,m'\,(v-v')^2}{m+m'} = (1-n^2)\,\frac{4\,m\,m'\,(m+m')}{\left\{2m'+m\,(1-n)\right\}^2}(v-\omega)^2.$$

Wenn m' gegen m sehr groß ist, so hat man den einfachern Näherungswerth $(1-n^2)\,m\,(v-\omega)^2$ welcher streng richtig wird, wenn man $m' = \infty$ setzt; aber wenn m' nicht beträchtlich größer ist als m, so kann man diesen letzten Ausdruck nur dann nehmen, wenn n sehr klein ist. Wenn z. B. $m = m'$ und $n = 1/_4$ ist, so wird der Verlust an lebendiger Kraft $= 1{,}06\,(1-n^2)\,m\,(v-\omega)^2$, welche Größe von der $m' = \infty$ entsprechenden ungefähr nur um $1/_{17}$ verschieden ist.

ganz frei sind und sich sowohl vor, als nach dem Augenblicke des Stoßes parallel zu sich selbst bewegen, so daß die resp. Molecule derselben gleiche und parallele Geschwidnigkeiten haben, was in den Maschinen, deren Bestandtheile vorgeschriebene Bewegungen annehmen müssen, selten der Fall ist. Um in diesem Falle den in dem Systeme stattfindenden Verlust an lebendiger Kraft zu berechnen, muß man sich die Maschine in ihre verschiedenen einzelnen Bestandtheile zerlegt denken, und untersuchen, was für jeden dieser Bestandtheile besonders stattfindet. Denn man sieht leicht ein, daß, wenn irgend zwei Bestandtheile einer zusammengesetzten Maschine zusammenstoßen, wodurch die Geschwindigkeit und die lebendige Kraft zu gleicher Zeit geändert werden, in jedem derselben Compressionskräfte P, P' hervorgerufen werden, welche nach der Normale in dem Berührungspuncte mit dem unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Bestandtheile wirken, so wie bewegende Kräfte $\varphi = m \frac{dv}{dt}$, welche von der Geschwindigkeitsveränderung jeder Masse m in dem Zeitelemente dt herrühren. Außerdem veranlassen diese verschiedenen Kräfte, welche in Gewichten ausgedrückt werden können, an den festen oder beweglichen Stützpuncten Druckkräfte, welche wir allgemein mit N bezeichnen wollen, und welche Reibungen hervorrufen, die durch fN ausgedrückt werden können, weil sich die Gesetze der Reibung auch auf den Fall erstrecken, wo sich die Intensitäten der Druckkräfte während der Bewegung ändern, wie dieses die neuern Versuche von Morin über die Reibung beweisen *). Nun findet aber nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten jeden Augenblick zwischen den in jedem Falle nach einer entsprechenden und leicht zu bestimmenden Richtung genommenen verschiedenen Kräften P, P', φ, fN das Gleichgewicht statt, und da der Körper nur eine einzige geometrische Bewegung annehmen kann; so giebt es auch nur eine einzige Gleichung des Gleichgewichtes, welche man auf die bereits wiederholt angegebene Weise erhält.

Wenn man für die verschiedenen einfachen Bestandtheile der Maschine die analogen Gleichungen des Gleichgewichtes bildet, welche in Beziehung auf die Größen P, P' und φ fast immer linear sind und kein von diesen Größen unabhängiges Glied enthalten, weil dasselbe von andern Kräften, als die bei dem Acte des Stoßes wirkenden, herrühren würde, und folglich vernachlässigt werden könnte, und bemerkt man ferner, daß die Gleichungen des Gleichgewichtes in Beziehung auf die äußern Bestandtheile der Maschine nur eine einzige Kraft P oder P' enthalten können, weil diese Bestandtheile nur einem einzigen Stoße ausgesetzt sind; so lassen sich leicht successive die unbekannten Compressionskräfte P, P' als Functionen der entsprechenden bewegenden Kräfte φ berechnen, und man kann daraus sogar eine einzige Gleichung zwischen allen in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung betrachteten Kräften φ oder $m \frac{dv}{dt}$ ableiten, welche, wenn sie, wie die ersten Gleichungen,

*) Nouvelles expériences sur le frottement, 3e Mémoire, Recueil des Mémoires présentés à l'Académie des sciences par des savans étrangers, Tome 6; 1835.

linear ist, unmittelbar integrirt werden kann, und so für jeden Augenblick des Stoßes die Relation giebt, wodurch die Geschwindigkeiten und die Quantitäten der Bewegung der verschiedenen materiellen Moleculen der ganzen Maschine mit einander verbunden sind.

Aber da es nicht darauf ankommt, den Werth der Kräfte P, P' und der Geschwindigkeit für jeden Augenblick des Stoßes zu bestimmen, und da außerdem das Gesetz der bewegenden Kräfte φ unbekannt ist; so untersucht man nur, was in dem Augenblicke der größten Zusammendrückung stattfindet, um daraus die Geschwindigkeit der verschiedenen Massen m, und folglich den Verlust an lebendiger Kraft für alle diese Massen abzuleiten. Die obige Gleichung ist aber zu diesem Zwecke hinreichend, wenn man sie von dem Augenblicke, worin die Zusammendrückung anfängt, bis zu dem, worin sie aufhört, integrirt annimmt; denn in diesem letzten Augenblicke ist die Geschwindigkeit nach der gemeinschaftlichen Normale im Berührungspuncte irgend zweier Maschinenbestandtheile für beide dieselbe geworden, so daß man nach der geometrischen Constitution des Systemes und den Bedingungen des Zusammenhanges die Geschwindigkeit einer beliebigen Masse oder eines beliebigen Punctes des Systemes durch die eines willkührlich gewählten Punctes oder Bestandtheiles der Maschine ausdrücken kann, und die in Rede stehende Gleichung giebt folglich, wenn die Geschwindigkeit dieses Punctes oder Bestandtheiles vor dem Stoße als bekannt vorausgesetzt wird, die Geschwindigkeit desselben nach dem Stoße, und folglich die aller andern Puncte oder Bestandtheile der Maschine. Wenn man also von der lebendigen Kraft, welche vor dem Stoße stattfindet, die in dem Augenblicke der größten Zusammendrückung stattfindende abzieht, so erhält man den Ausdruck der verlorenen lebendigen Kraft.

Einfacheres Verfahren zur Erreichung desselben Zweckes, wenn die Körper wieder als unelastisch vorausgesetzt werden.

§. 300. Das vorhin beschriebene Verfahren wird gewöhnlich nicht angewandt, sondern man substituirt dafür ein anderes, einfacheres, wobei jede Integration überflüssig ist, und welches zu denselben Resultaten führt; aber vielleicht weniger klar und in den Folgerungen, welche es in Beziehung auf die während des Stoßes hervorgerufenen passiven Widerstände darbietet, nicht so leicht aufzufassen ist. Das in Rede stehende Verfahren hat Poisson in einer schönen Abhandlung über die Wirkungen des Schusses einer Kanone auf die verschiedenen Theile ihrer Laffette angewandt, welche Abhandlung allen denen nicht genug zu einem gründlichen Studium empfohlen werden kann, welche von dem Probleme des Stoßes und seinen practischen Anwendungen eine genaue Einsicht zu erlangen wünschen und wozu die vorhergehenden Betrachtungen als Erläuterung gewisser Puncte dienen können. Das Wesen dieser Methode besteht darin, die auf die Berührungspuncte der verschiedenen Bestandtheile des Systemes ausgeübten Percussionskräfte, d. h. die in diesen Puncten hervorgerufenen oder aufgehobenen totalen Quantitäten Bewegung als eine Reihe oder Summe von Druckkräften zu betrachten, welche Reibungen veranlassen, die durch das Product aus diesen Quantitäten der Bewegung und dem gewöhnlichen Coefficienten der Reibung für die einander berührenden

Substanzen gemessen werden, und dann nach dem D'Alembert'schen Principe auszudrücken, daß für jeden einzelnen Bestandtheil zwischen allen verlorenen oder gewonnenen Quantitäten der Bewegung das Gleichgewicht stattfindet. Wenn also Q, $Q'\varphi$ und $\int S$ die in Rede stehenden Quantitäten der Bewegung für irgend einen einfachen Bestandtheil des Systemes bezeichnen, so gelangt man zu ganz ähnlichen Gleichungen, wie die vorhin zwischen den bewegenden Kräften betrachteten, welche als die Integrale derselben betrachtet werden können, und wenn man folglich zwischen diesen Gleichungen die unbekannten Percussionskräfte Q, Q' eliminirt; so erhält man eine einzige Gleichung zwischen den verlorenen Quantitäte nBewegung der verschiedenen Massen m der Maschine, woraus man, wie vorhin, aber ohne Integration, die Geschwindigkeit am Ende des Stoßes oder in dem Augenblicke der größten Zusammendrückung vermittelst der vor dem Stoße stattfindenden Geschwindigkeit, und folglich den Verlust an lebendiger Kraft ableiten kann.

Aber ungeachtet der größern Leichtigkeit, welche diese Methode bei den Untersuchungen über das Gleichgewicht gewährt, werden wir ihr doch die in §. 299 angegebene vorziehen, weil diese mehr dazu geeignet zu sein scheint, den Einfluß der Trägheit bei den plötzlichen Veränderungen der Geschwindigkeit zu zeigen.

Betrachtung des Falles, wo die Körper vollkommen oder unvollkommen elastisch sind.

§. 301. Man erhält also, wie man sieht, den Verlust an lebendiger Kraft in dem Augenblicke, wo derselbe am größten ist, was ganz unelastischen Körpern entspricht, und in dem Falle mehr oder weniger elastischer Körper muß man die Geschwindigkeit, welche jeder Körper am Ende des Stoßes noch behält, vermittelst seiner Geschwindigkeit im Augenblicke der größten Zusammendrückung, welche immer auf die vorhin angegebene Weise berechnet wird, auszudrücken suchen. Diese Untersuchung bietet aber durchaus keine Schwierigkeit dar, wenn man den Grad der Elasticität, d. h. den Theil der verlorenen lebendigen Kraft kennt, welcher nach dem Augenblicke der größten Zusammendrückung durch die Molecularkräfte in entgegengesetztem Sinne restituirt wird. Denn wenn

u die Geschwindigkeit einer beliebigen Masse m in dem fraglichen Augenblicke,
V ihre Geschwindigkeit vor dem Stoße,
n der restituirte Theil ihrer verlorenen Geschwindigkeit,
v die Geschwindigkeit am Ende des Stoßes oder der Zusammendrückung

bezeichnet; so haben die Geschwindigkeiten V, v und u hier nothwendig dieselbe Richtung, oder sind nach derselben geraden Linie gerichtet, und $V-u$ ist die zuerst verlorene Geschwindigkeit, während $n(V-u)$ die hierauf nach entgegengesetztem Sinne von dem von V restituirte Geschwindigkeit ist, so daß man hat:

$$v = u - n(V-u) = u(1+n) - nV,$$

in welchem Ausdrucke man für u seinen oben gefundenen Werth setzen muß. Die verlorene lebendige Kraft der Masse m und aller ähnlichen Massen wird also am Ende des Stoßes ausgedrückt durch:

$$\Sigma mV^2 - \Sigma mv^2 = \Sigma mV^2 - \Sigma m\left\{u(1+n) - nV\right\}^2,$$

und wenn die Körper vollkommen elastisch sind, so ist $n = 1$ und:

$$\Sigma mV^2 - \Sigma mv^2 = \Sigma mV^2 - \Sigma m(2u - V)^2 = 4\Sigma mu(V - u),$$

wobei wohl zu bemerken ist, daß der Verlust an lebendiger Kraft in dem gegenwärtigen Falle nicht Null sein kann, weil während der Dauer des Stoßes passive Widerstände der Körper hervorgerufen werden *). Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über die Bestimmungsart des Verlustes an lebendiger Kraft, welcher in den Maschinen durch den Stoß veranlaßt wird, und wonach sich jeder besonderer Fall leicht beurtheilen läßt, wollen wir einige Anwendungen mittheilen, welche sich bei allen Maschinen darbieten, worin der Operator auf die zu bearbeitende Masse eine Reihe von Stößen ausübt, wie bei den Stampfern, Hämmern rc., und in der Folge werden wir auch Gelegenheit haben, andere Anwendungen bei der Bestimmung des Verlustes der Flüssigkeiten an lebendiger Kraft kennen zu lernen, wenn sich die Geschwindigkeit ihrer Molecule plötzlich ändert.

Stoß der Hebedaumen und der Stampfer.

Relation zwischen der während des Stoßes von dem Hebedaumen auf die Hebelatte ausgeübten Kraft und den verschiedenen Widerständen.

§. 302. Nachdem die bereits in dem ersten Abschnitte entwickelten allgemeinen Principien nun wieder in Erinnerung gebracht sind, wollen wir sie auf die am häufigsten vorkommenden Fälle anwenden, und zu-

*) Man könnte glauben, daß bei dieser Bestimmungsart des Verlustes an lebendiger Kraft, welcher von den während des Stoßes stattfindenden Reibungen herrührt, der Verlust nur in Rechnung gebracht sei, welcher vor dem Augenblicke der größten Zusammendrückung stattfindet; allein man würde sich sehr irren; denn die in diesem Augenblicke verlornen Quantitäten Bewegung $m(V-u)$ werden nach Verhältniß der Reibung geändert, und wenn man $n(V-u)$ für die im entgegengesetzten Sinne restituirte Geschwindigkeit nimmt, so heißt dieses nichts anders, als daß die nach der größten Zusammendrückung restituirte Quantität Bewegung durch die Reibung um eine Größe verändert ist, welche der vor diesem Augenblicke proportional ist. Außerdem ist nach dem Vorhergehenden einleuchtend, daß der von der Reibung herrührende Verlust an lebendiger Kraft für die elastischen Körper größer ist als für die übrigen, so daß, wenn die unvollkommen elastischen Körper den Verlust an lebendiger Kraft in einer Beziehung vermindern, sie denselben in einer andern Hinsicht vergrößern, was ein Grund mehr ist, die Elasticität der wenig elastischen Körper, wie die in den meisten Fällen angewandten, nicht in Rechnung zu bringen. Zu bemerken ist übrigens, daß für die mehr oder weniger elastischen Körper auf den ersten Stoß mehrere andere folgen können, welche mehr oder weniger lebendige Kraft absorbiren, was z. B. bei den Zapfen der Welle eines Stößen ausgesetzten Rades der Fall ist, weil sie in ihren Lagern emporspringen und wieder niederfallen.

nächst mit dem Falle anfangen, wo ein Hebedaumen, welcher die Form einer Kreisevolvente hat, in normaler Richtung gegen die untere Fläche der Hebelatte eines Stampfers stößt (Fig. 112).

Wir wollen annehmen, daß, wie dieses in der Praxis gewöhnlich geschieht, der Stoß in der Höhe der Axe der Daumenwelle stattfindet. In dem Augenblicke und während der ganzen Dauer des Stoßes widersteht der Stampfer der von dem Hebedaumen parallel zu der Axe des Stampfers ausgeübten Wirkung oder Kraft P vermöge seiner Trägheit mit einer Intensität, welche ausgedrückt wird durch:

$$\frac{Q}{g}\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{dv}{dt} = \varphi,$$

wenn wieder, wie in §. 216, Q das Gewicht des Stampfers und dv den Zuwachs seiner Geschwindigkeit in dem Zeitelemente dt bezeichnet.

Diese Kraft φ wirkt nach der Richtung der Axe des Stampfers in einer Entfernung x von dem Berührungspuncte m des Hebedaumens und der Latte, und die Kraft P treibt die Stange des Stampfers gegen die Halter, wodurch Reibungen entstehen, welche ganz denen analog sind, deren Berechnungsart bereits im §. 216 gelehrt ist; und da in jedem Augenblicke des Stoßes zwischen dem Drucke P, welchen der Hebedaumen auf die Latte ausübt, dem von der Trägheit des Stampfers herrührenden Widerstande φ und den verschiedenen passiven Widerständen das Gleichgewicht stattfinden muß; so haben wir unter Beibehaltung sämmtlicher Bezeichnungen des angeführten §. 216 die Gleichung:

$$P = \frac{l}{l - 2fx - ff'(l - 2y)}\,.\,\varphi$$

$$= \frac{l}{l - 2fx - ff'(l - 2y)}\,\frac{Q}{g}\,\frac{dv}{dt}.$$

In dieser Gleichung sind die Größen x und y constant, weil während der ganzen Dauer des Stoßes keine merkliche Verrückung stattfindet, und man kann folglich setzen:

$$\frac{l}{l - 2fx - ff'(l - 2y)}\,\frac{Q}{g} = m',$$

wo m' eine constante Größe bezeichnet, welche einer Masse ähnlich ist, weil sie das Product aus der Masse $\frac{Q}{g}$ und einem Zahlencoefficienten ausdrückt.

Die obige Relation giebt:

$$Pdt = \frac{l}{l - 2fx - ff'(l - 2y)}\,\frac{Q}{g}\,.\,dv,$$

folglich:

$$\int Pdt = \frac{l}{l - 2fx - ff'(l - 2y)}\,\frac{Q}{g}\,v,$$

wenn man annimmt, daß der Stampfer von der Ruhe ausgeht, wie dieses gewöhnlich der Fall ist.

Quantität Arbeit, welche während der Dauer des Stoßes auf die Hebelatte übertragen werden muß.

§. 303. Da wir das Gesetz der Veränderung von v als Function der Zeit t nicht kennen, so können wir auch den Werth von P nicht für jeden Augenblick der Zusammendrückung erhalten; allein wir können leicht die totale Quantität Arbeit berechnen, welche diese Kraft P während des Stoßes hervorbringen muß. Denn bezeichnet dy den Weg, welchen der Angriffspunct m der Kraft P in dem Zeitelemente dt durchläuft, so haben wir:

$$Pdy = \frac{l}{l-2fx-ff'(l-2y)} \frac{Q}{g} \cdot \frac{dv}{dt} dy,$$

oder wenn man integrirt:

$$\int Pdy = {}^1/_2 \frac{l}{l-2fx-ff'(l-2y)} \frac{Q}{g} v^2 = {}^1/_2 m' v^2,$$

was vorher einzusehen war, weil wir wissen, daß die Quantität Arbeit, welche eine Kraft auf eine Masse m' übertragen muß, um derselben in ihrer eigenen Richtung eine endliche Geschwindigkeit v zu ertheilen, dem Zahlenwerthe nach der Hälfte der lebendigen Kraft gleich ist.

Relation zwischen den Kräften, welche während des Stoßes um die Axe der Daumenwelle wirken.

§. 304. Untersuchen wir nun, was um die Daumenwelle stattfindet, und bezeichnen ein beliebiges Massenelement dieser Welle und der damit concentrisch rotirenden und gewöhnlich symmetrisch um ihre Axe vertheilten Theile mit dm, den Abstand dieses Massenelementes von der Rotationsaxe C mit r und die Winkelgeschwindigkeit der Welle in einem beliebigen Augenblicke des Stoßes mit ω; so ist die Winkelgeschwindigkeit des Massenelementes dm gleich $r\omega$ und die lebendige Kraft der Welle wird ausgedrückt durch:

$$\omega^2 \int r^2 dm,$$

wo das Integral $\int r^2 dm$ die Summe der Trägheitsmomente aller sich mit der Axe C drehenden Theile ausdrückt. Die Veränderung dieser lebendigen Kraft in dem Zeitelemente dt der Dauer des Stoßes wird ausgedrückt durch:

$$-2\omega d\omega \int r^2 dm,$$

weil die Geschwindigkeit während des Stoßes abnimmt, und das Element der während derselben Zeit von der Kraft P hervorgebrachten Arbeit durch:

$$Pr'\omega dt,$$

ausgedrückt wird, wenn r' den Halbmesser des bei der Zeichnung des Hebedaumens abgewickelten Kreises ist.

Was die Zapfenreibung anlangt, so rührt sie nur von der Kraft P her, weil alle Trägheitskräfte $dm \frac{rd\omega}{dt}$ der materiellen Elemente dm

einander paarweise aufheben, da diese Massenelemente nach der Voraussetzung um die Axe symmetrisch vertheilt sind. Das Arbeitselement dieser Reibung wird folglich ausgedrückt durch:

$$f_1 P \varrho \omega dt,$$

wenn ϱ den Halbmesser der Zapfen und f_1 das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke bezeichnet, und die Gleichung des Principes der lebendigen Kräfte giebt:

$$-\omega d\omega \int r^2 dm = Pr' \omega dt + f_1 P \varrho \omega dt$$

oder:

$$-d\omega \int r^2 dm = Pr' dt + f_1 P \varrho dt = P \left\{ r' + f_1 \varrho \right\} dt,$$

und wenn man von dem Anfange des Stoßes, wo nach der Voraussetzung $\omega = \Omega$, $t = 0$ ist, bis zu dem Werthe ω integrirt:

$$(\Omega - \omega) \int r^2 dm = (r' + f_1 \varrho) \int P dt.$$

Aber nach dem weiter oben Gesagten hat man zwischen denselben Grenzen, d. h. am Ende des Stoßes:

$$\int P dt = m' v = m' \omega r' = \frac{l}{l - 2fx - ff'(l - 2y)} \cdot \frac{Q}{g} \cdot \omega r',$$

weil sich der Stampfer wegen der geringen Elasticität des Hebedaumens und der Hebelatte nach dem Stoße mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche der des Hebedaumens nahezu gleich ist, wie die Beobachtung lehrt *).

Die obige Gleichung geht also über in:

$$(\Omega - \omega) \int r^2 dm = m' \omega r' \left\{ r' + f_1 \varrho \right\}.$$

Ausdruck der Winkelgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoße als Function der mittleren Winkelgeschwindigkeit.

§. 305. Diese Relation zwischen der größten Winkelgeschwindigkeit Ω der Daumenwelle und ihrer kleinsten Winkelgeschwindigkeit ω ist zur Bestimmung beider nicht hinreichend; allein da die Bewegung

*) Da in der Wirklichkeit die Hebelatte und der Hebedaumen während des Stoßes oder der Zusammendrückung eine Biegung erfahren, und gegen das Ende des Stoßes ihre ursprüngliche Form wieder annehmen, so folgt daraus, daß der Stampfer eine etwas größere Geschwindigkeit annimmt, als die des Hebedaumens, und letztere verlassen muß. Aber einerseits ist diese Wirkung wegen der geringen Biegsamkeit der einander berührenden Theile und der Veränderung ihrer Elasticität in Folge der wiederholten Stöße sehr gering, und andererseits wird dieser Geschwindigkeitsüberschuß durch die Reibungen, welche diese Reactionskräfte an den Leitungen, Scheidelatten rc. hervorrufen, schnell aufgehoben. Auch lehrt die Beobachtung, daß der Stampfer sichtbar den Hebedaumen nicht verläßt, was beweist, daß man sich sehr wenig von der Wahrheit entfernt, wenn man annimmt, daß sich beide Körper nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit bewegen.

dieser Welle fortwährend durch den Beweger erhalten wird, so entfernt sich ihre wirkliche Geschwindigkeit sehr wenig von einer gewissen mittleren Geschwindigkeit Ω', welche nothwendig zwischen Ω und ω liegt und in der Praxis immer sehr wenig von dem arithmetischen Mittel dieser beiden letzten Geschwindigkeiten verschieden ist. Man kann also näherungsweise setzen:

$$\Omega' = \frac{\Omega + \omega}{2},$$

und man ist so im Stande, die Werthe von Ω und ω als Functionen dieser mittleren Geschwindigkeit Ω' zu bestimmen, welche in jedem Falle durch die Beobachtung der Anzahl der Umdrehungen, welche die Daumenwelle in einer gegebenen Zeit macht, erhalten wird. Denn setzt man:

$$\int r^2 dm = Mr'^2,$$

so ergiebt sich aus der ersten Gleichung:

$$\omega = \frac{\Omega M r'^2}{m'r'^2 + f_1 \varrho m'r' + Mr'^2} = \frac{\Omega M}{m' + f_1 \frac{m'\varrho}{r} + M},$$

und wenn man zur Vereinfachung der Ausdrücke:

$$m' + f_1 \frac{m'\varrho}{r'} + M = M'$$

setzt, so kommt:

$$\omega = \frac{\Omega M}{M'}.$$

Dieser Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoße zeigt, daß sie in der That von der Geschwindigkeit Ω vor dem Stoße in allen in der Praxis vorkommenden Fällen sehr wenig verschieden ist, weil m' immer gegen M ziemlich klein ist.

Wenn man die letzte Gleichung mit der Relation:

$$\Omega' = \frac{\Omega + \omega}{2}$$

verbindet, so findet man successive:

$$\Omega = \frac{2\,\Omega' M'}{M + M'}, \text{ und } \omega = \frac{2\,\Omega' M}{M + M'}.$$

Durch den Stoß verursachter Verlust an lebendiger Kraft.

§. 306. Vermittelst dieser Werthe läßt sich nun leicht der durch den Stoß verursachte Verlust der lebendigen Kraft als Function der mittlern Winkelgeschwindigkeit der Daumenwelle finden. Denn die lebendige Kraft des Systemes vor dem Stoße ist nichts anders, als die der Daumenwelle, weil sich der Stampfer in Ruhe befand, und wird ausgedrückt durch:

$$\Omega^2 \int r^2 dm = \Omega^2 M r'^2 = \frac{4\,\Omega'^2 M M'^2 r'^2}{(M + M')^2}.$$

Nach dem Stoße ist die lebendige Kraft der Welle $= \omega^2 M r'^2$, die des Stampfers $= \omega^2 m r'^2$ und mithin die des ganzen Systemes:

$$\omega^2 r'^2 \left\{ M + m \right\} = \frac{4\,\Omega'^2 M^2 r'^2\,(M + m)}{(M + M')^2}.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{4\,\Omega'^2 M r'^2}{(M + M')^2} \left\{ M'^2 - M\,(M + m) \right\},$$

wobei man sich erinnern muß, daß:

$$- M' = m' + \frac{f_1 m' \varrho}{r} + M \text{ und}$$

$$m' = \frac{l}{l - 2fx - ff'\,(l - 2y)} \cdot \frac{Q}{g}$$

ist.

Bei numerischen Anwendungen muß man das Trägheitsmoment

$$\int r^2 d m = M r'^2$$

aller Theile berechnen, welche sich um die Axe der Daumenwelle drehen, um daraus den Werth von M abzuleiten; allein man wird in vielen Fällen finden, daß sich der Ausdruck der während des Stoßes verlorenen lebendigen Kraft zwischen den äußersten Grenzen $M = m$ und $M = \infty$ sehr wenig ändert. Hiervon kann man sich z. B. leicht in dem Falle der Stampfer überzeugen; denn für die sehr ungünstigen Annahmen:

$$l = 1^m,20,\ x = 0^m,40,\ f = 0^m,15,\ f' = 0^m,10,\ y = 0^m,50$$

findet man zunächst:

$$m' = \frac{l}{l - 2fx - ff'\,(l - 2y)} \cdot m = 1{,}111 \cdot m,$$

und wenn man setzt:

$$f_1 = 0{,}10,\ \frac{\varrho}{r'} = 0{,}1,$$

so erhält man:

$$M' = m'\left(1 + \frac{f_1 \varrho}{r'}\right) + M = 1{,}01 \cdot m' + M = 1{,}122 \cdot m + M.$$

Substituirt man diese Werthe in den allgemeinen Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft, so erhält man:

$$\frac{4\,\Omega'^2 M r'^2}{(M + M')^2} \left\{ M'^2 - M\,(M + m) \right\}$$

$$= \frac{4\,\Omega'^2 M r'^2}{(2M + 1{,}122\,m)^2} \left\{ (M + 1{,}122\,m)^2 - M\,(- M + m) \right\}.$$

Wenn man nun in diesem Ausdrucke successive $M = m$ und $M = \infty$ setzt, was den beiden Grenzfällen entspricht, nämlich dem Falle, wo die Masse der Daumenwelle, auf den Berührungspunct bezogen, der des Stampfers gleich ist, und dem Falle, wo im Gegentheil die Masse dieser Welle gegen die des Stampfers als unendlich groß betrachtet werden kann; so findet man für den Verlust an lebendiger Kraft in dem Falle von $M = m$ den Ausdruck:

$$1{,}027\,\Omega'^2 m r'^2$$

und in dem Falle von $M = \infty$ den Ausdruck:

$$1{,}224\,\Omega'^2 m r'^2,$$

welche Werthe nur um 0,081 oder $^1/_{12}$ des größten von beiden verschieden sind, und da M gegen m immer sehr groß ist; so sieht man, daß man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man den Verlust an lebendiger Kraft in der Voraussetzung von $M = \infty$ bestimmt.

Durch den Stoß verursachte Consumtion an lebendiger Kraft.

§. 307. In dem Vorhergehenden haben wir gesehen, daß in den in Rede stehenden Maschinen die bei jedem Stoße stattfindende Consumtion an lebendiger Kraft aus der während des Stoßes verlorenen lebendigen Kraft und der dem Operator mitgetheilten lebendigen Kraft, welche als der Nutzeffect betrachtet werden kann, bestand. Den ersten Verlust an lebendiger Kraft haben wir eben berechnet, und man muß denselben in jedem Falle so viel als möglich zu vermindern suchen. Was den zweiten Verlust anlangt, welcher zur Hervorbringung der Arbeit des Operators erforderlich ist; so läßt sich derselbe nicht vermindern, und man muß den Werth desselben:

$$\omega^2 m r'^2$$

zu dem eben berechneten Verluste addiren, und die Summe, welche man als Function der mittleren Winkelgeschwindigkeit Ω' der Daumenwelle ausdrücken kann, giebt die Gesammtconsumtion der Welle an lebendiger Kraft bei jedem Stoße. Allein man erhält den Ausdruck dieser Größe leichter, wenn man die Veränderung der lebendigen Kraft der Welle für jeden Stoß unmittelbar bestimmt.

Denn da Ω und ω nach der Voraussetzung die Winkelgeschwindigkeiten der Welle vor und nach dem Stoße sind, so hat man für die Veränderung ihrer lebendigen Kraft während der ganzen Dauer der Reaction:

$$(\Omega^2 - \omega^2)\int r^2 dm = (\Omega^2 - \omega^2)\, M r'^2.$$

Substituirt man in diesen Ausdruck für Ω und ω ihre Werthe als Functionen der mittleren Winkelgeschwindigkeit Ω':

$$\Omega = \frac{2\,\Omega' M'}{M + M'} \text{ und } \omega = \frac{2\,\Omega' M}{M + M'},$$

folglich:

$$\Omega^2 - \omega^2 = 4\,\Omega'^2\,\frac{M' - M}{M + M'},$$

so verwandelt sich derselbe in:

$$4\,\Omega'^2 - Mr'^2 \frac{M'-M}{M+M'} = 4\,\Omega'^2 Mr'^2 \frac{m'\left(1+f_1\frac{\varrho}{r'}\right)}{2M + m'\left(1+f_1\frac{\varrho}{r'}\right)},$$

wo

$$M' = M + m'\left(1+f_1\frac{\varrho}{r'}\right)$$

ist.

Quantität Arbeit, welche die Daumenwelle bei jedem Stoße consumirt.

§. 308. Diese lebendige Kraft muß also die Daumenwelle bei jedem Stoße consumiren, und da die ganze Veränderung der lebendigen Kraft einer Consumtion an Arbeit entspricht, welche dem Zahlenwerthe nach die Hälfte derselben ist; so wird die Quantität Arbeit, welche die Welle bei jedem Stoße gebraucht, um die Verluste zu bestreiten und dem Stampfer die Geschwindigkeit $\omega r'$ zu ertheilen, ausgedrückt durch:

$$2\,\Omega'^2 Mr'^2 \cdot \frac{m'\left(1+f_1\frac{\varrho}{r'}\right)}{2M + m'\left(1+f_1\frac{\varrho}{r'}\right)}.$$

Dieser Ausdruck, worin:

$$m' = \frac{l}{l - 2fx - ff'(l-2y)}\,\frac{Q}{g}$$

ist, läßt sich leicht berechnen; allein man kann denselben in gewissen Fällen noch vereinfachen, wenn man bemerkt, daß er, wenn M gegen m' sehr groß ist, sehr wenig von dem $M = \infty$ entsprechenden Werthe verschieden ist. Denn derselbe ist offenbar

$$= 2\,\Omega'^2 r'^2 \cdot \frac{m'}{\dfrac{2}{1+f_1\dfrac{\varrho}{r'}} + \dfrac{m'}{M}},$$

und wenn man, wie vorhin, $f_1 = 0{,}10$ und $\frac{\varrho}{r'} = 0{,}10$ setzt; so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\frac{2\,\Omega'^2 r'^2 m'}{1{,}980 + \dfrac{m'}{M}}.$$

Unter dieser Form giebt derselbe für die jedem Stoße entsprechende Consumtion an Arbeit für $M = \infty$ den Werth:

$$\frac{2\,\Omega'^2 r'^2 m'}{1{,}980} = 1{,}01\,\Omega'^2 r'^2 m',$$

und für $M = 10 \cdot m'$ den Werth:

$$\frac{2\,\Omega'^2 r'^2 m'}{2{,}08} = 0{,}961\,\Omega'^2 r'^2 m'.$$

Da diese beiden Werthe nur um 0,04 des kleinsten derselben von einander verschieden sind, so sieht man, daß man bei den Anwendungen, wo das Verhältniß von m' zu M immer kleiner ist als $^1/_{10}$, ohne merklichen Fehler für die bei jedem Stoße consumirte Quantität Arbeit den Werth:

$$\Omega'^2 r'^2 m' \left(1 + f_1 \frac{\varrho}{r'}\right),$$

nehmen kann, welcher der Voraussetzung von $\frac{M}{m'} = \infty$ entspricht.

Quantität Arbeit, welche in der Secunde durch die Stöße consumirt wird.

§. 309. Da sich der allgemeine Ausdruck leicht berechnen läßt, so wollen wir denselben noch zur Bestimmung der durch die Stöße in 1 Secunde consumirten Quantität Arbeit anwenden. Wenn bei jeder Umdrehung der Daumenwelle n Stöße oder Hebungen des Stampfers und μ Umdrehungen der Welle in der Minute stattfinden; so wird die in jeder Secunde durch die Stöße consumirte Quantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$\frac{n\mu}{60} \cdot 2\,\frac{\Omega'^2 r'^2 m'}{\frac{2}{1 + f_1 \frac{\varrho}{r'}} + \frac{m'}{M}} = \frac{n\mu}{30} \cdot \frac{\Omega'^2 r'^2 m'\ k \cdot m}{\frac{2}{1 + f_1 \frac{\varrho}{r'}} + \frac{m'}{M}}.$$

Während des Hubes der Stampfer hervorgebrachte Quantität Arbeit.

§. 310. Nachdem auf diese Weise die Quantität Arbeit berechnet ist, welche in der Secunde während des Stoßes der Hebedaumen gegen die Hebelatten der Stampfer consumirt wird, ist damit noch die zu verbinden, welche die Daumenwelle hervorbringen muß, um die Stampfer auf die beabsichtigte Höhe zu heben, und die passiven Widerstände zu überwinden, und endlich die Quantität Arbeit, welche durch die Zapfenreibung während des Zeitraumes zwischen dem Augenblicke, wo ein Hebedaumen die Hebelatte eines Stampfers verläßt, und dem Augenblicke, wo ein anderer Hebedaumen sie wieder berührt, consumirt wird (Fig. 113). Um die erste dieser beiden letzten Quantitäten Arbeit zu bestimmen, wollen wir uns erinnern, daß wir im §. 216 für die Kraft, welche der Hebedaumen in einer beliebigen Lage des Stampfers ausüben muß, gefunden haben:

$$P = \frac{Q l}{l - 2 f x - f f' (l - 2 y)},$$

wo Q das Gewicht des Stampfers,

l die gegenseitige Entfernung der Halter a, a',

y die Höhe des Berührungspunctes m des Hebedaumens mit der Hebelatte über dem untern Halter a',

x die horizontale Entfernung desselben Punctes m von der Axe des Stampfers und

f, f' die Verhältnisse der Reibung zu dem Drucke für den Stampfer und die Halter und für den Hebedaumen und die Hebelatte bezeichnet.

Hiernach wird das in dem Zeitelemente dt von der Kraft P in ihrer eigenen Richtung hervorgebrachte Arbeitselement ausgedrückt durch:

$$P \cdot dy = \frac{Q\, l\, dy}{l - 2fx - ff'(l - 2y)},$$

und um die einem Hube des Stampfers entsprechende totale Quantität Arbeit zu erhalten, müßte man diesen Ausdruck zwischen den entsprechenden Grenzen integriren.

Die in den Stampfmühlen oder Stoßherden angewandten Hebedaumen haben zuweilen, und müßten eigentlich immer die Form einer Kreisevolvente haben, damit der Hebelarm des Widerstandes constant, und folglich die Geschwindigkeit in einem constanten Verhältnisse übertragen würde. In diesem Falle ist die Größe x constant, und wenn man setzt:

$$x = b \text{ und } \frac{2ff'}{l - 2fx - ff'l} = a,$$

so verwandelt sich der Ausdruck für das von der Kraft P hervorgebrachte Arbeitselement in:

$$Pdy = \frac{Q\, l\, dy}{l - 2fb - ff'l + 2ff'y} = \frac{Ql}{l - 2fb - ff'l} \cdot \frac{dy}{1 + ay};$$

und wenn man von dem Werthe $y = h'$, welcher dem Augenblicke entspricht, wo der Hebedaumen die Hebelatte ergreift, bis zu dem Werthe $y = h''$, welcher dem Augenblicke entspricht, wo er sie verläßt, integrirt; so erhält man für die während eines Hubes hervorgebrachte totale Quantität Arbeit:

$$\int_{y=h''}^{y=h'} Pdy = \frac{Ql}{2ff'} \left\{ log.\,(1 + ah'') - log.\,(1 + ah') \right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$log.\,(1 + ah) = ah - \frac{a^2h^2}{2} + \frac{a^3h^3}{3} - \frac{a^4h^4}{4} \text{ rc.},$$

und wenn man bei dem zweiten Gliede dieser Reihe stehen bleibt, was, wie man sogleich sehen wird, immer genügt; so erhält man für den Ausdruck der von der Kraft P während eines ganzen Hubes hervorgebrachten Quantität Arbeit:

$$\int_{y=h''}^{y=h'} Pdy = \frac{Ql}{2ff'} \left\{ a\,(h'' - h') - \frac{a^2}{2}\,(h''^2 - h'^2) \right\}.$$

Mittlerer Werth der von dem Hebedaumen auf die Hebelatte ausgeübten Kraft.

