Möbius,
Lehrbuch
der
Statik.

2.

# Lehrbuch

der

# STATIK

von

**August Ferdinand Möbius,**

Professor der Astronomie zu Leipzig, Correspondenten der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig.

***Zweiter Theil.***

**Mit einer Kupfertafel.**

**LEIPZIG**

**bei Georg Joachim Göschen.**

**1837.**

# Inhalt des zweiten Theils.

## Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf mehrere mit einander verbundene feste Körper wirken.

### Erstes Kapitel.

#### Vom Gleichgewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

**Gleichgewicht an einem nicht völlig frei beweglichen Körper.** §. 201. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, wenn ein Punkt des Körpers unbeweglich ist, oder wenn ein Punkt in einer unbeweglichen Linie oder Fläche beweglich ist; — §. 202. wenn zwei Punkte des Körpers unbeweglich sind, oder wenn einer derselben, oder beide in unbeweglichen Linien etc. beweglich sind; — §. 203. wenn drei Punkte des Körpers in einer unbeweglichen Ebene beweglich sind. Sind drei Punkte des Körpers unbeweglich oder in unbeweglichen Linien beweglich, so ist der Körper selbst im Allgemeinen unbeweglich. — §. 204. Den 6 Bedingungsgleichungen fürs Gleichgewicht eines Körpers entsprechen 6 von einander unabhängige Bewegungen des Körpers. Ist er an einigen dieser Bewegungen gehindert, so ist die Erfüllung der Gleichungen, die den noch möglichen übrigen Bewegungen entsprechen, die Bedingung des Gleichgewichts.

## Zweites Kapitel.

### Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

§. 205. Bedingung dieses Gleichgewichts, wenn alle Körper des Systems an sich frei beweglich sind. — §. 206. Nachträgliche Bemerkungen. — §. 207. Die Bedingung des Gleichgewichts eines Systems von Körpern besteht in jedem Falle in der Möglichkeit, in den Berührungspunkten der Körper Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass jeder Körper des Systems für sich ins Gleichgewicht kommt.

**Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten bei mit einander verbundenen Körpern.** §§. 208—210. Beweis, dass die in §. 178. für das Gleichgewicht eines einzigen Körpers bewiesene Gleichung auch beim Gleichgewichte mehrerer mit einander verbundener Körper Gültigkeit hat. — §. 211. Beweis des umgekehrten Satzes nach **Laplace** und **Poisson**. — §. 212. Anderer Beweis des umgekehrten Satzes.

§. 213. Bei jedem Systeme von Körpern, welches sich im Gleichgewichte befindet, ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum, und zwar ersteres, wenn das Gleichgewicht sicher, letzteres, wenn es unsicher ist. — §. 214. Elementarer Beweis dieses Satzes.

## Drittes Kapitel.

### Anwendung der vorhergehenden Theorie auf einige Beispiele.

§. 215. Uebersicht des Verfahrens, nach welchem jede hierbei vorkommende Aufgabe in Gleichungen gesetzt und gelöst werden kann. — §§. 216. 217. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf 4 sich berührende Kugeln wirken. — §§. 218. 219. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen 4 Kräften, welche auf

## Viertes Kapitel.

### Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

## Fünftes Kapitel.

### Von der unendlich kleinen Beweglichkeit.

## Sechstes Kapitel.

### Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

die Spannung der Kettenlinie. Folgerungen aus denselben. Elementare Beweise dieser Gleichungen und damit der Gleichung für die Kettenlinie selbst. — §. 293. Ein gleichförmig schwerer Faden von gegebener Länge wird mit seinen Enden an zwei gegebenen unbeweglichen Punkten befestigt. Die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie zu bestimmen. — §. 294. Zusätze und Folgerungen. — §. 295. Ein gleichförmig schwerer mit seinen Enden befestigter Faden bildet auch dann eine Kettenlinie, wenn er auf eine gegen den Horizont geneigte Ebene gelegt ist.

## Siebentes Kapitel.

### Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes.

§. 296. Einleitung. — §. 297. Durch Construction wird gezeigt, wie aus dem Gleichgewichte an einem Faden auf die Bewegung eines Körpers in der Fadenlinie mit einer der Spannung des Fadens überall proportionalen Geschwindigkeit geschlossen werden kann. — §. 298. Beispiele. Bewegung in einer Kettenlinie. — §. 299. Umgekehrt kann von der Bewegung eines Körpers auf das Gleichgewicht an einem Faden, dessen Gestalt der Bahn des Körpers und dessen Spannung der Geschwindigkeit des letztern proportional ist, ein Schluss gemacht werden. Gleichgewicht an einem parabolisch gekrümmten Faden. — §. 300. Modification des Ueberganges von der Bewegung zum Gleichgewichte durch Anwendung eines Fadens, dessen Masse ungleichförmig vertheilt ist. Statische Darstellung der Planetenbewegungen. — §. 301. Die vorigen Sätze leiden auch dann noch vollkommene Anwendung, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt sind. — §. 302. Analytische Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Gleichgewichte eines Fadens und der Bewegung eines Körpers.

§. 303. Die Sätze der Dynamik, welche unter den Namen des Princips der Flächen, des Princips der lebendigen Kräfte und des Princips der kleinsten Wirkung bekannt sind, können ebenfalls auf das Fadengleichgewicht übergetragen werden. — §. 304. Uebertragung des ersten dieser Principe. — §. 305. Uebertragung des zweiten und dritten. — §. 306. Letztere zwei gelten auch dann noch, wenn der Faden über eine Fläche gespannt ist. — §. 307. Erläuterung des dritten Princips an der Kettenlinie. Die Tiefe des Schwerpunkts einer Kettenlinie ist ein Maximum. Bestimmung der Coordinaten dieses Schwerpunkts. — §. 308. Eine Kettenlinie zu beschreiben, welche durch zwei in einer Horizontalen liegende gegebene Punkte geht und eine andere gegebene Horizontale zur Directrix hat. — §. 309. Maximum und Minimum, welchen die zwei die vorige Aufgabe lösenden Kettenlinien angehören.

## Achtes Kapitel.

### Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

§. 310. Begriff der Elasticität im Allgemeinen. Erklärung einer

# Zweiter Theil.

---

# Gesetze des Gleichgewichts

zwischen Kräften,

welche auf mehrere mit einander verbundene feste Körper wirken.

# Erstes Kapitel.

## Vom Gleichgewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

### §. 188.

Nachdem wir in dem Bisherigen die Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf einen und denselben Körper wirken, erforscht haben, wollen wir gegenwärtig die Bedingungen zu bestimmen suchen, welche statt finden müssen, wenn Kräfte, welche an einem Systeme mit einander verbundener Körper angebracht sind, sich das Gleichgewicht halten sollen.

Zwei oder mehrere Körper nennen wir aber überhaupt mit einander verbunden, wenn die gegenseitige Lage der Körper gewissen, durch keine Kraft verletzbaren, Bedingungen unterworfen ist, so dass, wenn die Lage eines oder etlicher Körper gegeben ist, die Lage der übrigen mehr oder weniger, oder auch ganz, bestimmt ist. Hierdurch geschieht es, dass, wenn von einem Systeme mit einander verbundener Körper der eine bewegt wird, einer oder mehrere der übrigen Körper, wo nicht alle, gleichfalls ihre Lage zu verändern genöthigt sind, dass folglich die Kraft, welche die Bewegung des einen Körpers hervorbringt, auch auf die übrigen Körper Einfluss übt, und dass daher, wenn ein solches System im Gleichgewichte seyn soll, bei jedem einzelnen Körper des Systems die unmittelbar auf ihn wirkenden Kräfte mit den Einflüssen, welche er von den an den übrigen Körpern angebrachten Kräften erfährt, das Gleichgewicht halten müssen.

Die Ermittelung dieser Einflüsse ist demnach die Hauptaufgabe des nun folgenden zweiten Theils der Statik, indem mit Berücksichtigung derselben jede Aufgabe über das Gleichgewicht eines Systems verbundener Körper auf das im ersten Theile behandelte Gleichgewicht isolirter Körper reducirt werden kann.

## §. 189.

Die Bedingungen, denen man die gegenseitige Lage der Körper unterworfen annehmen kann, sind entweder ganz willkührliche, oder solche, welche in der Natur der Körper selbst ihren Grund haben. Eine willkührliche Bedingung wäre z. B. die, dass von drei Körpern, wie sie auch ihre gegenseitige Lage ändern, der Inhalt des Dreiecks, welches ihre Schwerpunkte bilden, von gleicher Grösse bleiben soll. Wenn nun auch selbst für dergleichen nur in der Idee existirende, aber nicht wohl physisch darstellbare Systeme die Gesetze des Gleichgewichts sich entwickeln lassen, so könnten diese Entwickelungen doch nur in rein mathematischer Hinsicht von Interesse seyn, sonst aber nicht, wenigstens nicht unmittelbar, einen reellen Nutzen gewähren. Wir wollen daher gegenwärtig nur diejenigen Verbindungen der Körper berücksichtigen, welche in den allgemeinen physischen Eigenschaften derselben begründet sind.

Von diesen Eigenschaften, deren man insgemein vier zu rechnen pflegt: Ausdehnung, Theilbarkeit, Trägheit und Undurchdringlichkeit, kann nun offenbar nur die letztere zugleich Ursache seyn, dass die auf den einen von zwei Körpern wirkenden Kräfte gleichzeitig auf den andern ihre Wirkung äussern, und dieses auch nur in dem Falle, wenn die Körper einander berühren, und wenn die den einen von ihnen angreifenden Kräfte ihn in den von dem andern eingenommenen Raum einzudringen nöthigen, ihn also nach der Seite zu treiben, wo ihn der andere berührt, nicht nach einer andern Richtung, indem sonst die Berührung und damit die Einwirkung aufgehoben würde.

Von dieser der Natur gemässen Bedingung wollen wir aber zur Vereinfachung und Erleichterung unserer Untersuchungen insofern wieder abweichen, dass wir die Berührung der Körper als unauflöslich betrachten, so dass, wenn von zwei durch Berührung mit einander verbundenen Körpern der eine festgehalten wird, dem andern nur diejenige Bewegung gestattet ist, bei welcher er den erstern in eben so vielen Punkten, als anfänglich, zu berühren fortfährt. Streitet nun diese Hypothese, in den meisten Fällen wenigstens, gegen die Natur der Dinge, und ist nichts vorhanden, welches zwei sich nur berührende Körper, sobald sie nach entgegengesetzten Seiten getrieben werden, sich zu trennen verhinderte, so wird es doch in jedem speciellen Falle leicht seyn, die Bedingungen zu finden, die wegen der möglichen Trennung der Körper zu den übrigen Bedingungen des Gleichgewichts noch hinzugefügt werden müssen.

Auch giebt es in der That Systeme in der Natur, die mit unserer Hypothese mehr oder weniger in Ueber einstimmung sind. Ganz besonders ist dieses mit einem biegsamen Faden der Fall. Denn einen solchen kann man sich als ein System unendlich vieler unendlich kleiner Körper vorstellen, von denen jeder mit zwei andern durch unzertrennbare Berührung verbunden ist; und man erlangt dadurch den Vortheil, das Gleichgewicht an einem biegsamen Faden nach denselben Principien, als wie das Gleichgewicht jedes andern Systems sich berührender Körper, untersuchen zu können.

Diese durch keine Kräfte auflösliche Berührung ist also die Art und Weise, auf welche wir die Körper mit einander verbunden annehmen wollen, und wodurch es geschehen soll, dass die an dem einen Körper angebrachten Kräfte auf die andern Körper Einfluss haben. Das Beiwort: unauflöslich, wird jedoch der Kürze willen in dem Folgenden weggelassen werden, da wir uns jede Berührung, dafern nicht das Gegentheil erinnert wird, als eine solche zu denken haben.

---

## §. 190.

Grundsätze. I. Findet zwischen Kräften, welche auf mehrere mit einander verbundene Körper wirken, Gleichgewicht statt, so dauert dasselbe noch fort, wenn die gegenseitige Lage einiger oder aller dieser Körper unveränderlich gemacht wird.

Unter den Bedingungen, welche zum Gleichgewichte mit einander verbundener Körper nöthig sind, müssen folglich alle diejenigen enthalten seyn, welche erfordert werden, wenn die gegenseitige Lage einiger oder aller dieser Körper unveränderlich angenommen wird. Insbesondere müssen daher die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche an einem einzigen frei beweglichen Körper angebracht sind (§. 66.), auch beim Gleichgewichte zwischen Kräften statt finden, welche auf mehrere mit einander verbundene an sich frei bewegliche Körper wirken.

II. Das Gleichgewicht bei mehrern mit einander verbundenen Körpern wird nicht aufgehoben, wenn einer oder etliche derselben unbeweglich gemacht werden.

Die Bedingungen, welche zum Gleichgewichte eines zum Theil aus unbeweglichen Körpern bestehenden Systems nöthig sind, müssen daher auch dann in Erfüllung gehen, wenn man die unbeweglichen beweglich werden lässt.

III. Sind von mehrern mit einander verbundenen Körpern einer oder etliche unbeweglich, und herrscht zwischen Kräften, welche auf die beweglichen wirken, Gleichgewicht, so ist es immer möglich, an den unbeweglichen Kräfte anzubringen, dergestalt, dass, wenn die unbeweglichen gleichfalls beweglich angenommen werden, das Gleichgewicht nicht unterbrochen wird.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems, in welchem bewegliche Körper mit unbeweglichen verbunden sind, müssen daher so beschaffen seyn, dass, wenn man die unbeweglichen beweglich werden lässt, es möglich ist, an den unbeweglichen Kräfte anzubringen, welche mit den Kräften an den beweglichen das Gleichgewicht halten.

Noch ist zu bemerken, dass die in §. 4. in Bezug auf einen einzigen Körper aufgestellten Grundsätze III.

und IV. auch auf jedes System von Körpern Anwendung leiden, und dass der Grundsatz VIII. in §. 14. auch dann noch gilt, wenn die zwei Punkte, auf welche Kräfte wirken, zwei verschiedenen Körpern angehören, die dergestalt mit einander verbunden sind, dass die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte unveränderlich ist.

## §. 191.

Mit Hülfe dieser Grundsätze wollen wir nun zuvörderst das Gleichgewicht an einem Systeme von nur zwei sich berührenden frei beweglichen Körpern in Untersuchung ziehen. Der eine von ihnen sey, um von dem einfachsten Falle auszugehen, unendlich klein oder ein physischer Punkt $A$; den andern, in dessen Oberfläche dieser Punkt nach allen Richtungen beweglich ist, wollen wir uns Anfangs kugelförmig denken. Wirken nun auf $A$ und der Kugel Mittelpunkt $C$ zwei Kräfte $P$ und $R$, und sind diese einander gleich, und ihre Richtungen einander direct entgegengesetzt, also normal auf der Oberfläche, so halten sie sich das Gleichgewicht, weil die gegenseitige Entfernung ihrer Angriffspunkte $A$ und $C$ unveränderlich ist (§. 14. VIII. u. vor. §.).

Da jede Kraft, ihrer Wirkung unbeschadet, auf jeden Punkt ihrer Richtung, der mit ihrem anfänglichen Angriffspunkte fest verbunden ist, verlegt werden kann, so wird das Gleichgewicht noch fortbestehen, wenn wir die auf $C$ wirkende Kraft $R$ in einem beliebigen andern Punkte des durch $A$ zu legenden Kugeldurchmessers anbringen. Auch können wir statt derselben zwei oder mehrere andere, auf beliebige Punkte der Kugel wirkende Kräfte setzen, wenn nur von letztern

Kräften die erstere die Resultante ist. Endlich werden wir, ohne das Gleichgewicht aufzuheben, dem mit einer Kugelfläche begränzten Körper jede beliebige andere Form geben können, wenn nur das Flächenelement, in welchem sich der bewegliche Punkt $A$ befindet, seine Lage, in welcher es von der auf $A$ wirkenden Kraft $P$ normal getroffen wird, beibehält; denn nur von der Lage dieses Elements der Fläche, und keines andern, kann das in Rede stehende Gleichgewicht abhängig seyn.

Zwischen mehrern an einem frei beweglichen Körper angebrachten Kräften und einer Kraft, welche auf einen in der Oberfläche des Körpers beweglichen Punkt $A$ wirkt, herrscht demnach Gleichgewicht, wenn erstere Kräfte eine der letztern gleiche und direct entgegengesetzte Resultante haben, und wenn die Richtung der auf $A$ wirkenden Kraft, folglich auch die Resultante der übrigen, die Oberfläche in $A$ normal trifft.

Diese zwei Bedingungen sind aber zum Gleichgewichte nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig. Denn sind die Kräfte im Gleichgewichte, so wird dieses auch noch bestehen, wenn man den Punkt in der Fläche unbeweglich und somit als einen mit den Angriffspunkten der übrigen Kräfte in fester Verbindung stehenden Punkt nimmt (vor. §. 1.). Alsdann aber muss, wie bei einem einzigen festen Körper, die auf den Punkt wirkende Kraft den übrigen das Gleichgewicht halten und folglich, in entgegengesetzter Richtung genommen, die Resultante der übrigen seyn.

Um die Nothwendigkeit der zweiten Bedingung zu beweisen, setze man, die Linie, in welche die Richtungen der Kraft $P$ am Punkte $A$ und der Resultante $R$

der übrigen fallen, sey nicht auf der Fläche normal, sondern beliebig gegen dieselbe geneigt. Den Punkt dieser Linie, in welchem sie die Fläche schneidet, also den Punkt der Fläche, über welchem sich $A$ befindet, nehme man zum Angriffspunkte von $R$, und zerlege hierauf $R$ nach einer auf der Fläche normalen und einer die Fläche berührenden Richtung in die Kräfte $R_1$ und $R_2$. Nach denselben Richtungen zerlege man auch $P$ in $P_1$ und $P_2$. Wie leicht ersichtlich, erhält man hierdurch zwei Paare einander gleicher und direct entgegengesetzter Kräfte $P_1$ und $R_1$, $P_2$ und $R_2$. Von diesen sind nun $P_1$ und $R_1$ normal auf der Fläche und daher im Gleichgewichte. Sollten mithin $P$ und $R$ sich das Gleichgewicht halten, so müssten es auch $P_2$ und $R_2$. Dieses ist aber nicht möglich, da der in der Fläche bewegliche Punkt $A$ und der Punkt der Fläche selbst, über welchem ersterer liegt, den tangentiellen entgegengesetzten Richtungen, nach denen sie von $P_2$ und $R_2$ getrieben werden, gleichzeitig zu folgen, durch nichts gehindert werden; folglich u. s. w.

## §. 192.

Zusätze. *a.* Wenn zwischen den Kräften, welche auf den frei beweglichen Körper und den in seiner Oberfläche beweglichen Punkt wirken, Gleichgewicht herrscht, so wird dieses nicht unterbrochen, wenn wir den Körper unbeweglich werden lassen. Alsdann aber sind die an ihm angebrachten Kräfte von keiner Wirkung mehr, und wir erkennen daraus, dass, wenn auf einen in einer unbeweglichen Fläche beweglichen Punkt eine die Fläche normal treffende Kraft wirkt, keine Bewegung erfolgen kann. Und umgekehrt: Bleibt ein auf einer unbeweglichen Fläche beweglicher und der

Wirkung einer Kraft ausgesetzter Punkt in Ruhe, so ist die Richtung der Kraft auf der Fläche normal. Denn lässt man die Fläche beweglich werden, so kann man das dadurch verloren gehende Gleichgewicht durch Kräfte, welche man an der Fläche anbringt, wieder herstellen. (§. 190. III.). Dieses neue Gleichgewicht ist aber nach vor. §. nur dann möglich, wenn die auf den Punkt wirkende Kraft die Fläche normal trifft.

*b.* Wird umgekehrt, statt des Körpers, der Punkt unbeweglich gesetzt, und somit die Beweglichkeit des Körpers dergestalt beschränkt, dass seine Oberfläche einem unbeweglichen Punkte $A$ zu begegnen genöthigt ist, so ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise, wie im vorigen Falle, die zum Gleichgewichte der auf den Körper wirkenden Kräfte hinreichende und nothwendige Bedingung, dass die Kräfte eine durch den Punkt $A$ gehende und die Oberfläche daselbst normal treffende Resultante haben.

*c.* Sind in der Oberfläche eines beweglichen Körpers zwei oder mehrere bewegliche Punkte $A$, $B$,..., und wirken auf jeden der Punkte eine Kraft, $P$ auf $A$, $Q$ auf $B$, etc. und auf den Körper mehrere Kräfte, oder nur eine, oder auch gar keine Kraft, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass sämmtliche Kräfte sich eben so, als wären ihre Angriffspunkte fest mit einander verbunden, das Gleichgewicht halten, und dass die Richtungen der auf die beweglichen Punkte wirkenden Kräfte die Oberfläche normal treffen.

Die Nothwendigkeit der ersten Bedingung leuchtet sogleich ein, wenn man die Punkte $A$, $B$,... mit der Oberfläche sich fest vereinigen lässt; die Nothwendigkeit der zweiten erhellet aus *a.*, wenn man die Punkte in der Oberfläche beweglich, den Körper selbst aber unbeweglich annimmt (§. 190. II.). Die zwei Bedingungen sind aber auch die einzigen, welche zum Gleichgewichte erfordert werden. Denn sind die auf den Körper wirkenden Kräfte mit den Kräften $P$, $Q$... an den beweglichen Punkten eben so im Gleichgewichte, als wenn die Punkte an der Oberfläche fest wären, so müssen sich für erstere Kräfte den letztern gleiche, direct entgegengesetzte und auf Punkte des Körpers selbst wirkende Kräfte $-P$, $-Q$,... substituiren lassen. Da nun der zweiten Bedingung zufolge $P$, $Q$,... auf der Oberfläche normal sind, so herrscht nach §. 191. zwischen $P$ und $-P$ besonders, zwischen $Q$ und $-Q$ besonders etc., mithin zwischen sämmtlichen Kräften Gleichgewicht.

*d.* Werden die Punkte $A$, $B$,... unbeweglich angenommen, wird aber der Körper beweglich gelassen und mithin der Bedingung unterworfen, dass seine Fläche zwei oder mehreren unbeweglichen Punkten begegnet, so ist die einzige zum Gleichgewichte der auf den Körper wirkenden Kräfte nöthige Bedingung, dass es möglich seyn muss, diese Kräfte in andere zu verwandeln, deren Richtungen die unbeweglichen Punkte treffen und daselbst auf der Oberfläche normal sind.

Diese Bedingung ist hinreichend, weil nach *b.* keine der durch die Verwandlung erhaltenen normalen Kräfte Bewegung hervorbringen kann. Sie ist aber auch nöthig, weil, wenn man die Punkte wieder beweglich werden lässt, die Kräfte, welche nach §. 190. III. zur Erhaltung des Gleichgewichts an den Punkten angebracht werden können, nach *c.* auf der Fläche normal seyn und, in entgegengesetzter Richtung genommen, mit den Kräften am Körper gleiche Wirkung haben müssen.

*e.* Ist die Oberfläche des Körpers an einem oder mehrern unbeweglichen Punkten verschiebbar, und sind in derselben Fläche ein oder mehrere bewegliche Punkte, so ist es zum Gleichgewichte zwischen Kräften, welche an diesen beweglichen Punkten und an Punkten des Körpers selbst angebracht sind, nöthig und hinreichend, dass die Kräfte an den beweglichen Punkten die Fläche normal treffen, und dass diese Kräfte in Verbindung mit den auf den Körper unmittelbar wirkenden Kräften sich in andere verwandeln lassen, welche die Fläche in den unbeweglichen Punkten normal treffen.

Den Beweis hiervon übergehe ich, da er denen für die vorigen Fälle *c.* und *d.* ganz ähnlich ist. Ich kann aber nicht umhin, auf geometrische Folgerungen eigener Art aufmerksam zu machen, die sich aus diesem Satze ziehen lassen.

Sey die Oberfläche eines beweglichen Körpers durch einen unbeweglichen Punkt $A$ zu gehen genöthigt, und in ihr ein beweglicher Punkt $B$, auf welchen eine Kraft nach parallel bleibender Richtung wirke; am Körper selbst aber sey keine Kraft angebracht. Nach letzterem Satze wird nun beim Gleichgewichte der Körper und der in seiner Fläche bewegliche Punkt $B$ eine solche Lage einnehmen, dass die Richtung der Kraft auch durch $A$ geht und in $A$ sowohl, als in $B$, die Fläche normal trifft. In eine solche Lage aber werden der Körper und der Punkt $B$ gewiss kommen, indem sonst die sich parallel bleibende Kraft ein Perpetuum mobile um den unbeweglichen Punkt $A$ erzeugen würde, welches nicht möglich ist. Diess führt zu dem Schlusse:

**In einer jeden in sich zurückkehrenden stetig gekrümmten Fläche giebt es wenigstens Ein Paar**

von Punkten, welches die Eigenschaft besitzt, dass eine durch sie gelegte Gerade die Fläche in beiden Punkten normal trifft.

Beim Ellipsoid z. B. hat man drei solcher Paare von Punkten. Die sie verbindenden Linien sind die drei Hauptaxen; ausser ihnen giebt es keine andere die Fläche des Ellipsoids zweimal rechtwinklig schneidende Gerade.

Geht die Fläche eines Körpers durch zwei unbewegliche Punkte $A$ und $B$, und wirkt auf einen in ihr beweglichen Punkt $C$ eine Kraft nach einer sich parallel bleibenden und folglich mit $AB$ stets denselben Winkel machenden Richtung, so ist diese Richtung, wenn der Körper in die Lage des Gleichgewichts gekommen, in $C$ auf seiner Fläche normal, liegt mit den durch $A$ und $B$ zu ziehenden Normalen in einer Ebene und trifft diese Normalen in einem und demselben Punkte. Da nun der Körper in die Gleichgewichtslage gewiss kommen wird, so folgern wir:

In einer in sich zurücklaufenden stetig gekrümmten Fläche ist es immer möglich, drei Punkte dergestalt zu bestimmen, dass die durch sie zu ziehenden Normalen in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, dass der gegenseitige Abstand zweier der drei Punkte von gegebener, die grösste Sehne der Fläche nicht überschreitender, Grösse ist, und dass mit dieser Abstandslinie die Normale durch den dritten Punkt einen gegebenen Winkel macht.

Durch Annahme noch mehrerer unbeweglicher Punkte lassen sich noch einige andere Sätze dieser Art finden. Es wäre aber überflüssig, dieselben herzusetzen, da sie Jeder nach der durch die mitgetheilten gegebenen Anleitung leicht selbst wird entwickeln können.

## §. 193.

Das im vor. §. in *d.* und *e.* betrachtete Gleichgewicht eines Körpers, dessen Fläche durch mehrere unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist, macht noch eine besondere Erörterung nöthig. Die Bedingung dieses Gleichgewichts war, dass für die am Körper angebrachten Kräfte, — zu denen in *e.* noch die zu rechnen sind, welche an den in der Oberfläche beweglichen Punkten wirken, — dass für alle diese Kräfte ein System gleichwirkender Kräfte substituirt werden konnte, deren Richtungen die Oberfläche normal in den unbeweglichen Punkten trafen. Sollen aber zwei an einem Körper angebrachte Systeme von gleicher Wirkung seyn, so müssen zwischen den die Intensitäten und Richtungen der Kräfte bestimmenden Grössen sechs Gleichungen erfüllt seyn (§. 66. Zus.). Soll folglich ein gegebenes System in ein anderes verwandelt werden, von dessen Kräften, deren Anzahl $=n$ sey, die Richtungen gegeben sind, so ist dieses im Allgemeinen, wenn $n>5$, immer möglich. Denn ist $n=6$, so lassen sich die 6 unbekannten Intensitäten aus jenen 6 Gleichungen finden; ist aber $n>6$, so kann man von $n-6$ Kräften die Intensitäten willkührlich annehmen und damit die 6 übrigen bestimmen. Wenn dagegen $n<6$, so können die $n$ Intensitäten aus den 6 Gleichungen eliminirt werden, und es bleiben dann $6-n$ Bedingungsgleichungen zurück, welche erfüllt seyn müssen, wenn die Reduction des gegebenen Systems möglich seyn soll.

Ist demnach die Fläche eines Körpers durch $n$

unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt, so können für $n > 5$ die auf den Körper wirkenden Kräfte immer in $n$ andere die Fläche in den $n$ Punkten normal treffende Kräfte verwandelt werden, deren Intensitäten für $n = 6$ bestimmte Werthe erhalten, für $n > 6$ aber zum Theil unbestimmt bleiben. Es herrscht folglich hier immer Gleichgewicht, welches auch die auf den Körper wirkenden Kräfte seyn mögen; oder mit andern Worten:

*Ein Körper, dessen Oberfläche durch sechs oder mehrere unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist, ist ebenfalls unbeweglich.*

Ist die Zahl $n$ der unbeweglichen Punkte, und mithin der normalen Kräfte, kleiner als 6, so müssen $6 - n$ Bedingungen zwischen den Richtungen dieser Kräfte und den Richtungen und Intensitäten der am Körper angebrachten Kräfte erfüllt werden, wenn letztere Kräfte auf erstere sollen reducirt werden können. In diesem Falle findet also nicht immer Gleichgewicht statt, d. h.:

*Die Beweglichkeit eines Körpers ist nie völlig aufgehoben, wenn seine Oberfläche durch weniger als sechs unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist.*

Werden die $6 - n$ Bedingungen erfüllt, und herrscht mithin Gleichgewicht, so erhalten die normalen Kräfte bestimmte Werthe.

Diese allgemeinen Sätze sind indessen mehreren Ausnahmen unterworfen. Denn zuerst kann in gewissen Fällen auch bei 6 und noch mehreren unbeweglichen Punkten Beweglichkeit statt finden. Ist die Fläche eine Ebene, oder die Fläche einer Kugel, oder allgemeiner eine Revolutionsfläche, oder ist sie eine Schraubenfläche, so kann die Anzahl der unbeweglichen Punkte jede beliebige seyn, ohne dass die Beweglichkeit der Fläche aufgehoben wird; denn jede dieser Flächen ist in sich selbst verschiebbar. Analytisch giebt sich diese Beweglichkeit dadurch zu erkennen, dass die in beliebiger Zahl genommenen normalen Kräfte aus den vorhin gedachten sechs Gleichungen sich sämmtlich eliminiren lassen, und dadurch von diesen Kräften unabhängige Gleichungen hervorgehen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den ursprünglich auf den Körper wirkenden Kräften angeben.

Sodann kann es geschehen, dass auch bei 6 oder weniger unbeweglichen Punkten einige oder alle der auf sie gerichteten normalen Kräfte ihren Intensitäten nach unbestimmt bleiben. Dieser Fall tritt dann ein, wenn von den 6, 5, 4,.. normalen Richtungen einige oder alle eine solche Lage haben, dass sich Kräfte angeben lassen, welche, nach ihnen wirkend, im Gleichgewichte sind. Denn liegen z. B. bei drei Punkten die zugehörigen Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte, und hat man die gegebenen Kräfte auf drei nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, wirkende $P$, $Q$, $R$ reduciren können, so sind mit ihnen die gleichfalls nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gerichteten $P + S \sin \beta^\wedge\gamma$, $Q + S \sin \gamma^\wedge\alpha$, $R + S \sin \alpha^\wedge\beta$ gleichwirkend, welches auch die Intensität von $S$ seyn mag, indem die drei mit $S$ proportionalen Kräfte sich besonders das Gleichgewicht halten.

## §. 194.

Auf die vorhergehenden Betrachtungen über das Gleichgewicht an einem Körper und mehrern mit ihm verbundenen, theils beweglichen, theils unbeweglichen

Punkten lassen sich die nun folgenden Untersuchungen, welche das Gleichgewicht an zwei oder mehrern mit einander verbundenen Körpern zum Gegenstande haben, immer zurückführen. Denn um dies gleich an dem einfachsten Falle zu zeigen, wenn das System nur aus zwei sich mit ihren Flächen in einem Punkte berührenden frei beweglichen Körpern $a$ und $a'$ besteht, so kann diese Flächenberührung offenbar auch dadurch ausgedrückt werden, dass es einen Punkt $A$ geben soll, welcher in den Flächen beider Körper zugleich beweglich ist, einen Punkt also, der, wenn wir uns ihn als ein nach allen Dimensionen unendlich kleines Körperchen denken, die Körper $a$ und $a'$ an der Stelle, an welcher sie ohne ihn zusammentreffen würden, um ein unendlich Geringes von einander getrennt erhält.

Seyen nun die auf die zwei Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, und lassen wir zuerst den **Zwischenpunkt** $A$, wie wir ihn nennen können, unbeweglich im Raume werden. Da hierdurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben wird, und da die Körper nicht unmittelbar an einander, sondern an den unbeweglichen Punkt $A$ stossen und daher ausser aller Verbindung mit einander sind, so müssen (§. 192. *b.*) die auf $a$ wirkenden Kräfte sowohl, als die an $a'$ angebrachten, eine in die gemeinschaftliche Normale der Flächen beider Körper fallende Resultante haben. Beide Resultanten aber müssen überdies einander gleich und entgegengesetzt seyn, damit, wenn $A$ wieder beweglich wird, statt dessen aber die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich angenommen wird, die an ihnen, als an einem einzigen festen Körper, angebrachten Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Diese Bedingungen sind aber nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend. Denn haben die auf $a$ wirkenden Kräfte eine in die Normale bei $A$ fallende Resultante $P$, die auf $a'$ wirkenden eine der $P$ gleiche und direct entgegengesetzte Resultante $P'$, und bringt man hierauf am Zwischenpunkte $A$ selbst zwei diesen Resultanten gleiche und entgegengesetzte Kräfte $-P$ und $-P'$ an, so halten diese letztern einander das Gleichgewicht und können daher den Zustand des Systems nicht ändern. Da aber jetzt nach §. 191. $P$ und $-P$ für sich und eben so $P'$ und $-P'$ besonders im Gleichgewichte sind, so ist auch das ganze System im Gleichgewichte.

## §. 195.

Zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche an zwei sich berührenden Körpern, die eine an dem einen, die andere an dem andern Körper, im Berührungspunkte angebracht sind, und deren Richtungen in die gemeinschaftliche Normale daselbst fallen, wollen wir Gegenkräfte nennen. Zwei solcher Kräfte halten daher einander stets das Gleichgewicht, und wir können mit ihnen die vorhin erhaltenen Bedingungen für das Gleichgewicht zweier sich in einem Punkte berührenden Körper auch folgendergestalt ausdrücken:

Es muss möglich seyn, im Berührungspunkte zwei Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem Körper besonders zwischen den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften und der hinzugefügten Gegenkraft Gleichgewicht statt findet.

## §. 196.

Auf ganz ähnliche Art lässt sich auch der allgemeinere Fall behandeln, wenn zwei Körper $a$ und $a'$ sich in zwei oder mehrern Punkten $A$, $B$, $C$,... berühren, und wenn zwischen den auf sie wirkenden Kräften Gleichgewicht statt finden soll. — Man setze zuerst bei jeder Berührung einen Zwischenpunkt hinzu und lasse diese Punkte im Raume unbeweglich werden. War nun anfangs Gleichgewicht vorhanden, so kann dieses hierdurch nicht verloren gehen; vielmehr muss jetzt an jedem der beiden Körper einzeln Gleichgewicht herrschen. Mithin (§. 192. *d.*) müssen die auf $a$ wirkenden Kräfte in andere $P$, $Q$, $R$,... und die auf $a'$ wirkenden in andere $P'$, $Q'$, $R'$,... verwandelt werden können, deren Richtungen in die Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... der Berührungspunkte $A$, $B$, $C$,... fallen; $P$ und $P'$ in die Normale $\alpha$; $Q$ und $Q'$ in die Normale $\beta$; u. s. w. Es müssen ferner, wenn wir die Unbeweglichkeit der Zwischenpunkte wieder aufheben, dagegen aber die gegenseitige Lage von $a$ und $a'$ unveränderlich annehmen, die ursprünglichen Kräfte, also auch diejenigen, auf welche sie reducirt worden, d. i. die nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... gerichteten Kräfte $P+P'$, $Q+Q'$, $R+R'$, etc., als auf einen einzigen beweglichen Körper wirkend, im Gleichgewichte mit einander seyn.

Bei Verwandlung der auf $a$ ursprünglich wirkenden Kräfte in andere $P$, $Q$, $R$,... nach den Richtungen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,..., erhalten nun $P$, $Q$, $R$,... entweder nur auf eine Art bestimmbare Werthe, oder nicht. Ist Ersteres der Fall, so sind $P+P'=0$, $Q+Q'=0$, etc., d. h. je zwei nach derselben Normale $\alpha$, oder $\beta$ etc. wirkende Kräfte sind für sich im Gleichgewichte, indem sonst, weil $P$, $Q$,... $P'$, $Q'$,... zusammen im Gleichgewichte, also $P$, $Q$,... mit $-P'$, $-Q'$,... gleichwirkend seyn sollen, es gegen die Annahme auf zweierlei

Weise möglich wäre, die ursprünglichen Kräfte an $a$ in andere nach einerlei Richtungen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... zu verwandeln, nämlich das einemal in die Kräfte $P$, $Q$,... und das anderemal in die davon verschiedenen Kräfte $-P'$, $-Q'$,.... Können dagegen eine oder etliche, z. B. zwei, von den Kräften $P$, $Q$,..., folglich auch eben so viele der mit ihnen nach denselben Richtungen gleichwirkenden $-P'$, $-Q'$,... nach Willkühr bestimmt werden, und nimmt man hierauf $P$, $Q$ nach Belieben und setzt $-P' = P$, $-Q' = Q$, also $P + P' = 0$, $Q + Q' = 0$, so müssen aus demselben Grunde, wie vorhin, wo alle Kräfte bestimmte Werthe hatten, auch $-R' = R$, etc. folglich $R + R' = 0$, etc. seyn.

Als nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht zwischen Kräften, die auf zwei sich in mehrern Punkten berührende Körper wirken, lässt sich daher jedenfalls folgende aufstellen: Es muss möglich seyn, an jedem Berührungspunkte zwei Gegenkräfte (vor. §.) ($-P$ und $-P'$ an $A$, $-Q$ und $-Q'$ an $B$, etc.) von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem der beiden Körper besonders zwischen den ursprünglichen und den jetzt an ihn hinzugefügten Kräften Gleichgewicht besteht.

Aber auch umgekehrt: Ist nach Hinzufügung von Gegenkräften jeder der beiden Körper für sich im Gleichgewichte, so müssen sie, durch Berührungen mit einander verbunden, auch ohne Gegenkräfte im Gleichgewichte seyn. Denn das Gleichgewicht der mit einander verbundenen Körper, welches nach Hinzufügung der Gegenkräfte, wegen des dadurch bewirkten Gleichgewichts jedes einzelnen, statt finden muss, kann, wenn man die Gegenkräfte paarweise nach und nach wieder entfernt, nicht verloren gehen, da je zwei zusammengehörige derselben für sich im Gleichgewichte sind (§. 195.).

**Zusatz.** Man sieht leicht, wie die in §. 193. gemachten Bemerkungen auch hier ihre Anwendung finden. Berühren sich nämlich zwei Körper in 6 oder weniger Punkten, so haben die Intensitäten der Gegenkräfte im Allgemeinen bestimmte Werthe; unbestimmt bleiben sie bei 7, 8,... Berührungen. Ferner sind die Körper bei 5, 4,... Berührungen stets an einander verschiebbar, im Allgemeinen aber nicht mehr, wenn sie sich in 6 oder mehreren Punkten berühren, so dass, mit Ausnahme gewisser einfacher Formen der Oberflächen, bei 6, 7,... Berührungen zum Gleichgewichte nur erfordert wird, dass sich die Kräfte an beiden Körpern eben so, als wären sie nur an einem einzigen angebracht, das Gleichgewicht halten. Endlich können auch bei 6, 5,... Berührungen die Gegenkräfte unbestimmt bleiben, und zwar dann, wenn die Normalen, nach denen sie gerichtet sind, eine solche Lage gegen einander haben, dass sich Kräfte angeben lassen, welche, nach diesen Normalen wirkend, sich das Gleichgewicht halten.

## §. 197.

Wir haben bisher einen jeden der beiden sich in einem oder mehreren Punkten berührenden Körper als frei beweglich angenommen. Sey jetzt der eine von ihnen unbeweglich, und es erhellet ohne Weiteres, dass, nachdem die auf den beweglichen Körper wirkenden Kräfte Bewegung zu erzeugen im Stande sind, oder nicht, weder im erstern Falle die Bewegung gehemmt, noch die im letztern herrschende Ruhe gestört wird, wenn wir, wie im Vorigen, an den Berührungsstellen

Zwischenpunkte einschieben, und diese mit dem unbeweglichen Körper fest verbunden annehmen. Die Bedingungen des Gleichgewichts im vorliegenden Falle müssen daher ganz identisch seyn mit denen (§. 192. *d.*), welche statt fanden, wenn die Fläche des Körpers durch unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt war.

Berührt demnach ein beweglicher Körper einen unbeweglichen in einem oder mehrern Punkten, so sind die auf erstern wirkenden Kräfte nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn es möglich ist, sie in andere zu verwandeln, welche die Oberfläche des Körpers in den Berührungspunkten normal treffen. — Bei sechs und mehrern Berührungen ist diese Verwandlung im Allgemeinen immer ausführbar, und daher ein mit einem unbeweglichen in 6, 7,... Punkten durch Berührung verbundener Körper ebenfalls unbeweglich.

---

## §. 198.

Ausser der bisher betrachteten Flächenberührung giebt es noch einige andere Arten, nach denen zwei Körper in einem oder mehrern Punkten einander begegnen können. Denn ist jeder der beiden Körper nicht von einer einzigen sich stetig fortziehenden Fläche begränzt, sondern ist er es von mehrern, und hat er somit Kanten und Ecken, so kann eine Begegnung der beiden Körper in einem Punkte auch darin bestehen, dass eine Ecke oder Kante des einen Körpers an eine Ecke, Kante oder Fläche des andern trifft.

Ohne zu den ersten Principien wieder zurückzukehren, können wir die Bedingungen des Gleichgewichts, die bei solchen Arten der Begegnung zweier

Körper nöthig und hinreichend sind, auch unmittelbar aus den so eben bei der Flächenberührung gefundenen Bedingungen herleiten. Sind nämlich zwei bewegliche Körper auf beliebige Weise mit ihren Ecken, Kanten und Flächen verbunden, und herrscht zwischen den auf die Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht, so wird dieses nicht unterbrochen werden, wenn wir die zusammentreffenden Ecken und Kanten um ein unendlich Weniges abstumpfen, oder, was dasselbe ist, wenn wir auf den Ecken unendlich kleine Kugeln und längs der Kanten cylinderförmige Körper von unendlich kleinem Durchmesser befestigen. Findet aber kein Gleichgewicht statt, so wird dasselbe durch Hinzufügung der Kügelchen und sehr dünnen Cylinder auch nicht hervorgebracht werden.

Durch diese hinzugesetzten Kügelchen und Cylinder wird aber das Zusammentreffen der Körper mit Ecken und Kanten auf die Flächenberührung zurückgeführt, und es wird nun auch hier die allgemeine Bedingung des Gleichgewichts in §. 196. anwendbar, wonach es möglich seyn muss, in den Berührungspunkten Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem der beiden Körper besonders Gleichgewicht entsteht. Nur haben wir in Betreff der Richtungen dieser Gegenkräfte wegen der zum Theil unendlich kleinen Dimensionen der bei der Berührung hinzugefügten Körper Einiges zu berücksichtigen.

1) Trifft eine Kante oder Ecke des einen Körpers $a$ mit einer Fläche des andern $a'$ in einem Punkte zusammen, und wird hierauf längs der Kante eine unendlich dünner Cylinder, an die Ecke aber eine unendlich kleine Kugel gesetzt, so ist bei der dadurch bewirk-

ten Flächenberührung die gemeinschaftliche Normale, oder die Linie, in welcher die Gegenkräfte wirken müssen, als Normale der Fläche des Körpers $a'$ im Berührungspunkte, vollkommen bestimmt. Dasselbe gilt auch, wenn

2) eine Kante des einen Körpers einer Kante des andern unter einem beliebigen Winkel begegnet. Denn zieht man durch den Punkt der Begegnung eine auf beiden Kanten zugleich normal stehende Gerade, so ist es diese Gerade, und keine andere, welche auch in dem Berührungspunkte der Cylinder, womit die Kanten versehen werden, auf den Cylindern normal steht. Trifft aber

3) eine Ecke des einen Körpers auf eine Kante des andern, so ist die Richtung der Gegenkräfte nicht vollkommen bestimmt. Denn heisst $A$ der Punkt, in welchem die Ecke der Kante begegnet, so kann die Berührung der an die Ecke zu setzenden kleinen Kugel mit dem längs der Kante zu befestigenden dünnen Cylinder in irgend einem Punkte des kleinen Kreises geschehen, in welchem der Cylinder von einer in $A$ normal auf seine Axe oder die Kante gesetzten Ebene geschnitten wird. Die Normale im Berührungspunkte oder die Richtung der Gegenkräfte ist daher irgend ein Halbmesser dieses Kreises, d. h. irgend eine der die Kante in $A$ rechtwinklig schneidenden Geraden.

4) Ganz unabhängig von der gegenseitigen Lage der Körper ist die Richtung der Gegenkräfte, wenn Ecke mit Ecke zusammentrifft. Denn hat man die beiden Ecken mit Kügelchen versehen und lässt diese, statt der Ecken, einander berühren, so kann die Normale derselben im Berührungspunkte, mithin auch die

**durch den Begegnungspunkt der Ecken gelegte Linie für die Gegenkräfte, jede beliebige Richtung haben.**

## §. 199.

Nach diesen Erörterungen lässt sich nun das Gesetz des Gleichgewichts bei zwei sich in einem oder mehreren Punkten auf beliebige Weise begegnenden Körpern mit denselben Worten, wie in §. 196., wo die Körper sich nur mit ihren Flächen berührten, ausdrücken, sobald nur der Begriff der Gegenkräfte etwas allgemeiner gefasst und unter ihnen überhaupt zwei einander gleiche Kräfte verstanden werden, die an der Stelle, wo zwei Körper sich in einem Punkte begegnen, die eine auf den einen, die andere auf den andern Körper, nach entgegengesetzten Richtungen wirken, mit dem Zusatze, dass, wenn der Punkt, in welchem der eine Körper von dem andern getroffen wird, nicht eine Ecke oder sonst ein bestimmter Punkt des Körpers ist, sondern in einer Kante oder überhaupt in einer bestimmten Linie, oder in einer Fläche desselben liegt und darin bei gegenseitiger Bewegung der Körper die Stelle wechseln kann, dass dann die Linie, in welche die Richtungen der Gegenkräfte fallen, auf dieser Kante oder Fläche normal ist. Auf solche Weise den Begriff der Gegenkräfte festgestellt, ist demnach Folgendes das allgemeine Resultat der bisherigen Untersuchungen:

***Zwischen Kräften, welche auf zwei in einem oder in mehreren Punkten mit einander verbundene frei bewegliche Körper wirken, herrscht nur dann, und dann immer, Gleichgewicht, wenn sich in den Verbindungspunkten Gegenkräfte von solcher Intensität anbringen lassen, dass an jedem der beiden***

*Körper besonders zwischen den ursprünglichen und den hinzugefügten Gleichgewicht statt findet; oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn die Kräfte an dem einen der beiden Körper sich auf andere reduciren lassen, deren Richtungen die Begegnungspunkte treffen und daselbst bei Begegnungen von Flächen oder Kanten auf diesen Flächen oder Kanten normal sind, und wenn die Kräfte an beiden Körpern eben so, als wenn sie auf einen einzigen wirkten, einander das Gleichgewicht halten.*

*Ist der eine von beiden Körpern unbeweglich, so ist es für das Gleichgewicht hinreichend und nothwendig, dass die erste der zwei letztern Bedingungen in Bezug auf den beweglichen Körper erfüllt wird.*

## §. 200.

Eine etwas nähere Betrachtung verdient noch die Natur der Gegenkräfte. Da beim Gleichgewichte zwischen Kräften, welche auf zwei mit einander verbundene Körper wirken, an jedem derselben die ursprünglichen Kräfte mit den an ihm anzubringenden Gegenkräften im Gleichgewichte seyn müssen, ohne diese aber im Gleichgewichte mit den ursprünglichen Kräften am andern Körper sind, so wird von den an dem einen Körper anzubringenden Gegenkräften auf ihn dieselbe Wirkung, als von den zunächst auf den andern Körper wirkenden Kräften, hervorgebracht. Man kann daher die Gegenkräfte auch als den Ausdruck des von den Kräften des einen Körpers auf den andern Körper bewirkten Einflusses betrachten.

Bei wirklichen und daher nicht absolut festen, sondern mehr oder weniger elastischen Körpern giebt sich dieser Einfluss durch eine, wenn auch oft nur äusserst geringe Veränderung in der gegenseitigen Lage ihrer Theilchen zu erkennen, indem sich die Theilchen bald etwas näher gebracht, bald etwas weiter von einander entfernt werden. Diese Veränderung ist an den Stellen selbst, wo die Körper mit einander verbunden sind, am grössten, eben so, als wenn auf diese Stellen Kräfte wirkten, die das einemal eine Richtung von aussen nach innen, das anderemal von innen nach aussen haben. Man nennt eine solche Kraft im erstern Falle Druck oder Pressung, im letztern Spannung, oder begreift sie auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Pressung, indem man Spannung als negative Pressung ansieht.

Indessen muss man sich wohl hüten, diese Pressungen mit den vorigen Gegenkräften als völlig identisch zu betrachten. Die Gegenkräfte ergaben sich nicht als wirklich vorhandene Kräfte, sondern wurden nur als Hülfskräfte eingeführt, um damit die Demonstrationen zu erleichtern und die Bedingungen des Gleichgewichts einfacher darzustellen. Die Pressungen dagegen sind Kräfte, die sich beim Gleichgewichte eben so, wie jede andere Kraft, durch Veränderung der gegenseitigen Lage der Theilchen der Körper, als wirklich vorhanden offenbaren, und die daher sowohl hinsichtlich ihrer Intensitäten, als ihrer Richtungen, jederzeit vollkommen bestimmt sind, während die Intensitäten der Gegenkräfte nur bei sechs oder weniger Flächenberührungen zweier Körper, um bloss dieser Art der Begegnung zu gedenken, bestimmte Werthe haben können (§. 196. Zus.).

Soviel ist gewiss, dass im Falle des Gleichgewichts die Pressungen, welche ein Körper erleidet, eben so wohl, als die an ihm anzubringenden Gegenkräfte, mit den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften im Gleichgewichte seyn müssen. Sind folglich die Gegenkräfte nur auf eine Weise bestimmbar, wie dieses im Allgemeinen der Fall ist, wenn sich zwei Körper in 6 oder weniger Punkten berühren, so muss die auf jeden einzelnen Berührungspunkt wirkende Pressung der eben daselbst anzubringenden Gegenkraft gleich seyn, indem sich sonst gegen die Hypothese in den Berührungspunkten noch andere Kräfte anbringen liessen, welche mit den ursprünglichen im Gleichgewichte wären.

Berühren sich aber zwei Körper in mehr als 6 Punkten, so werden den 6, zwischen den 7 oder mehrern Gegenkräften bestehenden Gleichungen die Pressungen, statt der Gegenkräfte substituirt, zwar ebenfalls Genüge leisten. Allein es muss bei elastischen Körpern eine hinreichende Anzahl noch anderer Gleichungen geben, aus denen in Verbindung mit den vorigen sechs die Pressungen insgesammt bestimmt werden können. Die Entwicklung dieser andern Gleichungen gehört aber nicht für unsern gegenwärtigen Zweck, wo wir uns bloss mit vollkommen festen Körpern beschäftigen.

Allerdings kann man die Frage aufwerfen, ob nicht auch bei zwei sich in mehr als 6 Punkten berührenden absolut festen Körpern an den Berührungspunkten Pressungen von bestimmter Grösse statt finden, und welches ihre Werthe seyen. Indessen lässt sich auf diese Frage nicht mit Hülfe der Erfahrung und auch nicht mit Anwendung von Rechnung antworten, man müsste denn das Gesetz der Pressungen, welches bei elastischen Körpern obwaltet, auch bei vollkommener Festigkeit der Körper, als dem Grenzzustande der Elasticität, noch gelten lassen, oder irgend ein neues Gesetz zu Hülfe nehmen, dessen Gründe aber nur metaphysisch seyn könnten.

Wie dem aber auch seyn mag, so kann uns diese Unsicherheit in Bestimmung der Pressungen wenig kümmern, da wir es im Vorliegenden nicht mit eigentlichen Pressungen, sondern nur mit Hülfskräften zu thun haben, die aber inskünftige, um dem gewöhnlichen Sprachgebrauche nicht entgegen zu seyn, statt Gegenkräfte, ebenfalls Pressungen genannt werden sollen.

---

### Gleichgewicht an einem nicht völlig frei beweglichen Körper.

### §. 201.

Die in dem Vorhergehenden entwickelte Theorie des Gleichgewichts zweier mit einander verbundenen Körper wollen wir schlüsslich durch einige Beispiele erläutern. Dabei werden wir den einen der beiden Körper als unbeweglich annehmen, indem, wenn auch er beweglich ist, zum Gleichgewichte des Ganzen nur noch erfordert wird, dass die Kräfte an beiden Körpern, als auf einen einzigen wirkend, sich das Gleichgewicht halten. (§. 199.)