311. Da sich die Kraft P mit y zugleich ändert, so ist es für den Verfolg der Rechnungen von Wichtigkeit, ihren mittleren Werth zu kennen, und da der in ihrer eigenen Richtung beschriebene Weg $= h'' - h'$ ist; so hat man für diesen mittleren Werth, welchen wir mit P bezeichnen wollen, den Ausdruck:

$$P' = \frac{\int P\,dy}{h'' - h'} = \frac{Q\,l\,a}{2ff'}\left\{1 - \frac{a\,(h'' + h')}{2}\right\}.$$

Bei den Anwendungen findet man, daß die Größe:

$$\frac{a\,(h'' + h')}{2}$$

fast immer gegen die Einheit vernachlässigt werden kann; denn wenn man den ungünstigsten Fall annimmt, wo:

$$l = 1^m{,}20,\ f' = 0^m{,}10,\ f = 0^m{,}15,\ b = 0^m{,}40,\ \frac{h'' + h'}{2} = 0^m{,}50,$$

so findet man:

$$a = 0{,}0309 \text{ und } \frac{a\,(h'' + h')}{2} = 0{,}015.$$

In diesem Falle reducirt sich die mittlere Kraft auf:

$$P' = \frac{Q\,l\,a}{2ff'} = \frac{Q\,l}{l - 2bf - ff'l}'$$

welchen Ausdruck man unmittelbar erhalten haben würde, wenn man gleich von vornherein, wie es oft geschieht, das Glied $2ff'y$ im Nenner des Werthes von P hinweggelassen hätte.

Stampfer der Pulvermühlen.

§. 312. Der eben untersuchte Fall findet bei den Pulvermühlen nicht statt, weil in diesen die hölzernen Hebedaumen die Form eines nach einem Halbmesser gerichteten und bloß an seinem Ende abgerundeten Prismas haben. Der Werth:

$$P = \frac{Q\,l}{l - 2fx - ff'\,(l - 2y)}$$

enthält alsdann zwei veränderliche Größen und die Berechnung des Integrales:

$$\int P dy = \int \frac{Q\,l\,dy}{l - 2fx - ff'\,(l - 2y)}'$$

welches die von der Kraft P hervorgebrachte Quantität Arbeit ausdrückt, würde mit Schwierigkeiten verbunden sein, welche man vermittelst des Simpson'schen Theoremes vermeidet, indem man auf folgende Weise verfährt.

Man theilt nämlich den ganzen Hub $h'' - h'$ in eine gerade Anzahl gleicher Theile, wo fast immer schon zwei Theile hinreichen, und berechnet mit Hülfe der Zeichnung die Werthe des Coefficienten:

$$\frac{Ql}{l-2fx-ff'(l-2y)},$$

welche den Werthen:

$$y=h',\ y=\frac{h'+h''}{2},\ y=h''$$

entsprechen, und welche wir resp. durch:

$$F_1, \qquad F_2, \qquad F_3$$

bezeichnen wollen, so erhält man mit einer hinreichenden Annäherung:

$$\int_{y=h''}^{y=h'} Pdy=\frac{h''-h'}{6}\left\{F_1+4F_2+F_3\right\},$$

und da der in der Richtung der Kraft P durchlaufene Weg $= h''-h'$ ist, so wird ihr mittlerer Werth ausgedrückt durch:

$$P'={}^1/_6\left\{F_1+4F_2+F_3\right\}.$$

Bestimmung der mittleren Kraft, welche an dem Umfange eines an der Daumenwelle befindlichen Rades von dem Halbmesser R während des Hubes wirken muß.

§. **313.** Nachdem wir so für die verschiedenen Fälle den Werth der mittleren Kraft, welche in verticaler Richtung wirken muß, um den Stampfer zu bewegen, bestimmt haben, läßt sich auch leicht der Werth der Kraft s finden, welche, indem sie in einer Entfernung R von der Axe wirkt, alle um die Daumenwelle stattfindenden nützlichen und passiven Widerstände überwinden kann. Denn wenn man annimmt, daß s in verticaler Richtung wirkt und es bezeichnet:

- r den Abstand des Berührungspunctes m des Hebedaumens mit der Hebelatte in einem beliebigen Augenblicke des Hubes von der Drehungsaxe (Fig. 113),
- θ den Winkel, welchen der Halbmesser cm mit der Horizontale bildet,
- M das Gewicht der Daumenwelle und
- K die Anzahl der zu gleicher Zeit in Bewegung gesetzten Stampfer, deren Gewicht in Verbindung mit h einen Druck auf die Zapfen ausübt;

so hat man für einen beliebigen Theil des Hubes:

$$sR=Pr'\cos.\theta+f'Pr'\sin.\theta+f_1\varrho\left\{M+s+KP'\right\},$$

und für die während einer unendlich kleinen Winkelverrückung $d\theta$ hervorgebrachte Quantität Arbeit:

$$sRd\theta=Pr'\cos.\theta d\theta+f'Pr'\sin.\theta d\theta+f_1\varrho\left\{M+s+KP\right\}d\theta.$$

Wenn man diese Relation für die ganze Dauer des Hubes integrirt; so ergiebt sich daraus die Quantität Arbeit, und folglich die mittlere Kraft, welche die bewegende Kraft s ausüben muß.

Aus der Betrachtung der Figur ergiebt sich aber leicht, daß man hat:

$$y = a'n + r \sin.\theta \text{ und } x = cd - r \cos.\theta,$$

folglich:

$$dy = r \cos.\theta d\theta, \; dx = r \sin.\theta d\theta$$

und mithin:

$$\int Pr \cos.\theta d\theta = \int Pdy,$$

welches Integral wir näherungsweise zu berechnen wissen, und:

$$f'\int Pr \sin.\theta d\theta = f'\int Pdx.$$

Dieses letzte Integral drückt die von der Reibung des Hebedaumens an der Hebelatte consumirte Quantität Arbeit aus, und man kann folglich darin ohne merklichen Fehler für die Kraft P ihren bekannten constanten, mittleren Werth P' setzen; allein man muß nach der Einrichtung der Maschine untersuchen, ob das Gleiten während der ganzen Dauer des Hubes immer in demselben Sinne stattfindet. Wenn z. B. die Hebedaumen zum Theil unter und zum Theil über der Mittelpunctslinie die Hebelatte ergriffen, so würde der Berührungspunct in der ersten Periode sich gleitend vom Drehungsmittelpuncte gegen den Stampfer zu entfernen, und in der zweiten Periode sich umgekehrt von letzterm gegen erstern zu entfernen, und da in diesen beiden Bewegungen die Arbeit der Reibung immer als ein reiner Verlust consumirt würde; so müßte man die jeder derselben entsprechende, abgesehen vom Zeichen, addiren; allein man hat diese Unterscheidung selten zu machen, weil der Hebedaumen die Hebelatte gewöhnlich nur in der Höhe der Mittelpunctslinie ergreift.

Bezeichnet folglich x_1 den Weg, welchen die übereinanderhingleitenden Puncte durchlaufen und welchen die Zeichnung unmittelbar giebt, so hat man für die Gesammtarbeit der Reibung des Hebedaumens an der Hebelatte den Ausdruck:

$$f' P' x_1.$$

Was das Glied anlangt, welches sich auf die Zapfenreibung der Daumenwelle bezieht, so erhält man seinen Werth unmittelbar, wenn man für θ den ganzen während des Hubes beschriebenen Winkel θ' nimmt, und wenn man den mittleren Werth der veränderlichen Kraft s mit s' bezeichnet; so wird der fragliche Werth ausgedrückt durch:

$$f_1 \varrho \left\{ M + s' + KP' \right\} \theta'$$

und man hat folglich:

$$\int' sRd\theta = \int Pdy + fP' x_1 + f_1 \varrho \left\{ M + s' + KP' \right\} \theta'.$$

Andererseits würde die mittlere Kraft s', welche in demselben Intervalle dieselbe Quantität Arbeit hervorbringt, durch die Relation:

$$s' R \theta' = \int sRd\theta$$

bestimmt.

Aus diesen beiden Relationen ergiebt sich:

$$s' = \frac{\int P dy + f P' x_1 + f_1 \varrho \left\{ M + K P' \right\} \theta'}{(R - f_1 \varrho)\, \theta'},$$

und folglich der Werth von $s' R \theta'$ oder die Quantität der während des Hubes von der Daumenwelle consumirten Quantität Arbeit.

Mittlere Kraft, welche während des Niederfallens des Stampfers in tangentialer Richtung an dem Kreise von dem Halbmesser *R* wirken muß.

§. 314. Zwischen dem Augenblicke, wo ein Hebedaumen die Hebelatte, welche er fortschiebt, verläßt, und dem Augenblicke, wo der folgende Hebedaumen, nachdem der Stampfer herabgefallen ist, sie wieder ergreift, beschreibt die Daumenwelle einen leicht zu bestimmenden Bogen; denn wenn der Winkelabstand zweier Hebedaumen auf einem Kreise von dem Halbmesser R durch einen Bogen von der Länge a gemessen wird, so beschreibt die Welle während des Niederfallens des Stampfers und bis zu dem Augenblicke, wo der folgende Hebedaumen die Hebelatte ergreift, einen Bogen $= a - R\theta'$. Während desselben Intervalles besteht der zu überwindende Widerstand allein in der Zapfenreibung der Welle, welche von dem Drucke $M + KP'$ herrührt, und wenn s'' die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft bezeichnet, so hat man für diese ganze Periode:

$$s'' \left\{ a - R\theta' \right\} = f_1 \frac{\varrho}{R} \left\{ M + KP' \right\} \left\{ a - R\theta' \right\}.$$

In den Pulvermühlen ist gewöhnlich $a = \pi R$.

Totale Quantität Arbeit, welche in der Secunde auf die Daumenwelle übertragen werden muß.

§. 315. Aus dem bisher über die Wirkung der Hebedaumen auf die Stampfer Gesagten sieht man, daß die ganze Dauer der Wirkung eines Hebedaumens in drei Perioden zerfällt, wovon die erste die Dauer des Stoßes ist, während welcher die Daumenwelle bei jedem Stoße eine Quantität Arbeit consumirt, welche ausgedrückt wird durch:

$$\frac{2 \cdot \Omega'^2 r'^2 m'}{\dfrac{2}{1 + f_1 \dfrac{\varrho}{r'}} + \dfrac{m'}{M}}.$$

Die zweite Periode fängt an, wenn der Stoß beendigt ist und der Stampfer sich mit der Geschwindigkeit des Hebedaumens bewegt, und endigt, wenn der Hebedaumen den Stampfer verläßt und dieser niederfällt. Während dieser Periode consumirt die Daumenwelle eine Quantität Arbeit, welche ausgedrückt wird durch:

$$s' R' \theta'.$$

Endlich ist die dritte Periode der Zeitraum zwischen dem Augenblicke, wo ein Hebedaumen den Stampfer verläßt, und dem Augenblicke, wo er von dem folgenden Hebedaumen ergriffen wird. Die dieser Periode entsprechende Quantität Arbeit der Daumenwelle wird ausgedrückt durch:

$$s'' \left\{ a - R\theta' \right\}.$$

Wenn man folglich alle diese sich auf einen einzigen Stoß beziehenden Quantitäten Arbeit zusammennimmt, und annimmt, daß bei jeder Umdrehung der Daumenwelle n Stöße und μ Umdrehungen in der Minute stattfinden; so wird die Quantität Arbeit, welche in der Secunde auf diese Welle übertragen werden muß, ausgedrückt durch:

$$\frac{n\mu}{60} \left\{ \frac{2\,\Omega'^2\, r'^2\, m'}{\dfrac{2}{1 + f_1 \dfrac{\varrho}{r'}} + \dfrac{m'}{M}} + s' R\theta' + s'' \left\{ a - R\theta' \right\} \right\} Km.$$

Betrachtung des Falles, wo die Daumenwelle durch ein an der Welle des Wasserrades befindliches Zahnräderwerk in Bewegung gesetzt wird.

§. 316. Die Stampfmühlen und Stoßherde oder Pochwerke haben gewöhnlich eine Einrichtung, welche die Berechnung zwar nicht schwieriger, aber etwas weitläufiger macht. Das Wasserrad befindet sich nämlich nicht unmittelbar an der Daumenwelle, sondern diese wird durch ein an der Welle des Wasserrades befindliches Zahnräderwerk in Bewegung gesetzt, so daß bei jedem Stoße oder bei jeder Verzögerung der Bewegung der Daumenwelle auch zwischen den Zähnen des Räderwerkes ein Stoß stattfindet, wodurch ein gewisser Theil der lebendigen Kraft consumirt wird, welcher in Rechnung gebracht werden muß, was leicht vermittelst des bereits angewandten Verfahrens geschehen kann. Denn bezeichnet X die Kraft, die in einem beliebigen Augenblicke des Stoßes auf den Zahn des Getriebes oder die Laterne der Daumenwelle, welche wir als vertical voraussetzen, ausgeübt wird, und r den Halbmesser des Grundkreises des Zahnrades, indem auch alle früheren Bezeichnungen beibehalten werden; so ist klar, daß die während eines Elementes dt der Dauer des Stoßes von dieser Kraft X hervorgebrachte Quantität Arbeit:

$$X\omega r\, dt$$

sich zu der von den Trägheitskräften der Daumenwelle herrührenden Quantität Arbeit, welche nach §. 304 ausgedrückt wird durch:

$$-\,\omega\, d\omega \int r^2\, dm$$

addirt, und, wenn man ausdrückt, daß in jedem Augenblicke die Summe dieser Quantitäten Arbeit der Summe der Quantitäten Arbeit gleich ist, welche in entgegengesetztem Sinne durch den Widerstand des Stampfers und durch die Reibung der Zapfen der Welle des Wasserrades hervorgerufen werden, man die Gleichung erhält:

$$-\,\omega\, d\omega \int r'\, dm + X\omega r\, dt = P\omega r'\, dt + f\varrho\,(P + X)\,\omega'\, dt,$$

woraus nach §. 304 folgt, wenn man durch ω dividirt und dann von $\omega = \Omega$ bis $\omega = \omega$ integrirt:

$$(\Omega - \omega) \left\{ \int r^2 dm + (r - f\varrho) \int x dt \right\}$$
$$= (r' + f\varrho) \int P dt = (r' + f\varrho)\, m' \omega r'.$$

Eine ähnliche Gleichung haben wir aufzustellen, um auszudrücken, daß in jedem Augenblicke die Trägheitskräfte der Welle des Wasserrades und der sich mit ihr bewegenden Massen, Quantitäten Arbeit hervorbringen, welche den durch die Widerstände consumirten gleich sind. Zu dem Zwecke wollen wir bemerken, daß bei den gewöhnlich als Motoren dieser Maschinen angewandten Wasserrädern das in den Zellen oder zwischen den Schaufeln befindliche Wasser wie eine excentrische Masse wirkt, welche während des Stoßes oder der Verzögerung der Bewegung vermöge ihrer Trägheit der Verminderung der Geschwindigkeit entgegenwirkt. Bezeichnet also:

N die in einem beliebigen Augenblicke in dem Rade enthaltene Wassermasse,

R die Entfernung ihres Schwerpunctes von der Drehungsaxe,

ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle des Wasserrades in einem beliebigen Augenblicke des Stoßes,

$\int r_1^2 dm$ das Trägheitsmoment dieser Welle und der symmetrisch um ihre Axe vertheilten Massen,

R' den Halbmesser des Theilrisses des gezahnten Treibrades,

n, n' resp. die Anzahl der Zähne des Zahnrades und des Getriebes,

f' das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke der einander berührenden Zähne,

f_1 das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke der Zapfen der Welle des Wasserrades in ihren Lagern und

ϱ' den Halbmesser dieser Zapfen;

so ist leicht einzusehen, daß man auf dieselbe Weise, wie vorhin für die Gleichung des Gleichgewichtes, erhält:

$$- \omega_1 d\omega_1 \left\{ \int r_1^2 dm + N_1 R_1^2 \right\}$$
$$= R' \left\{ 1 + f' \pi \frac{n + n'}{n n'} \right\} \omega_1 X dt + f_1' \varrho \left\{ X dt + N_1 R_1 d\omega_1 \right\} \omega,$$

woraus folgt, wenn man durch ω_1 dividirt und dann von der größten Winkelgeschwindigkeit Ω_1 bis zu der kleinsten ω_1 integrirt:

$$(\Omega_1 - \omega_1) \left\{ \int r_1^2 dm + (R_1 - f_1 \varrho')\, N_1 R_1 \right\}$$
$$= \left\{ R' \left(1 + f' \pi \frac{n + n'}{n n'} \right) + f_1 \varrho' \right\} \int X dt.$$

Endlich kann man zwischen dieser und der vorhin erhaltenen Relation:

$$(\Omega - \omega) \left\{ \int r^2 \, dm + (r - f\varrho) \int X \, dt \right\} = (r' - f\varrho) \, m' \omega r'$$

das Integral:

$$\int X \, dt$$

leicht eliminiren, wodurch man zwischen den Winkelgeschwindigkeiten Ω, Ω_1, ω_1 und ω eine Relation des ersten Grades erhält, womit man die Gleichungen:

$$\Omega_1 R' = \Omega R, \;\; \omega_1 R' = \omega R$$

verbinden muß, weil die während der gegenseitigen Zusammendrückung der Körper durchlaufenen Wege so klein sind, daß dadurch die zwischen den Winkelgeschwindigkeiten aufgestellten constanten Verhältnisse nicht geändert werden.

Bezeichnet ferner Ω_1' die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle des Wasserrades, und nimmt man den Werth:

$$\Omega_1' = \frac{\Omega_1 + \omega_1}{2}$$

als hinreichend genau an, so hat man die erforderliche Anzahl von Gleichungen, um die Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und ω_1 vor und nach dem Stoße als Function der mittlern Winkelgeschwindigkeit Ω_1', welche sich aus der Beobachtung ergiebt, auszudrücken.

Man erhält folglich die bei jedem Stoße von der Welle des Wasserrades consumirte lebendige Kraft als Function dieser Winkelgeschwindigkeit Ω_1' und die Quantität Arbeit, welche der Beweger auf das Wasserrad übertragen muß, wird ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2} \, (\Omega_1^2 - \omega_1^2) \left\{ \int r^2{}_1 \, dm + N_1 R^2{}_1 \right\}.$$

Sie muß zu den Quantitäten Arbeit addirt werden, welche während des Auf- und Niedersteigens des Stampfers consumirt werden, wodurch man die totale Quantität Arbeit erhält, welche bei jedem Hube des Stampfers auf das Wasserrad übertragen werden muß, und wenn man sie mit der Anzahl $\frac{n\mu}{60}$ der in der Secunde stattfindenden Stöße des Stampfers multiplicirt; so erhält man den Nutzeffect, welchen das Wasserrad in jeder Secunde hervorbringen muß.

Hammerwerke.

Verschiedene Arten von Hämmern, welche in den Schmieden angewandt werden.

§. 317. Man wendet in den Schmieden und den übrigen metallurgischen Maschinenanlagen drei Arten von Hämmern an, deren Form und Dimensionen von dem Zwecke abhängen, wozu sie bestimmt sind, nämlich:

1) Schwanzhämmer (Fig. 114), deren Gewicht 40 bis 80 Kilogr. beträgt, und deren Geschwindigkeit 200 bis 400 Schläge in der Minute ist. Der Hebedaumen wirkt auf das dem Hammer ent-

gegengesetzte Ende des Stieles oder Helmes und die Drehungsaxe liegt zwischen den beiden Enden des Helmes.

2) Aufwerfhämmer (Fig. 115), bei welchen der Hebedaumen zwischen dem Hammer und der Rotationsaxe angreift. Ihr Gewicht beträgt 300 bis 400 Kilogramme und ihre Geschwindigkeit 70 bis 200 Schläge in der Minute.

3) Stirnhämmer (Fig. 116), bei welchen der Hebedaumen an dem Ende des Helmes angreift, wo sich der Hammer befindet. Ihr Gewicht beträgt mit Einschluß des Gewichtes des eisernen Helmes 2500 bis 4000 Kilogr. und ihre Geschwindigkeit 60 bis 100 Schläge in der Minute.

Zu dieser Klasse gehören auch die meisten Hämmer oder Stampfer, welche zum Filzen der Wolle oder zum Zerstoßen der Lumpen bei der Papierfabrication angewandt werden.

Die Wirkung des Hebedaumens zerfällt in drei Perioden.

§. 318. Die Theorie der Bewegung dieser drei Arten von Hämmern ist bis auf einige Modificationen der Formeln in Beziehung auf die Lage des Hebedaumens und des Helmes, welche gehörigen Ortes angeführt werden sollen, dieselbe. Gewöhnlich findet der Stoß des Hebedaumens gegen den Stiel in einer durch die Rotationsaxe gehenden Horizontalebene statt, was auch wir hier annehmen wollen, indem wir in der Wirkung der Hebedaumen drei Perioden unterscheiden. Die erste entspricht der Dauer des Stoßes oder der gegenseitigen Zusammenpressung des Hebedaumens und des Theiles des Helmes, worauf er wirkt. Die zweite Periode beginnt in dem Augenblicke, wo der Stoß endet, und dauert bis zu dem Augenblicke, wo der Hebedaumen den Helm verläßt. Die dritte Periode endlich dauert von dem Augenblicke, wo der Hebedaumen den Helm verlassen hat, bis zu dem Augenblicke, wo der folgende Hebedaumen denselben berührt. Wir wollen nun jede dieser drei Perioden nach einander untersuchen.

Nach dem Stoße haben Hebedaumen und Hammerhelm dieselbe Geschwindigkeit.

§. 319. Von dem Augenblicke an, wo der Hebedaumen den Helm berührt, entstehen in den Berührungspuncten gegenseitige Compressionskräfte, welche bis zu dem Augenblicke zunehmen, wo der Eindruck sein Maximum erreicht. An dieser Grenze bewegen sich die Berührungspuncte mit derselben Geschwindigkeit, aber über dieselbe hinaus strebt die Elasticität, den gemachten Eindruck mehr oder weniger wieder aufzuheben und die auf den Hammer übertragene Geschwindigkeit zu vergrößern, indem die des Hebedaumens vermindert wird, so daß, je nach dem Grade der Elasticität, beide Körper sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten von einander trennen müßten (§. 301). Aber einerseits wird durch die Wiederholung und Intensität der Stöße die Elasticität in den Berührungspuncten verändert, und andererseits sind die gewöhnlichen Dimensionen des Helmes und Hebedaumens so beschaffen, daß sich letztere nur sehr wenig biegen, woraus folgt, daß sich Helm und Hebedaumen am Ende der größten Zusammendrückung nahezu mit derselben Geschwindigkeit bewegen, was auch durch die Beobachtung bestätigt wird; denn in keinem in der Praxis vorkommenden Falle kann man zwischen beiden Körpern die geringste Trennung bemerken.

Gleichung des Gleichgewichtes um die Axe des Hammers.

§. 320. Wir wollen nun die Relationen suchen, welche zwischen den auf den Hammer wirkenden Kräften in einem beliebigen Augenblicke des Stoßes oder der Zusammendrückung stattfinden, indem wir zunächst den Fall der Schwanzhämmer betrachten.

Es bezeichne zu dem Zwecke:

N die Druckkraft, welche der Hebedaumen auf den Helm des Hammers ausübt,

ω die Winkelgeschwindigkeit der Daumenwelle in dem betrachteten Augenblicke,

ω' die Winkelgeschwindigkeit des Helmes in demselben Augenblicke,

$R = Ct$, $R' = C't$ resp. die Entfernung des Berührungspunctes des Hebedaumens und der Hebelatte von den Rotationsaxen C und C',

f' das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die Zapfen der Hülse des Helmes und

ϱ' den Halbmesser dieser Zapfen.

Die Kraft N muß jeden Augenblick den Trägheitskräften der verschiedenen materiellen Elemente des Systemes und den passiven Widerständen das Gleichgewicht halten. Bezeichnet man nun mit dm' ein beliebiges Massenelement des Hammers und mit r' seinen Abstand von der Drehungsaxe desselben, so ist seine Geschwindigkeit in dem betrachteten Augenblicke $= r'\omega'$, die Trägheitskraft, welche hervorgerufen wird, wenn der Hebedaumen diesem Massenelemente einen Geschwindigkeitszuwachs $= r' d\omega'$ ertheilt:

$$= dm' \cdot \frac{r' d\omega'}{dt},$$

und das Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Drehungsaxe:

$$= dm' \cdot \frac{r'^2 d\omega'}{dt},$$

und da die Winkelgeschwindigkeit für alle Puncte des Helmes wegen seiner Steifigkeit und Dimensionen nahezu dieselbe ist; so hat man für die Summe dieser Momente:

$$\frac{d\omega'}{dt}\int r'^2 dm' = \frac{d\omega'}{dt} M'R'^2,$$

indem $M'R'^2$ das Integral $\int r'^2 dm'$ oder das Trägheitsmoment des Hammers mit Einschluß seines Helmes und des eisernen Beschlages desselben bezeichnet.

Um den auf die Zapfen ausgeübten Druck zu finden, wollen wir mit x' und y' die rechtwinkligen Coordinaten des Massenelementes dm in Beziehung auf zwei durch den Punct C' gehende Axen bezeichnen, wovon die eine horizontal und die andere vertical ist; so ist klar, daß jede der Trägheitskräfte $dm' \cdot \frac{r' d\omega'}{dt}$ in zwei andere zerlegt werden kann, nämlich in eine verticale Kraft:

$$dm' \cdot x' \frac{d\omega'}{dt}$$

und in eine horizontale Kraft:

$$dm' \cdot y' \frac{d\omega'}{dt},$$

und daß man die Summe der Componenten jeder dieser beider Gruppen von Kräften mit den entsprechenden Zeichen nehmen muß, um die totalen, verticalen und horizontalen Druckkräfte zu erhalten, welche durch die Trägheitskräfte auf die Zapfen ausgeübt werden. Aber wenn

x_1 und y_1 die Coordinaten der Schwerpunctes G des Hammers,
l seine Entfernung von der Drehungsaxe,
a den von der Linie $C'G$ mit der Horizontale gebildeten Winkel und
m' die Masse des Hammers

bezeichnet; so hat man zuvörderst:

$$\frac{d\omega'}{dt}\int x' dm' = \frac{d\omega'}{dt} m' x, \quad \frac{d\omega'}{dt}\int y' dm' = \frac{d\omega'}{dt} \cdot m' y_1$$

und:

$$m' \cdot \frac{d\omega'}{dt}\sqrt{x^2_1 + y^2_1} = \frac{d\omega'}{dt} m' l.$$

Die Totalresultante der Trägheitskräfte ist folglich $= \frac{d\omega'}{dt} m' l$, und wenn man sie nach der verticalen und horizontalen Richtung zerlegt; so erhält man leicht für den auf die Zapfen in einem beliebigen Augenblicke des Stoßes ausgeübten Druck den Ausdruck:

$$\sqrt{\left(N + \frac{d\omega'}{dt} m' l \cos. a\right)^2 + \left(\frac{d\omega'}{dt} m' l \sin. a\right)^2}$$
$$= 0{,}96\left(N + \frac{d\omega'}{dt} m' l \cos. a\right) + 0{,}4 \frac{d\omega'}{dt} m' l \sin. a,$$

weil man wegen der Kleinheit des Winkels a in allen in der Praxis vorkommenden Fällen **a priori** gewiß ist, daß das erste Glied der Wurzelgröße größer ist, als das zweite. Aber außerdem ist fast immer $a = o$, weil der Stoß nach der Horizontale CC' stattfindet, und der Druck auf die Zapfen reducirt sich alsdann auf:

$$N + \frac{d\omega'}{dt} m' l.$$

Hiernach haben wir also für die Schwanzhämmer und für einen beliebigen Augenblick des Stoßes die Gleichung des Gleichgewichtes:

$$NR' = \frac{d\omega'}{dt} M' R'^2 + f'\varrho' \left\{ N + \frac{d\omega'}{dt} m' l \right\},$$

folglich:

$$N = \frac{d\omega'}{dt} \cdot \frac{M'R'^2 + f'\varrho' m' l}{R' - f'\varrho'}.$$

Bemerkung in Beziehung auf die Aufwerf- und Stirnhämmer.

§. 321. Um das Vorhergehende auf den Aufwerf- oder Stirnhammer anzuwenden, braucht man nur zu bemerken, daß in diesem Falle der von dem Hebedaumen ausgeübte Druck N den Helm zu heben strebt, so daß der Totaldruck auf die Zapfen ausgedrückt wird durch:

$$N - \frac{d\omega'}{dt} \cdot m' l,$$

weil der Schwerpunct und der Angriffspunct von N auf derselben Seite der Drehungsaxe liegen.

Man sieht, daß in diesem Falle der durch den Stoß auf die Axe verursachte Druck Null wäre, wenn man hätte:

$$N = \frac{d\omega'}{dt} \cdot m' l.$$

Die Gleichung des Gleichgewichtes des Hammers um seine Drehungsaxe verwandelt sich alsdann in:

$$N R' = \frac{d\omega'}{dt} \cdot M'R'^2 + f'\varrho' \left\{ N - \frac{d\omega'}{dt} m' l \right\},$$

und für den Fall, wo der Druck auf die Zapfen Null ist, in:

$$N R' = \frac{d\omega'}{dt} \cdot M'R'^2;$$

folglich ist:

$$R' = \frac{m' l}{M'},$$

wodurch die Entfernung des Berührungspunctes von der Drehungsaxe des Hammers so bestimmt wird, daß auf die Zapfen kein Stoß ausgeübt wird. Der so bestimmte Punct wird gewöhnlich der Mittelpunct des Stoßes genannt, und die Practiker wenden nicht sowohl die Rechnung, als vielmehr die unmittelbare Beobachtung an, um den Hebedaumen gegen diesen Punct wirken zu lassen. Die vorhergehende Formel giebt z. B. für einen Aufwerfhammer, welcher nebst dem Helme und den eisernen Beschlägen desselben 696 Kilogr. wiegt und dessen Schwerpunct von der Drehungsaxe der Hülse, für welche man $M = 77$ gefunden hatte, um die Länge $l = 1^m,76$ entfernt war:

$$R' = 1^m,62,$$

und nach der Beobachtung hat man:

$$R' = 1^m,80.$$

Diese geringe Plusdifferenz erklärt sich übrigens hinreichend daraus, daß man bei solchen groben Maschinen das Gleichgewicht nicht in aller Strenge genau herstellen kann, und man daher den Hebedaumen lieber etwas jenseits des Mittelpunctes des Stoßes ergreifen läßt, damit der Hammer auf der Seite des Kopfes nicht hin und her zu schwanken strebt.

Bedingungen des Gleichgewichtes um die Daumenwelle.

§. 322. Wir haben eben gesehen, daß der einzige Unterschied zwischen den Aufwerf- und den Schwanzhämmern darin besteht, daß der Druck auf die Drehungsaxe für die ersten durch:

$$N - \frac{d\omega'}{dt} m' l,$$

und für die letzten durch:

$$N + \frac{d\omega'}{dt} m' l$$

ausgedrückt wird. Diese Bemerkung genügt also, um das bereits über die Schwanzhämmer Gesagte, deren Theorie wir nun weiter verfolgen wollen, indem wir die Bedingungen des Gleichgewichtes um die Daumenwelle suchen wollen, auf die übrigen Arten der Hämmer anzuwenden.

Jedes in der Entfernung r von der Axe liegende Massenelement dm setzt der während des Stoßes stattfindenden Veränderung der Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ einen Widerstand $= dm \cdot \frac{r\, d\omega}{dt}$ entgegen, dessen Moment in Beziehung auf die Axe $= dm \frac{r^2\, d\omega}{dt}$ ist.

Die Summe der Trägheitskräfte der Massenelemente der Welle, welche wir als um ihre Axe symmetrisch vertheilt annehmen, wird ausgedrückt durch:

$$\frac{d\omega}{dt} \int r^2\, dm = \frac{d\omega}{dt} M R^2,$$

wenn man setzt:

$$\int r^2\, dm = M R^2.$$

Der Druck auf die Zapfen der Daumenwelle rührt nur von der Kraft N her. Wir haben also für die Gleichung, welche ausdrückt, daß in jedem Augenblicke des Stoßes die Trägheitskräfte der Daumenwelle den Druckkräften des Hebedaumens und der daraus entspringenden Reibung das Gleichgewicht halten:

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot MR^2 = NR + fN\varrho = N \left\{ R + f\varrho \right\},$$

wo f das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die Zapfen und ihrer Lager und ϱ den Halbmesser dieser Zapfen bezeichnet.

Wenn man zwischen dieser Gleichung und der in §. 320 für das Gleichgewicht um die Axe des Hammers erhaltenen den unbekannten Druck N eliminirt; so erhält man die Gleichung:

$$MR^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{R + f\varrho}{R' - f'\varrho'} \left(M' R'^2 + f' \varrho' m' l \right) \frac{d\omega'}{dt}.$$

Wenn man zur Vereinfachung der Ausdrücke bemerkt, daß:

$$\frac{R + f\varrho}{R' - f'\varrho'}\,(M'R'^2 + f'\varrho' m' l)$$

$$= \frac{1 + \frac{f\varrho}{R}}{1 - \frac{f'\varrho'}{R'}} \left\{ 1 + \frac{f'\varrho' m' l}{M' R'^2} \right\} M' R R'$$

ist, und setzt:

$$\frac{1 + \frac{f\varrho}{R}}{1 - \frac{f'\varrho'}{R'}} \left\{ 1 + \frac{f'\varrho' m' l}{M' R'^2} \right\} = K,$$

bemerkend, daß diese Größe K nur von gegebenen Constanten abhängt; so nimmt die vorhergehende Gleichung folgende Form an:

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot M R^2 = K \cdot M' R R' \cdot \frac{d\omega'}{dt}.$$

Wenn man diese Gleichung von der größten Winkelgeschwindigkeit Ω der Daumenwelle bis zu ihrer kleinsten Winkelgeschwindigkeit ω, und dann von $\omega' = 0$ bis $\omega' = \frac{\omega R}{R'}$ integrirt, weil der Hammer von der Ruhe ausgeht und sich nach dem Stoße mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche für den Berührungspunct dieselbe ist, als die des Hebedaumens; so erhält man:

$$(\Omega - \omega)\, M R^2 = K M' R^2 \omega.$$

Für die Aufwerfhämmer würde man offenbar zu derselben Gleichung gelangen, worin:

$$\frac{1 + \frac{f\varrho}{R}}{1 + \frac{f'\varrho'}{R'}} \left\{ 1 \mp \frac{f'\varrho' m' l}{M' R'^2} \right\} = K$$

wäre.

Ausdruck der Winkelgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoße als Functionen der mittleren Winkelgeschwindigkeit.

§. 323. Aus der obigen Gleichung ergiebt sich für die Winkelgeschwindigkeit der Daumenwelle nach dem Stoße als Function ihrer Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoße der Ausdruck:

$$\omega = \frac{\Omega M}{M + K M'},$$

wobei zu bemerken ist, daß in der Praxis die Größe K immer sehr wenig von der Einheit verschieden ist, wegen der Kleinheit der Größen

$\frac{f\varrho}{R}$, $\frac{f'\varrho'}{R'}$ und $\frac{f'\varrho' m' l}{M' R'^2}$ gegen die Einheit *). Hieraus folgt, daß ω um so weniger von Ω verschieden ist, je größer M gegen M' ist. Nun ist aber in den Hammerwerken die Masse der Welle immer weit größer, als die des Hammers, so daß man ohne merklichen Fehler annehmen kann, daß die aus der beobachteten Anzahl der in einer gegebenen Zeit gemachten Umdrehungen abgeleitete mittlere Geschwindigkeit der Daumenwelle nahezu dem arithmetischen Mittel zwischen der größten und kleinsten Geschwindigkeit Ω und ω gleich ist und man daher setzen kann:

$$\Omega' = \frac{\Omega + \omega}{2}.$$

Vermittelst dieser und der vorhergehenden Relation lassen sich nun leicht die Winkelgeschwindigkeiten Ω und ω der Daumenwelle vor und nach dem Stoße als Functionen der mittleren Winkelgeschwindigkeit Ω' ausdrücken; denn es ergiebt sich daraus:

$$\Omega = \frac{2\,\Omega' \left\{ M + K M' \right\}}{2M + KM'} \text{ und } \omega = \frac{2\,\Omega' M}{2M + KM'}.$$

Verlust an lebendiger Kraft während des Stoßes.