Sey der bewegliche Körper mit dem unbeweglichen zuerst nur in einem Punkte verbunden. Welches nun auch diese Verbindung seyn mag, so ist die zum Gleichgewichte stets nöthige Bedingung, dass die an dem beweglichen Körper wirkenden Kräfte eine einzige den Punkt treffende Resultante haben. Ist daher in Bezug auf drei coordinirte Axen das System der auf den Körper wirkenden Kräfte, wie im Früheren, durch $A$, $B$, $C$, $L$, $M$, $N$ gegeben, ist $(a, b, c)$ der

**Punkt der Begegnung und $(U, V, W)$ die ihn treffende Resultante der Kräfte oder die Pressung daselbst, so hat man nach §. 69. die Gleichungen:**

$$A = U,\ L = bW - cV,$$
$$B = V,\ M = cU - aW,$$
$$C = W,\ N = aV - bU.$$

**Hieraus die auf die Pressung sich beziehenden Grössen $U$, $V$, $W$ eliminirt, ergeben sich die Bedingungsgleichungen:**

$$L = bC - cB,\ M = cA - aC,\ N = aB - bA,$$

**oder einfacher:** $L = 0,\ M = 0,\ N = 0,$

**sobald der Punkt der Begegnung zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird. Die auf ihn ausgeübte Pressung aber ist $(A, B, C)$. Wenn nun**

**1) eine Ecke, oder überhaupt ein bestimmter Punkt des beweglichen Körpers, mit einem bestimmten Punkte des unbeweglichen verbunden ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn ein bestimmter Punkt eines Körpers unbeweglich, der Körper selbst aber um ihn nach allen Richtungen drehbar ist, so kann die Richtung der Pressung jede beliebige seyn (§. 198. 4.). Die drei erhaltenen Bedingungsgleichungen $L, M, N = 0$ sind daher in diesem Falle die einzigen, d. h.**

***Zum Gleichgewichte eines Körpers, der einen unbeweglichen Punkt hat, ist es nöthig und hinreichend, dass in Bezug auf jede von drei sich in dem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen das Moment der Kräfte null ist.***

**2) *Ist die Beweglichkeit eines Körpers dadurch beschränkt, dass ein bestimmter Punkt desselben in einer unbeweglichen Linie zu verharren, oder dass eine bestimmte Linie desselben einem unbeweglichen***

*Punkte zu begegnen genöthigt ist*, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass die Kräfte eine die Linie in dem Punkte rechtwinklig treffende Resultante haben (§. 198. 3.). Lässt man daher den Punkt, wie vorhin, mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, und die Linie, oder ihre Tangente in diesem Punkte, wenn sie krumm ist, mit der Axe der $x$ zusammenfallen, so ist bei Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Resultante in der Ebene der $yz$ enthalten, und daher $U=0$. Hierdurch kommt, wegen $A=U$, zu den vorigen drei Bedingungsgleichungen $L$, $M$, $N=0$ noch die vierte $A=0$, d. h. *es muss noch die Summe der nach der Linie, oder ihrer Tangente im Begegnungspunkte, geschätzten Kräfte null seyn.*

3) *Ist ein bestimmter Punkt eines Körpers in einer unbeweglichen Fläche beweglich, oder eine Fläche des Körpers einem unbeweglichen Punkte zu begegnen genöthigt*, so muss die Resultante der Kräfte die Fläche im Begegnungspunkte normal treffen. Es muss folglich, wenn der Punkt wiederum zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen, und wenn die Fläche von der Ebene der $x$, $y$ daselbst berührt wird, die Resultante in die Axe der $z$ fallen, woraus $U$ und $V=0$ folgen. Ausser den obigen Bedingungsgleichungen $L$, $M$, $N=0$, müssen daher jetzt noch die zwei: $A=0$ und $B=0$ erfüllt werden, d. h. *es muss noch die Summe der Kräfte nach irgend zwei in der Berührungsebene gezogenen und sich schneidenden Geraden geschätzt, beidemale null seyn.*

## §. 202.

Wird ein Körper in zweien seiner Punkte $F$ und $F'$ an der Bewegung gehindert, so müssen beim Gleichgewichte sämmtliche Kräfte sich auf zwei diese Punkte treffende Kräfte zurückführen lassen. Nimmt man daher $F'$ zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, $F'F$ zur Axe der $x$, setzt $F'F = a$ und bezeichnet die auf $F$ und $F'$ gerichteten Resultanten oder die Pressungen, welche diese Punkte erleiden, durch $(U, V, W)$, $(U', V', W')$, so muss seyn:

$$(A)\begin{cases} A = U + U', & L = 0, \\ B = V + V', & M = -aW, \\ C = W + W', & N = aV. \end{cases}$$

Wenn nun 1) $F$ und $F'$ völlig unbeweglich angenommen werden, so lässt sich über die Richtungen der Pressungen im Voraus nichts bestimmen, und es giebt daher zwischen $U, V, \ldots W'$ keine andern Relationen, als die, welche aus jenen Gleichungen selbst hervorgehen. Hieraus können aber bloss $V$, $V'$, $W$, $W'$, d. i. die in $F$ und $F'$ auf $FF'$ normalen Theile der Pressungen bestimmt werden; dagegen findet sich von den längs der Linie $FF'$ selbst gerichteten Pressungen $U$ und $U'$ nur die Summe, $= A$, und es bleibt $L = 0$, als die einzige von den Pressungen freie Gleichung, als Bedingung des Gleichgewichts, zurück, woraus wir schliessen:

*Zum Gleichgewichte eines an einer unbeweglichen Axe ($FF'$) befestigten Körpers ist es nöthig und hinreichend, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf diese Axe null ist.*

2) Ist nur der Punkt $F'$ unbeweglich, $F$ aber in einer unbeweglichen Linie beweglich, und macht die in $F$ an diese Linie gezogene Tangente mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so kommt, weil die

Pressung $(U, V, W)$ auf der Linie normal seyn muss, noch die Gleichung

$$U \cos\alpha + V \cos\beta + W \cos\gamma = 0$$

hinzu. Hiermit erhalten wir zu der vorigen Bedingung des Gleichgewichts $L = 0$, zwar keine neue, aber es hört nun die Unbestimmtheit von $U$ und $U'$ auf.

Doch ist hiervon der Fall auszunehmen, wenn $\cos\alpha = 0$ und daher die Linie auf $FF'$ normal ist. Lassen wir alsdann grösserer Einfachheit willen die Tangente der Linie mit der Axe der $y$ parallel seyn, setzen also noch $\cos\gamma = 0$, so wird $V = 0$, und es entsteht noch die Bedingungsgleichung: $N = 0$; die Unbestimmtheit zwischen $U$ und $U'$ aber dauert fort, und wir folgern hieraus:

Ist ein Punkt $F'$ eines Körpers unbeweglich und ein anderer Punkt $F$ desselben in einer unbeweglichen Linie beweglich, deren Tangente $FG$ (Fig. 50.) auf $F'F$ normal ist, so muss beim Gleichgewichte das Moment der auf den Körper wirkenden Kräfte sowohl rücksichtlich der Linie $F'F$, als rücksichtlich der auf der Ebene $F'FG$ in $F'$ zu errichtenden Normalen $F'H$ null seyn.

Durch die Nullität des Momentes in Bezug auf $FF'$ wird, wie in 1), die Drehung des Körpers um diese Axe aufgehoben. Es erhellet aber nicht sogleich, warum auch in Bezug auf $F'H$ das Moment null seyn soll, da doch bei der Unbeweglichkeit der Linie, in welcher $F$ beweglich ist, der Körper sich nicht um $F'H$ drehen lässt, wenigstens nicht im Allgemeinen, sondern nur in dem speciellen Falle, wenn die Linie der Bogen eines aus $F'$, als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser $F'F$ in der Ebene $F'FG$ beschriebenen Kreises ist. Indessen kann man doch, wenn die Linie irgend eine andere Curve ist, die der Annahme gemäss von $FG$ berührt wird, das bei dem Punkte $F$ befindliche Element der Curve als das Element eines aus $F'$ beschriebenen Kreises betrachten, und der Körper kann folglich jederzeit, wenn auch im Allgemeinen nur um ein unendlich Geringes, um $F'H$ als Axe gedreht werden. — Die Rechnung giebt uns daher ein genaueres Resultat, als wir erwartet hatten, indem sie den Körper selbst vor einer unendlich kleinen Drehung zu sichern sucht. Die Betrachtung von dergleichen unendlich kleinen Beweglichkeiten ist besonders in rein geometrischer Hinsicht von Interesse, und wir werden deshalb diesem Gegenstande späterhin eine specielle Untersuchung widmen.

3) Sind beide Punkte $F$ und $F'$ in gegebenen Linien beweglich, so hat man, wenn die Richtungen derselben bei $F$ und $F'$ durch die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ und $\alpha', \beta', \gamma'$ gegeben sind, nächst den 6 Gleichungen $(A)$, noch folgende zwei:

$$U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma = 0,$$
$$U'\cos\alpha' + V'\cos\beta' + W'\cos\gamma = 0;$$

und es lassen sich jetzt nicht nur sämmtliche Pressungen vollkommen bestimmen, sondern man erhält auch noch zu $L=0$ eine neue Bedingungsgleichung. Sind z. B. $F$ und $F'$ in der Axe der $x$, also in $FF'$ selbst, beweglich, so werden $U=0$, $U'=0$, und daher $A=0$ die neue Bedingung, d. h. die Summe der nach der Richtung von $FF'$ geschätzten Kräfte muss null seyn.

Können die in der Axe der $x$ befindlichen Punkte $F$ und $F'$ sich in Parallellinien mit der Axe der $y$ bewegen, so sind die Pressungen parallel mit der Ebene der $x$, $z$, mithin $V$ und $V'=0$, und es werden damit

$B=0$, $N=0$. In diesem speciellen Falle kommen also zu $L=0$, statt einer, noch zwei Bedingungsgleichungen hinzu. Die Erfüllung der einen, $B=0$, hebt die mit der Axe der $y$ parallele Bewegung auf; durch die andere, $N=0$, wird ähnlicherweise, wie in 2), eine hierbei noch mögliche unendlich kleine Drehung um die Axe der $z$ gehindert.

4) Berührt der Körper mit beiden Punkten eine Ebene, z. B. die Ebene der $x$, $y$, so haben die Pressungen eine auf derselben normale Richtung; es werden folglich $U$, $V$, $U'$, $V'=0$, und man erhält damit $A=0$, $B=0$, $L=0$, $N=0$, als Bedingungen des Gleichgewichts.

## §. 203.

Betrachten wir noch einen in drei Punkten $F$, $F'$, $F''$ an seiner Bewegung gehinderten Körper. Seyen diese Punkte: $(a, b, c)$, $(a' b', c')$, $(0, 0, 0)$, so dass $F''$ der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Die Pressungen in $F, F', F''$ seyen $(U, V, W)$, $(U', V', W')$, $(U'', V'', W'')$ und man hat alsdann nachstehende 6 Gleichungen:

$$(B)\quad\begin{cases} A = U + U' + U'', \\ B = V + V' + V'', \\ C = W + W' + W'', \\ L = bW - cV + b'W' - c'V', \\ M = cU - aW + c'U' - a'W', \\ N = aV - bU + a'V' - b'U'. \end{cases}$$

Da sich aus ihnen allein die Pressungen nicht eliminiren lassen, so giebt es, wenn die drei Punkte unbeweglich sind, im Allgemeinen keine Bedingung des Gleichgewichts, und der Körper ist ebenfalls unbeweglich; was auch schon daraus erhellet, dass die bei zwei unbeweglichen Punkten noch übrig bleibende Axendrehung durch die Annahme eines dritten unbeweglichen Punktes ausserhalb der Axe vollkommen aufgehoben wird. — Die Pressungen selbst bleiben zum Theil unbestimmt.

Lässt man die Punkte in gegebenen Linien beweglich seyn, so kommen 3 neue Gleichungen zwischen den 9 Grössen $U, \ldots W''$ hinzu, und man hat somit 9 Gleichungen, aus denen man diese 9 Grössen, also die drei Pressungen ihrer Intensität und Richtung nach, bestimmen kann. Eine von den Pressungen freie Gleichung lässt sich aber damit noch nicht finden, und der Körper ist folglich auch jetzt noch unbeweglich.

Eine Ausnahme hiervon findet statt, wenn die drei Linien einander parallel sind, als wodurch der Körper selbst parallel mit ihnen beweglich wird. Lässt man sie z. B. parallel mit der Axe der $z$ seyn, so werden $W, W', W'' = 0$, welches die Bedingung: $C = 0$ giebt, d. h. die Summe der nach den Richtungen der Parallellinien geschätzten Kräfte muss null seyn.

Wenn endlich der Körper mit den drei Punkten eine Ebene, es sey die der $x, y$, berührt, und folglich die Punkte in dieser Ebene beweglich sind, so hat man $c = 0$, $c' = 0$, und noch ausserdem, weil dann die Pressungen die Ebene normal treffen: $U, U', U''$, $V, V', V'' = 0$. Hiermit finden sich aus den Gleichungen ($B$) die Bedingungen: $A = 0$, $B = 0$, $N = 0$. Die drei übrigen Gleichungen werden:

$$C = W + W' + W'',$$
$$L = bW + b'W', M = -aW - a'W',$$

und hieraus lassen sich die drei auf der Ebene normalen Pressungen $W, W', W''$, bestimmen.

Liegen die drei Punkte, in denen der Körper die

Ebene der $x$, $y$ berührt, in einer Geraden, z. B. in der Axe der $x$, so hat man noch $b$ und $b' = 0$ zu setzen. Hierdurch verwandelt sich die zweite Gleichung für die Pressungen in eine vierte Bedingung fürs Gleichgewicht: $L = 0$, d. h. es muss noch das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, in welcher die Punkte liegen, null seyn. Die drei Pressungen aber lassen sich aus den für sie noch übrig bleibenden zwei Gleichungen nicht mehr vollkommen bestimmen.

## §. 204.

Zusatz. Wenn der Körper bloss parallel mit der Axe der $z$ beweglich ist, so dass jeder Punkt desselben eine Parallele mit dieser Axe beschreibt, so ist nach vor. §. $C = 0$ die Bedingung des Gleichgewichts. Eben so ist $A = 0$ oder $B = 0$ die Bedingung, wenn der Körper bloss parallel mit der Axe der $x$ oder der $y$ fortgerückt werden kann.

Lässt sich der Körper bloss um die Axe der $x$ drehen, so dass jeder seiner Punkte keine andere Linie, als einen Kreis um diese Axe beschreiben kann, so ist $L = 0$ die Bedingung des Gleichgewichts (§. 202.); und auf gleiche Art ist $M = 0$ oder $N = 0$ die Bedingung, wenn der Körper nur um die Axe der $y$ oder der $z$ gedreht werden kann.

Den sechs Gleichungen $A$, $B$, $C$, $L$, $M$, $N = 0$ entsprechen daher resp. die Fortbewegungen des Körpers längs der Axen der $x$, $y$, $z$ und die Drehungen um dieselben Axen dergestalt, dass wenn der Körper nur einer dieser sechs Bewegungen folgen kann, die derselben entsprechende Gleichung es ist, wodurch das Gleichgewicht der auf den Körper wirkenden Kräfte bedingt wird.

Diese drei fortrückenden und drei drehenden Bewegungen sind von einander vollkommen unabhängig, d. h. man kann einen Körper mit einem oder mehrern andern ganz- oder zum Theil unbeweglichen Körpern immer so verbinden, dass er nur an einer dieser sechs Bewegungen, oder an etlichen derselben, welche man will, Theil nehmen, keiner der übrigen aber folgen kann.

So wie nun, wenn der Körper nur einer einzigen der 6 Bewegungen fähig ist, die dieser Bewegung entsprechende Gleichung die Bedingung des Gleichgewichts ist, so sind auch, wenn der Körper zwei oder mehrere der 6 Bewegungen zugleich annehmen kann, an den übrigen aber gehindert ist, die den möglichen Bewegungen entsprechenden Gleichungen die nöthigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichts.

Berührt z. B. ein Körper in drei Punkten, welche nicht in einer Geraden liegen, eine unbewegliche Ebene und wird diese zur Ebene der $x$, $y$ genommen, so sind damit von den 6 Bewegungen aufgehoben: die mit der Axe der $z$ parallele Fortrückung und die Drehungen um die Axen der $x$ und der $y$; dagegen kann der Körper noch parallel mit den Axen der $x$ und der $y$ bewegt und um die Axe der $z$ gedreht werden. Von den sechs Gleichungen, welche beim Gleichgewichte eines vollkommen frei beweglichen Körpers erfüllt seyn müssen, sind daher die drei: $C=0$, $L=0$, $M=0$, durch das Hinderniss, welches die Ebene der Bewegung des Körpers entgegenstellt, schon als erfüllt anzusehen, und es bleiben noch die drei: $A=0$, $B=0$, $N=0$, als zu erfüllende Bedingungen, übrig. Vergl. vor. §.

Ist nur ein Punkt des Körpers unbeweglich, so kann, diesen Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen, der Körper um jede der drei Axen gedreht, aber keiner entlang verschoben werden. Die Bedingungen sind daher in diesem Falle: $L=0$, $M=0$, $N=0$ (§. 201.).

Kann umgekehrt der Körper um keine Axe gedreht, aber nach jeder beliebigen Richtung parallel mit seiner anfänglichen Lage fortbewegt werden, so ergeben sich auf gleiche Art: $A=0$, $B=0$, $C=0$, als Bedingungen des Gleichgewichts.

---

# Zweites Kapitel.

## Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

### §. 205.

Durch die im vorigen Kapitel entwickelte Theorie des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf zwei mit einander verbundene Körper wirken, sind wir genugsam vorbereitet, um sogleich zur Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts in dem ganz allgemeinen Falle übergehen zu können, wenn eine beliebige Anzahl mit einander verbundener Körper der Wirkung von Kräften unterworfen ist. Folgende Betrachtungen werden uns zu diesen Bedingungen hinführen.

1) Denken wir uns ein System von mehr als zwei Körpern $a, b, c, d, \ldots$, von denen jeder, wie wir fürs erste annehmen wollen, frei beweglich *ist und* mit einem oder mehreren oder auch allen übrigen, sey es in einem oder in mehreren Punkten, zusammentrifft. Meh-

rerer Gleichförmigkeit wegen wollen wir die Körper nur durch gegenseitiges Berühren ihrer Flächen mit einander verbunden annehmen, als worauf sich nach §. 198. alle übrigen Arten des Zusammentreffens zurückführen lassen. Endlich sollen an zwei, oder mehrern, oder allen Körpern Kräfte angebracht und soll das Ganze im Gleichgewichte seyn.

2) Man bringe an den Stellen, in denen einer der Körper, $a$, die andern $b$, $c$,... berührt, zwischen ihm und den andern Körpern Zwischenpunkte $A$, $A'$, $A''$,... an (§. 194.), lasse diese unbeweglich werden und entferne hierauf den Körper $a$. Das Gleichgewicht wird dadurch nicht verloren gehen, da durch die unbeweglich angenommenen Zwischenpunkte aller Einfluss von $a$ auf $b$, $c$,..., und umgekehrt, aufgehoben ist.

3) Sey $b$ einer der von $a$ berührten Körper und $A$ einer der zwischen $a$ und $b$ gesetzten Zwischenpunkte. Nach Wegnahme von $a$ lasse man $A$ in der Fläche von $b$ beweglich werden. Geht hierdurch das Gleichgewicht verloren, so muss es möglich seyn, an $A$ eine das Gleichgewicht wieder herstellende Kraft $P$ anzubringen (§. 190. III.), und diese Kraft muss auf der Fläche von $b$ normal seyn, indem sonst, wenn $b$ unbeweglich gesetzt würde, $A$ auf $b$ nicht in Ruhe bleiben könnte (§. 192. $a$.). Auch kann man die Kraft $P$ an der Fläche von $b$ selbst, da, wo sich $A$ befindet, anbringen und sodann den Zwischenpunkt $A$, als überflüssig, wegnehmen.

4) Man entferne demnach den unbeweglichen Zwischenpunkt $A$ und setze, wo nöthig, statt desselben eine auf $b$ normale das Gleichgewicht herstellende Kraft $P$. Auf gleiche Weise entferne man nach und nach alle übrigen Zwischenpunkte $A'$, $A''$,... und bringe

statt ihrer an den Flächen von $b$, $c$,..., wo sie sich befanden, d. i. an den Berührungspunkten dieser Flächen mit $a$, die zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen auf den Flächen normalen Kräfte $P'$, $P''$,... an.

5) Somit sind jetzt an dem Systeme von $b$, $c$,... die ursprünglich auf diese Körper wirkenden Kräfte mit den hinzugefügten $P$, $P'$,... im Gleichgewichte. Da nun bei dem Systeme sämmtlicher Körper $a$, $b$, $c$,... die ursprünglichen Kräfte an $b$, $c$,... mit den Kräften an $a$ im Gleichgewichte sind, so sind die Kräfte an $a$ mit $P$, $P'$,... gleichwirkend, und es muss $a$ für sich ins Gleichgewicht kommen, wenn an ihm noch die Kräfte $P$, $P'$,..., nach entgegengesetzten Richtungen genommen, angebracht werden. Dies liefert uns folgendes Resultat:

Sind Kräfte, welche auf ein System sich berührender frei beweglicher Körper $a$, $b$, $c$,... wirken, im Gleichgewichte, so ist es möglich, an den Stellen, in denen irgend einer der Körper, $a$, die übrigen $b$, $c$,... berührt, Gegenkräfte (§. 195.) von solcher Intensität anzubringen, dass sowohl der Körper $a$ für sich, als das System der einander berührenden Körper $b$, $c$,... für sich, in den Zustand des Gleichgewichts kommt.

6) Man bringe nun an dem Systeme von $a$, $b$, $c$, $d$,..., wie es ursprünglich gegeben war, diese Gegenkräfte wirklich an. Wegen des Gleichgewichts, welches hierdurch das System von $b$, $c$, $d$,... für sich erlangt, kann man gleicher Weise an den Berührungsstellen eines dieser Körper $b$ mit den übrigen $c$, $d$,... solche Gegenkräfte hinzufügen, dass nächst $a$ noch $b$ für sich und das System von $c$, $d$,... für sich im Gleichgewichte sind. Durch Wiederholung desselben Verfahrens an dem Systeme von $c$, $d$,... kann man

es ferner bewirken, dass ausser *a* und *b* noch *c* für sich und das System der noch übrigen Körper *d*,... für sich ins Gleichgewicht kommen, und kann diese Operation so lange fortsetzen, bis jeder Körper des anfänglichen Systems einzeln im Gleichgewichte ist. Alsdann sind nach und nach an allen Stellen, in denen zwei Körper des Systems sich berühren, und wo es nach 3) für nöthig zu erachten war, Gegenkräfte hinzugesetzt worden, und man hat somit folgende, der in §. 196. für nur zwei Körper erhaltenen ganz analoge, Bedingung für das Gleichgewicht des Systems gefunden:

Sollen Kräfte, welche auf ein System einander berührender und an sich frei beweglicher Körper wirken, einander das Gleichgewicht halten, so muss es möglich seyn, an den Berührungsstellen der Körper Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem Körper besonders die ursprünglichen Kräfte mit den an ihm angebrachten im Gleichgewichte sind.

Dass diese nothwendige Bedingung des Gleichgewichts auch stets hinreichend ist, wird eben so, wie im §. 196. bewiesen. Lassen sich nämlich an dem Systeme der einander berührenden Körper solche Gegenkräfte hinzufügen, dass jeder einzelne Körper ins Gleichgewicht kommt, und somit auch das ganze System im Gleichgewichte ist, so muss das System auch ohne Anbringung von Gegenkräften im Gleichgewichte seyn, da je zwei zusammengehörige Gegenkräfte für sich im Gleichgewichte sind, und daher jedes dieser Paare ohne Störung des Gleichgewichts des Systems wieder entfernt werden kann.

## §. 206.

**Nachträgliche Bemerkungen.** *a*. Nachdem bei den Berührungsstellen von $a$ mit $b$, $c$... unbewegliche Zwischenpunkte $A$, $A'$,... eingeschoben, der Körper $a$ abgesondert und hierauf $A$ in der Fläche von $b$ beweglich angenommen worden war, wurde im Falle, dass durch die Beweglichkeit von $A$ das Gleichgewicht verloren gieng, an $A$ eine auf $b$ normale, das Gleichgewicht wieder herstellende Kraft $P$ angebracht.

Geht das Gleichgewicht dadurch, dass man $A$ beweglich macht, nicht verloren, so können zwei Fälle eintreten. Denn entweder sind die noch übrigen unbeweglichen Punkte $A'$, $A''$,... in solcher Anzahl und Lage vorhanden, dass keine auch noch so grosse an $A$ angebrachte und auf $b$ normal gerichtete Kraft Bewegung hervorbringen kann; oder es ist jede auch noch so geringe Intensität dieser Kraft vermögend, das bestehende Gleichgewicht aufzuheben. Letzterer Fall ereignet sich z. B. dann, wenn $a$ nur einen der übrigen Körper berührt, und wenn die auf $a$ ursprünglich wirkenden Kräfte für sich, also auch die ursprünglichen Kräfte an $b$, $c$,... unter einander, im Gleichgewichte sind.

Im letztern Falle ist daher die an $A$ anzubringende Kraft nothwendiger Weise $= 0$; dagegen kann man im erstern an $A$ eine Kraft $P$ von beliebiger Intensität setzen, und eben so ist es möglich, dass noch an einigen der übrigen Zwischenpunkte $A'$, $A''$,..., nachdem sie in den Flächen, welche sie berühren, beweglich gemacht worden, normale Kräfte $P'$, $P''$,... von willkührlicher Intensität angebracht werden können.

Statt also nach dem vor. §. an denjenigen unter den Punkten $A$, $A'$,..., durch deren Beweglichmachung das Gleichgewicht noch nicht verloren geht, keine Kräfte anzubringen, kann man, grösserer Allgemeinheit willen, jedoch mit Ausnahme des letztern der oben gedachten zwei Fälle, normale Kräfte $P$, $P'$,... von willkührlicher Intensität auf sie wirken lassen und hiernach die zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen Intensitäten der Kräfte an den noch übrigen Punkten bestimmen. Bringt man hierauf sämmtliche Kräfte $P$, $P'$,... an den Flächen von $b$, $c$,... selbst, und an dem wieder hinzugefügten Körper $a$ die direct entgegengesetzten $-P$, $-P'$,... an, so wird nunmehr eben so, wie vorhin, sowohl $a$, als das System von $b$, $c$,..., jedes für sich, im Gleichgewichte erhalten. Auf gleiche Weise kann man auch hinsichtlich der an $b$ und $c$, $d$,... anzubringenden Gegenkräfte zu Werke gehen u. s. w. Die daraus zuletzt sich ergebende Bedingung für das Gleichgewicht des ganzen Systems aber ist mit der im vor. §. ausgesprochenen einerlei.

*b*. In Nr. 4. des vor. §. wurde gezeigt, wie nach Wegnahme irgend eines der Körper, $a$, von den übrigen $b$, $c$,... diese übrigen ein System bilden, welches durch Anbringung der Kräfte $P$, $P'$,... für sich ins Gleichgewicht kommt. Es kann aber auch geschehen, dass die nach Wegnahme von $a$ übrig bleibenden Körper, statt eines, zwei oder mehrere Systeme ausmachen, welche vorher durch $a$ zu einem einzigen vereinigt waren. Die Bündigkeit der nachfolgenden Schlüsse wird hierdurch keineswegs beeinträchtigt. Denn eben so, wie vorhin, wird auch in diesen Fällen das Gleichgewicht bei jedem der einzelnen Systeme, welche nach Wegnahme von $a$ entstehen, durch die unbeweglichen Punkte $A$, $A'$,... und nach Absonderung dieser Punkte durch die normalen Kräfte $P$, $P'$,... erhalten; an $a$ selbst aber werden gleichfalls, wie vorhin, die ursprünglichen Kräfte mit $-P$, $-P'$,... im Gleichgewichte seyn.

§. 207.

In dem Bisherigen wurde jeder Körper des Systems als frei beweglich angenommen. Setzen wir jetzt, der in §. 205. betrachtete Körper $a$ sey unbeweglich, und somit jeder der übrigen nur innerhalb gewisser Grenzen beweglich, so erhellet eben so, wie dort, dass, wenn das System im Gleichgewichte ist, sich in den Berührungspunkten von $a$ mit den übrigen Körpern $b$, $c$,... normale Kräfte $P$, $P'$,... an $b$, $c$,... anbringen lassen, so dass diese Körper auch nach Wegnahme von $a$ in Ruhe bleiben. Ein Gleiches gilt, wenn mehrere Körper des Systems unbeweglich angenommen werden; auch kann man mehrere unbewegliche Körper immer als Theile eines einzigen unbeweglichen betrachten. Da nun die Kräfte $-P$, $-P'$,..., an dem unbeweglichen $a$ angebracht, von keiner Wirkung sind, so findet die in §. 205. erhaltene nothwendige Bedingung des Gleichgewichts auch bei der Unbeweglichkeit eines oder mehrerer Körper des Systems völlige Anwendung; und eben so, wie zu Ende jenes §., wird auch für gegenwärtigen Fall bewiesen, dass diese nothwendige Bedingung zugleich hinreichend ist.

*Mag also jeder Körper des Systems an sich frei beweglich, oder mögen einer oder etliche derselben unbeweglich seyn, mögen sie ferner, wie bisher angenommen wurde, durch gegenseitige Berührung ihrer Flächen zusammenhängen, oder auf eine der andern in* §. 198. *bemerkten Arten mit einander verbunden seyn* (§. 205. 1.), *so besteht immer die nothwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts in der Möglichkeit, in den Begegnungspunkten der Körper Gegenkräfte* (§. 199.) *von solcher*

*Intensität anzubringen, dass jeder bewegliche Körper für sich ins Gleichgewicht kommt.*

Endlich ist noch zu bemerken, dass auch hier, wie in §. 200., die Gegenkräfte, wenn sie völlig bestimmte Werthe haben, die Pressungen ausdrücken, welche die Körper in den Begegnungspunkten auf einander ausüben.

## Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten bei mit einander verbundenen Körpern.

### §. 208.

In dem ersten Theile der Statik (§. 178.) ist bewiesen worden, dass, wenn Kräfte, die auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewichte sind, bei einer unendlich kleinen Verrückung des Körpers die Summe der Producte aus jeder Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes jederzeit null ist. Wir wollen nun die eben entwickelte Bedingung für das Gleichgewicht mehrerer mit einander verbundener Körper zunächst dazu benutzen, dass wir zeigen, wie jenes Princip in völliger Allgemeinheit auch bei jedem dergleichen Systeme Anwendung findet. In dieser Absicht werden wir die Gültigkeit des Princips zuerst für zwei in dem Begegnungspunkte zweier Körper angebrachte und sich immer das Gleichgewicht haltende Gegenkräfte darthun.

1) Seyen $a$ und $b$ zwei Körper, welche sich mit ihren Flächen in einem Punkte berühren. Heisse $C$ (Fig. 51.) der Punkt des Raums, in welchem die Berührung statt findet, und $A$ und $B$ seyen die zwei in $C$ zusammentreffenden Punkte in den Oberflächen der Körper $a$ und $b$, die gemeinschaftliche Normale der beiden Flächen in dem Berührungspunkte $C$ heisse $c$.

2) Werde nun das System der beiden Körper um ein unendlich Weniges verrückt, ohne dass sie sich zu berühren aufhören (§. 189.). Den Punkt des Raumes, in welchem jetzt die Berührung geschieht, nenne man $C'$, und die jetzige Normale in der Berührung sey $c'$. Die beiden Punkte $A$ und $B$ in den Oberflächen, welche vorher mit $C$ zusammentrafen, werden jetzt nicht mehr, wenigstens nicht im Allgemeinen, mit $C'$ coincidiren, weil sich die eine Fläche an der andern zugleich verschoben haben kann. Seyen daher $A'$ und $B'$ die Stellen des Raums, welche nunmehr die Punkte $A$ und $B$ der Oberflächen einnehmen.

3) Weil hiernach $A'$ und $B'$ in den Flächen unendlich nahe bei dem Berührungspunkte $C'$ der letztern nach der Verrückung liegen, so ist der Winkel der Geraden $A'B'$ mit $c'$ unendlich nahe ein rechter; und weil $c'$ mit $c$ nur einen unendlich kleinen Winkel macht, so ist auch der Winkel von $A'B'$ mit $c$ von einem rechten unendlich wenig verschieden. Sind folglich $F$ und $G$ die rechtwinkligen Projectionen von $A'$ und $B'$ auf $c$, so ist $FG$ als verschwindend oder null gegen $A'B'$ und gegen die andern kleinen Grössen, wodurch die Verrückung bestimmt wird, zu betrachten.

4) Lassen wir nun auf die in $C$ anfangs coincidirenden Punkte $A$ und $B$ der Körper zwei einander gleiche Kräfte nach entgegengesetzten in die Normale $c$ fallenden Richtungen wirken. Diese Kräfte, welche $P$ und $-P$ heissen, halten sich nach §. 195. das Gleichgewicht. Die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, d. i. die Verrückungen $AA'$ und $BB'$ dieser Punkte, projicirt auf die Richtungen der Kräfte, sind $CF$ und $CG$; folglich die Summe der Producte aus den Kräf-

ten in die virtuellen Geschwindigkeiten $= CF \,.\, P - CG \,.\, P = GF \,.\, P = 0$.

5) Hiermit ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zweier bei der Flächenberührung anzubringenden Gegenkräfte erwiesen. Ganz auf eben die Art wird es für zwei Gegenkräfte dargethan, die beim Zusammentreffen einer Fläche mit einer Linie oder mit einem Punkte, oder bei der Begegnung zweier Linien wirksam sind. Denn in allen diesen Fällen hat die Normallinie bei der Berührung, als in welche die Richtungen der Gegenkräfte fallen, eine durch die Elemente der Berührung vollkommen bestimmte Lage, und es wird wie vorhin gezeigt, dass die zwei anfänglich zusammenfallenden Punkte $A$ und $B$ nach einer unendlich kleinen Verrückung in eine Lage kommen, bei welcher ihre gegenseitige nach der Normallinie geschätzte Entfernung von einer höhern Ordnung ist.

6) Was den Fall anlangt, wenn ein bestimmter Punkt $B$ des einen Körpers in einer bestimmten Linie des andern beweglich ist, so heisse $A$ der Punkt der Linie, wo sich $B$ befindet. Gelangen nun nach der Verrückung beider Körper $A$ nach $A'$ und $B$ nach $B'$, so ist $A'B'$ ein Element der Linie in ihrer zweiten Lage und steht daher auf der durch $A'$ gelegten Normalebene dieser Linie, folglich auch auf der Normalebene durch den Punkt $A$ der Linie in ihrer ersten Lage, unendlich nahe rechtwinklig, und die rechtwinklige Projection von $A'B'$ auf jede in dieser letztern Normalebene durch $A$ gezogene Gerade ist von der zweiten, oder einer höhern Ordnung. Da nun von zwei auf $A$ und $B$ wirkenden Gegenkräften die Richtungen immer in irgend einer der durch $A$ auf die Curve zu setzenden Normallinien liegen müssen, so ist

auch in diesem Falle die Projection von $A'B'$ auf die Richtung der Gegenkräfte jederzeit von einer höhern Ordnung, als der ersten, woraus das Uebrige, wie in 4), folgt.

7) Sind endlich $A$ und $B$ zwei unzertrennliche Punkte zweier Körper, so coincidiren nach der Verrückung auch $A'$ und $B'$. Welches daher auch die ohne Weiteres hier noch unbestimmt bleibende Richtung der Gegenkräfte seyn mag, so fallen die Projectionen von $A'$ und $B'$ auf diese Richtung immer zusammen, und das Princip ist folglich auch hier gültig.

## §. 209.

Seyen wiederum zwei an sich frei bewegliche Körper $a$ und $b$ in einem Punkte mit einander verbunden; treffe daselbst der Punkt $A$ von $a$ mit dem Punkte $B$ von $b$ zusammen, und die Art der Verbindung sey irgend eine der vorhin aufgezählten. Auf die Punkte $A_1$, $A_2$,... des $a$ wirken die Kräfte $P_1$, $P_2$,... und auf die Punkte $B_1$, $B_2$,... des $b$ die Kräfte $Q_1$, $Q_2$,... und das System beider Körper sey im Gleichgewichte. Seyen, wie hierzu erfordert wird, $P$ und $Q$ die zwei in $A$ und $B$ anzubringenden Gegenkräfte, so dass jedes der drei Systeme: $P$, $P_1$, $P_2$,... 2) $Q$, $Q_1$, $Q_2$,... 3) $P$, $Q$, für sich im Gleichgewichte ist. Wird nun der eine der beiden Körper beliebig, und der andere auf irgend eine Weise so verrückt, wie es seine Verbindungsart mit dem erstern zulässt, und bezeichnen $p$, $p_1$, $p_2$,... $q$, $q_1$, $q_2$,... die dabei statt findenden virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte $A$, $A_1$, $A_2$,... $B$, $B_1$, $B_2$,... so ist nach §. 178.

$$Pp+P_1p_1+P_2p_2+\ldots=0,$$
$$Qq+Q_1q_1+Q_2q_2+\ldots=0,$$
$$\text{und } 0=Pp+Qq,$$

weil $Q=-P$, und nach vor. §. für jede Verbindungsart $p=q$ ist. Addirt man aber diese drei Gleichungen, so kommt:

$$P_1p_1+P_2p_2+\ldots+Q_1q_1+Q_2q_2+\ldots=0,$$

wodurch die Richtigkeit des Princips für zwei sich in einem Punkte begegnende Körper bewiesen ist.

Sind zwei oder mehrere Punkte $A$, $A'$,... des einen Körpers mit eben so vielen $B$, $B'$,... des andern auf irgend eine Weise verbunden, $A$ mit $B$, $A'$ mit $B'$, etc. und sind resp. $P$, $P'$,... $Q$, $Q'$,... die an ihnen beim Gleichgewichte anzubringenden Gegenkräfte; $p$, $p'$,... $q$, $q'$,... aber die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte, so führt die Bedingung, dass an jedem Körper die ursprünglichen Kräfte mit den hinzugesetzten Gegenkräften im Gleichgewichte seyn müssen, zu den zwei Gleichungen:

$$Pp+P'p'+\ldots+P_1p_1+P_2p_2+\ldots=0,$$
$$Qq+Q'q'+\ldots+Q_1q_1+Q_2q_2+\ldots=0.$$

Aus gleichem Grunde, wie vorhin, ist nun auch hier $Pp+Qq=0$, und eben so $P'p'+Q'q'=0$, etc. und man gelangt daher durch Addition der beiden Gleichungen zu derselben Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, wie vorhin.

Ist einer der beiden Körper, z. B. $b$, unbeweglich, so sind $q, q', \ldots q_1, q_2, \ldots=0$. Hiermit wird die zweite jener Gleichungen von selbst erfüllt. Weil aber stets $p=q$, $p'=q'$, etc. so sind auch $p, p', \ldots=0$. Hierdurch reducirt sich die erste Gleichung auf

$$P_1p_1+P_2p_2+\ldots=0,$$

4*

und drückt somit das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für die zuletzt gemachte Annahme aus.

## §. 210.

Auf ganz ähnliche Art lässt sich die Gültigkeit des Princips auch für ein System von drei oder mehrern mit einander verbundenen frei beweglichen Körpern darthun. Zuerst nämlich wird für jeden Körper besonders die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zwischen den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften und den an ihm in den Begegnungspunkten mit den übrigen Körpern anzubringenden Gegenkräften (§. 207.) aufgestellt. Man addirt hierauf alle diese Gleichungen, und weil je zwei zu derselben Begegnung gehörige Gegenkräfte für sich im Gleichgewichte sind, so werden sich in der erhaltenen Summe je zwei Glieder, welche zwei zusammengehörige Gegenkräfte enthalten, für sich aufheben, und mithin nur die von den ursprünglichen Kräften herrührenden Glieder zurückbleiben. Die Summe dieser Glieder, d. h. die Summe der Producte aus jeder ursprünglichen Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, wird folglich auch hier null seyn.

Sind unter den Körpern des Systems einer oder etliche unbeweglich, so ändert sich der Gang des eben angedeuteten Beweises nur dahin ab, dass man bloss für die beweglichen Körper Gleichungen aufstellt und in diesen Gleichungen die Glieder weglässt, welche die Gegenkräfte enthalten, die an den beweglichen Körpern bei den Begegnungsstellen mit den unbeweglichen anzubringen sind, indem, wie schon im vorigen §. bemerkt worden, an diesen Stellen die virtuellen Geschwindigkeiten jederzeit null sind. In der Summe aller Gleichungen heben sich dann die von den Begegnungen je zweier beweglichen herrührenden Glieder eben so, wie vorhin, paarweise auf, und man kommt wiederum zu dem Resultate, dass die Summe der in ihre virtuellen Geschwindigkeiten multiplicirten Kräfte bei jeder möglichen unendlich kleinen Verrückung des Systems null ist.

Hiermit ist das Princip für alle möglichen Arten bewiesen, nach denen Körper in beliebiger Anzahl durch unmittelbare Begegnung mit einander verbunden seyn können. Selbst biegsame Linien oder Fäden und biegsame Flächen sind davon nicht ausgeschlossen, da man eine dergleichen Linie oder Fläche als ein System unendlich kleiner unbiegsamer mit einander verbundener Körper betrachten kann.

## §. 211.

Es ist noch übrig, den umgekehrten Satz zu beweisen, dass, wenn bei jeder, der Verbindungsweise der Körper nicht widerstreitenden, Verrückung die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllt wird, die Kräfte im Gleichgewichte sind. Dieser Beweis kann nach **Laplace** *) und **Poisson** **) also geführt werden.

Wäre bei jeder möglichen Verrückung des Systems $P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0$, fände aber demungeachtet Bewegung statt und fingen dieser zufolge die Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots$ sich nach den Richtungen $A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots$ zu bewegen an, so müsste es möglich seyn, nach den entgegengesetzten Richtungen $B_1 A_1, B_2 A_2, \ldots$

*) Mécanique céleste, livre I. chap. III.

**) Traité de mécanique, sec. édit. tome I. Nro. 336.

Kräfte von passenden Intensitäten $Q_1$, $Q_2$,... an $A_1$, $A_2$,... anzubringen, wodurch diese Bewegungen aufgehoben und Gleichgewicht herbeigeführt würde. Bezeichnen daher $q_1$, $q_2$,... die bei irgend einer Verrückung des Systems nach den Richtungen von $Q_1$, $Q_2$,... geschätzten Wege von $A_1$, $A_2$,..., so müsste, wegen des Gleichgewichts zwischen $P_1$,... und $Q_1$,...,

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots = 0$$

seyn, mithin auch wegen der vorausgesetzten Gleichung:

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots = 0.$$

Dieses ist aber nicht möglich. Denn wählen wir zu den unendlich kleinen Verrückungen von $A_1$, $A_2$,... die Linien selbst, welche diese Punkte nach den Richtungen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$... wegen des nicht statt findenden Gleichgewichts im ersten Zeitelemente beschreiben sollen, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten $q_1$, $q_2$,... mit diesen Linien identisch und haben direct entgegengesetzte Richtungen von $Q_1$, $Q_2$,... Mithin wäre dann jedes der Producte $Q_1 q_1$, $Q_2 q_2$,... negativ, oder doch ein Theil derselben negativ, und die übrigen null, je nachdem entweder alle Angriffspunkte, oder nur etliche derselben sich zu bewegen anfingen. Die Summe dieser Producte könnte folglich nicht null seyn.

So einfach dieser Beweis auch ist, so scheint er mir doch in der Statik nicht wohl zulässig, indem der dabei gleich Anfangs zu Hülfe genommene Satz erst in der Dynamik volle Evidenz erhalten kann, wo nicht bloss Kräfte und deren Angriffspunkte, sondern auch die von den erstern hervorgebrachten Geschwindigkeiten der letztern in Betracht kommen. Es dürfte daher nicht überflüssig seyn, wenn ich einen Beweis hinzufüge, der, wenn gleich weniger einfach, doch dieses für sich hat, dass er bloss auf den bisher angewendeten Grundsätzen beruht.

## §. 212.

Man denke sich ein System von $n$ beweglichen Körpern $a$, $b$, $c$, ..., die mit einander und, wenn man will, noch mit andern unbeweglichen Körpern auf beliebige Weise verbunden sind. Auf diese Körper wirken die Kräfte: $P_1$, $P_2$, ... $Q_1$, $Q_2$, ... $R_1$, $R_2$, ... und $p_1$, $p_2$, ... $q_1$, $q_2$ ... $r_1$, $r_2$, ... seyen die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte. Von diesem Systeme wollen wir nun der Reihe nach folgende Sätze beweisen:

I. Wirken nur auf einen Körper $a$ des Systems Kräfte $P_1$, $P_2$, ... und ist $\Sigma P_1 p_1 = 0$, so herrscht Gleichgewicht.

**Beweis.** Die Kräfte $P_1$, $P_2$, ... sind entweder für sich im Gleichgewichte, d. h. auch dann noch, wenn $a$ von den übrigen Körpern des Systems isolirt wird; oder sie lassen sich auf eine Kraft $P$, oder auf zwei nicht weiter reducirbare Kräfte $P$, $Q$ zurückführen.

Im ersten Falle ist der zu erweisende Satz für sich klar.

Im zweiten Falle hat man bei jeder möglichen Verrückung des Körpers $a$, wenn er ganz frei ist (§. 178.), und folglich auch, wenn er durch unbewegliche Körper an seiner Beweglichkeit zum Theil gehindert ist: $\Sigma P_1 p_1 = Pp$, folglich $p = 0$; d. h. der Angriffspunkt $A$ der Kraft $P$, — ein Punkt des Körpers $a$, — ist entweder unbeweglich, oder in einer unbeweglichen, auf der Richtung von $P$ normalen Linie oder Fläche beweglich. Die Kraft $P$ kann folglich niemals den Punkt $A$ (§. 192. $a$.), also auch nicht das System, in Bewegung setzen; mithin können es auch nicht die mit $P$ gleichwirkenden $P_1$, $P_2$,...

Im dritten Falle ist $\Sigma P_1 p_1 = Pp + Qq$, und daher $Pp + Qq = 0$. Man nehme den Angriffspunkt $B$ der Kraft $Q$ unbeweglich an, so wird $q = 0$, folglich auch $p = 0$, d. h. die Kraft $P$, welche von den zweien $P$ und $Q$, bei der angenommenen Unbeweglichkeit von $B$, allein noch thätig seyn kann, vermag keine Bewegung zu erzeugen (vor. Fall). Es muss mithin möglich seyn, an $B$ eine Kraft $Q'$ anzubringen, welche, wenn $B$ wieder beweglich gesetzt und $Q$ weggelassen wird, der $P$ das Gleichgewicht hält (§. 190. III.). Hiernach ist $Pp + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich $Qq - Q'q' = 0$. Da nun $Q$ und $-Q'$ auf einen und denselben Punkt $B$ wirken und daher auf eine einzige Kraft reducirt werden können, so halten sie in Folge letzterer Gleichung einander das Gleichgewicht (vor. Fall); mithin sind auch $P$, $Q'$, $Q$, $-Q'$, d. i. $P$ und $Q$, also auch die damit gleichwirkenden $P_1$, $P_2$,... im Gleichgewichte.

II. Wenn auf zwei Körper $a$ und $b$ des Systems resp. die Kräfte $P_1$, $P_2$,... und $Q_1$, $Q_2$,... wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$ ist, so herrscht Gleichgewicht.

Beweis. Man nehme $b$ unbeweglich an, so werden $q_1$, $q_2$, ... $= 0$, und die Gleichung reducirt sich auf $\Sigma P_1 p_1 = 0$; mithin findet dann Gleichgewicht statt (I). Setzt man hierauf $b$ wieder beweglich, ohne jedoch die Kräfte $Q_1$, $Q_2$,... auf $b$ wirken zu lassen, so muss es möglich seyn, an $b$ eine oder zwei Kräfte $Q$ und $Q'$ anzubringen, wodurch das Gleichgewicht erhalten wird. Bei dem hinsichtlich seiner Beweglichkeit wieder in den anfänglichen Zustand versetzten Systeme ist daher $\Sigma P_1 p_1 + Qq + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich auch $\Sigma Q_1 q_1 - Qq - Q'q' = 0$, woraus wir schliessen, dass die auf $b$ wirkenden Kräfte $Q_1$, $Q_2$,... $-Q$, $-Q'$ für sich im Gleichgewichte sind. Da es nun auch $P_1$, $P_2$,... $Q$, $Q'$ an $a$ und $b$ sind, so können auch alle diese Kräfte in Vereinigung, d. i. $P_1$, $P_2$,... $Q_1$, $Q_2$,..., keine Bewegung des Systems hervorbringen.

III. Wenn auf drei Körper $a$, $b$ und $c$ des Systems die Kräfte $P_1$, $P_2$,...; $Q_1$, $Q_2$,... und $R_1$, $R_2$,... wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + \Sigma R_1 r_1 = 0$ ist, so findet Gleichgewicht statt.

**Beweis.** Man lasse $c$ unbeweglich werden, so werden $r_1$, $r_2$,... $= 0$, also $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$, und das System ist nach vorigem Satze im Gleichgewichte. Giebt man hierauf dem $c$ seine Beweglichkeit wieder, entfernt aber die ursprünglich auf $c$ wirkenden Kräfte $R_1$, $R_2$,..., so wird man das Gleichgewicht erhalten können, indem man an $c$ zwei Kräfte $R$ und $R'$, oder auch nur eine, anbringt. Alsdann ist folglich bei jeder Verrückung des Systems: $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + Rr + R'r' = 0$, mithin $\Sigma R_1 r_1 - Rr - R'r' = 0$. Es müssen daher an $c$ die Kräfte $R_1$, $R_2$,... $-R$, $-R'$ für sich im Gleichgewichte seyn. Hieraus aber folgt in Verbindung mit dem Gleichgewichte zwischen $P_1$, $P_2$,... $Q_1$, $Q_2$,... $R$, $R'$ das zu erweisende Gleichgewicht zwischen $P_1$, $P_2$,... $Q_1$, $Q_2$,... $R_1$, $R_2$,...

IV. Wirken auf mehrere oder alle Körper des Systems Kräfte, und besteht zwischen diesen Kräften die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, so ist das System im Gleichgewichte.

**Beweis.** In I., II. und III. wurde dieser Satz für die speciellen Fälle dargethan, wenn auf einen, zwei, oder drei Körper des Systems Kräfte wirken. Eben so aber, wie dabei von einem Körper auf zwei, und von zweien auf drei geschlossen wurde, so lässt sich von dreien auf vier u. s. w. und zuletzt auf alle Körper des Systems ein Schluss machen.

---

## §. 213.

Aus der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, insofern sie für einen einzigen frei beweglichen Körper galt, wurden in §. 182. und §. 184. durch Integration zwei Functionen abgeleitet, deren jede beim Zustande des Gleichgewichts ihren grössten oder kleinsten Werth erreichte. Da nun, wie jetzt erwiesen worden, die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten auch auf jedes System mit einander verbundener Körper anwendbar ist, so werden die dort gefundenen Functionen auch gegenwärtig Maxima oder Minima seyn.

*Es ist daher*, um nur der ersten dieser Functionen zu gedenken, *bei jedem Systeme von Körpern, welches im Zustande des Gleichgewichts sich befindet, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes* von einer unbeweglichen auf der Richtung der Kraft normalen Ebene (§. 176. Zus.), oder, was dasselbe ist, *von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum;* d. h. bei je zwei Verrückungen, von denen die eine nach dem entgegengesetzten Sinne der andern geschieht, nimmt diese Summe zugleich ab oder zugleich zu.

Wir sahen ferner (ebend.), dass je nachdem diese Summe bei der Verrückung eines freien Körpers aus der Lage des Gleichgewichts als Maximum oder Minimum sich darstellte, die Kräfte den Körper entweder in seine anfängliche Lage zurückzubringen, oder noch weiter davon zu entfernen strebten, und wir nannten hiernach das Gleichgewicht im erstern Falle sicher, im letztern unsicher. Dieselbe Eigenschaft des Gleichgewichts findet nun auch bei mehrern mit einander verbundenen Körpern statt. Einen sehr elementaren Beweis dieses Satzes, so wie des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten selbst, hat Lagrange gegeben *), indem er, von den einfachsten Eigenschaften des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden ausgehend, mit Hülfe eines solchen um Flaschenzüge gelegten Fadens alle auf die Körper wirkenden Kräfte durch eine einzige vertreten lässt. Einen ähnlichen Beweis enthält der folgende §., nur dass hier ausser den Sätzen vom Gleichgewichte an einem Faden noch die Lehre vom Mittelpunkte paralleler Kräfte zu Hülfe genommen worden ist.

## §. 214.

Auf die Punkte $A$, $A'$, $A''$,... (Fig. 52.) eines oder mehrerer auf irgend eine Weise mit einander verbundener Körper wirken die Kräfte $P$, $P'$, $P''$,... nach den Richtungen $AF$, $AF'$, $AF''$,..., so dass $F$, $F'$,... beliebig in den Richtungen genommene Punkte sind. Statt nun die Kräfte auf $A$, $A'$,... unmittelbar wirken zu lassen, wollen wir in $F$, $F'$,... unendlich kleine unbewegliche Ringe anbringen, an den beweglichen Punkten $A$, $A'$,... Fäden anknüpfen, diese resp. durch die

*) Lagrange Mécanique analytique, nouv. édit. tome I. page 23 et 71.

Ringe in $F$, $F'$... leiten und an den andern Enden $G$, $G'$,... der Fäden die Kräfte $P$, $P'$,... nach den verticalen Richtungen $FG$, $F'G'$,..., als angehängte Gewichte, wirken lassen. Denn es wird späterhin bewiesen werden, dass somit die Punkte $A$, $A'$,... eben so getrieben werden, als ob an ihnen selbst die Kräfte $P$, $P'$,... nach den Richtungen $AF$, $A'F'$,... angebracht wären. Uebrigens sollen die Punkte $G$, $G'$,... in einer horizontalen Ebene enthalten seyn, so dass, wenn sie sich um ein unendlich Weniges in verticaler Richtung auf- oder niederwärts bewegen, ihre gegenseitigen Abstände $GG'$,... als constant bleibend angesehen werden können.