§. 324. Vermittelst dieser Werthe können wir nun leicht den Werth der durch den Stoß verlorenen lebendigen Kraft finden. Denn vor dem Stoße bestand die lebendige Kraft des Systemes in der der Welle und war gleich:

$$\Omega^2 M \cdot R^2,$$

und nach dem Stoße besteht sie aus der lebendigen Kraft, welche die Welle noch besitzt, und aus der, welche der Hammer erhalten hat, und ist gleich:

$$\omega^2 M R^2 + \omega'^2 M' R'^2 = \omega^2 R \left\{ M + M' \right\},$$

und da der Hebedaumen den Helm nicht verläßt und beide sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit bewegen; so hat man:

$$\omega' R' = \omega R.$$

Der durch den Stoß bewirkte Verlust an lebendiger Kraft ist folglich:

---

*) **Denn für einen Schwanzhammer hat man:**

$\int r'^2 dm' = MR'^2 = 79$, $f' = 0{,}15$, $f = 0{,}15$, $\varrho' = 0^m{,}03$, $\varrho = 0{,}05$, $m' = 45{,}87, \ldots$
$R' = 0^m{,}893$, $R = 0^m{,}50$, $K = 1{,}0006$,

und für einen Aufwerfhammer:

$\int r'^2 dm' = 234$, $f' = 0{,}15$, $f = 0{,}15$, $\varrho' = 0{,}04$, $\varrho = 0{,}05$, $m = 71{,}35$, $R' = 1^m{,}69, \ldots$
$R = 0^m{,}47$, $K = 1{,}014$.

$$\Omega^2 M R^2 - \omega^2 R^2 \left\{ M + M' \right\} = \Omega^2 R^2 \left\{ M - \frac{M^2 (M + M')}{(M + K M')^2} \right\}$$
$$= \Omega^2 M R^2 \left\{ \frac{(2K - 1) M M' + K^2 M'^2}{(M + K M')^2} \right\},$$

und wenn man für Ω seinen Werth als Function von Ω' setzt, so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$4 M M' \Omega'^2 R^2 \frac{(2K - 1) M + (K^2 M')}{(2M + KM)^2}$$
$$= 4 M' \Omega'^2 R^2 \frac{\left\{(2K - 1) + K^2 \cdot \frac{M'}{M}\right\}}{\left(2 + K \cdot \frac{M'}{M}\right)^2}.$$

Aus dieser letzten Form sieht man leicht, daß der Verlust an lebendiger Kraft mit dem Verhältnisse $\frac{M'}{M}$ abnimmt. Nun haben wir aber gezeigt, daß in allen Fällen der Praxis K sehr wenig von der Einheit verschieden ist, und wenn man folglich in dem vorhergehenden Ausdrucke $K = 1$ setzt; so findet man für $M = M'$ den Verlust an lebendiger Kraft gleich:

$$\tfrac{8}{9}\, \Omega'^2 M' R^2,$$

und für $M = \infty$ gleich:

$$\Omega'^2 M' R^2.$$

Zwischen diesen äußersten Grenzen ändert sich also der Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft noch nicht um $1/9$ seines Werthes für $M = \infty$. In der Praxis geschieht es sehr selten, daß $M' > 1/10\, M$ ist; denn für die in den Eisenhütten angewandten Aufwerfhämmer hat man höchstens $M' = 1/12\, M$ und für die Stirnhämmer höchstens $M' = 1/30\, M$. Wenn man $M' = 1/10\, M$ nimmt, so findet man, daß der Verlust an lebendiger Kraft ausgedrückt wird durch:

$$0{,}997\, \Omega'^2 M' R^2.$$

Man sieht also, daß man in allen in der Praxis vorkommenden Fällen, ohne einen merklichen Fehler zu befürchten, den Verlust an lebendiger Kraft in der Voraussetzung von $M = \infty$ berechnen kann.

Ausdruck des Verlustes der lebendigen Kraft als Function der von dem Hammer gewonnenen lebendigen Kraft.

§. 325. Man kann auch leicht den durch den Stoß verursachten Verlust an lebendiger Kraft durch die dem Hammer ertheilte lebendige Kraft, welche den eigentlichen Nutzeffect des Stoßes bildet, ausdrücken; denn nach dem Stoße hat man:

$$\omega' R' = \omega R = \frac{2 \Omega' M R}{2M + K M'},$$

folglich:

$$\Omega' = \frac{\omega' R' (2M + KM')}{2MR},$$

und wenn man diesen Werth von Ω' in den allgemeinen Ausdruck des Verlustes an lebendiger Kraft substituirt; so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\omega'^2 M' R'^2 \left\{ (2K - 1) + \frac{K^2 M'}{M} \right\}.$$

Hieraus sieht man, daß für dieselbe lebendige Kraft des Hammers der von dem Stoße herrührende Verlust an lebendiger Kraft desto kleiner ist, je kleiner das Verhältniß $\frac{M'}{M}$ wird, und daß sich dieser Verlust für $M = \infty$ und $K = 1$ auf:

$$\omega'^2 M' R'^2$$

oder auf die von dem Hammer erlangte lebendige Kraft reducirt, und da außer dem von den gegenseitigen Zusammendrückungen herrührenden Verluste die Daumenwelle eine gleiche Quantität lebendiger Kraft überträgt; so folgt, daß unter diesen Voraussetzungen die Gesammtconsumtion an lebendiger Kraft durch diese Welle und für jeden Stoß doppelt so groß ist, als die dem Hammer mitgetheilte lebendige Kraft.

Consumtion an lebendiger Kraft durch die Daumenwelle bei jedem Stoße.

§. 326. Im Allgemeinen können wir die von der Daumenwelle consumirte lebendige Kraft nicht unter dieser Form berechnen, weil die Winkelgeschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße nicht a priori gegeben ist; allein vermittelst der vorhergehenden Ausdrücke läßt sich ihr Werth leicht finden; denn diese Größe ist offenbar gleich:

$$(\Omega^2 - \omega^2) M R^2,$$

und nach den Werthen von Ω und ω als Functionen von Ω' hat man für dieselbe den Ausdruck:

$$\frac{4 \Omega'^2 M M' R^2 K}{2M + KM'},$$

worin alles durch Rechnung oder Beobachtung bekannt ist.

Durch den Stoß consumirte Quantität Arbeit.

§. 327. Da die Daumenwelle bei jedem Stoße diese lebendige Kraft consumirt, so muß sie durch den Beweger restituirt werden, oder derselbe muß auf die Welle eine Quantität Arbeit übertragen, welche der Hälfte der consumirten lebendigen Kraft, nämlich:

$$\frac{2 \Omega'^2 M M' R^2 K}{2M + KM'}$$

gleich ist, und wenn die Welle n Daumen hat und μ Umdrehungen in der Minute macht; so ist die in der Secunde durch die Stöße consumirte Quantität Arbeit gleich:

$$\frac{n\mu}{60} \cdot \frac{2 \Omega'^2 M M' R^2 K}{2M + KM'}.$$

Während des Hubes des Hammers ausgeübte mittlere Kraft und consumirte Quantität Arbeit.

§. 328. Nachdem wir die durch den Stoß oder während der ersten Periode der Bewegung der Hebedaumen consumirte Quantität Arbeit berechnet haben, wollen wir zu der zweiten Periode schreiten, welche am Ende des Stoßes anfängt, und endet, wenn der Hebedaumen den Hammerhelm verläßt. Da sich die Geschwindigkeit während des ganzen Hubes nur sehr wenig ändert, so brauchen wir die Trägheit nicht in Rechnung zu bringen, und können unmittelbar zwischen der von dem Hebedaumen ausgeübten Kraft und den verschiedenen Widerständen für eine beliebige Lage die Gleichung des Gleichgewichtes aufstellen. Zu dem Zwecke bezeichne:

$l = C'G$ (Fig. 117) den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes des Hammers und seines Helmes von der Axe C,

a den Winkel, welchen $C'G$ mit der Horizontale bildet, wenn sich der Hammer in Ruhe befindet,

α den Winkel, um welchen sich der Hammer in dem betrachteten Augenblicke von seiner anfänglichen Lage entfernt hat,

s die Normalkraft, welche der Hebedaumen auf den Hammerhelm ausüben muß, um alle Widerstände zu überwinden, und

Q das Gewicht des Hammers, seines Helmes und des Beschlages;

so ist leicht einzusehen, daß der auf die Zapfen der Axe des Hammers ausgeübte Druck für einen Schwanzhammer durch:

$$\sqrt{(Q + s\cos.\alpha)^2 + s^2 \sin.^2\alpha} = 0{,}96 \left\{ Q + s\cos.\alpha \right\} + 0{,}4 s \sin.\alpha,$$

und für einen Aufwerf- oder Stirnhammer durch:

$$\sqrt{(Q - s\cos.\alpha)^2 + s^2 \sin.^2\alpha} = 0{,}96 \left\{ Q - s\cos.\alpha \right\} + 0{,}4 s \sin.\alpha$$

bis auf $^1/_{25}$ genau ausgedrückt wird, weil in beiden Fällen das erste Glied der Wurzelgröße größer ist, als das zweite.

Hiernach ist z. B. für einen Schwanzhammer die Gleichung des Gleichgewichtes um die Axe C':

$$sR' = Ql\cos.(a + \alpha) + f'\varrho' \left\{ 0{,}96\,(Q + s\cos.\alpha) + 0{,}4\, s\sin.\alpha \right\},$$

wenn man bemerkt, daß, da in diesem Falle, wie in dem der beiden andern Hämmer, der Theil des Helmes, auf welchen der Hebedaumen wirkt, gegen die Axe C' gerichtet ist, das Moment der Reibung des Hebedaumens an dem Helme in Beziehung auf diese Axe gleich Null ist.

Da sich aber die Kraft s mit dem Winkel α ändert, so können wir ihren mittleren Werth nur dadurch erhalten, daß wir die Quantität Arbeit berechnen, welche sie während der ganzen Dauer der Berührung hervorbringt. Zu dem Zwecke wollen wir die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung mit $d\alpha$ multipliciren, so erhalten wir zwischen den Elementen der Arbeit oder den virtuellen Momenten die Gleichung:

$$\int_{\alpha=\alpha'}^{\alpha=0} s R' d\alpha = Q l \int \cos.(a + \alpha)\, d\alpha$$

$$+ f' \varrho' \left\{ 0{,}96 \int Q d\alpha + 0{,}96 \int s \cos.\alpha d\alpha + 0{,}4 \int s \sin.\alpha\, d\alpha \right\}.$$

In dieser Relation kann man offenbar in den sich auf die Reibung beziehenden Gliedern ohne merklichen Fehler für s seinen mittleren Werth s' setzen, und da der in der Richtung dieser Kraft durchlaufene Weg $= R' \alpha'$ ist, so hat man, wenn man von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha'$ integrirt:

$$s' R' \alpha = \int_{\alpha=\alpha'}^{\alpha=0} s R' d\alpha = Q l \left(\sin.(a + \alpha) + \sin.a \right)$$

$$+ f' \varrho' \left\{ 0{,}96\, Q \alpha' + 0{,}96\, s' \sin.\alpha' - 0{,}4\, s' \cos.\alpha + 0{,}4\, s' \right\},$$

oder wenn man die ganze Hebung des Schwerpunctes während eines Hubes mit h bezeichnet und bemerkt, daß:

$$h = l \left\{ \sin.(a + \alpha) - \sin.a \right\}$$

ist:

$$s' R' \alpha' = \int s R' d\alpha$$

$$= Q h + f' \varrho' \left\{ 0{,}96\, Q \alpha' + 0{,}96\, s' \sin.\alpha' - 0{,}4\, s' \cos.\alpha' + 0{,}4\, s' \right\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$s' = \frac{Q h + 0{,}96 f' \varrho' Q \alpha'}{R' \alpha' - f' \varrho' \left\{ 0{,}96 \sin.\alpha' + 0{,}4 (1 - \cos.\alpha') \right\}},$$

und hieraus ergiebt sich leicht die von dem Hebedaumen während des Hubes hervorgebrachte Quantität Arbeit:

$$s' R' \alpha' = \frac{Q h + 0{,}96 f' \varrho' Q \alpha'}{R' \alpha' - f' \varrho' \left\{ 0{,}96 \sin.\alpha' + 0{,}4 (1 - \cos.\alpha') \right\}} R' \alpha'.$$

Ebenso fände man für die Aufwerf- und Stirnhämmer:

$$s' R' \alpha' = \frac{Q h + 0{,}96 f' \varrho' Q \alpha'}{R' \alpha' + f' \varrho' \left\{ 0{,}96 \sin.\alpha' - 0{,}4 (1 - \cos.\alpha') \right\}} R' \alpha'.$$

Von dem Beweger während des Hubes hervorgebrachte Quantität Arbeit.

§. 329. Der Hammer muß in jedem Augenblicke eine Quantität Arbeit hervorbringen, welche der aller Widerstände zusammengenommen gleich ist. Bezeichnet folglich:

P die in der Entfernung R_1 von der Rotationsaxe auszuübende Kraft,

ϱ den Halbmesser der Zapfen,

f das Verhältniß der Reibung zum Drucke und

N_1 das Gewicht der Daumenwelle und ihres Zubehöres;

so kann der Druck auf die Zapfen der Hammerwelle wegen der Kleinheit des Winkels α' ausgedrückt werden durch:

$$N_1 + P - s'.$$

Bezeichnet ferner θ den von der Daumenwelle in dem betrachteten Augenblicke beschriebenen Winkel, so haben wir zwischen den um diese Axe hervorgebrachten Elementarquantitäten Arbeit die Relation:

$$\int P R_1 d\theta$$

$$= \int s' R d\theta + \int f s' \cdot \frac{R + R'}{R'} \frac{R' \alpha'}{2} R d\theta + \int f \varrho \left\{ N_1 + P' - s' \right\} d\theta,$$

in welche wir sofort in die sich auf die Reibungen beziehenden Glieder die mittleren Werthe P' und s' von P und s einführen wollen. Bemerken wir, daß $R\theta = R'\alpha$ ist, und integriren diese Gleichung von $\theta = 0$ bis $\theta = \theta' = \frac{R'\alpha'}{R}$; so erhalten wir:

$$P' R_1 \theta' = \int_{\theta = \theta'}^{\theta = 0} P R_1 d\theta$$

$$= s' R' \alpha' + f s' \frac{R + R'}{R'} \frac{(R'\alpha)^2}{2} + f\varrho \left\{ N_1 + P' - s' \right\} \theta',$$

folglich:

$$P' = \frac{s' \left\{ 1 + f \frac{R + R'}{R'} \frac{R'\alpha'}{2} \right\} + f\varrho \left\{ N_1 - s' \right\}}{R_1 - f\varrho}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Quantität Arbeit, welche der Beweger während des Hubes hervorbringen muß:

$$P' R_1 \theta' = P' R_1 \frac{R' \alpha'}{R},$$

und wenn $\frac{n\mu}{60}$ Hebungen in der Secunde stattfinden; so wird die Quantität Arbeit, welche der Beweger in der Secunde hervorbringen muß, um alle Widerstände für diese Periode zu überwinden, ausgedrückt durch:

$$\frac{n\mu}{60} P' R_1 \theta'^{k.m}.$$

Quantität Arbeit für die dritte Periode, wo sich die Maschine leer bewegt.

§. 330. Wenn endlich der Hebedaumen die Hebelatte verlassen hat, so dreht sich die Daumenwelle fort, ohne daß andere Widerstände darauf wirken, wie die Zapfenreibung, welche von dem Gewichte der Welle und der bewegenden Kraft herrührt, und der Werth der von dem Beweger auszuübenden Kraft P'', um diesen Widerstand zu überwinden, wird erhalten, wenn man in dem sich auf den Hub beziehenden Werthe P' die Größe $s' = 0$ setzt. Auf diese Weise erhält man:

$$P'' = \frac{f M_1 \varrho}{R_1 - f\varrho}.$$

Was den von dem Angriffspuncte der Kraft P'' während des leeren Ganges der Maschine beschriebenen Weg anlangt, so ist offenbar, wenn n die Anzahl der Daumen der Welle bezeichnet, das Intervall zwischen ihnen in der Entfernung R von der Axe $= \frac{2\pi R}{n}$, und folglich der in dieser Entfernung leer durchlaufene Bogen:

$$\frac{2\pi R}{n} - R\theta' = \frac{2\pi R}{n} - R'\alpha',$$

und endlich der in der Entfernung R_1 oder von dem Angriffspuncte der Kraft P'' beschriebene Bogen:

$$= \frac{R_1}{R}\left\{\frac{2\pi R}{n} - R'\alpha'\right\}.$$

Die von dieser Kraft P'' bei jedem Hube hervorgebrachte Quantität Arbeit ist folglich:

$$= P'' \cdot \frac{R_1}{R}\left\{\frac{2\pi R}{n} - R'\alpha'\right\}^{k.m}$$

und für die Secunde:

$$= \frac{n\mu}{60} P'' \cdot \frac{R_1}{R}\left\{\frac{2\pi R}{n} - R'\alpha'\right\}^{k.m}.$$

Totalquantität Arbeit, welche in diesen drei Perioden und für die Secunde consumirt wird.

§. 331. Aus dem Vorhergehenden sieht man, daß die Totalquantität Arbeit, welche der Beweger in jeder Secunde auf die Daumenwelle übertragen muß, ausgedrückt wird durch:

$$\frac{n\mu}{60}\left\{\frac{2\,\Omega'^2 M M' R^2 K}{2M + KM'} + P' R_1 \theta' + P'' \frac{R_1}{R}\left(\frac{2\pi R}{n} - R'\alpha'\right)\right\}^{k.m}.$$

Durch die Beobachtung der in diesem Ausdrucke vorkommenden verschiedenen Elemente kann man folglich die auf den Receptor übertragene Quantität Arbeit oder seinen Nutzeffect bestimmen.

Eigentlicher Nutzeffect.

§. 332. Wir haben eben die totale Quantität Arbeit berechnet, welche auf die Daumenwelle übertragen werden muß, um jeden Augenblick alle hervorgerufenen Widerstände zu überwinden; aber da ein Theil dieser Arbeit durch die Widerstände und durch die Verluste an lebendiger Kraft consumirt wird; so ist der eigentliche Nutzeffect kleiner und reducirt sich einestheils auf die Hälfte der dem Hammer ertheilten lebendigen Kraft und anderntheils auf die seiner Hebung entsprechende Quantität Arbeit, so daß dieser Nutzeffect folglich ausgedrückt wird durch:

$$\frac{\omega'^2 M' R'^2}{2} + Qh = \frac{2\,\Omega'^2 M M' R^2}{(2M + KM')^2} + Qh.$$

Diese Ausdrücke für den Nutzeffect und die auf die Daumenwelle übertragene Quantität Arbeit zeigen, daß das darin vorkommende und sich auf die lebendige Kraft des Operators beziehende Glied wie das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit zunimmt, und daß folglich diese Quantitäten Arbeit schneller zunehmen, als die Anzahl der Schläge des Hammers, so daß es vortheilhaft ist, die Geschwindigkeit dieser Operatoren auf die zu reduciren, welche die Arbeit durchaus erfordert, und nicht ohne Nachtheil überschritten werden kann.

Quantität Arbeit, welche zu einer gegebenen Formveränderung des Metalles erfordert wird.

§. 333. Aus den vorhergehenden Rechnungen läßt sich auch der Ausdruck für die Quantität Arbeit ableiten, welche erforderlich ist, um eine bestimmte Formveränderung des Metalles in einem gegebenen Temperaturzustande hervorzubringen. Denn wenn wir z. B. zunächst den Stirnhammer betrachten, so kennen wir die mittlere Winkelgeschwindigkeit Ω', mit welcher er sich bewegt, wenn ihn der Hebedaumen verläßt, und er steigt mit dieser Geschwindigkeit noch ferner bis auf eine Höhe h', welche durch die Relation:

$$\Omega'^2 M' R^2 = 2\,Q h'$$

bestimmt wird. Zu dieser Höhe gelangt, fällt der Hammer auf das Metall zurück, und es wird durch sein Gewicht in Folge der Wirkung der Schwere eine Quantität Arbeit:

$$= Q\,(h + h')$$

hervorgebracht, die ganz zur Hervorbringung der meßbaren Formveränderung des Metalles verwandt wird, und wenn man bemerkt, daß bei dieser Zusammendrückung der Masse die Molecule, auf welche der Stoß unmittelbar ausgeübt wird, oder welche diesen am nächsten liegen, Geschwindigkeiten bekommen, welche fast Null sind; so kann man nach den bekannten Gesetzen des Eindringens fester Körper in verschiedene Mittel den Widerstand als unabhängig von der Geschwindigkeit und der Fläche oder Amplitude des Eindruckes proportional betrachten. Bezeichnen folglich:

a und b die Seiten dieser gewöhnlich rechteckigen Fläche des Eindruckes,

e die Tiefe desselben und

K das constante Verhältniß des Widerstandes zu der Fläche des Eindruckes, oder den Widerstand für das Quadratmeter;

so hat man zur Bestimmung von K die Relation:

$$Q\,(h + h') = K a b e.$$

Bei der Anstellung solcher Beobachtungen muß man zugleich die Farbe oder die Temperatur des Metalles beobachten, um unter denselben Umständen erhaltene Resultate mit einander zu vergleichen.

Wenn der Hammer in seiner Bewegung angehalten wird, wie der Schwanzhammer durch den Preller, oder der Aufwerfhammer durch eine Feder; so wird durch diese Hindernisse ein ziemlich schwer zu berechnender Verlust an lebendiger Kraft bewirkt, so daß man auch die lebendige Kraft des Hammers bei seiner Rückbewegung nicht genau bestimmen kann. Man sieht jedoch leicht ein, daß dieser Verlust an lebendiger Kraft von den gegenseitigen Zusammendrückungen herrührt, welche an den Berührungspuncten selbst stattfinden, deren Elasticität durch die Intensität und Wiederholung der Stöße verändert wird, und fast nichts von der zu der Zusammendrückung angewandten Arbeit restituirt; aber daß der durch die allgemeine Biegung des Helmes oder der Feder consumirte Theil der lebendigen Kraft fast ganz restituirt wird, weil diese Stücke aus elastischen Holzarten verfertigt sind und sich sehr wenig biegen. Wenn man also bestimmt, wie viel der Helm oder die Feder während des Stoßes gebogen wird; so kann man nach ihren Dimensionen und dem bekannten Elasticitätscoefficienten die durch diese Biegung consumirte und dann wieder restituirte Quantität Arbeit berechnen, und wenn man sie zu der addirt, welche dem Falle des Hammers entspricht, und zwar von der Höhe, welche dem Augenblicke entspricht, wo er den Preller berührt, bis zu seinem Ruhelager; so erhält man die totale Quantität Arbeit, welche der Hammer hervorbringt, um einen bestimmten Eindruck auf das Metall zu machen, und man kann alsdann, wie bei dem Stirnhammer, den Widerstand der zusammenzudrückenden Masse bestimmen.

Die vorhergehende Theorie ist auch auf die Stampfmühlen, Walkmühlen rc. anwendbar.

§. 334. Die vorhergehende Theorie der verschiedenen Arten von Hämmern läßt sich auch auf die Stampfmühlen der Papierfabriken, auf die Walkemühlen rc. anwenden, deren Stampfer eigentlich nichts anders als Schwanz- oder Aufwerfhämmer sind, wenn man auf die besondern Einrichtungen dieser Maschinenanlagen Rücksicht nimmt.

Betrachtung des Falles, wo die Daumenwelle durch ein Zahnrad umgedreht wird.

§. 335. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß der Beweger unmittelbar auf die Daumenwelle wirkt, wie es auch in den meisten Schmieden gewöhnlich der Fall ist, wo sich das Wasserrad an dieser Welle selbst befindet; allein gegenwärtig legt man oft auch Hämmer an, deren Daumenwelle durch ein an der Welle des Wasserrades befindliches Zahnrad umgedreht wird. Bei dieser Einrichtung findet bei jedem Stoße oder Schlage des Hammers auch ein Stoß gegen die Zähne des Rades und ein Verlust an lebendiger Kraft statt, welchen man in Rechnung zu bringen wissen muß, was keine Schwierigkeiten hat, wenn man, wie im §. 316 bei den Stampfmühlen oder Stoßherden mit einem Zahnräderwerke verfährt. Denn werden alle frühern Bezeichnungen beibehalten und bezeichnet s_1 die in einem beliebigen Augenblicke auf den Zahn des Getriebes der Daumenwelle ausgeübte Kraft, und r den Halbmesser dieses Getriebes; so hat man für die Gleichung des Gleichgewichtes dieser Daumenwelle, wenn man z. B. annimmt, daß die Kräfte s_1 und N zu einander parallel und nach demselben Sinne gerichtet sind:

$$s_1 r + \frac{d\omega}{dt} MR^2 = NR + f\varrho\,(s_1 + N),$$

woraus folgt:

$$s_1 = \frac{N(R + f\varrho) - \frac{d\omega}{dt} MR^2}{r - f\varrho}$$

$$= \frac{\frac{d\omega'}{dt} \cdot \frac{R + f\varrho}{R' - f'\varrho'}\,(M'R'^2 + f' m'\varrho' l) - \frac{d\omega}{dt} MR^2}{r - f\varrho}$$

und mithin:

$$\int s_1 dt = \frac{KM'R^2\omega - (\Omega - \omega) MR^2}{r - f\varrho},$$

wobei man sich der Bezeichnungen in §. 320 und folg. erinnern muß. In Beziehung auf die Welle des gezahnten Treibrades hat man für das Gleichgewicht eine ähnliche Gleichung, und wenn

M_2 die in dem Rade enthaltene Wassermasse bezeichnet, welche während des Stoßes durch ihre Trägheit wirkt,

R_1 ihre Entfernung von der Rotationsaxe,

R'' den Halbmesser des Grund- oder Theilkreises des an der Welle des Wasserrades befindlichen Zahnrades,

$\int r_1^2\, dm = M''R''^2$ das Trägheitsmoment der Welle des Wasserrades und ihres ganzen Zubehöres,

$\Omega_1\ \omega_1$ die Winkelgeschwindigkeiten dieser Welle vor und nach dem Stoße,

f_1 das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die Zapfen und ihre Lager,

ϱ_1 den Halbmesser der Zapfen,

n und n' die Anzahlen der Zähne des Rades und des Getriebes und

f das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die Zähne;

so ist leicht einzusehen, daß sich diese Relation auf folgende reducirt:

$$\left\{M_1 R^2\,(R_1 - f_1\varrho_1) + M''R''^2\right\}(\Omega_1 - \omega_1)$$

$$= \left(R'' - f_1\varrho_1 + f''\pi\,\frac{n + n'}{nn'}\right)\int s_1 dt.$$

Wenn man nun zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung, welche beide vom ersten Grade sind, die Größe $\int s_1 dt$ eliminirt; so erhält man eine Relation zwischen den vier Winkelgeschwindigkeiten Ω_1, ω_1, Ω und ω, womit man die Relationen:

$$R'' \Omega_1 = R \Omega, \quad R'' \omega_1 = R \omega$$

und:

$$\Omega'_1 = \frac{\Omega_1 + \omega_1}{2}$$

verbinden muß, wo Ω'_1 die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle des Wasserrades nach der Beobachtung ist, welche mit der der Daumenwelle durch die Relation:

$$R'' \Omega'_1 = R \Omega'$$

verbunden ist.

Man hat also vier Gleichungen, vermittelst welcher man leicht den Ausdruck der Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und ω_1 der Welle des Wasserrades vor und nach dem Stoße als Functionen ihrer mittleren Winkelgeschwindigkeit Ω'_1 und bekannter Größen erhalten kann, woraus sich der Werth der während des Stoßes von dieser Welle consumirten lebendigen Kraft und folglich die entsprechende Quantität Arbeit:

$$\tfrac{1}{2} (\Omega^2_1 - \omega^2_1) M'' R''^2,$$

welche der Beweger bei jedem Stoße hervorbringen muß, ergiebt, und der übrige Theil der Rechnung läßt sich in diesem Falle ohne irgend eine besondere Schwierigkeit auf die bereits angegebene Weise verrichten.

Von den zum Durchschlagen, Schneiden und Prägen der Münzen bestimmten Maschinen.

Kurze Beschreibung derselben.

§. 336. Man wendet in den mechanischen Werkstätten und in den Zeughäusern verschiedene Maschinen zum Abschneiden und Durchschlagen an, welche sich durch ihre besondern Einrichtungen von einander unterscheiden; aber welche im Allgemeinen alle durch den Stoß einer mit einer großen Geschwindigkeit, oder vielmehr mit einer beträchtlichen lebendigen Kraft bewegten Masse auf die zu zerschneidende Masse wirken.

Einer der am häufigsten angewandten Apparate dieser Art ist der Schneide- oder Schraubenbalancier, welcher durch Menschen bewegt wird.

Das zum Durchschlagen von Metallstücken bestimmte Werkzeug ist gewöhnlich aus gehärtetem Gußstahle verfertigt, führt den Namen Durchschlag und endet sich unten in einer ebenen Fläche, welche auf der Richtung der Bewegung senkrecht ist und genau die Form des einzuschlagenden Loches hat. Von der schneidenden Kante an läuft der Durchschlag nach oben zu etwas dünner aus, damit der übrige Theil des Instrumentes, nachdem das Loch durchgeschlagen ist, keinen Seitenwiderstand erfährt. Der Durchschlag tritt mit einem kegelförmigen oder cylindrischen Theile in ein stärkeres Stück, welches der Tragring genannt wird, und wird damit durch Schrauben oder Splinte, welche durch beide gehen, befestigt. Der Tragring und der darin befestigte Durchschlag steigen vertical auf und bewegen sich dabei in prismatischen oder cylindrischen Leitungen, welche an dem Fuße oder dem Gestelle des Balanciers angebracht sind.

Die aufsteigende Bewegung des Tragringes wird durch die Bewegung einer damit fest verbundenen vierkantigen Schraube bewirkt; aber da sich die Schraube bei ihrem Auf- und Niederbewegen dreht, während der Tragring und der Durchschlag nur eine verticale Bewegung haben dürfen, so verbindet man diese beiden Stücke vermittelst eines Schraubenbandes, wodurch sie nur in verticalem Sinne fest mit einander verbunden werden, indem sich die Schraube um sich selbst drehen kann, während sich der Tragring in den Leitungen nur vertical auf- und niederbewegen kann.

Die Schraube hat gewöhnlich drei oder vier Windungen und befindet sich in einer Schraubenmutter von Bronze, welche sich in dem Verbindungsstücke der beiden verticalen Pfeiler des Instrumentes befindet, und ihr Kopf ist in einen großen eisernen Hebel eingelassen, an dessen beiden Enden sich sphärische oder linsenförmige Massen befinden, welche zur Vergrößerung des Trägheitsmomentes der sich mit der Schraube drehenden Stücke bestimmt sind.

Das Gestell der Maschine ist gewöhnlich aus Metall verfertigt, und besteht aus zwei verticalen Pfeilern, welche unten und oben durch einen Querstrick mit einander verbunden sind; das ganze Gestell ist gewöhnlich aus einem einzigen Stücke gegossen und ruht auf einem festen Mauer- oder Zimmerwerk. In dem Boden befindet sich unter der Schraube eine Oeffnung, auf welche nach den Umständen eine mehr oder weniger dicke Platte gelegt wird, worauf vermittelst einer Schraube die Matrice befestigt ist, deren Oeffnung genau der untern Fläche des Durchschlages gleich ist, aus gehärtetem Gußstahl bestehen und genau eine solche Stellung haben muß, daß der Durchschlag ohne Reibung in sie hineintritt.

Spiel der Maschine.

§. 337. Nach dieser kurzen Beschreibung der Maschine ist ihr Spiel leicht einzusehen. Auf das Ende des Hebels wirken Menschen mit ihren Armen unmittelbar oder vermittelst eines Zugseiles und ertheilen der Schraube nebst ihrem Zubehöre eine große Rotationsgeschwindigkeit und folglich eine beträchtliche lebendige Kraft. Zu der Arbeit, welche sie hervorbringen, addirt sich die von der Schwere herrührende, und wird um die von der Reibung des Schraubengewindes consumirte Arbeit vermindert. Der Durchschlag erreicht das auf die Matrice geschobene zu durchschlagende Stück und durchdringt dasselbe vermöge der durch das System und zuweilen auch noch während des Durchschlagens durch die Wirkung der Menschen erlangten lebendigen Kraft, und schneidet davon ein Stück von denselben Dimensionen, wie das von der schneidenden Fläche beschriebene Volumen ab. Die Geschwindigkeit der niederwärts gerichteten und rotirenden Bewegung der Maschine ist am Ende des Durchschlagens beträchtlich vermindert, worauf sich aber, da kein Widerstand mehr vorhanden ist, die Bewegung wieder beschleunigt, bis zu dem Augenblicke, wo die Maschine durch ein festes Hinderniß angehalten wird, wodurch ihre noch vorhandene lebendige Kraft als ein reiner Verlust vernichtet wird, oder durch Federn, welche einen größern oder geringern Theil dieser lebendigen Kraft restituiren.

Theorie des gewöhnlichen Schneide- oder Schraubenbalanciers.

§. 338. Hieraus sieht man, daß dieselbe niedersteigende Bewegung der Schraube aus drei verschiedenen Perioden besteht, welche einzeln untersucht werden müssen. In der ersten Periode der niedersteigenden Bewegung der Schraube und ihres Zubehöres, von dem Augenblicke, wo der Beweger anfängt zu wirken, bis zu dem Augenblicke, wo der Durchschlag das zu durchschlagende Stück erreicht, beschleunigt sich die Bewegung unter der gleichzeitigen und successiven Wirkung der Menschen und der Schwere. In der zweiten Periode, d. h. während der ganzen Dauer des Durchschlagens, verzögert sich die Bewegung bis zu dem Augenblicke, wo es vollendet ist. Hierauf beginnt die dritte Periode, während welcher sich die Bewegung wieder bis zu dem Augenblicke beschleunigt, wo sie durch feste Hindernisse oder Federn ganz aufgehoben wird.

Wir wollen nun jede dieser drei Perioden einzeln untersuchen.

Erste Periode der Bewegung.

§. 339. Zu dem Zwecke bezeichne:

- Q das Gewicht der Schraube, des Balanciers, der Kugeln, des Tragringes rc.,
- r' den mittleren Halbmesser des Schraubengewindes,
- h die ~~Schraubenweite~~, Ganghöhe,
- α den Neigungswinkel der mittlern Schraubenlinie gegen den Horizont,
- r die Entfernung eines beliebigen Massenelementes dm von der Axe der Schraube,
- ω die Winkelgeschwindigkeit in einem beliebigen Augenblicke des Niedersteigens der Schraube,
- ω' die Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblicke, wo der Durchschlag das zu durchschlagende Stück berührt und der Stoß, sowie das Durchschlagen anfängt,
- H die Totalhöhe, von welcher das System sich in diesem Augenblicke herabbewegt hat,
- P die durch die Menschen auf den Hebel in der Richtung des beschriebenen Bogens ausgeübte veränderliche Kraft, und
- ds das in dem Zeitelemente dt von dem Angriffspuncte der Kraft P beschriebene Bogenelement;

so besteht der Druck auf das Schraubengewinde während des Niedersteigens bloß aus dem Gewichte Q der Schraube, wovon die zu diesem Gewinde parallele Componente $Q\,sin.\,\alpha$ das Herabgleiten der Schraube zu bewirken strebt, während die von der auf dem Schraubengewinde normalen Componente $Q\,cos.\,\alpha$ herrührende Reibung diese Bewegung zu verhindern strebt.

Man sieht leicht ein, daß in dem gegenwärtigen Falle die horizontale und an dem Cylinder von dem Halbmesser r' tangentiale Kraft p, welche zum Niedersteigen der Schraube erforderlich ist, ausgedrückt wird durch (§. 262):

$$p = Q \cdot \frac{f - tang.\,\alpha}{1 + f\,tang.\,\alpha} = fQ\,\frac{1 + tang.^2\alpha}{1 + f\,tang.\,\alpha} - Q\,tang.\,\alpha,$$

welcher Ausdruck sich nach den obigen Bezeichnungen und wegen $tang.\,\alpha = \frac{h'}{2\pi r'}$ in folgenden verwandelt:

$$p = fQ\,\frac{4\pi^2 r'^2 + h'^2}{2\pi r'(2\pi r' + fh')} - Q\,\frac{h'}{2\pi r}.$$

Wenn die Schraube vermöge dieser horizontalen Kraft von einer Höhe H herabsteigt, so durchläuft der Angriffspunct dieser Kraft einen Bogen:

$$\frac{H}{h'} \cdot 2\pi r',$$

und folglich ist die während dieser Bewegung durch den Widerstand der Schraube consumirte Quantität Arbeit:

$$p\,\frac{H}{h}\,2\pi r' = fQ\,\frac{4\pi^2 r'^2 + h'^2}{2\pi r' + fh'}\,\frac{H}{h'} - QH.$$

Während derselben Periode bringt die bewegende Kraft die Quantität Arbeit:

$$\int P ds$$

hervor, wo dieses Integral von $s = 0$ bis zu dem Werthe von s genommen werden muß, welcher dem während der Wirkung des Bewegers von dem Angriffspuncte der Kraft P beschriebenen ganzen Bogen entspricht, und diese Quantität Arbeit ist z. B. die, welche die Menschen bei jedem Stoße des Balanciers hervorbringen können.

Was die Veränderung der lebendigen Kraft betrifft, so ist klar, daß, wenn die Maschine von der Ruhe ausgegangen und in dem Augenblicke, wo der Durchschlag die zu durchschlagende Masse erreicht, in horizontalem Sinne eine Winkelgeschwindigkeit ω' erlangt hat, dieselbe in diesem Augenblicke und in diesem Sinne eine lebendige Kraft besitzt, welche ausgedrückt wird durch:

$$\omega'^2 \int r^2 dm,$$

wo $\int r^2 dm$ die Summe der Trägheitsmomente aller sich mit der Schraube drehenden Theile ist. Aber diese Theile haben außerdem eine gemeinschaftliche niederwärts gerichtete verticale Geschwindigkeit $\omega'\frac{h}{2\pi}$ in einem beliebigen Augenblicke, und in dem betrachteten Augenblicke eine Geschwindigkeit $= \omega'\frac{h'}{2\pi}$, was einer in verticalem Sinne erlangten lebendigen Kraft gleich:

$$M\omega'^2 \cdot \frac{h'^2}{4\pi^2} = \frac{Q}{g}\,\omega'^2\,\frac{h'^2}{4\pi^2}$$

entspricht, wo $M = \frac{Q}{g}$ die ganze Masse der Schraube und ihres Zubehöres bezeichnet.

Nach dem Vorhergehenden giebt die Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte auf diese erste Periode die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega'^2 \left\{ \int r^2 dm + \frac{Q}{g}\,\frac{h'^2}{4\pi^2} \right\}$$

$$= \int P \cdot ds + QH - fQ\,\frac{4\pi^2 r'^2 + h'^2}{2\pi r' + fh} \cdot \frac{H}{h'} \quad \ldots\ldots (1).$$

Bei diesem Niedersteigen der Schraube haben wir die Quantität Arbeit nicht in Rechnung gebracht, welche durch die Reibung in dem Verbindungsrohre des Tragringes mit der Schraube consumirt wird, weil sie in diesem Falle äußerst klein ist.