Statt aber in $G$ und $G'$ die Gewichte $P$ und $P'$ anzuhängen, kann man auch $G$ und $G'$ durch eine steife gerade Linie verbinden und in dem Punkte $H$ derselben, welcher der Schwerpunkt von $P$ und $P'$ ist, ein einziges Gewicht $Q = P + P'$ anbringen. Man thue dieses, verbinde hierauf eben so die Punkte $H$ und $G''$ durch eine steife Gerade und substituire in dem Punkte $I$ dieser Geraden, welcher der Schwerpunkt der in $H$ und $G''$ befindlichen Gewichte $Q$ und $P''$ ist, statt dieser Gewichte, also statt $P$, $P'$ und $P''$, ein einziges $R = Q + P''$. Man ersetze ferner die Gewichte $R$ und $P'''$ durch ein Gewicht $S$ im Punkte $K$, welcher in einer von $I$ bis $G'''$ zu legenden steifen Geraden der Schwerpunkt von $R$ und $P'''$ ist; und auf diese Art fahre man fort, bis man zuletzt auf ein Gewicht $P_1$ gekommen, welches im Schwerpunkte $G_1$ aller ursprünglichen $P$, $P'$, $P''$,... angebracht, die Stelle derselben zu vertreten im Stande ist.

Findet nun zwischen den auf das System der Körper wirkenden Kräften $P$, $P'$... Gleichgewicht statt, und kann daher auch das mit ihnen gleichwirkende Gewicht $P_1$ keine Bewegung hervorbringen, so wird, wenn man das System auf irgend eine mit der gegenseitigen Verbindung der Körper verträgliche Weise um ein unendlich Weniges verrückt, das Gewicht $P_1$ weder sinken, noch steigen. Denn sinken kann es nicht, weil es bei seinem Bestreben zu sinken die Verrükkung, welche sein Sinken zur Folge hätte, von selbst hervorbringen würde, was dem vorausgesetzten Gleichgewichte widerstreitet. Das Gewicht kann aber auch nicht steigen, weil je zwei einander gerade entgegengesetzte Verrückungen gleich gut möglich sind, und weil es bei einer Verrückung, die derjenigen, bei welcher es steigt, entgegengesetzt ist, um eben so viel sinken würde, welches nach dem eben Bemerkten nicht möglich ist.

Die Tiefe des Gewichts $P_1$ unter irgend einer über ihm liegenden horizontalen Ebene ist daher beim Gleichgewichte im Allgemeinen entweder ein Maximum, oder ein Minimum, und zwar ersteres, wenn es, sobald das System nach demselben Sinne zu, oder nach dem gerade entgegengesetzten, noch weiter verrückt wird, zu steigen anfängt; letzteres, wenn es unter denselben Umständen zu sinken beginnt. Da es nun bei seinem fortwährenden Streben zu sinken im erstern Falle zu seiner anfänglichen grössten Tiefe wieder herabzukommen und damit das System in seine anfängliche Lage zurückzubringen strebt, im letztern dagegen sich von seinem anfänglichen höchsten Stande und damit auch das System von der Lage des Gleichgewichts immer mehr zu entfernen sucht, so ist beim Maximum der Tiefe das Gleichgewicht sicher und beim Minimum unsicher.

Setzen wir nun, dass durch eine unendlich kleine Verrückung des Systems die Punkte $A, A', \ldots G, G', \ldots H, I, \ldots G_1$ nach $a, a', \ldots g, g', \ldots h, i, \ldots g_1$ kommen, so ist zuerst klar, dass, wenn die Punkte $G, G', \ldots$ durch keine steifen Linien $GG'$, $HG'', \ldots$ mit einander verbunden, und an ihnen unmittelbar die Gewichte $P, P', \ldots$ angehängt wären, die unendlich kleinen Bewegungen $Gg$, $G'g', \ldots$ vertical seyn würden. Dies werden sie aber auch noch dann seyn, wenn die steifen Linien dem Systeme hinzugefügt und statt der Gewichte $P$, $P', \ldots$ ein einziges $P_1$ gesetzt worden. Denn durch dieses Gewicht werden die Punkte $G$, $G', \ldots$ mit denselben Kräften, wie durch die Gewichte $P$, $P_1', \ldots$, niederwärts gezogen, und wegen der rechten Winkel, welche die Fäden $FG$, $F'G', \ldots$ mit den steifen Verbindungslinien machen, wird durch diese Linien die verticale Bewegung von $G$, $G', \ldots$ nicht gehindert. Es sind demnach $Gg$, $G'g', \ldots$ folglich auch $Hh$, $Ii, \ldots$ und $G_1 g_1$ selbst vertical.

Ferner leuchtet ein, dass eben so, wie $G_1$ der Schwerpunkt der in $G$, $G', \ldots$ angebrachten Gewichte $P$, $P', \ldots$ ist, $g_1$ den Schwerpunkt derselben nach $g$, $g', \ldots$ fortgerückten Gewichte abgiebt. Hiernach, und weil $G, G', \ldots$ in einer Ebene liegen, hat man (§.108.)

$$\Sigma Gg . P = G_1 g_1 \Sigma P = G_1 g_1 . P_1 .$$

Es ist aber $AF + FG = aF + Fg =$ der constant bleibenden Länge des an $A$ befestigten Fadens, und daher $Gg = Fg - FG = AF - aF$, folglich

$$\Sigma (AF - aF) P = G_1 g_1 . P_1 .$$

Nun ist offenbar $AF - aF =$ der Verrückung $Aa$ des Punktes $A$, geschätzt nach der Richtung $AF$ der auf $A$ wirkenden Kraft $P_1$, $=$ der virtuellen Geschwindigkeit von $A$; und da nach dem vorhin Erörterten beim Gleichgewichte das in $G_1$ angehängte Gewicht $P_1$ bei jeder Verrückung in Ruhe bleibt, und daher $G_1 g_1 = 0$ ist, so ist mit letzterer Formel das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten dargethan.

Es lässt sich aber die Summe $\Sigma(AF - aF) P, = \Sigma(Fa - FA) P$ (§. 25.), auch betrachten als das Increment von $\Sigma FA . P$, d.i. von der Summe der Kräfte, nachdem jede derselben $P$ in den Abstand ihres Angriffspunktes $A$ von einem unbeweglichen in ihrer Richtung gelegenen Punkte $F$ multiplicirt worden. Das Increment dieser Summe ist daher dem Incremente $G_1 g_1$ der Tiefe des Gewichts $P_1$ proportional; und da überdies beide Incremente einerlei Zeichen haben, so ist diese Summe mit der Tiefe von $P_1$ zugleich ein Maximum oder ein Minimum, und daher ersteres beim sichern, letzteres beim unsichern Gleichgewichte des Systems, wie zu erweisen war.

---

# Drittes Kapitel.

## Anwendung der vorhergehenden Theorie auf einige Beispiele.

### §. 215.

Die Lösung der allgemeinsten Aufgabe der Statik: die Bedingungen des Gleichgewichts bei einem Systeme mit einander verbundener Körper zu finden, kommt zufolge des vorigen Kapitels auf die Bestimmung der Bedingungen hinaus, unter denen es möglich ist, Gegenkräfte in den Verbindungspunkten anzubringen, durch welche jeder Körper des Systems für sich ins Gleichgewicht gebracht wird. Man sieht aber leicht, wie diese letztern Bedingungen, und damit auch die erstern, durch Hülfe der Analysis immer gefunden werden können. Nachdem man nämlich in den Verbindungspunkten je zweier Körper zwei Gegenkräfte, als ihrer Intensität nach und auch wohl zum Theil oder ganz ihrer Richtung nach unbekannte Kräfte, in Gedanken hinzugefügt hat, stelle man für jeden einzelnen Körper die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den auf ihn unmittelbar wirkenden Kräften und den an ihm hinzugefügten Gegenkräften auf, eliminire aus diesen Gleichungen die von den Gegenkräften herrührenden unbekannten Grössen, und die somit hervorgehenden Gleichungen werden die gesuchten Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems darstellen. Nachfolgende Beispiele werden dieses Verfahren in volles Licht setzen.

## §. 216.

**Aufgabe.** Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften zu finden, welche auf vier Kugeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ wirken, von denen sich $\alpha$ und $\beta$, $\beta$ und $\gamma$, $\gamma$ und $\delta$, $\delta$ und $\alpha$ berühren.

**Auflösung.** Seyen $A$, $B$, $C$, $D$ (Fig. 53.) die Mittelpunkte von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, und $F$, $G$, $H$, $I$ die vier Berührungspunkte in der gedachten Folge, so ist $AI = AF =$ dem Halbmesser von $\alpha$, $BF = BG =$ dem Halbmesser von $\beta$, u. s. w. Ferner liegt $F$ mit $A$ und $B$ in der gemeinschaftlichen Normale der Kugeln $\alpha$ und $\beta$ bei ihrer Berührung in $F$; eben so geht die Gerade $BC$ durch $G$ und ist die Normale der sich in $G$ berührenden $\beta$ und $\gamma$, u. s. w. Die in $F$ an $\alpha$ und $\beta$

anzubringenden Gegenkräfte, oder die Pressungen, welche $\alpha$ von $\beta$ und $\beta$ von $\alpha$ in $F$ erleiden, haben demnach die Richtungen $FA$ und $FB$; die Intensität jeder derselben sey $a$, die als negativ zu betrachten ist, wenn die Richtungen den vorigen entgegengesetzt, und daher $AF$ und $BF$ sind. Auf gleiche Art sey $b$ die gemeinschaftliche Intensität der zwei in $G$ an $\beta$ und $\gamma$ nach den Richtungen $GB$ und $GC$ anzubringenden Gegenkräfte. Dasselbe bedeuten $c$ und $d$ für die Berührungen in $H$ und $I$.

An der Kugel $\alpha$ müssen nun die unmittelbar auf sie wirkenden Kräfte mit den Pressungen $d$ und $a$, welche sie in $I$ und $F$ nach den Richtungen $IA$ und $FA$ erleidet, im Gleichgewichte seyn. Da aber diese Richtungen in $A$ zusammentreffen, so müssen auch die unmittelbaren Kräfte an $\alpha$ sich zu einer durch $A$ gehenden Kraft $p$ zusammensetzen lassen. Diese Kraft $p$ muss wegen ihres Gleichgewichts mit $d$ und $a$ in der Ebene $DAB$ enthalten seyn, und es muss sich, wenn $AP$ die Richtung derselben ist, verhalten (§. 28. $c$.):

$$(\alpha)\quad d : a : p = \sin PAB : \sin DAP : \sin DAB$$

Aus gleichen Gründen müssen die drei Systeme der auf die Kugeln $\beta$, $\gamma$, $\delta$ wirkenden Kräfte einfache Resultanten $q$, $r$, $s$ haben, welche resp. durch $B$, $C$, $D$ gehen und in den Ebenen $ABC$, $BCD$, $CDA$ liegen, und es müssen, wenn $BQ$, $CR$, $DS$ die Richtungen derselben sind, die Proportionen erfüllt werden:

$$(\beta)\quad a : b : q = \sin QBC : \sin ABQ : \sin ABC$$
$$(\gamma)\quad b : c : r = \sin RCD : \sin BCR : \sin BCD$$
$$(\delta)\quad c : d : s = \sin SDA : \sin CDS : \sin CDA.$$

Nach Elimination von $a$, $b$, $c$, $d$ folgt hieraus zuerst eine Bedingungsgleichung für die Richtungen der Kräfte $p$, $q$, $r$, $s$:

$$\text{I.}\quad \frac{\sin PAB}{\sin DAP}\cdot\frac{\sin QBC}{\sin ABQ}\cdot\frac{\sin RCD}{\sin BCR}\cdot\frac{\sin SDA}{\sin CDS}=1;$$

und sodann das gegenseitige Verhältniss der Kräfte $p$ und $q$:

$$\text{II.}\quad p:q=\frac{\sin DAB}{\sin DAP}:\frac{\sin ABC}{\sin QBC},$$

und eben so durch gehöriges Vertauschen der Buchstaben die Verhältnisse $q:r$ und $r:s$.

Alles dieses zusammengefasst, hat man folgende vier Bedingungen des Gleichgewichts: 1) bei jeder der vier Kugeln müssen die auf sie wirkenden Kräfte eine durch der Kugel Mittelpunkt gehende Resultante haben; 2) jede dieser Resultanten muss mit den Mittelpunkten der zwei anliegenden Kugeln in einer Ebene enthalten seyn; 3) zwischen den Richtungen der Resultanten muss noch die Relation I., und 4) zwischen den Intensitäten derselben müssen die Verhältnisse II. bestehen.

## §. 217.

Zusätze. *a.* Ist eine der vier Kugeln, z. B. $\delta$, unbeweglich, so kommt das partielle Gleichgewicht von $\delta$ nicht mehr in Rücksicht. Von den vier Proportionen $(\alpha) \ldots (\delta)$ sind daher bloss die drei ersten zu beachten, woraus sich die Verhältnisse zwischen $p$, $q$ und $r$, wie in II. ergeben; die Bedingungsgleichung I. aber fällt weg. Auch lässt sich dann statt der Kugel $\delta$ irgend ein anderer, die Kugeln $\alpha$ und $\gamma$ berührender, unbeweglicher Körper setzen, und die Berührungspunkte mit demselben, $I$ und $H$, können auch so liegen, dass die Normalen $AI$ und $CH$ sich nicht mehr in einem Punkte $D$ treffen. Begreiflich sind dann $IAB$ und $BCH$ die Ebenen, in welche $p$ und $r$ fallen müssen, und eben so hat man in den Proportionen II. bei den Winkeln $DAB$, *DAP D* in *I* und bei *RCD*, *BCD D* in *H* zu verwandeln.

*b*. Nimmt man zwei Kugeln $\delta$ und $\gamma$ unbeweglich an, oder berühren zwei bewegliche Kugeln $\alpha$ und $\beta$ überhaupt zwei unbewegliche Flächen, oder auch nur eine, in *I* und *G*, sich selbst aber in *F*, so müssen beim Gleichgewichte die auf $\alpha$ und $\beta$ wirkenden Kräfte *p* und *q* resp. durch *A* und *B* gehen und in den Ebenen *IAB* und *ABG* liegen, und es muss sich zufolge der Proportionen ($\alpha$) und ($\beta$) verhalten:

$$p : q = \frac{\sin IAB}{\sin IAP} : \frac{\sin ABG}{\sin QBG}.$$

## §. 218.

**Aufgabe.** Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen vier Kräften *p*, *q*, *r*, *s* zu finden, welche auf die Ecken eines Vierecks *ABCD* wirken, dessen Seiten von unveränderlicher Länge, dessen Winkel aber veränderlich sind.

**Auflösung.** Ein solches Viereck ist offenbar das von den Mittelpunkten der so eben betrachteten vier Kugeln gebildete, da bei den möglichen Veränderungen der gegenseitigen Lage der Kugeln die Winkel *DAB*,... im Allgemeinen sich ändern, die Seiten *AB*,... aber constant bleiben, indem $AB =$ der Summe der Halbmesser von $\alpha$ und $\beta$, u. s. w. Die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts werden daher mit den vorhin für die Kräfte *p*,..*s* gefundenen identisch seyn. Denn obschon zwischen den Seiten des Vierecks, welches von den Mittelpunkten *A*,...*D* der vier Kugeln gebildet wird, stets die Relation $AB + CD = BC + DA$ obwaltet, so begreift man doch leicht, dass diese

5*

Eigenthümlichkeit auf die Bedingungen des Gleichgewichts keinen Einfluss haben kann.

Will man unabhängig von dem Gleichgewichte der Kugeln die jetzt vorgelegte Aufgabe lösen, so betrachte man das Viereck $ABCD$ als ein System von 8 Stücken, nämlich von 4 Punkten und 4 Linien: $A$, $AB$, $B$, $BC$, $C$, $CD$, $D$, $DA$, die in der jetzt genannten Ordnung, jedes mit dem nächstfolgenden und das letzte mit dem ersten, verbunden sind. Die 4 Kräfte $p, q, r, s$ sind nun unmittelbar an den 4 Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ angebracht, und auf die 4 Linien wirken daher bloss Pressungen, nämlich zwei auf die zwei Enden einer jeden. An jeder Linie müssen diese zwei Pressungen sich das Gleichgewicht halten und folglich einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Ist also $a$ die Pressung, welche die Linie $AB$ am Ende $A$ nach der Richtung $AB$ erfährt, so wirkt auf das andere Ende $B$ eine Pressung $a$ nach der Richtung $BA$. Gleicher Weise sey $b$ jede der beiden Pressungen auf die Enden $B$ und $C$ von $BC$, und $BC$ und $CB$ seyen ihre Richtungen; u. s. w.

Nachdem somit das Gleichgewicht der 4 Linien ausgedrückt worden, ist es noch übrig, das Gleichgewicht jedes der 4 Punkte zu berücksichtigen. — Auf den mit den Linien $DA$ und $AB$ verbundenen Punkt $A$ wirken nach dem Gesetze der Gegenkräfte zwei Pressungen $d$ und $a$ nach den Richtungen $DA$ und $BA$, und diese müssen im Gleichgewichte seyn mit der an demselben Punkte unmittelbar angebrachten Kraft $p$. Die Richtung von $p$, welche $AP$ sey, muss daher in die Ebene $DAB$ fallen, und es muss die obige Proportion ($\alpha$) statt finden. Auf ähnliche Art verhält es sich mit dem Gleichgewichte der drei übrigen Punkte

*B*, *C*, *D*, und man wird somit zu denselben Bedingungen des Gleichgewichts des ganzen Systems, wie vorhin, geführt.

## §. 219.

**Zusätze.** *a.* Sind das Viereck *ABCD* und die resp. durch *A*, *B*, *C* gehenden und in den Ebenen *DAB*, *ABC*, *BCD* enthaltenen Richtungen *AP*, *BQ*, *CR* von *p*, *q*, *r* willkührlich gegeben, so kann man mittelst der Gleichung I. die in der Ebene *CDA* durch *D* zu legende Richtung von *s* und mittelst der Proportionen II. die Verhältnisse zwischen den Intensitäten von *p*,...*s* finden.

Dasselbe lässt sich auch leicht durch Construction bewerkstelligen. Denn da am Punkte *A* die nach *DA*, *BA*, *AP* wirkenden Kräfte *d*, *a*, *p* im Gleichgewichte sind, so kann man mit einer willkührlich angenommenen Intensität von *p* durch Construction eines Parallelogramms (§. 28. *a.*) die Intensitäten von *d* und *a* finden. Am Punkte *B* sind die Kräfte *a*, *b*, *q* nach den Richtungen *AB*, *CB*, *BQ* im Gleichgewichte, und man erhält daher mit der gefundenen Intensität von *a* durch Construction eines zweiten Parallelogramms die Intensitäten von *b* und *q*. Auf gleiche Weise ergeben sich mit *b* am Punkte *C* die Intensitäten von *c* und *r*, und endlich am Punkte *D*, wo die nach ihrer Intensität und Richtung nun bekannten *c* und *d* mit *s* das Gleichgewicht halten, die Intensität und Richtung von *s*.

*b.* Da die 4 Kräfte *p*, ..*s* auch dann noch im Gleichgewichte sind, wenn die Theile des Systems, worauf sie wirken, ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, so müssen die Richtungen der Kräfte eine hyperboloidische Lage gegen einander haben, so dass jede Gerade, welche drei derselben trifft, auch der vierten begegnet (§. 99. *a*.). Hiermit lässt sich aus den Richtungen *AP*, *BQ*, *CR* die Richtung *DS*, ohne vorher die Verhältnisse zwischen den Kräften *p*, *q*, *r* und den Pressungen *a*, *b*, *c*, *d* bestimmt zu haben, folgendergestalt sehr einfach finden. — Man ziehe eine Gerade *l*, welche *AP*, *BQ*, *CR* zugleich schneidet, und sey *S* der Durchschnitt von *l* mit der Ebene *CDA*. Da nun *l* und *s* sich gleichfalls treffen müssen, und *s* in der Ebene *CDA* liegt, so ist *DS* die gesuchte Richtung von *s*.

Weil übrigens die Richtung der Kraft *s* durch die gegebenen Stücke nur auf Eine Weise bestimmt ist, so muss jede andere Gerade *l'*, welche den dreien *AP*, *BQ*, *CR* zugleich begegnet, die Ebene *CDA* in einem Punkte der *DS* treffen. Dasselbe folgt auch leicht aus der Natur des hyperbolischen Hyperboloids. Eine solche Fläche kann nämlich auf doppelte Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden (§. 99. *a*), so dass es zwei Systeme von Geraden giebt, deren jedes die ganze Fläche erfüllt. Jede Gerade folglich, welche drei Gerade des einen Systems trifft, schneidet auch alle übrigen Geraden desselben Systems und gehört zu den Geraden des andern Systems. Nun wird offenbar jede der drei Geraden *AC*, *BD*, *l* von jeder der 4 Geraden *AP*, *BQ*, *CR*, *DS* geschnitten. Nimmt man daher erstere drei als 3 Gerade des einen Systems, so gehören letztere vier zu dem andern Systeme. Jede andere Gerade *l'*, welche *AP*, *BQ*, *CR* zugleich schneidet, gehört daher zum ersten Systeme und schneidet folglich auch die vierte Gerade *DS* des zweiten Systems, d. h. sie trifft die Ebene *CDA* in einem Punkte der *DS*.

*c*. Seyen *P* und *R* die Punkte, in denen *BD* von den in den Ebenen *DAB* und *BCD* liegenden *AP* und $CR$ geschnitten wird, und eben so werde $AC$ von $BQ$ und $DS$ in $Q$ und $S$ geschnitten. Da also die vier hyperboloidisch gelegenen $AP$, $BQ$, $CR$, $DS$ der $AC$ in $A$, $Q$, $C$, $S$ und der $BD$ in $P$, $B$, $R$, $D$ begegnen, so verhält sich (§. 102. ($c$)):

$$\text{I.}^* \quad \frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{PB}{BR} : \frac{PD}{DR} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD},$$

d. h. $AC$ wird von den Richtungen der $q$, $s$ nach demselben Doppelverhältnisse, wie $BD$ von den Richtungen der $p$, $r$, getheilt. Und auch hiermit kann man, wenn von den Richtungen der Kräfte irgend drei, also 3 der 4 Punkte $P$, $Q$, $R$, $S$ gegeben sind, den vierten Punkt und damit die Richtung der vierten Kraft finden. — Uebrigens ergiebt sich diese Proportion auch unmittelbar aus der Gleichung I. Denn es verhält sich:

$$\sin PAB : \sin DAP = \frac{BP}{AB} : \frac{PD}{AD}.$$

Aehnlicherweise kann man auch die übrigen Verhältnisse in I. ausdrücken, und wenn man alle diese Verhältnisse verbindet, so kommt man auf die Proportion I*. zurück.

Nach §. 102. hat man ferner für das Verhältniss der Kräfte $p$ und $q$:

$$\frac{p}{AP} : \frac{q}{BQ} = \frac{QC}{AC} : \frac{PD}{BD}.$$

Dasselbe Verhältniss folgt auch aus den Proportionen II. Denn weil

$$\sin DAB : \sin DAP = \frac{BD}{AB} : \frac{PD}{AP},$$

$$\text{und } \sin ABC : \sin QBC = \frac{AC}{AB} : \frac{QC}{QB},$$

so verhält sich nach II.

$$\text{II}^\circ.\ p:q = \frac{BD \cdot AP}{PD} : \frac{AC \cdot QB}{QC},$$

übereinstimmend mit dem Vorigen.

*d.* Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften $p, \ldots s$ am Vierecke $ABCD$ können, wie man leicht wahrnimmt, auch folgendergestalt ausgesprochen werden: 1) Hinsichtlich der Richtungen und Intensitäten der 4 Kräfte müssen dieselben Bedingungen erfüllt seyn, als wenn die Kräfte an einem einzigen Körper angebracht wären; insbesondere muss daher jede Gerade, welche 3 der 4 Richtungen trifft, auch der vierten begegnen. 2) Zwei solcher Geraden müssen die zwei Diagonalen des Vierecks seyn, und es müssen daher in der einen dieser Geraden die Angriffspunkte der ersten und dritten Kraft, in der andern die der zweiten und vierten Kraft liegen.

Hat man also vier Kräfte $p$, $q$, $r$, $s$, die sich an einem einzigen Körper das Gleichgewicht halten, so ziehe man zwei Gerade, deren jede dreien dieser Kräfte, und folglich auch immer der vierten, begegnet. Die Begegnungspunkte der einen Geraden mit $p$, $q$, $r$, $s$ seyen resp. $A$, $Q$, $C$, $S$, die der andern Geraden: $P$, $B$, $R$, $D$. Man nehme nun die vier Kräfte in beliebiger Folge und wähle zu den Angriffspunkten der ersten und dritten die Durchschnitte ihrer Richtungen mit der einen, und zu den Angriffspunkten der zweiten und vierten Kraft die Durchschnitte ihrer Richtungen mit der andern Geraden. Alsdann wird nicht allein bei vollkommener gegenseitiger Unbeweglichkeit der 4 Punkte Gleichgewicht statt finden, sondern auch dann noch, wenn man die Punkte in derselben Ordnung, in welcher man die auf sie wirkenden Kräfte genommen hat, jeden mit dem nächstfolgenden und den letzten mit dem ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte $p, q, r, s$ am Vierecke $ABCD$ sowohl, als am Vierecke $PQRS$, die Kräfte $p, q, s, r$ an jedem der beiden Vierecke $ABSR$ und $PQDC$, und die Kräfte $p, r, q, s$ an den Vierecken $ARQD$ und $PCBS$ im Gleichgewichte.

## §. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck $ABCD$ ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen $DAB$, $ABC$, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $p, .. s$ mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ mit jener Axe und $a$, $b$, $c$, $d$ die Pressungen, welche dieselben Linien $AB, \ldots$ resp. in den Enden $A$, $B$, $C$, $D$ nach den Richtungen $AB$, $BC, \ldots$ erleiden, also $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ die Pressungen auf die andern Enden $B$, $C$, $D$, $A$ der Linien $AB, \ldots$ nach denselben Richtungen $AB, \ldots$. Auf den Punkt $A$ wirken demnach die Kräfte $p$, $-a$, $d$ nach Richtungen, welche mit der Axe die Winkel p, a, d machen, und man hat folglich, weil diese Kräfte sich an $A$ das Gleichgewicht halten müssen, die 2 Gleichungen (§. 41.):

$$p \cos \mathrm{p} - a \cos \mathrm{a} + d \cos \mathrm{d} = 0,$$
$$p \sin \mathrm{p} - a \sin \mathrm{a} + d \sin \mathrm{d} = 0;$$

und wenn man daraus das einemal die Pressung $d$, das anderemal die Pressung $a$ eliminirt:

$$p \sin(\mathrm{p}-\mathrm{d}) - a \sin(\mathrm{a}-\mathrm{d}) = 0,$$
$$p \sin(\mathrm{p}-\mathrm{a}) - d \sin(\mathrm{a}-\mathrm{d}) = 0.$$

Eben so bekommt man für das Gleichgewicht der Kräfte $q$, $-b$, $a$ am Punkte $B$ die zwei Gleichungen:

$$q \sin(\mathrm{q}-\mathrm{a}) - b \sin(\mathrm{b}-\mathrm{a}) = 0,$$
$$q \sin(\mathrm{q}-\mathrm{b}) - a \sin(\mathrm{b}-\mathrm{a}) = 0,$$

und gleicher Weise noch zwei Paare von Gleichungen fürs Gleichgewicht an $C$ und $D$. Aus diesen 8 Gleichungen sind nun die 4 Pressungen $a$, $b$, $c$, $d$ noch wegzuschaffen. Die Elimination von $a$ giebt:

$$\frac{p \sin(\mathrm{p}-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})} = \frac{q \sin(\mathrm{q}-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{b}-\mathrm{a})},$$

und eben so findet sich nach Elimination von $b$, $c$, $d$:

$$\frac{q \sin(\mathrm{q}-\mathrm{a})}{\sin(\mathrm{b}-\mathrm{a})} = \frac{r \sin(\mathrm{r}-\mathrm{c})}{\sin(\mathrm{c}-\mathrm{b})}, \quad \frac{r \sin(\mathrm{r}-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{c}-\mathrm{b})} = \frac{s \sin(\mathrm{s}-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{d}-\mathrm{c})}$$
$$\frac{s \sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\sin(\mathrm{d}-\mathrm{c})} = \frac{p \sin(\mathrm{p}-\mathrm{a})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})}.$$

In diesen 4 Gleichungen sind also die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts enthalten, — ganz übereinstimmend mit den oben gefundenen I. und II.

Sind an den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ ausser den Kräften $p, .. s$ noch resp. die Kräfte $p'$, $q'$, $r'$, $s'$ angebracht, welche mit der in der Ebene gezogenen Axe die Winkel p′ q′ r′ s′ bilden, so hat man nur in vorigen Gleichungen statt $p \sin \mathrm{p}$, $p \cos \mathrm{p}$ etc. resp. $p \sin \mathrm{p} + p' \sin \mathrm{p}'$,

$p\cos\mathrm{p}+p'\cos\mathrm{p}'$, etc. zu setzen, und es werden damit die 4 Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\frac{p\sin(\mathrm{p}-\mathrm{d})+p'\sin(\mathrm{p}'-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})}=\frac{q\sin(\mathrm{q}-\mathrm{b})+q'\sin(\mathrm{q}'-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{b}-\mathrm{a})}, \text{etc.}$$

und auf ähnliche Weise sind die Formeln umzubilden, wenn noch mehrere Kräfte an den Punkten $A,..D$ angebracht seyn sollten.

## §. 221.

Da die Formeln I. und II. auch für das ebene Viereck gelten, so müssen auch bei diesem aus den willkührlich angenommenen Richtungen dreier der 4 Kräfte $p,..s$ die Richtung der vierten und die Verhältnisse zwischen den Intensitäten bestimmt werden können. Die in §. 219. *b.* gegebene graphische Methode, wenn bloss die Richtung der vierten Kraft gefunden werden soll, wird zwar jetzt unbrauchbar; indessen lässt sich dafür eine andere substituiren, die hinwiederum eben so wenig Anwendung findet, sobald das Viereck nicht mehr in einer Ebene begriffen ist.

Da nämlich am Punkte $A$ die Kräfte $p, d, a$ nach den Richtungen $AP$, $DA$, $BA$, und am Punkte $B$ die Kräfte $q$, $a$, $b$ nach den Richtungen $BQ$, $AB$, $CB$ im Gleichgewichte sind, so herrscht auch zwischen sämmtlichen 6 Kräften, also auch, weil $a$ und $a$ sich gegenseitig aufheben, zwischen $p$, $q$ und den nach $DA$, $CB$ gerichteten $d$, $b$ Gleichgewicht. Es muss folglich, sobald wir uns die Theile des Vierecks als ein fest zusammenhängendes Ganzes denken, die Resultante von $p$ und $q$ mit der Resultante der nach $AD$ und $BC$ gerichteten $d$ und $a$ identisch seyn. Diese gemeinsame Resultante geht mithin durch den Schneidepunkt der Richtungen von $p$ und $q$, welcher $T$ (Fig. 53.*) sey, und durch den Schneidepunkt $X$ der Linien $AD$ und $BC$. Da endlich $p$, $q$, $r$, $s$ im Gleichgewichte sind, und daher die Resultante von $r$ und $s$ der Resultante von $p$ und $q$ direct entgegengesetzt ist, so muss auch der Durchschnitt $U$ der Richtungen von $r$ und $s$ in die Gerade $TX$ fallen.

Sind demnach das ebene Viereck $ABCD$ und die durch $A$, $B$, $C$ gehenden und in der Ebene des Vierecks enthaltenen Richtungen der Kräfte $p$, $q$, $r$ gegeben, so verlängere man $AD$, $BC$ bis zu ihrem Durchschnitte $X$, und $p$, $q$ bis zu ihrem Durchschnitte $T$, ziehe die Gerade $TX$, welche von $r$ in $U$ getroffen werde, und es wird $DU$ die gesuchte Richtung von $s$ seyn.

## §. 222.

Zusätze. *a.* Eben so, wie bewiesen worden, dass die Durchschnitte $X$ von $DA$ mit $BC$, $T$ von $p$ mit $q$, $U$ von $r$ mit $s$ in einer Geraden enthalten sind, so müssen auch die Durchschnitte $Y$ von $AB$ mit $CD$, $V$ von $s$ mit $p$, $W$ von $q$ mit $r$ in einer Geraden liegen. Man kann daher aus den gegebenen Richtungen von $p$, $q$, $r$ die Richtung von $s$ auch dergestalt finden, dass man die damit und mit dem Vierecke gegebenen Punkte $W$ und $Y$ durch eine Gerade verbindet. Wird diese Gerade von $p$ in $V$ geschnitten, so ist $DV$ die gesuchte Richtung von $s$.

*b.* Von dem Vierecke $UVTW$, welches die vier Kräfte bilden, gehen demnach die Diagonalen $TU$ und $VW$ durch die Durchschnitte $X$ und $Y$ je zweier gegenüberstehender Seiten des Vierecks $ABCD$, auf dessen Ecken die Kräfte wirken. Nächstdem folgt hieraus der geometrische Satz:

Wird um ein ebenes Viereck $ABCD$ in seiner Ebene ein anderes $UVTW$ dergestalt beschrieben, dass die eine Diagonale $TU$ des letztern durch den Durchschnitt $X$ des einen Paars gegenüberliegender Seiten des erstern geht, so trifft auch die andere Diagonale $VW$ des letztern den Durchschnitt $Y$ des andern Paars gegenüberliegender Seiten des erstern.

*c*. Eben so, wie in §. 219. *d*., so sind auch hier, wo die Figur eben ist, am Vierecke $PQRS$ die Kräfte $p$, $q$, $r$, $s$, am Vierecke $ABSR$ die Kräfte $p$, $q$, $s$, $r$ u. s. w. im Gleichgewichte. Der dort geführte Beweis ist zwar hier nicht mehr anwendbar, da er Vierecke, welche nicht eben sind, voraussetzt. Man kann sich aber von dem Gleichgewichte der jetzt ebenen Vielecke folgender Weise leicht überzeugen. — Die auch hier geltende Proportion I.* giebt zu erkennen, dass die zwei Reihen von Punkten $A$, $Q$, $C$, $S$ und $P$, $B$, $R$, $D$ in eine solche Lage gegen einander gebracht werden können, bei welcher die vier Geraden $AP$, $QB$, $CR$, $SD$ sich in einem Punkte schneiden *). Als nothwendige und hinreichende Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften, welche auf die Ecken des ebenen Vierecks $ABCD$ wirken, lassen sich daher folgende zwei angeben: 1) Die Kräfte müssen in der Ebene des Vierecks enthalten seyn und sich darin unter der Annahme, dass die Gestalt des Vierecks unveränderlich ist, das Gleichgewicht halten. 2) Die zwei Diagonalen des Vierecks müssen in eine solche Lage gegen einander gebracht werden können, dass die vier Geraden sich in einem Punkte schneiden, welche die vier Punkte der einen Diagonale, in denen sie von den vier

*) Steiner Systemat. Entwickelung pag. 51.

Kräften getroffen wird, mit den entsprechenden Punkten der andern verbinden.

Sind daher die Kräfte $p$, $q$, $r$, $s$ am Vierecke $ABCD$ im Gleichgewichte, so sind es auch die Kräfte $p$, $q$, $s$, $r$ am Vierecke $ABSR$. Denn von $p$, $q$, $s$, $r$ werden die Diagonalen $AS$ und $BR$ des letztern Vierecks resp. in $A$, $Q$, $S$, $C$ und $P$, $B$, $D$, $R$ getroffen. Dass aber diese zwei Reihen von Punkten in die verlangte Lage sich bringen lassen, folgt aus dem vorausgesetzten Gleichgewichte am Vierecke $ABCD$.

*d*. Da am Vierecke $ABSR$ vier nach $AP$, $BQ$, $DS$, $CR$ gerichtete Kräfte im Gleichgewichte seyn können, so muss nach *b*. der Durchschnitt der zwei gegenüberliegenden Seiten $RA$ und $BS$, oder der Punkt $RA \cdot BS$, wie wir der Kürze willen den Durchschnitt zweier Linien bezeichnen wollen, mit den Punkten $AP \cdot BQ$ und $RC \cdot SD$, d. i. mit $T$ und $U$, in einer Geraden liegen, und eben so der Punkt $AB \cdot SR$ mit den Punkten $BQ \cdot SD$ und $AP \cdot RC$ in einer Geraden seyn. — Auf gleiche Art liegt wegen des Gleichgewichts am Vierecke $PQRS$ der Punkt $PS \cdot QR$ in der Geraden $TU$ und der Punkt $QP \cdot RS$ in der Geraden $VW$.

Man sieht, wie somit das Gleichgewicht der Vierecke $PQRS$, $ABSR$, etc. zur Entdeckung noch mehrerer Relationen der Figur Veranlassung giebt.

## §. 223.

Bei der uns jetzt beschäftigenden Aufgabe dürften noch folgende besondere Fälle eine Erwähnung verdienen.

1) Wenn die auf $B$ und $D$ wirkenden Kräfte $q$

und $s$ sich in einem Punkte der Diagonale $AC$ begegnen, und daher $S$ mit $Q$ zusammenfällt, so wird

$$AQ : QC = AS : SC, \text{ mithin}$$

zufolge I*. auch.... $BP : PD = BR : RD$;

es fallen daher auch $P$ und $R$ zusammen, d. h. die auf $A$ und $C$ wirkenden Kräfte $p$ und $r$ schneiden sich alsdann in einem Punkte der Diagonale $BD$.

Dasselbe folgt, wenn das Viereck kein ebenes ist, schon daraus, dass sich die Kräfte, wie an einem einzigen Körper, das Gleichgewicht halten müssen. Denn fällt $S$ mit $Q$ zusammen, so haben $s$ und $q$ eine durch $Q$ gehende Resultante. Mithin müssen sich auch $p$ und $r$ zu einer, dieser Resultante gleichen und entgegengesetzten Kraft vereinigen lassen, und folglich in einer Ebene liegen. Schneidet nun diese Ebene die Diagonale $BD$ im Punkte $P$, so sind, weil $p$ und $r$ resp. in den Ebenen $DAB$ und $BCD$ liegen müssen, $AP$ und $CP$ die Richtungen von $p$ und $r$.

2) Ist das Viereck ein ebenes, und gehen die Richtungen dreier der vier Kräfte durch den Durchschnitt $Z$ der Diagonalen, so muss nach vorigem Satze auch die Richtung der vierten diesen Durchschnitt treffen. Alsdann sind $p$ und $r$, so wie $q$ und $s$ einander direct entgegengesetzt, die 4 Punkte $P$, $Q$, $R$, $S$ coincidiren mit $Z$ und es verhalten sich nach II*:

$$p : q = \frac{AZ \cdot ZC}{AC} : \frac{BZ \cdot ZD}{BD},$$

$$\text{oder: } \frac{1}{p} : \frac{1}{q} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{ZC} : \frac{1}{BZ} + \frac{1}{ZD},$$

und eben so $\frac{1}{q} : \frac{1}{r} = \frac{1}{BZ} + \frac{1}{ZD} : \frac{1}{CZ} + \frac{1}{ZA}$.

Die entgegengesetzten Kräfte $p$ und $r$ sind daher einander gleich, und eben so müssen auch $q$ und $s$ einander gleich seyn.

Diese Gleichheit fliesst unmittelbar auch aus der nöthigen Fortdauer des Gleichgewichts, wenn die gegenseitige Lage von $A$, $B$, $C$, $D$ ganz unveränderlich angenommen wird. Ueberhaupt folgt daraus, dass, wenn drei der vier Kräfte sich in einem Punkte schneiden, auch die vierte diesen Punkt treffen muss. Wird nun der Schneidepunkt der Diagonalen zu diesem Punkte genommen, so fallen die Kräfte $p$, $r$, also auch ihre Resultante, in die Diagonale $AC$, und die Kräfte $q$, $s$, so wie ihre Resultante, in die Diagonale $BD$. Diese zwei Resultanten können aber nicht anders im Gleichgewichte seyn, als wenn jede von ihnen null ist; mithin müssen $p$ und $r$, und eben so $q$ und $s$ einander gleich und direct entgegengesetzt seyn.

3) Ist das Viereck ein Parallelogramm, so wird das Verhältniss der nach dem Mittelpunkt desselben gerichteten Kräfte:

$$(p = r) : (q = s) = AC : BD.$$

## §. 224.

Auf ganz ähnliche Art, wie bei einem Vierecke, lassen sich auch bei einem mehrseitigen Vielecke, dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind, die Bedingungen ausdrücken, denen Kräfte, an den Ecken des Vielecks angebracht, beim Gleichgewichte unterworfen seyn müssen. Es muss nämlich jede Kraft besonders mit den zwei Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche die Ecke des Vielecks, auf welche die Kraft zunächst wirkt, von den zwei anliegenden Seiten erleidet, und an jeder Seite müssen sich die zwei Pressungen auf die Enden der Seite das Gleichgewicht halten. Hieraus fliessen aber die Bedingungen: dass 1) jede Kraft mit den zwei anliegenden Seiten in einer Ebene enthalten seyn muss, und dass 2), wenn jede Kraft nach den zwei anliegenden Seiten in zwei zerlegt wird, je zwei der somit entstehenden Kräfte, welche auf die beiden Enden einer Seite wirken, einander gleich und entgegengesetzt seyn müssen.

Sind daher das Vieleck und die Richtungen der Kräfte, bis auf eine, gegeben, so kann man eben so, wie in §. 219. *a.*, die noch übrige Richtung und die Verhältnisse sämmtlicher Kräfte zu einander bestimmen.

Wird bloss die noch fehlende Richtung verlangt, und ist das Vieleck in einer Ebene enthalten, so kann man ähnlicher Weise, wie in §. 221., die Richtung auch durch blosses Ziehen gerader Linien finden, woraus, da dieses immer auf mehrfache Art sich bewerkstelligen lässt, neue geometrische Sätze, das Liegen von Punkten in Geraden betreffend, hervorgehen.

Seyen z. B. das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 54.) und die Richtungen der auf $A$, $B$, $C$, $D$ wirkenden Kräfte $p$, $q$, $r$, $s$ gegeben, und werde die Richtung der an $E$ anzubringenden Kraft $t$ gesucht. Bezeichnet man der Kürze willen die Resultante von $p$ und $q$ mit $(pq)$, die Resultante von $p$, $q$, $r$ mit $(pqr)$, u. s. w., so geht aus ähnlichem Grunde, wie beim Vierecke in §. 221.,

$(pq)$ durch die Punkte $p \cdot q$ und $EA \cdot BC$,
$(pqr)$ — — — $(pq) \cdot r$ und $EA \cdot CD$,
$(pqrs)$, also auch $t$, — — — $(pqr) \cdot s$ und $E$.

Hiermit kann man also nach und nach die Richtungen von $(pq)$, $(pqr)$ und $t$ durch Ziehen von Geraden finden. Auch kann man umgekehrt zuerst $(sr)$, hieraus $(srq)$ und hieraus $(srqp)$ oder $t$ bestimmen.

Ein noch anderes Verfahren besteht darin, dass man eben so, wie $(pq)$, noch $(qr)$ und $(rs)$ sucht, hierauf $(pqr)$ durch $(pq)\cdot r$ und $p\cdot(qr)$, und $(qrs)$ durch $(qr)\cdot s$ und $q\cdot(rs)$ legt, und endlich zwei der drei Punkte $(pqr)\cdot s$, $(pq)\cdot(rs)$, $p\cdot(qrs)$ bestimmt. Denn diese drei Punkte sind in der gesuchten Richtung von $t$ oder $(pqrs)$ enthalten.

Die aus diesen verschiedenartigen Constructionen sich ergebenden geometrischen Sätze mit Worten auszudrücken, bleibe dem Leser überlassen.

Sehr bemerkenswerth ist es noch, dass man zu dergleichen geometrischen Sätzen auch schon durch Betrachtung eines einzigen Körpers und durch Zuhülfenahme des einzigen Satzes gelangen kann, dass sich von drei in einer Ebene liegenden und sich in einem Punkte schneidenden Geraden die eine, welche man will, als die Richtung der Resultante zweier nach den beiden andern Geraden wirkenden Kräfte ansehen lässt.

Sind also z. B. $p, q, r, s$ irgend vier in einer Ebene enthaltene Gerade, und legt man durch die Punkte $p\cdot q$, $q\cdot r$, $r\cdot s$ in derselben Ebene willkührlich drei andere Gerade $(pq)$, $(qr)$, $(rs)$, so kann man letztere immer als die Richtungen der Resultanten von Kräften betrachten, welche die Richtungen von $p$ und $q$, etc. haben. Hieraus kann man, wie vorhin, die Resultanten $(pqr)$ und $(qrs)$ bestimmen und damit 3 Punkte finden, deren jeder in der Resultante aller 4 Kräfte liegen muss, also 3 Punkte, die in einer Geraden sind. Der hieraus entspringende geometrische Satz führt übrigens, gleich dem in §. 222. *b.*, und wie Fig. 55. zeigt, auf ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Vieleck, von welchem letzteren die Diagonalen durch die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des erstern gehen.

§. 225.

**Aufgabe.** Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen 4 Kräften $P$, $Q$, $R$, $S$ zu finden, welche auf die Seiten eines Vierecks $ABCD$ wirken, (Fig. 56.), dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind.

**Auflösung.** Seyen $F$, $G$, $H$, $I$ die in den Seiten $AB$, $BC$, etc. gelegenen Angriffspunkte der Kräfte, und $FK$, $GL$, $HM$, $IN$ die Richtungen der letztern. Beim Gleichgewichte des Systems wirken nun auf die Seiten $DA$ und $AB$ im Punkte $A$, in welchem sie mit einander verbunden sind, zwei einander gleiche und entgegengesetzte Pressungen, welche resp. $n$ und $-n$ heissen. Desgleichen wirken auf $AB$ und $BC$ in $B$ zwei einander gleiche und entgegengesetzte Pressungen $k$ und $-k$. Da nun an jedem Theile des Systems die auf ihn wirkenden Kräfte und Pressungen für sich im Gleichgewichte sind, so halten an der Linie $AB$ die Pressungen $-n$ und $k$ der Kraft $P$ das Gleichgewicht, und es müssen daher die Richtungen der beiden erstern der Richtung der letztern in einem und demselben Punkte begegnen. Sey $K$ dieser Punkt, so fallen $-n$ und $k$, also auch $n$ und $-k$, in $AK$ und $BK$, und es erhellet aus gleichem Grunde, dass $AK$ der $IN$ in einem Punkte $N$, und $BK$ der $GL$ in einem Punkte $L$ begegnen muss, und dass $DN$ und $CL$ sich in einem Punkte $M$ der $HM$ schneiden müssen. Die auf die Seiten $BC$ und $CD$ in $C$ wirkenden Pressungen fallen alsdann in $LM$, und die Pressungen auf die Seiten $CD$ und $DA$ in $D$ fallen in $MN$.

Die 1ste Bedingung des Gleichgewichts beruht demnach auf der Möglichkeit, ein Viereck $KLMN$ zu verzeichnen, dessen Seiten durch die Ecken des Vierecks $ABCD$ gehen, und dessen Ecken in den Richtungen $FK$, $GL$,... der Kräfte liegen. — Denkt man sich das Viereck $ABCD$ und die Richtungen $FK$,... gegeben, und ist die Figur in einer Ebene enthalten, so führt die Forderung, das Viereck $KLMN$ zu beschreiben, zu einer Gleichung des zweiten Grades und ist daher im Allgemeinen entweder auf doppelte Weise, oder gar nicht erfüllbar. Ist aber die Figur nicht eben, so ist die Construction von $KLMN$ nur bei gewissen speciellen Lagen der Richtungen $FK$,... gegen das Viereck $ABCD$ möglich. Da ferner durch Zerlegung der durch die Ecken des Vierecks $KLMN$ gehenden Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S$ nach den Seiten desselben Vierecks die auf $A$, $B$, $C$, $D$ wirkenden Pressungen sich ergeben, — z. B. durch Zerlegung der nach $FK$ gerichteten Kraft $P$ nach den Seiten $NK$ und $KL$ die Pressungen $n$ und $k$, — und da je zwei dieser Pressungen, welche in dieselbe Seite fallen, sich gegenseitig aufheben, so ist die zweite Bedingung des Gleichgewichts: dass, wenn man die Seitenlängen des Vierecks $KLMN$ constant und die Winkel desselben veränderlich annimmt, die Kräfte $P$,..$S$, an den Spitzen dieses Vierecks angebracht, im Gleichgewichte sind. Es müssen daher (§. 219. *d.*)

2) wenn die gegenseitige Lage der Theile, worauf die Kräfte wirken, unveränderlich angenommen wird, die Kräfte im Gleichgewichte seyn; und diese Bedingung reicht hin, wenn das Viereck $KLMN$ nicht eben ist. Denn die alsdann noch nöthige Bedingung, dass die Richtungen $FK$, $GL$,... resp. in die Ebenen

$NKL$, $KLM$,... fallen, ist hier bereits erfüllt, da $FK$ in der Ebene $AKB$, also auch in der Ebene $NKL$ liegt, u. s. w. Wenn aber das Viereck $ABCD$ und die darauf wirkenden Kräfte, folglich auch das Viereck $KLMN$, in einer Ebene enthalten sind, so müssen

3) die Diagonalen des von den Kräften gebildeten Vierecks die Durchschnitte der gegenüberstehenden Seiten des Vierecks $KLMN$ treffen. (§. 221.)

Dass diese Bedingungen des Gleichgewichts jederzeit hinreichen, leuchtet ein. Denn sind die Kräfte am Vierecke $KLMN$, auf dessen Ecken sie wirken, im Gleichgewichte, so sind sie es zu Folge des zu Anfange dieses §. Gesagten, auch dann, wenn sie an den Seiten irgend eines in $KLMN$ einbeschriebenen Vierecks da, wo sie dieselben treffen, angebracht werden.

## §. 226.

Wir wollen jetzt die Bedingungen dieses Gleichgewichts am Vierecke durch Gleichungen auszudrücken suchen, dabei jedoch nur den Fall berücksichtigen, wenn das Viereck und die Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten sind. Am einfachsten werden wir hierbei verfahren, wenn wir die an den Seiten angebrachten Kräfte in andere verwandeln, welche auf die Spitzen wirken. Denn hierdurch werden wir in den Stand gesetzt, von den bereits in §. 220. erhaltenen Formeln unmittelbaren Gebrauch zu machen.

Sey zu dem Ende $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $AF = a_1$, $FB = a_2$, $BG = b_1$, $GC = b_2$, etc. also $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, etc. Man zerlege nun die in $F$ angebrachte Kraft $P$ in zwei mit ihr parallele auf die Endpunkte $A$, $B$ der Seite

$AB$ wirkende Kräfte $\frac{a_2}{a}P$ und $\frac{a_1}{a}P$ (§. 26. *c*.). Eben so setze man statt der in $I$ angebrachten Kraft $S$ zwei ihr parallele auf $D$ und $A$ wirkende Kräfte $\frac{d_2}{d}S$ und $\frac{d_1}{d}S$, und verfahre auf gleiche Art mit den Kräften $Q$ und $R$.

Werden daher noch die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S$ und die Linien $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ mit einer willkührlich in der Ebene gezogenen Axe machen, resp. mit P, Q, R, S und a, b, c, d bezeichnet, so wirken jetzt auf $A$ die zwei Kräfte $S\frac{d_1}{d}$ und $P\frac{a_2}{a}$ nach den durch die Winkel S und P bestimmten Richtungen, auf $B$ die Kräfte $P\frac{a_1}{a}$ und $Q\frac{b_2}{b}$ nach den durch P und Q bestimmten Richtungen etc., und hat man zu Folge der Gleichung am Ende von §. 220., wenn statt der dortigen Kräfte $p, p', q, q'$ resp. $S\frac{d_1}{d}, P\frac{a_2}{a}, P\frac{a_1}{a}, Q\frac{b_2}{b}$, und statt der dortigen Winkel p, p′, q, q′ resp. S, P, P, Q gesetzt werden:

$$S\frac{d_1}{d}\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})}+P\left(\frac{a_2}{a}\frac{\sin(\mathrm{P}-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})}+\frac{a_1}{a}\frac{\sin(\mathrm{P}-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{b})}\right)$$
$$+Q\frac{b_2}{b}\frac{\sin(\mathrm{Q}-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{b})}=0,$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, welche auch schon aus dieser durch gehörige Verwandlung der Buchstaben in die nächstfolgenden hervorgehen und mit ihr die Bedingungen des Gleichgewichts ausmachen.

Da in diesen vier Gleichungen nicht die Seiten des

Vierecks selbst, sondern nur die Winkel derselben unter sich und mit den Kräften, so wie die Verhältnisse vorkommen, nach denen die Seiten durch die Angriffspunkte der Kräfte getheilt werden, so erhellet, dass, wenn auf die jetzt in Rede stehende Weise Gleichgewicht an einem Vierecke statt findet, dieselben Kräfte auch an jedem andern Vierecke im Gleichgewichte seyn werden, welches dem erstern nicht ähnlich, sondern mit ihm nur gleichwinklig ist, und dessen Seiten mit den Kräften dieselben Winkel, wie im erstern, machen und von den Angriffspunkten nach denselben Verhältnissen, wie im erstern, getheilt werden.