Die vorhergehende Gleichung giebt die Winkelgeschwindigkeit ω' in dem Augenblicke, wo der Durchschlag das zu durchschlagende Stück erreicht, wenn man die Quantität Arbeit kennt, welche der Beweger bei jedem Stoße des Balanciers hervorbringt, und man weiß z. B. nach den Beobachtungen von Coulomb und anderer Ingenieure, daß ein an einer Zugramme arbeitender Mensch bei einer achtstündigen täglichen Arbeitszeit eine mittlere Quantität Arbeit von 5,50 Kilogrammetern in der Secunde hervorbringt. Wenn man also die Anzahl der in einer gegebenen Zeit abgeschnittenen Stücke beobachtet hat, so ergiebt sich daraus die Anzahl der Stöße für die Secunde, und folglich die Quantität Arbeit, welche bei jedem Stoße von dem Beweger auf die Maschine übertragen wird.

Umgekehrt, wenn man vermittelst besonderer Apparate unmittelbar die Winkelgeschwindigkeit ω' bestimmen könnte, so gäbe die obige Gleichung die von dem Beweger hervorgebrachte Quantität Arbeit $\int Pds$.

Zweite Periode der Bewegung.

§. 340. Wir wollen nun die zweite Periode betrachten, während welcher der Durchschlag in die zu durchschlagende Masse tritt, und es bezeichne:

- F die Reactionskraft oder den Totalwiderstand der zu durchschlagenden Masse in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung,
- e die Dicke des zu durchschlagenden Stückes in demselben Augenblicke (Fig. 119),
- c der Umfang des hinwegzunehmenden Theiles oder hineinzuschlagenden Loches und
- K einen constanten Coefficienten, welcher von der Beschaffenheit der zu durchschlagenden Masse abhängt.

Ferner wollen wir annehmen, daß der Widerstand F in jedem

Augenblicke dem Umfange c, der Dicke e und dem Coefficienten K proportional sei; so haben wir:

$$F = K c e.$$

In diesem Ausdrucke drückt der Coefficient K den Widerstand bei dem Durchschlagen für die Flächeneinheit aus. Wenn alsdann E die Totaldicke des zu durchschlagenden Stückes und h die Totalhöhe bezeichnet, von welcher der Durchschlag in dem betrachteten Augenblicke des Durchschlagens sich herabbewegt hat und H behält seine frühere Bedeutung; so ist die Tiefe oder der in dem Sinne von F bis zu dem betrachteten Augenblicke durchlaufene Weg $= h - H$, und man hat:

$$e = E - (h - H).$$

Die von dem Widerstande F in dem Zeitelemente dt hervorgerufene Quantität Arbeit wird also ausgedrückt durch:

$$F dh = K c e dh = K c \left\{ E + H - h \right\} dh,$$

und wenn man von $h = H$ bis $h = H + E$ integrirt, so hat man für die Totalarbeit von F während des Durchschlagens:

$$\int F dh = K c \frac{E^2}{2}.$$

Wenn nun die Schraube in einem beliebigen Augenblicke des Durchschlagens von der zu durchschlagenden Masse nach einem ihrer niedersteigenden Bewegung entgegengesetzten Sinne den Widerstand F erfährt, wodurch diese Bewegung sowohl in verticalem, als in horizontalem Sinne verzögert wird, und wir bezeichnen die Veränderung der horizontalen Winkelgeschwindigkeit während des Zeitelementes dt mit $d\omega$; so wird die Veränderung der verticalen Geschwindigkeit ausgedrückt durch:

$$d\omega \frac{h'}{2\pi}.$$

Die Trägheit der ganzen Masse $\frac{Q}{g}$ der Schraube und ihres Zubehöres wirkt dieser Verzögerung mit einer Intensität entgegen, welche gemessen wird durch:

$$\frac{h'}{2\pi} \int \frac{d\omega}{dt} dm = \frac{h'}{2\pi} \frac{d\omega}{dt} M = \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt}.$$

Ferner verbindet sich hier das Gewicht Q der Schraube mit den Trägheitskräften, um die niedersteigende Bewegung zu unterhalten und der Widerstand, welchen die Schraube in verticalem Sinne erfährt, wird ausgedrückt durch:

$$F - \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt} - Q.$$

Wir wollen denselben vorläufig und zur Vereinfachung der Formeln mit q bezeichnen, so haben wir auszudrücken: daß in jedem Augenblicke des Durchschlagens zwischen diesem Widerstande und den daraus entspringenden Reibungen einerseits, und andererseits zwischen den tangentialen oder rotirenden Trägheitskräften, welche die Bewegung zu unterhalten streben und zu welchen sich die von dem Beweger während des Durchschlagens ausgeübte Kraft P addirt, das Gleichgewicht stattfindet.

Zunächst sieht man leicht ein, daß, da der auf die Schraube wirkende Widerstand q von unten nach oben wirkt, sich die obere Fläche des Schraubengewindes gegen die untere Fläche des Gewindes der Schraubenmutter stützt, und daß nach dem in §. 262 und folg. Gesagten die Kraft p, welche jeden Augenblick in tangentialer Richtung an dem Cylinder der mittleren Schraubenlinien von dem Halbmesser r' wirken muß, um das Niedersteigen der Schraube zu bewirken, ausgedrückt wird durch:

$$p = q \frac{f + tang.\, \alpha}{1 - f\, tang.\, \alpha} = q \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - f h'}.$$

Ferner sieht man leicht ein, daß, wenn sich die Schraube in dem Augenblicke dt um das Längenelement dh niederbewegt, der Angriffspunct dieser Kraft p das Wegelement $ds = \frac{2\pi r'}{h'} dh$ durchläuft, so daß das entsprechende Element der Arbeit ausgedrückt wird durch:

$$q \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - f h'} \cdot \frac{2\pi r'}{h'} \cdot dh.$$

Der Tragring wird während des Durchschlagens mit einer Kraft:

$$F + \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} + Q$$

gegen das Ende der Schraube gedrückt, wodurch eine Reibung entsteht, welche der stehender Zapfen analog ist. Bezeichnet also ϱ den Halbmesser dieses Zapfens und f' das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die einander berührenden Flächen; so ist leicht einzusehen, daß dieser Widerstand während des Zeitelementes dt in einem der Bewegung entgegengesetzten Sinne eine Elementarquantität Arbeit hervorbringt, welche ausgedrückt wird durch:

$$\tfrac{2}{3} f' \left\{ F + \frac{h}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt} + Q \right\} \frac{2\pi \varrho}{h'} dh.$$

Endlich strebt die eben berechnete, an dem Kopfe des Tragringes wirkende Reibung denselben zu drehen, und die Ohren desselben gegen die Leitungen, worin sie sich bewegen, zu drücken, wodurch eine neue Reibung entsteht, welche nach demselben Sinne wirkt, wie der Widerstand F, und wenn f'' das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für die Leitungen, und l den mittleren Abstand der Ohren von der Rotationsaxe bezeichnet; so wird diese Reibung ausgedrückt durch:

$$f' f'' \left\{ F + \frac{h}{2\pi} \frac{Q}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} + Q \right\} \cdot \tfrac{2}{3} \frac{\varrho}{l}.$$

Dieser Widerstand consumirt in dem Zeitelemente dt die Quantität Arbeit:

$$f' f'' \left\{ F + \frac{h}{2\pi} \frac{Q}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} + Q \right\} \tfrac{2}{3} \frac{\varrho}{l} dh.$$

Es ist aber einleuchtend, daß man wegen der Kleinheit der Größen f', f'' und des Verhältnisses $\frac{\varrho}{l}$ diese letzte Reibung, durch deren Betrachtung die Rechnungen übrigens nicht complicirter gemacht werden, ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Andererseits bringt die bewegende Kraft P in derselben Zeit eine Quantität Arbeit hervor, welche ausgedrückt wird durch:

$$Pds = P \cdot \frac{2\pi R}{h'} dh,$$

wo R der Halbmesser des von dem Angriffspuncte der Kraft beschriebenen Bogens ist, und die horizontalen oder Rotationsträgheitskräfte bringen in demselben Sinne eine Quantität Arbeit gleich:

$$\omega d\omega \int r^2 dm$$

hervor, welche dem Zahlenwerthe nach der Hälfte der Veränderung der rotirenden lebendigen Kraft während derselben Zeit gleich ist.

Um also auszudrücken, daß in jedem Augenblicke zwischen den verschiedenen Kräften des Systemes das Gleichgewicht stattfindet, oder daß sie gleiche und entgegengesetzte Quantitäten Arbeit hervorbringen, haben wir die Gleichung:

$$\omega d\omega \int r^2 dm + P \cdot ds = q \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - fh} \frac{2\pi r'}{h} dh$$
$$+ {}^1/_3 f' \left\{ F + \frac{h}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt} + Q \right\} \frac{2\pi \varrho}{h'} dh,$$

oder wenn wir für Q seinen Werth:

$$q = F - \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt} - Q$$

setzten:

$$\omega d\omega \int r^2 dm + P \cdot ds$$
$$= \left\{ F - \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt} - Q \right\} \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - fh'} \cdot \frac{2\pi r'}{h'} dh$$
$$+ {}^2/_3 f' \left\{ F + \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \frac{d\omega}{dt} + Q \right\} \frac{2\pi \varrho}{h'} dh,$$

welche sich wegen $\frac{dh}{dt} = \frac{h'}{2\pi} \omega$ in folgende verwandelt:

$$\omega d\omega \left\{ \int r^2 dm + \frac{Q}{g} \frac{h'}{2\pi} \left(\frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - fh'} r' - {}^2/_3 f' \varrho \right) \right\} + Pds$$
$$= F \left\{ \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi' - fh'} \cdot r + {}^2/_3 f' \varrho \right\} \frac{2\pi}{h'} dh$$
$$- Q \left\{ \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - fh'} - {}^2/_3 f' \varrho \right\} \frac{2\pi}{h'} dh,$$

oder wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{f\,2\pi r' + h'}{2\pi r' - f h'}\,r' + {}^2/_3\,f'\varrho = A,\quad \frac{2\pi r' f + h'}{2\pi r' - h'} - {}^2/_3 f'\varrho = A',$$

setzt:

$$\omega d\omega \left\{ \int r^2 dm + A' \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \right\} + P ds = \frac{2\pi}{h'} \left\{ A F dh - A' Q \cdot dh \right\}.$$

Integriren wir diese Gleichung für die ganze Dauer des Durchdringens oder von $\omega = \omega'$ bis $\omega = \omega''$, welche Grenzen resp. $h = H$ und $h = H + E$ entsprechen; so erhalten wir:

$$\frac{(\omega'^2 - \omega''^2)}{2} \left\{ \int r^2 dm + A' \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \right\} + \int P ds$$
$$= \frac{2\pi}{h'} \left\{ A \int F dh - A' Q E \right\} \ldots\ldots (2).$$

Es ist zu bemerken, daß für die gewöhnlichen Schraubenbalanciers, wo die Menschen an Zugseilen wirken und dem Systeme eine große Rotationsgeschwindigkeit ertheilen, im Anfange der ersten Periode, während welcher sie allein auf die Maschine wirken, das Glied $\int P ds$ während der Dauer des Durchschlagens Null ist, und daß, wenn die Menschen unmittelbar mit der Hand auf den Hebelarm wirken und diese Wirkung während der Dauer der zweiten Periode fortsetzen oder erneuern, die während dieser Periode von ihnen hervorgebrachte Quantität Arbeit gegen die der Veränderung der lebendigen Kraft entsprechende sehr klein ist, so daß man in dem einen, wie in dem andern Falle das Glied $\int P ds$ fast immer gegen das erste vernachlässigen kann. Dasselbe gilt gewöhnlich auch von dem Gliede QE, welches sich auf die durch das eigene Gewicht der Schraube und ihres Zubehöres während des Durchschlagens hervorgebrachte Quantität Arbeit bezieht, weil E immer eine sehr kleine Größe ist. Da sich aber dieses Glied immer sehr leicht berechnen läßt, so kann man es auch in der Gleichung beibehalten.

Gleichung für die Balanciers mit Zugseilen.

§. 341. Dieser Bemerkung zufolge reducirt sich die Gleichung für die Balanciers, welche durch Menschen, die an Zugseilen wirken, in Bewegung gesetzt werden, um dem Systeme eine gewisse Geschwindigkeit zu ertheilen, welches sie alsdann sich selbst überlassen, auf:

$$\frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2} \left\{ \int r^2 dm + A' \frac{h'}{2\pi} \frac{Q}{g} \right\} = \frac{2\pi}{h'} \left\{ A \int F dh - A' Q E \right\} \ldots (3),$$

woraus folgt:

$$\int F dh = Kc\,\frac{E^2}{2} = \frac{\dfrac{\omega'^2 - \omega''^2}{2} \left\{ \int r^2 dm + A' \dfrac{h'}{2\pi} \dfrac{Q}{g} \right\}}{A\,\dfrac{2\pi}{h'}} + \frac{A'}{A}\;QE.$$

Verfahren zur Bestimmung des Coefficienten K durch das Experiment.

§. 342. Wenn man also durch besondere Mittel die Winkelgeschwindigkeit ω'' am Ende des Durchschlagens bestimmen kann, so ergiebt sich aus dieser Gleichung der Werth des constanten Coefficienten K, oder des Widerstandes des zu durchschlagenden Metalles für die Flächeneinheit des Durchbruches, und man kann durch Vergleichung der verschiedenen Werthe von K, welche verschiedenen Werthen von c und E entsprechen, untersuchen, ob das Gesetz, welches wir für den Widerstand bei dem Durchschlagen angenommen haben, das wirklich dabei stattfindende ist. Ist dieses Gesetz einmal dargethan und der Werth von K auf diese Weise bestimmt, so kann man daraus die Quantität Arbeit ableiten, welche bei einem bekannten Umfange des Durchschlages zum Durchschlagen eines Metallstückes von einer gegebenen Dicke erfordert wird, und folglich die Kraft der Maschinen oder des Bewegers bestimmen, welche zu bestimmten Effecten erforderlich ist.

Verfahren zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit am Ende des Durchschlagens.

§. 343. Im Allgemeinen ist es ziemlich schwer, die dem Ende des Durchschlagens entsprechende Winkelgeschwindigkeit ω'' zu bestimmen; jedoch kann man dieses in verschiedenen Fällen bewerkstelligen, wie sogleich näher angegeben werden soll.

Zunächst geschieht es zuweilen, daß der Durchschlag nicht durch einen einzigen Stoß des Balanciers bewirkt werden kann, und daß folglich die Geschwindigkeit durch einen theilweisen Eindruck oder Durchschlag des Metallstückes ganz aufgehoben wird. In diesem Falle setzt man in der obigen Gleichung $\omega'' = 0$, und für E den der beobachteten Tiefe des Eindringens entsprechenden Werth. In anderen Fällen geschieht der Durchschlag vollständig, aber die Geschwindigkeit ist am Ende desselben fast ganz erloschen, was ziemlich häufig geschieht, wenn die Menschen eine große Anzahl Metallstücke von derselben Masse und denselben Dimensionen zu durchschlagen haben, weil sie alsdann durch Uebung dahin kommen, nur die zur Ueberwindung des Widerstandes erforderliche Kraft anzuwenden.

Endlich hat man bei gewissen Schraubenbalanciers die lebendige Kraft, welche sie am Ende des Durchschlages noch haben, durch folgende Vorrichtungen zum theilweisen Heben der Schraube nach jedem Stoße zu benutzen gesucht.

Besondere Einrichtung des Balanciers zu diesem Zwecke.

§. 344. Auf dem Umfange des von den Kugeln beschriebenen Kreises hat man auf der dem Angriffspuncte der Menschen entgegengesetzten Seite eine Spiralfeder angebracht, gegen welche der Balancier stößt, wodurch seine Geschwindigkeit allmählig erlischt. Wenn man annimmt, daß man dieser Feder die gehörige Stärke gegeben hat, und daß ihre Elasticität durch den Stoß nicht merklich geändert wird, was man leicht bewerkstelligen kann, wenn man ihr die gehörigen Dimensionen giebt; so folgt, daß diese Feder, wenn sie sich nach ihrer Zusammendrückung wieder abspannt, eine Quantität Arbeit hervorbringt, welche durch das System bei ihrer Zusammendrückung auf sie übertragen ist, und daß folglich die Geschwindigkeit, welche sie der Schraube wieder mittheilt, nahezu der gleich ist, mit welcher sie von dem Systeme getroffen wird, und da sich endlich leicht beobachten läßt, bis zu welchem Puncte des beschriebenen Kreisumfanges der Balancier durch die Feder zurückbewegt wird; so kann man daraus die dem Systeme wiederertheilte Geschwindigkeit ableiten, welche der gesuchten Geschwindigkeit gleich ist.

Denn bezeichnet ω''' die gesuchte Winkelgeschwindigkeit und H'' die Höhe, um welche die Schraube durch die Wirkung der Feder gestiegen ist, und welcher eine Winkelgeschwindigkeit gleich Null entspricht; so ist leicht einzusehen, daß man unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen die Gleichung hat:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega'''^2 \left\{ \int r^2 dm + \frac{Q}{g}\,\frac{h'^2}{4\pi^2} \right\}$$
$$= QH'' + fQ\,\frac{4\pi^2 r'^2 + h'^2}{2\pi r' - fh'}\,\frac{H''}{h'},$$

woraus sich ω''' ergiebt.

Da nun die Schraube oder der Balancier die Feder mit einer Winkelgeschwindigkeit ω''' erreicht, und von dem Ende des Durchschlages bis zu diesem Augenblicke auf die Schraube nur ihr Gewicht und die Reibung ihres Gewindes in der Schraubenmutter wirkt; so hat man, wenn H' die Höhe bezeichnet, von welcher sie seit dem Ende des Durchschlages bis zu dem Augenblicke, wo sie die Feder trifft, herabgestiegen ist und durch directe Beobachtung erhalten wird, die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} \left\{ \omega'''^2 - \omega''^2 \right\} \left\{ \int r^2 dm + \frac{Q}{g'}\,\frac{h'^2}{4\pi^2} \right\}$$
$$= QH' - fQ\,\frac{4\pi'^2 + h'^2}{2\pi r' + fh'}\,\frac{H'}{h'},$$

woraus sich die dem Ende des Durchschlages entsprechende gesuchte Geschwindigkeit ω'' ergiebt.

Dieses Verfahren setzt, wie man sieht, voraus, daß die Feder ihre Elasticität behält, und daß während ihrer Biegung und Abspannung keine Reibungen oder sonstigen Widerstände entstehen, welche die Rückgangsgeschwindigkeit merklich verändern können. Allein gewöhnlich verhält es sich in der Praxis nicht so, und man muß alsdann diese Widerstände auf folgende Weise in Rechnung bringen.

Zuerst beobachtet man, bis zu welcher Lage die Feder den Hebel während der gewöhnlichen Arbeit der Maschine zurückbewegt, worauf man die Schraube auf verschiedene Höhen hebt, dann der Schwere überläßt und endlich durch Versuche bestimmt, bis zu welcher Höhe sie gehoben werden muß, damit die Schraube den Hebel bis auf dieselbe Entfernung zurückbewegt, als während der Arbeit. Alsdann giebt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega'''^2 \left\{ \int r^2 dm + \frac{Q}{g}\,\frac{h'^2}{4\pi^2} \right\} = QH'' + fQ\,\frac{4\pi^2 r'^2 + h'^2}{2\pi r' + fh'}\,\frac{H''}{h'},$$

wenn man für H'' seinen auf die vorhin angegebene Weise bestimmten Werth setzt, den Werth der Winkelgeschwindigkeit ω''', mit welcher der Balancier am Ende jedes Durchschlages gegen die Feder trifft, worauf man nach dem weiter oben angegebenen Verfahren zur Bestimmung von ω'' schreitet.

Apparate, welche die Geschwindigkeit in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung unmittelbar geben.

§. 345. Es giebt auch noch andere bequemere und genauere Mittel, in einem beliebigen Augenblicke einer der drei Perioden der Bewegung des Balanciers die Geschwindigkeit seiner niedersteigenden oder rotirenden Bewegung zu bestimmen. Sie bestehen im Allgemeinen in der Verbindung einer bekannten Bewegung mit der zu bestimmenden, woraus man eine Curve ableitet, welche die stetige Relation zwischen der Zeit und dem durchlaufenen Raume darstellt, so daß man durch die Neigung ihrer Tangenten für jede Lage des Systemes die Winkelgeschwindigkeit bestimmen kann. Vermittelst dieser Apparate kann man also die Geschwindigkeit am Ende der ersten Periode bestimmen und aus der sich darauf beziehenden Gleichung die bei jedem Stoße des Balanciers von dem Beweger hervorgebrachte Quantität Arbeit $\int P ds$ ableiten. Kennt man alsdann die Geschwindigkeit im Anfange und am Ende jedes Durchschlages, so ergiebt sich aus der sich auf diese Periode beziehenden Gleichung die durch den Widerstand der zu durchschlagenden Substanz consumirte Quantität Arbeit:

$$\int F dh = Kc\frac{E^2}{2},$$

und folglich der Werth von K.

Da aber diese letzten Beobachtungsmittel noch wenig bekannt sind und die dazu erforderlichen Apparate selten zu Gebote stehen, so muß man sich eines der weiter oben angegebenen Verfahren bedienen.

Balancier zum Prägen der Münzen.

§. 346. Bei einem zum Prägen der Münzen bestimmten Balancier ist die Geschwindigkeit am Ende jeder Operation immer Null, aber man muß bemerken, daß der Widerstand F ein anderes Gesetz befolgt. Man kann annehmen, daß derselbe in diesem Falle der Fläche oder Amplitude a und der Tiefe e des Eindruckes proportional ist; und folglich ausgedrückt wird durch:

$$F = Kae,$$

mithin die Totalarbeit durch:

$$\int F dh = K\int ae \cdot de = \frac{Kae^2}{2},$$

wo der Coefficient K alsdann den Widerstand für das Quadratmeter der zusammenzudrückenden Masse und e die Totaltiefe des Eindruckes bezeichnet, und übrigens verfährt man bei der Berechnung, wie im vorhergehenden Falle.

Wir wollen das, was wir über die in Rede stehenden Maschinen zu sagen hatten, mit einer kurzen Angabe einiger Beobachtungsresultate beschließen, welche Morin mit dem Schraubenbalancier in dem Artilleriezeughause zu Metz erhalten hat, indem er die verticale niedersteigende Bewegung der Schraube während der verschiedenen Perioden beobachtete.

Zuerst ließ er die Schraube sich unter der alleinigen Wirkung der Schwere herabbewegen, und bestimmte vermittelst eines chronometrischen Apparates die Winkelgeschwindigkeit, nachdem sich die Schraube von einer bekannten Höhe herabbewegt hatte, wodurch er fand, daß das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke für diese Schraube und Schraubenmutter, mit Talg geschmiert, $= f = 0{,}10$ war, wie bei den über die Reibung ebener Flächen von derselben Beschaffenheit und demselben Zustande direct angestellten Versuchen, wodurch die in §. 262 u. folg. aufgestellte Theorie der Reibung der Schrauben mit vierkantigem Gewinde als richtig bestätigt wird. Hierauf beobachtete Morin auf dieselbe Weise die Geschwindigkeit, welche fünf gewöhnlich an dieser Maschine arbeitende Menschen derselben bei jedem Stoße ertheilten, woraus er vermittelst der Formel (1) in §. 339 die Quantität Arbeit ableitete, welche jeder Arbeiter bei jedem Stoße des Balanciers hervorbrachte, und fand sie im Mittel $= 15{,}4$ Kilogrammeter.

Endlich bestimmte er die Geschwindigkeit der Schraube vor und nach dem Durchschlage eiserner und bleierner Platten von verschiedenen Dicken, und vermittelst der Gleichung (3) im §. 341 hat er gefunden, daß die im §. 340 in Beziehung auf das Gesetz des Widerstandes dieser Metalle bei dem Durchschlagen aufgestellte Hypothese durch die Beobachtung bestätigt wurde, und für Eisen von der dunkelrothen Glühhitze hat Morin $K = 8206000$ Kilogr. und für kaltes Blei $K = 4249000$ Kilogr. gefunden.

Fünfter Abschnitt.

Von den Zugbrücken.

Vorläufige Angaben über die Eigenschaften der Zugbrücken im Allgemeinen.

§. 347. Bei allen Zugbrücken bemerkt man zwei wesentlich verschiedene Theile, nämlich die Brückenbahn, welche um eine horizontale Axe beweglich ist und als Brücke dient, wenn sie auf ihre horizontalen Lager herabgelassen wird, die Communication aber abschneidet, wenn sie gegen die verticalen Ständer des Einganges empor gezogen wird, und dann alle diejenigen Stücke, welche die Brückenbahn in allen ihren verschiedenen Lagen im Gleichgewichte halten, so daß die bewegende Kraft nur die stattfindende Reibung zu überwinden hat. Hauptsächlich durch die Anordnung dieser letzten Theile, welche als Gegengewichte wirken, unterscheiden sich die Zugbrücken von einander und bieten verschiedene Eigenschaften dar; denn die Brückenbahnen sind zwar hin und wieder in ihrer Construction etwas von einander abweichend, was aber auf die wesentlichen Eigenschaften des Systemes sehr wenig Einfluß hat.

Die Haupteigenschaften, welche die Zugbrücken besitzen müssen, und welche fast durchgehends dieselben sind, man mag sie zum Schließen der Thore oder jeder anderen Communication von Festungswerken, oder zur Herstellung einer Communication zwischen den beiden Ufern eines schiffbaren Canales in oder außerhalb einer Stadt anwenden, sind folgende:

1) Das ganze System muß nothwendig diejenige Solidität und Sicherheit haben, daß es in keinem Augenblicke und keiner Lage gefährlich werden kann; es muß also aus solidem und durabeln Materiale construirt sein.

2) Es muß so leicht beweglich als möglich sein, so daß schon wenige Menschen die Brückenbahn in einer sehr kurzen Zeit niederlassen und wieder aufziehen können, wozu nothwendigerweise, wenn man von den Reibungen abstrahirt, erfordert wird, daß das System in allen Lagen im Gleichgewichte ist.

3) Die Theile, welche die Brückenbahn im Gleichgewichte halten, dürfen weder vor, noch hinter den Thorpfeilern dem Durchgange hinderlich sein, und der durch die verticale Erhebung der Brückenbahn entstehende freie Zwischenraum muß gegen die Dimensionen derselben möglichst groß sein, weil hierin der eigentliche Nutzen der Zugbrücken besteht.

4) Die Bewegungsvorrichtungen und die Gegengewichte dürfen nur so wenig wie möglich über die in ihre verticale Stellung gebrachte Brückenbahn hervorragen; denn außerdem, daß dadurch überhaupt unnütze Hindernisse und Kosten entstehen und die Stabilität der Pfeiler des Einganges beeinträchtigt wird, bietet eine solche zu große Erhebung bei Festungswerken noch den Nachtheil dar, daß diese überragenden Theile den Augen und der Zerstörung der Feinde eher ausgesetzt sind und nicht leicht denselben verdeckt werden können.

5) Die in Rede stehenden Theile müssen sich so wenig wie möglich unter das natürliche Terrain, und hauptsächlich unter das Niveau des im Canale oder Graben befindlichen Wassers bewegen; wenigstens müssen die sich niederbewegenden Theile in enge und wenig tiefe Gruben gehen, welche das Wasser nicht durchsickern lassen, so daß in keinem Falle die Stabilität des Mauerwerkes und die Sicherheit des Platzes beeinträchtigt wird. Diese letzten Bedingungen fordern daher, daß die erwähnten Gruben wenigstens 1 Meter hinter der äußeren Fläche der Futtermauern des Durchganges liegen.

Diese Bedingungen können nicht alle mit gleichem Erfolge erfüllt werden.

§. 348. Wenn man alle Zugbrücken aus der ältern und neuern Zeit, welche in Vorschlag gebracht oder ausgeführt sind, untersucht, so ergiebt sich, daß die meisten weit davon entfernt sind, alle vorhergehenden Bedingungen mit Vortheil zu erfüllen; aber man darf sie deßhalb nicht verdammen. Denn jede Zugbrücke, welche unter gewissen Verhältnissen mehr oder weniger bedeutende Unbequemlichkeiten darbietet, kann dessenungeachtet unter andern Umständen und in besondern Localitäten ihren Zweck sehr gut erfüllen. So kann z. B. die gothische Zugbrücke mit Schlagbalken wegen der wenigen Sorgfalt und einfachen Theorie, welche sie verlangt, ohne große Kosten und überall da, wo Eisen- und Holzbalken zu haben sind, angelegt werden. Aber soll man, weil sie fast ausschließlich diese Vortheile darbietet, weil die Trägheit des menschlichen Geistes sie bis jetzt fast in ihren alten Rechten gelassen hat, in unsern Tagen und bei den industriellen Fortschritten unserer Städte ihr den Vorzug vor andern Systemen geben, welche nur etwas mehr Ueberlegung bei ihrer Anlage erfordern, und unzweifelhaft in architectonischer und militärischer Hinsicht ihre Zwecke besser erfüllen? Wir glauben es nicht, und gewiß auch kein wissenschaftlich gebildeter Ingenieur. Wir wollen daher nicht behaupten, daß eine einzige Zugbrücke zu allen Zeiten und an allen Orten allen andern vorzuziehen sei, sondern wir glauben vielmehr, daß es nur sehr wenige giebt, welche nicht einige wesentliche Vortheile darböten, wodurch sie sich für bestimmte Zwecke empfehlen.

Wir werden jedoch nicht alle Arten von Zugbrücken beschreiben, noch in Parallele mit einander stellen; sondern wir werden uns in diesem kurzen Abrisse hauptsächlich darauf beschränken, eine Theorie von denen zu geben, welche vorzugsweise die Aufmerksamkeit der Ingenieure wegen ihrer eigenthümlichen Einrichtungen, oder wegen der mehr oder minder glücklichen Anwendungen derselben auf die verschiedenen Communicationen der Kriegsplätze auf sich gezogen haben. Die übrigen Arten von Zugbrücken findet man in dem Werke: „Science des Ingénieurs de *Belidor*, nouvelle édition," und in dem Mémorial de l'Officier du Génie, Nos 3, 5, 7 und 10, auf welches letztere Werk wir besonders wegen der detaillirten Beschreibungen und Constructionen, wobei wir uns unmöglich aufhalten konnten, verweisen. *)

Allgemeines Princip des Gleichgewichtes der Zugbrücken.

§. 349. Da die bei allen Zugbrücken nothwendig zu erfüllende mechanische Bedingung darin besteht, daß in allen verschiedenen Lagen des Systemes beständig das Gleichgewicht stattfindet, indem man von den passiven Widerständen abstrahirt, welche allein durch die bewegende Kraft überwunden werden müssen; so ist klar, daß die augenblickliche Quantität Arbeit, welche man an der Maschine anbringen muß, ohne Berücksichtigung der Reibung, für alle möglichen Lagen gleich Null sein muß, was offenbar erfordert, daß sich der allgemeine Schwerpunct der Theile in keinem Augenblicke hebt oder senkt, und folglich immer in derselben Höhe oder in derselben horizontalen Ebene bleibt, oder mit andern Worten: Die algebraische Summe der Momente der verschiedenen Gewichte, in Beziehung auf eine beliebige horizontale Ebene genommen, muß unveränderlich sein, und sie muß beständig gleich Null sein, wenn man diese Momente in Beziehung auf eine horizontale Ebene nimmt, welche durch den allgemeinen Schwerpunct des in einer beliebigen Lage betrachteten Systemes geht.

Zugbrücken mit Zug- und Schlagbalken.

Kurze Beschreibung dieser Zugbrücken. Bedingungen ihrer Aufstellung.

§. 350. Bei diesem Systeme wird die Brückenbahn vermittelst eines Schlagbalkens, oder einer über dem Durchgange befindlichen Holzverbindung, welche mit derselben durch zwei an dem ihren Zapfen entgegengesetzten Ende befestigte eiserne Ketten oder Stangen verbunden ist, im Gleichgewichte erhalten. Der Schlagbalken besteht aus zwei großen Längenhölzern oder Zugbäumen, welche mit einander durch Querhölzer verbunden sind. Das ganze System ist um eine Axe A' (Fig. 120), welche zu der Axe A der Brückenbahn parallel ist, beweglich. Da außerdem die verschiedenen Theile auf beiden Seiten der durch die Mitte des Einganges gehenden Verticalebene symmetrisch sind, so braucht man nur zu untersuchen, was in dieser Ebene stattfindet, welche außerdem die Schwerpunkte der Brückenbahn und des Schlagbalkens enthält. Es wird also nicht schwer sein, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines solchen Systemes aufzustellen.

*) Man sehe auch das Lehrbuch der Zimmerkunst von Kraft und Gauthey's Lehrbuch der Construction der Brücken.

Da es in verschiedenen Beziehungen vortheilhaft ist, daß die durch die Mitte der Schlag- und Zugbalken gehende Ebene in der horizontalen und verticalen Lage zu der der Brückenbahn parallel ist, so trifft man die Einrichtung, daß diese Ebenen in allen möglichen Lagen des Systemes zu einander parallel bleiben, oder in jedem Augenblicke denselben Winkel oder Bogen beschreiben. Dieses wird bekanntlich erreicht, wenn man die entgegengesetzten Seiten des Viereckes $ABB'A'$, dessen Spitzen die Mittelpuncte der Zapfen A, A' und die Befestigungspuncte B, B' der Ketten sind, einander gleich macht. Für keine andere Figur, als das Parallelogramm, würde der Parallelismus vorhanden sein und die Bedingungen des Gleichgewichtes mit solcher Genauigkeit und Einfachheit aufgestellt werden können.

Specielle Theorie der Zugbrücke mit Schlagbalken.

§. 351. Man kann hierbei das Gewicht der Ketten BB' als in zwei andere in den Puncten B und B' wirkende Gewichte zerlegt betrachten, und folglich dieselben mit denen zusammenfassen, welche das Totalgewicht des Schlagbalkens und der Brückenbahn ausmachen, deren Schwerpuncte in G' und G liegen. Nun sei O der gemeinschaftliche Schwerpunct des in einer beliebigen Lage betrachteten Systemes, so muß derselbe auch für alle andern Lagen des Systemes in derselben Höhe bleiben, und wenn man die Horizontale LOM zieht, darauf die Verticalen Gg, $G'g'$ fällt und mit P das Totalgewicht der Brückenbahn, sowie mit P' das des Schlagbalkens bezeichnet; so muß man immer die Gleichheit $P \cdot Gg - P' \cdot G'g' = 0$, oder $P \cdot Gg = P' \cdot G'g'$ haben, wenn das Gleichgewicht vollständig stattfinden soll.

Es sei α (Fig. 121) der in einem beliebigen Augenblicke von der geraden Linie AG, welche von der Axe A nach dem Schwerpuncte G der Brückenbahn geht, mit der Horizontale AX gebildete Winkel, und wir wollen annehmen, daß AG den unendlich kleinen Kreisbogen $GS = ds$ beschreibt; so drückt offenbar $ds \cos. \alpha$ das Höhenelement aus, um welches sich der Punct G gehoben hat, und $P \cdot ds \cos. \alpha$ ist die Größe, um welche sich das Moment $P \cdot Gg$ des Gewichtes P verändert hat, oder, wenn man will, das virtuelle Moment, die sich auf das Erheben von P beziehende augenblickliche Quantität Arbeit. Wenn wir folglich mit α', ds' die sich auf den Schwerpunct G' des Schlagbalkens beziehenden analogen Größen bezeichnen, so haben wir nach dem Vorhergehenden:

$$P \cdot ds \cos. \alpha = P' \cdot ds' \cos \alpha'.$$

Aber wenn man mit R, R' die Entfernungen AG und $A'G'$ und mit a, a' die Winkel, welche die Richtungen der verlängerten oder nicht verlängerten Seiten AB, $A'B'$ unseres Parallelogramms mit den Entfernungen AG und $A'G'$ bilden, bezeichnet; so hat man auch:

$$ds = Rd\alpha, \; ds' = R' d\alpha', \; a + \alpha = a' + \alpha'.$$

Wenn man die obige Gleichung durch $d\alpha = d\alpha'$ dividirt, so verwandelt sie sich folglich in:

$$P \cdot R \cos. \alpha = P' \cdot R' \cos. \alpha = P' \cdot R' \cos. (a + \alpha - a').$$

Da diese Gleichung nur noch die Veränderliche α enthält, so kann ihr nur dann für alle Lagen des Systemes genügt werden, wenn man $a - a' = 0$ hat, welche Bedingung offenbar ausdrückt: daß die geraden Linien AG, $A'G'$, welche die resp. Mittelpuncte der Zapfen und die Schwerpuncte der Brückenbahn und des Schlagbalkens verbinden, zu einander parallel sind, wie es auch die Linien sind, welche diese Zapfenmittelpuncte mit den Befestigungspuncten der Ketten verbinden.

Die vorhergehende Bedingungsgleichung reducirt sich daher auf die folgende:

$$PR = P'R',$$

woraus man sieht, daß die resp. in Beziehung auf die Axen der Brückenbahn und des Schlagbalkens genommenen Momente einander gleich sein müssen.

Umgekehrt kann man sich leicht überzeugen, daß unter diesen Bedingungen der allgemeine Schwerpunct, welcher in einem gewissen, auf der Verbindungslinie AA' der Zapfen liegenden Puncte θ liegt, in derselben Höhe erhalten wird, so daß sie also wirklich zum Gleichgewichte hinreichend sind.

Irrigerweise stellt man oft noch viel eingeschränktere Bedingungen, wie z. B. die, daß der Schwerpunct des Schlagbalkens, der Zapfen desselben und der Befestigungspunct der Ketten in einer geraden Linie liegen sollen, woraus nach dem Vorhergehenden auch eine ähnliche Bedingung für die Brückenbahn folgt.

Wie man bei der practischen Aufstellung der Zugbrücken mit Schlagbalken zu verfahren hat und verschiedene Bemerkungen über diese Aufstellung.

§. 352. Wenn es sich um die practische Aufstellung einer Zugbrücke mit Schlagbalken handelt, so construirt man zuerst die Brückenbahn den Localverhältnissen und den Bedingungen der Solidität entsprechend. Hierdurch erhält man den Schwerpunct G, das Gewicht P und das Moment $P \cdot R$. Alsdann bestimmt man den Vorsprung $A'B'$ der Zugbalken vor dem Querholze, welches die Zapfen des Schlagbalkens enthält, nach der Bedingung, daß er fast gleich oder selbst etwas länger, als AB ist. Ferner nimmt man die Dimensionen und Lagen der Holz- und Eisentheile des Schlagbalkens vorläufig den Localverhältnissen entsprechend und zugleich so an, daß man näherungsweise P' und R' berechnen kann, indem sie der Gleichung $P' \cdot R' = P \cdot R$ genügen müssen. Nachdem man nun die Lage und die Dimensionen der Hauptheile nach dem allgemeinen Gebrauche bestimmt hat, läßt man einen Theil willkürlich, z. B. das Querholz, welches dem der Zapfen gegenüber liegt, damit man die Lage oder den Querschnitt desselben noch so verändern kann, wie es die Gleichung der Momente erfordert. Da durch diese ersten Bestimmungen die Lage des Schwerpunctes des Zugbalkens fast völlig fixirt wird, so braucht man nur noch dahin zu sehen, daß die Linien AG, $A'G'$ zu einander parallel werden, was weiter keine Schwierigkeiten darbiebet, weil man, ohne die Gleichung der Momente zu verändern, die Höhe der Axe der Zapfen in der auf der mittleren Ebene des Zugbalkens senkrechten Linie beliebig verändern kann, und weil man außerdem die Lage der Befestigungspuncte der Ketten an der Brückenbahn noch in seiner Willkühr hat. (Wegen weiterer Ausführung sehe man den **Cours de Construction de** ***M. Soleirol.***)

Veränderungen des Gleichgewichtes, welche sich zeigen, wenn man den Schlagbalken an seinen Ort gebracht hat. Mittel, wodurch man denselben abhelfen kann.

§. 353. Wenn man den Schlagbalken an seinen Ort gebracht und die Ketten daran befestigt hat, so zeigt es sich, daß der erwähnte Parallelismus nicht mehr stattfindet, weil durch die starke Spannung der Ketten die Balken gebogen werden. Man muß daher schon vor der Aufstellung der Zugbrücke hierauf Rücksicht nehmen, und dieses läßt sich leicht durch die bekannten Theorien des Widerstandes oder der Festigkeit der Materialien erreichen. Da diese Biegung mit der Zeit, und so wie die Balken von ihrer Elasticität verlieren, zunimmt; so findet man bei den früher erbauten Zugbrücken gewöhnlich: 1) daß sich die Brückenbahn nicht mehr genau gegen die Seitenpfeiler des Einganges legt, sondern einen Zwischenraum läßt, durch welchen man hindurchkommen kann; 2) daß das Gleichgewicht nicht vorhanden ist, selbst wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, in den Raum zwischen den beiden äußersten Querhölzern des Schlagbalkens Gegengewichte legt, wenigstens kann man das Gleichgewicht nur für bestimmte Lagen hierdurch erzielen.

Diese bleibende Biegung der Zugbalken beträgt zuweilen $0^m,16$, und man begreift, daß sie alsdann eine Art Winkelhebel bilden, ähnlich wie bei den sogenannten trägen Wagen, welche Trägheit oder Unempfindlichkeit daher rührt, daß der allgemeine Schwerpunct nicht mehr in derselben Höhe bleibt und daß eine gewisse Kraft erforderlich ist, um sein Erheben zu bewirken, oder sein Fallen zu verhindern.

Wenn eine Zugbrücke eben aufgestellt ist, und sich genau im Gleichgewichte befindet, so ist höchstens ein Mensch, d. h. eine am Ende des Schlagbalkens wirkende Kraft von 25 bis 30 Kilogr. zur Bewegung der 3000 Kilogr. schweren Brückenbahn erforderlich.

Nun zeigt aber die Erfahrung, daß nach zwei Jahren wenigstens vier Menschen erforderlich sind, um eine solche Zugbrücke bequem aufzuziehen. Diese Veränderungen oder Störungen des Gleichgewichtes schreibt man gewöhnlich einer Veränderung der Dichtigkeit des Holzes oder einer Gewichtsvermehrung der Brückenbahn zu. Aber diese Veränderungen üben nicht den größten Einfluß aus, wie es der Gebrauch anderer Systeme zeigt, bei welchen die Unannehmlichkeiten wegen der Biegung der Theile nicht stattfinden.

Mittel zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes bei alten Zugbrücken mit Schlagbalken.

§. 354. Wenn es sich darum handelt, das nach einer gewissen Zeit nicht mehr stattfindende Gleichgewicht einer Zugbrücke mit Schlagbalken wieder herzustellen, so muß man zunächst die Aufhängungspuncte des Schlagbalkens wo möglich um so viel höher bringen, als sie in Folge der Biegung des letzteren nach der Aufstellung herabgesunken sind, um die erwähnten Linien wieder in den oben besprochenen Parallelismus zu bringen. Bei dieser Operation hat man wohl zu untersuchen, ob die Länge der Ketten der Entfernung der Zapfen gleich ist, und darf sie nicht verkürzen, wie es oft unwissende Arbeiter thun, um dadurch den Schwerpunct des Schlagbalkens wieder zu heben; denn anstatt hierdurch den Fehler zu beseitigen, vergrößert man ihn nur noch mehr. Nach diesen ersten Operationen, welche in einigen Fällen noch dadurch erleichtert werden können, daß man die Befestigungspuncte der Brückenbahn gleichfalls verändert, braucht man nur eine passende Belastung in den Kasten des Schlagbalkens zu bringen.

Zu einer vollständigen und genauen Instandsetzung müßte man die Lage der Schwerpuncte der obern und untern Theile des Systemes suchen. Aber wegen der Biegung des Balkens und der Unsicherheit in der Dichtigkeit der verschiedenen Theile würde man nur zu sehr ungenauen Resultaten gelangen. Und selbst wenn man eine neue Brücke aufstellt, würde man nur wenig genaue Resultate erhalten, wenn man nicht vor der Aufstellung die Eisentheile und einige wesentliche Theile des Holzwerkes direct wöge, um wenigstens die Dichtigkeit des verbrauchten Eichenholzes, welche bekanntlich nach dem Alter, der Qualität und der Trockenheit für den Cubikmeter zwischen 800 und 1100 Kilogrammen schwankt, zu bestimmen.

Um die Mängel des Gleichgewichtes alter Zugbrücken zu beseitigen, kann man auch die Lage des Schwerpunctes des Schlagbalkens verändern, wie es der Capitän Blanc in dem **Mémorial de l'Officier du Génie, Nro 10 page 179** vorschlägt. Aber außer dem, daß dieses Verfahren oft bedeutende Belastungen erfordern würde, welche schwer an ihre richtige Stelle auf dem Schlagbalken zu bringen sind, und daß es mühsames Probiren erfordert, würde man doch dadurch den Fehler der alten Zugbrücken nicht aufheben, welcher darin besteht, daß sie sich nicht gegen die Seitenpfeiler des Einganges legen, wenn der Zugbalken seine verticale Lage erreicht hat.

Wir haben uns deßhalb so lange bei den Einzelnheiten der Zugbrücken mit Schlagbalken aufgehalten, weil sie auch in unsern Zeiten die am meisten angewandten sind, das Vorurtheil ihres langen Gebrauches für sich haben und man wenigstens diejenigen, welche bei beschränkten Mitteln nicht durch andere vortheilhaftere Einrichtungen ersetzt werden können, zu erhalten und wieder herzustellen wissen muß.

Unbequemlichkeiten der Zugbrücken mit Schlagbalken.

§. 355. Was diejenigen Mängel der Zugbrücken mit Schlagbalken anlangt, welche sich nicht rein auf mechanische Bedingungen beziehen, so bestehen sie vorzüglich in folgenden:

1) Die Zugbalken können aus der Ferne von dem Feinde gesehen und beschädigt werden, welches die Sicherheit der Passage beeinträchtigt und die Bewegungen der Belagerten, sowie die in Beziehung auf die Communication schwächsten und gefährlichsten Puncte verräth. 2) Die Erhebung des Schlagbalkens über den Durchgang ist die Ursache einer Menge Zufälle, welche der Kundige ohne Verwunderung als ein nothwendiges Uebel erkennt. 3) Das Aufstellen der Zugbalken bietet bei den verdeckten Durchgängen Uebelstände dar, denen man sich nur entziehen kann, indem man die Solidität, ja die Sicherheit aufopfert 2c. 2c.

Zugbrücken mit unterwärts gehenden Schlagbalken.

Gewöhnliche Einrichtung, Gleichgewichtsbedingungen und Bewegung derselben.

§. 356. Um diese wesentlichen Mängel zu vermeiden, hat man verschiedene Einrichtungen des Schlagbalkens oder des Gegengewichtes angegeben, wovon die sinnreichste und einfachste darin besteht, den Schlagbalken unmittelbar in die Verlängerung der Brückenbahn zu legen, so daß der vordere Theil der Zugbalken unter der Brückenbahn liegt und das Gewicht derselben trägt. Aber alsdann muß man hinter den Pfeilern des Durchganges eine passende Vertiefung anbringen, worin sich der Zugbalken bewegen kann, und dieselbe muß hinter der Brückenbahn ebenfalls verdeckt sein.

Man sieht leicht ein, welche Mängel diese Einrichtung in Beziehung auf die größern Kosten und die Sicherheit des Ortes hat, weil der durch die verticale Stellung der Brückenbahn entstehende Zwischenraum viel kleiner ist, als die Fläche der letzteren, und weil der Platz nur durch eine sehr dünne und schlecht mit der innern Böschung des Werkes verbundene Mauer abgesperrt wird. Was die Bedingungen des Gleichgewichtes anlangt, so sind sie so einfach wie möglich; das System bildet gleichsam eine Wage, und es genügt, daß der allgemeine Schwerpunct mit der Axe der Zapfen zusammenfalle. Aus diesem Grunde ist man genöthigt, denselben in den Punct *a* (Fig. 123), etwas unter die Fläche der Brückenbahn zu legen, und einen Zwischenraum *mn* zwischen dem Kehlbalken *an*, welcher diese Axe enthält, und dem kleinen Balken *mp* der festen Decke zu lassen. Dieser Zwischenraum wird durch eine Bohle *mn* verdeckt, wenn die Brückenbahn herabgelassen ist. Eine solche Zugbrücke findet man zu Metz ausgeführt.

Eine andere noch einfachere Einrichtung (Fig. 124).

§. 357. Statt dieser Einrichtung würde es, wie man es zuweilen vorgeschlagen hat und auch in den Niederlanden ausgeführt ist, vorzuziehen sein, von dem Schlagwerke nur die Zugbalken mit ihren Verlängerungen beizubehalten und auf diese letztern Metallmassen zu legen, welche man in einer schicklichen Entfernung von der Axe der Zapfen befestigt, damit das Gleichgewicht hergestellt wird oder der Schwerpunct des Systemes in der genannten Axe zusammenfällt. Durch diese Anordnung würde in der That die untere Schutzmauer des Einganges nicht so sehr geschwächt und wäre auch kein so großer Zwischenraum hinter diesen Pfeilern nothwendig. Was die Bewegung der Brücke betrifft, so geschieht sie entweder nach Art der gewöhnlichen Zugbrücken mit Schlagbalken, indem man am Ende des letztern Ketten anbringt, woran Menschen ziehen, oder indem man dieselben mit langen Stangen auf die obere Decke drücken läßt, wie man es bei der oben angeführten Zugbrücke in Metz macht.

In Holland bringt man auf der Brückenbahn und dem Schlagbalken mehrere verzahnte Räder an, welche vermittelst einer Kurbel in Bewegung gesetzt werden (Fig. 125). Aber wegen der Unbequemlichkeiten, welche dieses System darbietet, wird es nur in den Fällen angewandt, wo man das Gleichgewicht nicht streng erreichen kann, sei es nun, weil es hinterwärts an Raum fehlt, um den Schlagbalken zu bewegen, oder daß man zu befürchten hat, daß das Wasser in diesen Raum tritt.

Wir übergehen mehrere andere Systeme von Zugbrücken mit Schlagbalken, welche noch viel mehr Mängel haben, als die vorhergehenden, und nur selten ausgeführt sind. Einige derselben findet man beschrieben in den oben angeführten Werken von Belidor und Kraft. Bei den meisten dieser Zugbrücken besteht die Bewegungsvorrichtung aus Holzwerk. Zur Vermeidung dieses letztern haben die Ingenieure bessere Auflösungen von dem in Rede stehenden Probleme gegeben, obgleich ihre ersten Versuche ziemlich fruchtlos gewesen sind, wie man an den von Belidor und Dobenheim erbauten Zugbrücken sieht, von denen wir nun einen kurzen Begriff geben wollen.

Sinusoidenzugbrücke von Belidor.

Beschreibung und Theorie derselben.

§. 358. Die von Belidor angegebene Zugbrücke, welche älter ist, als die vorhin besprochenen, hat zwei gußeiserne Rollen G', die als Gegengewicht für die Brückenbahn dienen, und welche mit der letztern durch zwei Ketten verbunden sind, die über zwei an den Seitenpfeilern des Einganges befestigte Rollen M, M' (Fig. 126) gehen. Die Rollen G', welche um einen mit der Kette durch eiserne Bügel verbundenen Bolzen beweglich sind, laufen in krummlinigen Leitungen EF, die an den Seitenmauern angebracht und so construirt sind, daß das Gleichgewicht der Zugbrücke in ihren verschiedenen Lagen stattfindet. Belidor hat diese Curve wegen ihrer Eigenschaft, daß ihre Ordinaten den Sinus der Erhebungswinkel der Brückenbahn proportional sind, Sinusoide genannt.

Denn wenn man diesen Winkel mit α bezeichnet, so wird die der Erhebung des Gewichtes P der Brückenbahn entsprechende Arbeit ausgedrückt durch:

$$P \cdot AG \cdot \sin. \alpha.$$

Während dieser Erhebung der Brückenbahn fällt das Gegengewicht Q um die Höhe y herab, und wegen der allgemeinen Bedingung des Gleichgewichtes muß

$$Qy = P \cdot AG \cdot \sin. \alpha$$

sein, woraus folgt:

$$y = \frac{P}{Q} \cdot AG \cdot \sin. \alpha.$$

Ohne weiter auf die Berechnungen von Belidor einzugehen, wollen wir bemerken, daß nichts leichter ist, als die Curve des Gegengewichtes vermittelst der weiter oben angegebenen Bedingungsgleichung zu construiren, vorausgesetzt, daß man die verschiedenen Theile der Kette beständig als eine gerade Linie betrachtet.

Denn wenn man die sich auf die horizontale Lage der Brückenbahn beziehende anfängliche Lage und das Gewicht der Rolle willkührlich annimmt, so jedoch, daß sie so viel als möglich den örtlichen Verhältnissen ꝛc. entsprechen, so kennt man auch die Lage des allgemeinen Schwerpunctes O der Brückenbahn und der Rolle für diese Lage, und folglich auch die Horizontale KL, worauf sich dieser Schwerpunct beständig befinden muß. Nimmt man folglich an, daß die Brückenbahn von dem Gewichte P in eine beliebige Lage AB gekommen und Gg die Entfernung ihres Schwerpunctes von der Horizontale KL ist, daß P' das Gewicht der Rolle und $G'g'$ die Entfernung ihrer Axe von KL ist; so hat man zunächst zur Bestimmung der Größe von $G'g'$ die Gleichung:

$$P' \cdot G'g' = P \cdot Gg.$$

Bemerkt man dann, daß sich die Kette BMG' weder verkürzen, noch verlängern kann, so gehört der Mittelpunct G' der Rolle einer andern, leicht zu bestimmenden Curve an, welche ein Kreisbogen ist, wenn man mit Belidor voraussetzen will, daß die innere Rolle M' auf ihre Axe reducirt ist, welche aber wirklich die Evolvente eines Kreises ist, dessen mittlerer Durchmesser in der um diese Rolle gehenden Kette liegt, wobei der Durchmesser der Rolle, wenn man den Einfluß der Reibungen zu vermindern suchen will, wenigstens = 50 bis 60 Centimeter sein muß. Die Lage des Mittelpunctes G' der Rolle ergiebt sich alsdann für die wirkliche Neigung der Brückenbahn aus dem Durchschnittspuncte des Kreisbogens oder der Evolvente mit der Horizontale CD, welche der Ordinate $G'g' = \frac{P \cdot Gg}{P'}$ entspricht. Wenn man folglich diese Operation für eine Reihe auf einander folgender Lagen der Brückenbahn vornimmt, so erhält man die Curve, welche die Axe der Rolle beschreiben muß, wenn beständig das Gleichgewicht stattfinden soll.

Mängel der Zugbrücke mit der Sinusoide.

§. 359. Wir wollen uns nicht länger bei der Theorie der Zugbrücke mit der Sinusoide, wie sinnreich sie auch ist, aufhalten, weil die Maschine, obgleich sie in gewissen Beziehungen die bei der Aufstellung der Zugbrücken erforderlichen Bedingungen erfüllt, es keineswegs in Beziehung auf die Leichtigkeit der Bewegung thut. Denn im Vorhergehenden ist vorausgesetzt, daß die verschiedenen Theile der Kette $BMM'G'$ beständig in gerader Linie ausgespannt sind, was wohl näherungsweise für den äußern Theil MB stattfindet, aber nicht für den Theil auf der Seite der Curve; denn derselbe verlängert sich, wenn die Spannung abnimmt, und nimmt folglich die Form einer Kettenlinie an, so daß die Gegengewichte oder Rollen, wenn das System aufgestellt ist, die Lage nicht annehmen, welche von der Theorie vorgeschrieben ist.

Andererseits ist auch das Gewicht der Ketten selbst nicht berücksichtigt, obgleich dasselbe Veränderungen in dem Gleichgewichte hervorbringt, welche auf der Seite des Bewegers eine Kraftzunahme von wenigstens zwei Menschenkräften erfordert. Endlich ist auch die Bewegung der Rollen schwierig, selbst gefährlich, wenn man die Menschen unmittelbar an diesen Rollen selbst arbeiten läßt, weil es in diesem

Falle wegen ihrer großen Anzahl an dem nöthigen Raume fehlt und sie sich gegenseitig im Wege stehen, ohne daß sie in der Richtung der Ketten bedeutende Kräfte ausüben können. Wenn man nach Belidor die Bewegung der Zugbrücke durch kleine Ketten bewirkte, vermittelst welcher die Brückenbahn unmittelbar aufgezogen wird, und welche man über andere, von denen des Gegengewichtes verschiedene Rollen gehen ließe; so würde man die erwähnten Mängel doch nur zum Theil beseitigen und noch neue Unbequemlichkeiten durch die Anbringung dieser Rollen herbeiführen; denn das Gleichgewicht würde immer nicht stattfinden, und die Differenz ist hierbei so bedeutend, daß man nicht im Stande sein würde, die Brückenbahn über gewisse Lagen zu senken, ohne im entgegengesetzten Sinne neue Differenzen oder Störungen des Gleichgewichtes hervorzurufen, welche beim Aufziehen der Brücke nur um so deutlicher hervortreten würden.

Von dem Capitän Delile vorgeschlagene Vorrichtung zur Bewegung der Rollen.

§. 360. Der Capitän Delile, welcher ohne Zweifel nicht hinreichend über die verschiedenen Unvollkommenheiten der Sinusoidenzugbrücke in mechanischer Beziehung nachgedacht hatte, hat vorgeschlagen, die beiden Rollen des Gegengewichtes mit einander durch eine eiserne oder hölzerne Axe zu verbinden, und an dieser Axe Rollen *a*, *b* (Fig. 127) mit tiefen Kehle anzubringen, über welche kleine Ketten ohne Ende gehen, die zur Bewegung durch Menschen dienen. Diese Einrichtung, welche die Mängel des Gleichgewichtes des Systemes auf keine Weise verbessert, aber welche unstreitig vortheilhafter als die von Belidor ist, hat übrigens mehrere bedeutende Unannehmlichkeiten, weil 1) gegen das Ende des Aufziehens der Brückenbahn die Ketten der Bewegungsrollen in die Gossen der Chaussee herabhängen und so das Gewicht der Rollen vermindern; 2) weil die Menschen in dieser Lage genöthigt sind, die Ketten loszulassen und auf eine unvortheilhaftere Weise an den Rollen selbst zu ziehen, und 3) weil die Bewegung mit eben so viel Gefahr verbunden ist, als bei den Zugbrücken mit Schlagbäumen, indem beim Zerreißen einer Kette die Rolle auf ihrer Curve hinabstürzt oder ganz herausfliegt, ohne daß irgend ein Mittel zur Verhütung dieses Unfalles vorhanden wäre.

Die Erfahrung hat dieses bei der Bewegung einer Zugbrücke, welche von Delile angegeben ist und wovon weiter unten die Rede sein wird, bestätigt.

Dobenheim'sche Zugbrücke.

Beschreibung der Bewegungsvorrichtung.

§. 361. Bei der Dobenheim'schen Zugbrücke (Fig. 128) werden die an der Brückenbahn befestigten Ketten ebenfalls oben über Rollen *M* geleitet; aber statt am andern Ende mit einer Rolle verbunden zu sein, welche sich auf Curven bewegt, die nach den mechanischen Bedingungen des Gleichgewichtes bestimmt sind, befinden sich große eiserne Stangen daran, welche in der anfänglichen Lage fast horizontal sind. Diese Stangen sind mit gußeisernen Massen beschwert, welche sich auf denselben verschieben können, so daß wenigstens für die anfängliche Lage das Gleichgewicht stattfindet. Man sieht leicht ein, daß bei dieser sehr einfachen Vorrichtung nicht in allen Lagen die Bedingungen des Gleichgewichtes erfüllt werden können, weil die von dem Gegengewichte beschriebene Curve ein Viertelkreis ist, während sie doch eine ähnliche Form wie die Sinusoide haben müßte. Aus diesem Grunde hat Dobenheim unter diese erste Stange noch eine zweite $C'D'$ gelegt, welche mit derselben fast einen Winkel von 45° bildet, um einen besondern Drehungspunct C' beweglich und ebenfalls mit Gußeisenstücken beschwert ist. Diese Stange ist mit der ersten durch eine Kette DD' verbunden, deren Länge nach der Bedingung bestimmt ist, daß der von $C'D'$ mit dem Horizonte gebildete Winkel ungefähr 45° beträgt. Wir wollen also annehmen, daß diese zweite Stange mit einer hinreichenden Anzahl gußeiserner Stücke versehen sei, um die Brückenbahn ohne zu großen Kraftaufwand unter einen Winkel von 45° zu erheben, welche Lage einer ähnlichen Lage der ersten Stange und der verticalen Lage der zweiten Stange $C'D'$ entspricht; so sieht man, daß diese letzte keinen Einfluß mehr auf die Kette ausübt, und daß das Gleichgewicht blos durch das Gewicht der Stücke auf CD bestimmt wird, deren Anzahl und Lage auf dieser Stange man leicht durch einige Versuche finden kann. Nachdem auf diese Weise das Gleichgewicht bestimmt ist, läßt man die Brückenbahn wieder auf ihre horizontalen Unterlagen zurück, und ohne die Stange CD zu berühren, wiederholt man die Versuche für die Stücke der zweiten Stange $C'D'$ in der Art, daß das Gleichgewicht in der neuen Lage der Brücke stattfindet. Auf diese Weise hat man zwei Lagen des Gleichgewichtes bestimmt, wozu natürlich auch noch die kömmt, wenn sich die Brücke gegen die verticalen Pfeiler des Durchganges lehnt.

Mängel und Unbequemlichkeiten der Dobenheim'schen Zugbrücke.

§. 362. Diese Beschreibung des von Dobenheim angegebenen Systemes zeigt die Mängel und Unbequemlichkeiten desselben deutlich; denn man sieht, daß die Bewegung desselben sehr schwer und gefährlich sein muß. Da das Gleichgewicht nur für drei verschiedene Lagen der Brückenbahn stattfindet, so erhellet, daß in den Zwischenlagen sowohl zum Festhalten als zur Bewegung der Brückenbahn Kräfte erforderlich sind, welche für eine Brückenbahn von 2000 bis 3000 Kilogr. nach der Berechnung nicht geringer als 150 und selbst 200 Kilogr. sein dürfen. Die Erfahrung hat auch gezeigt, daß die Bewegung 8 bis 10 Menschen erfordert und mit großen Unglücksfällen begleitet ist. Diese Zugbrücke, welche in Condé, Bergues, Kehl, Cherbourg rc. ausgeführt ist, scheint nirgends reüssirt zu haben. In der That haben die Ausländer, welche oft getreu das nachmachen, was wir verworfen oder verlassen haben, dieselbe in mehreren ihrer Festungen aufgenommen, unter denen vorzüglich Mons zu nennen ist, wo sich eine ziemliche Anzahl dieser Zugbrücken befindet. Aber das System ist deßhalb doch nicht besser geworden, und mit Recht hat das Comité der französischen Fortificationen es aus französischen Festungen entfernt.

Delile'sche Zugbrücke mit Curven.

§. 363. Die von Delile angegebene Zugbrücke bietet die Mängel des Gleichgewichtes der vorhergehenden und selbst der Sinusoidenbrücke von Belidor nicht dar. Sie unterscheidet sich hauptsächlich von der vorhergehenden dadurch, daß die Rollen des Gegengewichtes mit der beweglichen Brückenbahn durch feste Eisenstangen *BC* (Fig. 129) verbunden sind, welche auf beiden Seiten der Brückenpfeiler durch in dieselben gemachte Oeffnungen hindurchgehen. Die Bewegung derselben geschieht durch Rollen mit einer Kette ohne Ende, wie es weiter oben schon angegeben ist. Wie sinnreich diese Bewegung auch sein mag, so ist sie doch nicht frei von Mängeln. Um den Befestigungspunct *B* der Stangen der Axe *A* der Zapfen der beweglichen Brückenbahn beliebig nähern zu können, hat Delile die Kopfenden der Bedeckung der beweglichen Brückenbahn weggelassen und sie durch festgeschraubte Bänder *B* ersetzt, welche um die Balken des Bodens herumfassen und woran die Stangen befestigt sind. Der Vortheil dieser Einrichtung besteht darin, daß bei der Verminderung der Höhe des ganzen Apparates eine Verkürzung der Stangen und der Curve des Gegengewichtes stattfindet.

Nach dem bereits über die Sinusoide von Belidor Angegebenen kann die Verzeichnung der Gleichgewichtscurven der Delile'schen Zugbrücke keine Schwierigkeiten darbieten. Denn da die anfängliche Lage *C* durch die Localverhältnisse bestimmt wird, das Gewicht der Rollen, sowie das Gewicht und die Dimensionen der Stange *BC* und der beweglichen Brückenbahn ebenfalls bekannt sind; so kann man nach der Theorie der Momente leicht die correspondirende Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunctes aller beweglichen Theile des Mechanismus finden, selbst die Welle und die zur Bewegung dienende Kette nicht ausgenommen. Hierauf zieht man durch den so gefundenen Punct die Horizontale *KL*, in welcher für alle Lagen der Brückenbahn der gemeinschaftliche Schwerpunct aller beweglichen Theile liegen muß. Alsdann kann man die Curve für die Axe *C* der Rollen durch ähnliche Mittel, wie die bei der Belidor'schen Sinusoidenbrücke angegebenen, verzeichnen und auch leicht den Einfluß des Gewichtes der Stangen und der kleinen Ketten berücksichtigen.

Denn wir wollen uns das Gewicht der Stange *BC* in zwei andere, an ihren Enden *B* und *C* wirkende zerlegt denken, so kann man diese letztern als zu dem Gewichte der Brückenbahn und dem der Rollen gehörend annehmen.

Man bestimmt folglich die Lage der festen Schwerpuncte *G* und *G'* dieser Gewichte, wovon der letztere aber wegen der über die Bewegungsrollen gehenden Ketten nicht genau mit dem Mittelpuncte *C* der Rollen zusammenfällt. Aber da hierdurch die Verzeichnung der Gleichgewichtscurve für die Axe *C* etwas erschwert würde, so kann man, ohne irgend eine Veränderung der Resultate befürchten zu müssen, das Gewicht der fraglichen Ketten, das Gewicht der Rollen und das zerlegte Gewicht der Stangen als auf der Axe concentrirt annehmen, wenn man nur die Höhe der Horizontale *KL* nach der anfänglichen Lage des Systemes bestimmt hat. Es sei *P* das Gesammtgewicht der Brückenbahn und der in *G* concentrirt gedachten halben Stangen, *P'* das der Rollen rc.

als in C concentrirt gedacht; so hat man zur Bestimmung der Höhe von C über KL in jeder Lage des Gleichgewichtes die Gleichung der Momente:

$$P' \cdot Cg' = P \cdot Gg,$$

welche wir schon mehrere Male angeführt haben. Zieht man nun die correspondirende Horizontale DE, so kann man die Lage des Punctes C völlig bestimmen, weil die unveränderliche Länge BC bis zum Befestigungspuncte B an der Brückenbahn bekannt ist.

Vereinfachte Verzeichnung der Curven.

§. 364. Obgleich die Verzeichnung der Curve der Rollen in dem eben betrachteten allgemeinen Falle keine besondere Schwierigkeit darbietet, so legt man doch, um die Constructionen etwas zu vereinfachen, den Befestigungspunct B der Stangen in die Verlängerung der von dem Mittelpuncte A der Zapfen der Brückenbahn nach ihrem Schwerpuncte G gehenden geraden Linie AG. Alsdann ist in der That die Aufgabe auf die zurückgeführt, wo der allgemeine Schwerpunct O des Systemes genau eine feste Lage auf der Axe der Stangen BC annimmt, wodurch dann sogleich die Richtung dieser Axe in Beziehung auf jede von den Richtungen der geraden Linie AB der Brückenbahn bestimmt wird. Um sich von der Richtigkeit dieser Voraussetzung zu überzeugen, kann man das Gewicht P der Brückenbahn in zwei andere zerlegt annehmen, wovon das eine, in A wirkende, auf den Gleichgewichtszustand des Systemes keinen Einfluß hat, sondern nur auf die Zapfen drückt, während das andere, durch $P \cdot \frac{AG}{AB}$ ausgedrückte beständig im Befestigungspuncte B der Stangen wirkt, und da man das Gewicht der zu den Rollen gehörenden Theile auch als in ihrem Mittelpuncte, im Befestigungspuncte C, concentrirt annehmen kann; so sieht man, daß man nach allen diesen erlaubten Voraussetzungen das Gewicht der wirksamen Theile des Systemes als in einem Puncte O der Stangen concentrirt annehmen kann, welcher ihre Länge in Theile theilt, die den an den Endpuncten B und C angebrachten verticalen Kräften umgekehrt proportional sind. Hat man folglich ein für alle Mal die Lage des Punctes O auf den Stangen und seine absolute Lage für die horizontale Lage der Brückenbahn bestimmt; so kennt man auch die unveränderliche Horizontale KL, in welcher der Punct O in allen verschiedenen Lagen des Systemes liegen muß, und die außerdem von der vorhin betrachteten sehr verschieden ist.

Diese höchst sinnreiche Betrachtung, welche Bergere angegeben hat, dem wir außerdem mehrere interessante Bemerkungen und eine sehr einfache analytische Theorie der Zugbrücken mit auf Curven rollenden Gegengewichten verdanken, hat Constantin auf die Idee geführt, die Curve für das Gegengewicht in einer continuirlichen Bewegung und durch ein rein mechanisches Verfahren zu verzeichnen, welches darin besteht, daß man eine aus zwei Linealen oder beliebigen hölzernen Latten bestehende Schmiege ABC (Fig. 130) anwendet, deren eine Latte AB die Linie, welche von der Axe der Zapfen der Brückenbahn bis zum Befestigungspuncte geht, und deren andere Latte die Stange des Gegengewichtes vorstellt. Diese Latten sind im Puncte *B* durch einen Bolzen mit einander verbunden, um den sie sich drehen können und welcher den untern Befestigungspunct der Stangen vorstellt. Im Puncte *A*, welcher der Axe des Zapfens der Brückenbahn entspricht, befindet sich ein anderer Bolzen, welcher als Drehungsaxe dient. Endlich befindet sich im Puncte *O*, welcher den allgemeinen Schwerpunct des Systemes darstellt, ein dritter Bolzen, welcher längs der Kante *KL* eines genauen Lineales, das an dem den Punct *A* enthaltenden Boden in derselben Richtung befestigt ist, welche wir eben für die Horizontale angegeben haben, fortbewegen muß. Bringt man nun in *C*, welches der Mittelpunct der Rolle ist, eine zeichnende Spitze, und bewegt die Schmiege, indem man den Bolzen *O* gegen die Kante *KL* drückt; so zeichnet diese Spitze die Curve, wenn man die Entfernungen der verschiedenen Theile richtig bestimmt hat.

Verschiedene Betrachtungen und Bemerkungen über die Delile'schen Zugbrücken.

§. **365.** Das von Delile angegebene System von Zugbrücken oder Gegengewichten bietet, wie man sieht, sowohl in Beziehung auf seine Anordnung, wie auf seine Theorie, die größte Einfachheit dar, und ist auch mit Vortheil in mehrern Kriegsplätzen, wie Dünkirchen, Lille, Brest, Straßburg ꝛc. angewandt. Die einzigen Mängel, welche es hat, bestehen in den schon oben erwähnten Gefahren bei der Bewegung, den weiten in die Seitenpfeiler des Einganges gemachten Oeffnungen, worin sich die Stangen bewegen; den bedeutenden Längen, welche die Curven des Gegengewichtes hinter diesen Pfeilern haben müssen und welche an manchen Kriegsplätzen nicht angewandt werden können, und endlich in der Nothwendigkeit, die festen Geländer auf beiden Seiten der Brückenbahn durch bewegliche zu ersetzen, welche vor oder während der Bewegung des Systemes hinweggehoben werden müssen.

In dem **Mémorial de l'officier du Génie, Nos 3, 5, 10,** findet man verschiedene von Delile, Constantin und von Etoile in Vorschlag gebrachte oder ausgeführte Mittel zur Verhütung des möglichen Zerreißens der Stangen und zur Erleichterung des Wegbringens der Geländer, welche, wie bei den Zugbrücken mit über Rollen gehenden Ketten, durch den Abstand der Befestigungspuncte von der Brückenbahn oder nothwendigen Zurücktritt des Systemes der Gegengewichte auf beiden Seiten des Durchganges erforderlich gemacht werden, angegeben. Aber da die Geländer vorzugsweise angebracht sind, um den Fall der Pferde in den Graben zu verhüten und sie deßhalb eine gewisse Festigkeit haben müssen; so scheint es schwierig zu sein, die Unbequemlichkeiten ihrer Wegnahme mit der Hand zu vermeiden, ohne sich in fast eben so große Unannehmlichkeiten zu versetzen, wie sie mit der Bewegung des Brückenfeldes der Zugbrücke selbst verbunden sind. Es scheint uns daher am geeignetsten, daß man verfährt, wie man es schon immer bei den Zugbrücken mit Schlagbalken gethan hat, deren Geländer durch Menschen aus ihren Befestigungspuncten gehoben und jedesmal in's Innere der Festung getragen werden, um sie vor dem Wegholen zu sichern. Die von Delile vorgeschlagenen Ketten oder Geländer von runden eisernen Stäben, welche sich horizontal in cylindrische Oeffnungen schieben, die in den Pfeilern des Einganges angebracht sind, scheinen noch die einfachsten Mittel zu sein. Diese letzte Einrichtung, welche wir für die Zugbrücke des Deutschen Thores zu Metz vorgeschlagen haben, würde die daran bemerkten Unbequemlichkeiten nicht mehr darbieten, wenn man die Stäbe sich auf kleinen Laufrädern bewegen ließe und den Oeffnungen, worin sie sich bewegen, einen hinreichenden Spielraum gäbe.

Zugbrücke mit Gegengewicht ohne Curven von Bergere.

Anwendung dieser Zugbrücke auf Vorderwerken der Festungen und im Felde.

§. 366. Die Eigenschaft des Punctes *O* der Stange *BC* der Delile'schen Zugbrücke, daß er beständig auf einer Horizontale *KL* bleibt, hat Bergere auf die Idee gebracht, die Curven ganz wegzulassen und den Punct *O* direct die Horizontale *KL* (Fig. 131) beschreiben zu lassen (**Mémorial de l'Officier du Génie, N° 3, page 111**). Zu diesem Zwecke bringt er auf einer durch die Stange gehenden, in diesem Puncte befestigten Axe zwei Rollen an, welche sich auf horizontal-liegenden eisernen Schienen bewegen, wenn man das Gegengewicht der Erde nähert, oder wenn man in horizontaler Richtung die Axe der Rolle fortzieht, um die Brückenbahn zu erheben.

Diese äußerst einfache Einrichtung kann mit Vortheil bei kleinen Werken angewandt werden. Im Jahre 1825 wurde sie mit einigen glücklichen Abänderungen bei einer der Zugbrücken der Vorwerke der Festung Mons angebracht, wo sich nicht einmal ein Pfeiler zur Befestigung der Horizontale *MN* befand. Da diese Anordnung sehr leicht auszuführen ist und in allen ähnlichen Fällen, vorzüglich aber bei den Werken im Felde sehr wohl alle andern bekannten Zugbrücken ersetzen kann; so halten wir es für zweckmäßig, hier eine kurze Beschreibung derselben folgen zu lassen. Da wir aber ihre Details an Ort und Stelle nicht genau haben untersuchen können, so wollen wir aus dem Gedächtnisse diese Beschreibung so gut als möglich mittheilen.