Aus allen vier Gleichungen lassen sich die vier Kräfte eliminiren, und man bekommt damit eine Gleichung, mittelst welcher, wenn z. B. das Viereck, die Angriffspunkte in den Seiten desselben und die Richtungen dreier Kräfte gegeben sind, die Richtung der vierten gefunden werden kann. Es drückt diese Gleichung die Bedingung aus, unter welcher das Viereck $KLMN$, welches um das Viereck $ABCD$ und in das von den Kräften gebildete Viereck möglichen Falles beschrieben werden kann, eine solche Lage hat, dass die Durchschnitte seiner gegenüberstehenden Seiten in die Diagonalen des Vierecks der Kräfte fallen. — Die gegenseitigen Verhältnisse zwischen den 4 Kräften können dann gleichfalls bestimmt werden.

## §. 227.

Zum Beschlusse der Untersuchungen über das Gleichgewicht am Vierecke mögen noch einige merkwürdige specielle Fälle folgen, die aber so einfach sind, dass, um sie zu beurtheilen, es angemessener seyn wird, zu den Principien selbst zurückzukehren, als von den zuletzt entwickelten Formeln Gebrauch zu machen.

**Aufgabe.** Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften $P$ und $R$ zu finden, welche in $F$ und $H$ (Fig. 57.) an zwei gegenüberliegenden Seiten $AB$ und $CD$ eines Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln angebracht sind.

**Auflösung.** Weil an der Seite $DA$ keine Kraft angebracht ist, so müssen sich die auf $DA$ in $D$ und $A$ wirkenden Pressungen allein das Gleichgewicht halten, und ihre Richtungen müssen daher in $DA$ fallen. Die Pressung, welche $AB$ in $A$ erleidet, fällt daher ebenfalls in $DA$, und aus ähnlichem Grunde die Pressung auf $AB$ im Punkte $B$ in $BC$. Da nun an $AB$ die in $F$ angebrachte Kraft $P$ mit den Pressungen in $A$ und $B$ im Gleichgewichte seyn muss, so müssen sich $DA$, $BC$ und die Richtung von $P$ in einem Punkte X schneiden, woraus zugleich folgt, dass 1) das Viereck ein ebenes seyn muss. Da ferner das Gleichgewicht nicht aufhören darf, wenn die Seiten des Vierecks unbeweglich gegen einander angenommen werden, so müssen 2) die Kräfte $P$ und $R$ einander gleich und direct entgegengesetzt seyn, also in die Gerade $FH$ fallen, und diese Gerade muss 3) den Durchschnitt $X$ von $DA$ mit $BC$ treffen, weil $FX$ die Richtung von $P$ war. — Dass diese drei nothwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, erhellet ohne weitere Erörterung.

## §. 228.

**Zusätze.** *a.* Wird die Seite $CD$ unbeweglich angenommen, und wirkt nur auf $AB$ in $F$ eine Kraft $P$, so zeigt sich auf gleiche Weise, dass nur dann, und dann immer, Gleichgewicht statt findet, wenn das Viereck ein ebenes ist, und wenn die Richtung von $P$ durch den Durchschnitt $X$ der beiden übrigen Seiten Seiten geht.

*b*. Wird das Viereck $ABCD$, während $CD$ unbewegt bleibt, in seiner Ebene verschoben, so beschreibt jeder Punkt $F$ der $AB$ eine gewisse Curve, — die Punkte $A$ und $B$ Kreise um $D$ und $C$ als Mittelpunkte. — Statt daher den Angriffspunkt $F$ als einen bestimmten Punkt in der beweglichen Geraden $AB$ zu betrachten, kann man ihn auch als einen in einer unbeweglichen Curve (in der von ihm beschriebenen) beweglichen Punkt ansehen. Dieser Ansicht zu Folge muss aber die Kraft auf der Curve normal seyn, und wir schliessen daraus:

**Wird ein ebenes Viereck $ABCD$, dessen Seitenlängen constant sind, dessen Winkel aber sich ändern können, in seiner Ebene verschoben, während eine Seite $CD$ festgehalten wird, so vereinigen sich die Normalen aller der Curven, welche die Punkte der gegenüberliegenden Seite $AB$ beschreiben, stets in einem Punkte, in demjenigen nämlich, in welchem sich die beiden andern Seiten $DA$ und $BC$, als Normalen der von $A$ und $B$ beschriebenen Kreise, schneiden.** *)

*) Von dieser Eigenschaft des Vierecks kann man sich folgendergestalt auch geometrisch überzeugen. Seyen $A'$, $B'$, $F'$ die Oerter, welche $A$, $B$, $F$ nach einer unendlich kleinen Verschiebung einnehmen, so sind $DAA'$ und $CBB'$, folglich auch $XAA'$ und $XBB'$, rechte Winkel, folglich $XA' = XA$ und $XB' = XB$; und weil auch $A'B' = AB$, so sind die Dreiecke $XAB$ und $XA'B'$ einander gleich und ähnlich. Die Linie $AB$ kann daher auch dadurch in die Lage $A'B'$ gebracht werden, dass man das Dreieck $XAB$ um $X$ dreht. Alsdann

*c.* Werde, wie im vor. §., *CD* wieder beweglich angenommen, und seyen *P* und *R* zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte. Seyen überdies *BC* und *DA* einander parallel (Fig. 58.), also ihr Durchschnitt unendlich entfernt, so muss mit ihnen auch *FH* parallel seyn. Man ziehe mit *BC* und *DA* noch eine zweite Parallele *F'H'*, welche *AB* und *CD* in *F'* und *H'* schneide, und bringe in diesen Punkten zwei Kräfte *P'* und *R'* an, welche resp. den *P* und *R* gleich und entgegengesetzt sind, folglich mit ihren Richtungen in *F'H'* fallen und einander das Gleichgewicht halten. Alsdann wird auch zwischen den 4 Kräften *P*, *P'*, *R*, *R'* Gleichgewicht bestehen. Es bilden aber *P*, *P'* ein Paar, und *R*, *R'* ein zweites Paar, das in der Ebene des erstern liegt und mit ihm ein gleiches, aber entgegengesetztes Moment hat. Da nun ein Paar in seiner Ebene und an dem Körper, woran es angebracht ist, ohne Aenderung seiner Wirkung beliebig verlegt werden kann, wenn nur sein Moment sowohl dem Sinne als der absoluten Grösse nach dasselbe bleibt, so schliessen wir:

Bei einem Vierecke *ABCD* mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, von welchem zwei Seiten *BC* und *DA* einander parallel sind, halten sich zwei in der Ebene des Vierecks an den beiden andern Seiten *AB* und *CD* angebrachte Kräftepaare *P*, *P'* und *R*, *R'* unter denselben Bedingungen, wie an einem einzigen Körper, das Gleichgewicht.

*d.* Sey noch *AB* parallel mit *CD*, also das Vier-

---

aber beschreibt eben so, wie *A* und *B*, auch jeder andere Punkt *F* der *AB* ein Element *FF'*, welches auf seiner Verbindungslinie *FX* mit *X* normal ist.

eck ein Parallelogramm (Fig. 59.). Man nehme in $AB$ beliebig zwei Punkte $F$, $F'$, in $CD$ einen beliebigen Punkt $H$, und trage von $H$ nach $H'$ eine Linie $= FF'$. Man bringe ferner an $F$, $F'$, $H$, $H'$ und in der Ebene des Vierecks vier einander gleiche Kräfte $P$, $P'$, $R$, $R'$ an, von denen $P$ und $R'$ einerlei Richtung, $P'$ und $R$ die entgegengesetzte haben. Zwischen diesen 4 Kräften herrscht nach vorigem Satze Gleichgewicht. Denn $P$, $P'$ und $R$, $R'$ sind zwei an $AB$ und $CD$ wirkende Paare von einander gleichen und entgegengesetzten Momenten. Mithin sind $P$ und $R$ gleichwirkend mit $-P'$ und $-R'$, d. h.

Die Wirkung eines Paares, dessen Kräfte an zwei gegenüberliegenden Seiten und in der Ebene eines Parallelogramms mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln angebracht sind, wird nicht geändert, wenn man die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben lässt, ihre Angriffspunkte aber in den Seiten, worin sie liegen, um gleich viel und nach einerlei Seite hin verrückt.

## §. 229.

**Aufgabe.** Von einem Vierecke $ABCD$ (Fig. 60.), dessen Seitenlängen constant und die Winkel veränderlich sind, ist die eine Ecke $D$ unbeweglich. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften $P$ und $Q$ zu finden, welche auf die zwei der Ecke $D$ nicht anliegenden Seiten $AB$ und $BC$ in $F$ und $G$ wirken.

**Auflösung.** An der Seite $DA$, deren einer Endpunkt $D$ mit einem unbeweglichen Punkte verbunden ist, muss die Pressung auf $D$ mit der Pressung auf den andern Endpunkt $A$ im Gleichgewichte seyn. Beide

Pressungen, also auch die Pressung auf $A$, als den einen Endpunkt von $AB$, fallen daher in $DA$.

An der Seite $AB$ sind die Pressungen auf die Endpunkte $A$ und $B$ derselben mit der Kraft $P$ im Gleichgewichte. Da nun die Pressung auf $A$ in $DA$ fällt, so muss $P$ mit $DA$ in einer Ebene liegen, und wenn demnach $P$ die $DA$ in $M$ schneidet, so fällt die Pressung auf $B$ in $BM$.

Die Pressung auf $B$, als den einen Endpunkt von $BC$ fällt daher gleichfalls in $BM$; die Pressung auf der Seite $BC$ anderes Ende $C$ fällt in $CD$ wegen des unbeweglichen Punktes, an welchem $CD$ mit dem Ende $D$ befestigt ist. Mit beiden Pressungen zusammen ist aber die Kraft $Q$ im Gleichgewichte. Mithin müssen $BM$ und $CD$ in einer Ebene liegen, und die Richtung von $Q$ muss den Durchschnitt $N$ dieser Geraden treffen.

Hieraus fliessen nun zunächst folgende Bedingungen des Gleichgewichts: 1) das Viereck $ABCD$ muss ein ebenes seyn; 2) die Richtungen der Kräfte $P$ und $Q$ müssen in dieser Ebene begriffen seyn; 3) die Punkte $M$ und $N$, in denen diese Richtungen resp. die Seiten $DA$ und $CD$ treffen, müssen mit der Ecke $B$ in einer Geraden liegen.

Sind daher das ebene Viereck $ABCD$, die beiden Angriffspunkte $F$, $G$ und die Richtung $MF$ der einen Kraft $P$ gegeben, so findet man damit auch die Richtung $GN$ der andern $Q$. Kennt man ferner die Intensität der einen Kraft $P$, so ergiebt sich die Intensität der andern $Q$ dadurch, dass, wenn man $P$ nach $MA$ und $MB$ und $Q$ nach $BN$ und $CN$ zerlegt, die zwei in $MB$ fallenden Kräfte sich aufheben müssen.

Es verhält sich aber, wenn man diese in $MB$ fallenden, durch die Zerlegung von $P$ und $Q$ sich ergebenden, Kräfte $Z$ und $-Z$ nennt:

$$P : Z = \sin AMB : \sin AMF = \frac{AB}{MB} : \frac{AF}{MF},$$

$$Q : -Z = \sin BNC : \sin GNC = \frac{BC}{NB} : \frac{GC}{NG};$$

folglich $P : Q = -\frac{AB}{MB} \cdot \frac{MF}{AF} : \frac{BC}{NB} \cdot \frac{NG}{GC}$.

Die Erfüllung dieser Proportion ist daher die vierte und letzte Bedingung des Gleichgewichts.

## §. 230.

Zusätze. *a.* Heissen $U$, $V$ die Durchschnitte von $BC$ mit $MA$, $MF$, und $W$, $X$ die Durchschnitte von $AB$ mit $NG$ und $NC$, so findet sich eben so, wie vorhin:

$$P : Z = \frac{UB}{MB} : \frac{UV}{MV}, \quad Q : -Z = \frac{BX}{NB} : \frac{WX}{NW},$$

folglich $P : Q = -\frac{UB}{MB} \cdot \frac{MV}{UV} : \frac{BX}{NB} \cdot \frac{NW}{WX}$.

*b.* Ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, so sind $U$ und $X$ unendlich entfernte Punkte, folglich $UB : UV = 1$, $BX : WX = 1$, und man hat daher in diesem Falle:

$$P : Q = -\frac{MV}{MB} : \frac{NW}{NB}.$$

*c.* Wenn der Punkt $M$, in welchem die Richtung von $P$ die Seite $DA$ trifft, in $D$ fällt, so fällt damit auch $N$ zusammen, und es wird, wenn zugleich das Viereck ein Parallelogramm ist (Fig. 61.)

$$P:Q = -DV:DW,$$

oder, weil $DV = DC\frac{\sin C}{\sin V}$ und $DW = DA\frac{\sin A}{\sin W}$ ist:

$$P.BC \sin P^\wedge BC + Q.AB \sin Q^\wedge AB = 0.$$

*d.* Will man den bisher unbeweglichen Punkt $D$ beweglich seyn lassen, so muss man an ihm eine mit $P$ und $Q$ das Gleichgewicht haltende Kraft, oder auch zwei den $P$ und $Q$ gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte $P'$ und $Q'$ anbringen. Ist dabei das Viereck ein Parallelogramm, so kann man nach §. 228. *d.* die Angriffspunkte des Paares $P$, $P'$ in $AB$ und $DC$ um gleichviel nach einerlei Seite hin und ebenso die Angriffspunkte von $Q$ und $Q'$ in $CB$ und $DA$ fortrücken lassen, ohne dass das Gleichgewicht verloren geht. Hierdurch erhält man die Bedingungen, unter denen am Parallelogramm $ABCD$ ein Paar von Kräften, deren Angriffspunkte in zwei gegenüberliegende Seiten fallen, mit einem andern Paare, welches auf die beiden andern Seiten wirkt, im Gleichgewichte ist.

Treffen die Richtungen von $P$ und $Q$ den Punkt $D$, so sind ihnen $P'$ und $Q'$ direct entgegengesetzt, und es ergiebt sich damit das Resultat:

*An einem Parallelogramm $ABCD$, welches constante Seitenlängen und veränderliche Winkel hat, sind zwei auf die gegenüberliegenden Seiten $AB$, $CD$ wirkende einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte $P$, $P'$ mit zwei auf die beiden andern Seiten $BC$, $DA$ wirkenden Kräften $Q$, $Q'$ im Gleichgewichte, wenn letztere ebenfalls einander gleich und direct entgegengesetzt sind, und wenn überdies*

$$P.BC \sin P^\wedge BC + Q.AB \sin Q^\wedge AB = 0 \text{ ist.}$$

## §. 231.

**Aufgabe.** Drei Punkte $A$, $B$, $C$ (Fig. 62.) sind in drei unbeweglichen Geraden $l$, $m$, $n$ einer Ebene beweglich. In derselben Ebene wirken auf drei Gerade $a$, $b$, $c$, welche resp. den Punkten $B$ und $C$, $C$ und $A$, $A$ und $B$ zu begegnen genöthigt sind, resp. die Kräfte $P$, $Q$, $R$. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen diesen Kräften zu finden.

**Auflösung.** Das vorgelegte System besteht aus 6 beweglichen Theilen, 3 Punkten $A$, $B$, $C$ und 3 Linien $a$, $b$, $c$, von deren jedem besonders das Gleichgewicht zu berücksichtigen ist.

Der Punkt $A$, den wir zuerst betrachten wollen, ist in der Linie $l$ beweglich, und an ihm sind die Linien $b$, $c$ beweglich; von diesen 3 Linien erleidet er 3 normale Pressungen, welche sich das Gleichgewicht halten müssen. Sind daher $p$, $b_1$, $c_1$ diese 3 Pressungen, so hat man, weil ihre Richtungen dieselben Winkel mit einander machen, als die auf ihnen normalen $l$, $b$, $c$:

$$p : b_1 : c_1 = \sin bc : \sin cl : \sin lb,$$

oder, wenn $L$, $M$, $N$ die gegenseitigen Durchschnitte von $l$, $m$, $n$ sind:

$$b_1 : c_1 = \sin BAN : \sin MAC.$$

Auf gleiche Weise ist, wenn $c_2$ und $a_2$ die von den Linien $c$ und $a$ auf den Punkt $B$ normal ausgeübten Pressungen bezeichnen:

$$c_2 : a_2 = \sin CBL : \sin NBA,$$

und, wenn $a_3$, $b_3$ die normalen Pressungen auf $C$ von $a$ und $b$ sind:

$$a_3 : b_3 = \sin ACM : \sin LCB.$$

Gehen wir jetzt zu dem Gleichgewichte der drei

Linien $a$, $b$, $c$ über. — Die Linie $a$, welche nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie durch die zwei Punkte $B$ und $C$ geht, erleidet von diesen Punkten die normalen Pressungen $-a_2$ und $-a_3$, und diese müssen mit der an der Linie angebrachten Kraft $P$ im Gleichgewichte seyn. Die Richtung dieser Kraft muss daher gleichfalls die Linie rechtwinklig schneiden, und wenn $F$ der Angriffspunkt von $P$ ist, so muss sich verhalten:

$$P : a_2 : a_3 = BC : FC : BF.$$

Aus gleichen Gründen sind auch $Q$ und $R$ auf $b$ und $c$ normal, und man hat, wenn $G$ und $H$ die Angriffspunkte dieser Kräfte bezeichnen:

$$Q : b_3 : b_1 = CA : GA : CG,$$
$$R : c_1 : c_2 = AB : HB : AH.$$

Eliminirt man aus diesen 3 einfachen und 3 Doppel-Proportionen die 6 Pressungen, so erhält man zuerst die Verhältnisse zwischen den 3 Kräften:

$$\text{I.}\ \begin{cases} Q : R = CA\,.\,HB \sin BAN : AB\,.\,CG \sin MAC, \\ R : P = AB\,.\,FC \sin CBL : BC\,.\,AH \sin NBA, \\ P : Q = BC\,.\,GA \sin ACM : CA\,.\,BF \sin LCB; \end{cases}$$

und wenn man diese Verhältnisse zusammensetzt:

$$\text{II.}\quad \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NB}{BL} \cdot \frac{LC}{CM},$$

weil $\sin BAN : \sin NBA = BN : AN$, etc.

Sind daher das Dreieck $LMN$ der drei unbeweglichen Geraden, das eingeschriebene Dreieck $ABC$ der drei beweglichen Geraden und zwei von den drei Angriffspunkten $F$, $G$, $H$ gegeben, so finden sich mittelst der Gleichung II. der dritte, und mittelst der Proportionen I. die Verhältnisse zwischen den Kräften selbst; die Richtungen derselben aber müssen auf den Seiten des Dreiecks *ABC* normal seyn.

## §. 232.

**Zusätze.** *a.* Das Gleichgewicht des Systems dauert noch fort, wenn zwei der drei Kräfte, etwa *Q* und *R*, entfernt und statt derselben zwei unbewegliche Curven $\beta$ und $\gamma$ in der Ebene angebracht werden, welche die Geraden *b* und *c* zu berühren genöthigt sind und gegenwärtig in *G* und *H* berühren.

Ist demnach die Beweglichkeit dreier Geraden *a*, *b*, *c* in einer Ebene dergestalt beschränkt, dass ihre gegenseitigen Durchschnitte *A*, *B*, *C* in drei unbeweglichen Geraden *MN*, *NL*, *LM* der Ebene liegen müssen, und dass zwei derselben, *b* und *c*, zwei unbewegliche Curven $\beta$ und $\gamma$ der Ebene zu berühren genöthigt sind, so wird eine auf die dritte Gerade *a* in der Ebene wirkende Kraft nur dann keine Bewegung hervorbringen, wenn ihre Richtung auf *a* normal ist, und ihr Angriffspunkt *F* in *a* und die zwei Berührungspunkte *G* und *H* in *b* und *c* so liegen, dass der Gleichung II. Genüge geschicht.

*b.* Werden die Geraden *b* und *c*, die Curven $\beta$ und $\gamma$ berührend, bewegt, während ihr Durchschnitt *A* in *MN* fortgeht, so bewegt sich die durch die Schneidepunkte *C* und *B* der Tangenten *b* und *c* mit *LM* und *NL* gelegte Gerade *a* als Tangente einer dritten Curve $\alpha$. Die Beweglichkeit von *a* wird aber offenbar nicht gemindert, wenn wir diese dritte Curve wirklich hinzufügen und annehmen, dass *a* sie zu berühren gezwungen ist; und eben so wenig wird die Beweglichkeit von *a* vermehrt, wenn wir hierauf *a* ausser Verbindung mit *b* und *c* bringen. Es muss daher auch jetzt noch bei einer normal auf $a$ in $F$ wirkenden Kraft Ruhe herrschen. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn $F$ der Berührungspunkt von $a$ mit $\alpha$ ist. Wir schliessen hieraus mit Rücksicht auf die Gleichung II.:

A. Bewegen sich drei Punkte $A$, $B$, $C$ willkührlich in den Seiten eines unbeweglichen Dreiecks $LMN$, so ist immer das Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks von den Punkten getheilt werden, gleich dem Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des von den Punkten gebildeten Dreiecks $ABC$ in den Berührungspunkten $F$, $G$, $H$ mit den drei Curven getheilt werden, welche diese Seiten bei der gedachten Bewegung als Tangenten erzeugen.

*c.* Treffen $l$, $m$, $n$, also auch $L$, $M$, $N$, in einem Punkte zusammen, sind also $A$, $B$, $C$ in drei Geraden beweglich, welche sich in einem Punkte schneiden, so wird jedes der drei Verhältnisse $MA:AN$, $NB:BL$, $LC:CM = -1$, also auch zufolge II.:

$$(BF:FC)\,(CG:GA)\,(AH:HB) = -1.$$

$F$, $G$, $H$ liegen dann folglich in einer Geraden *), und man hat den Satz:

Bewegen sich drei Punkte $A$, $B$, $C$ auf beliebige Weise in drei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, so liegen in jedem Augenblicke die drei Punkte $F$, $G$, $H$, in denen die drei Geraden $BC$, $CA$, $AB$ die von ihnen als Tangenten erzeugten Curven berühren, in einer Geraden.

*d.* Der Satz A. kann noch allgemeiner gefasst wer-

*) Vergl. des Verf. Baryc. Calcul §. 198. 2).

den, wenn man die Punkte $A$, $B$, $C$ sich in beliebigen unbeweglichen Curven $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bewegen lässt, von denen $MN$, $NL$, $LM$ die Tangenten in $A$, $B$, $C$,... sind; er lautet dann also:

B. Hat man ein in einer Ebene sich stetig veränderndes Dreieck $ABC$, so ist in jedem Augenblicke das Product aus den Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks in den Berührungspunkten $F$, $G$, $H$ mit den Curven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ getheilt werden, welche die Seiten als Tangenten erzeugen, gleich dem Product aus den Verhältnissen, nach denen bei einem zweiten Dreiecke $LMN$, dessen Seiten die Tangenten der von den Ecken $A$, $B$, $C$, des erstern Dreiecks beschriebenen Curven $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind, diese Seiten von den Ecken $A$, $B$, $C$, als den Berührungspunkten, getheilt werden.

Dieser allgemeinere Satz lässt sich wiederum specialisiren, indem man an die Stelle der Curven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, an denen sich $BC$, $CA$, $AB$ als Tangenten fortbewegen, blosse Punkte setzt, und er lautet dann folgendermassen:

C. Wenn sich in einer Ebene die Seiten eines darin enthaltenen Dreiecks $ABC$ um unbewegliche Punkte $F$, $G$, $H$ drehen, so ist stets das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten von diesen Punkten getheilt werden, gleich dem Producte aus den Verhältnissen, nach welchen von den Ecken desselben Dreiecks $ABC$ die Seiten eines zweiten Dreiecks $LMN$ getheilt werden, dessen Seiten die von den Ecken des erstern beschriebenen Curven $\lambda$, $\mu$, $\nu$ berühren.

Wie man sogleich sieht, entspricht dieser Satz dem obigen A. nach dem bekannten Gesetze der Dualität.

Denn so wie dort die Punkte $A$, $B$, $C$ sich in unbeweglichen Geraden $l$, $m$, $n$ bewegten, und die diese Punkte verbindenden Geraden $a$, $b$, $c$ durch ihre Bewegung Curven erzeugten, welche von $a$, $b$, $c$ selbst in $F$, $G$, $H$ berührt wurden: so drehen sich hier die Geraden $a$, $b$, $c$ um unbewegliche Punkte $F$, $G$, $H$, und von den gegenseitigen Durchschnitten $A$, $B$, $C$ der Geraden werden Curven beschrieben, die in den Punkten $A$, $B$, $C$ selbst die Geraden $l$, $m$, $n$ zu Tangenten haben. Den Punk- $A$, $B$, $C$, $F$, $G$, $H$ einerseits entsprechen daher die Geraden $a$, $b$, $c$, $l$, $m$, $n$ andererseits, und umgekehrt.

Nach dem Gesetze der Dualität müssen daher auch, zufolge des Satzes in $c$., wenn in C. die drei Punkte $F$, $G$, $H$ in einer Geraden liegen, die drei Tangenten der von $A$, $B$, $C$ beschriebenen Curven sich in einem Punkte schneiden *).

Uebrigens gelten, wie sich leicht zeigen lässt, die über ein Dreieck aufgestellten Sätze A., B., C. wörtlich auch von jedem mehrseitigen Vielecke.

## §. 233.

Der Satz C. des vor. §. lässt sich, eben so wie der

---

*) Eine leicht hieraus fliessende Folgerung ist, dass, wenn die zwei von $A$ und $B$ beschriebenen Linien gerade sind, auch die dritte von $C$ beschriebene es ist und durch den Durchschnitt der beiden ersten geht. Dies führt zu dem bekannten Satze:

Wenn von zwei Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$ die drei Durchschnitte der gleichnamigen Seiten $BC$ · $B'C'$, etc. in einer Geraden liegen, so schneiden sich die drei Geraden $AA'$, etc., welche die gleichnamigen Ecken verbinden, in einem Punkte.

Eben so folgt aus $c$., dass, wenn die Geraden $a$ und $b$ sich um feste Punkte $F$ und $G$ drehen, auch die dritte $c$ sich um einen festen Punkt $H$ dreht, welcher mit $F$ und $G$ in einer Geraden liegt, und man erhält damit den umgekehrten Satz des vorigen.

Satz A., auch unmittelbar aus statischen Betrachtungen herleiten. Zu dem Ende hat man nur in §. 231. die auf die Geraden $a$, $b$, $c$ in $F$, $G$, $H$ wirkenden Kräfte als Pressungen auf diese Geraden von unbeweglichen Punkten $F$, $G$, $H$, durch welche sie gehen müssen, und die Pressungen auf die Punkte $A$, $B$, $C$ von den unbeweglichen Geraden $l$, $m$, $n$, in denen sie beweglich gesetzt wurden, als an diesen Punkten angebrachte Kräfte zu betrachten; diess führt zu folgender

Aufgabe. Um drei unbewegliche Punkte $F$, $G$, $H$ und in der Ebene derselben sind drei gerade Linien $a$, $b$, $c$ beweglich. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei Kräften $p$, $q$, $r$ zu finden, welche in der Ebene auf die gegenseitigen Durchschnitte $A$, $B$, $C$ der drei Geraden, d. i. auf Punkte wirken, welche in $b$ und $c$, $c$ und $a$, $a$ und $b$ zugleich beweglich sind.

Die Lösung dieser Aufgabe geht ohne Weiteres aus den Formeln in §. 231. hervor. Sind nämlich $AS$, $BT$, $CU$ die noch unbekannte Richtung von $p$, $q$, $r$, und sind $l$, $m$, $n$ auf dieselben winkelrecht gezogene Gerade, so hat man, wie dort:

$$p : b_1 : c_1 = \sin bc : \sin cl : \sin lb$$
$$= \sin CAB : \cos BAS : \cos SAC,$$

u. eben so: $$q : c_2 : a_2 = \sin ABC : \cos CBT : \cos TBA,$$
$$r : a_3 : b_3 = \sin BCA : \cos ACU : \cos UCB.$$

Eliminirt man hieraus die Pressungen mittelst der schon oben erhaltenen Proportionen:

$$a_2 : a_3 = FC : BF,\ b_3 : b_1 = GA : CG,$$
$$c_1 : c_2 = HB : AH,$$

so kommt:

$$\text{I}^*.\ \begin{cases} q:r = CA\,.\,FC\,.\cos ACU : AB\,.\,BF\,.\cos TBA, \\ r:p = AB\,.\,GA\,.\cos BAS : BC\,.\,CG\,.\cos UCB, \\ p:q = BC\,.\,HB\,.\cos CBT : CA\,.\,AH\,.\cos SAC, \end{cases}$$

und hieraus die Gleichung:

$$\text{II}^*.\ \frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB} = \frac{\cos CBT}{\cos UCB}\cdot\frac{\cos ACU}{\cos SAC}\cdot\frac{\cos BAS}{\cos TBA},$$

in welcher nur noch die Richtungen der Kräfte vorkommen, und wonach, wenn die Richtungen zweier Kräfte gegeben sind, die Richtung der dritten gefunden werden kann. Die Verhältnisse zwischen den Kräften selbst ergeben sich alsdann aus den Proportionen I*.

Werden nun diese Bedingungen erfüllt, und ist daher das System im Gleichgewichte, so kann man auch die Punkte $A$ und $B$, statt auf sie die Kräfte $p$ und $q$ wirken zu lassen, in unbeweglichen Curven, welche auf den Richtungen von $p$ und $q$ normal sind und daher $l$ und $m$ zu Tangenten haben, beweglich annehmen. Hiermit wird der dritte Punkt $C$ in einer dritten Curve beweglich, welche auf der Richtung von $r$ normal seyn und folglich $n$ zur Tangente haben muss, indem sonst der Punkt $C$ nicht in Ruhe bleiben könnte. Die hierbei allein noch zu berücksichtigende Gleichung II* ist aber, wie man sich leicht überzeugt, mit der obigen Gleichung II. identisch, und giebt damit für den obigen Satz C. den Beweis ab.

### Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren.

### §. 234.

**Aufgabe.** Zwei Gerade $a$ und $c$ (Fig. 63.) sind in $B$ unter einem Winkel von unveränderlicher Grösse fest mit einander verbunden; desgleichen zwei andere Gerade $a'$ und $b$ unter einem unveränderlichen Winkel in $C$. Die Schenkel $a$ und $a'$ sollen zusammen fallen und an einander verschiebbar seyn, und die Winkel selbst sollen in einer und derselben Ebene liegen. In dieser Ebene wirken auf die Spitzen der Winkel $B$ und $C$ und auf den gegenseitigen Durchschnitt ihrer Schenkel $b$ und $c$, oder vielmehr auf einen in $b$ und $c$ zugleich beweglichen Punkt $A$, resp. die Kräfte $q$, $r$, $p$. Welches sind die Bedingungen des Gleichgewichts?

Auflösung. Das gegebene System besteht aus drei beweglichen Stücken: aus dem Winkel $ac$, dem Winkel $a'b$ und dem Punkte $A$, und wir haben nun das Gleichgewicht jedes dieser drei Stücke besonders zu untersuchen.

1) Die auf die Spitze $B$ des Winkels $ac$ wirkende Kraft muss mit der Pressung $c_1$, welche sein Schenkel $c$ rechtwinklig von dem in ihm beweglichen Punkte $A$ erleidet, und mit der Pressung auf seinen andern Schenkel $a$ von dem an $a$ verschiebbaren $a'$ im Gleichgewichte seyn. Da diese Verschiebbarkeit sich dadurch bewerkstelligen lässt, dass man in $a'$ zwei beliebig bestimmte Punkte $D$ und $E$ annimmt, welchen $a$ zu begegnen genöthigt ist, so ist die Pressung von $a'$ auf $a$ zwei auf $a$ in $D$ und $E$ rechtwinkligen Pressungen gleich zu achten, die sich aber, als zwei parallele Kräfte, zu einer einzigen $f$ zusammensetzen lassen, welche den Schenkel $a$ gleichfalls rechtwinklig, etwa in $F$, trifft. Die Richtung von $q$ und die auf $c$ in $A$ und auf $a$ in $F$ errichteten Normalen müssen sich daher in einem Punkte $G$ schneiden. Nimmt man folglich die Richtung $BG$ von $q$ als willkührlich gegeben an und errichtet in $A$ auf $BA$ eine Normale $AG$,

welche $BG$ in $G$ schneide, so wird der Fusspunkt einer von $G$ auf $BC$ gefällten Normale der gedachte Punkt $F$ seyn. Auch kann man damit, wenn noch die Intensität von $q$ gegeben ist, die Intensitäten von $c_1$ und $f$ finden.

2) Beim Winkel $a'b$ ist die Kraft $r$ an der Spitze $C$ desselben im Gleichgewichte mit der normalen Pressung $b_1$ des Punktes $A$ auf seinen Schenkel $b$ und den von $a$ herrührenden normalen Pressungen auf die Punkte $D$ und $E$ seines Schenkels $a'$, oder der damit gleichwirkenden einzigen Pressung $-f$ auf $a'$ im Punkte $F$. Die Richtungen von $r$, $b_1$ und $-f$ müssen sich daher in einem Punkte begegnen. Trifft demnach eine auf $AC$ in $A$ errichtete Normale die bereits gezogene $FG$ in $H$, so ist $CH$ die Richtung von $r$, und es lassen sich mittelst der schon bekannten Intensität von $-f$ die Intensitäten von $r$ und $b_1$ bestimmen.

3) Am Punkte $A$ muss die auf ihn unmittelbar wirkende Kraft $p$ den Pressungen $-b_1$ und $-c_1$, welche er von den Linien $b$ und $c$ erleidet, das Gleichgewicht halten und kann somit ohne Weiteres gefunden werden, noch leichter aber dadurch, dass $p$ auch im Gleichgewichte mit $q$ und $r$ ist, und dass folglich die Richtung von $p$, nächst $A$, noch den Schneidepunkt $I$ der Richtungen $BG$ und $CH$ von $q$ und $r$ treffen muss. Die Intensität von $p$ ergiebt sich alsdann aus denen von $q$ und $r$.

Nach diesem Allen sind die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts folgende: 1) Die auf $A$, $B$, $C$ wirkenden Kräfte müssen eben so, als wären diese Punkte fest mit einander verbunden, im Gleichgewichte seyn, und sich daher in einem Punkte $I$ schneiden. 2) Die resp. Durchschnitte $G$ und $H$ der auf $AB$

und $AC$ in $A$ errichteten Perpendikel mit den Richtungen $BI$ und $CI$ müssen in einer auf $BC$ normalen Geraden liegen.

## §. 235.

Das von den zwei Winkeln $ac$ und $a'b$ gebildete Dreieck $ABC$ ist dergestalt beweglich, dass es erstens, ohne seine Seitenlängen zu verändern, jede beliebige Lage in der Ebene einnehmen kann. Zweitens kann eine Seite desselben, welche man will, durch Verschiebung der Schenkel $a$ und $a'$ an einander jede beliebige Länge erhalten; allein das Dreieck bleibt sich dabei immer ähnlich, weil die zwei unveränderlichen Winkel $ac$ und $a'b$ zugleich Winkel desselben sind. Diesem gemäss lässt sich die vorige Aufgabe auch folgendermassen abfassen:

Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei in einer Ebene auf drei Punkte wirkenden Kräften zu finden, wenn die Punkte in der Ebene dergestalt beweglich sind, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt.

Man kann hiernach erwarten, dass der Ort des Punktes $I$, in welchem sich die auf $A$, $B$, $C$ wirkenden Kräfte schneiden, von der gegenseitigen Lage der $A$, $B$, $C$ auf symmetrische Weise abhängen werde; und dies bestätigt sich auch, wenn man die Curve untersucht, in welcher alle nach der im vor. §. erhaltenen Bedingung zu construirenden Oerter von $I$ begriffen sind. Diese Bedingung besteht darin, dass $GH$, $HA$, $AG$ resp. auf $BC$, $CA$, $AB$ normal sind; es sind folglich die Dreiecke $ABC$ und $AGH$ einander ähnlich, und es verhält sich $AB : AG = AC : AH$. Mithin sind auch die rechtwinkligen Dreiecke $BAG$ und $CAH$

einander ähnlich, folglich die Winkel *ABI* und *ACI* einander gleich, folglich liegen die drei Angriffspunkte *A*, *B*, *C* der Kräfte und der gegenseitige Durchschnitt *I* ihrer Richtungen in einem Kreise.

Man wird sich hierbei der Untersuchungen erinnern, welche im 7. Kapitel des ersten Theiles über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte in einer Ebene angestellt worden sind. Von den zwei Kräften $p$ und $q$, welche auf die Punkte *A* und *B* wirken und sich in *I* schneiden, ist hiernach der Mittelpunkt derjenige Punkt *C* in der Richtung *CI* ihrer Resultante $-r$, in welchem dieselbe von dem durch *A*, *B*, *I* zu ziehenden Kreise getroffen wird (§. 115.), und dieser Punkt *C* besitzt die Eigenschaft, dass, wenn das Dreieck *ABC* ohne Aenderung seiner Grösse und Gestalt beliebig in seiner Ebene verschoben wird, und die Kräfte $p$, $q$ auf *A*, *B* nach Richtungen, die mit ihren anfänglichen parallel sind, zu wirken fortfahren, auch ihre Resultante, der Grösse und Richtung nach sich nicht ändernd, stets durch *C* geht (§. 114.). Wird folglich an *C* eine dieser Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft $r$ angebracht, so werden die Kräfte $p$, $q$, $r$, (deren Intensitäten sich nach §. 120. wie die Seiten *BC*, *CA*, *AB* des Dreiecks verhalten müssen,) bei jeder Verrückung des Dreiecks in seiner Ebene im Gleichgewichte verharren. Hieraus ergeben sich aber in Verbindung mit dem Vorigen die merkwürdigen Resultate:

*Sind drei Punkte in einer Ebene dergestalt beweglich, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt, und halten sich drei auf sie wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so herrscht auch noch Gleichgewicht bei jeder andern Lage, welche* *man den Punkten zufolge ihrer Beweglichkeit geben kann, wenn nur die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben;* und umgekehrt:

*Sind drei Kräfte, welche auf drei fest mit einander verbundene Punkte in einer Ebene wirken, im Gleichgewichte, und dauert dasselbe noch fort, wenn das System der drei Punkte in seiner Ebene beliebig verschoben wird, die Kräfte aber parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirken, so wird das Gleichgewicht auch nicht unterbrochen, wenn man den Punkten eine solche gegenseitige Beweglichkeit noch beilegt, bei welcher das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt.*

## §. 236.

Keine Schwierigkeit hat es, auch an vier, fünf, oder mehrern Punkten, die in einer Ebene liegen und darin dergestalt beweglich sind, dass die durch sie bestimmte Figur sich immer ähnlich bleibt, sich das Gleichgewicht haltende Kräfte anzubringen. Denn seyen $A$, $B$, $C$, $D$ vier solche Punkte, an denen sich die Kräfte $p$, $q$, $r$, $s$ das Gleichgewicht halten sollen; zwei derselben, etwa $p$ und $q$, seyen gegeben. Durch $A$, $B$ und den Durchschnitt $N$ von $p$ mit $q$ beschreibe man einen Kreis, welcher die Resultante $x$ von $p$ und $q$ ausser in $N$ noch im Punkte $X$ schneide. Denkt man sich nun $X$ als neuen Punkt des Systems, also mit $A, .. D$ in solcher Verbindung, dass er gegen sie immer in ähnlicher Lage bleibt, und bringt man an $X$ die sich aufhebenden Kräfte $x$ und $-x$ an, so sind $p$, $q$, $-x$ an $A$, $B$, $X$ im Gleichgewichte; mithin müssen es auch $x$, $r$, $s$ an $X$, $C$, $D$ seyn, und man kann mittelst der bekannten Kraft $x$ und eines durch $X$,

$C$, $D$ zu beschreibenden Kreises die Intensitäten und Richtungen von $r$, $s$ finden.

Sind ferner $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ fünf Punkte in einer Ebene, die in ähnlicher Lage gegen einander verharren sollen; $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ die auf sie wirkenden Kräfte, und von ihnen $p$, $q$, $r$ gegeben, so suche man wie vorhin den Mittelpunkt $X$ der Kräfte $p$, $q$ in ihrer Resultante $x$ und denke sich diesen mit den Kräften $x$ und $-x$ als einen zum Systeme gleichfalls gehörigen Punkt. Da nun $p$, $q$, $-x$ an $A$, $B$, $X$ im Gleichgewichte sind, so müssen es auch $x$, $r$, $s$, $t$ an $X$, $C$, $D$, $E$ seyn, wenn Gleichgewicht zwischen $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ herrschen soll; und die Aufgabe ist somit auf die vorige, welche ein System von vier Punkten betraf, zurückgeführt.

Ueberhaupt also, — denn auf analoge Weise kann man von 5 Punkten auf 6, u. s. w. schliessen —: Wenn $n$ Punkte in einer Ebene so beweglich sind, dass sie stets in ähnlicher Lage gegen einander bleiben, und wenn auf $n-2$ derselben beliebig gegebene Kräfte in der Ebene wirken, so kann man immer an den zwei übrigen Punkten zwei Kräfte hinzufügen, welche mit erstern Gleichgewicht hervorbringen.

Zugleich aber erhellet, dass dieselbe Construction, womit sich diese zwei Kräfte finden lassen, auch dann anzuwenden ist und die nämlichen zwei Kräfte giebt, die, wenn die $n$ Punkte in unveränderlicher Lage gegen einander genommen werden, am $(n-1)$sten und $n$ten Punkte angebracht werden müssen, damit Gleichgewicht entstehe und bei beliebiger Verrückung des Systems in der Ebene auch fortdaure, sobald nur sämmtliche $n$ Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben. Die Bedingungen zwischen den $n$ Kräften sind also in dem einen Falle dieselben, wie in dem andern, und wir ziehen hieraus die Folgerung, *dass die zwei Sätze zu Ende des vor. §. nicht bloss für drei, sondern für jede beliebige Anzahl von Punkten in einer Ebene Gültigkeit haben.*

Ich bemerke nur noch, dass eben so, wie in der Aufgabe des §. 234. ein sich ähnlich bleibendes Dreieck gebildet wurde, auch ein System von jeder grössern Anzahl in ähnlicher Lage bleibender Punkte leicht construirt werden kann. Denn man hat nur in einer Ebene ein System von Geraden, welche sich unter unveränderlichen Winkeln in einem Punkte treffen, mit einem andern Systeme von derselben Beschaffenheit dergestalt zu verbinden, dass eine Gerade des einen Systems mit einer Geraden des andern zusammenfällt und längs derselben verschiebbar ist. Alle Durchschnittspunkte zweier Geraden des einen und andern Systems, so wie jeder der zwei Punkte selbst, in welchem alle Geraden eines und desselben Systems zusammenlaufen, werden dann stets in ähnlicher Lage gegen einander verharren.

---

# Viertes Kapitel.

## Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

### §. 237.

Unter den Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften ausdrücken, die auf ein System mit einander verbundener, an sich frei beweglicher Körper wirken, kommen zu Folge des Grundsatzes I. in §. 190. immer auch diejenigen Gleichungen mit vor, welche erfüllt seyn müssen, sobald die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich angenommen wird, und somit sämmtliche Körper einen einzigen frei beweglichen ausmachen. Dieser letztern Gleichungen giebt es im allgemeinsten Falle sechs. Weiss man folglich irgendwoher, dass das Gleichgewicht eines Systems mit einander verbundener, an sich frei beweglicher Körper, auf welche beliebige Kräfte wirken, immer schon durch sechs Gleichungen bedingt ist, so können diese keine andern, als die sechs zum Gleichgewichte eines einzigen Körpers erforderlichen Gleichungen seyn. Aber nicht allein dieses, sondern es kann auch keine gegenseitige Beweglichkeit zwischen den Körpern statt finden.

Um sich von der Richtigkeit des letztern Schlusses vollkommen zu überzeugen, bringe man an den mit einander verbundenen Körpern beliebige Kräfte an. Alsdann ist es immer möglich, an einem der Körper, er heisse $a$, oder an Punkten, die mit ihm fest verbunden sind, zwei solche Kräfte hinzuzufügen, welche in Vereinigung mit den erstern Kräften den 6 Gleichungen Genüge leisten. Sind nun die 6 Gleichungen die einzigen zum Gleichgewichte erforderlichen Bedingungen, und ist folglich durch Hinzufügung der zwei Kräfte Gleichgewicht zu Wege gebracht worden, so muss dieses auch noch bestehen, wenn man $a$ unbeweglich setzt. Wenn aber, sobald einer der Körper unbeweglich angenommen wird, keine auf die übrigen Körper wirkenden Kräfte Bewegung zu erzeugen vermögen, so findet keine gegenseitige Beweglichkeit statt.

## §. 238.

Ob Körper, die auf gegebene Weise mit einander verbunden sind, ihre Lage gegen einander noch ändern können oder nicht, die Beantwortung dieser Frage kann nicht allein in der Mechanik, sondern auch bei rein geometrischen Untersuchungen oft von Interesse seyn. Die Statik bietet uns hierzu ein sehr einfaches Mittel in dem Satze des vor. §. dar, dass es bei gegenseitiger Unbeweglichkeit nicht mehr als 6 Gleichungen des Gleichgewichts giebt. Ich glaube daher, indem ich dieses Princip etwas weiter zu entwickeln suche, nichts Ueberflüssiges zu thun, um so weniger, als der Geometrie wohl nicht immer gleich einfache Mittel zur Aburtheilung über die Beweglichkeit zu Gebote stehen dürften.

Um bei einem Systeme von $n$ mit einander verbundenen Körpern die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, hat man nach §. 215 für jeden einzelnen Körper des Systems die Gleichungen des Gleichgewichts, im Allgemeinen sechs, zwischen den unmittelbar auf ihn wirkenden Kräften und den Pressungen, denen er ausgesetzt ist, zu entwickeln und aus diesen $6n$ Gleichungen die Intensitäten der Pressungen, so wie auch ihre Richtungen, wenn diese unbekannt sind, zu eliminiren. Die somit hervorgehenden Gleichungen, $6n-p$ zum wenigsten, wenn $p$ die Zahl der von den Pressungen herrührenden unbekannten Grössen ist, sind die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts. Man setze daher die Zahl dieser Bedingungsgleichungen $= 6n - p + q$, wo $q$ eine positive ganze Zahl oder auch null ist.

Ist nun jeder Körper des Systems an sich frei beweglich, so giebt es nicht weniger als 6 Bedingungsgleichungen, und wenn es ihrer nur 6 sind, also wenn

$6n - p + q = 6$, d. i. $6(n-1) + q = p$ ist, so können nach vor. §. die Körper ihre Lage gegen einander nicht ändern. Ist dagegen $6(n-1) + q > p$, so herrscht in dem Systeme gegenseitige Beweglichkeit.

Hieraus schliessen wir endlich, dass, wenn $p < 6(n-1)$, stets gegenseitige Beweglichkeit statt findet, und dass, wenn gegenseitige Unbeweglichkeit eintreten soll, $p =$ oder $> 6(n-1)$ seyn muss, dass aber diese Bedingung, wenn auch stets nothwendig, doch nicht immer hinreichend für die Unbeweglichkeit ist.

## §. 239.

Berühren sich je zwei Körper des Systems mit ihren Flächen, oder berührt eine Kante oder Ecke eines Körpers die Fläche eines andern, oder kreuzen sich die Kanten zweier Körper unter einem beliebigen endlichen Winkel, so ist die Richtung der daselbst statt findenden Pressungen schon im Voraus bekannt, und $p$ ist der Anzahl der Pressungen selbst, d. i. der Begegnungspunkte, gleich. Begegnen sich daher $n$ Körper auf die eine oder die andere der eben gedachten Arten in weniger als $6(n-1)$ Punkten, so kann immer die gegenseitige Lage derselben verändert werden, ohne dass eine der Begegnungen wegfällt. Nicht mehr ist aber diess jederzeit möglich, wenn sie sich in $6(n-1)$ oder noch mehrern Punkten treffen.

So haben wir bereits oben (§. 193.) bemerkt, dass zwei Körper, die sich in 5 oder weniger Punkten berühren, immer an einander verschoben werden können, im Allgemeinen aber nicht mehr bei 6 oder mehrern Berührungen. Auf gleiche Art findet Verschiebbarkeit im Allgemeinen nicht mehr statt, wenn 6 Ecken des einen Körpers die Fläche des andern treffen, oder wenn eine Curve in 6 Punkten eine Fläche berührt, oder wenn zwei Curven (von doppelter Krümmung) in 6 Punkten über einander weggehen. — Letztere 6 Punkte können auch paarweise zusammenfallen, so dass die beiden Curven in drei Punkten einander einfach berühren. Auch kann man die 6 Punkte zu dreien zusammenfallen lassen, so dass sich die Curven in zwei Punkten berühren und in jedem derselben eine gemeinschaftliche Krümmungsebene haben, u. s. w. In keinem dieser Fälle lassen sich die Curven an einander verschieben, ohne dass die Arten der Berührung aufgehoben würden.

Sind 6 Punkte des einen Körpers mit 6 Punkten des andern nicht unmittelbar, sondern durch 6 Gerade von unveränderlicher Länge verbunden, so kann gleichfalls die gegenseitige Lage der beiden Körper im Allgemeinen nicht mehr geändert werden. Denn da beim Gleichgewichte des Ganzen jede der 6 Geraden an ihren zwei Endpunkten zwei einander entgegengesetzte aber gleiche Pressungen ausübt, so sind hier nur die Intensitäten der 6 Pressungen unbekannt, und, diese aus den zweimal 6 Gleichungen für das Gleichgewicht der beiden Körper eliminirt, bleiben 6 Bedingungsgleichungen zurück.

## §. 240.

Dass die gegenseitige Lage zweier Körper im Allgemeinen nicht mehr veränderlich ist, wenn in der Oberfläche $O$ des einen sechs Ecken, oder überhaupt sechs bestimmte Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ des andern $k$ enthalten seyn sollen, dies lässt sich auch durch folgende Betrachtung einsehen.

1) Sollen nur $A$, $B$ und $C$ sich in der Fläche $O$ befinden, so kann der Ort von $A$ beliebig in $O$ genommen werden; $B$ ist dann irgend ein Punkt in dem

Durchschnitte von $O$ und der um $A$ mit $AB$, als Halbmesser, beschriebenen Kugelfläche, und $C$ der Durchschnitt von $O$ und den zwei Kugelflächen, welche um $A$ und $B$ mit den Halbmessern $AC$ und $BC$ erzeugt werden. Wird alsdann der Körper $k$ um $A$ so gedreht, dass $B$ und $C$ in $O$ bleiben, so beschreibt der vierte Punkt $D$ eine bestimmte Curve, und wenn $D$ in dieser Curve bis dahin gekommen ist, wo sie von $O$ geschnitten wird, so liegen nunmehr

2) die 4 Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ zugleich in $O$. Für jeden beliebigen Ort des $A$ in $O$ giebt es daher im Allgemeinen eine oder auch etliche Lagen des Körpers $k$, wo nächst $A$ auch $B$, $C$, $D$ sich in $O$ befinden, so dass, wenn irgend eine Curve $a$ in $O$ gegeben ist, in welcher $A$ sich bewegen soll, die Punkte $B$, $C$, $D$ in mit $a$ zugleich gegebenen und in $O$ liegenden Curven sich bewegen können. Hat nun bei dieser Bewegung des Körpers $k$ der fünfte Punkt $E$ desselben die Fläche $O$ erreicht, so sind jetzt

3) die 5 Punkte $A,\ldots E$ zugleich in $O$. Für jede Curve $a_0$ in $O$ giebt es demnach einen in ihr liegenden Punkt $A_0$ (oder etliche, oder auch keine) von der Beschaffenheit, dass wenn $A$ mit ihm coincidirt, auch $B,\ldots E$ in $O$ gebracht werden können. Heissen ähnlicher Weise $A_1$, $A_2$,... diese Oerter von $A$ für irgend andere Curven $a_1$, $a_2$,... in $O$. Denkt man sich nun $a_0$, $a_1$, $a_2$,... als unmittelbar neben einander liegende Curven, etwa als solche, in denen $O$ von unmittelbar auf einander folgenden Parallelebenen geschnitten wird, so sind $A_0$, $A_1$, $A_2$,... die zunächst auf einander folgenden Punkte einer bestimmten Curve $\alpha$. Sollen folglich die 5 Punkte $A,\ldots E$ zugleich in $O$ seyn und bei der Bewegung von $k$ darin bleiben, so muss $A$ in der

Curve $\alpha$ liegen und darin fortgehen, wobei auch die übrigen Punkte $B,..E$ nicht mehr beliebige, sondern, eben so wie $\alpha$, von der Gestalt der Fläche $O$ und der gegenseitigen Lage der 5 Punkte $A,...E$ abhängige Curven beschreiben werden.

4) Ist endlich bei dieser bestimmten Bewegung von $k$ der sechste Punkt $F$ in $O$ getreten, so hört mit der Bedingung, dass auch $F$ in $O$ bleiben soll, die Beweglichkeit von $k$ völlig auf.

## §. 241.

Aus den voranstehenden Betrachtungen ergeben sich leicht einige Fälle, in denen einem Systeme von weniger als 6 Punkten, die in unabänderlichen Entfernungen von einander sind, im Allgemeinen keine Bewegung mehr gestattet ist. Diese Fälle sind:

1) bei einem Systeme von drei Punkten, wenn ein Punkt unbeweglich, ein zweiter in einer gegebenen Linie und der dritte in einer gegebenen Fläche beweglich ist, oder

2) wenn die drei Punkte in gegebenen Linien beweglich sind (vergl. §. 203.);

3) bei einem Systeme von vier Punkten, wenn ein Punkt unbeweglich und die drei andern in gegebenen Flächen beweglich sind, oder

4) wenn zwei Punkte in gegebenen Linien und die zwei übrigen in gegebenen Flächen beweglich sind;

5) bei einem Systeme von fünf Punkten, wenn ein Punkt in einer gegebenen Linie und die vier andern in gegebenen Flächen beweglich sind.