Der wesentliche Unterschied zwischen dieser und der vorhergehenden Einrichtung besteht darin, daß das den Punct *O* (Fig. 132) in horizontaler Richtung bewegende Rad viel größer ist und durch zwei andere gewöhnliche Wagenräder ersetzt wird, welche sich auf Balken oder etwas über der Sole des Einganges erhöhetem massiven Mauerwerke bewegen, welches mit eisernen Schienen beschlagen ist. Jede Stange der Brücke ist im Puncte *O* an der gemeinschaftlichen Axe des ihr entsprechenden Räderpaares befestigt, welches für die Sicherheit der Bewegung, die sehr vortheilhaft und bequem dadurch bewirkt werden kann, daß man direct an die Räder faßt, um sie vor oder zurück zu bewegen, unerläßlich zu sein scheint.

Was die Erhaltung der verticalen Stellung der Brückenbahn anlangt, so läßt sie sich mit zwei auf die gehörige Weise in die Erde befestigten Pfählen, woran man zwei Haken oder Ketten anbringt, bewerkstelligen. Endlich können die Stangen selbst nach den Umständen aus Schmiedeeisen, Gußeisen oder aus Holz construirt werden, fast in der Art, wie die bei verschiedenen Maschinen angewandten Balanciers, welche an ihren Enden und in ihrer Mitte größere oder geringere Wirkungen auszuhalten haben, d. h. man läßt sie in normaler Richtung auf ihrer Axe gegen ihren Befestigungspunct zu in der Dicke so zunehmen, daß sie bei demselben Volumen die größtmöglichste Festigkeit darbieten. Diese Eigenschaft bieten bekanntlich zwei sehr lang gestreckte Parabeln dar, deren Scheitelpuncte den Endpuncten der Stangen entsprechen.

Da diese Einrichtung vorzüglich im Felde ihre Anwendung findet, wo es unmöglich ist, viel Sorgfalt auf die Constructionen zu verwenden, und wo oft selbst das nöthige Material fehlt; so hielten wir es für interessant genug, dieselbe in Fig. 132 darzustellen, worin die Stangen jede aus zwei eichenen Hölzern von 10 bis 12 Centimeter im Quadrat besteht, welche in gewissen Puncten, vorzüglich aber in der Mitte und an beiden Enden, durch eiserne Bänder oder Seile auf eine solide Weise mit einander verbunden sind. Sie werden vermittelst eines etwas auf beiden Hölzern eingelassenen Holzstückes, welches das viereckige Stück der Axe der Räder enthält, in ihrer Mitte stark aus einander gehalten, während zwei andere in der Mitte der Entfernungen der Axe vom Ende dazwischen befindliche Holzstücke hier die gehörige Entfernung beider Balken bewirken.

Uebrigens versteht es sich, daß man außer den eisernen Bändern oder Seilen, welche die Enden zusammenhalten, auch noch einige Keile anbringen muß, welche das Verschieben nach der Länge verhindern. Nach bekannten theoretischen Sätzen hat eine solche Verbindung eine mehr als hinreichende Festigkeit, um an den Endpuncten B und C der Stangen wirkenden Kräften von 900 Kilogr. widerstehen zu können, welches weit die überschreitet, welche sie unter den in Rede stehenden Umständen auszuhalten haben.

Endlich ist zu bemerken, daß die Anhängepuncte an der Brückenbahn durch die Verlängerung der eisernen Achse gebildet werden, welche in Puncten durch die über den Graben liegenden Balken geht, die durch die Bedingung des Gleichgewichtes der Brückenbahn bei der gegenwärtigen Anordnung der Bewegungsvorrichtung bestimmt werden, und daß die Gegengewichte, statt aus gußeisernen Rollen, aus massiven Bomben oder beliebigen andern unterhalb des die Lage des Mittelpunctes dieser Gegengewichte angebenden Bolzens frei angehangenen Körpern bestehen können.

Zugbrücken mit Spirale von Derché.

Beschreibung und Theorie derselben.

§. 367. Der verstorbene Capitän Derché hat in den Jahren 1810 und 1811 in Oposo und Palmanova eine sehr sinnreich construirte Zugbrücke angelegt, deren Princip darin besteht, daß das die Brückenbahn im Gleichgewicht haltende Gegengewicht Q constant und mittelst einer Kette am Ende einer Spirale $abcd$ (Fig. 133) aufgehangen ist, welche auf einer horizontalen hölzernen Axe EF befestigt ist, welche mit der Brückenbahn AB durch eine andere Kette BCD verbunden ist, die über eine am Pfeiler des Einganges befestigte Rolle C geht und sich dann auf eine andere große an der Welle EF der Spirale befindliche Rolle wickelt. Ueber eine zweite auf derselben Welle sitzende Rolle HH' mit einer Hohlkehle am Umfange geht eine Kette ohne Ende, vermittelst welcher die Bewegung der Zugbrücke bewerkstelligt wird. Aus dieser Beschreibung ersieht man leicht, daß der Zweck der Spirale darin besteht, den Hebelarm des Gegengewichtes Q so zu verändern, daß es beständig dem Gewichte der Brückenbahn in ihren verschiedenen Lagen das Gleichgewicht hält.

Es sei wieder P das im Puncte G (Fig. 134) concentrirt gedachte Totalgewicht der Brückenbahn; wir wollen vom Puncte A der Zapfen aus AP horizontal gegen die sich auf eine beliebige Lage von G oder der Brückenbahn AB beziehende Verticale GP ziehen; es sei AK das von demselben Puncte auf die Richtung BC der äußern Kette gefällte Perpendikel; t die Spannung dieser Kette, welche das Gewicht P der Brückenbahn vermittelst der Wirkung des Gegengewichtes Q im Gleichgewichte hält; so hat man, da AK und AP die Hebelarme der Kräfte t und P sind, nach der Theorie der Momente:

$$P \cdot AP = t \cdot AK, \text{ folglich } t = \frac{AP}{AK} \cdot P.$$

Da man nun für jede Lage der Brückenbahn die Längen AP und AK kennt und P außerdem gegeben ist, so kann man folglich unmittelbar t berechnen. Diese Spannung wirkt am Umfange der auf der Welle E sitzenden Trommel LMD, und ihr Moment in Beziehung auf die Axe ist:

$$t \times R,$$

wo R den constanten Halbmesser dieser Trommel bezeichnet. Ferner sei r der von der Axe E aus genommene Halbmesser Ea der Spirale $abcd$, oder vielmehr der sich auf die Lage AB der Brückenbahn beziehende horizontale Hebelarm des Gewichtes Q; so hat man für die Bedingungen des Gleichgewichtes die einzige Gleichung:

$$Q \cdot r = t \cdot R = \frac{AP}{AK} \cdot R \cdot P, \text{ folglich } r = \frac{AP}{AK} \cdot \frac{P}{Q} \cdot R,$$

vermittelst welcher man leicht die Spirale zeichnen kann.

Denn die von der Welle der Spirale beschriebenen Winkel, wenn sich die Brückenbahn über ihre ursprüngliche Lage AB' erhebt, sind offenbar den correspondirenden Bogen der auf die Trommel DLM gewickelten Kette, oder den Verkürzungen des zwischen der Rolle C und dem Befestigungspuncte B liegenden Stückes der Kette proportional. Nun sind aber diese Verkürzungen, sowie AK und AP, für jede Lage von AB bekannt, und wenn man folglich die Totallänge der über die Rolle C gegangenen oder auf die Trommel DLM von der horizontalen bis zur verticalen Lage der Brückenbahn gewickelten Kette in eine hinreichend große Anzahl gleicher Theile getheilt annimmt, dann geometrisch oder durch Rechnung die Werthe von AP, AK und r bestimmt hat, welche den Lagen der Brückenbahn entsprechen, für welche die Länge der äußern Kette BC um diese gleichen Theile abgenommen hat; so braucht man zur Verzeichnung der Spirale nur der Reihe nach diese verschiedenen Theile von einem gewissen Puncte a, (Fig. 135) aus, welchen man zum Anfangspuncte der Bogen und als der horizontalen Lage der Brückenbahn correspondirend annimmt, auf dem Umfange der Spirale *DLM* aufzutragen. Bezeichnet man alsdann durch a_1, a_2, a_3, a_4, ... die verschiedenen auf diese Weise erhaltenen auf einander folgenden Theilungspuncte, so zieht man die Halbmesser Ea_1, Ea_2, Ea_3, Ea_4, ... auf denen man vom Mittelpuncte *E* aus die Entfernungen Er_1, Er_2, Er_3, Er_4, ... abträgt, welche resp. den Werthen von *r* gleich sind, die man für die Lagen gefunden hat, worin der Theil *BC* der Kette resp. um a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, ... verringert ist. Errichtet man endlich in jedem der so erhaltenen Puncte auf den correspondirenden Halbmessern unbestimmt verlängerte Perpendikel; so wird die Umhüllungscurve aller dieser Perpendikel, welche hier die verschiedenen Richtungen der Kette *aQ* (Fig. 134) des Gegengewichtes in Beziehung auf die Axe *E* darstellen, die verlangte Spirale sein.

Vereinfachung der Rechnungen und der Verzeichnung der Spirale.

§. 368. Diese Construction der Spirale für den allgemeinen Fall läßt nichts zu wünschen übrig, als daß die zur Erhaltung der successiven Werthe von *r* erforderlichen Operationen sehr complicirt und beschwerlich sind. Aber sie wird sehr vereinfacht, wenn man 1) den Befestigungspunct *B* (Fig. 134) an der Brückenbahn in die Richtung der geraden Linie *AG* legt, welche vom Zapfen nach dem Schwerpuncte *G* geht, was fast immer thunlich ist, und wenn man 2) für die vordere Rolle *C* der Ketten einen Punct *J* substituirt, welcher etwas jenseits ihres Umfanges liegt und durch welchen nahezu die Richtung der Kette in den verschiedenen Lagen der Brückenbahn geht (Fig. 136).

Um die Lage dieses Punctes *J* für eine gegebene Rolle und Brückenbahn zu bestimmen, zeichnet man die Richtungen *bB''*, *aB'* der Kette, welche den bei den verschiedenen Lagen der Brückenbahn vorkommenden größten Winkel mit einander bilden, und beschreibt in das durch diese Richtungen und die Kehllinie der Rolle gebildete Dreieck *abc* einen kleinen Kreis, dessen Mittelpunct man für den verlangten Punct nehmen kann. Bei den in Rede stehenden Voraussetzungen kann man das Gewicht *P* der Brückenbahn in zwei andere zerlegen, wovon das eine $P \cdot \frac{BG}{AB} = t$ in *A* wirkt und durch den Widerstand der Zapfen aufgehoben wird, und das andere $P \cdot \frac{AG}{AB} = p$ im Befestigungspuncte *B* zum Aufziehen der Brücke wirkt. Auf den Punct *B* wirken also zwei Kräfte *t* und *p*, die eine nach der Richtung *JB* der Kette und die andere nach der durch den Punct *B* gehenden Verticale *Bp*. Da diese Kräfte *t* und *p* einander vermittelst der festen Stange *AB* das Gleichgewicht halten müssen, so muß ihre Resultante nothwendig durch den Mittelpunct *A* der Zapfen gehen. Fällt man folglich auf die Verlängerung von *AB* aus dem Puncte *J* das Perpendikel *JH*, so müssen sie sich wie die Seiten *BJ* und *JH* des Dreieckes *BJH* verhalten, welches dem von den Kräften *p*, *t* und ihrer Resultante *Bh* gebildeten Dreiecke *Bih* ähnlich ist, so daß man hat:

$$p = P \cdot \frac{AG}{AB}, \quad t = p \cdot \frac{BJ}{HJ}$$

und:

$$r = \frac{t \cdot R}{Q} = \frac{p}{Q} \cdot \frac{BJ}{HJ} \cdot R,$$

welchen Ausdruck man sehr leicht für die verschiedenen Längen JB der äußern Kette, welche wir bei der obigen Construction der Spirale betrachtet haben, berechnen oder construiren kann. Denn wenn man auf JH von J nach F eine Anzahl Millimeter oder Centimeter gleich der in p enthaltenen Anzahl von Kilogrammen trägt und dann die Parallele Ft zu AB zieht; so schneidet diese auf JB eine Länge Jt ab, welche in Millimetern oder Centimetern die Anzahl der in t enthaltenen Kilogramme ausdrückt.

Besonderer Fall, wo der mittlere Berührungspunct der Ketten und der Rolle in der Verticale der Zapfen liegt.

§. 369. In dem besondern Falle, wo der Punct J in der Verticale der Axe A der Zapfen liegt, fällt JH mit AJ zusammen und wird unveränderlich, woraus folgt, daß die Werthe von t und r den Längen BJ der äußern Kette proportional sind. Diesen Fall hat der Capitän Derché wegen der Vereinfachungen der Constructionen der Gleichgewichtsspiralen specieller behandelt. *)

Aus dieser Annahme ergiebt sich zuerst, daß die Radienvectoren Er, Er_1, Er_2, ... (Fig. 135), vermittelst welcher wir weiter oben die die Spirale umschließenden Tangenten construirt haben, den Längen a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, ... der auf die Trommel LMD gewickelten Kette proportional abnehmen, so daß ihre Endpuncte r_1, r_2, r_3, ... einer Archimedischen Spirale angehören.

Es sei ferner l_1 die Länge der äußern Kette BJ (Fig. 137) für die horizontale Lage der Brückenbahn und l_n diese Länge für die verticale Lage derselben, so wird die Totallänge a_1a_2, ... a_n (Fig. 135) der auf die Trommel LMD für diese letzte Lage aufgewickelten Kette $= l_1 - l_n$ sein, und wenn wir sie in den Puncten a_2, a_3, ... a_{n-1} in $n-1$ gleiche Theile a_1a_2, a_2a_3, ... getheilt annehmen und

$$\frac{l - l_n}{n - 1} = e, \quad \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{AJ} = c = \text{einer Constanten}$$

setzen; so haben wir nach dem Vorhergehenden die Relationen:

$$r = \frac{P}{Q} \cdot \frac{BJ}{AJ} \cdot R = c \cdot BJ = c \cdot l, \; r_1 = cl_1, \; r_2 = c\,(l_1 - e),$$

$$r_3 = c\,(l_1 - 2\,e), \; r_4 = c\,(l_1 - 3\,e), \; \ldots . \; r_n = c\,l_n,$$

wodurch man die Hebelarme Er_1, Er_2, Er_3, ... bestimmen kann, welche den Theilungspuncten a_1, a_2, a_3, ... entsprechen und vermittelst welcher man die von ihren Tangenten eingeschlossene Spirale construiren kann.

---

*) Man sehe: Mémorial de l'officier du Génie, Nro. 5, p. 7.

Da diese Verzeichnung in Beziehung auf die Lage der Puncte der Curve, welche die successiven Durchschnittspuncte der Tangenten sind, einige Unsicherheit zuläßt, wenigstens wenn man die Anzahl dieser letzten Puncte nicht hinreichend groß annimmt; so hat der Capitän Gosselin eine einfache und sinnreiche Construction des Berührungspunctes jeder Tangente angegeben, welche alle Schwierigkeiten beseitigt.*)

Directe Construction der Durchschnittspuncte der die Gleichgewichtsspirale umhüllenden Tangenten.

§. 370. Wir wollen zwei einander unendlich nahe liegende Puncte r, r' (Fig. 138) der Archimedischen Spirale betrachten, welche die Fußpuncte der die Gleichgewichtsspirale berührenden Perpendikel enthält, so wird der Durchschnittspunct t der Perpendikel rt und $r't$ auf den Radienvectoren Er, Er' der gesuchte Berührungspunct auf der Tangente rt und rr' das correspondirende Element der Archimedischen Spirale sein. Hierauf wollen wir die Radienvectoren Er, Er' bis an die Puncte a, a' des äußern Umfanges der Trommel verlängern, und es sei s der Punct, wo die Tangente $r't$ den Radiusvector Er schneidet; so wird das Stück rs, welches wir mit dr bezeichnen wollen, die unendlich kleine Verkürzung des Radiusvector r von r bis r', und aa' die entsprechende Verkürzung der Länge der äußern Kette sein, welche wir dl nennen wollen, so daß man nach der allgemeinen Relation die Gleichung hat:

$$r = Cl,\ dr = Cdl.$$

Aber da man $r's$ als einen unendlich kleinen Bogen eines mit aa' concentrischen Kreises von dem Halbmesser r betrachten kann, so hat man:

$$\frac{Ea'}{Er'} = \frac{R}{r} = \frac{aa'}{r's} = \frac{dl}{r's} = \frac{dr}{C \cdot r's} = \frac{rs}{C \cdot r's},$$

folglich:

$$C \cdot \frac{R}{r} = \frac{rs}{r's} = \frac{rt}{rE} = \frac{rt}{r};$$

und weil die in s und r rechtwinkligen Dreiecke $rr's$ und rEt einander ähnlich sind, so läßt sich die Figur $Er'rt$ in einen Kreis beschreiben, dessen Durchmesser Et ist und worin die zu demselben Bogen rt gehörenden Peripheriewinkel $rr't$, rEt einander gleich sind. Folglich hat man zur Bestimmung der Entfernung des Berührungspunctes t jeder Tangente rt von dem Fußpuncte des zugehörigen Perpendikels die Relation:

$$rt = C \cdot R = \frac{P}{Q} \cdot \frac{R^2}{HJ} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{R^2}{AJ},$$

woraus man sieht, daß bei den besondern in Rede stehenden Voraussetzungen, wo der Punct J in der Verticale über den Zapfen der Brückenbahn liegt, die gesuchte Entfernung unveränderlich und einer

*) Wegen der analytischen Auflösung vgl. Mémorial de l'officier du Génie, Nro. 7, page 210 und folg.

leicht zu berechnenden Größe gleich ist, wie es Gosselin zuerst bewiesen hat.

Bestimmung des Halbmessers der Trommel der Ketten und des größten Halbmessers der Spirale.

§. 371. Um zu vermeiden, daß sich der auf die große Trommel des Gegengewichtes gewickelte Theil der Kette nicht über einander wickelt, hat der Capitän Derché den Umfang der Rolle genau gleich der Totallänge des aufgewickelten Kettentheiles oder $= l_1 - l_n$ angenommen, so daß man hat:

$$l_1 - l_n = 2\pi R, \text{ folglich } R = \frac{l_1 - l_n}{2\pi},$$

wo π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Was den Werth des Gegengewichtes Q betrifft, so hat Derché denselben nach der Bedingung bestimmt, daß der der horizontalen Lage der Brückenbahn entsprechende Hebelarm der Spirale genau dem Halbmesser R gleich ist, und da

$$r_1 = \frac{P}{Q} \cdot \frac{l}{AJ} \cdot R$$

ist, so folgt:

$$Q = \frac{P \cdot l_1}{AJ}.$$

Bemerkungen über die Bewegung der Zugbrücke mit Spirale.

§. 372. Der Capitän Derché behauptet in der schon angeführten Abhandlung, auf welche wir wegen verschiedener Constructionsdetails verweisen, daß eine von ihm in Osopo ausgeführte Zugbrücke mit einer 2500 Kilogr. schweren Brückenbahn durch zwei Menschen bewegt werden kann. Jedoch haben wir selbst im Jahre 1825 in Douai Gelegenheit gehabt, ein ähnliches System zu sehen, welches bei einem Ausfallthore angebracht war, das an der Seite des durch die Stadt fließenden Canales liegt, und es schien uns dabei, als ob die sehr leichte Brückenbahn desselben nur mühsam durch zwei an den kleinen Ketten ziehende Menschen bewegt werden könnte, was man ohne Zweifel einigen besondern Fehlern und besonders dem Umstande zuschreiben kann, daß man bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen keine Rücksicht auf das Gewicht der schweren Ketten, welche die Brückenbahn oder das Gegengewicht halten, genommen hatte, die aber durch ihr Auf- und Abrollen Widerstände hervorrufen, die wenigstens denen gleich sind, welche von den Reibungen der verschiedenen Zapfen herrühren.

Der Capitän Creuilly hat zwar Mittel angegeben, das Gewicht der Ketten in allen Lagen im Gleichgewicht zu erhalten,*) aber wie sinnreich sie auch sein mögen, so scheinen sie doch zu complicirt zu sein,

*) Man sehe in dem Mémorial de l'officier du Génie, Nro. 7, p. 207 die Note von Audoy, worin man auch eine analytische Entwickelung des Satzes von Gosselin in Beziehung auf die Tangenten der Spirale findet.

um in der Praxis leicht ausgeführt werden zu können. Wenn man aber auch den Einfluß der Ketten bei der Verzeichnung der Spirale genau in Rechnung bringen könnte, so darf man doch nicht glauben, daß die übrigen Unbequemlichkeiten der Derché'schen Zugbrücke und namentlich die Unsicherheiten jeder Art, welche die Construction und die Berechnung der verschiedenen Theile des Mechanismus darbieten, sie in allen den Fällen, wo es sich um die Anlegung einer Zugbrücke mit einer über **1500** bis **2000** Kilogr. schweren Brückenbahn handelt, anwendbar sind.

Entwurf einer Zugbrücke mit Ketten und constantem Gegengewicht, wobei sich die Gleichgewichtscurve auf der Brückenbahn befindet.

Bewegungsvorrichtung dieses Systemes und Theorie desselben.

§. **373.** Bei dem eben beschriebenen Systeme läßt man für jede Lage der Brückenbahn den Hebelarm des Gegengewichtes Q sich verändern; allein man könnte diesen Hebelarm auch constant und den der äußern Kette der Brückenbahn in einem schicklichen Verhältnisse sich ändern lassen, wodurch man bedeutende Vereinfachungen in Beziehung auf die Bewegungsvorrichtung erreichen würde.

Die Kette CDE (Fig. 139), woran die Brückenbahn hängt, gehe zuerst über eine an dem Seitenpfeiler befestigte Rolle D und dann über eine zweite weiter hinten liegende, an einer horizontalen Welle von Eisen oder Holz befindliche Rolle E. Am Ende F dieser Kette möge unmittelbar das Gegengewicht Q hängen, welches die Brückenbahn im Gleichgewichte hält. Da aber dieses Gegengewicht hier constant sein muß, so müßte man sich den Befestigungspunct der Ketten an der Brückenbahn auf folgende Weise ändern lassen: Auf beiden Seiten der Brückenbahn könnte man nämlich eine kleine eiserne Curve abc, welche durch Stützen auf den äußersten Balken der Brückenbahn befestigt wäre, anbringen, um welche sich der untere Theil der Kette DC legte, deren Befestigungspunct sich dicht auf der Brückenbahn in a befände. Diese Curve ließe sich leicht so bestimmen, daß das Moment $AK \times Q$ der constanten Spannkraft Q der Kette immer dem Momente $P \times AG$ des Gewichtes der Brückenbahn gleich wäre; denn man würde unmittelbar den jeder Lage der letztern entsprechenden Hebelarm AK haben, woraus man sogleich die successiven Richtungen des geradlinigen Theiles CD der Kette gegen die von AB würde berechnen können, und deren Umhüllungscurve genau die gesuchte Curve sein würde.

Diese Einrichtung, welche weiter keine Unbequemlichkeiten darbietet, als daß sie die Passage in dem Thore und auf der Brückenbahn verengt, ist einfach genug, um in einigen besondern Fällen angewandt werden zu können.

Zugbrücken mit veränderlichem Gegengewichte.

Bemerkungen über diese Zugbrücken.

§. **374.** Die erste Idee zur Veränderung der Wirkung des Gegengewichtes der Zugbrücken mit über Rollen gehenden Ketten nach dem

Gesetze, welches die Spannung der Ketten in den verschiedenen Lagen der Brückenbahn befolgt, rührt von Bergere her. Allein das Mittel, welches er zu diesem Zwecke vorgeschlagen hat (**Mémorial N**ro **3, p. 115**) und welches in der Anwendung zweier Schwimmer besteht, bietet Schwierigkeiten dar, welche seine Anwendung bei den gewöhnlichen Kriegsplätzen sehr erschweren würden, während das, wovon wir sogleich eine Beschreibung und Berechnung geben wollen, im Gegentheil überall angewandt werden kann, ohne die mit der Verminderung des zur Bewegungsvorrichtung nöthigen Raumes, wodurch diese Zugbrücken sich auszeichnen, verbundenen Vortheile einzubüßen.

Allgemeiner Begriff der Zugbrücke mit veränderlichem Gegengewichte.

§. 375. Wir wollen annehmen, daß eine von den an der Brückenbahn befindlichen Ketten $BCDE$ (Fig. 140) über zwei Rollen C, D geht und an ihrem, dem Befestigungspuncte B entgegengesetzten Ende F eine andere Kette FGK trage, deren Gewicht viel beträchtlicher ist und dazu dient, die Brückenbahn im Gleichgewichte zu erhalten. Ferner wollen wir annehmen, daß diese zweite vertical unter dem Puncte F aufgehangene Kette an ihrem untern Ende so umgebogen sei, daß sie noch einen zweiten verticalen Zweig HK bildet, dessen oberes Ende K an einem eisernen in dem Seitenpfeiler befindlichen Vorsprunge befestigt ist, welcher so nahe als möglich an dem Strange FG liegt, ohne daß jedoch hierdurch für die Bewegung irgend ein Hinderniß entstehen kann. Alsdann ist klar, daß durch die mit der Erhebung der Brückenbahn verbundene Senkung des Punctes F sich ein Theil von FG nach der Verticale des Punctes K umlegt, und zwar um ein Stück, welches fast der halben*) Höhe gleich ist, um welche sich der Punct F herabbewegt hat, oder um die halbe Länge des Theiles der Kette, welcher über die Rollen gegangen ist, wodurch folglich das im Puncte F wirkende Gewicht um eben so viel vermindert wird. Wenn man also jedem Theile der Kette solche Dimensionen gegeben hat, daß die in Rede stehenden Gewichtsverminderungen in jedem Augenblicke genau den Verminderungen gleich sind, welche die Spannung der an der Brückenbahn befestigten Kette $BCDF$ erfährt; so ist klar, daß für alle Lagen das Gleichgewicht stattfindet, und daß die Kraft blos die Reibungen zu überwinden hat.

Beschaffenheit und Construction der großen Ketten des Gegengewichtes.

§. 376. Man kann die Kette $FGHK$ beliebig einrichten; um jedoch bei dem möglichst kleinsten Volumen eine angemessene Stärke und Schwere zu erlangen, bildet man sie aus mehreren länglichen, in zwei Halbkreise endigenden gußeisernen Platten, denen man eine von

---

*) Man muß in der That annehmen, daß die beiden unterhalb der Horizontale KL des Punctes K liegenden Theile einander gleich bleiben, so daß man, wenn F und G in die Lagen F' und G' übergehen, $HH' = GG'$ und folglich $FF' = GG' + HH' = 2\,GG'$ hat. Allein dieses ist nur dann streng richtig, wenn man annimmt, daß der untere Theil HG der Kette bei allen Lagen des Systemes dieselbe Form behält.

dem Totalgewichte der Kette abhängende Stärke giebt. Die Platten liegen neben einander und sind durch Bolzen mit einander verbunden, wie bei Uhrketten.

Der nothwendige Zwischenraum zwischen den Gliedern derselben verticalen Reihe hängt von der Genauigkeit des Gusses und des Bohrens der Löcher ab, und ein Centimeter ist in allen Fällen hinreichend. Unter dieser Voraussetzung müssen die Platten die um 1 Centimeter vergrößerte doppelte Breite zur Länge haben. Nimmt man die Breite der Platten = 10 Centimeter, was in allen Fällen der Praxis als genügend erscheint, so bekommen sie eine Länge von 21 Centimeter und die Mittelpuncte der Löcher sind $0^m,11$ von einander entfernt. Die Bolzen selbst können für schwere Brückenbahnen einen Durchmesser von $0^m,025$ haben, ausgenommen die an dem obern und untern Ende der Kette befindlichen aa', bb' (Fig. 141), welche einen Durchmesser von $0^m,03$ haben können. Die Bolzen aa' sind außerdem mit einem rechteckigen, $0^m,05$ bis $0^m,07$ hohen Querstücke durch andere eiserne Platten cc', cc' verbunden, welche als Bänder oder Bügel dienen und etwas in das obere Theil von AA' eingelassen sind.

Die Entfernung zwischen den verticalen Zweigen FG und KH derselben Kette muß wenigstens $0^m,04$ betragen, und um die Dimensionen der Platten und Bolzen den obigen für eine schwere Brückenbahn angegebenen gleich zu machen, ist es zweckmäßig, unter derselben Rolle zwei den vorhergehenden ähnliche Ketten ag, $a'g'$ (Fig. 142) anzubringen, welche sich auf verschiedenen Seiten verlängern und verkürzen. Was die Dicke der Platten anlangt, so haben wir schon bemerkt, daß sie von dem Gewichte und der Breite, welche die Ketten haben müssen, um den Bedingungen des Gleichgewichtes zu genügen, abhängt. Wenn z. B. die kleinste Breite in der Richtung der Bolzen $0^m,27$ betragen muß, so kann man die Kette aus drei Reihen Platten von $0^m,08$ Dicke oder aus fünf Reihen Platten von $0^m,05$ Dicke zusammensetzen.

Im Allgemeinen muß man die Dicken der Platten so annehmen, daß man die der Ketten in jedem Puncte um Größen verändern kann, welche nicht so groß sind, daß sie merkliche Gleichgewichtsstörungen hervorrufen können. Aus diesem Grunde läßt man kleine Seitenplatten von blos $0^m,01$ bis $0^m,02$ Dicke und in hinreichender Anzahl gießen, um die Ketten in jedem Puncte vollständig machen zu können, und da es in gewissen Fällen auch vorkommen kann, daß die Dicke der Ketten sich plötzlich von einem Bolzen zum andern ändern muß, so läßt man zugleich auch halbe Platten oder Scheiben von derselben Dicke und Breite als die kleinen Platten gießen. Ehe man endlich die Ketten an ihre Stelle bringt, hält man die verticalen Reihen der Platten durch kleine kupferne Ringe, die man zwischen die Platten jedes Bolzens legt, in der nöthigen gegenseitigen Entfernung. *)

*) Wegen weiterer Ausführung der Construction und der Theorie der in Rede stehenden Zugbrücken vergleiche man Mémorial de l'officier du Génie, Nro. 5, p. 51.

Aufstellung der Bewegungsvorrichtung.

§. 377. Die Bewegungsvorrichtung selbst bietet keine Schwierigkeiten dar. Die den großen Ketten *FG* des Gegengewichtes entsprechende innere Rolle *D* (Fig. 143) befindet sich an einer eisernen Welle, welche noch eine andere große Rolle *EE* trägt mit einer eckigen Hohlkehle, in welcher eine Kette ohne Ende läuft, woran die Menschen, wenn eine Bewegung hervorgebracht werden soll, ziehen. Der Durchmesser der letztern Rolle ist wenigstens $= 1^{m},20$, und der der erstern kleinern Rolle $D = 0^{m},60$. Es ist wohl kaum nöthig, zu bemerken, daß sich auf jeder Seite des Einganges eine solche Vorrichtung befindet, und daß man, um das Aufliegen der großen Ketten auf der Erde zu vermeiden, wenn die Brückenbahn in ihre senkrechte Stellung kommt, Vertiefungen oder Gruben anbringt, in welche sie hineingehen, und welche ungefähr eine Tiefe von $1^{m},50$ und $0^{m},60$ bis $0^{m},70$ im Quadrat haben, und weil sie hinter dem Seitenpfeiler des Einganges liegen, keine Nachtheile verursachen können.

Bemerkungen über die bereits ausgeführten Zugbrücken mit veränderlichem Gegengewichte.

§. 378. Die Zugbrücke, deren Beschreibung wir eben gegeben haben, ist im Jahre 1821 in Metz von uns, dann 1823 an dem Thore der Citadelle von Verdün von Thiebault und hierauf in Straßburg, Belfort, Toul, Sedan rc. ausgeführt. Ueberall sind die Ingenieure durch die sich ergebenden Resultate und die Leichtigkeit der Bewegungsvorrichtung, welche an allen Orten angewandt werden kann, befriedigt. Die im Jahre 1826 an dem Deutschen Thore zu Metz unter der Aufsicht des Verfassers durch Bugnot ausgeführte Zugbrücke bietet einige Eigenthümlichkeiten in der Construction dar, welche die Aufmerksamkeit der Ingenieure zu verdienen scheinen, weshalb wir auch die Zeichnung derselben auf der VI. Tafel mitgetheilt haben.

Diese Eigenthümlichkeiten bestehen: 1) in dem Weglassen der Querbalken, welche durch einen flachen Eisenstab ersetzt werden, der sich in zwei conische Zapfen endigt, an denen die Ketten der Brücke befestigt werden und vermittelst Lappen an den Langhölzern der Brückenbahn durch Schrauben befestigt sind;*) 2) in der Hinweglassung aller Krampen, Bänder oder Eisen, welche nicht durch Bolzen nachgezogen werden können, sobald das Holz geschwunden ist, wodurch sie locker werden, was immer nach einem gewissen Zeitraume eintritt; 3) in der Construction der kleinen und der großen Rolle und ihrer Lager, die hier

*) Die Eisenstange ist $0^{m},025$ dick und $0^{m},11$ breit und wird an den umgebogenen Enden stärker. Die conischen Zapfen haben am stärksten Ende $0^{m},08$ bis $0^{m},09$, am dünnen Ende $0^{m},05$, an der Stelle des Befestigungsringes der Ketten $0^{m},04$ und an der Stelle der Schraube, welche die Mutter trägt, nur $0^{m},03$ im Durchmesser. Obgleich der ganze Vorsprung dieses Zapfens ungefähr $0^{m},60$ beträgt, so genügen diese Dimensionen doch für die schwersten Brücken, indem man durch Rechnung findet, daß bei einer Zugkraft von 1000 bis 1200 Kilogr. die Biegung des Balkens höchstens $0^{m},002$ beträgt, bei welcher die Elasticität der eisernen Zapfen noch nicht verändert wird.

aus einem einzigen Gußstücke bestehen, welches weniger Arbeit erfordert und eine größere Haltbarkeit besitzt, als das in dem **Mémorial de l'officier du Génie**, N^{ro} 3, p. 61 und 69, zu einer Zeit vorgeschlagene wo unsere Gießereien noch nicht zu dem Standpuncte gelangt waren, welchen sie jetzt erreicht haben; 4) endlich in der Anwendung von beweglichen Geländern, welche aus Stangen bestehen, die sich mit einem hinreichenden Spielraume auf kleinen Rollen durch die in den Seitenpfeilern des Einganges befindlichen Einschnitte ziehen lassen.

Berechnung der Gegengewichte für den besondern Fall, wo die vordern Rollen über der Drehungsaxe der Brückenbahn liegen.

§. 379. Wir wollen jetzt die mechanische Theorie ableiten, nach welcher man die großen Gegengewichtsketten in dem Systeme, welches uns jetzt beschäftigt, aufstellen muß.

Bei der Spiralzugbrücke von Derché haben wir bewiesen, daß, wenn der mittlere Berührungspunct J (Fig. 140) der äußern Rolle C in der Verticale des Punctes A der Zapfen der Brückenbahn liegt, die Spannungen t des Theiles JB der äußern Kette für alle Lagen der Brückenbahn den Längen l desselben proportional sind. Hieraus folgt, daß sich der wirksame Theil des Gegengewichtes auch der Länge l proportional verändern muß, wenn das Gleichgewicht in jedem Augenblicke stattfinden soll, und da die Längen der schweren Ketten, welche das Gegengewicht bilden, genau in demselben Verhältnisse abnehmen, als die der Kette BJ, und um Größen, welche der Hälfte der Verkürzungen dieser letzten Kette gleich sind; so folgt auch, daß in dem in Rede stehenden Falle die Kette ein gleichförmiges Gewicht oder dieselbe Stärke in allen ihren Theilen haben muß, welches blos nach der Bedingung berechnet ist, daß für die horizontale Lage der Brückenbahn das Gleichgewicht stattfindet. Mit andern Worten, das Gewicht der Länge FG der schweren Ketten, welche unmittelbar unter der innern Rolle D aufgehangen sind, muß $= p \cdot \frac{L'}{H}$ sein, wo p den Theil des Gewichtes der Brückenbahn, welcher am Befestigungspuncte B wirkt, L' die Länge BJ und H die Höhe AJ bezeichnet.

Am Ende der Bewegung der Brückenbahn, wo sie gegen die Thorpfeiler fällt, hat sich eine Länge von den großen Ketten umgelegt, welche gleich der halben Verkürzung der äußern Kette BJ ist und die wir $= L' - L''$ setzen wollen, d. h. die Ketten des Gegengewichtes haben sich um die Größe $\frac{L' - L''}{2}$ umgelegt. Es sei T' die Spannung $p \cdot \frac{L'}{H}$ der äußern Kette im Anfange der Bewegung und T'' ihre Spannung am Ende der Bewegung, so ist das Totalgewicht der Länge $\frac{L' - L''}{2}$ der unter den Rollen aufgehängten Kette $= T' - T''$ $= p \cdot \frac{L' - L''}{H}$, wodurch man die Dimensionen der dicken Ketten und die Anzahl der auf jeden Bolzen zu hängenden Platten ꝛc. bestimmen kann.

Bestimmung der Höhe des Berührungspunctes der äußern Rollen und der Ketten.

§. 380. Da die Spannung T'' nicht gleich Null und die schweren Ketten gegen das Ende der Bewegung nicht vollständig umgelegt sind, so hat man für diese Lage die Spannung T'' mit dem Gewichte des obern Quereisens (Armatur), dem der nicht umgelegten Platten und dem unter den Rollen D hängenden Theile der kleinen Ketten MF noch in's Gleichgewicht zu bringen. Aber da es in gewissen Fällen und namentlich für gewisse Lagen der äußern Rollen C geschehen kann, daß das Gewicht der obern Armaturen allein schon die Spannung T'' überschreitet, so sieht man, daß es für die in Rede stehende Lage kein Mittel geben würde, das System in's Gleichgewicht zu bringen, wenn man nicht die Lage dieser Rollen und des Befestigungspunctes B an der Brückenbahn verändern will. Es ist daher gut, diese Bestimmungen zum Voraus zu machen, um den Bedingungen des Gleichgewichtes zu genügen. Es sei also q das Gewicht der Theile der kleinen Ketten MF, welche senkrecht unter der Rolle D (Fig. 144) hängen, q' das vorher bestimmte Gewicht der Armaturen in F, vermehrt um das halbe Gewicht der ersten Platten der großen Ketten, welche sich auf diesen Armaturen vereinigen, und die man für eine verticale Lage der Brückenbahn als horizontal annimmt, so hat man zur Bestimmung von T'' die Relation:

$$q + q' = T'',$$

indem man die von den Theilen BJ und JM der Kette herrührende Wirkung vernachlässigt.

Aber da das wahre Gewicht dieser verschiedenen Theile und das der Brückenbahn immer etwas ungewiß bleibt, so ist es rathsamer, das Gewicht q' eher größer als kleiner zu nehmen, um das Gewicht des obern Quereisens und der ersten Platten nicht vermindern zu müssen, wenn sie sich schon an ihrem Platze befinden. Vielleicht würde es auch gut sein, ein blos an dem Quereisen aufgehangenes System von Platten anzuwenden, um den Druck und die Reibung der dünnen Ketten in der Kehle der Rollen D zu vermehren und so einem Gleiten vorzubeugen, welches der Bewegung der Brücke in der in Rede stehenden Lage des Systemes hinderlich sein würde.

Um nun die Höhe des mittlern Berührungspunctes J der vordern Rolle zu bestimmen, bemerke man, daß das Gewicht P der Brückenbahn die Entfernung GL ihres Schwerpunctes von der Verticale der Axe A der Zapfen zum Hebelarme hat, während der von T'' dem von derselben Axe auf die Richtung JB gefällten Perpendikel AK gleich ist, so daß man hat:

$$P \cdot LG = T'' \cdot AK, \text{ folglich } AK = \frac{P}{T''} \cdot LG,$$

wodurch die Lage von JK und folglich die des Punctes J bestimmt wird, wenn die Lage des Punctes B bekannt ist.

Bemerkung über den Einfluß der physischen Constitution der Ketten.

381. Die vorhergehenden Bemerkungen genügen, um zu zeigen, daß das angewandte Gegengewicht in dem Falle die Bedingungen des

Problemes genau erfüllt, wo der Punct J in der Verticalen der Axen der Zapfen A liegt. Jedoch sieht man leicht ein, daß das Gleichgewicht nur dann für alle Lagen der Brückenbahn genau stattfinden könnte, wenn die Gegengewichtsketten eine vollkommen continuirliche Form hätten, oder wenn ihre Gelenke unendlich nahe an einander lägen. Da aber im Gegentheil die Entfernung der Gelenke $= 0^m,11$ angenommen ist; so sieht man, daß es nur eine gewisse Anzahl wirklicher Gleichgewichtslagen geben wird. Wenn z. B. der Theil $L' - L''$ der äußern über die Rolle gehenden Kette blos $= 5^m,20$ ist, so werden sich die großen Ketten um $\frac{1}{2} \times 5^m,20 = 2^m,60$ umlegen können, welche Länge ungefähr 25 oder 26 Gliedern, mit Einschluß der Endglieder, entspricht, denen, wie es a priori einleuchtend ist, wenigstens 24 Gleichgewichtslagen des Systemes entsprechen, wenn man die äußern Glieder nicht mitrechnet.

Diese Bemerkung ist ohne Zweifel schon für diejenigen ausreichend, welche eine solche Zugbrücke practisch ausführen wollen. Aber wenn man, wie es in Art. 55 u. folg. der schon erwähnten Abhandlung über die Zugbrücken mit veränderlichem Gegengewichte (**Mémorial de l'officier du Génie, N^ro 5**) geschehen ist, untersucht, was geschieht, wenn sich ein solches System von Platten gegen den untern Theil der schweren Ketten umlegt, so wird man finden, daß das Gleichgewicht nicht blos in der horizontalen Lage dieser Platten, sondern auch in den Lagen streng stattfindet, wo sie in Beziehung auf die unmittelbar vorhergehenden oder folgenden Platten gegen die Verticale eine symmetrische Lage annehmen; woraus folgt, daß es nicht blos 24 Gleichgewichtslagen, sondern 48 giebt. Ferner zeigt die Rechnung, daß der größte sich auf die Gleichgewichtsunterschiede, welche in den Zwischenlagen vorkommen, beziehende Einfluß für eine 3000 Kilogr. schwere Brückenbahn und mit Berücksichtigung des ganzen Systemes der das Gegengewicht bildenden Ketten noch nicht 11,50 Kilogr. übersteigt. Wenn endlich die Ketten so eingerichtet sind, daß, wenn man die Platten paarweise nimmt, die untere Platte des einen Zweiges horizontal ist, wenn die des andern ungefähr unter einem Winkel von 30° gegen die Verticale geneigt ist (Fig. 145), so findet man, daß alsdann eine doppelte Anzahl Gleichgewichtslagen, d. h. ungefähr 96 vorhanden sind, was die Brauchbarkeit dieses Systemes von Zugbrücken in Beziehung auf das Gleichgewicht genügend beweist.

Jedoch ist zu bemerken, daß man in dem Vorhergehenden den Einfluß des Gewichtes der dünnen Ketten der Brücke vernachlässigt hat, welche 6 Kilogr. für das laufende Meter wiegen, und Gleichgewichtsdifferenzen hervorrufen können, welche bis 60 Kilogr. und gegen die horizontale Lage der Brückenbahn selbst an 70 Kilogr. betragen können. Da diese Differenzen die Kraft von mehr als einem Menschen in Anspruch nehmen, so müssen sie in Betracht gezogen werden, was nach dem in §. 77 Gesagten keine Schwierigkeit darbieten kann.

Verfahren, wie man das Gewicht der dünnen Ketten berücksichtigen kann.

§. 382. Wir wollen annehmen, daß die Brückenbahn eine beliebige Lage AB (Fig. 146) angenommen habe, und ρ sei das Gewicht des laufenden Meters der dünnen Ketten, so ist das der Länge BJ der äußern Kette $= \varrho l$, welches man sich im Puncte O concentrirt und in zwei andere zerlegt denken kann, wovon das eine $\varrho \frac{l}{2}$ im Berührungspuncte J der Rolle, während das andere $\varrho \frac{l}{2}$ im Anhängungspuncte B der Brückenbahn wirkt, und sich mit der Componente p des Gewichtes der letztern vereinigt, so daß

$$p + \tfrac{1}{2} \varrho l$$

die Gesammtwirkung in B ist. Wenn man nun die in J vertical wirkende Kraft $\frac{1}{2} \varrho l$ in zwei andere zerlegt, wovon die eine normal auf dem Einschnitte der Rolle steht und durch den Widerstand der Zapfen C aufgehoben wird und die andere nach der Richtung JB wirkt, um die Brückenbahn in dem Sinne von p zu ziehen; so beweist man leicht, daß diese letzte Wirkung dem Gewichte eines Kettenstückes gleich ist, welches die Projection $J'O'$ von JO auf die Verticale des Befestigungspunctes F des Gegengewichtes Q zur Länge hat, und endlich folgt aus den schon erwähnten Bemerkungen in §. 77, daß das Gegengewicht Q durch das Gewicht der dünnen Ketten um die Größe $\varrho \cdot O'F$ vermehrt wird, welche dem Gewichte des Kettentheiles $O'F$ gleich ist, der den Höhenunterschied zwischen der Mitte von BJ und dem Befestigungspuncte F des Gegengewichtes ausdrückt. Da man nun auch hier hat:

$$t : p + \tfrac{1}{2} \varrho l = BJ : AJ,$$

folglich:

$$t = l \cdot \frac{p + \frac{1}{2} \varrho l}{H},$$

so ist klar, daß in der gegenwärtigen Voraussetzung der verbesserte Werth des Gegengewichtes Q ausgedrückt wird durch:

$$Q = \frac{l\,(p + \frac{1}{2} \varrho l)}{H} - \varrho \cdot O'F = \frac{l p}{H} + \varrho \left\{ \tfrac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{H} - O'F \right\},$$

welchen Ausdruck man leicht für jede besondere Lage der Brückenbahn berechnen kann, woraus sich das Gesetz ergiebt, wornach sich die correspondirenden Dicken der schweren Ketten des Gegengewichtes ändern müssen, wenn man nur das Zeichen von $O'F$ verändert, sobald die Höhe des Punctes F größer als die von O oder O' wird.

Wirkliche Construction der Gegengewichtsketten für den Fall, wo die vordere Rolle der Axe der Brückenbahn entspricht.

§. 383. Auf diese Weise findet man,*) daß jede von den in Rede stehenden schweren Ketten aus zwei Theilen bestehen muß, wovon der eine ein gleichförmiges Gewicht hat und leicht construirt werden kann, während das des andern von dem obern Quereisen ab nach den Gliedern der arithmetischen Progression 1, 2, 3, 4, . . . zunehmen muß,

---

*) Man vergleiche die angeführte Abhandlung in dem Mémorial de l'officier du Génie, Nro. 5, Seite 96 u. folg.

wodurch das Ganze eine Trapezoidform $abcd$ (Fig. 147) annimmt, welche man dadurch erhält, daß man auf die verschiedenen Bolzen Scheiben oder kleine Platten hängt, deren Gewicht in dem gehörigen Verhältnisse von dem obern Quereisen bis zum untern zunimmt. Durch dieselben Rechnungen läßt sich aber darthun, daß, wenn man den Gegengewichtsketten eine gleichförmige Dicke $a'b'$, welche das arithmetische Mittel zwischen ihren nach der obigen Gleichung bestimmten Enddicken ab und cd ist, giebt, das Gleichgewicht für die anfängliche und die letzte Lage der Brückenbahn nicht verändert wird, und daß die Gesammtveränderungen des Gleichgewichtes in den Zwischenlagen bei Brückenbahnen von 3000 Kilogr. nicht 14 Kilogr. übersteigen, eine Größe, welche man hier ohne Nachtheil unberücksichtigt lassen kann, weil für die in Rede stehenden Zwischenlagen die an den großen Bewegungsrollen angebrachte Kraft nur einen Theil der passiven Widerstände zu überwinden hat, welche der horizontalen Lage der Brückenbahn entsprechen.

Nun seien Q und Q'' die sich auf die größte und kleinste Länge L' und L'' der äußern Ketten BJ beziehenden Werthe von Q, so muß das Totalgewicht der dicken Ketten für die Höhe $\frac{L'-L''}{2}$ gleich $Q'-Q''$ genommen werden, wodurch die Dimensionen dieser letzten Ketten vollständig bestimmt werden, wenn man voraussetzt, daß man das Gewicht der obern Quereisen und die Lage des Punctes J nach dem Vorhergehenden schicklich bestimmt hat.

Allgemeiner Fall, wo die vordere Rolle eine beliebige Lage hat.

§. 384. Die Berechnung des Gewichtes der dicken Ketten und ihre Construction sind auch nicht schwieriger in dem Falle, wo der mittlere Berührungspunct J der vordern Rolle eine beliebige Lage hat, als für den Fall, wo er sich in der Verticale der Axe A der Zapfen befindet, wenn man nur wieder annimmt, daß der Punct A mit dem Schwerpuncte der Brückenbahn und dem Befestigungspuncte B der Ketten in derselben geraden Linie liegt.

Denn wir wollen die Verticale des Punctes J bis zu ihrem Durchschneiden mit der geraden Linie AB der Brückenbahn in H (Fig. 148) verlängern, so haben wir bereits gefunden, daß das in B wirkende Gewicht mit Einschluß des Gewichtes der dünnen Ketten

$$= p + \frac{\varrho}{2} l$$

ist, und folglich erhält man die Spannung t der äußern Kette, welche dieses Gewicht im Gleichgewichte hält, durch die folgende Proportion:

$$t : p + \frac{\varrho}{2} l = BJ : HJ,$$

woraus folgt:

$$t = \left(p + \frac{\varrho}{2} l\right) \frac{l}{H},$$

welcher Ausdruck sich leicht aus dem Dreiecke BJH oder durch rein graphische Operationen bestimmen läßt. Denn wenn man auf der Verticale JH eine dem Ausdrucke $p + \frac{\varrho}{2} l$ gleiche Anzahl von Millimetern oder Centimetern von J gegen S aufträgt und zu BH die Linie SL parallel zieht; so drückt offenbar JL in denselben Einheiten die Anzahl der Kilogramme von t aus. Um alsdann den Gesammtwerth von Q zu erhalten, projicirt man, wie es weiter oben angegeben ist, den Mittelpunct O von BJ nach O' auf die Verticale des Punctes F der dicken Ketten, und für die Lage der Puncte F und O findet man:

$$Q = \left(p + \frac{\varrho}{2} l\right) \frac{l}{HJ} - \varrho\, O'F,$$

woraus man sogleich den Werth von Q für die verschiedenen Lagen der Brückenbahn ableiten und darnach die Dimensionen jedes Theiles der dicken Gegengewichtsketten bestimmen kann.

Construction der Gegengewichtsketten für den allgemeinen Fall.

§. 385. Wir wollen zuerst die Lage der Brückenbahn betrachten, wo dieselbe gegen die verticalen Pfeiler des Einganges schlägt, und es sei Q'' der correspondirende Werth von Q, welcher nothwendig positiv sein wird, wenn man die Höhe des Punctes J der vordern Rollen nach der für den vorhergehenden Fall gegebenen Regel bestimmt hat; so bestimmt man die Dimensionen und das Gewicht der Quereisen ꝛc. nach der Annahme, daß die erste Reihe von Platten $a_1 a_1$ (Fig. 149) eine horizontale Lage hat, und bemerkt, daß nur die Hälfte des Gewichtes dieser Platten in F wirkt. Betrachtet man ferner die Brückenbahn in der Lage, wo das System der folgenden Platten $a_2 a_2$ horizontal geworden ist, und wo es wieder mit seinem halben, um das Gewicht der zweiten Bolzen vermehrten Gewichte in F wirkt; so wird der um Q'' verminderte Werth von Q genau dieses halbe Gewicht geben ꝛc. ....

Ebenso wollen wir die Brückenbahn in der Lage betrachten, wo das folgende Plattensystem $a_3 a_3$ horizontal ist, so bestimmt man sein Gewicht und das des 3ten Bolzen auf dieselbe Weise, und so fort bis zur horizontalen Lage der Brückenbahn. Bei der Berechnung der successiven Werthe von Q ist zu bemerken, daß, wenn man das Intervall zwischen den Mittelpuncten der Bolzenlöcher derselben Platte, vermehrt um den Spielraum der Bolzen, mit c bezeichnet, die dicken Ketten des Gegengewichtes bei jeder der obigen Operationen um die Größe c länger werden, während sich die dünne äußere Kette um das Doppelte oder um $2c$ verlängert, so daß, wenn l der dem Gewichte $Q = Q''$ entsprechende Werth von L'' ist, die successiven Werthe von Q den Längen:

$$l = L'', \quad l = L'' + 2c, \quad l = L'' + 4c, \quad l = L'' + 6c, \ldots.$$

entsprechen.

Wenn man auf diese Weise nach einander alle Theile der dicken Ketten construirt hat, welche der wirklichen und vollständigen Bewegung der Brückenbahn entsprechen, so verlängert man sie nach unten zu noch um ein oder zwei Systeme von Platten, um ihrem zweiten Schenkel eine gewisse Stabilität zu geben, welchen man bei der Anbringung und nach den Bedingungen des Gleichgewichtes gehörig umlegen muß. Was die practischen Mittel anlangt, durch welche man ohne Rechnung die Ketten corrigiren oder direct construiren kann, so ergeben sie sich leicht aus dem Vorhergehenden, und außerdem findet man sie am Ende der schon oft angeführten Abhandlung.

Berechnung der passiven Widerstände bei den Zugbrücken mit Ketten.

Berechnung der Reibung an den Zapfen und den Anhängepuncten der Brückenbahn.

§. 386. Man muß die Intensität berechnen können, welche die zur Bewegung der Brückenbahn angewandte Kraft in den verschiedenen Lagen der letztern und vorzüglich für die Lage, wo die Summe der Widerstände nach der Constitution des Systemes ein Maximum wird, haben muß. Um wenigstens einen Begriff zu geben, wie man die Rechnung für alle Fälle einzurichten hat, wollen wir die Zugbrücke mit Ketten betrachten, welche uns eben beschäftigt hat, indem wir jedoch voraussetzen, daß dieselbe, ohne Berücksichtigung der passiven Widerstände, in allen Lagen streng im Gleichgewichte ist, und daß der Berührungspunct J der Ketten mit der äußern Rolle in der Verticale AJ (Fig. 150) der Zapfen liegt. Außerdem vernachlässigen wir alle Reibungen, welche von den durch das Gewicht der dünnen Ketten auf die Unterstützungspuncte erzeugten Pressungen herrühren, indem dieselben gegen die von den andern beweglichen Theilen des Systemes herrührenden Reibungen ganz verschwinden. Endlich wollen wir zur Vereinfachung der Rechnungen voraussetzen, daß der Schwerpunct G der Brückenbahn, der Mittelpunct A der Zapfen und der Befestigungspunct B der dünnen Ketten auf derselben geraden Linie liegen.

Nun seien:

γ der Winkel AJB,

α, β die Winkel, welche AB in einer beliebigen Lage mit der Verticale AJ und der Richtung BJ der Kette bildet; ferner sei P das im Schwerpuncte G wirkende Gewicht der Brückenbahn,

$$AB = R, \quad AG = R',$$

r der Halbmesser des Zapfens des Befestigungspunctes B,

r' der des Zapfens A der Brückenbahn,

H die Höhe AJ, und

l die Länge BJ der äußern Kette.

Endlich sei t die unbekannte Spannung dieser Kette, welche zugleich mit dem Gewichte der Brückenbahn und den an den Zapfen A und B stattfindenden Reibungen im Gleichgewichte steht. Bezeichnet man durch f_1 den Werth von $\dfrac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$, so werden diese Reibungen nach §. 219 offenbar ausgedrückt durch:

$$f_1 t \text{ und } f_1 \sqrt{(P - t \cos.\gamma)^2 + t^2 \sin.^2\gamma},$$

weil die Mittelkraft von t und P nothwendig durch den Aufliegepunct der Zapfen A in den Lagern gehen muß.

Nun wollen wir annehmen, daß der Brückenbahn eine sehr kleine Bewegung ertheilt werde, wodurch sie aus der Lage AB in die Lage AB' kommt und sich der Winkel α um $d\alpha$ ändert; so ist der von G beschriebene unendlich kleine Bogen $GG' = R'd\alpha$, der von B beschriebene Bogen $BB' = Rd\alpha$; folglich sind die virtuellen Geschwindigkeiten von P und t, nach ihren eigenen Richtungen genommen:

$$R'd\alpha \sin.\alpha \text{ und } Rd\alpha \sin.\beta,$$

wenn man die Zeichen unberücksichtigt läßt. Die Wegelemente oder virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspuncte der Reibungen in A und B fallen ferner mit der Richtung dieser Kräfte zusammen und werden ausgedrückt durch:

$$r'd\alpha \text{ und } rd\beta,$$

wo $d\beta$ die $d\alpha$ entsprechende Veränderung des Winkels $ABJ = \beta$ ist. Die Bedingungen des Gleichgewichtes werden folglich ausgedrückt durch:

$$tR \sin.\beta\, d\alpha = PR' \sin.\alpha\, d\alpha + f_1 t r d\beta$$
$$+ f_1 \sqrt{(P - t \cos.\gamma)^2 + t^2 \sin.^2\gamma} \cdot r'd\alpha,$$

indem man wieder von den Zeichen von $d\alpha$ und $d\beta$ abstrahirt, welche für alle Lagen des Systemes als positiv genommen werden müssen, weil die Reibungen beständig in einer der Kraft entgegengesetzten Richtung wirken.

Hieraus folgt die Gleichung:

$$R \sin.\beta t = R' \sin.\alpha P + f_1 r t \frac{d\beta}{d\alpha}$$
$$+ f_1 r' \sqrt{(P - t \cos.\gamma)^2 + t^2 \sin.^2\gamma},$$

in welche man nur den sich aus den Relationen der Figur ergebenden absoluten Werth von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ zu substituiren braucht.

Nach den obigen Annahmen giebt das Dreieck ABJ:

$$l^2 = H^2 + R^2 - 2RH \cos.\alpha, \quad H^2 = l^2 + R^2 - 2Rl \cos.\beta,$$

woraus man durch Differentiation erhält:

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{l}{RH \sin.\alpha}, \quad \frac{d\beta}{dl} = \frac{R \cos.\beta - 1}{Rl \sin.\beta},$$

und folglich:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{R \cos.\beta - l}{l} = -\frac{H}{l} \cos.\gamma, \text{ *)}$$

---

*) Man kann dieses Resultat direct erhalten, wenn man das unendlich kleine Dreieck $BB'b'$ betrachtet, worin man hat:

weil

$$H \sin.\alpha = l \sin.\beta \text{ und } l = R \cos.\beta + H \cos.\gamma$$

ist. Substituirt man diesen Werth von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ mit verändertem Zeichen, so erhält man endlich:

$$R \sin.\beta \cdot t = R' \sin.\alpha P + f_1 r \frac{H}{l} \cos.\gamma \cdot t$$
$$+ f_1 r' \sqrt{(P - t \cos.\gamma)^2 + t^2 \sin.^2\gamma}.$$

Um diese Gleichung in Beziehung auf t aufzulösen, wendet man die Methode der successiven Substitutionen an, welche in §. 181 und 238 (Abschn. 3) angegeben ist, oder wenn man bemerkt, daß hier nothwendig $P - t \cos.\gamma$ größer sein muß, als $t \sin.\gamma$, so kann man nach der ersten Note zu Abschn. 3

$$\sqrt{(P - t \cos.\gamma)^2 + t^2 \sin.^2\gamma} = 0{,}96 \left\{P - t \cos.\gamma\right\} + 0{,}4\, t \sin.\gamma$$

setzen, was bis auf $^1/_{25}$ genau ist und keinen merklichen Fehler verursachen kann. Substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung, so erhält man unmittelbar die Größe:

$$t = \frac{P \left\{R' \sin.\alpha + 0{,}96\, f_1 r'\right\}}{R \sin.\beta - f_1 r \frac{H}{l} \cos.\gamma + f_1 r' \left\{0{,}96 \cos.\gamma - 0{,}4 \sin.\gamma\right\}},$$

welche man leicht für jede Lage der Brückenbahn oder für die verschiedenen und gleichzeitigen Werthe von α, β und γ berechnen kann.

Wir wollen z. B. den Fall betrachten, wo AB horizontal ist, welches hier dem Augenblicke entspricht, wo die Summe der passiven Widerstände ein Maximum ist, so hat man:

$$\sin.\alpha = 1, \quad \sin.\beta = \cos.\gamma = \frac{H}{l}, \quad \sin.\gamma = \frac{R}{l},$$

und folglich:

$$t = \frac{P \left\{R' + 0{,}96\, f_1 r'\right\} l^2}{lRH - f_1 r X^2 + f_1 l r' \left\{0{,}96\, H - 0{,}4\, R\right\}}.$$

$$BB' = R'd\alpha = ld\gamma = l\,(d\alpha - d\beta) = BB' \cos.\beta = Rd\alpha \cos.\beta,$$

woraus folgt:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{l - R \cos.\beta}{l},$$

welche Größe von der obigen nur durch das Zeichen verschieden ist, in welcher in der That $d\alpha$ in Beziehung auf $d\beta$ als negativ betrachtet werden muß, um den absoluten Werth zu erhalten.

Berechnung der Widerstände der Brückenbahn für specielle Data.

§. 387. Um ein Beispiel zu geben, welches sich auf den gewöhnlichen Fall großer Zugbrücken bezieht, wollen wir

$$P = 3000 \text{ Kilogr.}, \quad R = 4^m{,}00, \quad R' = 2^m{,}00, \quad H = 4^m{,}00,$$
$$r = 0^m{,}02, \quad r' = 0^m{,}04, \quad f_1 = 0^m{,}20;$$

folglich:

$$l^2 = 32^{mm}, \; l = 5^m{,}657, \; t = 0{,}7095 \; P = 2128{,}50 \text{ Kilogr.}$$

setzen. Wenn keine Reibung stattfände, oder wenn $f_1 = 0$ wäre, so hätte man:

$$t = \frac{P R' l}{R \cdot H} = 0{,}7071 \, P = 2121{,}30 \text{ Kilogr.},$$

folglich vermehren diese Reibungen den Werth der Spannung um:

$$0{,}0024 \; P = 7{,}20 \text{ Kilogr.}$$

Wenn die Zapfen keine Reibungen verursachten, während die Reibung der Ketten an ihrem Befestigungspuncte vorhanden wäre, so hätte man blos:

$$t = \frac{R' l^2}{lRH - f_1 r H^2} \; P = 0{,}70759 \; P,$$

und folglich würde die zur Ueberwindung dieser Reibung erforderliche Vermehrung der Spannung

$$= 0{,}70759 \; P - 0{,}7071 \; P = 0{,}00049 \; P = 1{,}47 \text{ Kilogr.}$$

sein, woraus man den geringen Einfluß dieser letzten Reibung ersehen kann.

Widerstände der vordern Rollen und der Ketten.

§. 388. Es sei t_1 die Spannung des zweiten Theiles JL der zu der Rolle C (Fig. 151) gehörigen Kette, welche wir als fast horizontal annehmen wollen; so ist der von t_1 und t gebildete Winkel $= 90^\circ + \gamma$. Wenn wir ferner durch r_1 den Halbmesser des Zapfens der Rolle, durch f_1' den ihm entsprechenden Werth von $\frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$, durch R_1 den um die halbe Kettenstärke vermehrten Halbmesser der Rolle bezeichnen, indem die Glieder der Kette, wie die der Uhrketten construirt sind, der Halbmesser des Zapfens $= \varrho$ und der Reibungscoefficient $= f_1$ ist; so haben wir nach §. 242 und in der Voraussetzung, daß die Spannung t in zwei andere zerlegt sei, wovon die eine $t \cos.\gamma$ vertical wirkt und zu dem durch m bezeichneten Gewichte der Rolle addirt wird, während die andere $t \sin.\gamma$ in horizontaler Richtung wirkt und von t_1 abgezogen wird, die Gleichung:

$$t_1 R_1 = \left\{1 + \frac{2 f_1 \varrho}{R_1 - f_1 \varrho}\right\} t R_1 + r_1 f_1' \sqrt{(t_1 - t \sin.\gamma)^2 + (m + t \cos.\gamma)^2},$$

worin man für die Wurzelgröße auch ihren Näherungswerth:

$$0{,}96 \; \left\{m + t \cos.\gamma\right\} + 0{,}4 \; \left\{t_1 - t \sin.\gamma\right\}$$

setzen kann, weil auch hier für die verschiedenen Lagen der Brückenbahn $m + t \cos. \gamma$ offenbar größer ist, als $t_1 - t \sin. \gamma$. Setzt man folglich:

$$\frac{2 f_1 \varrho}{R_1 - f_1 \varrho} = \delta$$

und substituirt, so erhält man für t_1 die Gleichung:

$$t_1 = \frac{\left\{(1+\delta) R_1 + f_1' r_1 (0{,}96 \cos.\gamma - 0{,}4 \sin.\gamma)\right\} t + 0{,}96 f_1' r_1 m}{R_1 - 0{,}4 f_1' r_1}.$$

Da die Ketten und ihre Zapfen aus Eisen verfertigt sind, so können wir $f_1 = 0{,}20$ setzen. Was den Reibungscoefficienten f_1' der Axe der Rolle betrifft, so ist er ungefähr $= 0{,}14$ (§. 191), wenn man die Axe von Eisen, die Lager von Messing und keine Erneuerung der Schmiere annimmt. Wenn wir wegen der beiden Rollen, welche man sich hier als in eine vereinigt denken kann, $m = 300$ setzen, und wie oben:

$$\gamma = \frac{90^\circ}{2},$$

folglich:

$$\sin.\gamma = \cos.\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707,\ \varrho = 0^m{,}01,\ R_1 = 0^m{,}33,\ r_1 = 0^m{,}02,$$

$$t = 2128{,}50 \text{ Kilogr.}$$

annehmen, so erhalten wir nach diesen mit den in der Praxis gebräuchlichen übereinstimmenden Daten:

$$0{,}96 \cos.\gamma - 0{,}4 \sin.\gamma = 0{,}396,\ \delta = 0{,}0122,\ t_1 = 2171{,}30 \text{ Kilogr.}$$

Diese Resultate zeigen: 1) daß der von den Kettengliedern herrührende Widerstand allein die Spannung t um $\delta t = 0{,}0122\, t = 25{,}97$ Kilogr. vergrößert, welches mehr als das Dreifache von dem ist, was die gesammten passiven Widerstände der Brückenbahn erfordern; 2) daß die Gesammtzunahme der Spannung, welche durch den Widerstand der Kettenglieder und der Zapfen der Rollen hervorgerufen wird, sich auf:

$$2171{,}30 \text{ Kilogr.} - 2128{,}50 \text{ Kilogr.} = 42{,}80 \text{ Kilogr.}$$

beläuft, wovon ungefähr

$$42{,}80 - 25{,}97 = 16{,}83 \text{ Kilogr.}$$

durch die Reibung dieser Zapfen absorbirt sind.

Wenn man statt der halbflachen Ketten das im vierten Abschnitte erwähnte System von Ketten anwendete, so würde ihr Widerstand fast gleich Null und die Kraft hätte nur den Widerstand von 16,83 Kilogr. an den Zapfen der Rollen zu überwinden.

Wenn man ferner die Messinglager der Zapfen durch Pockholz oder andere harte Holzarten, wie Vogelbeerholz, Kornelkirschholz rc., ersetzte, welche vor ihrer Bearbeitung gut getrocknet und in Oel gekocht sind; so würde f_1' einen Werth annehmen, welcher nach den Versuchen von Coulomb über die Reibung von Eisen auf hartem Holze höchstens $= 0{,}25$ oder $^1/_{20}$ sein würde. Wenn man folglich diese Voraussetzungen in der letzten Formel macht und wieder $\delta = 0$ setzt, so erhält man:

$$t_1 = 2134{,}55 \text{ Kilogr.}$$

und mithin reducirt sich der in den vorhergehenden Voraussetzungen $= 42{,}80$ Kilogr. gefundene Spannungszuwachs, welcher von den Zapfen der Rollen herrührt, auf:

$$2134{,}55 - 2128{,}50 = 6{,}05 \text{ Kilogr.}$$

Die Kraft hat folglich alsdann einen Totalwiderstand von:

$$2134{,}55 - 2121{,}3 = 13{,}25 \text{ Kilogr.}$$

zu überwinden.

Man sieht hieraus, daß eine solche Zugbrücke leicht durch einen einzigen, direct an den Ketten der Brückenbahn wirkenden Menschen in Bewegung gesetzt werden kann. Unsere Berechnungen setzen zwar voraus, daß der zweite Theil JL dieser Ketten horizontal sei, während er doch vertical wäre; allein durch diesen Umstand würde der Widerstand nur um eine sehr kleine Größe vermehrt werden. Es würde sich, wie man sogleich sehen wird, ganz anders in der Voraussetzung verhalten, wo sich noch ein zweites System von Rollen hinter der ersten C befände.

Widerstände der innern Rollen und der Ketten.

§. 389. Obgleich sich die obigen Gleichungen auf die vordern Rollen beziehen, so geben sie doch auch den Werth der Spannung t_2, welche man an den neuen Rollen D (Fig. 152) anbringen muß, um die Spannung des Theiles LJ der Kette und die daraus entspringenden Reibungen zu überwinden. Man braucht zu diesem Zwecke, da der Theil t_2 vertical ist, in den vorhergehenden Gleichungen nur unter dem Wurzelzeichen $\gamma = 0$, t_2 für t_1 und außerhalb desselben t_1 für t, sowie t_2 für t_1 zu setzen, wodurch man erhält:

$$t_2 R_1 = \left(1 + \frac{2 f_1 \varrho}{R_1 - f_1 \varrho}\right) t_1 R_1 + r_1 f_1' \sqrt{t_1^2 + (m + t^2)^2}\,,$$

woraus folgt:

$$t_2 = \frac{\left\{(1 + \delta)\, R_1 + 0{,}4 f_1' r_1\right\}\, t_1 + 0{,}96 f_1' r_1 m}{R_1 - 0{,}96 f_1' r_1}\,,$$

$$\delta = \frac{2 f_1 \varrho}{R_1 - f_1 \varrho}\,.$$

Setzt man auch hier:

$R_1 = 0^m{,}33$, $\varrho = 0^m{,}01$, $r_1 = 0^m{,}02$, $f_1 = 0^m{,}20$, $f_1' = 0^m{,}14$, außerdem $m = 300 + 200 = 500$ Kilogr., wegen der großen Räder und Bewegungsketten, endlich t_1 gleich dem eben berechneten Werthe von 2171,30 Kilogr.; so findet man zuerst $\delta = 0{,}0122$, welches für den Widerstand der Ketten giebt:

$$\delta t_1 = 26{,}49 \text{ Kilogr.};$$

ferner:

$$t = 2277{,}40 \text{ Kilogr.},$$

wodurch eine Vermehrung des Widerstandes von

$$2277{,}40 - 2171{,}30 = 56{,}10 \text{ Kilogr.}$$

hervorgerufen wird. Was die Gesammtleistung der an den kleinen Ketten in t_2 wirkenden Kraft zur Ueberwindung aller Reibungen betrifft, so muß sie

$$= 2227{,}40 - 2121{,}30 = 106{,}10 \text{ Kilogr.}$$

sein.

Da das mittlere Gewicht eines Menschen = 65 Kilogr. ist, so würden augenscheinlich unter diesen Voraussetzungen zwei Menschen zur Bewegung der Zugbrücke erforderlich sein. Aber da in der Wirklichkeit ein Mensch für längere Dauer nur eine Wirkung von 25 bis 30 Kilogr. zu leisten vermag, so sieht man, daß fast 4 Menschen zur bequemen Bewegung der Brücke erforderlich sind. Wenn man, wie es gewöhnlich der Fall ist, ein Rad von $0^m{,}66$ im Durchmesser, welches nahezu das Doppelte von dem der Rollen ist, anwendet; so braucht man ohne Bedenken nur zwei Menschen anzuwenden; aber es sind wenigstens vier Menschen erforderlich, wenn die kleinen Rollen nur $0^m{,}33$ im Durchmesser haben, woraus der Vortheil der Vergrößerung des Halbmessers aller Rollen zur Genüge hervorgeht.

Gesammtwiderstand in der Voraussetzung einer passenden Construction der Ketten, Lager ꝛc.

§. 390. Wenn man endlich den Fall wieder betrachtet, wo alle Lager der Rollen aus hartem Holze bestehen und die Kette keinen Biegungswiderstand hervorruft, und setzt in der letzten der obigen Gleichungen:

$$f_1 = 0, \quad f_1' = 0{,}05, \quad \delta = 0, \quad t_1 = 2134{,}55 \text{ Kilogr.}$$

so findet man:

$$t_2 = 2144{,}83 \text{ Kilogr.},$$

so daß sich der Gesammtwiderstand auf:

$$2144{,}83 - 2121{,}3 = 23{,}53 \text{ Kilogr.}$$

reducirt, welchen ein direct an dem verticalen Theile der Ketten wirkender Mensch leicht überwinden kann, und welcher sich auf die Hälfte reduciren würde, wenn man ein Bewegungsrad von dem doppelten Durchmesser als der der Rolle D anwenden würde. Da man jedoch nicht hoffen kann, die Reibung der Glieder der Ketten auf den Rollen vollständig zu beseitigen, und man außerdem auf die Gleichgewichtsdifferenzen ꝛc. Rücksicht nehmen muß; so muß man annehmen, daß der Widerstand nahezu das Doppelte beträgt, und selbst in dem Falle eines großen Rades die Wirkung eines Menschen erfordert, um ohne große Anstrengung überwunden werden zu können.

Vergleich der Resultate der Berechnung mit denen der Erfahrung.

§. 391. Die Erfahrung bestätigt dieses Resultat bei der Zugbrücke mit veränderlichem Gegengewicht, welche wir weiter oben beschrieben haben, und bei welcher die in Rede stehenden Gleichgewichtsdifferenzen, wie wir gezeigt haben, bei den gewöhnlich in der Praxis angenommenen

Einrichtungen sich nicht über 11 bis 12 Kilogr. erheben. In der That konnte die Zugbrücke der Citadelle von Verdun, welche 1821 von **Thiébault** erbaut ist und deren mit Eisenwerk beschlagene und $4^m,50$ lange Brückenbahn über 3000 Kilogr. wiegt, in der ersten Zeit ihrer Construction leicht durch einen einzigen an den dünnen Ketten der Bewegungsrolle wirkenden Menschen in Bewegung gesetzt werden. Wir könnten noch mehrere Zugbrücken anführen, deren Bewegung dieselben Resultate geliefert hat, und wenn zur Bewegung der Zugbrücke vor dem Thore der Deutschen in Metz zwei Menschen erforderlich sind, so rührt es allein daher, daß der Spielraum zwischen allen Gliedern sehr gering und von dem Arbeiter sehr schlecht ausgeführt ist, woraus Widerstände hervorgerufen werden, welche wirklich der Natur des Systemes fremd sind.

Jedoch haben wir in den vorhergehenden Rechnungen noch zwei andere Widerstände unberücksichtigt gelassen, welchen man augenscheinlich einen großen Einfluß bei den in Rede stehenden Zugbrücken zuschreiben müßte, nämlich einestheils den Widerstand, welchen die großen Ketten des Gegengewichtes bei ihrem Umlegen gegen das untere Ende darbieten, und anderntheils den von der Trägheit der in Bewegung zu setzenden bedeutenden Massen herrührenden Widerstand. Was den ersten betrifft, so zeigt die Rechnung, daß derselbe in dem Sinne der kleinen Ketten nicht über 5 Kilogr., und an dem Umfange der Bewegungsrolle, deren Halbmesser immer als doppelt so groß, wie der der kleinen Rollen angenommen wird, nicht über 2,5 Kilogr. steigt. Was den von der Trägheit der Massen herrührenden Widerstand anlangt, so wird es vielleicht von Nutzen sein, zu zeigen, wie man ihn in dem uns beschäftigenden Falle berechnen kann.