Die zwei ersten dieser Fälle erhellen aus Nr. 1., der dritte und vierte aus Nr. 2. und der fünfte aus Nr. 3. des vor. §.

## §. 242.

Wenn bei einem Systeme von $n$ durch Berührung mit einander verbundenen Körpern, deren jeder an sich frei beweglich ist, die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich seyn soll, so müssen sie sich in wenigstens $6(n-1)$ Punkten berühren (§. 238.). Ob diese Unveränderlichkeit der Lage in irgend einem bestimmten Falle wirklich statt findet, oder nicht, lässt sich im Allgemeinen wohl nicht anders beurtheilen, als dass man die $6(n-1)$ in den Berührungen vorkommenden Pressungen aus den $6n$ ursprünglichen Gleichungen des Gleichgewichts eliminirt. Denn je nachdem dann 6 oder mehr als 6 Gleichungen übrig bleiben, ist die gegenseitige Lage constant oder veränderlich. Indessen giebt es, so lange nicht dergleichen Umstände, wie in §. 193. bemerkt worden, eintreten, mehrere specielle Fälle, in denen man über die gegenseitige Beweglichkeit ohne vorangegangene Rechnung entscheiden kann. So müssen sich z. B. 3 Körper in wenigstens $6 \times 2 = 12$ Punkten berühren, wenn sie nicht mehr an einander sollen verschoben werden können. Auch findet in der That gegenseitige Unbeweglichkeit, im Allgemeinen wenigstens, statt, wenn der erste dem zweiten in 6, und der zweite dem dritten ebenfalls in 6 Punkten begegnet; nicht mehr aber, wenn der erste den zweiten in 7, und der zweite den dritten in 5 Punkten berührt. Denn hängen dann auch der erste und zweite Körper fest zusammen, so ist doch der dritte an dem zweiten verschiebbar.

Ueberhaupt leuchtet ein, dass, je gleichmässiger die $6(n-1)$ oder mehrern Berührungen unter den $n$ Körpern vertheilt sind, um so mehr zu erwarten steht, dass die Körper unbeweglich gegen einander seyn werden. Im Allgemeinen wird man sich daher immer von der gegenseitigen Unbeweglichkeit versichert halten können, wenn von den $n$ sich in 6 $(n-1)$ oder mehreren Punkten berührenden Körpern je zwei sich in gleichviel Punkten berühren.

Wenn von $n$ Körpern je zwei sich in $m$ Punkten berühren, so ist die Anzahl aller Berührungen $= \frac{1}{2} mn (n-1)$. Ist folglich bei diesem Systeme $\frac{1}{2} mn (n-1)$ $=$ oder $> 6 (n-1)$ und daher $mn =$ oder $> 12$, so ist die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich.

*Wenn demnach*

*von* 12 *oder mehr Körpern je zwei sich in* 1 *Punkte*<br>
*oder von* 6 — — — — — — — 2 *Punkten*<br>
— — 4 — — — — — — — 3 —<br>
— — 3 — — — — — — — 4 —<br>
— — 2 — — — — — — — 6 —

*berühren, so kann, ohne dass Berührungen wegfallen, die gegenseitige Lage der Körper nicht geändert werden.*

## §. 243.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich bei einem Systeme von Curven, die in einer Ebene beweglich sind, anstellen. Das Gleichgewicht zwischen Kräften, die in einer Ebene auf ein darin bewegliches System fest mit einander verbundener Punkte, oder auf eine in der Ebene bewegliche Curve von unveränderlicher Gestalt wirken, erfordert die Erfüllung von drei Gleichungen. Bei einem Systeme von $n$ Curven, die sich in $p$ Punkten berühren, hat man daher $3n$ Gleichungen, worin $p$ unbekannte Pressungen vorkommen. Aus diesen $3n$ Gleichungen lassen sich zuerst 3 Gleichungen folgern, welche dem Gleichgewichte aller $n$ Curven, als wären sie fest mit einander verbunden, angehören; und wenn sich ausser diesen drei noch andere von Pressungen freie Gleichungen finden lassen, so sind dies die Bedingungen des Gleichgewichts wegen statt findender gegenseitiger Beweglichkeit der Curven in der Ebene. Eine solche Beweglichkeit giebt es daher immer, wenn $3n - p > 3$, also $p < 3(n-1)$, d. h. wenn sich die $n$ Curven in weniger als $3(n-1)$ Punkten berühren. Bei $3(n-1)$ und mehrern Berührungen dagegen, und wenn je zwei Curven sich in gleichviel Punkten berühren, herrscht im Allgemeinen, nach ähnlichen Schlüssen, wie im vor. §., gegenseitige Unbeweglichkeit. Berühren sich daher je zwei Curven in $m$ Punkten, und ist folglich die Zahl aller Berührungen $= \frac{1}{2} mn(n-1)$, so giebt es keine gegenseitige Beweglichkeit mehr, wenn $\frac{1}{2} mn(n-1) =$ oder $> 3(n-1)$, d. i. wenn $mn =$ oder $> 6$, und wir ziehen daraus den Schluss:

*Wenn in einer Ebene von* 6 *Curven je zwei sich in* 1 *Punkte, oder von* 3 *Curven je zwei sich in* 2 *Punkten, oder wenn* 2 *Curven sich in* 3 *Punkten berühren, so können weder die* 6, *noch die* 3, *noch die* 2 *Curven in der Ebene dergestalt an einander verschoben werden, dass sie einander in eben so viel Punkten, als anfänglich, zu berühren fortfahren,* — jedoch mit Ausnahme besonderer Formen der Curven; ist z. B. die eine von zwei Curven ein Kreis, so bleibt gegenseitige Beweglichkeit, in wieviel Punkten sie auch von der andern berührt werden mag.

---

## §. 244.

Die Art und Weise über die gegenseitige Beweglichkeit mit einander verbundener Körper zu entscheiden, kann insbesondere dazu nützen, um bei irgend einer geometrischen Figur zu bestimmen, wie viel Stücke derselben gegeben seyn müssen, um daraus alle übrigen finden zu können. Denn nur dann, wenn von einander unabhängige Stücke der Figur in so grosser Anzahl vorhanden sind, dass daraus die übrigen sich bestimmen lassen, haben sie auch eine bestimmte, also unveränderliche Lage gegen einander. Reicht aber die Anzahl der gegebenen Stücke zur Bestimmung der übrigen noch nicht hin, so bleibt auch ihre gegenseitige Lage, zum Theil wenigstens, unbestimmt und veränderlich. Finden sich daher, indem man Kräfte auf die Figur wirken lässt und die gegebenen Stücke von unveränderlicher Grösse und Form annimmt, nur 6 Bedingungen des Gleichgewichts oder 3, nachdem die Figur einen Raum von 3 Dimensionen einnimmt, oder auf eine Ebene beschränkt ist, so sind diese Stücke zur Ermittelung der übrigen hinreichend.

## §. 245.

Um dieses durch einige Beispiele zu erläutern, wollen wir zuerst von einem Polyeder sämmtliche Kanten ihren Längen nach gegeben seyn lassen. Die Anzahl derselben heisse $k$, die der Ecken $e$ und die der Flächen $f$. Wir denken uns demnach das Polyeder als ein System von an sich frei beweglichen $e$ Punkten, $k$ Linien und $f$ Ebenen, die dergestalt mit einander verbunden sind, dass jeder der $e$ Punkte in gewissen drei oder mehrern der $f$ Ebenen zugleich zu bleiben genöthigt ist, jede der $k$ Linien aber von gegebener Länge ist und gewisse zwei der $e$ Punkte, die sich an ihren Enden befinden, in unabänderlicher Entfernung von einander hält. Lassen wir nun auf die $e$ Ecken Kräfte wirken, und ist das Ganze im Gleichgewichte, so muss auch jede Ecke, jede Kante und jede Fläche besonders im Gleichgewichte seyn.

Auf jede Ecke wirken die unmittelbar an ihr angebrachten Kräfte, die Pressungen von den angränzenden Kanten und die Pressungen von den Flächen, in denen sie zugleich sich befindet. Das Gleichgewicht an jeder Ecke zwischen allen diesen Kräften wird durch 3 Gleichungen ausgedrückt, also an allen $e$ Ecken durch $3e$ Gleichungen.

Das Gleichgewicht an jeder Kante ist schon dargestellt, wenn wir die zwei Pressungen, die jede Kante auf die zwei Ecken an ihren Enden ausübt, einander gleich und entgegengesetzt annehmen.

Das Gleichgewicht an jeder Fläche endlich zwischen den Pressungen, welche sie von den in ihr befindlichen Ecken erleidet, führt zu 3 Gleichungen (§. 73.), da diese Pressungen auf der Fläche normal und daher unter sich parallel sind, also das Gleichgewicht an allen $f$ Flächen zu $3f$ Gleichungen.

Man hat demnach in Allem $3e + 3f$ Gleichungen, aus denen aber noch die darin vorkommenden Pressungen eliminirt werden müssen. Diese sind erstlich die $k$ Pressungen der eben so viel Kanten und zweitens $2k$ Pressungen der Flächen. Denn jede Fläche erleidet so viele Pressungen, als sie Ecken, also auch so viele, als sie Kanten hat, und da jede Kante zweien Flächen gemeinschaftlich zugehört, so ist die Anzahl aller Pressungen der Flächen gleich der doppelten Anzahl der Kanten. In Allem sind es daher $3k$ Pressungen. Die Zahl der nach Elimination der Pressungen übrig bleibenden Gleichungen ist folglich $= 3e + 3f - 3k = 6$, da nach Euler's Theorem $e + f - k = 2$ ist. Die Theile des Systems haben mithin keine gegenseitige Beweglichkeit, und wir schliessen hieraus den übrigens schon bekannten Satz:

**Sind sämmtliche Kanten eines Polyeders gegeben, so lassen sich damit alle übrigen Stücke desselben bestimmen.**

Doch finden von jener Unbeweglichkeit und mithin auch von diesem Satze in speciellen Fällen Ausnahmen statt. Eine solche macht z. B. ein Prisma; denn sind bloss die Kanten desselben unveränderlich, so kann, wenn die eine Grundfläche unbeweglich angenommen wird, die Richtung der einander parallelen Seitenkanten jede beliebige seyn.

## §. 246.

Ein Polyeder ist ein System zusammenhängender ebener Vielecke im Raume. Projiciren wir jetzt ein dergleichen System auf eine Ebene, oder, was dasselbe ist, construiren wir in einer Ebene ein System von Vielecken, bei welchem, eben so wie beim Polyeder, jede Kante zwei Vielecken immer zugleich angehört, so ist wiederum $e+f-k=2$. Dabei wird aber nur in besondern Fällen durch die Kanten allein alles Uebrige bestimmt seyn. Denn nimmt man die Kanten wiederum von unveränderlicher Länge an, und sollen Kräfte, die man in der Ebene an den Ecken anbringt, im Gleichgewichte seyn, so hat man für jede Ecke zwischen den unmittelbar auf sie wirkenden Kräften und den Pressungen von den angränzenden Kanten zwei Gleichungen, also zusammen $2e$ Gleichungen, wenn man die zwei Pressungen, die jede Kante auf die zwei an sie stossenden Ecken ausübt, schon von vorn herein einander gleich und entgegengesetzt annimmt. Aus diesen $2e$ Gleichungen die $k$ Pressungen der Kanten eliminirt, müssen daher 3 Gleichungen übrig bleiben, und es muss folglich $2e - k = 3$ seyn, wenn die Theile der Figur keine gegenseitige Beweglichkeit haben sollen. Diess fliesst auch schon daraus, dass bei einem Systeme von $e$ Punkten in einer Ebene $2e - 3$ von einander unabhängige Stücke zur Bestimmung der übrigen hinreichen *).

Weil $e + f - k = 2$, so kann man die Bedingung $2e - k = 3$ auch ausdrücken durch: $e = f + 1$ und $2f = k + 1$, d. h.

Sollen bei einem Systeme zusammenhängender Vielecke in einer Ebene sämmtliche Kanten von einander unabhängig, von ihnen aber alle übrigen Stücke abhängig seyn, so muss die Eckenzahl um Eins grösser als die Flächenzahl seyn; oder, was auf dasselbe hinauskommt: die Kantenzahl muss um Eins geringer als die doppelte Flächenzahl seyn.

Besteht das System in der Ebene aus $\gamma$ Dreiecken, $\delta$ Vierecken, $\varepsilon$ Fünfecken, u. s. w., so ist offenbar

$$f = \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots \text{ und } 2k = 3\gamma + 4\delta + 5\varepsilon + \ldots$$

Hiermit verwandelt sich die Gleichung $2f = k + 1$ in

---

*) Bei einem Systeme von $e$ Punkten im Raume sind $3e - 6$ Stücke höchstens von einander unabhängig, und von ihnen alle übrigen abhängig. Ob aber gleich, wie eben gezeigt worden, die Kantenlängen eines Polyeders zur Bestimmung aller übrigen hinreichen, so ist dennoch nicht im Allgemeinen $3e - 6 = k$. Denn hat ein Polyeder nicht bloss Dreiecke, sondern auch Vierecke, Fünfecke etc. zu Gränzflächen, so sind noch die Bedingungen, dass die 4te Ecke jedes Vierecks, die 4te und 5te jedes Fünfecks, etc. in der Ebene der 1sten, 2ten und 3ten Ecke liegen, als gegebene Stücke zu betrachten. Die Gleichung $3e - 6 = k$, also auch die damit identischen $2k = 3f$ und $2e = f + 4$, gelten daher nur für Polyeder, welche bloss von Dreiecken begränzt sind.

$$\gamma = 2 + \varepsilon + 2\zeta + 3\eta + \ldots,$$

woraus wir schliessen, dass bei derselben Forderung unter den Flächen des Systems wenigstens zwei Dreiecke seyn müssen, und zwar dann nicht mehr als zwei Dreiecke, wenn die übrigen Flächen bloss Vierecke sind. Dies ist z. B. der Fall, wenn man aus 6 Punkten $A$, $B$,... $F$ 2 Dreiecke $ABC$, $DEF$ und 3 Vierecke $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ construirt, wobei $e = 6$, $k = 9$ und $f = 5$ ist. Zwei Dreiecke $ABC$ und $DEF$ in einer Ebene, deren Ecken durch drei Gerade $AD$, $BE$ und $CF$ von unveränderlicher Länge verbunden sind, haben demnach eine unveränderliche Lage gegen einander; oder allgemeiner noch ausgedrückt:

Werden von zwei in einer Ebene enthaltenen und darin beweglichen Figuren 3 Punkte der einen mit 3 Punkten der andern durch 3 Gerade von unveränderlicher Länge verbunden, so ist damit ihre gegenseitige Beweglichkeit aufgehoben. — Bei zwei Figuren im Raume geschah dieses erst durch 6 Verbindungslinien (§. 239. zu Ende.).

Ein anderes Beispiel dieser Art ist folgendes: Von zwei Vierecken $ABCD$ und $FGHI$ (Fig. 64.) in einer Ebene verbinde man die Ecken des einen mit denen des andern durch die 4 Geraden $AF$, $BG$, $CH$, $DI$. Hierdurch entstehen 4 neue Vierecke $AG$, $BH$, $CI$, $DF$, welche in Verbindung mit den 2 anfänglichen Vierecken und unter der Voraussetzung, dass sämmtliche 12 Linien von unveränderlicher Länge sind, ein noch veränderliches System bilden, weil Dreiecke fehlen. Fügt man aber noch eine Diagonale eines dieser Vierecke, als eine Linie von constanter Länge, hinzu, z. B. die Diagonale $AC$ des Vierecks $ABCD$, so verwandelt sich dieses Viereck in zwei Dreiecke und es tritt Unveränderlichkeit ein. Da hierdurch schon das System der 4 Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ unveränderlich wird, so werden, wenn wir dieses System unbeweglich setzen, auch die 4 Punkte $F$, $G$, $H$, $I$ unbeweglich, welches folgenden Satz giebt:

**Hat man in einer Ebene ein bewegliches Viereck mit constanten Seitenlängen und verbindet die vier Ecken desselben durch vier Linien von gleichfalls constanten Längen mit vier unbeweglichen Punkten der Ebene, so wird damit das Viereck selbst unbeweglich.**

Dass dieser Satz auch vom Dreiecke gilt, fliesst unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Er gilt aber, wie man sich leicht überzeugen kann, auch von jedem mehrseitigen Vielecke.

## §. 247.

Wenn, wie wir in dem letzten Beispiele setzten, das zu untersuchende System unbewegliche Punkte mit enthält, und zwar wenigstens zwei oder drei solcher Punkte, nachdem das System in einer Ebene begriffen ist, oder nicht, so wird die gegenseitige Unbeweglichkeit seiner Theile zu einer absoluten Unbeweglichkeit.

Bei der statischen Untersuchung der absoluten Unbeweglichkeit fallen die 6 Gleichungen für das Gleichgewicht des Systems, als eines festen Ganzen, weg, und man hat bloss darauf zu achten, ob sich aus den Gleichungen für das Gleichgewicht der nicht unmittelbar unbeweglich angenommenen Theile die Pressungen eliminiren lassen, oder nicht. Denn im ersten Falle, wo man, nach Elimination der Pressungen, die beim Gleichgewichte zu erfüllenden Bedingungen erhält, muss noch Beweglichkeit statt finden; im zweiten Falle dagegen, also wenn die Anzahl der Pressungen eben so gross oder grösser, als die der Gleichungen, ist, ist das System unbeweglich.

Berühren sich z. B. zwei Körper in mehrern Punkten, und ist der eine Körper unbeweglich, so hat man bloss die 6 Gleichungen des Gleichgewichts für den andern, und so viel Pressungen, als es Berührungen giebt. Bei 6 und mehrern Berührungen wird folglich auch der andere Körper unbeweglich.

Oder hat man, wie im vor. §., in einer Ebene ein Vieleck $ABC\ldots$ mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, und verbindet jede Ecke durch eine Linie von constanter Länge mit einem unbeweglichen Punkte der Ebene, $A$ mit $A'$, $B$ mit $B'$, u. s. w., so giebt es, wenn an jeder Ecke eine Kraft angebracht wird, für das Gleichgewicht jeder Ecke, z. B. der Ecke $B$, zwei Gleichungen zwischen der angebrachten Kraft und den Pressungen auf $B$ von den Linien $AB$, $BC$ und $BB'$. Damit ferner die Seiten $AB$, $BC$,... im Gleichgewichte sind, müsssn die zwei Pressungen, welche jede auf die an ihren Enden befindlichen Ecken ausübt, einander gleich und entgegengesetzt seyn, also die Richtungen der Seiten selbst haben, und wegen des Gleichgewichts der Linien $AA'$, $BB'$,... müssen ihre Pressungen gleicher Weise in sie selbst fallen. Es giebt daher, wenn das Vieleck $n$ Ecken hat, in Allem $2n$ Gleichungen, und eben so viel unbekannte Pressungen, nämlich die der $n$ Seiten und die der $n$ Linien von den Ecken nach den unbeweglichen Punkten. Das System ist mithin unbeweglich.

Hätte es noch Beweglichkeit, so würden sich $A$, $B$,... in Kreisen um $A'$ $B'$,... als Mittelpunkte bewegen. Ein Vieleck in einer Ebene, dessen Seiten von constanter Länge sind, ist daher unbeweglich, wenn seine Ecken in unbeweglichen Kreisen beweglich sind, also auch überhaupt in unbeweglichen Linien der Ebene, da die Elemente der Linien, in denen sich die Ecken gerade befinden, immer als Elemente von Kreisen angesehen werden können. Auch folgt dieses unmittelbar schon daraus, dass, wenn Punkte in gegebenen Linien so fortgerückt werden, dass der erste von dem zweiten, der zweite von dem dritten, etc. und der vorletzte von dem letzten in ungeändertem Abstande bleibt, im Allgemeinen nicht auch der Abstand des letzten von dem ersten constant bleiben wird.

Zusatz. Aus demselben Grunde fliesst auch die Unbeweglichkeit eines ebenen Vielecks von gerader Seitenzahl, dessen Seiten von unveränderlicher Länge sind, und von denen die eine um die andere, also etwa die 1ste, 3te, 5te etc., einen unbeweglichen Punkt enthält, so dass jede dieser Seiten um ihren unbeweglichen Punkt in der Ebene gedreht, jedoch nicht auch an ihm verschoben werden kann. Denn auch hier sind die Ecken des Vielecks in unbeweglichen Linien beweglich, in Kreisen, welche jene unbeweglichen Punkte zu Mittelpunkten haben.

## §. 248.

Auf ähnliche Weise erhellet die Unbeweglichkeit eines Vielecks $ABC\ldots$, dessen Ecken in unbeweglichen Geraden $l, m, n,\ldots$ einer Ebene beweglich, und dessen Seiten von veränderlicher Länge und durch unbewegliche Punkte $F, G,\ldots$ der Ebene zu gehen genöthigt sind. Diese Unbeweglichkeit findet auch noch statt, wenn die Figur nicht mehr eben ist, sondern die Geraden $l, m, n,\ldots$ irgend ein Vieleck im Raume bilden, und jeder der Punkte $F$, $G$, $H$,... in die Ebene der zwei auf einander folgenden Seiten des Vielecks $lmn$... fällt, in welchen die Ecken der durch den Punkt gehenden Seite des Vielecks $ABC$... sich bewegen können.

Als ein besonderer Fall hiervon ist der zu betrachten, wenn die Geraden $l$, $m$, $n$,... einander parallel sind. Man denke sich dieselben vertical und nehme grösserer Einfachheit willen die Punkte $F$, $G$, $H$,... in einer und derselben horizontalen Ebene $\mu$ enthalten an, so dass sie in den Durchschnitten von $\mu$ mit den verticalen Ebenen $lm$, $mn$, etc. liegen, mit welchen Durchschnitten anfangs auch die Seiten des Vielecks $ABC$... coincidiren mögen. Um für diesen Fall die Unbeweglichkeit der Figur statisch zu beweisen, lasse man auf die Seiten des Vielecks Kräfte nach gleichfalls verticalen Richtungen wirken. Alsdann giebt es für jede Seite des Vielecks 2 Gleichungen, also überhaupt $2n$ Gleichungen, und eben so gross ist die Zahl der verticalen Pressungen, nämlich $n$ Pressungen, welche die Seiten von den unbeweglichen Punkten erleiden, und eben so viel Pressungen an den $n$ Ecken. Mithin ist die Figur unbeweglich.

## §. 249.

In den vorigen zwei §§. liessen wir die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich seyn, und nahmen überdies an, das einemal, dass die Seiten des Vielecks von constanter Länge seyen, das anderemal, dass die Seiten durch unbewegliche Punkte gehen. Beseitigen wir jetzt die unbeweglichen Geraden und lassen letztere zwei Bedingungen zugleich statt finden, so dass die Seiten eines Vielecks von unveränderlicher Länge sind und unbeweglichen Punkten zu begegnen genöthigt sind, so ist das Vieleck, wenn es auf eine Ebene beschränkt ist, gleichfalls unbeweglich.

Denn für das Gleichgewicht jeder Seite hat man zwischen den Kräften, die man an ihr in der Ebene des Vielecks anbringt, und den drei Pressungen, welche sie dann von dem unbeweglichen Punkte, dem sie begegnen muss, und an ihren beiden Enden von den anstossenden Seiten erleidet, drei Gleichungen. Erstere, von dem unbeweglichen Punkte bewirkte Pressung ist auf der Seite normal und nur ihrer Intensität nach unbekannt. Letztere zwei Pressungen kennt man aber auch ihrer Richtung nach nicht. Die Gesammtzahl aller der von letztern Pressungen herrührenden Stücke ist daher $= 2n$, die Zahl der von erstern Pressungen herrührenden $= n$, die Zahl der Gleichungen aber $= 3n$. Mithin herrscht Unbeweglichkeit.

Ist ferner das Vieleck nicht in einer Ebene enthalten, so ist die Anzahl der unbekannten Stücke (Intensitäten und Winkel) wegen der Pressungen der unbeweglichen Punkte auf die an ihnen beweglichen Seiten ersichtlich $= 2n$, und die wegen der Pressungen an den Ecken, $= 3n$; die Anzahl der Gleichungen aber ist $= 5n$, nämlich 5 für jede Seite, da, wie sich leicht zeigen lässt, das Gleichgewicht zwischen Kräften im Raume, welche auf Punkte wirken, die in einer Geraden liegen, schon durch 5 Gleichungen bedingt ist. Das Vieleck ist daher auch in diesem Falle unbeweglich.

# Fünftes Kapitel.

## Von der unendlich kleinen Beweglichkeit.

### §. 250.

Wenn bei einem Systeme mit einander verbundener Körper, oder überhaupt bei einer Figur, deren Theile einzeln gegen einander beweglich sind, aus den Gleichungen des Gleichgewichts, welche für die einzelnen Theile zwischen an ihnen angebrachten Kräften und den dadurch entstehenden Pressungen sich aufstellen lassen, entweder gar keine von Pressungen freie Gleichungen, oder nur diejenigen sechs oder drei Gleichungen gefunden werden können, welche für das Gleichgewicht der Figur, als eines fest zusammenhängenden Ganzen, erforderlich sind, so ist, wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, die Figur entweder ganz unbeweglich, oder doch die gegenseitige Lage ihrer Theile unveränderlich. Nichtsdestoweniger lassen sich in jedem solchen Falle specielle Bedingungen für das Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen, unter denen die Unbeweglichkeit aufhört, Bedingungen, die nicht selten zu noch andern sehr bemerkenswerthen Eigenschaften der Figur hinführen und daher einer nähern Erörterung nicht unwerth seyn möchten.

Um die Untersuchung nicht zu weit auszudehnen, wollen wir bloss den Fall in Betracht ziehen, wo die Anzahl der von den Pressungen herrührenden unbekannten Grössen eben so gross als die Zahl der Gleichungen ist, und wo daher, damit Unbeweglichkeit herrsche, jede der Unbekannten aus den Gleichungen sich bestimmen, keine aber von den Unbekannten ganz freie Gleichung sich finden lässt.

Ist eine Pressung nicht bloss ihrer Intensität, sondern auch ihrer Richtung nach unbekannt, so treten einer oder zwei Winkel, wodurch die Richtung in einer gegebenen Ebene oder im Raume überhaupt bestimmt wird, als Unbekannte mit auf. Um aber grösserer Gleichförmigkeit willen es bloss mit unbekannten Intensitäten zu thun zu haben, wollen wir statt einer Pressung, deren unbekannte Richtung in eine gegebene Ebene fällt, zwei setzen, die, an demselben Punkte, wie die erstere, angebracht, nach zwei beliebig angenommenen Richtungen in der Ebene wirken; und wenn auch keine Ebene gegeben ist, in welcher die Richtung begriffen ist, so wollen wir uns die Pressung nach drei willkührlichen Richtungen zerlegt denken und daher statt der einen Pressung drei setzen, welche nach gegebenen Richtungen thätig sind. Die Anzahl der Unbekannten bleibt dabei gehörigermassen unverändert.

Seyen demnach, wie wir uns dieser Bemerkung zufolge ausdrücken können, eben so viel Pressungen als Gleichungen vorhanden, und aus den Gleichungen alle Pressungen bis auf eine eliminirbar. Man führe eine solche Elimination aus. Da alle anfänglichen Gleichungen hinsichtlich der Pressungen sowohl, als der unmittelbaren Kräfte, von linearer Form sind, so wird es auch die durch die Elimination erhaltene seyn. Man setze in dieser Gleichung den Coefficient der einzigen darin noch vorkommenden Pressung, welcher mit $\alpha$ bezeichnet werde, $= 0$, so bleiben in der Gleichung nur noch Kräfte, aber keine Pressungen zurück. Da also jetzt die an der Figur angebrachten Kräfte nur dann sich das Gleichgewicht halten, wenn dieser zwischen ihnen allein bestehenden Gleichung Genüge geschieht, so schliessen wir:

Unter der Voraussetzung, dass zwischen den Theilen der Figur die Gleichung $\alpha = 0$ statt findet, ist die ohnedies unbewegliche Figur beweglich.

## §. 251.

Um die Natur der Bedingungsgleichung $\alpha = 0$ für die Beweglichkeit und der dann nöthig werdenden Gleichung für das Gleichgewicht näher zu untersuchen, wollen wir annehmen, dass in dem Systeme nur drei Pressungen $p$, $q$, $r$ vorkommen. Die eben so vielen Gleichungen für das Gleichgewicht der einzelnen Theile der Figur seyen:

$$(1)\quad \begin{cases} S + ap + bq + cr = 0, \\ S' + a'p + b'q + c'r = 0, \\ S'' + a''p + b''q + c''r = 0, \end{cases}$$

wo $S$, $S'$, $S''$ lineare Functionen der auf die Figur wirkenden Kräfte vorstellen, und $a$, $b$,... $c''$ gegebene Coefficienten der Pressungen sind. Um nun zwei der drei Pressungen, etwa $q$ und $r$, zu eliminiren, multiplicire man die 3 Gleichungen resp. mit $f$, $g$, $h$, addire sie und setze zur Bestimmung der Verhältnisse zwischen $f$, $g$, $h$:

$$(2)\ bf + b'g + b''h = 0, \quad (3)\ cf + c'g + c''h = 0.$$

Hiermit wird

$$(4)\quad Sf + S'g + S''h + (af + a'g + a''h)p = 0,$$

worin nur noch die einzige Pressung $p$ enthalten ist. Setzen wir den Coefficienten derselben $= 0$, so kömmt:

$$(5)\quad af + a'g + a''h = 0,$$

und damit $(6)\quad Sf + S'g + S''h = 0,$

von welchen zwei Gleichungen die erstere die Bedingung $\alpha = 0$ für die Beweglichkeit der Figur, die letztere aber die Bedingung für das bei dieser Beweglichkeit statt finden sollende Gleichgewicht ist. Die Gleichung $\alpha = 0$ kann daher auch als das Resultat der Elimination von $f, g, h$ aus (2), (3) und (5) angesehen werden, und man muss folglich immer zu der nämlichen Gleichung $\alpha = 0$ gelangen, welches auch nach Elimination der übrigen Pressungen die noch rückständige ist. Dasselbe folgt auch noch daraus, dass man $\alpha = 0$ als die Bedingung betrachten kann, unter welcher sich $p, q, r$ aus den 3 Gleichungen (1) zugleich eliminiren lassen, so wie auch daraus, dass, weil $\alpha$ bloss aus den Coefficienten $a, b, \ldots c''$ von $p, q, r$ zusammengesetzt ist, die Gleichung $\alpha = 0$ aus den 3 Gleichungen (1) hervorgehen muss, wenn man in diesen die Kräfte, und damit $S, S', S''$ null setzt und hierauf die 2 Verhältnisse zwischen den 3 Pressungen aus (1) eliminirt.

Man bemerke noch, dass durch Zerlegung von (4) in die zwei Gleichungen (5) und (6), also durch Annahme von $\alpha = 0$, der aus (4) zu folgernde Werth von $p$, und damit auch die Werthe der beiden andern Pressungen $q$ und $r$ unbestimmt werden.

Dieselben Schlüsse lassen sich nun offenbar auch auf jede grössere Anzahl anfänglicher Gleichungen, worin eben so viele Pressungen vorkommen, anwenden, und man gelangt demnach immer zu derselben Bedingungsgleichung für die Beweglichkeit und der dann zu erfüllenden Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, welches auch die Pressung ist, bis auf welche alle übrigen Pressungen aus den Gleichungen eliminirt werden. Beabsichtigt man bloss die Bedingung für die Beweglichkeit zu finden, so kann man die Rechnung dadurch noch vereinfachen, dass man die Glieder, welche nicht Pressungen, sondern Kräfte enthalten, gleich anfangs weglässt und aus den somit abgekürzten Gleichungen die Pressungen, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen denselben, eliminirt. Die Pressungen selbst endlich werden beim Gleichgewichte der beweglich gewordenen Figur jederzeit unbestimmt.

## §. 252.

Die Unbeweglichkeit, welche statt findet, wenn die Anzahl der in den Gleichungen vorkommenden Pressungen eben so gross, als die der Gleichungen selbst ist, ist von der Beschaffenheit, dass sie sogleich aufhört, wenn nur eines der unveränderlich gesetzten Stücke der Figur, es heisse $a$, veränderlich angenommen wird. Denkt man sich nun die Figur in die Bewegung versetzt, die durch die Annahme, dass $a$ veränderlich seyn soll, möglich wird, so werden dabei je zwei zunächst auf einander folgende Werthe von $a$ im Allgemeinen von einander verschieden, und nur dann einander gleich seyn, wenn $a$ ein Maximum oder Minimum geworden ist. Es wird folglich, wenn man das $a$, sobald es diesen seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht hat, wieder unveränderlich werden lässt, der Figur eine, obwohl unendlich kleine, Beweglichkeit übrig bleiben.

Die Bedingungsgleichung $\partial a = 0$, bei welcher die ohnedies unbewegliche Figur Beweglichkeit erhalten soll, kann daher, im Allgemeinen wenigstens, keine andere Relation zwischen den Theilen der Figur ausdrücken, als diejenige, bei welcher $a$ seinen grössten oder kleinsten Werth hat, und wobei die Figur noch um ein unendlich Geringes verrückbar ist.

Die bei $\alpha = 0$ statt findende Beweglichkeit der Figur ist daher im Allgemeinen unendlich klein, und jedes von den unveränderlich gesetzten Stücken der Figur, wie $\alpha$, hat, wenn man es veränderlich werden, die übrigen aber constant bleiben lässt, bei der Relation $\alpha = 0$ seinen grössten oder kleinsten Werth. Man sieht hieraus, wie die Statik nicht selten mit Vortheil angewendet werden kann, um geometrische Aufgaben über Maxima und Minima zu lösen. Vorausgesetzt, dass je zwei veränderliche Stücke der Figur von einander abhängig sind, dass also, wenn irgend ein Werth eines der veränderlichen gegeben ist, damit die gleichzeitigen Werthe der übrigen veränderlichen bestimmt sind, nehme man das veränderliche Stück, dessen grösster oder kleinster Werth gesucht wird, als unveränderlich an und lasse, nachdem die Figur in einer Ebene oder im Raume überhaupt enthalten ist, zwei oder drei Punkte derselben unbeweglich werden, wenn anders nicht schon unbewegliche Punkte in der angegebenen oder in noch grösserer Zahl darin vorkommen. Durch Ersteres wird die Figur selbst unveränderlich und durch Letzteres unbeweglich. Man bringe nun an der Figur Kräfte an, entwickele die Gleichungen für das Gleichgewicht ihrer einzelnen Theile und eliminire alle darin enthaltenen Pressungen, die immer mit den Gleichungen selbst in gleicher Zahl vorhanden seyn werden, bis auf eine, so wird der Coefficient dieser noch übrigen Pressung, $= 0$ gesetzt, die Bedingung anzeigen, unter welcher jenes veränderliche Stück ein Maximum oder Minimum wird.

Nachfolgende Beispiele werden, diese Betrachtungen zu erläutern, dienen.

## §. 253.

**Aufgabe.** Die Bedingung zu finden, unter welcher ein Winkel $C$ eines ebenen Vierecks $ABCD$ (Fig. 65.), dessen Seiten unveränderliche Längen haben, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht.

**Auflösung.** Man nehme den Winkel $C$ unveränderlich an, lasse die Ecken $C$ und $D$, und somit auch $B$, unbeweglich werden, und untersuche nun, in welchem speciellen Falle der Ecke $A$ Beweglichkeit noch übrig bleibt. Zu dem Ende bringe man an $A$ eine Kraft $P$ nach einer beliebigen Richtung $AE$ in der Ebene des Vierecks an. Die Pressungen, welche dabei die Ecke $A$ von den Seiten $AB$ und $AD$ erfährt, seyen $b$ und $d$, so hat man für's Gleichgewicht von $A$ die zwei Gleichungen:

$$P \sin DAE = b \sin BAD, \quad P \sin EAB = d \sin BAD.$$

Aus diesen können aber die Pressungen $b$ und $d$ nur dann herausgehen, wenn $\sin BAD = 0$ ist, also wenn $A$ mit $B$ und $D$ in gerader Linie liegt. Dies ist demnach die Bedingung, unter welcher die Ecke $A$ noch eine, wiewohl unendlich kleine, Beweglichkeit hat, und wo folglich der Winkel $C$, wenn er veränderlich betrachtet wird, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht. Man gewahrt übrigens leicht, dass $C$ ein Maximum oder Minimum ist, nachdem $A$ in der Geraden $BD$ zwischen oder ausserhalb $B$ und $D$ liegt.

Man bemerke noch, dass, wenn $\sin BAD = 0$, jede der zwei Gleichungen des Gleichgewichts sich auf $P = 0$ reducirt; d. h. ist ein beweglicher Punkt $A$ mit zwei unbeweglichen $B$ und $D$ durch Linien von constanten Längen verbunden, und liegt $A$ mit $B$ und $D$

in einer Geraden, so reicht schon die kleinste Kraft hin, um $A$ aus der Geraden $BD$, jedoch nur um ein unendlich Weniges, zu entfernen.

## §. 254.

**Aufgabe.** Die Ecken eines ebenen Vierecks $ABCD$, (Fig. 66.), welches Seiten von constanter Länge, aber veränderliche Winkel hat, sind in unbeweglichen in der Ebene des Vierecks enthaltenen Linien $f$, $g$, $h$, $i$ beweglich, und daher das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247.). Die Bedingung, unter welcher es beweglich wird, und damit die Bedingung zu finden, unter welcher, wenn eine Seite des Vierecks veränderlich gesetzt wird, dieselbe ihren grössten oder kleinsten Werth erhält.

**Auflösung.** Man bringe an den Ecken $A$, $B$, $C$, $D$ resp. die Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S$ an und nenne $p$, $q$, $r$, $s$ ihre Richtungen. Die Pressungen, welche dann die Ecken von den Linien, in denen sie beweglich sind, erleiden, und welche daher auf den Linien selbst normal sind, heissen $T$, $U$, $V$, $W$, ihre Richtungen $t$, $u$, $v$, $w$. Werden nun die Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ des Vierecks resp. mit $a$, $b$, $c$, $d$ bezeichnet, so hat man (§. 220. zu Ende) für das Gleichgewicht zwischen den auf die Ecken wirkenden Kräften und Pressungen die Gleichungen:

$$\frac{P \sin dp + T \sin dt}{\sin da} = \frac{Q \sin bq + U \sin bu}{\sin ab},$$

oder, weil $t$, $u$, $v$, $w$ auf $f$, $g$, $h$, $i$ normal sind:

$$\frac{P \sin dp + T \cos df}{\sin da} = \frac{Q \sin bq + U \cos bg}{\sin ab},$$

und eben so $\frac{Q \sin aq + U \cos ag}{\sin ab} = \frac{R \sin cr + V \cos ch}{\sin bc}$,

$$\frac{R \sin br + V \cos bh}{\sin bc} = \frac{S \sin ds + W \cos di}{\sin cd},$$

$$\frac{S \sin cs + W \cos ci}{\sin cd} = \frac{P \sin ap + T \cos af}{\sin da}.$$

Setzt man nun in diesen vier Gleichungen, der in §. 251. gegebenen Vorschrift gemäss, die Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S = 0$ und eliminirt hierauf die Pressungen $T$, $U$, $V$, $W$, so kommt

$$(a) \quad \frac{\cos af}{\cos ag} \cdot \frac{\cos bg}{\cos bh} \cdot \frac{\cos ch}{\cos ci} \cdot \frac{\cos di}{\cos df} = 1,$$

als die gesuchte Bedingung.

## §. 255.

**Zusätze.** *a.* Man errichte in $A$, $B$, $C$, $D$ auf $f$, $g$, $h$, $i$ die 4 Normalen $AK$, $BL$, $CM$, $DN$. Begegne die 1ste derselben der 2ten in $L$, die 2te der 3ten in $M$, die 3te der 4ten in $N$ und die 4te der 1sten in $K$, so ist $\cos af = \sin LAB$, $\cos ag = \sin ABL$, und es verhält sich daher

$$\cos af : \cos ag = BL : AL,$$

und eben so $\cos bg : \cos bh = CM : BM$,

u. s. w. Hiermit wird die erhaltene Bedingungsgleichung:

$$\frac{AK}{AL} \cdot \frac{BL}{BM} \cdot \frac{CM}{CN} \cdot \frac{DN}{DK} = 1,$$

d. h.: Beschreibt man um das Viereck $ABCD$ ein zweites $KLMN$, dessen Seiten auf den Linien, in denen die Ecken des ersten beweglich sind, normal stehen, so muss das Product aus den Verhältnissen, nach denen die Seiten des zweiten von den Ecken des ersten getheilt werden, der Einheit gleich seyn.

*b.* Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich auch leicht auf rein geometrischem Wege darthun. Man nehme in $f, g, ..$ unendlich nahe bei $A, B ..$ die Punkte $A', B', C', D'$ dergestalt, dass I. $A'B' = AB$, II. $B'C' = BC$, III. $C'D' = CD$, so muss, wenn das Viereck $ABCD$ mit constanten Seitenlängen unendlich wenig im Vierecke $fghi$ verrückbar seyn soll, auch IV. $D'A' = DA$ seyn. Da also $A'B' = AB$, und weil, wegen der rechten Winkel $A'AL$ und $B'BL$, $A'L = AL$ und $B'L = BL$ ist, so ist der Winkel $A'LB' = ALB$, folglich der Winkel $ALA' = BLB'$, und es verhält sich daher

$$AA' : BB' = AL : BL.$$

Eben so fliessen aus II., III. und IV. die Proportionen:

$$BB' : CC' = BM : CM,$$
$$CC' : DD' = CN : DN,$$
$$DD' : AA' = DK : AK.$$

Zur Beweglichkeit ist aber das Zusammenbestehen der 4 Gleichungen I.,..IV. erforderlich, folglich auch das Zusammenbestehen der 4 daraus abgeleiteten Proportionen; diese aber, mit einander verbunden, führen zu der in *a.* erhaltenen Gleichung.

*c.* Der Winkel $A'B'C'$, in welchen bei Verrückung des Vierecks der Winkel $ABC$ übergeht, ist $= A'B'L + LB'M + MB'C'$. Nach *b.* sind aber die Dreiecke $A'B'L$ und $MB'C'$ den Dreiecken $ABL$ und $MBC$ gleich und ähnlich. Hiermit wird der Winkel $A'B'C' = ABL + LB'M + MBC = ABC + LB'M$. Der Winkel $ABC$ erhält daher bei der Verrückung das Increment $LB'M$, und bleibt folglich nur dann ungeändert, wenn $M$ mit $L$ zusammenfällt. Eben so wird bewiesen, dass der Winkel $BCD$ nur dann sich nicht ändert, wenn $N$ mit $M$ zusammenfällt; u. s. w. Soll folglich das Viereck ohne Aenderung seiner Winkel verrückbar seyn, so müssen die vier auf $f$, $g$, .. in $A$, $B$, .. errichteten Perpendikel sich in einem Punkte, er heisse $O$, schneiden. Dass umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, jederzeit auch Beweglichkeit statt findet, erhellet sogleich aus der Formel in *a.*, in welcher für diesen Fall $AL = AK$, $BM = BL$, etc. ist, aber auch schon daraus, dass, wenn das Viereck mit constant bleibenden Winkeln um den Punkt $O$ um ein unendlich Geringes gedreht wird, die Ecken $A$, $B$, .. Normalen auf $OA$, $OB$,... beschreiben und folglich in $f$, $g$, .. fortrücken.

*d.* Analoge Resultate, wie wir jetzt für ein Viereck gefunden haben, ergeben sich auch für jedes andere Vieleck. Soll insbesondere ein Dreieck $ABC$, dessen Seitenlängen constant sind, mit seinen Ecken in den Seiten $f$, $g$, $h$ eines unbeweglichen Dreiecks beweglich seyn, so müssen, weil mit den constant gesetzten Seitenlängen eines Dreiecks auch die Winkel desselben unveränderlich werden, die drei in $A$, $B$, $C$ auf $f$, $g$, $h$ errichteten Perpendikel sich in einem Punkte $O$ schneiden. Das Dreieck $ABC$ ist alsdann um $O$ ein unendlich Weniges drehbar.

Aehnlicher Weise zeigt sich, dass, wenn in einer Ebene zwei Curven in drei Punkten einander berühren und daher unbeweglich gegen einander sind (§. 243.) eine unendlich kleine Beweglichkeit in dem Falle eintritt, wenn die Normalen in den drei Berührungspunkten in einem Punkte zusammentreffen.

## §. 256.

Auf die jetzt behandelte Aufgabe reducirt sich auch der in §. 247. gedachte Fall, wenn die Ecken eines ebenen Vielecks, dessen Winkel sich ändern können, durch Linien von unveränderlicher Länge mit unbeweglichen Punkten in seiner Ebene verbunden sind, z. B. die Ecken *ABCD* des Vierecks *AC* (Fig. 64.) mit den Punkten *F*, *G*, *H*, *I*. Denn alsdann sind *A*, *B*,... an sich in Kreisen beweglich, deren Mittelpunkte *F*, *G*,.. sind, und die unendlich kleine Beweglichkeit, wenn sie anders möglich ist, besteht darin, dass *A*, *B*,.. in Linien fortrücken, welche auf den Verbindungslinien *AF*, *BG*,... normal sind. Diese Beweglichkeit findet aber nach §. 255. *a.* dann statt, wenn das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten des von den Verbindungslinien in ihrer Folge gebildeten Vielecks in den darin liegenden Ecken des beweglichen Vielecks geschnitten werden, der Einheit gleich ist.

Wenn die Verbindungslinien verlängert in einem Punkte *O* zusammentreffen, so wird das Vieleck um *O* um ein unendlich Weniges drehbar, und seine Winkel bleiben dabei ungeändert. Fallen aber die unbeweglichen Punkte selbst in einem einzigen *O* zusammen, so kann das Vieleck um *O* völlig herumgedreht werden, und die unendlich kleine Beweglichkeit wird eine endliche.

Sind die Ecken eines Dreiecks mit drei unbeweglichen Punkten verbunden, so müssen sich, wenn das Dreieck noch um ein unendlich Weniges verrückbar seyn soll, die drei Verbindungslinien in einem Punkte schneiden. Hat man daher überhaupt zwei in einer Ebene bewegliche Figuren und verbindet drei bestimmte

Punkte der einen mit drei bestimmten Punkten der andern durch drei gerade Linien von unveränderlicher Länge (§. 246.), so bleibt nur in dem Falle eine unendlich kleine gegenseitige Beweglichkeit noch übrig, wenn die drei Linien oder ihre Verlängerungen sich in einem Punkte begegnen.

## §. 257.

Aufgabe. Vier gerade Linien $a, b, c, d$ (Fig. 67.) von unbestimmter Länge, von denen jede der nächstfolgenden und die letzte der ersten zu begegnen genöthigt ist, liegen in einer horizontalen Ebene und sind resp. um die unbeweglichen Punkte $F, G, H, I$ dieser Ebene in verticalen Ebenen drehbar. Man soll für dieses System, welches im Allgemeinen unbeweglich ist (§. 248.), die Bedingung der Beweglichkeit und die dann nöthige Bedingung des Gleichgewichts finden.

Auflösung. Seyen resp. $A, B, C, D$ die Begegnungspunkte von $a$ und $b$, $b$ und $c$, etc. Weil $a, b, \ldots$ in verticalen Ebenen beweglich sind, so rücken diese Punkte, wenn das System beweglich ist, in verticalen Linien fort. Auf beliebige Punkte $P, Q, R, S$ der Linien $a, b, c, d$ lasse man Kräfte $p, q, r, s$ nach verticalen Richtungen wirken. Dabei seyen $t, u, v, w$ die Pressungen, welche in $A, B, C, D$ auf die Linien $a, b, c, d$ von den Linien $b, c, d, a$ (nach verticalen Richtungen) ausgeübt werden, also $-t, \ldots -w$ die Pressungen in $A, \ldots D$ von $a, b, c, d$ auf $b, c, d, a$. Die Gleichungen für's Gleichgewicht der um $F, \ldots I$ beweglichen Linien $a, \ldots d$ sind alsdann:

$$FP.p - FD.w + FA.t = 0,$$
$$GQ.q - GA.t + GB.u = 0,$$
$$HR.r - HB.u + HC.v = 0,$$

$$IS \,.\, s - IC \,.\, v + ID \,.\, w = 0.$$

Eliminirt man hieraus die Pressungen $t$, $u$, $v$, indem man in der 1sten Gleichung für $t$ seinen Werth aus der 2ten, hierauf in der resultirenden Gleichung für $u$ seinen Werth aus der 3ten substituirt, u. s. w. und bezeichnet man noch der Kürze willen die Momente $FP.p$, $GQ.q$,... der Kräfte $p$, $q$,.. mit $p_1$, $q_1$, $r_1$, $s_1$, so kommt:

$$p_1 - FD.w + \frac{FA}{GA}\left(q_1 + \frac{GB}{HB}\left(r_1 + \left(\frac{HC}{IC}\left(s_1 + ID.w\right)\right)\right)\right) = 0.$$

Hierin den Coefficienten der noch übrigen Pressung $w$, $= 0$ gesetzt, ergiebt sich die Bedingung der Beweglichkeit:

$$(A)\quad \frac{FA}{GA} \cdot \frac{GB}{HB} \cdot \frac{HC}{IC} \cdot \frac{ID}{FD} = 1,$$

und die rückständige Gleichung:

$$p_1 + \frac{FA}{GA}\left(q_1 + \frac{GB}{HB}\left(r_1 + \frac{HC}{IC} s_1\right)\right) = 0, \text{ oder}$$

$$(B)\quad f.p.FP + g.q.GQ + h.r.HR + i.s.IS = 0,$$

wo $f : g = GA : FA$, $g : h = HB : GB$, $h : i = IC : HC$, ist die alsdann nöthige Bedingung für's Gleichgewicht.

## §. 258.

**Zusätze.** *a.* Die Bedingungsgleichung für die Beweglichkeit des Vierecks $ABCD$ kann man noch einfacher, als im Vorigen, auf folgende Weise finden. Kommen durch Drehung der Linien $a$, $b$, $c$ um $F$, $G$, $H$ die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ in den verticalen Linien, worin sie beweglich sind, nach $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, so verhält sich offenbar

$$DD' : AA' = FD : FA,$$
$$AA' : BB' = GA : GB,$$
$$BB' : CC' = HB : HC.$$

Damit nun auch die um $I$ drehbare Linie $d$ durch $C'$ und $D'$ gehen könne, muss sich verhalten:

$$CC' : DD' = IC : ID.$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit den drei vorhergehenden Proportionen die obige Bedingungsgleichung. — Man bemerke noch, dass die nachherigen Oerter $A'$, $B'$,.. von $A$, $B$,.. abwechselnd über und unter die horizontale Ebene fallen, wenn, wie in der Figur, die unbeweglichen Punkte $F$, $G$,.. in den Linien $a$, $b$,.. zwischen den Begegnungspunkten $A$, $B$,.. dieser Linien, nicht ausserhalb derselben, liegen. Uebrigens sieht man leicht, dass die Beweglichkeit, wenn eine solche statt findet, hier nicht eine unendlich kleine ist, sondern dass bei der vorausgesetzten unbestimmten Länge der Linien $a$, $b$,.. die Punkte $A$, $B$,.. jeden beliebigen Abstand von der horizontalen Ebene erreichen können.

*b.* Die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht lässt sich auch durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entwickeln. Sind nämlich $P'$, $Q'$,.. die Oerter, welche die Angriffspunkte $P$, $Q$,.. der Kräfte $p$, $q$,.. nach einer unendlich kleinen Verrückung des Systems einnehmen, so sind $PP'$, $QQ'$,... vertical, fallen daher mit den Richtungen von $p$, $q$,.. zusammen, und es ist folglich beim Gleichgewichte:

$$PP' \cdot p + QQ' \cdot q + RR' \cdot r + SS' \cdot s = 0.$$

Nun verhält sich

$$PP' : AA' = FP : FA,$$
$$AA' : QQ' = GA : GQ,$$

mithin $PP' : QQ' = GA . FP : FA . GQ$,

u. s. w. übereinstimmend mit dem bereits Gefundenen.

*c.* Zu ganz analogen Resultaten wird man geführt, wenn statt 4 Linien, 3 oder mehr als 4 Linien auf die vorige Weise mit einander verbunden sind und um unbewegliche Punkte gedreht werden können. Für 3 Linien insbesondere, $BC$, $CA$, $AB$, welche resp. um die Punkte $F$, $G$, $H$ drehbar sind, ergiebt sich als Bedingung der Beweglichkeit:

$$\frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GA} \cdot \frac{HA}{HB} = 1.$$

Nur also, wenn $F$, $G$, $H$ in gerader Linie liegen, (vergl. §. 232. *c.*), ist das Dreieck $ABC$ beweglich. Und in der That lässt es sich dann um die Gerade $FGH$, als um eine Axe drehen. Die virtuellen Geschwindigkeiten $PP'$, $QQ'$, $RR'$ sind alsdann den Abständen der Punkte $P$, $Q$, $R$ von dieser Axe proportional, und die Gleichung $PP'.p + .. = 0$, d. i. die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, drückt, wie zu erwarten stand, aus, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, um welche das Dreieck drehbar ist, null seyn muss.