Einfluß der Trägheit der Massen des Systemes.

§. 392. Zuerst ist einleuchtend, daß, da die Geschwindigkeit des Systemes am Ende der Bewegung gleich Null ist, weder während des Aufziehens, noch während des Niederlassens der Brückenbahn im Ganzen ein reiner Verlust an lebendiger Kraft oder an Arbeit stattfindet (vgl. §. 73). Aber die eigentliche Aufgabe besteht hier darin, zu beweisen, daß die Quantität Arbeit und Wirkung, welche die bewegende Kraft in den ersten Augenblicken hervorbringen muß, um die Trägheit zu überwinden, nur sehr kleine Brüche von denen sind, welche an der Bewegungsrolle wirken müssen.

Wir wollen z. B. annehmen, daß das System am Ende des sechsten Theiles des ganzen Weges in dem Sinne des von dem Befestigungspuncte der Brückenbahn beschriebenen Bogens eine Geschwindigkeit von $0^m,2$ in der Secunde erlangt habe, wornach die andern $^5/_6$ des Weges in weniger als 27″ durchlaufen würden. Da der ganze Weg der in Rede stehenden Puncte bei einer Brückenbahn von 4 Meter Länge ungefähr $6^m,30$ beträgt, so wird die Winkelgeschwindigkeit, oder die in der Einheit der Entfernung stattfindende Geschwindigkeit

$$= {}^1/_4 \times 0^m,2 = 0^m,05 = \omega$$

sein, welcher eine lebendige Kraft:

$$\omega^2 \int r^2 dm = 0{,}0025 \int r^2 dm$$

entspricht, wo $\int r^2 dm$ das Trägheitsmoment der Masse der Brückenbahn in Beziehung auf die Axe der Zapfen bezeichnet. Aber der Einfachheit der Rechnungen wegen kann man, ohne merkliche Fehler zu begehen, die Masse der Brückenbahn als eine prismatische Stange von einer gleichförmigen Dichtigkeit π betrachten, deren Dicke $= e$, Länge $= R = 4^m$ und Breite $= b$ ist, wodurch man erhält:

$$\int r^2 dm = \frac{\pi}{g} \cdot \frac{ebR}{12} \left\{ e^2 + 4 R^2 \right\},$$

wo $g = 9^m{,}809$ ist und πebR das gleich 3000 Kilogr. angenommene Gewicht der Brückenbahn bezeichnet. Was den Werth der Unbekannten e^2 betrifft, so wird er noch nicht $^1/_{1600}$ von $4 R^2$ betragen, so daß er also ganz vernachläßigt werden kann. Wir erhalten also für die der Brückenbahn zu ertheilende lebendige Kraft den Ausdruck:

$$\omega^2 \int r^2 dm = \frac{0{,}0025 \times 3000 \times 16}{3 \times 9{,}809} = 4{,}08,$$

dessen Hälfte = 2,04 Kilogr. die von der Kraft hervorzubringende Quantität Wirkung ist.

Was die lebendige Kraft der Rollen und der Gegengewichte anlangt, so lassen sie sich leicht für eine beliebige Lage AB (Fig. 153) der Brückenbahn berechnen, wenn man bemerkt, daß die Geschwindigkeit in dem Sinne der kleinen Ketten BJ zu der Geschwindigkeit ωR des Befestigungspunctes B in dem Verhältnisse der in dem Sinne von BJ und seiner eigenen Bewegung gleichzeitig von B beschriebenen Elementarräume BB', BB'' steht; d. h. daß die Geschwindigkeit der kleinen Ketten durch

$$\frac{BB''}{BB'} \omega R = sin.\,\beta\ \omega R = 0^m{,}2\ sin.\,\beta$$

ausgedrückt wird, wo β den von BJ und AB gebildeten Winkel bezeichnet.

Aber wenn man die in B wirkende Componente des Gewichtes der Brückenbahn, welches ungefähr = 1500 Kilogr. ist, mit p bezeichnet, und voraussetzt, daß der mittlere Berührungspunkt J der Rollen und der Ketten in der Verticale A der Zapfen liegt; so findet man, daß nach den vorhergehenden Betrachtungen der correspondirende Werth der großen Gegengewichtsketten

$$= p \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta} = 1500 \cdot \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}$$

sein muß. Folglich erhält mnn die lebendige Kraft dieses Gegengewichtes

$$= \frac{1500}{g} \cdot \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta} \left(0{,}2\, sin.\,\beta\right)^2 = 6{,}12\ sin.\,\alpha\ sin.\,\beta.$$

Diese Größe ist gleich Null für die verticale Lage der Brückenbahn, nimmt beständig zu bis $sin.\,\alpha$ den Werth 0,87 angenommen hat, für welchen BJ ungefähr $= 4^m,72$ und

$$sin.\,\alpha\ sin.\,\beta = 0{,}777$$

ist. Nach diesem Puncte nimmt $sin.\,\alpha\ sin.\,\beta$ beständig wieder ab, bis es für die horizontale Lage der Brückenbahn $= 0{,}707$ wird; da jedoch die Trägheit von dieser Lage aus während einer gewissen Länge überwunden werden muß, so nehmen wir

$$sin.\,\alpha\ sin.\,\beta = 0{,}72,$$

welches

$$6{,}12 \times 0{,}72 = 4{,}40$$

für die den großen Gegengewichtsketten entsprechende lebendige Kraft und

$$2{,}20 \text{ Kilogr.}$$

für die von der bewegenden Kraft hervorzubringende Quantität Arbeit giebt.

Endlich kann man sich leicht davon überzeugen, daß die lebendige Kraft der Rollen und des großen Bewegungsrades nicht über 2 Kilogr., oder die zur Ueberwindung ihrer Trägheit erforderliche Quantität Arbeit nicht über 1 Kilogr. beträgt, so daß die von der Kraft hervorzubringende Totalwirkung geringer als

$$2{,}04 + 2{,}20 + 1 = 5{,}24 \text{ Kilogr.}$$

sein wird. Da der von dem Befestigungspuncte B der Brückenbahn während der Hervorbringung dieser Quantität Arbeit von der bewegenden Kraft beschriebene Weg

$$= {}^1\!/_6 \times 6^m,3 = 1^m,05$$

ist, so kann man sich nach unsern Voraussetzungen leicht überzeugen, daß der von den Ketten und Rollen beschriebene Weg ungefähr $0^m,75$ beträgt, und da die großen Bewegungsrollen einen doppelt so großen Halbmesser als die kleinen Rollen haben; so wird der während derselben Zeit von dem Angriffspuncte der Kraft beschriebene Weg $= 1^m,50$ sein, welches ungefähr eine mittlere oder constante Kraft von

$$\frac{5{,}24 \text{ Kilogr.}}{1^m,50} = 3{,}5 \text{ Kilogr.}$$

zur Ueberwindung der Trägheit der Massen voraussetzt.

Zum Aufziehen der Brückenbahn erforderliche Zeit.

§. 393. Was die von der Brückenbahn zum Beschreiben des Bogens von $1^m,05$ Länge erforderliche Zeit anlangt, so muß man, um sie in aller Strenge zu berechnen, das Gesetz der Bewegung selbst aus der Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen den Kräften der Trägheit und den Massen des Systemes ableiten. Da jedoch hier der von der Brückenbahn durchlaufene Bogen hinreichend klein angenommen wird, so können wir ohne Bedenken die Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte und die verschiedenen Kräfte als unter sich in einem fast constanten Verhältnisse stehend annehmen, so daß unter der constanten Wirkung der Kraft von 3,50 Kilogr. das System auch nahezu eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annimmt, für welche man hat:

$$e = \frac{vt}{2},$$

wo e den durchlaufenen Raum und v die von dem Anfange der Bewegung ab am Ende einer beliebigen Zeit erlangte Geschwindigkeit bezeichnet. Es ist hier aber:

$$e = 1^{m},05,\ v = 0^{m},2,$$

folglich:

$$t = 10'',1,$$

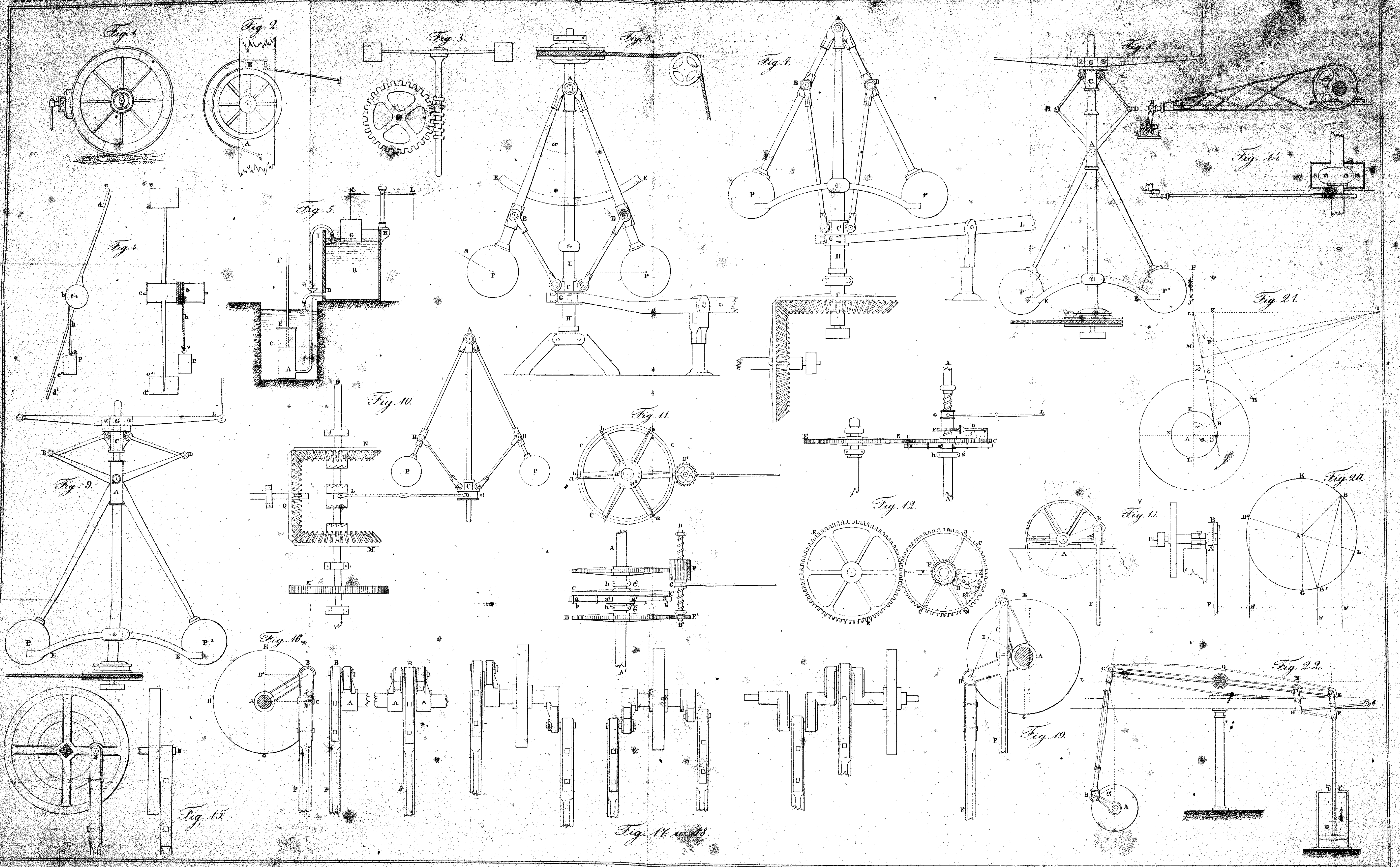
und da zur Vollendung der Bewegung ungefähr noch eine Zeit von 27″ erforderlich ist; so sieht man, daß die Gesammtdauer der Bewegung blos 37″ beträgt, welche noch kleiner ist als die Zeit, welche man gewöhnlich dazu gebraucht.

Wir haben gesehen, daß der auf dem Umfange der großen Bewegungsrolle stattfindende Widerstand der Reibung für die schweren Ketten nicht über 2,50 Kilogramme beträgt. Dieser Widerstand, vereinigt mit dem von 3,5 Kilogr., welcher nach unserer früheren Berechnung zur Ueberwindung der Trägheit der Massen in den ersten Augenblicken der Bewegung der Brückenbahn hinreichend ist und mit $\frac{23,53}{2} = 11,77$ Kilogr., welches wir für die Ueberwindung der vereinigten Widerstände der verschiedenen Zapfen, kleinen Ketten und Rollen in den letzten über die Einrichtung dieser Theile gemachten günstigsten Voraussetzungen gefunden haben, giebt uns die gesammte von der Kraft hervorzubringende Wirkung:

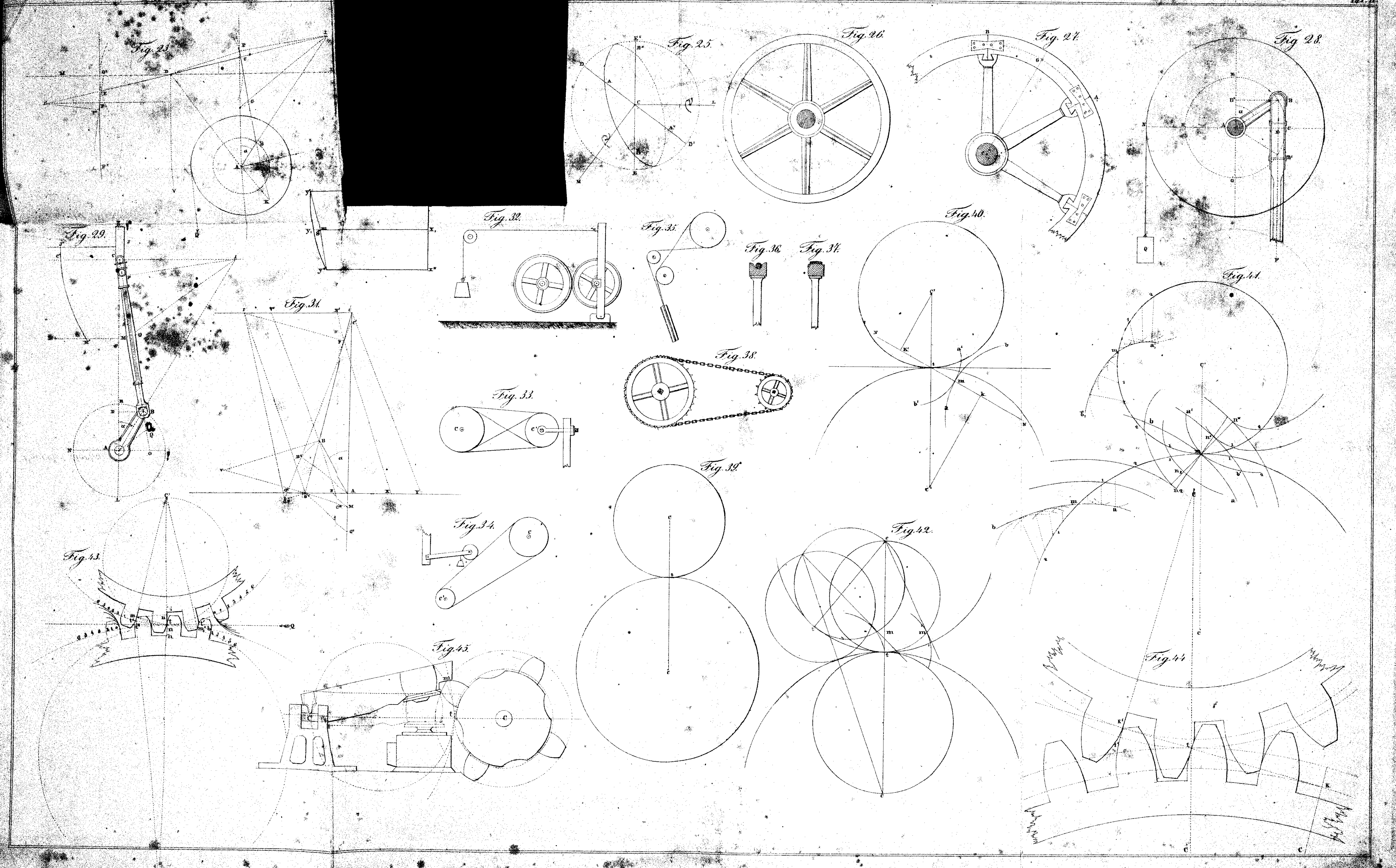
$$= 2,5 + 3,5 + 11,77 = 17,77 \text{ Kilogr.},$$

welches man wenigstens auf 18 Kilogr. erhöhen muß wegen der Steifigkeit der kleinen endlosen Ketten der Bewegungsrollen, und wozu man noch ungefähr 12 Kilogr. wegen der in den gewöhnlichsten Fällen stattfindenden Gleichgewichtsdifferenzen hinzusetzen muß (vgl. die erwähnte Abhandlung N^ro^ 9, p. 108), wodurch wir endlich 30 Kilogr. für die größte auszuübende Kraft finden. Wir finden also wieder, daß ein einziger an der großen Bewegungsrolle wirkender Mensch gewiß hinreichend ist, um in einer hinreichend kurzen Zeit die in Rede stehende Zugbrücke aufzuziehen und niederzulassen; aber daß, da die in gewissen Fällen von demselben auszuübende Kraft fast gleich der Hälfte seines Gewichtes ist, die Bewegung nur dann bequem erfolgen kann, wenn man an der zweiten Bewegungsrolle noch einen zweiten Menschen ziehen läßt, was auch vollkommen mit den an den größten Zugbrücken mit veränderlichem Gegengewichte gemachten Erfahrungen übereinstimmt.

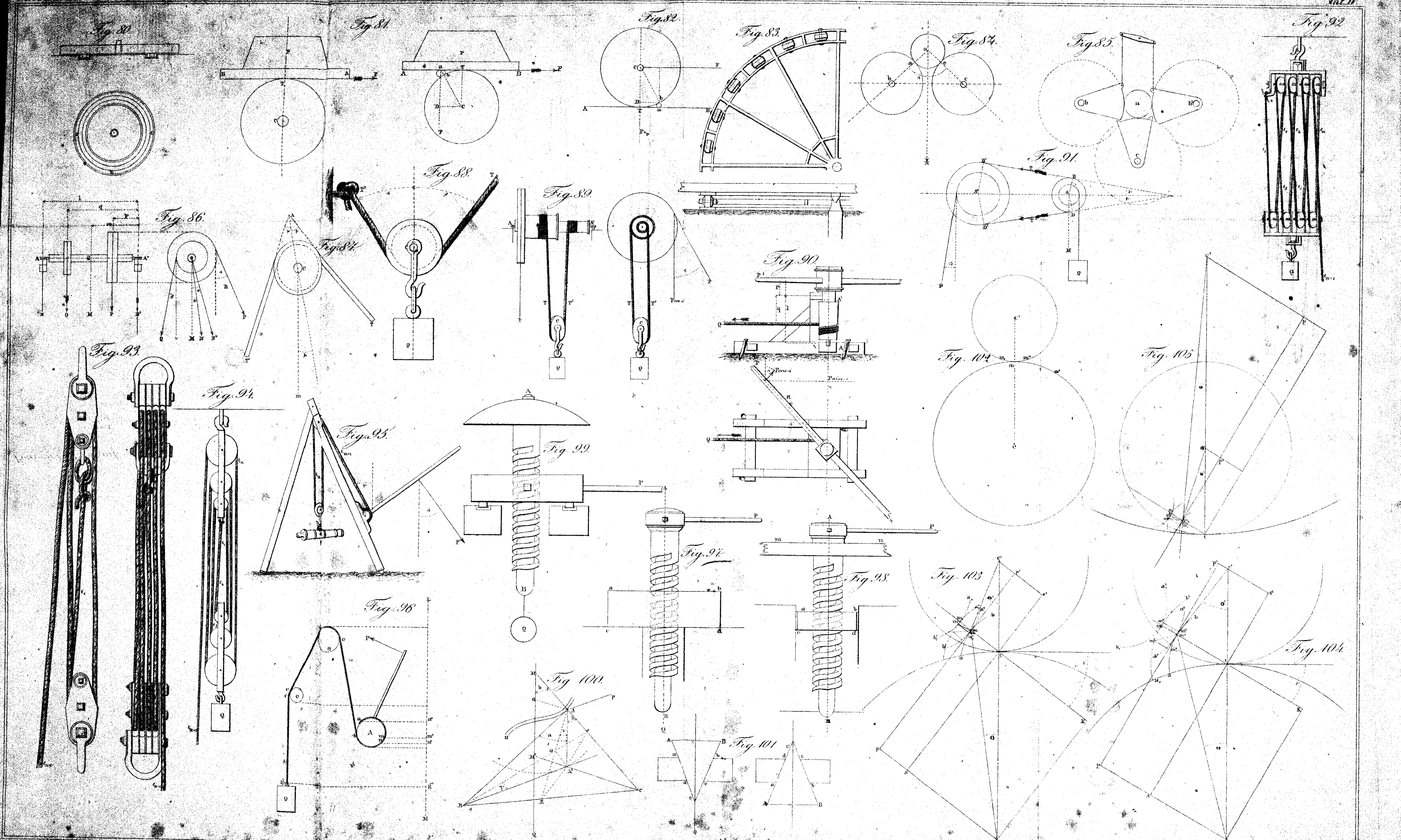
In Beziehung auf die vorhergehenden Berechnungen können wir die Ingenieure nicht genug erinnern, vor der Ausführung, wie wir es eben gethan haben, die verschiedenen von den Reibungen, den Gleichgewichtsdifferenzen und der Trägheit herrührenden Widerstände der Maschine zu berechnen. Durch diese Rechnungen werden sie in den Stand gesetzt, in jedem Falle die Dimensionen und Lagen der verschiedenen Theile auf die möglichst vortheilhafteste und öconomischste Weise zu bestimmen. Auch wollen wir erinnern, daß man sich nach der Aufstellung der Brücke nicht damit begnügen muß, den Versuch dadurch zu machen, daß man blos Menschen an den Bewegungsketten ziehen läßt, sondern daß man direct an diesen Ketten vertical unter den großen Rollen Gegengewichte aufhängt, welche schwer genug sind, um das System in den verschiedenen Lagen und mit einer geringen Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen. Diese Experimente haben den Vortheil, daß man durch sie die Rechnungen verificiren kann und daß sie die Unvollkommenheiten der verschiedenen Theile anzeigen.



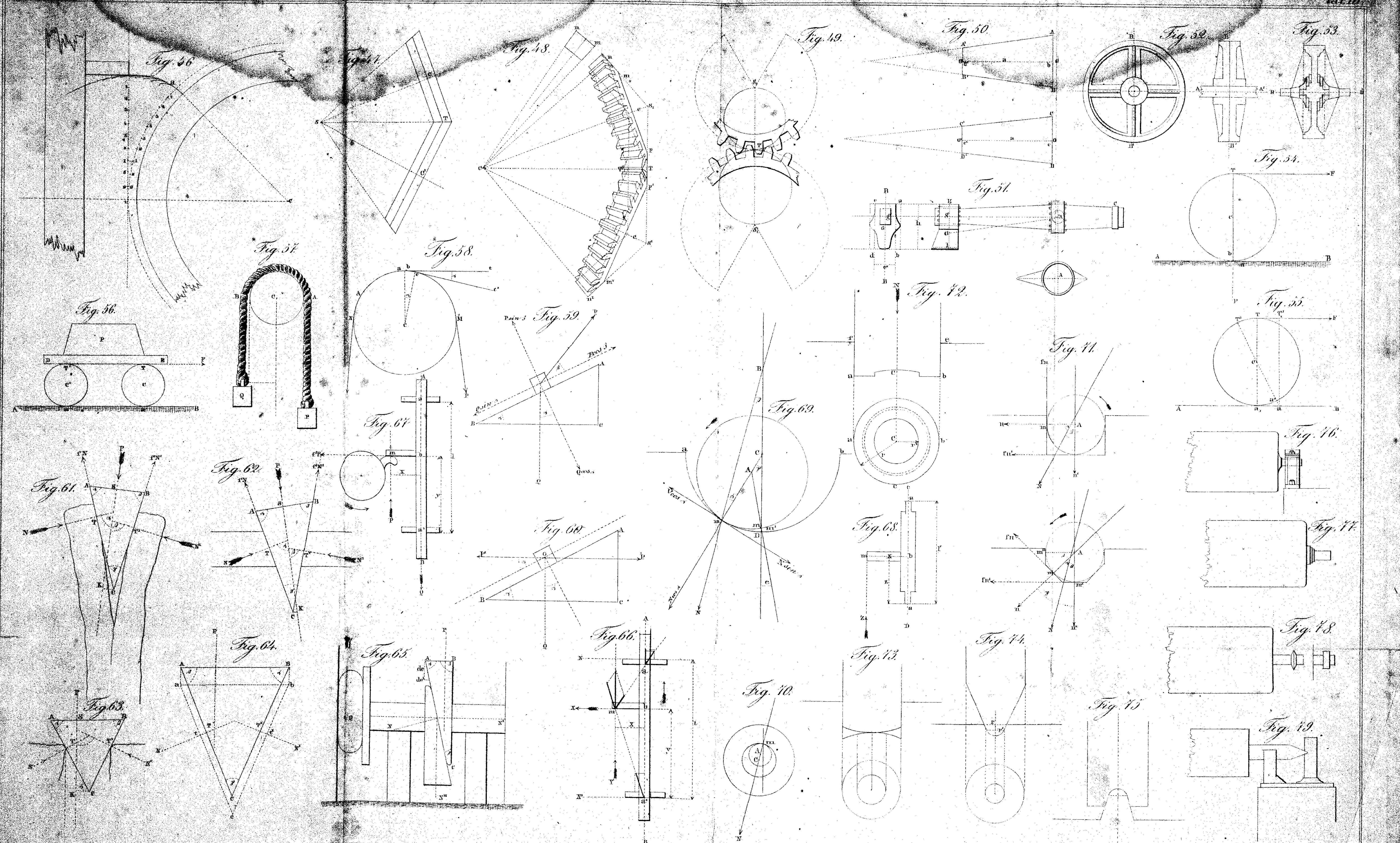
Lithogr. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.



Lithogr. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.

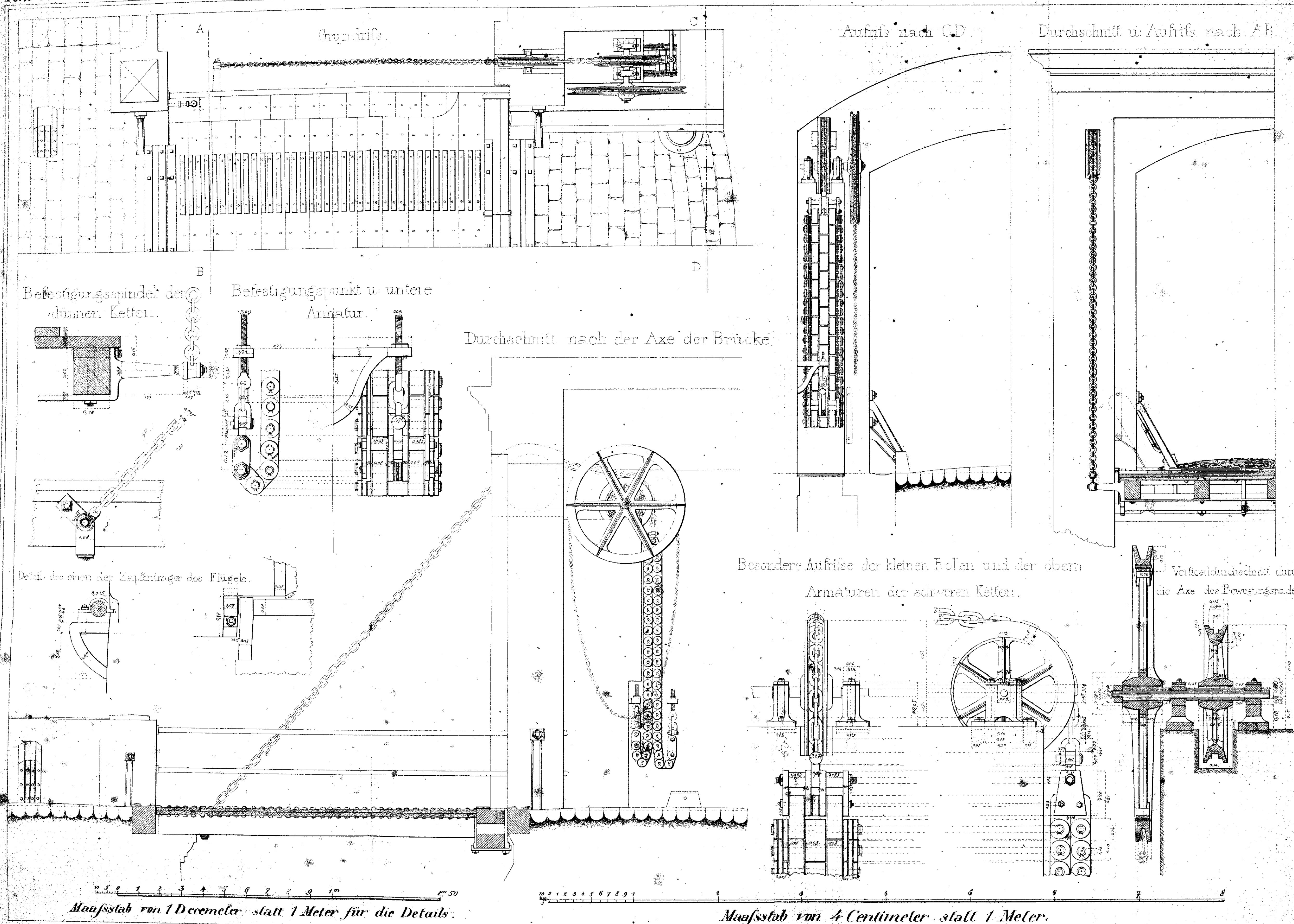


Lithogr. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt



Lithogr. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.

ZUGBRÜCKE MIT VERÄNDERLICHEN GEGENGEWICHTEN.



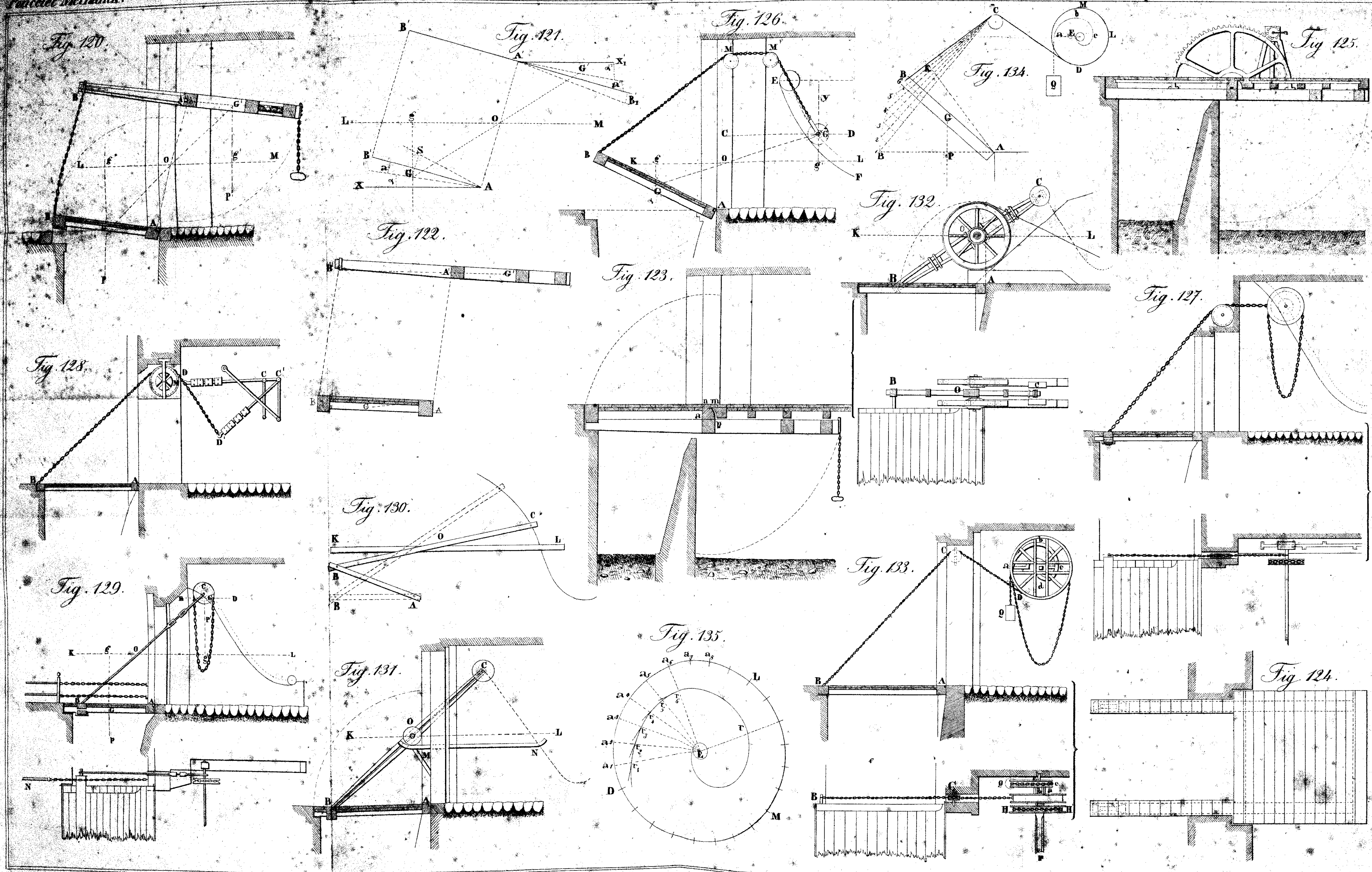


Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 126.
Fig. 134.
Fig. 125.
Fig. 132.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 130.
Fig. 133.
Fig. 129.
Fig. 135.
Fig. 131.
Fig. 124.

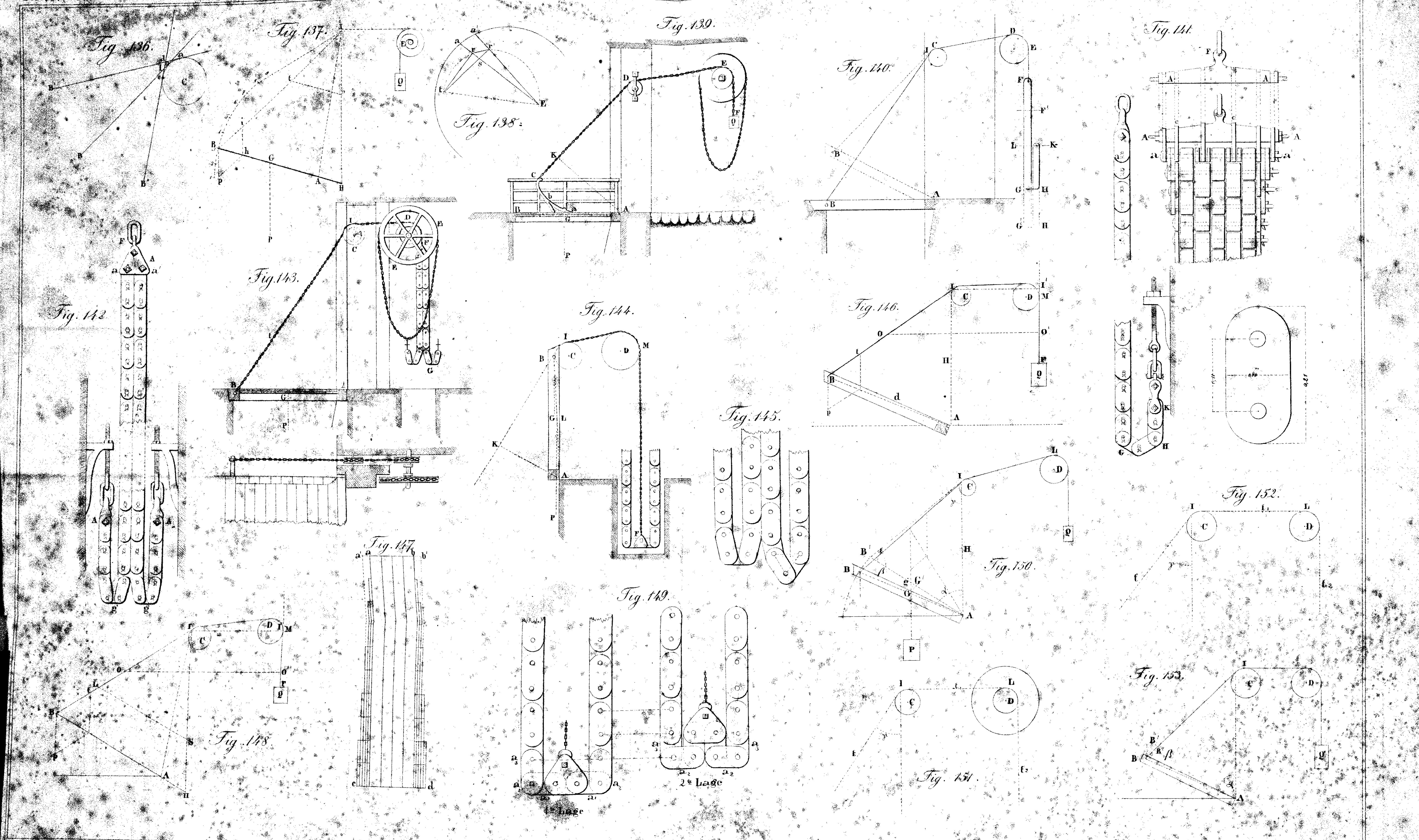


Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
1te Lage
2te Lage
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.