*d.* Eben so wie das Dreieck wird auch das Viereck und jedes andere Vieleck, sobald die unbeweglichen Punkte ihrer Seiten in einer Geraden liegen, um diese Gerade drehbar. Dasselbe giebt auch die Bedingungsgleichung zu erkennen, da immer das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines ebenen Vielecks von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, der (negativen) Einheit gleich ist. Indessen ist diese Beweglichkeit bei Vielecken von mehr als drei Seiten nur als ein specieller Fall zu betrachten, der sich dadurch noch auszeichnet, dass das anfänglich ebene Vieleck ein solches auch während der Bewegung bleibt, und bei einer nur unendlich kleinen Bewegung seine Form nicht ändert.

*c.* Zwischen der jetzigen Aufgabe und der vorhergehenden findet in gewissem Sinne ein duales Verhältniss statt. Denn so wie dort die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich waren, so sind hier die Seiten eines Vielecks um unbewegliche Punkte drehbar. Diese Dualität der beiden Aufgaben giebt sich auch in der Aehnlichkeit der Bedingungsgleichungen ($a$) und ($A$) zu erkennen. Denn aus der letztern Gleichung erhält man die erstere, wenn man die grossen Buchstaben in die entsprechenden kleinen verwandelt und von den durch $af$, $ag$,... ausgedrückten Winkeln die Cosinus nimmt.

Auf gleiche Art lässt sich aus der Gleichung ($B$) für's Gleichgewicht der auf beliebige Punkte $P$, $Q$,.. der Linien $a$, $b$,.. und rechtwinklig auf der Ebene der letztern wirkenden Kräfte $p$, $q$,.. die Gleichung für's Gleichgewicht der nach beliebigen Richtungen $p$, $q$,.. auf die Punkte $A$, $B$,.. und in der Ebene der letztern wirkenden Kräfte $P$, $Q$,.. herleiten. Es ist nämlich diese Gleichung:

$$(b)\; F.P\cos fp + G.Q\cos gq + H.R\cos hr + I.S\cos is = 0,$$

wo $F:G = \cos ga : \cos fa$, $G:H = \cos hb : \cos gb$, etc. Den Beweis dafür wird man sich leicht selbst entwickeln.

Noch eine Betrachtung, die auf beide Aufgaben gleich anwendbar ist, die ich aber der Kürze wegen nur in Bezug auf die letztere anstellen will, enthält der folgende §.

§. 259.

Sey $ABC$ (Fig. 68.) das vorhin betrachtete, von den Linien $a$, $b$, $c$ gebildete Dreieck mit den unbeweglichen Punkten $F$, $G$, $H$ in $a$, $b$, $c$. Diese Punkte sollen nicht in einer Geraden liegen, und daher das Dreieck, welches man sich horizontal denke, unbeweglich seyn. Sind nun $p$, $q$, $r$ die an den Punkten $P$, $Q$, $R$ der $a$, $b$, $c$ angebrachten Kräfte; $t$, $u$, $v$ die dadurch in $A$, $B$, $C$ erzeugten Pressungen von $b$, $c$, $a$ auf $c$, $a$, $b$, und setzt man noch

$$\frac{FB}{FC}=f, \frac{GC}{GA}=g, \frac{HA}{HB}=h,$$

$$\frac{FP}{FC}=f', \frac{GQ}{GA}=g', \frac{HR}{HB}=h',$$

so hat man, wie in §. 257., die Gleichungen:

$$f'p-v+fu=0,\ g'q-t+gv=0,\ h'r-u+ht=0.$$

Hieraus folgt: $g'q-t+g(f'p+f(h'r+ht))=0$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{d. i. } gf'p+g'q+fgh'r=(1-m)\,t, \\ \text{wo } m=fgh, \text{ und eben so} \\ hg'q+h'r+ghf'p=(1-m)\,u, \\ fh'r+f'p+hfg'q=(1-m)\,v. \end{array}\right\} \text{(M)}$$

Wir wollen uns nun über die Art und Weise, wie sich nach diesen Formeln die von den Kräften $p$, $q$, $r$ entstehenden Pressungen $t$, $u$, $v$ in $A$, $B$, $C$ vertheilen, näher zu belehren suchen. Um unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Fall zu richten, wollen wir annehmen, dass, wie in der Figur, die Punkte $F$, $G$, $H$ ausserhalb $B$ und $C$, $C$ und $A$, $A$ und $B$ auf der Seite von $B$, $C$, $A$ liegen. Alsdann sind $f$, $g$, $h$, folglich auch $m$, zwischen 0 und 1 enthalten, und daher $f$, $g$, $h$ und $1-m$ positiv. Wir wollen ferner die Punkte

$P$, $Q$, $R$ mit $B$ und $C$, $C$ und $A$, $A$ und $B$ auf einerlei Seite von $F$, $G$, $H$ liegend annehmen, so dass $f'$, $g'$, $h'$ positiv werden. Endlich wollen wir noch die Kräfte $p$, $q$, $r$ mit einerlei Zeichen behaftet, sie selbst also nach einerlei Seite gerichtet, etwa von oben nach unten, annehmen. Zufolge der Gleichungen (M) werden dann auch die Pressungen $t$, $u$, $v$ nach unten gerichtet seyn.

In der Figur sind für diesen Fall die Linien $a$, $b$, $c$ als Stäbe gezeichnet worden, die in $A$, $B$, $C$ dergestalt über einander weggehen, dass sie daselbst, bei den nach unten gerichteten Pressungen $t$, $u$, $v$, gegen einander drücken, nicht von einander sich zu trennen streben, und wir somit nicht nöthig haben, sie unzertrennlich mit einander verbunden anzunehmen (§.189.).

Sey nun zuerst $p=0$, $r=0$, $g'=1$, und wirke daher nur auf den Stab $b$ im Punkte $A$ eine Kraft $=q$. Hiermit werden die Gleichungen (M):

$$q=(1-m)\,t,\;\; hq=(1-m)\,u,\;\; hfq=(1-m)\,v,$$

also $t>q$. Diese Verschiedenheit der Pressung $t$ von der Kraft $q$ scheint einen Widerspruch zu enthalten. Denn man sollte meinen, dass, wenn an dem Punkte $A$ des Stabes $b$, und sonst nirgend wo anders am Systeme, eine Kraft $q$ wirkt, die dadurch bei $A$ von $b$ auf $c$ hervorgebrachte Pressung, sowie die von $c$ auf $b$ rückwärts ausgeübte Pressung, eben so gross als $q$ selbst seyn müssten. Dieser Schluss wäre nun allerdings richtig, sobald die Stäbe $b$ und $c$ bloss in $A$ mit einander verbunden wären. Allein sie sind es noch durch den Stab $a$, welcher $b$ und $c$ in $C$ und $B$ berührt, und hierdurch geschieht es, dass die in $A$ von $b$ auf $c$ zunächst erzeugte und daher $=q$ zu setzende

Pressung $t'$ in $B$ eine Pressung $u'$ von $c$ auf $a$, diese in $C$ eine Pressung $v'$ von $a$ auf $b$, diese in $A$ eine neue Pressung $t''$ von $b$ auf $c$ hervorbringt, und so fort im Kreise herum ohne Ende. Die wirklichen Pressungen $t$, $u$, $v$ in $A$, $B$, $C$ werden alsdann die Summen jener partiellen Pressungen in denselben Punkten seyn.

Die Richtigkeit dieser Vorstellung bewährt sich durch die Uebereinstimmung der hiernach sich ergebenden Totalwerthe für $t$, $u$, $v$ mit den vorhin gefundenen. In der That hat man

$$\begin{aligned} u' &= ht', & v' &= fu', & t'' &= gv', \\ u'' &= ht'', & v'' &= fu'', & t''' &= gv'', \\ u''' &= ht''', & v''' &= fu''', & t'''' &= gv''', \end{aligned}$$

u. s. w.

folglich

$$t'' = fght' = mt',\ t''' = mt'' = m^2 t',\ t'''' = m^3 t',\ \text{etc.}$$

$$t = t' + t'' + t''' + \ldots = t'(1 + m + m^2 + \ldots) = \frac{t'}{1-m},$$

$$u = u' + u'' + u''' + \ldots = h\,(t' + t'' + t''' + \ldots) = ht,$$

$$v = v' + v'' + v''' + \ldots = f\,(u' + u'' + u''' + \ldots) = fht$$

und wenn wir nach dem vorhin Bemerkten noch $t' = q$ setzen:

$$t = \frac{q}{1-m},\ u = \frac{hq}{1-m},\ v = \frac{fhq}{1-m},$$

welches die bereits oben erhaltenen Werthe der Pressungen sind.

Lassen wir z. B. $A$, $B$, $C$ die Mittelpunkte von $HB$, $FC$, $GA$ seyn und drücken auf $b$ in $A$ mit einer Kraft $= 1$, so ist auch der Druck von $b$ auf $c$ zunächst $= 1$, der dadurch erzeugte Druck von $c$ auf $a = \frac{1}{2}$; von $a$ auf $b = \frac{1}{4}$; der somit entstehende neue Druck von $b$ auf $c$, $= \frac{1}{8}$; von $c$ auf $a$, $= \frac{1}{16}$, u. s. w.; also der vollständige Druck von $b$ auf $c$, $= 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{8}{7}$, mithin um $\frac{1}{7}$ grösser, als der unmittelbare Druck auf $a$; der vollständige Druck von $c$ auf $a$ halb so gross, als der vorhergehende, folglich $= \frac{4}{7}$, und der von $a$ auf $b$ abermals die Hälfte des von $c$ auf $a$, also $= \frac{2}{7}$.

Ist die Kraft $q$ nicht in $A$ selbst, sondern in irgend einem andern Punkte $Q$ des Stabes $b$ angebracht, so ist sie gleichwirkend mit einer Kraft $\frac{GQ}{GA}q = g'q$, deren Angriffspunkt $A$ ist, und die Pressungen sind alsdann die vorigen $\frac{q}{1-m}$, etc., nachdem sie vorher noch mit $g'$ multiplicirt worden. Auf ähnliche Art ergeben sich die Pressungen in $A$, $B$, $C$, wenn auf einen Punkt $P$ des Stabes $a$ eine Kraft $p$, oder auf einen Punkt $R$ des Stabes $c$ eine Kraft $r$ wirkt. Wenn folglich auf alle drei Stäbe zugleich Kräfte wirken, so hat man nur für jeden der Punkte $A$, $B$, $C$ die von jeder Kraft besonders herrührenden Pressungen zu addiren, um die daselbst statt findende Totalpressung zu erhalten, und man kommt somit zu den Gleichungen (M) zurück.

Wie sich ähnliche Betrachtungen bei Vierecken, Fünfecken, etc. anstellen lassen, sieht jeder von selbst.

## §. 260.

**Aufgabe.** Drei Gerade $a$, $b$, $c$ von unbestimmter Länge sind in einer Ebene an drei unbeweglichen Punkten $F$, $G$, $H$ (Fig. 62.) verschiebbar, ihre gegenseitigen Durchschnitte $A$, $B$, $C$ aber können nur in den Seiten $l$, $m$, $n$ des unbeweglichen Dreiecks $LMN$ sich bewegen. Die Bedingung zu finden, unter welcher dieses im Allgemeinen unbewegliche System (§. 248.) eine unendlich kleine Beweglichkeit erlangt.

**Auflösung.** Die gesuchte Bedingung ist offenbar einerlei mit derjenigen, unter welcher die Seiten des Dreiecks $ABC$ sich um die Punkte $F$, $G$, $H$ drehen, und die Ecken desselben in Curven fortgehen, deren Tangenten $l$, $m$, $n$ sind. Letztere Bedingung aber, und folglich auch die erstere, besteht nach §. 232. C. in der Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB}=\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NB}{BL}\cdot\frac{LC}{CM}.$$

### §. 261.

**Aufgabe.** Man hat ein in einer Ebene bewegliches Viereck $ABCD$ (Fig. 69.) mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln. Zwei Punkte $F$ und $H$ in zwei einander gegenüberliegenden Seiten $AB$ und $CD$ sind unbeweglich, und damit das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247. Zus.). Die Lage der Punkte $F$ und $H$ so zu bestimmen, dass dem Vierecke noch eine unendlich kleine Beweglickkeit übrig bleibt.

**Auflösung.** Man lasse auf beliebige Punkte der $AB$ Kräfte wirken, deren Moment in Bezug auf $F$, $=p_1$ sey; desgleichen bringe man irgendwo an $CD$ Kräfte an, deren Moment in Bezug auf $H$, $r_1$ heisse. Die Pressungen, welche deshalb die Seite $DA$ in $D$ und $A$ auf die Seiten $CD$ und $AB$ ausübt, und welche in der Richtung von $DA$ einander gleich und entgegengesetzt sind, nenne man $t$ und $-t$; die Pressungen von $BC$ auf die Enden $B$ und $C$ von $AB$ und $CD$ seyen eben so $=v$ und $-v$. Alsdann hat man für's Gleichgewicht

der $AB \ldots p_1 - FA \,.\, t \sin A + FB \,.\, v \sin B = 0$,
der $CD \ldots r_1 - HC \,.\, v \sin C + HD \,.\, t \sin D = 0$.

Aus diesen zwei Gleichungen, durch welche das Gleichgewicht des ganzen Systems ausgedrückt ist, eliminire man die eine der beiden Pressungen $t$ und $v$, und setze den Coefficienten der andern $= 0$, oder setze $p_1$ und $r_1$ null und eliminire hierauf das Verhältniss $t : v$, so kommt:

$$FA \,.\, HC \sin A \sin C = FB \,.\, HD \sin B \sin D,$$

als die gesuchte Bedingung der Beweglichkeit.

## §. 262.

**Zusätze.** *a.* Die gefundene Bedingung lässt sich noch ungleich einfacher darstellen. Wird nämlich $FH$ von $DA$ in $K$ und von $BC$ in $L$ geschnitten, so ist

$$FA \sin A = FK \sin K, \quad FB \sin B = FL \sin L,$$
$$HC \sin C = HL \sin L, \quad HD \sin D = HK \sin K.$$

Hiermit wird die Bedingungsgleichung:

$$FK \,.\, HL = FL \,.\, HK,$$
$$\text{mithin} \quad FK : HK = FL : HL;$$

die Punkte $K$ und $L$ müssen folglich identisch seyn, d. h. die zwei Seiten $DA$, $BC$ und die Gerade $FH$ durch die zwei unbeweglichen Punkte müssen sich in einem Punkte $K$ schneiden.

*b.* Dass nur unter dieser Bedingung das Viereck um ein unendlich Weniges beweglich wird, kann auch aus dem in §. 228. *b.* bewiesenen Satze gefolgert werden, wonach, wenn $C$ und $D$ statt $F$ und $H$ unbeweglich angenommen werden, bei einer unendlich kleinen Verrückung des Vierecks jeder Punkt $F$ der Seite $AB$ ein Linienelement beschreibt, welches auf der von

$F$ nach dem Durchschnitte $K$ der beiden andern Seiten geführten Geraden normal ist. Denn soll das Viereck um $F$ und $H$ bewegt werden können, so muss es auch, wenn $F$ frei gelasssen wird, um $C$ und $D$, als unbewegliche Punkte, so beweglich seyn, dass die Länge von $HF$ unverändert bleibt, dass folglich $F$ ein auf $HF$ normales Element beschreibt; und da dieses Element zufolge des angeführten Satzes auch auf $FK$ normal ist, so müssen $H$, $F$ und $K$ in einer Geraden liegen.

*c.* Das Viereck $ABCD$ mit den zwei Punkten $F$, $H$ in den Seiten $AB$, $CD$ ist vollkommen bestimmt und kann construirt werden, wenn die Längen der 7 Linien $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, $AF$, $DH$, $FH$ gegeben sind. Lässt man nur sechs dieser Längen gegeben seyn und construirt mit ihnen das Viereck so, dass sich $DA$, $BC$, $FH$ in einem Punkte schneiden, so hat dabei die siebente unbestimmt gelassene Länge ihren grössten oder kleinsten Werth (§. 252.). Diess führt uns zu folgenden zwei Sätzen:

1. Bei einem Vierecke $FBCH$ mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln ist der gegenseitige Abstand $AD$ zweier gegebenen Punkte $A$ und $D$ in zwei gegenüberliegenden Seiten $FB$ und $CH$ ein Maximum oder Minimum, wenn die Gerade $AD$ den Durchschnitt $K$ des andern Paares gegenüberliegender Seiten $BC$ und $HF$ trifft.

2. Hat man ein Viereck $FBCH$ mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, und bewegt sich bei Veränderung der Winkel ein Punkt $D$ in der Seite $CH$ so, dass sein Abstand $AD$ von einem bestimmten Punkte $A$ in der gegenüberliegenden Seite $FB$ unveränderlich bleibt, so ist $HD$, so

wie auch $CD$, ein Maximum oder Minimum, wenn $AD$, $BC$ und $HF$ sich in einem Punkte begegnen.

## §. 263.

Bei dem um $F$ und $H$ beweglichen Vierecke $ABCD$ wollen wir jetzt noch die Bedingung des Gleichgewichts untersuchen.

1) Wirken auf $AB$ und $CD$ Kräfte, und sind ihre Momente rücksichtlich der Punkte $F$ und $H$, $= p_1$ und $r_1$, so ist nach §. 261. bei statt findender Beweglichkeit zum Gleichgewichte nöthig, dass

$$p_1 . HD \sin D + r_1 . FA \sin A = 0,$$

oder kürzer, dass $p_1 . HK + r_1 . FK = 0$.

Es folgt hieraus zunächst, dass, wenn von den zwei Momenten $p_1$ und $r_1$ das eine null ist, auch das andere null seyn muss. Wirkt daher auf die eine der beiden Linien $AB$ und $CD$, etwa auf $CD$, gar keine Kraft, so muss das Moment der an $AB$ angebrachten Kräfte in Bezug auf den unbeweglichen Punkt $F$ von $AB$ null seyn. Dasselbe erhellet auch schon daraus, dass die unendlich kleine Bewegung von $AB$ um $F$ durch den übrigen Theil des Systems nicht gehindert wird, und dass folglich, wenn bloss auf $AB$ Kräfte wirken, diese unter denselben Bedingungen im Gleichgewichte sind, als wenn die übrigen Seiten des Vierecks gar nicht vorhanden wären.

Umgekehrt lässt sich mittelst dieser einfachen Bemerkung sehr leicht die Bedingung für die Beweglichkeit des Vierecks herleiten. Denn ist es beweglich, und bringt man an $AB$ in $A$ und $B$ nach den Richtungen $AD$ und $BC$ zwei Kräfte $p$ und $p'$ an, welche im Gleichgewichte sind, so müssen sie sich wie die von $F$ auf $BC$ und $AD$ gefällten Perpendikel, also wie

$FB \sin B$ zu $FA \sin A$ verhalten. Die Kräfte $p$ und $p'$ werden aber noch im Gleichgewichte seyn, wenn man sie nach denselben Richtungen $AD$ und $BC$ in $D$ und $C$ anbringt. Da sie nun alsdann aus demselben Grunde, wie vorhin, in dem Verhältnisse von $HC \sin C$ zu $HD \sin D$ stehen müssen, so muss sich verhalten $FB \sin B : FA \sin A = HC \sin C : HD \sin D$, welches die zu Ende des §. 261. gefundene Gleichung giebt.

2) Ist an einer der beiden Seiten $DA$ und $BC$ des Vierecks, z. B. an $BC$, in einem beliebigen Punkte $Q$ nach der Richtung $QT$ eine Kraft $q$ angebracht, so zerlege man dieselbe, um ihre Wirkung zu schätzen, in zwei andere $q'$ und $q''$ nach den Richtungen $BC$ und $QO$, wo $O$ der Durchschnitt von $AB$ mit $CD$ ist. Die Kraft $q''$ nach der Richtung $QO$ lässt sich ferner in zwei andere auf $B$ und $C$ nach $BO$ und $CO$ wirkende zerlegen, und ist daher von gar keiner Wirkung, weil in $BO$ und $CO$ die unbeweglichen Punkte $F$ und $H$ liegen. Die nach $QT$ gerichtete Kraft $q$ ist folglich gleichwirkend mit der nach $BC$ gerichteten Kraft $q' = q \dfrac{\sin TQO}{\sin CQO}$.

3) In dem besondern Falle, wenn $AB$ und $CD$ parallel sind, wird es auch $QO$ mit $AB$, und daher $q' = q \sin (AB^{\wedge}q) : \sin B$. Alsdann ist folglich die Intensität von $q'$ bloss von der Intensität von $q$ und von dem Winkel $AB^{\wedge}q$ abhängig, d. h. die Wirkung einer an $BC$ im Punkte $Q$ angebrachten Kraft $q$ bleibt ungeändert, wenn die Kraft parallel mit ihrer Richtung an irgend einen andern Punkt von $BC$ verlegt wird.

Dasselbe folgt auch unmittelbar aus der Theorie der Kräftepaare. Denn wirken auf zwei Punkte der Seite $BC$, oder überhaupt auf zwei Punkte in der

Ebene des Vierecks, die mit dieser Seite in fester Verbindung stehen, zwei Kräfte $q$ und $q_{\prime}$, welche ein Paar ausmachen, so kann man statt desselben ein zweites Paar setzen, dessen Moment dem des ersten gleich ist, und dessen Kräfte, in $B$ und $C$ angebracht, in die Parallelen $AB$ und $CD$ fallen. Letzteres Paar aber ist von keiner Wirkung, weil $AB$ und $CD$ die unbeweglichen Punkte $F$ und $H$ enthalten. Mithin kann auch das erstere Paar keine Bewegung hervorbringen, und es ist folglich $q$ mit $-q_{\prime}$ gleichwirkend.

Eben so wird bewiesen, dass zwei parallele Kräfte, deren Angriffspunkte mit $AD$ fest verbunden sind, einander gleiche Wirkungen haben. — Zum Gleichgewichte zwischen Kräften, deren Angriffspunkte zum Theil mit $BC$ und zum Theil mit $AD$ fest verbunden sind, wird daher nur erfordert, dass, nachdem man sie parallel mit ihren Richtungen, die einen an $B$, die andern an $A$, verlegt hat, ihrer aller Moment in Bezug auf $F$ null ist.

4) Wenn nicht allein $AB$ mit $CD$, sondern auch $BC$ mit $DA$ parallel ist, so geht das Viereck in ein Parallelogramm über, und wird beweglich, wenn die Linie durch die unbeweglichen Punkte gleichfalls mit $BC$ und $DA$ parallel ist. Diese Beweglichkeit ist aber nicht mehr unendlich klein, sondern endlich, weil nach einer unendlich kleinen Drehung um $F$ und $H$ die Vierecke $AC$, $AH$ und $FC$ noch Parallelogramme sind, und daher die Bedingung der Beweglichkeit durch die Drehung nicht verloren geht.

Zwei auf $A$ und $B$ nach $AD$ und $BC$ wirkende Kräfte, also auch zwei Kräfte, die parallel mit jenen auf zwei fest mit $AD$ und $BC$ verbundene Punkte wirken, sind hierbei im Gleichgewichte, wenn sie sich wie $BF$ zu $FA$ verhalten. Bringt man daher $FH$ und damit auch die Seiten $DA$ und $BC$ in verticale Lage, befestigt an diese Seiten irgendwo, in $S$ und $Q$, zwei horizontale Aerme und hängt an dieselben zwei resp. mit $BF$ und $FA$ proportionale Gewichte, so halten sich letztere das Gleichgewicht und können ohne Störung desselben an den Aermen hin und her geschoben werden. Siehe Fig. 70. Man nennt diese Einrichtung die Roberval'sche Waage, nach ihrem Erfinder Roberval, einem französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts. Da an ihr zwei Gewichte, wenn sie einmal im Gleichgewichte sind, in jeden beliebigen Entfernungen von den unbeweglichen Punkten darin verharren, während bei der gewöhnlichen Waage Gleichgewicht nur dann statt findet, wenn sich die Gewichte umgekehrt, wie ihre Entfernungen vom Drehungspunkte verhalten, so hat man diese Maschine als ein statisches Paradoxon aufgestellt.

Am einfachsten lässt sich das Gesetz des Gleichgewichts an derselben mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten erklären. Denn jeder mit der Seite $AD$ oder $BC$ fest verbundene Punkt beschreibt bei der Drehung des Parallelogramms $AC$ um $F$ und $H$ einen Weg, der dem Wege von resp. $A$ oder $B$ gleich und parallel ist. Wird daher für zwei an $A$ und $B$ angebrachte Kräfte, die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllt, so geschieht ihr auch Genüge, wenn man die Kräfte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen, an beliebige andere Punkte verlegt, die gegen $AD$ und $BC$ eine unveränderliche Lage haben.

## §. 264.

**Aufgabe.** Die Bedingung für die unendlich kleine

Beweglichkeit eines ebenen Sechsecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln zu finden, bei welchem eine Seite um die andere einen unbeweglichen Punkt enthält.

Auflösung. Sey $ABCDEF$ (Fig. 71.) das Sechseck. Die Punkte $G$, $H$, $I$ der Seiten $AB$, $CD$, $EF$ seyen unbeweglich, und damit das Sechseck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247. Zus.) An willkührlichen andern Punkten derselben drei Seiten bringe man Kräfte in der Ebene an. Die Momente derselben in Bezug auf $G$, $H$, $I$ seyen $p_1$, $q_1$, $r_1$; nämlich $p_1$ das Moment der auf $AB$ wirkenden Kräfte in Bezug auf $G$, u. s. w. Die Pressungen, welche die Zwischenseiten $BC$, $DE$, $FA$ in ihren Endpunkten auf jene erstern Seiten ausüben, seyen $t$, $u$, $v$ in $B$, $D$, $F$, und daher $-t$, $-u$, $-v$ in $C$, $E$, $A$. Die Gleichungen für's Gleichgewicht der Seiten $AB$, $CD$, $EF$ sind alsdann

$$p_1 - v \,.\, GA \sin A + t \,.\, GB \sin B = 0,$$
$$q_1 - t \,.\, HC \sin C + u \,.\, HD \sin D = 0,$$
$$r_1 - u \,.\, IE \sin E + v \,.\, IF \sin F = 0;$$

und hieraus ergiebt sich sogleich die gesuchte Bedingung der Beweglichkeit, wenn man $p_1$, $q_1$, $r_1$ null setzt und sodann die zwei Verhältnisse zwischen $t, u, v$ eliminirt, nämlich:

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{HC}{HD} \cdot \frac{IE}{IF} = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin D}{\sin C} \cdot \frac{\sin F}{\sin E}.$$

## §. 265.

Zusätze. *a.* Nimmt man die Seite $FA$ hinweg, so wird die Figur vollkommen beweglich, und die erhaltene Gleichung ist nunmehr die Bedingung, unter welcher der gegenseitige Abstand der Punkte $F$ und $A$

am grössten oder kleinsten wird. Fügt man die Linie $FA$ von constanter Länge wieder hinzu, lässt aber ihren Endpunkt $A$ nicht mehr mit der Linie $BG$ in $A$ fest verbunden, sondern darin beweglich seyn, so erhält die Figur gleichfalls Beweglichkeit, und die Linie $AG$, so wie $AB$, wird unter derselben Bedingungsgleichung ein Maximum oder Minimum.

*b.* Sind $K$, $L$, $M$ die gegenseitigen Durchschnitte von $AB$, $CD$, $EF$, so ist:

$$\frac{\sin F}{\sin A}=\frac{AK}{FK},\quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{CL}{BL},\quad \frac{\sin D}{\sin E}=\frac{EM}{DM},$$

und man kann damit die Bedingungsgleichung auf folgende Weise darstellen:

$$\frac{KA}{AG}\cdot\frac{GB}{BL}\cdot\frac{LC}{CH}\cdot\frac{HD}{DM}\cdot\frac{ME}{EI}\cdot\frac{IF}{FK}=1,$$

Bestimmt man daher in $AB$, $CD$, $EF$ drei Punkte $G_1$, $H_1$, $I_1$, von denen $G_1$ mit $K$, $A$, $G$, $B$, $L$; $H_1$ mit $L$, $C$, $H$, $D$, $M$; $I_1$ mit $M$, $E$, $I$, $F$, $K$ eine sogenannte geometrische Involution bildet, d. h. welche so liegen, dass

$$\frac{KA}{AG}\cdot\frac{GB}{BL}\cdot\frac{LG_1}{G_1K}=-1,\quad \frac{LC}{CH}\cdot\frac{HD}{DM}\cdot\frac{MH_1}{H_1L}=-1,$$
$$\frac{ME}{EI}\cdot\frac{IF}{FK}\cdot\frac{KI_1}{I_1M}=-1,$$

so zieht sich die Bedingungsgleichung zusammen in:

$$\frac{KG_1}{G_1L}\cdot\frac{LH_1}{H_1M}\cdot\frac{MI_1}{I_1K}=-1,$$

und giebt somit zu erkennen, dass $G_1$, $H_1$, $I_1$ in einer Geraden liegen müssen *).

*) Die drei Punkte $G_1$, $H_1$, $I_1$ können durch folgende Construction gefunden werden. Seyen $N$ und $O$ die Durchschnitte von

## §. 266.

**Aufgabe.** *ABCD* (Fig. 72.) ist ein in einer Ebene bewegliches Viereck mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln. *F, G, H, I* sind vier unbewegliche Punkte in der Ebene, denen resp. die Seiten *AB, BC*,... zu begegnen genöthigt sind, so dass jede Seite um den ihr zugehörigen Punkt sowohl gedreht, als an ihm verschoben werden kann. Hiermit ist das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 249.). Die Bedingung zu finden, unter welcher es einer unendlich kleinen Bewegung fähig wird.

**Auflösung.** Heissen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Winkel, welche die Seiten *AB, BC, CD, DA* nach den damit zugleich ausgedrückten Richtungen mit einer willkührlich in der Ebene gezogenen festen Axe machen. Auf die vier Ecken *A,..D* lasse man in der Ebene resp. die Kräfte *p, q, r, s* wirken. Hierdurch erleiden die Seiten *AB, BC*,... in *F, G, H, I* von den daselbst befindlichen unbeweglichen Punkten Pressungen, welche auf den Seiten selbst normal sind und daher mit der festen

---

*BC* mit *FA* und *FG*, und *P* der Durchschnitt von *EF* mit *LO*, so ergiebt sich $G_1$ als der Durchschnitt von *AB* mit *NP*. Denn die Seiten des Dreiecks *OPF* schneiden *AB* in *K, G, L*, und die drei Geraden von *N* nach den drei Ecken *O, P, F* desselben treffen *AB* in *B*, $G_1$, *A*. (Baryc. Calcul. §. 291.). Aehnlicher Weise lassen sich auch auch $H_1$ und $I_1$ finden.

Umgekehrt kann man, wenn $G_1$ gegeben ist, den Punkt *G* durch Ziehung der Geraden $G_1NP$, *POL* und *OGF* bestimmen. Sind daher von den drei unbeweglichen Punkten *G, H, I* irgend zwei, etwa *H* und *I*, gegeben, und soll der dritte so bestimmt werden, dass das Sechseck beweglich wird, so bestimme man mit *H* und *I* die Punkte $H_1$ und $I_1$, verbinde letztere durch eine Gerade, welche *AB* in $G_1$ schneide, und suche mit $G_1$ den Punkt *G*.

Axe die Winkel $90^\circ + \alpha$, $90^\circ + \beta, \ldots$ machen. Man bezeichne diese Pressungen resp. mit $2t$, $2u$, $2v$, $2w$, so dass die Pressung $2t$ positiv zu nehmen ist, wenn ihre Richtung in der That durch $90^\circ + \alpha$ bestimmt wird, negativ, wenn sie die entgegengesetzte ist, u. s. w.

Das Gleichgewicht dauert nun fort, wenn wir die unbeweglichen Punkte $F$, $G, \ldots$ weglassen und dafür den Pressungen $2t$, $2u, \ldots$ gleiche Kräfte nach den Richtungen $90^\circ + \alpha$, $90^\circ + \beta, \ldots$ an denselben Stellen $F$, $G, \ldots$ der Seiten anbringen; es dauert noch fort, wenn wir jede dieser Kräfte in zwei mit ihr parallele zerlegen, welche auf die Endpunkte der jedesmaligen Seite wirken. Wir zerlegen daher $2t$ in die zwei damit parallelen Kräfte an $A$ und $B$:

$$\frac{FB}{AB} \cdot 2t = (1 + a)\,t \text{ und } \frac{AF}{AB} \cdot 2t = (1 - a)\,t,$$

wenn $\frac{FB}{AB} = \frac{1}{2}(1 + a)$, folglich $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}(1 - a)$ gesetzt wird, und wo daher

$$\frac{FB - AF}{AB} = a$$

ist. Setzen wir eben so

$$\frac{GC - BG}{BC} = b, \quad \frac{HD - CH}{CD} = c, \quad \frac{IA - DI}{DA} = d,$$

so ist die Kraft $2u$ gleichwirkend mit den zwei ihr parallelen Kräften $(1 + b)\,u$ und $(1 - b)\,u$ an $B$ und $C$, u. s. w.

Hiernach haben wir es jetzt mit einem Vierecke zu thun, dessen Ecken allein der Wirkung von Kräften ausgesetzt sind; nämlich auf $A$ wirken die Kräfte $p$, $(1 - d)\,w$, $(1 + a)\,t$; auf $B$ die Kräfte $q$, $(1 - a)\,t$, $(1 + b)\,u$; u. s. w., und es sind nunmehr die Gleichungen für das Gleichgewicht dieses Systems zu entwickeln. Da wir aber nur die Bedingung der unendlich kleinen Beweglichkeit suchen wollen, so können wir in diesen Gleichungen die ursprünglichen Kräfte $p, .. s$ auch weglassen und somit auf $A$ bloss die Kräfte $(1-d)w$ und $(1+a)t$ nach den Richtungen $90^\circ+\delta$ und $90^\circ+\alpha$; an $B$ bloss die Kräfte $(1-a)t$ und $(1+b)u$ nach den Richtungen $90^\circ+\alpha$ und $90^\circ+\beta$; u. s. w. wirkend annehmen. Die Elimination von $t, u, v, w$ aus den Gleichungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte wird uns hierauf zu der gesuchten Bedingung hinführen. Die Gleichungen selbst sind nach §. 220. zu Ende:

$$\Big((1-d)w\sin(90^\circ+\delta-\delta)+(1+a)t\sin(90^\circ+\alpha-\delta)\Big)\sin(\beta-\alpha)$$

$$=$$

$$\Big((1-a)t\sin(90^\circ+\alpha-\beta)+(1+b)u\sin(90^\circ+\beta-\beta)\Big)\sin(\alpha-\delta),$$

d. i.

$$(1)\quad t[\sin(\beta-2\alpha+\delta)+a\sin(\beta-\delta)]$$
$$=(1+b)u\sin(\alpha-\delta)-(1-d)w\sin(\beta-\alpha),$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, die sich schon aus (1) durch gehörige Vertauschung der Buchstaben ergeben, nämlich:

$$(2)\quad u[(\sin\gamma-2\beta+\alpha)+b\sin(\gamma-\alpha)]$$
$$=(1+c)v\sin(\beta-\alpha)-(1-a)t\sin(\gamma-\beta),$$

u. s. w. Statt der dritten und vierten Gleichung aber wollen wir diejenigen zwei bei weitem einfacheren Gleichungen gebrauchen, welche ausdrücken, dass die 8 Kräfte $(1\pm a)t$, $(1\pm b)u$, etc., wenn sie parallel mit ihren Richtungen $90^\circ+\alpha$, $90^\circ+\beta$, etc. an einen und denselben Punkt getragen werden, einander, — obwohl eigentlich den Kräften $p, q, r, s$, — das Gleichgewicht halten. Diese zwei Gleichungen, die aus jenen vier Gleichungen durch gehörige Verbindung derselben ebenfalls hervorgehen müssen, sind:

$$t\sin\alpha + u\sin\beta + v\sin\gamma + w\sin\delta = 0,$$
$$t\cos\alpha + u\cos\beta + v\cos\gamma + w\cos\delta = 0,$$

wofür wir, das einemal $w$, das anderemal $v$ eliminirend, auch setzen können:

$$(3)\quad v\sin(\delta-\gamma) = t\sin(\alpha-\delta) + u\sin(\beta-\delta),$$
$$(4)\quad w\sin(\delta-\gamma) = t\sin(\gamma-\alpha) + u\sin(\gamma-\beta).$$

Es ist nun noch übrig, aus (1), (2), (3), (4) die drei Verhältnisse zwischen $t$, $u$, $v$, $w$ wegzuschaffen. Die Substitution der Werthe von $w$ und $v$ aus (4) und (3) in (1) und (2) verwandelt letztere zwei Gleichungen in:

$$(5)\ Tt + Uu = 0,\ (6)\ T't + Uu = 0,$$

wo
$$T = [\sin(\beta-2\alpha+\delta) + a\sin(\beta-\delta)]\sin(\delta-\gamma) + (1-d)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\alpha)$$
$$U = -(1+b)\sin(\alpha-\delta)\sin(\delta-\gamma) + (1-d)\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha)$$
$$T' = -(1+c)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\alpha) + (1-a)\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\gamma)$$
$$U' = [\sin(\gamma-2\beta+\alpha) + b\sin(\gamma-\alpha)]\sin(\delta-\gamma) - (1+c)\sin(\beta-\delta)\sin(\beta-\alpha).$$

Zufolge der bekannten Formel

$$(^*)\ \sin f\sin(g-h) + \sin g\sin(h-f) = \sin h\sin(g-f)$$

ist aber

$$\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\beta-2\alpha+\delta)\sin(\delta-\gamma) = \sin(\delta-\alpha)\sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma),$$
$$\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\delta) = \sin(\alpha-\delta+\gamma-\beta)\sin(\beta-\delta),$$
$$\sin(\delta-\gamma)\sin(\gamma-\beta) + \sin(\delta-\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha),$$
$$\sin(\delta-\gamma)\sin(\gamma-2\beta+\alpha) + \sin(\delta-\beta)\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\sin(\gamma-\beta).$$

Setzen wir daher zur Abkürzung:

$\sin(\alpha-\beta) = A$, $\sin(\beta-\gamma) = B$, $\sin(\gamma-\delta) = C$, $\sin(\delta-\alpha) = D$, $\sin(\alpha-\gamma) = F$, $\sin(\beta-\delta) = G$, $\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta) = M$,

so wird:
$$\begin{aligned} T &= -MD - aCG - dAF, \\ U &= \quad MG - bCD - dAB, \\ T' &= \quad MF - aBC - cAD, \\ U' &= \quad MB + bCF + cAG. \end{aligned}$$

Aus (5) und (6) folgt nun nach Elimination des Verhältnisses $t:u$

$$(7) \quad T'U - TU' = 0.$$

Vermöge der eben aufgestellten Werthe von $T, .. U'$ aber ergiebt sich

$$\begin{aligned} T'U - TU' = (M^2 + ab\,.\,C^2 + cd\,.\,A^2)(FG + BD) \\ + (ac\,.\,G^2 + ad\,.\,B^2 + bc\,.\,D^2 + bd\,.\,F^2)AC; \end{aligned}$$

und da, wie man mit Hülfe der Formel (*) leicht findet,

$$FG + BD = CA$$

ist, so reducirt sich die Gleichung (7) auf:

$$0 = M^2 + cd.A^2 + ad.B^2 + ab.C^2 + bc.D^2 + bd.F^2 + ac.G^2.$$

Dividirt man noch mit $abcd$ und setzt für $M$, $A$, $B$,... die damit bezeichneten Sinus, so erhält man folgende durch ihre Form in der That merkwürdige Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2}{abcd} + \frac{\sin(\alpha-\beta)^2}{ab} + \frac{\sin(\beta-\gamma)^2}{bc} + \frac{\sin(\gamma-\delta)^2}{cd} \\ + \frac{\sin(\delta-\alpha)^2}{da} + \frac{\sin(\alpha-\gamma)^2}{ac} + \frac{\sin(\beta-\delta)^2}{bd}, \end{aligned}$$

als die Bedingung, unter welcher das Viereck um ein unendlich Weniges beweglich wird.

## §. 267.

**Zusätze.** *a.* Ist das Viereck ein Parallelogramm, so hat man $\gamma = 180° + \alpha$, $\delta = 180° + \beta$, und die Gleichung wird

$$0 = \frac{\sin 2(\alpha-\beta)^2}{abcd} + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da}\right)\sin(\alpha-\beta)^2,$$

d. i. $0 = 4\cos(\alpha - \beta)^2 + (a+c)(b+d)$.

Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so ist noch $\alpha - \beta = 90°$, also

$$0 = (a+c)(b+d)$$

die Bedingung der Beweglichkeit, und es muss folglich entweder $a+c=0$, oder $b+d=0$ seyn.

*b.* Weil $a = \frac{FB - AF}{AB} = \frac{AB - 2AF}{AB}$ und $c = \frac{2HD - CD}{CD}$ so ist $a+c = \frac{2HD}{CD} - \frac{2AF}{AB}$. Nimmt man nun die Linien $AB$ und $CD$ nach den eben so ausgedrückten Richtungen mit einerlei Zeichen, so sind beim Rechtecke (so wie beim Parallelogramme) $AB$ und $CD$ einander gleich, auch dem Zeichen nach. Die Gleichung für die Beweglichkeit: $a+c=0$, wird hiernach identisch mit: $HD = AF$, und zeigt dadurch an, dass die Gerade $FH$ mit den Seiten $BC$ und $DA$ parallel seyn muss (Fig. 72*). Dass unter dieser Bedingung das Rechteck sich um ein unendlich Weniges verrücken lässt, ist leicht einzusehen. Dreht man nämlich die Seite $AB$ um einen unendlich kleinen Winkel um den Punkt $F$, so verschieben sich $BC$ und $DA$ an $G$ und $I$, ohne sich zu drehen, rücken also in sich selbst fort, und die Seite $CD$ dreht sich um $H$ um denselben Winkel und nach derselben Richtung, wie $AB$.

Eben so wird durch die Gleichung $b+d=0$ der Parallelismus von $GI$ mit $AB$ und $CD$ ausgedrückt. In diesem Falle besteht die Verrückung des Vierecks darin, dass sich $BC$ und $DA$ um $G$ und $I$ drehen, während sich $AB$ und $CD$ an $F$ und $G$ verschieben.

*c.* Sind $F, G, H, I$ die Mittelpunkte der Seiten $AB, BC, \ldots$, so sind $a, b, c, d = 0$. In diesem Falle reducirt sich die allgemeine Gleichung auf

$$\sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta) = 0,$$

und giebt damit zu erkennen, dass die Summe zweier gegenüberliegender Winkel des Vierecks 2 oder 4 rechten Winkeln gleich seyn muss, dass also um das Viereck ein Kreis beschrieben werden können muss. Und in der That, ist $ABCD$ ein in einem Kreise beschriebenes Viereck, und nimmt man in dem Kreise nach einerlei Seite zu die Bögen $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ einander gleich und unendlich klein, so sind die Geraden $AB$ und $A'B'$, $BC$ und $B'C'$, etc. paarweise einander gleich und halbiren sich gegenseitig.

---

# Sechstes Kapitel.

## Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

### §. 268.

Die einfachste Art, auf welche mehrere Körper mit einander verbunden seyn können, besteht darin, dass von ihnen, in einer gewissen Ordnung genommen, jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden, keiner also mit mehr als zweien der übrigen, verbunden ist. Ein solches System, bei welchem übrigens noch vorauszusetzen ist, dass je zwei mit einander verbundene Körper noch gegenseitige Beweglichkeit haben, indem sie sonst als ein einziger Körper zu betrachten wären, nennt man eine **Kette**, die einzelnen Körper selbst: die **Glieder** der Kette. Ist der letzte Körper noch mit dem ersten verbunden, so heisst die Kette geschlossen.

In dem Vorhergehenden sind dergleichen Systeme schon oft in Betracht gezogen worden. Denn jedes Vieleck, als ein System in gewisser Folge paarweise mit einander verbundener gerader Linien, ist eine solche Kette. Von diesen Betrachtungen werden sich die nun folgenden hauptsächlich dadurch unterscheiden, dass wir jetzt die Glieder einer Kette nach allen Dimensionen unendlich klein und in unendlicher Zahl annehmen, und somit die Kette in einen unendlich dünnen und vollkommen biegsamen Faden übergehen lassen.

## §. 269.

Aufgabe. Man hat eine Reihe frei beweglicher Körper, von denen jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden in einem Punkte verbunden ist. Die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, wenn auf den ersten Körper der Reihe eine Kraft $P$ und auf den letzten eine Kraft $Q$ wirkt.

Auflösung. Seyen $m_{,}$, $m$, $m'$, $m''$,... (Fig. 73.) unmittelbar auf einander folgende Körper der Reihe; $A$, $A'$, $A''$,... die Berührungspunkte von $m_{,}$ mit $m$, von $m$ mit $m'$, etc. Man setze in $A$ an $m_{,}$ und $m$ die Pressungen oder Gegenkräfte $T$ und $-T$, in $A'$ an $m$ und $m'$ die Gegenkräfte $T'$ und $-T'$, in $A''$ an $m'$ und $m''$ die Gegenkräfte $T''$ und $-T''$, u. s. w. Da nun auf $m$ ausser den Pressungen $-T$ und $T'$ keine weitere Kraft wirkt, so müssen sich $-T$ und $T'$ allein das Gleichgewicht halten und daher einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Dasselbe gilt auch von den Pressungen $-T'$ und $T''$, welche $m'$ erleidet, desgleichen von den auf $m''$ wirkenden Pressungen, u. s. w. Sämmtliche Pressungen $T, T', T'', \ldots$ sind daher einander gleich, und ihre Richtungen fallen nebst den Berührungspunkten $A, A', A'', \ldots$ in eine und dieselbe Gerade. Ist nun etwa $m$, der erste und $m''$ der letzte Körper der Reihe, so muss an $m$, die Pressung $T$ mit der Kraft $P$, und an $m''$ die Pressung $-T''$ mit der Kraft $Q$ im Gleichgewichte seyn. Dies führt zu folgenden zwei Bedingungen für das Gleichgewicht des ganzen Systems:

1) Die Berührungspunkte der Körper müssen in einer Geraden liegen.

2) Die zwei Kräfte $P$ und $Q$ müssen in dieser Geraden nach entgegengesetzten Richtungen wirken und einander gleich seyn.

## §. 270.

Das Gleichgewicht jedes einzelnen Gliedes der eben betrachteten Kette, und mithin das Gleichgewicht der ganzen Kette selbst, ist sicher, oder unsicher, jenachdem die zwei Kräfte am Anfang und Ende derselben die Glieder von einander zu entfernen streben, oder sie gegen einander drücken. Im letztern Falle wächst die Unsicherheit des Gleichgewichts mit der Anzahl der Glieder, so dass bei physischen Körpern, obschon sich diese nicht in mathematischen Punkten, sondern in kleinen Flächen berühren, auch gegenseitigen Reibungen unterworfen sind, ein solches Gleichgewicht nur dann noch erhalten werden kann, wenn die Anzahl derselben sehr gering ist. Bei einer Reihe unendlich vieler und unendlich kleiner Körper, d. i. bei einem vollkommen biegsamen Faden, kann daher von einem unsichern Gleichgewichte nicht mehr die Rede seyn.

*Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines* *vollkommen biegsamen und frei beweglichen Fadens, auf dessen Enden zwei Kräfte wirken, sind demnach*

1) *dass der Faden eine gerade Linie bildet, und*

2) *dass die Kräfte einander gleich sind und, nach entgegengesetzten in die Fadenlinie fallenden Richtungen wirkend, die Enden der Linie von einander zu entfernen streben.*

Die Pressungen oder die Kräfte, mit denen bei diesem Gleichgewichte je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens auf einander wirken, sind zufolge des vor. §. den Kräften an den Enden des Fadens gleich und so gerichtet, dass die Elemente nicht gegen einander drücken, sondern in der Richtung der Fadenlinie sich von einander zu trennen suchen; es sind daher keine eigentlichen Pressungen, sondern Spannungen (§. 200.) — so wie auch bei jedem andern Systeme von Kräften, welche an einem Faden im Gleichgewichte sind, die Elemente des Fadens, wegen der Unmöglichkeit eines unsichern Gleichgewichts, nur spannend auf einander wirken können.

*Beim Gleichgewichte zwischen zwei Kräften, welche an den Enden eines freien und vollkommen biegsamen Fadens angebracht sind, herrscht also in jedem Punkte des Fadens eine Spannung, deren Richtung in die Fadenlinie fällt, und deren Intensität der gemeinschaftlichen Intensität der beiden Kräfte gleich ist.*

## §. 271.

Wir wollen jetzt die in §. 269. untersuchte Kette nicht mehr vollkommen frei beweglich, sondern der Bedingung unterworfen seyn lassen, dass ihre Glieder eine unbewegliche Fläche berühren. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen seyen noch $B$, $B'$,.. (Fig. 74.) die Berührungspunkte der Glieder $m$, $m'$,... mit der Fläche, und $R$, $R'$,... die daselbst von letzterer auf erstere ausgeübten Pressungen. Halten sich nun zwei auf das erste und letzte Glied wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so müssen an jedem Mittelgliede besonders die Spannungen, welche es von dem vorhergehenden und folgenden Gliede erleidet, und die von der Fläche auf dasselbe erzeugte Pressung im Gleichgewichte mit einander seyn. Die drei auf der Oberfläche von $m$ in $A$, $A'$ und $B$ zu errichtenden Normalen, als die Richtungen der auf $m$ wirkenden Kräfte $T$, $T'$ und $R$, müssen sich folglich in einem Punkte $C$ schneiden und in einer Ebene liegen, und es muss sich verhalten

$$T : T' : R = \sin BCA' : \sin ACB : \sin ACA'.$$

Auf gleiche Art treffen wegen des Gleichgewichts von $m'$ die drei in $A'$, $A''$ und $B'$ auf $m'$ zu errichtenden Normalen in einem Punkte $C'$ zusammen und liegen in einer Ebene, und man hat

$$T' : T'' : R' = \sin B'C'A'' : \sin A'C'B' : \sin A'C'A'',$$

folglich in Verbindung mit dem Verhältnisse zwischen $T$ und $T'$:

$$\frac{T}{T''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'}$$

und ähnlicher Weise:

$$\frac{T}{T'''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'} \cdot \frac{\sin B''C''A'''}{\sin A''C''B''};$$

und eben so ergiebt sich das Verhältniss auch zwischen irgend zwei andern Spannungen, folglich auch das Verhältniss zwischen $P$ und $Q$, indem die Spannung des ersten Gliedes der Kette durch ein vorhergehendes

Glied die Kraft $P$, und die Spannung des letzten Gliedes durch ein folgendes die Kraft $Q$ vertritt. Ist folglich $m$ das erste Glied und $m^{(n)}$ das letzte, $CA$ die Richtung von $P$ und $C^{(n)}\,A^{(n+1)}$ die Richtung von $Q$, so hat man:

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sin BCA'}{\sin ACB}\cdot\frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'}\cdots\frac{\sin B^{(n)}\,C^{(n)}\,A^{(n+1)}}{\sin A^{(n)}\,C^{(n)}\,B^{(n)}}.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts bestehen daher gegenwärtig darin:

1) dass die Normalen in der Berührung des ersten (letzten) Gliedes mit der unbeweglichen Fläche und mit dem zweiten (vorletzten) Gliede und die Richtung der Kraft $P$ ($Q$) in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden;

2) dass eben so die Normalen in der Berührung jedes Mittelgliedes mit dem vorhergehenden und folgenden Gliede und mit der Fläche in einer Ebene liegen und in einem Punkte zusammentreffen, und

3) dass zwischen den Intensitäten von $P$ und $Q$ das eben gefundene Verhältniss zwischen den Sinussen der von den Normalen und den Richtungen von $P$ und $Q$ gebildeten Winkel statt findet.

## §. 272.

Um jetzt von der eben betrachteten Kette *zu einem über eine unbewegliche Fläche gelegten und an seinen Enden durch Kräfte gespannten Faden* überzugehen, wird es am einfachsten seyn, uns die Glieder der Kette als unendlich kleine einander gleiche Kugeln zu denken. Denn sind die Glieder kugelförmig, so braucht die Bedingung, dass bei jedem Gliede die Normalen in den drei Berührungen mit der Fläche und den zwei angrenzenden Gliedern sich in einem Punkte schneiden, nicht ausdrücklich erwähnt zu werden, da sämmtliche Normalen auf der Oberfläche einer Kugel in ihrem Mittelpunkte zusammentreffen. Rücksichtlich der gegenseitigen Lage der Kugeln bleibt daher bloss die Bedingung übrig, dass bei jeder die gedachten drei Normalen in einer Ebene liegen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die Mittelpunkte $C$, $C'$, $C''$ von je drei auf einander folgenden Kugeln $m$, $m'$, $m''$ mit dem Punkte $B'$, in welchem die mittlere Kugel $m'$ die Fläche berührt, in einer Ebene enthalten sind.

Indem wir nun die Kugeln unendlich klein und einander gleich annehmen, lassen sich $CC'$, $C'C''$, ... als Elemente einer von der Fläche überall um den Halbmesser der Kugeln abstehenden Curve, d. i. eines über die Fläche gelegten Fadens, ansehen, und die letztere Bedingung drückt dann aus, dass je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, und die Normale der Fläche an derselben Stelle in einer Ebene liegen, d. h. dass in jedem Punkte der von dem Faden gebildeten Curve die Krümmungsebene derselben auf der Fläche rechtwinklig steht. Bekanntlich ist dieses die charakteristische Eigenschaft der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten derselben sich ziehen lässt *). *Mithin muss der*

*) Dies gilt wenigstens im Allgemeinen. In jedem Falle aber wird man eine Curve, die jene charakteristische Eigenschaft besitzt, in Theile zerlegen können, deren jeder ein Minimum zwischen seinen Endpunkten ist, sollte auch nicht die ganze Curve die möglich kleinste zwischen ihren Endpunkten seyn. Zerlegt man z. B. den Bogen eines grössten Kreises auf einer Kugel, der grösser als ein Halbkreis ist, in Theile, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, so ist jeder dieser Theile die kürzeste Linie auf der Kugel zwischen ihren Endpunkten. Dagegen ist der ganze Bogen unter allen

***Faden zwischen seinen beiden Endpunkten so liegen, dass er die kürzeste Linie ist, die auf der Fläche von dem einen Endpunkte desselben zum andern gezogen werden kann, oder doch so, dass genugsam kleine Theile desselben die kürzesten Linien zwischen ihren***

---

einfach gekrümmten Linien, die sich auf der Kugel zwischen seinen Enden ziehen lassen, die längste, und die Ergänzung dieses Bogens zu einem ganzen Kreise die kürzeste auf der Kugel.

Dass bei der kürzesten Curve, die sich auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei Punkten der letztern ziehen lässt, die Krümmungsebene der Curve überall rechtwinklig auf der Fläche steht, lässt sich folgendergestalt geometrisch darthun. Seyen $AB$, $BC$ (Fig. 75.) zwei nächstfolgende Elemente der Curve, und $MO$, $MP$ die Elemente der Fläche, in denen erstere Elemente enthalten sind. Die Elemente der Curve wollen wir uns geradlinig und die der Fläche eben denken, und $MN$ sey die Gerade, in welcher sich die letztern schneiden. Da nun die ganze Curve die kürzeste Linie seyn soll, welche zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche gezogen werden kann, so muss auch der Theil $ABC$ derselben die kürzeste Linie unter allen seyn, welche von $A$ geradlinig nach einem Punkte der $MN$ und von da geradlinig nach $C$ sich ziehen lassen. Da ferner die Länge dieser gebrochenen Linie sich nicht ändert, wenn das eine der beiden Flächenelemente $MO$ und $MP$, oder beide zugleich, mit den Linienelementen $AB$ und $BC$, welche sie enthalten, um $MN$ als Axe gedreht werden, so wird diejenige Linie $ABC$ die kürzeste seyn, welche nach einer Drehung, wodurch $MP$ in die erweiterte Ebene von $MO$ fällt, zu einer ungebrochenen Geraden, als der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten in einer Ebene, wird. Kommt daher $C$ nach dieser Drehung nach $C'$, so muss $B$ in die Gerade $AC'$ fallen. Nun beschreibt bei dieser Drehung die Gerade $BC$ die Fläche eines geraden Kegels, von welchem $MN$ die Axe ist. Ein Element dieser Kegelfläche ist der Winkel $CBC'$; die durch die Axe gehenden Ebenen $MBC$ und $MBC'$ müssen folglich mit der Ebene des Winkels $CBC'$ unendlich nahe rechte Winkel machen, d. h., weil $BC'$ die geradlinige Verlängerung von $AB$ ist: die Berührungsebenen $MO$ und $MP$ der Fläche müssen auf der Krümmungsebene $ABC$ der Curve rechtwinklig seyn.

*Endpunkten sind.* Dies ist die erste Bedingung des Gleichgewichts.

Sodann sind wegen der Gleichheit und unendlichen Kleinheit der Kugeln die Winkel $ACB$, $BCA'$, $A'C'B'$, etc. unendlich wenig von rechten Winkeln, mithin ihre Sinus um unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung von der Einheit verschieden. Zufolge der Proportion: $T : T' = \sin BCA' : \sin ACB$, ist daher der Unterschied je zweier nächstfolgenden Spannungen nur ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, also erst der Unterschied zweier Spannungen, zwischen welche eine unendliche Menge anderer fallen, d. i. der Spannungen an zwei um einen endlichen Theil des Fadens von einander entfernten Stellen, von der ersten Ordnung, d. h. *die Spannung des Fadens ist überall von gleicher Grösse; ihre Richtung aber ist die der Tangente der Fadencurve.*

Da nun am ersten (letzten) Elemente die Kraft $P$ ($Q$) mit der vom zweiten (vorletzten) Elemente auf dasselbe hervorgebrachten Spannung das Gleichgewicht halten muss, und dieses Element, gleich den übrigen, an der unbeweglichen Fläche beweglich ist, so ergiebt sich als zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Fadens, *dass jede der beiden Kräfte, welche auf den Anfang und das Ende des Fadens wirken, mit der Normale der Fläche und der Tangente des Fadens daselbst in einer Ebene liegt, und dass, wenn man die Kräfte nach diesen Richtungen zerlegt, die tangentialen Kräfte einander (und der Spannung des Fadens) gleich sind und den Faden nach entgegengesetzten Seiten zu ziehen suchen.*

## §. 273.

Noch verdient die vom Faden auf die Fläche ausgeübte Pressung näher betrachtet zu werden. Die Pressung, welche die Fläche von einem der unendlich kleinen einander gleichen Kügelchen erleidet, aus denen wir uns den Faden zusammengesetzt vorstellten, ist nach §. 271: $R = T\frac{\sin ACA'}{\sin BCA'} = T \sin ACA'$, (Fig. 74.), weil $BCA'$ unendlich nahe $= 90°$. Es ist aber $\sin ACA'$ $= \sin C_{\prime}C'CC'$, und der Sinus des Winkels, den zwei einander gleiche Elemente $C_{\prime}C$ und $CC'$ der Curve mit einander machen, ist gleich dem einen der Elemente, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Curve. Mithin ist $R = Tk : r$, wenn $r$ den Krümmungshalbmesser und $k$ die Länge eines der Elemente, oder, was dasselbe ist, den Durchmesser einer der Kugeln bezeichnet.

Von $n$ auf einander folgenden Kugeln, die einen so kleinen Theil $= nk$ des Fadens einnehmen, dass der Krümmungshalbmesser von einem Punkte des Theils zum andern unveränderlich angesehen werden kann, und dass die Pressungen, welche die Kugeln einzeln erzeugen, sowohl ihrer Grösse, als ihrer Richtung nach, nicht merklich von einander verschieden sind, von $n$ solchen Kugeln ist daher nach dem Princip der Zusammensetzung paralleler Kräfte, die Gesammtpressung $= nTk : r$

$$= T\frac{ds}{r},$$

wenn wir die Länge des Fadentheils $= ds$ setzen. Dieses Resultat ist um so richtiger, je kleiner wir $ds$ annehmen, und hängt nur noch insofern von $k$ ab, als $ds$ ein gewisses Vielfache von $k$ ist. Da uns aber nichts hindert, $k$ noch unendlich kleiner als $ds$, also von der zweiten Ordnung zu nehmen, während wir $ds$ als eine unendlich kleine Linie der ersten Ordnung betrachten, so kann $ds$, als solche, jede beliebige Länge haben.

*Die von einem Elemente des Fadens hervorgebrachte Pressung steht demnach zu der Spannung des Fadens in demselben Verhältnisse, wie die Länge des Elements zu seinem Krümmungshalbmesser.*

## §. 274.

Zusätze. *a.* Zu dem eben erhaltenen Resultate kann man auch durch folgende einfache Betrachtung gelangen. Auf jedes Element $AB$ (Fig. 76.) des über eine Fläche gespannten Fadens wirken an seinen Enden nach den tangentialen Richtungen $AC$ und $BD$ die einander gleichen Spannungen $T$, und die Resultante derselben muss mit den Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche das Element von der Fläche erleidet. Betrachten wir nun $AB$ als einen unendlich kleinen Bogen eines Kreises, und ist $M$ der Mittelpunkt des letztern und $N$ der Durchschnitt der Tangenten, so halbirt die Gerade $NM$ den Winkel $CND$, ist folglich die Richtung jener Resultante, und die Intensität derselben ist

$$T \cdot \frac{\sin CND}{\sin CNM} = T \sin AMB = T\frac{ds}{r},$$

wenn wiederum $ds$ die Länge des Elements $AB$, und $r$ seinen Krümmungshalbmesser $MA$ bezeichnet. Eben so gross, nur von entgegengesetzter Richtung, ist also auch die Resultante der auf das Element ausgeübten Pressungen.

*b.* Der Coefficient von $ds$ in dem Ausdrucke für die Pressung dieses Elements ist nichts anderes, als die

Gesammtpressung einer der Längeneinheit gleichen Linie, wenn je zwei gleiche Theile derselben nach parallelen Richtungen gleich grosse Pressungen, und zwar jedes dem Fadenelemente *ds* gleiche Linienelement dieselbe Pressung, wie das Fadenelement, erfahren. Dieser Coefficient, den wir die Pressung für einen, dem Elemente *ds* zugehörigen, Punkt des Fadens nennen können, ist von einem Punkte des Fadens zum andern veränderlich, und das Product aus derselben in ein den Punkt mit begreifendes Fadenelement giebt die Pressung dieses letztern, — eben so, wie man bei einem ungleichförmig dichten Körper durch Multiplication der Dichtigkeit an einer gewissen Stelle in ein daselbst befindliches Raumelement die Masse dieses Elements, oder bei einem mit veränderlicher Gesschwindigkeit sich bewegenden Punkte durch Multiplication der in einem gewissen Zeitpunkte statt findenden Geschwindigkeit in ein diesen Zeitpunkt mit enthaltendes Zeitelement das während dessen beschriebene Raumelement erhält.

*c.* Da die Spannung des Fadens überall von gleicher Grösse ist, so verhalten sich die Pressungen für verschiedene Punkte des Fadens umgekehrt, wie die Krümmungshalbmesser, also direct wie die Krümmungen selbst, so dass, wenn der Faden sich geradlinig über die Fläche fortzieht, er eine Pressung weder erleidet, noch ausübt.

*d.* Ist die Krümmung des Fadens überall gleich gross, so ist auch seine Pressung von einer Stelle zur andern dieselbe. Dies ereignet sich z. B. bei einem Faden, welcher über eine Kugel, oder über einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis gespannt ist. Denn im erstern Falle ist die Curve ein grösster Kreis der Kugel, im letztern im Allgemeinen eine cylindrische Spirale (Schraubenlinie). Da, wie sich leicht zeigen lässt, der Krümmungshalbmesser einer solchen Spirale gefunden wird, wenn man den Halbmesser des Cylinders durch das Quadrat des Sinus des Winkels dividirt, den die Elemente der Spirale mit der Axe des Cylinders machen, so ist bei gleicher Spannung die Pressung des spiralförmigen Fadens diesem Quadrate proportional, mithin desto stärker, je mehr sich der Winkel der Spirale mit der Axe einem rechten nähert; am stärksten, wenn dieser Winkel ein rechter ist, und damit die Spirale in einen auf der Axe normalen Kreis übergeht; am schwächsten dagegen, oder vielmehr null, wenn der Faden parallel mit der Axe und daher geradlinig ist.

*e.* Die zwei Kräfte am Anfange und Ende des Fadens müssen dergestalt gerichtet seyn, dass sie den Faden spannen, d. h. die Elemente desselben von einander zu trennen, nicht sie gegen einander zu drücken streben, indem sonst wegen der Unsicherheit des Gleichgewichts jedes Elements das Gleichgewicht des Ganzen keinen Bestand haben könnte. Da ferner in der Wirklichkeit der Faden über die Fläche nur gelegt, nicht unzertrennlich mit ihr verbunden ist, so muss die Pressung, welche Faden und Fläche auf einander ausüben, ein gegenseitiger Druck seyn, und der Faden muss daher der Fläche seine hohle Seite zukehren. — Wäre der Faden gegen die Fläche erhaben und würde er von den Kräften gespannt, so würde er sich von der Fläche trennen, sein Gleichgewicht aber würde ein sicheres seyn, wenn die Trennung auf irgend eine Weise verhindert werden könnte. — Wenn dagegen der gegen die Fläche erhabene Faden von den Kräften an beiden

Enden gedrückt würde, so würde er damit auch gegen die Fläche angedrückt, das Gleichgewicht aber wegen der Unsicherheit nicht bestehen können. — Wäre endlich der Faden gegen die Fläche hohl, und drückten ihn die Kräfte an beiden Enden, so würde Trennung von der Fläche und Unsicherheit des Gleichgewichts zugleich die Folge seyn. — Es giebt daher hinsichtlich der Richtungen der Kräfte und der Lage des Fadens gegen die Fläche in Allem vier denkbare Fälle, von denen aber der ersterwähnte allein in der Wirklichkeit vorkommen kann.

§. 275.

Sollen zwei auf die Enden $C$ und $D$ (Fig. 76.) eines Fadens $CABD$ wirkende Kräfte $P$ und $Q$ sich das Gleichgewicht halten, und ist nur der Theil $AB$ des Fadens über eine Fläche gelegt, sind aber die Theile $CA$ und $BD$ frei, so muss nach dem allgemeinen Gesetze, dass die einzelnen Theile für sich im Gleichgewichte sind, der Theil $AB$ die kürzeste Linie bilden, welche auf der Fläche von $A$ bis $B$ gezogen werden kann; die Theile $CA$ und $BD$ aber müssen geradlinig seyn, und die in $C$, $D$ angebrachten Kräfte $P$, $Q$ müssen die Richtungen $AC$, $BD$ haben. Es müssen ferner unter der Voraussetzung, dass die Fläche bloss vermöge ihrer Undurchdringlichkeit auf den Faden wirkt, $CA$, $BD$ Tangenten der Curve $AB$ in $A$, $B$ seyn, und die Kräfte $P$, $Q$ müssen einander gleich seyn. — Denn heisst $T$ die Spannung des Theiles $AB$, und wäre $AC$ nicht die Fortsetzung der Tangente $NA$ von $AB$, so müsste doch, wegen des Gleichgewichts der nach $AC$ und $AN$ gerichteten Spannungen $P$ und $T$ am Endpunkte $A$ von $AB$, die Richtung $AC$ mit der Tangente $AN$ und der Normale $AM$ der Fläche in einer Ebene liegen, und es müsste, wenn man die Spannung $P$ in $A$ nach tangentialer und normaler Richtung zerlegte, die tangentiale Kraft der Spannung $T$ gleich und entgegengesetzt seyn (§. 272.). Weil aber die Richtung $AC$ nicht in das Innere des von der Fläche begränzten Körpers gehen kann, so würde auch die normale Kraft nach aussen zu gerichtet seyn, folglich den Punkt $A$ vom Körper abwärts treiben und damit das Gleichgewicht aufheben. Die normale Kraft muss folglich null, und daher die Spannung $P$ der Spannung $T$ in $A$ gleich und entgegengesetzt seyn. Aehnliches wird rücksichtlich der Spannungen $T$ und $Q$ des Punktes $B$ bewiesen. Mithin sind $CA$ und $BD$ die Tangenten an $AB$ in $A$ und $B$, und $P=T=Q$.

## §. 276.

Wir haben bisher die Fläche, über welche ein Faden gespannt ist, als unbeweglich betrachtet. Ist sie dieses nicht, sondern entweder zum Theil, oder vollkommen frei beweglich, so muss man noch das Gleichgewicht berücksichtigen, welches am Körper, dem die Fläche zur Grenze dient, die vom Faden auf ihn ausgeübte Pressung mit den übrigen auf ihn wirkenden Kräften hält. Da aber am Faden die Pressung, welche er von der Fläche erleidet, mit den Spannungen der zwei Punkte des Fadens im Gleichgewichte ist, in denen er nach tangentialer Richtung von der Fläche abgeht, so kann man statt der Pressung des Fadens gegen die Fläche auch diese zwei Spannungen, d. h. zwei einander und der Spannung gleiche Kräfte, setzen, welche in den besagten zwei Punkten nach den geradlinig fortgehenden Richtungen des Fadens wirken. Auch erhellet dieses sogleich daraus, dass man, unbeschadet des Gleichgewichts des Ganzen, den auf der Fläche liegenden Theil des Fadens sich mit der Fläche fest vereinigen lassen kann. Denn alsdann ist von Pressung nicht mehr die Rede, sondern es kommen nur die zwei erwähnten Spannungen in Betracht. Zu mehrerer Erläuterung mag folgende Aufgabe dienen.

## §. 277.

**Aufgabe.** Ein in sich zurücklaufender Faden $ABCDEF$ (Fig. 77.) ist um drei frei bewegliche Körper $l$, $m$, $n$ gelegt. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei auf diese Körper wirkenden Kräften $P$, $Q$, $R$ zu finden.

**Auflösung.** Seyen $BC$, $DE$, $FA$ die freien und daher geradlinigen Theile des Fadens, welche zwischen den Körpern $l$ und $m$, $m$ und $n$, $n$ und $l$ liegen und sie resp. berühren; $T$ die constante Spannung des Fadens; $p$, $q$, $r$ die Richtungen der Kräfte $P$, $Q$, $R$. Hiernach sind am Körper $l$ zwei Kräfte, jede $= T$, nach den Richtungen $AF$, $BC$ wirkend, im Gleichgewichte mit der nach $p$ gerichteten Kraft $P$; mithin müssen die drei Geraden $AF$, $BC$, $p$ in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, und der von den zwei erstern gebildete Winkel muss von der dritten halbirt werden. Gleiches findet statt in Bezug auf die zwei übrigen Körper $m$ und $n$. Sämmtliche drei geradlinige Theile des Fadens müssen daher in einer Ebene liegen, also ein Dreieck $GHI$ bilden, und die Richtungen der Kräfte müssen durch die Ecken dieses Dreiecks gehen und die Winkel daselbst halbiren. Die Verhältnisse aber, in welchen die Kräfte zu der Spannung des Fadens und zu einander stehen müssen, sind:

$$P : T = \sin G : \sin \tfrac{1}{2} G = 2 \cos \tfrac{1}{2} G : 1,$$
$$Q : T = 2 \cos \tfrac{1}{2} H : 1, \quad R : T = 2 \cos \tfrac{1}{2} I : 1.$$

Damit übrigens der Faden durch die Kräfte wirklich gespannt werde, müssen sie von dem Innern des Dreiecks $GHI$ nach aussen gerichtet seyn.

## §. 278.

**Zusätze.** *a.* Da das Gleichgewicht noch fortbesteht, wenn die gegenseitige Lage der Theile des Systems unveränderlich angenommen wird, so müssen sich $p$, $q$, $r$ in einem Punkte schneiden, welches zu dem bekannten Satze der Elementargeometrie führt, dass die drei Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, in einem Punkte zusammentreffen.

*b.* Untersuchen wir ähnlicher Weise das Gleichgewicht zwischen vier Kräften, welche auf vier frei bewegliche mit einem Faden umschlungene Körper wirken, so müssen von den vier freien und daher geradlinigen Theilen des Fadens je zwei auf einander folgende in einer Ebene liegen, und der von ihnen gebildete Winkel muss von der Richtung der Kraft, welche auf den dazwischen begriffenen Körper wirkt, halbirt werden. Da hiernach diese vier Theile des Fadens, in ihrer Aufeinanderfolge und genugsam verlängert, ein im Allgemeinen nicht in einer Ebene enthaltenes Viereck bilden, dessen Winkel von den Richtungen der Kräfte halbirt werden, und da vier Kräfte, die sich an einem freien Körper das Gleichgewicht halten, falls sie nicht in einer Ebene sind, eine hyperboloidische Lage haben (§. 99. *a.*), so gewinnen wir folgenden Satz:

Die vier Geraden, welche die Winkel eines nicht in einer Ebene enthaltenen Vierecks halbiren, haben eine solche Lage gegen einander, dass jede Gerade, welche dreien derselben begegnet, auch die vierte trifft.

## §. 279.

Das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens wird nicht unterbrochen, wenn man die Fläche wegnimmt und statt der Pressungen, welche sie auf den Faden ausübte, Kräfte nach denselben Richtungen und von denselben Intensitäten auf ihn wirken lässt, Kräfte also, deren Richtungen überall normal auf dem Faden sind, in seiner Krümmungsebene liegen und von seiner hohlen Seite nach der erhabenen zu gehen, deren Intensität aber für jeden einzelnen Punkt des Fadens als verschwindend zu betrachten ist, indem die Resultante aller der auf einen unendlich kleinen Theil $ds$ des Fadens wirkenden Kräfte ebenfalls unendlich klein, $= Pds$ ist, wo $P$ die Spannung, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, bedeutet (§. 273.).

Soll umgekehrt ein frei beweglicher Faden im Gleichgewichte seyn, wenn dessen Anfangs- und Endpunkt unbeweglich sind, und wenn normal auf jedes seiner Elemente $ds$ eine Kraft $Pds$ wirkt, wo $P$ eine von einem Punkte des Fadens zum andern nach einem noch zu bestimmenden Gesetze veränderliche Grösse ist, so muss die Richtung der Kraft in der Krümmungsebene des Elements liegen, und $P$ dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional seyn. Denn am Elemente $ds$ oder $AB$ (Fig. 76.) halten sich die Kraft $Pds$ und die zwei Spannungen an den Endpunkten $A$ und $B$ des Elements das Gleichgewicht. Die Kraft $Pds$ muss daher mit den an die Fadencurve in $A$ und $B$ gelegten Tangenten $AC$ und $BD$, als den Richtungen der Spannungen, in einer Ebene, also in der Krümmungsebene des Elements, liegen. Sie muss ferner durch den Durchschnitt $N$ dieser Tangenten, und weil sie zugleich auf dem Elemente normal seyn soll, durch den Mittelpunkt $M$ seiner Krümmung gehen. Da hiernach die Richtung von $Pds$ den Winkel $CND$ halbirt, so sind die Spannungen in $A$ und $B$, und eben so in je zwei andern unendlich nahe auf einander folgenden Punkten gleich gross, also die Spannung in allen Punkten des Fadens von constanter Grösse. Diese Spannung aber verhält sich zur Kraft $Pds$ wie $\sin ANM$ zu $\sin AMB$ (§. 274. *a.*), d. i. wie $AM$ oder der Krümmungshalbmesser zu $AB, = ds$, woraus das Uebrige von selbst folgt.

---

### §. 280.

Die so eben angestellte Betrachtung über das Gleichgewicht eines Fadens, auf welchen überall normale Kräfte wirken, wollen wir jetzt ganz verallgemeinern und die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen suchen, wenn auf jedes Element $ds$ eines vollkommen biegsamen und bis auf seine zwei befestigten Endpunkte frei beweglichen Fadens eine der Länge des Elements proportionale, übrigens aber ihrer Intensität und Richtung nach beliebig gegebene, Kraft $Pds$ wirkt.

Sey demnach in Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem die Kraft $P$ aus den drei mit den Coordinatenaxen parallelen Kräften $X$, $Y$, $Z$ zusammengesetzt, und diese Kräfte irgend welche Functionen der Coordinaten $x$, $y$, $z$, welche einem Punkte des Elements $ds$ zugehören. Den Faden wollen wir uns, wie im Obigen, aus einander sich berührenden, einander gleichen Kugeln gebildet vorstellen, deren jede einen Durchmesser $= ds$ hat. Sey $m$ (Fig. 78.) eine dieser Kugeln, welche die vorhergehende $m_,$ in $A$ und die folgende $m'$ in $A'$ berühre. Die Mittelpunkte von $m_,$, $m$, $m'$, seyen $C_,$, $C$, $C'$, so ist $AA' = C_,C = CC' = ds$, und wenn $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $C$ bezeichnen, so sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten von $C'$. Die auf den Fadentheil $AA' = ds$, also bei der gegenwärtigen Vorstellung, auf die Kugel $m$, wirkende Kraft $Pds$ haben wir uns am Mittelpunkte $C$ der Kugel angebracht zu denken. Sie muss im Gleichgewichte seyn mit den Spannungen, welche die Kugel $m$ von den anliegenden $m_,$ und $m'$ in $A$ und $A'$ erleidet. Man setze deshalb die von $m$ auf $m_,$ in $A$ nach der Richtung $C_,C$ ausgeübte Spannung $= T$, und die von $m'$ auf $m$ in $A'$ nach der Richtung $CC'$ ausgeübte $= T'$. Diese Spannungen werden bei der Allgemeinheit der jetzigen Untersuchung nicht mehr, wie im Vorigen, einander gleich, sondern als Functionen der Coordinaten von $A$ und $A'$ anzusehen seyn, so dass, weil $AA' = ds$ ist, $T'$ eben so von $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, wie $T$ von $x$, $y$, $z$, abhängt, und daher $T' = T + dT$ ist. Die Spannung $T$, nach den Coordinatenaxen zerlegt, gebe die Kräfte $U$, $V$, $W$; sie sind, weil $T$ die Richtung des Elements $C_,C$ hat:

$$(1)\quad U = T\frac{dx}{ds},\ V = T\frac{dy}{ds},\ W = T\frac{dz}{ds},$$

sind also gleichfalls Functionen von $x$, $y$, $z$. Die Spannung $T'$, nach denselben Axen zerlegt, wird daher die Kräfte $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$ geben.

Die an der Kugel $m$ sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte sind demnach: erstens die Kraft $Pds$ oder ($Xds$, $Yds$, $Zds$); zweitens die von $m'$ ausgeübte, nach $CC'$ gerichtete Spannung $T'$ oder $(U + dU, V + dV, W + dW)$, und drittens die von $m_{,}$ nach der Richtung $CC_{,}$ ausgeübte und durch $(-U, -V, -W)$ auszudrückende Spannung, da sie der Spannung $T$ oder $(U, V, W)$ gleich und entgegengesetzt ist. Sämmtliche drei Kräfte schneiden sich, wie gehörig, in einem Punkte $C$, und wir haben somit nach §. 67. Zus. die drei Bedingungsgleichungen: $Xds + U + dU - U = 0$, etc. d. i.

$$(2)\quad Xds + dU = 0,\ Yds + dV = 0,\ Zds + dW = 0,$$

oder $$Xds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,\ Yds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$Zds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Aus den Gleichungen (2) und den vorigen (1) sind nun, wie bei jedem andern Problem der Statik, welches ein System mit einander verbundener Körper betrifft, noch die Spannungen zu eliminiren; dies aber kann hier nur durch Infinitesimalrechnung geschehen. In der That folgt aus (2) durch Integration:

$$(3)\quad \int Xds + U = 0,\ \int Yds + V = 0,\ \int Zds + W = 0.$$

wo die noch hinzuzufügenden Constanten unter dem Zeichen mit begriffen sind. Hieraus aber fliessen in Verbindung mit (1) die zwei Bedingungen des Gleichgewichts:

$$(4)\quad \frac{dx}{\int Xds} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{\int Zds}.$$

## §. 281.

**Zusätze.** *a.* Die gemachte Voraussetzung, dass die Elemente $ds$ von gleicher Länge seyen, braucht bei den erhaltenen Gleichungen nicht mehr beachtet zu werden, da in ihnen nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen. Es kann daher, statt $ds$, auch von einer der übrigen veränderlichen Grössen das erste Differential constant gesetzt werden, so dass je zwei nächstfolgende $ds$ um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung von einander verschieden sind. Auch sieht man leicht, dass die zu Anfange des vor. §. gemachten Schlüsse an Richtigkeit nicht verlieren, wenn man die Durchmesser je zweier an einander liegenden Kügelchen um die zweite Ordnung von einander verschieden seyn lässt.

*b.* Den Gleichungen (4) kann man nach Wegschaffung der Bruchform, und wenn man von neuem integrirt, auch die Gestalt der drei Integralgleichungen geben:

$$(4^*)\quad \begin{cases} \int dz \int Y ds - \int dy \int Z ds = 0, \\ \int dx \int Z ds - \int dz \int X ds = 0, \\ \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = 0, \end{cases}$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, und wo die neu hinzuzufügenden Constanten unter den neuen Integrationszeichen mit begriffen sind.

Diese Gleichungen lassen sich noch unter einer besondern Bedeutung auffassen. Man kann nämlich, mit Anwendung der bekannten Reductionsformel $\int u dv = uv - \int v du$, statt der dritten Gleichung z. B., — die, wenn die Kräfte, und mithin auch die Fadencurve, in einer einzigen Ebene (der $x$, $y$) enthalten sind, die alleinige Bedingung des Gleichgewichts ist, — auch schreiben:

$$(\alpha)\quad y \int X ds - \int y X ds - x \int Y ds + \int x Y ds = 0.$$

Hierin gehören die Coordinaten $x$, $y$, welche ausserhalb des Zeichens $\int$ stehen, dem Punkte der Fadencurve an, bis zu welchen man integrirt, während die unter dem Zeichen befindlichen $x$, $y$ sich auf alle vom Anfangspunkte bis dahin liegenden Zwischenpunkte der Curve beziehen. Bezeichnet man daher erstere Coordinaten, um sie von den letztern zu unterscheiden, durch $x'$, $y'$, so kann man für ($\alpha$) auch setzen:

$$\int[(x-x')\,Yds-(y-y')\,Xds]=0.$$

Da nun $x$, $y$ die Coordinaten des Elements $ds$ sind, und daher das in Klammern Eingeschlossene nichts anderes, als das Moment der auf $ds$ wirkenden Kraft ($Xds$, $Yds$) in Bezug auf den Punkt ($x'$, $y'$) ist, so drückt die Gleichung unter dieser Form aus, dass das Moment aller auf den Faden von seinem Anfange bis zum Punkte ($x'$, $y'$) wirkenden Kräfte in Bezug auf den letztern Punkt null ist.

Ist die Curve nicht in einer Ebene, oder doch nicht in der Ebene der $x$, $y$, begriffen, so zeigt dieselbe Gleichung an, dass das Moment der Kräfte, welche auf den Faden von seinem Anfange bis zum Punkte ($x'$, $y'$, $z'$), bis zu welchen man die Integration erstreckt, wirken, in Bezug auf eine durch den letztern Punkt parallel mit der Axe der $z$ gelegte Axe null ist. Analoge Bedeutung haben die zwei ersten Gleichungen in (4*) rücksichtlich der Axen der $x$ und der $y$.

Der unmittelbare Grund dieses Ergebnisses liegt offenbar darin, dass, wenn der Faden im Gleichgewichte ist, an jedem Theile desselben die auf die Elemente des Theils wirkenden Kräfte und die Spannungen am Anfange und Ende des Theils eben so, wie an einem frei beweglichen festen Körper, im Gleichgewichte mit einander seyn müssen. Zugleich folgt hieraus, dass man zu den drei Integralen $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$ die nach den drei Coordinatenaxen zerlegte Spannung in dem Punkte, von welchem man die Integrale anfangen lässt, als Constanten hinzuzufügen hat.

*c.* Umgekehrt kann man mit Hülfe des Princips, dass bei jedem vom Anfange des Fadens an gerechneten Theile desselben die Kräfte an den Elementen mit den Spannungen am Anfange und Ende des Theils das Gleichgewicht halten, ganz leicht die Bedingungsgleichungen (4*) herleiten. Denn, um dieses nur für den Fall zu zeigen, wenn die Kräfte in einer und derselben Ebene wirken, so wird das gedachte Gleichgewicht nach §. 38. durch die drei Gleichungen bedingt:

$$\int X ds + U = 0, \quad \int Y ds + V = 0,$$
$$\int x Y ds + x V - \int y X ds - y U = 0,$$

wo $(U, V)$ die Spannung am unbestimmten Ende $(x, y)$ des Theils ist, die Spannung am bestimmten Anfange aber unter dem Zeichen mit begriffen ist. Werden nun hieraus $U$ und $V$ eliminirt, so kommt nach gehöriger Reduction die bereits erhaltene Gleichung:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = 0.$$

Dass die Spannung $(U, V)$ im Punkte $(x, y)$ in tangentialer Richtung wirkt, ist eine unmittelbare Folge aus diesen Gleichungen. Denn es verhält sich nach ihnen:

$$dx : dy = \int X dx : \int Y ds = U : V.$$

*d.* Jedes der drei Integrale $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$ enthält eine willkührliche Constante. Die Gleichung für die Fadencurve in einer Ebene enthält daher drei willkührliche Constanten, und die zwei von einander unabhängigen Gleichungen für die Curve im Raume begreifen fünf Constanten in sich.

Jene drei Constanten bei einer Curve in einer

Ebene, so wie diese fünf bei einer Curve im Raume, lassen sich unter andern dadurch bestimmen, dass man zwei Punkte, durch welche die Curve gehen soll, und die Länge des dazwischen begriffenen Stückes der Curve gegeben seyn lässt. Denn soll eine Curve einen gegebenen Punkt enthalten, so müssen, nachdem die Curve eben ist, oder nicht, zwischen den Coordinaten des Punktes und den Constanten in der einen oder den zwei Gleichungen der Curve eine oder zwei Bedingungsgleichungen erfüllt seyn; und die Forderung, dass der zwischen zwei gegebenen Punkten der Curve enthaltene Theil derselben von gegebener Länge sey, führt, die Curve mag eben seyn, oder nicht, zu einer einzigen Gleichung zwischen der gegebenen Länge und den Constanten der Curve. Man hat daher in jedem der beiden Fälle eben so viel Gleichungen, als zu bestimmende Constanten.

## §. 282.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht am Faden wurden in §. 280. aus den Gleichungen (1) und (2) durch Elimination der Spannung hergeleitet. Diese Elimination kann aber nicht allein, wie dort geschah, durch Integration, sondern auch durch Differentiation bewerkstelligt werden. Setzt man zu diesem Ende die Differentialquotienten

$$(5)\quad \frac{dx}{ds} = \xi,\ \frac{dy}{ds} = \eta,\ \frac{dz}{ds} = \zeta, \text{ wo daher}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \text{ und} \\ \xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0, \end{cases}$$

so folgt aus (1) durch Differentiation: $dU = Td\xi + \xi dT$, etc., und wenn man diese Werthe von $dU$, $dV$, $dW$ in (2) substituirt:

$$(2^*)\quad\begin{cases} Xds + Td\xi + \xi dT = 0, \\ Yds + Td\eta + \eta dT = 0, \\ Zds + Td\zeta + \zeta dT = 0. \end{cases}$$

Um nun zuerst aus diesen Gleichungen $T$ und $dT$ mit einem Male zu eliminiren, multiplicire man sie resp. mit den Coefficienten $l$, $m$, $n$, addire sie und bestimme die Coefficienten so, dass

$$(a)\quad\begin{cases} l\xi + m\eta + n\zeta = 0, \\ ld\xi + md\eta + nd\zeta = 0, \end{cases}$$ so ist auch

$$(b)\quad lX + mY + nZ = 0.$$

Aus ($a$) aber folgt $l : m : n = \eta d\zeta - \zeta d\eta :$ etc., mithin

$$(7)\quad X(\eta d\zeta - \zeta d\eta) + Y(\zeta d\xi - \xi d\zeta) + Z(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0,$$

eine von der Spannung freie Gleichung, welche zu erkennen giebt, *dass die Richtung der Kraft* ($X, Y, Z$) *oder $P$ in der Krümmungsebene der Fadencurve liegen muss.* Denn nehmen wir den Punkt ($x, y, z$) zum Anfangspunkte der Coordinaten, so geht diese Ebene durch die drei auf einander folgenden Punkte der Curve: $(0, 0, 0)$, $(dx, dy, dz)$ oder $(\xi ds, \eta ds, \zeta ds)$ und $(2dx + d^2x, 2dy + d^2y, 2dz + d^2z)$ oder $(2\xi ds + d\xi ds + \xi d^2s, \ldots)$. Setzen wir daher die Gleichung der durch den jetzigen Anfangspunkt gehenden Krümmungsebene:

$$lu + mv + nw = 0,$$

wo $u$, $v$, $w$ die Coordinaten bezeichnen, so muss seyn:

$$l\xi ds + m\eta ds + n\zeta ds = 0,$$
$$l[\xi(2ds + d^2s) + d\xi ds] + \ldots = 0;$$

und diese zwei Gleichungen lassen sich, wie man augenblicklich wahrnimmt, auf die Gleichungen ($a$) reduciren. Der Gleichung ($b$) zufolge ist aber auch die Richtung von ($X$, $Y$, $Z$) in dieser Ebene begriffen.

Der statische Grund, aus welchem die Kraft $P$ in der Krümmungsebene enthalten seyn muss, liegt begreiflich darin, dass die Krümmungsebene des Elements $ds$ durch die zwei an den Anfangs- und Endpunkt des Elements gelegten Tangenten bestimmt wird, und dass mit den zwei nach diesen Tangenten wirkenden Spannungen des Elements die Kraft $Pds$ das Gleichgewicht hält.

— Ausser der Gleichung (7) kann man aus (2*) noch eine von $T$ und $dT$ freie Gleichung erhalten, indem man daraus $T$ und $dT$ einzeln bestimmt und alsdann den Werth von $dT$ dem Differentiale des Werthes von $T$ gleich setzt. Die auf diese Weise sich ergebende Gleichung enthält daher noch die Differentiale von $X$, $Y$, $Z$; sie vertritt in Verbindung mit (7) die Stelle der zwei Integralgleichungen (4).

## §. 283.

**Zusätze.** *a.* Um die Werthe von $T$ und $dT$ aus den drei Gleichungen (2*) zu finden, hat man jedesmal nur zwei der letztern zu berücksichtigen nöthig. Sollen aber diese Werthe zugleich eine symmetrische Form haben, so kann man folgendergestalt verfahren. Man multiplicire die Gleichungen (2*) resp. mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und addire sie, so kommt mit Anwendung von (5) und (6):

$$(8)\quad Xdx + Ydy + Zdz + dT = 0.$$

Eben so findet sich durch Addition derselben Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ multiplicirt hat:

$$(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta)ds + T(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0,$$

oder, wenn $r$ den Krümmungshalbmesser bezeichnet:

$$(9)\quad Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta + T\frac{ds}{r^2} = 0;$$

denn bekanntlich ist $r = \frac{ds}{\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}}$ *).

*b.* Berechnet man aus (2*) noch die Quadrate von $X, Y, Z$ und addirt sie, so kommt:

$(X^2 + Y^2 + Z^2)ds^2 = T^2 (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + dT^2$,
oder einfacher, weil $X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2$, und mit Einführung von $r$:

$$(10) \quad P^2 = \frac{T^2}{r^2} + \frac{dT^2}{ds^2}.$$

*c.* Weil $X, Y, Z = P$, resp. multiplicirt in die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von $P$ mit den Coordinatenaxen macht, und weil $dx, dy, dz = ds$, resp. multiplicirt in die Cosinus der Winkel von $ds$ mit denselben Axen, so ist, wenn $\varphi$ den Winkel von $P$ mit $ds$ bezeichnet: $Xdx + Ydy + Zdz = P \cos\varphi\, ds$. Hiermit reducirt sich die Gleichung (8) auf

$$(11) \quad P\cos\varphi\, ds + dT = 0,$$

*) Diese Formel für den Krümmungshalbmesser dürfte sich am einfachsten also beweisen lassen. — Seyen $ds$ und $ds'$ zwei nächstfolgende, und daher ihrer Länge nach höchstens um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung verschiedene Curvenelemente. Man denke sich dieselben als geradlinig und nenne $\omega$ den unendlich kleinen Winkel, den $ds'$ mit der Verlängerung von $ds$ macht, so ist, wie man weiss, $r = \frac{ds}{\omega}$. Man beschreibe hierauf um den Anfangspunkt der Coordinaten, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser $= 1$, eine Kugel und lege durch ihren Mittelpunkt mit $ds$ und $ds'$ zwei Parallelen, welche die Kugelfläche in $S$ und $S'$ treffen, so ist $SS' = \omega$. Da nun nach (5), $\xi, \eta, \zeta$ die Cosinus der Winkel sind, welche das Element $ds$ mit den Coordinatenaxen bildet, so sind $\xi, \eta, \zeta$ zugleich die Coordinaten von $S$, und eben so $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ die Coordinaten von $S'$, folglich $\omega = SS' = \sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}$, woraus obenstehender Ausdruck für $r$ hervorgeht.

und wenn wir den hieraus fliessenden Werth von $dT$ in (10) substituiren und die Wurzel ausziehen:

$$(12) \quad P \sin\varphi = \frac{T}{r}.$$

*d.* Aus (11) und (12) folgt nach Wegschaffung von $T$:

$$(13) \quad Pr \sin\varphi + \int P \cos\varphi \, ds = 0.$$

Diese Gleichung und die Gleichung (7), oder der Satz, dass die Richtung der Kraft überall in der Krümmungsebene der Fadencurve liegen muss, enthalten demnach ebenfalls sämmtliche Bedingungen für das Gleichgewicht des Fadens.

*e.* Man sieht leicht, wie man zu den sehr einfachen Gleichungen (11) und (12) auch unmittelbar gelangen kann. Sind nämlich $C,C$ und $CC'$ (Fig. 78.) zwei auf einander folgende Elemente des Fadens und bezeichnet man den unendlich kleinen Winkel von $C,C$ mit $CC'$ durch $\omega$, so müssen an $C$ in der Ebene $C,CC'$ die drei Kräfte $Pds$, $T$, $T'$, deren Richtungen mit $CC'$ resp. die Winkel $\varphi$, $180^\circ + \omega$, 0 machen, im Gleichgewichte seyn. Dies führt zu den zwei Gleichungen:

$$P \cos\varphi \, ds - T \cos\omega + T' = 0,$$
$$P \sin\varphi \, ds - T \sin\omega = 0,$$

welche mit der Bemerkung, dass $T \cos\omega$ von $T$ nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung verschieden ist, und dass $ds : \sin\omega = ds : \omega = r$, in (11) und (12) übergehen.

*f.* In dem besonderen Falle, wenn jede Kraft $Pds$ auf ihrem Elemente normal, also $\varphi$ immer $= 90^\circ$ ist, wird nach (11) $dT = 0$, und nach (12) $P = T : r$, also $T$ constant, und $P$ umgekehrt dem $r$ proportional, — beides übereinstimmend mit den schon oben (§. 279.) für diesen Fall erhaltenen Resultaten.

Setzen wir umgekehrt $dT = 0$, so folgt aus (11) $\varphi = 90°$, und aus (12) $P = T : r$, d. h. $P$ ist auf der Fadencurve normal und im umgekehrten Verhältnisse mit $r$. Hieraus fliesst folgender für die analytische Geometrie bemerkenswerthe Lehrsatz:

Sind $x$, $y$, $z$ die rechtwinklichen Coordinaten einer Curve im Raume, und $X$, $Y$, $Z$ solche Functionen von $x$, $y$, $z$, dass den Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$
$$\frac{dx}{\int Xds} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{\int Zds}$$

Genüge geschieht, so hat eine durch den Punkt $(x, y, z)$ der Curve gelegte gerade Linie, von welcher $X$, $Y$, $Z$ die rechtwinkligen Projectionen auf die drei Coordinatenebenen sind, die Richtung des Krümmungshalbmessers daselbst und ist ihrer Länge nach demselben umgekehrt proportional, welche daher, wenn $a$ eine gewisse, noch zu bestimmende Constante bezeichnet, $= a : \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ ist.

Ist die Curve in einer Ebene enthalten, und lässt man diese die Ebene der $x$, $y$ seyn, so werden $z$ und $Z$ null, und die vorigen Gleichungen reduciren sich auf

$$Xdx + Ydy = 0,$$
$$dx \int Yds = dy \int Xds.$$

Man setze nun $X = -P\frac{dy}{ds}$, so wird wegen der erstern dieser Gleichungen $Y = P\frac{dx}{ds}$, mithin $P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, und die letztere verwandelt sich in:

$$dx \int Pdx + dy \int Pdy = 0.$$

Diese einfache Gleichung besitzt demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass der durch sie bestimmte

Werth von $P$ umgekehrt dem Krümmungshalbmesser der ebenen Curve proportional ist, von welcher $x$ und $y$ die rechtwinkligen Coordinaten sind *).

## §. 284.

Untersuchen wir noch die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn der in allen seinen Theilen der Wirkung von Kräften unterworfene Faden nicht mehr frei, wie in den vorigen §§., sondern auf einer gegebenen Fläche beweglich ist. Alsdann wirkt auf jedes Element $ds$ desselben ausser der Kraft $Pds$ noch der Druck der Fläche. Dieser Druck ist auf der Fläche rechtwinklig, und kann, da er der Länge des Elements gleichfalls proportional ist, $= Rds$ gesetzt werden. Man kann daher aus den obigen für das Gleichgewicht eines freien Fadens gegebenen Formeln sogleich die für den

*) Dies lässt sich auch leicht geradezu darthun. Sey zu dem Ende $dy = pdx$, so wird die Gleichung

$$-\int Pdx = p\int Ppdx$$

und wenn man differentiirt:

$$-Pdx = dp\int Ppdx + Pp^2dx.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$\frac{Ppdx}{\int Ppdx} = -\frac{pdp}{1+p^2}$$

und integrirt dann wiederum, so kommt:

$$\log\int Ppdx = \log C - \tfrac{1}{2}\log(1+p^2),$$

wo $\log C$ die hinzuzufügende Constante ist. Eine abermalige Differentiation der letztern Gleichung, nachdem sie vorher auf die Form

$$\int Ppdx = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$$

gebracht worden, giebt endlich

$$-\frac{C}{P} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}.$$

Dieser dem $P$ umgekehrt proportionale Ausdruck ist aber bekanntlich der des Krümmungshalbmessers.

jetzigen Fall herleiten, indem man statt $Pds$ die Resultante von $Pds$ und $Rds$ setzt.

Ist nun $F=0$ die Gleichung für die gegebene Fläche, so sind $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ den Cosinussen der Winkel, welche die Normale der Fläche, also die Richtung von $Rds$, mit den Axen der $x, y, z$ macht, proportional. Diese partiellen Differenzen, dividirt durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, sind mithin die Cosinus selbst, welche wir, als durch $F$ bestimmte Functionen von $x, y, z$, resp. $=u, v, w$ setzen wollen. Die Kraft $Rds$, nach den drei Axen zerlegt, giebt daher die Kräfte $Ruds$, $Rvds$, $Rwds$ und die Gleichungen (2) in §. 280. werden damit:

$$(14)\quad \begin{cases} Xds + Ruds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \\ Yds + Rvds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0, \\ Zds + Rwds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen $R$ und $T$, — am vortheilhaftesten aber ist es, diese Elimination in jedem speciellen Falle besonders zu verrichten, — so erhält man die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts. Sind $X, Y, Z$ gegebene Functionen von $x, y, z$, so lässt diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung für die Fläche die zum Gleichgewichte nöthige Curve des Fadens erkennen.

### §. 285.

**Zusatz.** Aus der Gleichung für die Fläche: $F=0$, folgt:

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0,$$

mithin auch, weil $u$, $v$, $w$ den partiellen Differenzen von $F$ nach $x$, $y$, $z$ proportional sind:

$$udx + vdy + wdz = 0.$$

Multiplicirt man daher die Gleichungen (14) resp. mit $dx$, $dy$, $dz$ und addirt sie hierauf, so kommt, wie in §. 283. *a.*, bei einem freien Faden:

$$Xdx + Xdy + Zdz + dT = 0.$$

Wenn folglich nur auf den Anfang und das Ende des über die Fläche gelegten Fadens ihn spannende Kräfte wirken, und daher $X, Y, Z = 0$ sind, so ist auch $dT = 0$, d. h. die Spannung ist von einem Punkte des Fadens zum andern constant. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen (14) also schreiben:

$$(14^*) \quad Ruds = -Td\xi, \quad Rvds = -Td\eta, \quad Rwds = -Td\zeta,$$

wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die in §. 282. angegebene Bedeutung haben. Es folgt hieraus:

$$u(\eta d\zeta - \zeta d\eta) + v(\zeta d\xi - \xi d\zeta) + w(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0.$$

Die durch den Punkt ($x$, $y$, $z$) gehende Gerade, deren Projectionen auf die Axen der $x$, $y$, $z$ sich wie $u$, $v$, $w$ verhalten, d. i. die Normale der Fläche im Punkte ($x$, $y$, $z$), ist demnach in der Krümmungsebene der Fadencurve enthalten (§. 282.), oder mit andern Worten: in jedem Punkte des Fadens ist seine Krümmungsebene auf der Fläche normal.

Addirt man endlich die Quadrate der Gleichungen (14*), so erhält man, weil $u$, $v$, $w$ die Cosinus der drei Winkel einer Geraden mit den Coordinatenaxen sind, und daher $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ ist:

$$R^2 = \frac{T^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{ds^2} = \frac{T^2}{r^2} \text{ (§. 283. } a.\text{)},$$

d. h. der Druck der Fläche ist der Spannung, dividirt durch den Krümmungshalbmesser gleich, — Alles übereinstimmend mit den schon in §. 272. und §. 273. gefundenen Resultaten.

## §. 286.

Die Kraft $P$ in dem Ausdrucke $Pds$ ist, wie bereits erinnert worden (§. 274. *b.*), die Resultante von Kräften, welche auf eine Linie, deren Länge $= 1$, nach parallelen Richtungen wirken, dergestalt, dass jedes Element der Linie, welches mit dem Elemente $ds$ des Fadens gleiche Länge hat, von derselben Kraft, wie dieses $ds$, afficirt wird. Da aber in der Wirklichkeit jedes Element des Fadens ein kleiner physischer Körper ist und, als solcher, eine gewisse Masse hat, und da die Schwerkraft und die andern in der Natur vorkommenden Kräfte sich über alle Theilchen eines Körpers, der Masse der Theilchen proportional, verbreiten, so pflegt man die auf ein Fadenelement wirkende Kraft dadurch zu bestimmen, dass man die Stärke der Kraft bei einer Masse $= 1$ angiebt, also annimmt, dass an einem Körper, dessen Masse $= 1$, auf jedes Theilchen, dessen Masse der des Fadenelements gleich ist, eine eben so grosse Kraft, als auf dieses Element, nach paralleler Richtung wirke, und von allen diesen parallelen Kräften die Resultante bestimmt.

Hat nun die Kraft $P$ diese letztere Bedeutung, so muss man sie, um ihre Wirkung auf das Element $ds$ zu erhalten, in die Masse des Elements multipliciren. Letztere ist, wenn die Dichtigkeit des Elements $= \varrho$, und der auf seiner Länge rechtwinklige Durchschnitt $= \varepsilon$ gesetzt wird, $= \varrho\varepsilon ds$, und folglich $P\varrho\varepsilon ds$ der dann statt des vorigen $Pds$ zu substituirende Ausdruck. Auf gleiche Art hat man statt der vorigen $X$, $Y$, $Z$ dieselben Grössen, noch mit $\varrho\varepsilon$ multiplicirt, zu setzen. Dabei sind $\varrho$ und $\varepsilon$, als von einem Punkte des Fadens zum andern im Allgemeinen veränderliche Grössen, Functionen der von seinem Anfangspunkte bis zum Punkte $(x, y, z)$ gerechneten Länge $s$ des Fadens, also auch Functionen von $x$, $y$, $z$ selbst.

## Von der Kettenlinie.

### §. 287.

Die bisher vorgetragene allgemeine Theorie des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden wollen wir jetzt auf den einfachen Fall anwenden, *wenn sämmtliche auf die Elemente des Fadens wirkende Kräfte einander parallel sind, der Faden selbst aber nur mit seinen beiden Endpunkten befestigt, sonst frei beweglich ist.* Man lege zu dem Ende das Coordinatensystem so, dass die Axe der $y$ parallel mit den Kräften wird, so ist durchweg $X=0$, $Z=0$, folglich $\int Xds = A$, $\int Zds = C$, wo $A$ und $C$ noch zu bestimmende Constanten bedeuten, und man erhält nach den Formeln (4) in §. 280:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{C}.$$

Hieraus fliesst durch nochmalige Integration

$$Az = Cx + D,$$

d. h. *die Fadencurve ist in einer* mit der Axe der $y$, also *mit den Kräften parallelen Ebene enthalten.* Werde diese Ebene zu der Ebene der $x$, $y$ genommen. Weil $z=0$ die Gleichung der letztern ist, so werden damit $C = 0$ und $D = 0$, und wir haben nur noch die Gleichung

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Y ds} \text{ oder } \int Y ds = Ap, \text{ wo } p = \frac{dy}{dx},$$

zu berücksichtigen, woraus sich, wenn $Y$, als Function von $x$ und $y$, gegeben ist, die Gleichung für die Fadencurve, und umgekehrt, wenn letztere gegeben ist, die Function $Y$ finden lässt.

Die Spannung $T$ des Fadens im Punkte $(x, y)$ ist aus den zwei mit den Axen der $x$ und $y$ parallelen Theilen $U = -\int X ds = -A$ und $V = -\int Y ds = -Ap$ zusammengesetzt (§. 280.), mithin

$$T = -A\sqrt{1 + p^2} = -A\frac{ds}{dx}.$$

Die Spannung ist daher in jedem Punkte umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional, den die den Faden daselbst Berührende mit der Axe der $y$, d. i. mit der Richtung der Kräfte, macht.

Sind demnach $NK$ und $N'K'$ (Fig. 79.) zwei an zwei Punkte $N$ und $N'$ des Fadens gelegte Tangenten und schneiden dieselben eine mit den Kräften parallel gezogene Gerade $IKK'$ in $K$ und $K'$, sich selbst aber in $L$, so verhalten sich die Spannungen in $N$ und $N'$, wie die Sinus von $IK'N'$ und $IKN$, also auch wie $KL$ und $K'L$, d. h.:

*Zwei einen Faden, der unter Einwirkung paralleler Kräfte im Gleichgewichte ist, berührende Seiten eines Dreiecks, dessen dritte Seite mit den Kräften parallel ist, verhalten sich wie die Spannungen des Fadens in den Berührungspunkten.*

## §. 288.

Der in der Wirklichkeit am häufigsten vorkommende und am meisten interessirende Fall ist derjenige, wenn der Faden überall gleiche Dicke und Dichtigkeit hat, und wenn die auf ihn wirkende Kraft die Schwerkraft ist. Die unter diesen Umständen vom Faden gebildete Curve heisst vorzugsweise die Kettenlinie. Da die Schwerkraft nach verticaler Richtung von oben nach unten auf gleiche Massen gleiche Wirkung ausübt, so ist, wenn wir ihre Wirkung auf einen Fadentheil, dessen Länge $=1$ ist, oder das Gewicht dieses Theils, $g$ nennen, $g$ eine constante Grösse, und wir haben, wenn wir die positive Richtung der Axe der $y$ vertical, von unten nach oben gehend, annehmen, $Y=-g$ zu setzen. Hiermit wird $\int Yds=-gs+B$, und die obige Bedingungsgleichung geht über in:

$$-gs+B=Ap.$$

Von welchem Punkte aus die Fadenlänge, nach der einen Seite zu positiv, nach der andern negativ, gerechnet wird, ist noch willkührlich. Werde hierzu derjenige Punkt $S$ (Fig. 80.) genommen, in welchem die Tangente der Curve horizontal, also $p=0$ ist. Weil hiernach $s$ und $p$ zugleich null werden sollen, so wird auch die Constante $B=0$, und die Gleichung reducirt sich auf

$$hs=p,$$

wenn man noch $-\frac{g}{A}=h$ setzt.

Dies ist demnach die Gleichung der Kettenlinie, und zwar in der möglich einfachsten Form. Sie besteht zwischen den von $S$ aus gerechneten Bogen $s$ und der trigonometrischen Tangente $p$ des Winkels, den die an die Curve gelegte Berührende mit der horizontalen Axe der $x$ macht. Da der Gleichung zufolge je zwei einander gleichen, aber entgegengesetzten Werthen von $s$ auch gleiche und entgegengesetzte Werthe von $p$ zugehören, so leuchtet ein, dass die Curve von einer durch $S$ gelegten Verticale in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, und dass daher $S$ in derselben Bedeutung, wie bei andern geometrischen Curven, der **Scheitel** der Kettenlinie ist.

Durch Worte ausgedrückt, würde hiernach die Gleichung $hs = p$ also lauten:

*Jeder von dem Scheitel an gerechnete Bogen einer Kettenlinie ist der trigonometrischen Tangente des Winkels proportional, welchen die an den Endpunkt des Bogens gelegte Berührende mit der Berührenden am Scheitel macht.*

Da übrigens die Curve eines im Gleichgewichte befindlichen Fadens der Richtung, nach welcher die Kräfte wirken, stets ihre erhabene Seite zukehrt (vergl. §. 274. *e.*), so ist die Kettenlinie nach unten zu erhaben, und der Scheitel $S$, in welchem die Tangente horizontal liegt, muss der tiefste Punkt der Linie seyn.

## §. 289.

Um die Kettenlinie construiren zu können, wollen wir noch ihre Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $x$ und $y$ entwickeln. Sey deshalb der Winkel der an die Curve im Punkte $(x, y)$ gelegten Tangente mit der Axe der $y$, $= \psi$, so ist

$$dx = ds \,.\, \sin\psi,\ dy = ds \,.\, \cos\psi,\ p = \operatorname{cotg}\psi.$$

Die Differentialgleichung $hds = dp$ der vorigen: $hs = p$, wird damit

$$\frac{hdx}{\sin\psi} = \frac{hdy}{\cos\psi} = -\frac{d\psi}{\sin\psi^2},$$

folglich $hdx = -\frac{d\psi}{\sin\psi}$, $hdy = -\frac{d.\sin\psi}{\sin\psi^2}$, woraus durch Integration

$$hx = -\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi + c,\ hy = \frac{1}{\sin\psi} + c'$$

fliesst. Die Werthe der Constanten $c$ und $c'$ hängen von der Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten ab. Man bestimme diesen, der Einfachheit willen, so, dass $c$ und $c'$ null werden, dass also für $\psi = 90^\circ$, d. h. für den Scheitel, $x = 0$ und $y = 1 : h$ wird, dass folglich der Anfangspunkt $O$ vertical unter dem Scheitel und von ihm um einen Abstand $OS = 1 : h$ entfernt liegt. Hiermit werden die vorigen zwei Gleichungen:

$$hx = -\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi \text{ oder } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = e^{-hx},$$

wo $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und

$$hy = 1 : \sin\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi),$$

mithin, wenn man $\psi$ eliminirt:

$$hy = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right),$$

oder in noch einfacherer Form:

$$hy = \cos(hx\sqrt{-1}).$$

Dies ist demnach die gesuchte Gleichung der Kettenlinie zwischen $x$ und $y$. Die Linie $1 : h$, — denn $h$ ist von der Dimension $-1$, — drückt den **Parameter** der Curve aus. Die jetzige Axe der $x$, also die Horizontale, welche um einen dem Parameter gleichen Abstand unter dem Scheitel liegt, wollen wir die **Directrix** der Kettenlinie nennen.

## §. 290.

**Zusätze.** *a.* Da sich in der erhaltenen Gleichung der Werth von $y$ nicht ändert, wenn man den von $x$

in den entgegengesetzten verwandelt, so bestätigt sich damit die obige Bemerkung (§. 288.), dass durch die Axe der $y$ die Curve symmetrisch getheilt wird.

*b.* Die Kettenlinie ist eine rectificirbare Curve. Denn man hat für den vom Scheitel anfangenden Bogen $s$:

$$hs = p = \operatorname{cotg}\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi),$$

$$\text{also } hs = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} - e^{-hx}\right),$$

$$\text{oder } hs = -\sqrt{-1}\sin(hx\sqrt{-1}).$$

So wie daher, wenn man den Parameter zur Linieneinheit nimmt, die Ordinate $y$ der Cosinus der imaginär genommenen Abscisse ist, so ist von derselben imaginären Grösse der Bogen $s$ der imaginär und negativ genommene Sinus *).

Aus den durch $x$ ausgedrückten Werthen von $y$ und $s$ folgt ferner:

$$h(y+s) = e^{hx},\ h(y-s) = e^{-hx},$$

und hieraus: $h^2(y^2 - s^2) = 1$, d. h.

---

*) Diese Bemerkung führt zu einer unzähligen Menge von Relationen bei der Kettenlinie; denn jede goniometrische Formel lässt sich damit in eine solche umwandeln. So folgt z. B. aus den Formeln, welche den Sinus und Cosinus des Unterschiedes zweier Bögen durch die Sinus und Cosinus der Bögen selbst ausdrücken, der Satz:

Ist $O$ (Fig. 80.) der unter dem Scheitel $S$ liegende Punkt der Directrix, $M_1$ und $N_1$ zwei beliebige andere Punkte der Directrix und $P_1$ ein dritter Punkt derselben, welcher so liegt, dass $OP_1 = M_1N_1$; sind ferner $M$, $N$, $P$ die über $M_1$, $N_1$, $P_1$ befindlichen Punkte der Kettenlinie, so ist:

$$SO \cdot SP = SN \cdot MM_1 - SM \cdot NN_1,$$
$$SO \cdot PP_1 = MM_1 \cdot NN_1 - SM \cdot SN.$$

Eben so entspricht der goniometrischen Formel: $\cos a^2 + \sin a^2 = 1$, die Gleichung: $MM_1^2 - SM^2 = SO^2$, u. s. w.

*Das Quadrat eines vom Scheitel an gerechneten Bogens einer Kettenlinie ist dem Quadrate der Entfernung des Endpunktes des Bogens von der Directrix, vermindert um das Quadrat des Parameters, gleich.*

*c.* Die Differentiation der letzterhaltenen Gleichung giebt:

$$ydy = sds$$

und weil $hsdx = dy$ (§. 288.),

so ist auch $hydx = ds$

und $h\int ydx = s$, d. h.

*Das Flächenstück, welches von einem Bogen einer Kettenlinie, den von den Endpunkten des Bogens auf die Directrix gefällten Perpendikeln und dem dazwischen enthaltenen Theile der Directrix begrenzt wird, ist dem Producte aus dem Bogen in den Parameter gleich, und daher dem Bogen selbst proportional.*

## §. 291.

Die Spannung $T$ der Kettenlinie im Punkte $(x, y)$ ist $= -A\sqrt{1+p^2}$ (§. 287.). Nach §. 288. ist aber $A = -g : h$, und $p = hs = \cot g\,\psi$ (§. 289.), folglich

$$T = \frac{g}{h}\sqrt{1+h^2 s^2} = \frac{g}{h\sin\psi} = gy.$$

Im Scheitel ist $s = 0$, und daher die Spannung daselbst $= g : h$. Bezeichnen wir sie mit $\tau$, so wird

$$T^2 = \tau^2 + g^2 s^2.$$

*Die Spannung ist demnach im Scheitel am kleinsten, und der Unterschied der Quadrate der Spannungen im Scheitel und in irgend einem andern Punkte der Kettenlinie ist dem Quadrate des Ge-*

*wichts des zwischen beiden Punkten begriffenen Theiles der Kette gleich.*

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet auch schon daraus, dass alle Kräfte, welche auf einen vom Scheitel $S$ (Fig. 80.) anfangenden Theil $SM$ der Kettenlinie wirken, auch dann noch sich das Gleichgewicht halten, wenn sie parallel mit ihren Richtungen an einen und denselben Punkt getragen werden. Diese Kräfte sind die Spannungen $\tau$ und $T$ in $S$ und $M$ und die Resultante $gs$ aller Wirkungen der Schwerkraft auf den zwischen $S$ und $M$ enthaltenen Theil des Fadens. Die Richtungen von $\tau$ und $gs$ schneiden sich aber rechtwinklig; folglich etc.

Die andere Gleichung für die Spannung, $T=gy$, giebt zu erkennen, *dass die Spannung in irgend einem Punkte M der Kettenlinie dem Gewichte eines Theils des Fadens gleich ist, welcher den Abstand des Punktes M von der Directrix zur Länge hat. Das Gleichgewicht des die Kettenlinie bildenden Fadens wird daher nicht unterbrochen, wenn man letztern in M über eine unendlich kleine daselbst angebrachte Rolle führt und bis zu der Directrix frei herabhängen lässt.*

*Ist folglich,* — so können wir umgekehrt schliessen, — *ein über zwei unendlich kleine Rollen gelegter und mit beiden Enden frei herabhängender Faden im Gleichgewichte, so liegen die beiden Enden in einer Horizontalen, nämlich in der Directrix der vom mittlern Theile des Fadens zwischen den Rollen gebildeten Kettenlinie.*

## §. 292.

**Zusätze.** *a.* Eine unmittelbare Folgerung aus letzterem Satze ist, *dass, wenn man einen in sich zurücklaufenden Faden über zwei unendlich kleine Rollen $A$ und $B$* (Fig. 81.) *hängt, die zwei Kettenlinien $ASB$ und $AS'B$, welche er somit bildet, eine gemeinschaftliche Directrix haben.* Denn lässt man von einer der beiden Rollen, $A$, einen Faden frei herabhängen, von solcher Länge $AC$, dass sein Gewicht der Spannung im Punkte $A$ des in sich zurücklaufenden Fadens gleich ist, so wird, weil $A$ als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Kettenlinien zu betrachten ist, die durch $C$ gelegte Horizontale $CD$ sowohl der einen, als der andern Kettenlinie, als Directrix zugehören.

*b.* Sey $D$ der Fusspunkt des von der andern Rolle $B$ auf die gemeinschaftliche Directrix gefällten Perpendikels, und $S$, $S'$ die Scheitel der beiden Kettenlinien, so ist

$$CA^2 - AS^2 = DB^2 - SB^2$$

= dem Quadrate des Parameters der Kettenlinie $ASB$ (§. 290. *b.*), und eben so

$$CA^2 - AS'^2 = DB^2 - S'B^2;$$

folglich $(SB+AS)(SB-AS)=(S'B+AS')(S'B-AS')$.

Legt man nun durch die tiefere der beiden Rollen, welche $A$ sey, eine Horizontale, die den Kettenlinien $ASB$ und $AS'B$ in $U$ und $U'$ begegne, so ist der Bogen $AS = SU$ und $AS' = S'U'$. Hiermit wird die letzterhaltene Gleichung:

$$ASB \,.\, UB = AS'B \,.\, U'B,$$

d. h.: *Wird ein in sich selbst zurücklaufender Faden über zwei unendlich kleine Rollen gehängt, so verhalten sich die zwei von ihm gebildeten Kettenlinien ihrer Länge nach umgekehrt, wie die Theile derselben, welche oberhalb der durch die tiefere der beiden Rollen gezogenen Horizontale liegen.*

*c.* So wie im Punkte $(x, y)$ der Kettenlinie die Spannung $T = gy$ ist, so ist sie in irgend einem andern Punkte $(x', y')$ der Linie, $= gy'$, und daher, wenn letztere Spannung $T'$ genannt wird:

$$T' - T = g(y' - y),$$

eine Gleichung, welche auch unmittelbar durch Integration der Gleichung (8) in §. 283. hervorgeht, wenn man darin, wie es hier der Fall ist, $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$ setzt. Sie drückt den Satz aus, dass der Unterschied zwischen den Spannungen in zwei Punkten des die Kettenlinie bildenden Fadens dem Gewichte eines Theils desselben Fadens gleich ist, dessen Länge die Höhe des einen Punktes über den andern misst.

Dieser Satz lässt sich übrigens auch ohne Anwendung der bisher vorgetragenen Theorie durch folgende einfache Betrachtung darthun. — Seyen $M$ und $N$ (Fig. 80.) zwei Punkte einer Kettenlinie, $M$ der tiefere, $N$ der höhere, und $L$ ein dritter Punkt, welcher mit $M$ in einer Verticalen und mit $N$ in einer Horizontalen liegt. Man befestige in $M$, $N$ und $L$ drei unendlich kleine Rollen und lege von $L$ bis $N$ einen geraden horizontalen Steg. Man führe hierauf den über $N$ hinausgehenden Theil des Fadens über die Rolle $N$ und den Steg $NL$ bis $L$, und den über $M$ hinaus sich erstreckenden Theil des Fadens unter der Rolle $M$ weg in verticaler Richtung gleichfalls bis $L$ und verknüpfe ihn über der in $L$ angebrachten Rolle mit dem ersten Theile, so dass man einen über drei Rollen gelegten, in sich zurücklaufenden Faden erhält. Ist nun dieser Faden, sich selbst überlassen, in Ruhe, — denn eine continuirliche Bewegung desselben anzunehmen, streitet gegen die Unmöglichkeit einer solchen — so wird jeder seiner drei Theile noch die vorige Form haben. Vom Theile $LN$ ist dieses für sich klar. Wäre ferner der frei von $L$ bis $M$ herabgehende Theil nicht geradlinig, sondern gekrümmt, so müsste, weil $L$ und $M$ in einer Verticalen liegen, ein Theil von $LM$ seine hohle Seite nach unten zu kehren, welches wegen der nach unten zu gerichteten Schwerkraft nicht möglich ist. Der frei von $M$ bis $N$ sich erstreckende Theil wird daher noch die anfängliche Länge und damit auch die anfängliche Gestalt haben. Denn es darf wohl als Grundsatz zugestanden werden, dass es für einen schweren Faden von gegebener Länge, der mit seinen Enden in zwei Punkten aufgehängt wird, nur eine einzige Form giebt, unter welcher er im Gleichgewichte ist.

Da also der Fadentheil $MN$ noch die anfängliche Form hat, so sind auch seine Spannungen in $M$ und $N$, welche $T$ und $T'$ heissen, dieselben geblieben. Nach §. 270. ist nun die Spannung in jedem Punkte von $LN$, also auch in $L$, eben so gross, als in $N$ selbst, folglich $= T'$. Denn die auf den Theil $NL$ wirkende Schwerkraft wird von dem horizontalen Stege, auf welchem er liegt, aufgehoben und kann daher auf die Spannung keinen Einfluss äussern. Von der andern Seite würde die Spannung in $L$, so wie in jedem andern Punkte von $ML$, eben so gross, als in $M$, mithin $= T$ seyn, wenn der Fadentheil $ML$ keine Schwere hätte. Weil aber die Schwerkraft auf ihn gleichfalls einwirkt, so ist die Spannung in $L$ der um das Gewicht von $ML$ vermehrten Spannung in $M$ gleich, also $T' = T + g \,.\, ML$, wie zu erweisen war.

*d.* Ist, wie im vor. §., $\tau$ die Spannung im Scheitel $S$, $T$ die Spannung in irgend einem andern Punkte $M$, und sind in Bezug auf eine beliebige unterhalb $S$ in der Ebene der Kettenlinie gezogene Horizontale, als

Axe der $x$, die Ordinaten von $S$ und $M$, $=f$ und $y$, so ist $T-\tau=g\,(y-f)$. Es ist ferner, wenn der Bogen $SM=s$ gesetzt wird: $T^2=\tau^2+g^2s^2$. Die Elimination von $T$ aus diesen zwei Gleichungen giebt:

$$(\tau+g\,(y-f))^2=\tau^2+g^2s^2,$$

oder einfacher, wenn man die horizontale Abscissenlinie so legt, dass $gf=\tau$ wird:

$$y^2=f^2+s^2.$$

Da nun, wie so eben und im vor. §. gezeigt worden, die zwei Gleichungen für $T$ sich geradezu aus der Natur der Kettenlinie, ohne Anwendung der Rechnung des Unendlichen, herleiten lassen, so sind wir damit eben so einfach zu der zwischen $y$ und $s$ bestehenden Gleichung der Kettenlinie selbst gelangt. Dass dabei $f$ der im Obigen durch $1:h$ ausgedrückte Parameter ist, bedarf keiner Erinnerung.

*e.* Auch die Fundamentalgleichung $hs=p$ (§. 288.) kann auf ganz elementare Weise hergeleitet werden. Da nämlich die Spannung $T$, welche mit der Axe der $y$ den Winkel $\psi$ macht, die Resultante der Spannung $\tau$ und der Kraft $gs$ ist, wenn letztere beide nach den positiven Richtungen der Axen der $x$ und der $y$ wirkend angenommen werden, so hat man

$$T\sin\psi=\tau,\quad T\cos\psi=gs,$$

$$\text{folglich}\quad \operatorname{cotg}\psi=\frac{gs}{\tau},\ \text{d. i. } p=\frac{s}{f}=hs.$$

*f.* Nach der Gleichung (12) in §. 283, und weil $P=-g$, $\varphi=-\psi$ und $T\sin\psi=\tau$ ist, hat man:

$$r=\frac{T}{P\sin\varphi}=\frac{T^2}{g\tau}=\frac{T^2}{h\tau^2}.$$

Die Kettenlinie besitzt daher noch die merkwürdige Eigenschaft, *dass in jedem ihrer Punkte der Krüm-*

*mungshalbmesser dem Quadrate der Spannung proportional ist.*

Im Scheitel, wo $T=\tau$ ist, wird $r=1:h$, d. h. *der Krümmungshalbmesser im Scheitel ist dem Parameter gleich.*

§. 293.

Aufgabe. Ein gleichförmig schwerer Faden von gegebener Länge $l$ wird mit seinen Enden an zwei gegebenen unbeweglichen Punkten $M$ und $N$ (Fig. 80.) befestigt. Die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Die Linie ist in der durch $M$ und $N$ zu legenden Verticalebene enthalten. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in dieser Ebene, von welchem die Directrix der Kettenlinie die Abscissenlinie, und der Punkt $O$ der Directrix, welcher vertical unter dem Scheitel $S$ liegt, der Anfangspunkt der Abscissen ist, in Bezug auf dieses System seyen $x$, $y$ die Coordinaten von $M$, und $x+a$, $y+b$ die Coordinaten von $N$; sey ferner der Parameter der Kettenlinie $=1:h$, und der Bogen $SM=s$, also der Bogen $SN=s+l$, wo die Bögen $s$ und $l$ positiv zu nehmen sind, wenn es ihre Projectionen auf die Axe der $x$ sind. Alsdann ist nach §. 290. $b$. für den Punkt $M$:

$$(a)\qquad \begin{cases} h(y+s)=e^{hx}, \\ h(y-s)=e^{-hx}; \end{cases}$$

und eben so für den Punkt $N$:

$$(b)\qquad \begin{cases} h(y+b+s+l)=e^{h(x+a)}, \\ h(y+b-s-l)=e^{-h(x+a)}. \end{cases}$$

Durch die gegebene gegenseitige Lage von $M$ und $N$ sind nun $a$ und $b$ gegeben; es sind nämlich die Coordinaten von $N$ in Bezug auf ein System, dessen Anfangspunkt $M$, und dessen Abscissenlinie die durch $M$ gelegte Horizontale in der durch $MN$ gelegten Verticalebene ist. In Beziehung auf dasselbe System sind $-x$ und $-y$ die Coordinaten von $O$, also $-x+(1:h)$ und $-y+(1:h)$ die Coordinaten des Scheitels. Indem wir daher aus den 4 Gleichungen $(a)$ und $(b)$ den Bogen $s$ eliminiren und die 3 Unbekannten $h$, $x$, $y$ durch die Gegebenen $l$, $a$, $b$ ausdrücken, wird sich die Grösse und Lage der Kettenlinie bestimmen lassen, und damit unsere Aufgabe gelöst seyn. Die hierzu nöthige Rechnung ist folgende.

Durch Subtraction der Gleichungen $(a)$ von $(b)$ folgt:

$$(c) \qquad \begin{cases} h(b+l)=e^{hx}\,(e^{ha}-1), \\ h(b-l)=e^{-hx}(e^{-ha}-1), \end{cases}$$

und hieraus $h^2(l^2-b^2)=e^{-ha}(e^{ha}-1)^2$, oder wenn man

$$(d)\ \frac{\sqrt{(l^2-b^2)}}{a}=c \text{ und } \quad (e)\ \ ah=z \text{ setzt:}$$

$$(f) \quad c=\frac{1}{z}(e^{\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{1}{2}z}).$$

Um hiernach die Unbekannte $z$ aus der durch $l$, $a$, $b$ gegebenen Grösse $c$ zu finden, muss man entweder versuchsweise verfahren, oder eine Tafel construiren, welche für jeden Werth von $c$ den zugehörigen für $z$ giebt.

Hat man somit die transcendente Gleichung $(f)$ aufgelöst, so macht die Bestimmung der Gesuchten $h$, $x$ und $y$ keine Schwierigkeit mehr. Denn $h$ findet sich alsdann aus $(e)$, $x$ aus einer der Gleichungen $(c)$, und

$y$ aus der Gleichung $2hy = e^{hx} + e^{-hx}$ (§. 289.), welche durch Addition der Gleichungen ($a$) hervorgeht.

## §. 294.

**Zusätze.** *a.* Die Entwickelung der transcendenten Function von $x$ in eine Reihe giebt:

$$1 + \frac{x^2}{1.2.3.2^2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5.2^4} + \ldots$$

Zufolge der Gleichung ($f$) muss daher $c > 1$, und mithin, wegen ($d$), $l^2 > a^2 + b^2$ seyn, was auch schon daraus fliesst, dass $\sqrt{a^2+b^2}$ die Sehne des Bogens $l$ ist.

*b.* Setzt man $b = 0$ und $a = 1$, so wird nach ($d$) und ($e$), $l = c$ und $h = x$. Die nach ($f$) zu construirende Tafel giebt daher zunächst und unmittelbar den Parameter $1 : x$ einer Kettenlinie, deren Länge $= c$ ist, und deren Aufhängepunkte, wegen $b = 0$, in einer Horizontalen sind und in einem Abstande $a = 1$ von einander liegen. Die Bestimmung des Parameters einer in irgend zwei Punkten aufgehängten Kette wird folglich immer auf den einfachen Fall zurückgebracht, wenn die Gerade durch die zwei Aufhängepunkte eine Horizontale ist.

*c.* Ueberhaupt ersieht man aus den Gleichungen ($d$), ($e$) und ($f$), dass der gesuchte Parameter $1 : h$ bloss von $a$ und $\sqrt{l^2 - b^2}$ abhängig ist, und dass mithin die durch $l$, $a$, $b$ bestimmte Kettenlinie denselben Parameter, als eine andere hat, deren Aufhängepunkte in einer Horizontalen um einen Abstand $= a$ von einander entfernt liegen, und deren Länge $= \sqrt{l^2 - b^2}$ ist.

Werden daher mehrere gleichförmig schwere Fäden in einem Punkte $P$ (Fig. 82.) befestigt und von da geradlinig bis zu Punkten ... $N_{,}$, $N$, $N'$, $N''$, ..., die in einer Verticalen liegen, fortgeführt, und wird hierauf der Punkt $P$ in einer horizontalen Ebene näher an diese Verticale, etwa bis $M$, gerückt, so haben die Kettenlinien, zu welchen sich nunmehr die Fäden krümmen, einander gleiche Parameter und sind daher, in unendlicher Ausdehnung gedacht, einander gleich und ähnlich. Denn schneidet die Horizontalebene, in welcher $P$ und $M$ liegen, die Verticale in $N$, so ist für die verschiedenen Kettenlinien $a = MN$ und $l^2 - b^2 = PN_{,}^2 - NN_{,}^2 = PN^2 = PN'^2 - NN'^2 =$ etc.

Von allen diesen Kettenlinien liegen übrigens die Scheitel gleichfalls in einer Kettenlinie, welche $M$ zum Scheitel und denselben Parameter, wie die vorigen, aber eine umgekehrte Lage hat, so dass $M$ die höchste Stelle einnimmt. Hiervon kann man sich durch eine sehr einfache, von der Natur der Kettenlinie ganz unabhängige, Betrachtung überzeugen. Wird nämlich der Bogen $S_{,}TM$ einer Kettenlinie, von welcher $S_{,}$ der Scheitel ist, in seiner Ebene um den Mittelpunkt seiner Sehne $S_{,}M$ halb herumgedreht, bis er in die Lage $MSS_{,}$ kommt, so vertauschen $S_{,}$ und $M$ ihre Stellen, und der Scheitel ist nunmehr in $M$. Beschreibt man folglich in der Ebene einer Kettenlinie $S_{,}TM$ mit demselben Parameter eine zweite, welche die umgekehrte Lage der erstern und irgend einen Punkt $M$ der erstern zum Scheitel hat, so geht diese zweite durch den Scheitel $S_{,}$ der erstern.

## §. 295.

Bei der im Obigen entwickelten allgemeinen Theorie des Gleichgewichts eines Fadens wurde in §. 284. noch der Fall in Betracht gezogen, wenn der Faden nicht vollkommen frei beweglich ist, sondern auf einer unbeweglichen Fläche liegt. Um von den für diesen Fall entwickelten Formeln die Anwendung an einem leichten Beispiele zu zeigen, wollen wir einen gleichförmig schweren Faden auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegend annehmen. Einfacherer Rechnung willen lasse man diese Ebene die Ebene der $x$, $y$ seyn. Die Axe der $x$ sey darin horizontal, also die Ebene der $y$, $z$ vertical, und der Winkel einer Verticalen mit der Fadenebene gleich dem Winkel der Verticalen mit der Axe der $y$. Heisse $\alpha$ dieser Winkel, wenn die verticale Richtung nach oben zu positiv genommen wird, und bezeichne $-g$, wie im Vorigen, die Schwerkraft.

Die Schwerkraft, nach den Axen der $x$, $y$, $z$ zerlegt, giebt hiernach die drei Kräfte: $X=0$, $Y=-g\cos\alpha$, $Z=-g\sin\alpha$. Nun ist die Gleichung der Ebene der $x$, $y$, also der Fadenebene: $z=0$, mithin (§. 284.) $F=z$ und $u=0$, $v=0$, $w=1$. Mit diesen Werthen für $X$, $Y$, $Z$, $u$, $v$, $w$ werden die dortigen Gleichungen:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,\ -g\cos\alpha\,.\,ds+d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0,$$
$$-g\sin\alpha ds+Rds=0.$$

Die zwei erstern derselben sind einerlei mit denen, welche man findet, wenn der Faden nicht auf einer Fläche liegt, sondern frei ist, und die Axe der $y$ eine verticale Lage hat, nur dass die Constante $g$ hier noch von dem Factor $\cos\alpha$ begleitet ist. Von dem Werthe dieser Constanten ist aber nach §. 293. die Curvenform eines in zwei Punkten frei aufgehängten Fadens unabhängig, und wir schliessen daher:

*Wird ein auf einer schiefen Ebene liegender* *gleichförmig schwerer Faden mit seinen Enden an zwei Punkten der Ebene befestigt, so ist die von ihm auf der Ebene gebildete Curve dieselbe Kettenlinie, welche er annimmt, wenn die Ebene durch Drehung um eine in ihr enthaltene Horizontale in eine verticale Lage gebracht, und damit ihre Einwirkung auf den Faden aufgehoben wird.*

Durch Drehung der Ebene um eine in ihr gezogene horizontale Axe wird also die Fadencurve nicht geändert, was auch schon daraus einleuchtet, dass in jedem Augenblicke der Drehung auf gleiche Elemente $ds$ des Fadens gleiche und auf der Drehungsaxe normale Kräfte $-g\cos\alpha \, . \, ds$ in der Ebene wirken. Aus demselben Grunde erhellet, dass bei jeder durch die Drehung hervorgebrachten Neigung der Ebene die (bei der verticalen Lage durch $gy$ bestimmten) Spannungen in den verschiedenen Punkten des Fadens in den nämlichen Verhältnissen zu einander stehen, dass aber die Spannung in einem und demselben Punkte von einer Neigung zur andern dem Sinus der Neigung gegen den Horizont $(90^\circ - \alpha)$ proportional ist, und daher bei horizontaler Lage ganz verschwindet.

Endlich bemerke man noch, dass zufolge der dritten Gleichung die schiefe Ebene von jedem Curvenelemente $ds$ einen auf ihr normalen Druck = dem Gewichte $gds$ des Elements, multiplicirt in den Cosinus der Neigung, erleidet.

# Siebentes Kapitel.

## Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes.

### §. 296.

Es dürfte gewiss schon von Manchem bemerkt worden seyn, dass zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines materiellen Punktes in mehrfacher Beziehung Aehnlichkeit statt findet; dass z. B. eben so, wie ein Faden, auf den nur an seinen Enden Kräfte wirken, sich geradlinig ausdehnt, auch ein Punkt, auf den nur ein anfänglicher Stoss wirkt, geradlinig fortgeht; dass auf gleiche Art, wie ein über eine krumme Fläche gespannter Faden die kürzeste Linie bildet, die sich auf der Fläche von einem Punkte zum andern ziehen lässt, auch ein auf einer Fläche durch einen Stoss in Bewegung gesetzter Punkt die kürzeste Linie bei seiner Bewegung wählt, und dass, wie dort die Spannung, so hier die Geschwindigkeit von einem Punkte zum andern constant ist; u. s. w. Gleichwohl erinnere ich mich nicht, eine Vergleichung dieser Theorieen des Gleichgewichts und der Bewegung irgendwo angestellt gefunden zu haben. Da indessen eine solche Vergleichung nicht nur an sich interessant ist, sondern auch die eine Theorie durch die andere, und namentlich die des Gleichgewichts durch die der Bewegung, mir Gewinn zu ziehen scheint, so will ich in diesem Kapitel den zwischen beiden Theorieen obwaltenden Zusammenhang näher entwickeln und zeigen, wie jeder Satz der einen seinen entsprechenden in der andern hat.

§. 297.

Seyen $A_{,}A$, $AA'$, $A'A''$, ... (Fig. 83.) mehrere auf einander folgende Elemente eines Fadens, an welchem Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Die auf die genannten Elemente wirkenden Kräfte seyen resp. $P_{,}.A_{,}A$, $P.AA'$, $P'.A'A''$, etc. (§. 280.). Wegen der unendlichen Kleinheit der Elemente kann man sich diese Kräfte an beliebigen Punkten derselben angebracht vorstellen. Seyen daher resp. $A_{,}$, $A$, $A'$, ... die Angriffspunkte der Kräfte und $A_{,}B_{,}$, $AB$, $A'B'$, ... ihre Richtungen. Endlich seyen $T_{,}$, $T$, $T'$, ... die Spannungen der Elemente $A_{,}A$, $AA'$, ....

Hiernach sind am Punkte $A$ die Kräfte $T_{,}$, $P.AA'$ und $T$ nach den Richtungen $AA_{,}$, $AB$ und $AA'$ im Gleichgewichte, folglich die ersten zwei Kräfte nach den Richtungen $A_{,}A$, $BA$ gleichwirkend mit der dritten nach der Richtung $AA'$. Bewegt sich daher ein als materieller Punkt zu denkender Körper nach der Richtung $A_{,}A$, und erhält er in $A$ einen Stoss, welcher ihm nach der Richtung $BA$ eine Geschwindigkeit ertheilt, die sich zu seiner Geschwindigkeit in $A_{,}A$, wie $T_{,}$ zu $P.AA'$ verhält, so wird er nach $AA'$ mit einer der Spannung $T$ proportionalen Geschwindigkeit fortgehen. Auf gleiche Art wird ihn ein neuer Stoss, den er in $A'$ empfängt, und der ihm nach der Richtung $B'A'$ eine Geschwindigkeit beibringt, die in demselben Verhältnisse, wie vorhin, mit $P'.A'A''$ proportional ist, sich nach $A'A''$ mit einer der Spannung $T'$ proportionalen Geschwindigkeit zu bewegen nöthigen u. s. w., so dass der Punkt, wenn immer neue Stösse nach demselben

Gesetze, wie die vorigen, auf ihn einwirken, ein Fadenelement nach dem andern mit einer der Spannung überall proportionalen Geschwindigkeit beschreiben wird.

In welchen Verhältnissen die Längen der Elemente zu einander stehen sollen, hängt von unserer Willkühr ab und hat auf das Endresultat keinen Einfluss. Zur Vereinfachung der Betrachtung wollen wir jedes Element der in ihm herrschenden Spannung, also auch der Geschwindigkeit, mit welcher es von dem Punkte beschrieben wird, proportional setzen. Alsdann sind die Zeitelemente, in denen sie beschrieben werden, einander gleich, $=dt$, und die Stösse, welche jetzt proportional mit $P.T$, $P'.T'$,... werden, folgen in gleichen Zeitintervallen, $=dt$, auf einander, und lassen sich daher als die Wirkungen einer beschleunigenden, mit $PT$ proportionalen, Kraft ansehen.

Es ist aber, wenn $Q$ diese beschleunigende Kraft in $A$ genannt wird, $Qdt$ die von ihr in dem ersten Zeitelemente ihrer Wirkung erzeugte Geschwindigkeit, und diese verhält sich nach dem Obigen zu der Geschwindigkeit des Körpers in $A,A$, welche $v$ heisse, wie $P.AA'$, $=Pds$, zu $T$, oder $T$. Man hat daher:

$$\frac{Qdt}{v}=\frac{Pds}{T}, \text{ also } Q=\frac{Pv^2}{T}, \text{ wegen } \frac{ds}{dt}=v,$$

$$\text{und } \frac{Q}{v}:P=v:T,$$

wonach aus der Kraft am Faden und seiner Spannung und aus der Geschwindigkeit des in der Fadencurve sich bewegenden Körpers die den letztern beschleunigende Kraft gefunden werden kann.

Da nun, wenn die anfängliche Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers und die beschleunigende Kraft gegeben sind, seine fernere Bahn und seine Geschwindigkeit in derselben vollkommen bestimmt sind, so schliessen wir:

*Sind Kräfte, welche auf einen Faden seiner ganzen Länge nach wirken, im Gleichgewichte, so wird ein Körper, der sich in der Fadencurve zu bewegen anfängt, darin fortgehen, und seine Geschwindigkeit wird an jeder Stelle der Spannung daselbst proportional seyn, wenn auf ihn nach einer der Kraft am Faden entgegengesetzten Richtung eine beschleunigende Kraft wirkt, die, durch die Geschwindigkeit dividirt, sich zur Kraft am Faden, wie die Geschwindigkeit zur Spannung verhält.*

Zusatz. Letztere Proportion lässt sich auch also ausdrücken: *Es muss sich die beschleunigende Kraft zum Quadrate der Geschwindigkeit, wie die Kraft am Faden zur Spannung verhalten.* Je grösser also die Geschwindigkeit seyn soll, desto grösser, und zwar im doppelten Verhältnisse grösser, muss die beschleunigende Kraft seyn, — so wie überhaupt der Satz gilt: dass, wenn ein Körper $b$ sich in derselben Curve, wie ein anderer $a$, bewegt, seine Geschwindigkeit aber in jedem Punkte das $m$fache der Geschwindigkeit ist, welche $a$ daselbst hat, die beschleunigende Kraft, welche $b$ treibt, das $mm$fache der auf $a$ wirkenden Kraft ist.

## §. 298.

Aus jedem Gleichgewichte zwischen Kräften, welche auf einen Faden wirken, lässt sich daher auf die Bewegung eines Körpers ein Schluss machen, indem man für die Curve des Fadens die Bahn des Körpers, für die Spannung des erstern die Geschwindigkeit des letztern und für die Kraft am erstern die den letztern beschleunigende Kraft, dividirt durch die Geschwindigkeit, setzt.

Das einfachste hierher gehörige Beispiel ist ein Faden, auf den nur an seinen Enden sich das Gleichgewicht haltende Kräfte wirken. So wie ein solcher die Gestalt einer geraden Linie annimmt, und seine Spannung in jedem Punkte von gleicher Grösse ist, so geht auch ein Körper, durch einen momentanen Stoss gegeben, in gerader Linie und mit constanter Geschwindigkeit fort.

So wie ferner ein Faden in jeder beliebigen Curvenform im Gleichgewichte ist und überall dieselbe Spannung $T$ hat, wenn auf jeden seiner Punkte in der Richtung des Krümmungshalbmessers $r$ von der hohlen nach der erhabenen Seite der Curve eine Kraft $P = T:r$ wirkt (§. 279.), so bewegt sich auch ein Körper in irgend einer gegebenen Curve mit constanter Geschwindigkeit $v$, wenn ihn in der Richtung des Krümmungshalbmessers $r$ von der erhabenen nach der hohlen Seite eine beschleunigende Kraft $Q$ treibt, von der Grösse, dass $Q:v = v:r$, also $Q = v^2:r$ ist.

Ein merkwürdiges Beispiel gewährt noch die vorzugsweise so genannte Kettenlinie. Da bei dieser die auf die einzelnen Punkte wirkenden Kräfte von gleicher Grösse und einander parallel sind, so wird sich ein Körper in einer Kettenlinie bewegen, wenn die beschleunigende Kraft $Q$ sich parallel bleibt, und $Q:v$ constant, also $Q$ proportional mit $v$ ist. Hieraus und aus den übrigen beim Gleichgewichte einer Kette vorkommenden Umständen folgern wir:

*Wird ein Körper von einer vertical nach oben gerichteten und seiner jedesmaligen Geschwindigkeit* *proportionalen beschleunigenden Kraft getrieben*, *so beschreibt er eine verticale Kettenlinie*, *deren Scheitel ihr tiefster Punkt ist. Dabei ist die Geschwindigkeit des Körpers der Spannung der Kette*, *also der Secante des Winkels proportional*, *den eine die Curve Berührende mit dem Horizonte macht* (§. 287.).

Weil übrigens im Scheitel $T = g : h$ ist (§. 291.), wo $g$ die jetzt constante Kraft $P$ ausdrückt, so ist im Scheitel der durch Bewegung erzeugten Kettenlinie: $v = Q : vh$, folglich $v^2 : Q = 1 : h$, d. h. *das Quadrat der Geschwindigkeit im Scheitel*, *dividirt durch die beschleunigende Kraft daselbst*, *giebt den Parameter der Kettenlinie*.

Sehr leicht kann man sich von diesen Resultaten auch durch unmittelbare Rechnung überzeugen. Man hat nämlich für die vorausgesetzte Kraft, wenn man ihre Richtung mit der Axe der $y$ parallel annimmt, die Grundgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = av = \frac{ads}{dt};$$

folglich, wenn man integrirt:

$$\frac{dx}{dt} = b, \quad \frac{dy}{dt} = as + c, \text{ und daher } v = \frac{bds}{dx},$$

woraus die Proportionalität der Geschwindigkeit mit der Secante der Neigung der Berührenden fliesst. Setzt man ferner $c = 0$, rechnet also den Bogen $s$ von dem Punkte an, in welchem $dy = 0$, mithin die Berührende horizontal ist, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{as}{b}.$$

Dieses ist aber die Differentialgleichung einer Kettenlinie, deren Parameter $= b : a$, und deren Scheitel ihr tiefster Punkt ist (§. 288.). Weil daselbst $dy = 0$, und daher $ds = dx$, also $v = b$, so ist im Scheitel $Q = a\frac{ds}{dt} = ab$, mithin $v^2 : Q = b : a =$ dem Parameter, — gleichfalls übereinstimmend mit dem Obigen.

## §. 299.

Auf eben die Art, wie man vom Gleichgewichte eines Fadens zur Bewegung eines Körpers übergehen kann, lässt sich auch immer aus irgend einer krummlinigen Bewegung eines Körpers auf das Gleichgewicht eines eben so gekrümmten Fadens schliessen. Denn so wie in §. 297. aus dem Gleichgewichte der auf den Punkt $A$ (Fig. 83.) nach den Richtungen $AA_,$, $AB$ und $AA'$ wirkenden Kräfte $T_,$, $P.AA'$ und $T$ gefolgert wurde, dass ein Körper, der sich nach $A_,A$ mit einer Geschwindigkeit $v_, = cT_,$ bewegt, und dem in $A$ nach der Richtung $BA$ eine Geschwindigkeit $Qdt = cP.AA'$ mitgetheilt wird, nach $AA'$ mit einer Geschwindigkeit $v = cT$ fortgeht, wo $c$ eine Constante und $dt$ das Zeitelement bezeichnet, in welchem der Körper das Raumelement $AA'$ $(= vdt)$ zurücklegt: so kann auch umgekehrt daraus, dass $v$ die Resultante der Geschwindigkeiten $v_,$ und $Qdt$ ist, auf das Gleichgewicht zwischen $T_,$, $P.AA'$ und $T$ geschlossen werden. So wie ferner die Bewegung eines Körpers durch ihre anfängliche Richtung und Geschwindigkeit und durch die beschleunigende Kraft vollkommen bestimmt ist, so ist es auch die Gestalt eines Fadens und die Spannung in jedem Punkte desselben, wenn für eines seiner Elemente die Lage und die Spannung desselben, für alle aber die auf sie wirkenden Kräfte gegeben sind. Hiernach lässt sich der in §. 297. erhaltene Satz folgendergestalt umkehren:

*Bewegt sich ein Körper, durch eine beschleunigende Kraft getrieben, so ist ein Faden in der vom Körper beschriebenen Curve im Gleichgewichte und seine Spannung an jeder Stelle der Geschwindigkeit des Körpers proportional, wenn ein Element des Fadens mit einem Elemente der Bahn des Körpers zusammenfällt, wenn die Kraft am Faden überall die entgegengesetzte Richtung der beschleunigenden Kraft hat, und wenn* ($PT : Q = T^2 : v^2$, *d. h.*) *das Product aus der Kraft am Faden in die Spannung zu der beschleunigenden Kraft in einem constanten Verhältnisse steht, welches dem Doppelten des constanten Verhältnisses der Spannung zur Geschwindigkeit gleich ist.*

So wissen wir z. B., dass ein Körper unter Einwirkung der constanten und vertical nach unten gerichteten Schwerkraft eine Parabel beschreibt, deren Scheitel ihr oberster Punkt ist, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Parabel der Secante des Winkels proportional ist, den die daselbst an sie gezogene Berührende mit dem Horizonte macht, und dass das Quadrat der Geschwindigkeit im Scheitel, dividirt durch die Schwerkraft, dem halben Parameter der Parabel gleich ist.

*Mithin wird auch ein Faden in der Gestalt einer verticalen Parabel, deren Scheitel ihr oberster Punkt ist, im Gleichgewichte seyn, wenn auf jeden seiner Punkte eine vertical nach oben gerichtete, der Spannung umgekehrt proportionale, Kraft wirkt. Dabei wird die Spannung jedes Elements proportional der Secante des Winkels des Elements mit dem Horizonte seyn, und die Spannung im Scheitel, di-*

*vidirt durch die Kraft im Scheitel*, $(T:P=v^2:Q)$, *wird den halben Parameter geben.*

Wollen wir uns von diesen Resultaten unmittelbar überzeugen, so dürfen wir nur zu den Formeln in §. 287.

$$\int Y ds = A\frac{dy}{dx} \text{ und } T = -A\frac{ds}{dx}$$

zurückgehen, welche sich auf das Gleichgewicht eines Fadens beziehen, auf dessen Punkte mit der Axe der $y$ parallele Kräfte $Y$ wirken. Hiervon drückt schon die zweite Gleichung das Gesetz der Spannung aus. Da ferner nach der jetzigen Hypothese $Y$ umgekehrt proportional mit $T$ seyn soll, so kommt, wenn wir dem gemäss $Y = a:T$ setzen:

$$A\frac{dy}{dx} = a\int\frac{ds}{T} = -\frac{a}{A}\int dx = -\frac{ax}{A} + B,$$

und nach nochmaliger Integration:

$$A^2 y = C + ABx - \tfrac{1}{2}ax^2,$$

$$\text{oder } A^2 y = -\tfrac{1}{2}ax^2,$$

wenn wir den Punkt der Curve, in welchem $dy:dx=0$ ist, zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen. Dieses ist aber die Gleichung für eine Parabel, welche einen Parameter $=2A^2:a$ und eine mit der Axe der $y$ parallele Axe hat, und deren Schenkel nach der negativen Seite der Axe der $y$ gerichtet sind, wenn $a$ positiv, d. h. wenn die Kräfte nach der positiven Seite derselben Axe gerichtet sind.

Weil endlich im Scheitel $ds=dx$, und folglich daselbst die Spannung $T=-A$ und die beschleunigende Kraft $Y=-a:A$ ist, so findet sich im halbe Parameter $=A:(a:A)=$ der Spannung im Scheitel, dividirt durch die beschleunigende Kraft daselbst, wie vorhin.

## §. 300.

Wenn in dem Bisherigen die auf das Element des Fadens $ds$ wirkende Kraft $= Pds$ gesetzt wurde, und wenn, wie es gewöhnlich ist, unter $P$ die Gesammtwirkung auf eine Masse $= 1$ verstanden wird (§. 286.), so hat man sich die Masse des Fadens seiner Länge nach gleichförmig vertheilt zu denken, so dass Theile von gleicher Länge auch der Masse nach einander gleich sind. Ist aber die Masse ungleichförmig vertheilt, so ist, bei gleicher Bedeutung von $P$, die auf das Element $ds$ wirkende Kraft $= P\varrho\varepsilon ds$ zu setzen, wo $\varrho\varepsilon ds$ die Masse des Elements ausdrückt (ebendas.).

Mit Anwendung eines solchen Fadens von ungleichförmig vertheilter Masse lässt sich der im vor. §. von der Bewegung auf das Gleichgewicht gemachte Schluss auf eine etwas andere Weise bilden. Denn weil jetzt $P\varrho\varepsilon ds$ mit $Qdt$ in constantem Verhältnisse seyn muss (vor. §.), so können wir geradezu $P$ mit $Q$ proportional setzen, wenn wir noch $\varrho\varepsilon ds$ mit $dt$, d. h. die Masse des Fadenelements mit dem Zeitelemente, also überhaupt die Masse jedes Theils des Fadens mit der Zeit, in welcher dieser Theil vom Körper beschrieben worden, proportional annehmen, und wir erhalten damit den Satz:

*Aus jeder Bewegung eines durch eine beschleunigende Kraft getriebenen Körpers kann man ein Gleichgewicht an einem Faden ableiten, indem man die vom Körper beschriebene Curve die Fadencurve seyn lässt, die Masse jedes Fadentheils der Zeit, in welcher er vom Körper durchlaufen wird, proportional annimmt und auf jeden Punkt des Fadens eine der den Körper daselbst beschleunigenden Kraft proportionale Kraft nach entgegengesetzter*

*Richtung wirken lässt. Dabei ist die Spannung des Fadens in constantem Verhältnisse mit der Geschwindigkeit des Körpers.*

*Wenn daher ein in zwei Punkten aufgehängter Faden die Gestalt einer verticalen mit ihrem Scheitel nach unten gekehrten Parabel hat, und,* (weil bei der parabolischen Wurfbewegung die Zeiten sich wie die horizontalen Projectionen der durchlaufenen Bögen verhalten), *wenn das Gewicht jedes Fadentheils in constantem Verhältnisse zur horizontalen Projection des Theils steht, so ist der Faden unter der Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte.*

Zu noch einem Beispiele mögen uns die um die Sonne laufenden Planeten dienen. Jeder Planet bewegt sich in einer Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet; und diese Bewegung geht dergestalt vor sich, dass die von der Sonne bis zum Planet gezogene gerade Linie in gleichen Zeiten gleiche Flächen der Ellipse überstreicht. Hieraus folgerte Newton, dass die Sonne den Planet mit einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Kraft anzieht, und wir können daher schliessen:

*Hat ein in sich zurücklaufender Faden eine elliptische Form, und ist die Masse jedes seiner Theile der Fläche proportional, welche von dem Theile und den von seinen Endpunkten nach dem einen Brennpunkte der Ellipse gezogenen Geraden begränzt wird, und wirkt abwärts von demselben Brennpunkte auf jeden Punkt des Fadens eine Kraft, die sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Fadenpunktes vom Brennpunkte verhält, so herrscht Gleichgewicht. Dabei ist die Spannung des Fadens in jedem Punkte umgekehrt dem Perpendikel proportio-*

*nal, welches auf eine die Ellipse in dem Punkte Berührende von dem Brennpunkte gefällt wird.*

§. 301.

Untersuchen wir zuletzt noch den Fall, wenn der im Gleichgewichte befindliche Faden und der sich bewegende Körper nicht vollkommen frei, sondern auf einer gegebenen Fläche beweglich sind. Ist ein Faden auf einer unbeweglichen Fläche zu verharren genöthigt, und ist er dabei unter dem Einflusse der Kräfte $P$ im Gleichgewichte, so kann man ihn auch als einen frei beweglichen ansehen, auf welchen überall noch eine dem Drucke der Fläche gleiche Kraft $R$, normal auf der Fläche, wirkt. Dieses Gleichgewicht zwischen allen $P$ und $R$ kann aber dynamisch durch eine in der Fadencurve frei vor sich gehende Bewegung dargestellt werden, welche eine mit der Spannung $T$ des Fadens proportionale Geschwindigkeit $v$ hat und durch zwei beschleunigende mit $PT$ und $RT$ proportionale Kräfte $-Pv^2 : T$ und $-Rv^2 : T$ erzeugt wird. Setzen wir nun bei dieser Bewegung die unbewegliche Fläche wieder hinzu, so wird damit einerseits die Bewegung nicht gehindert, weil die Fläche die Curve des Fadens enthält, und mit dieser die Bahn des Körpers identisch ist. Andererseits aber können wir die auf der Fläche normale Kraft $-Rv^2 : T$ weglassen, und es leuchtet somit ein, dass der Satz in §. 297. auch dann noch vollkommene Anwendung leidet, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt sind.

Mittelst derselben Schlüsse, nur in umgekehrter Folge geordnet, erhellet, dass unter der Beschränkung der Beweglichkeit durch eine Fläche auch die Sätze in §. 299. und §. 300., wo von der Bewegung auf das Gleichgewicht geschlossen wird, noch ihre Richtigkeit haben. Nur ist hinsichtlich dieses Falles sowohl, als des vorigen, noch zu bemerken, dass eben so, wie die Kraft am Faden die entgegengesetzte Richtung der den Körper beschleunigenden Kraft haben muss, auch der Druck der Fläche auf den Faden und der auf den sich bewegenden Körper einander entgegengesetzt seyn, und folglich Faden und Körper auf entgegengesetzten Seiten der Fläche sich befinden müssen.

So wie daher z. B. ein über eine erhabene Fläche gespannter Faden, auf welchen keine andern Kräfte, als die einander gleichen Spannungen an seinen Enden wirken, auch in jedem andern Punkte eine diesen Spannungen gleiche Spannung hat und auf solche Weise liegt, dass er selbst, oder doch genugsam kleine Theile desselben, die kürzesten Linien sind, die sich zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche ziehen lassen (§. 272.), so geht auch auf einer hohlen Fläche ein durch keine beschleunigende Kräfte, sondern bloss durch einen anfänglichen Stoss in Bewegung gesetzter Körper mit constanter Geschwindigkeit und auf dem kürzesten Wege fort.

Sey, um auch ein Beispiel für den umgekehrten Fall zu geben, der Weg bekannt, den ein durch die Schwerkraft getriebener Körper auf der obern Seite einer krummen Fläche durchläuft. Seine anfängliche Geschwindigkeit sey $=0$, wonach seine Geschwindigkeit in jedem andern Punkte der Quadratwurzel aus dem durchlaufenen, in verticaler Richtung geschätzten Wege proportional ist. Dreht man nun die Fläche um eine horizontale Axe halb herum und legt auf der jetzt nach oben zu gewendeten Seite über die Bahn des Körpers einen gleichförmig dicken Faden, dessen Dichtigkeit in jedem Punkte sich umgekehrt wie die Quadratwurzel aus dem Abstande des Punktes von einer durch den Anfangspunkt der Bewegung gelegten horizontalen Ebene verhält *), so wird der Faden, nachdem zuvor sein oberster Punkt fest gemacht worden, unter Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte seyn, und seine Spannung wird sich überall umgekehrt wie seine Dichtigkeit verhalten.

## §. 302.

Der Zusammenhang zwischen dem Gleichgewichte eines Fadens und der Bewegung eines Körpers, dessen Grund wir im Vorigen durch geometrische Betrachtungen uns verdeutlichten, kann auch sehr einfach mit Hülfe der Analysis dargestellt werden.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht eines Fadens, wenn auf jedes Element $ds$ desselben die Kraft $Pds$ oder ($Xds$, $Yds$, $Zds$) wirkt, und $T$ die Spannung des Elements ist, sind nach §. 280.:

$$\int X ds + T\frac{dx}{ds} = 0,\ \int Y ds + T\frac{dy}{ds} = 0,\ \text{etc.}$$

Dagegen sind die Gleichungen für die Bewegung eines Körpers, auf welchen die beschleunigende Kraft $Q$ oder ($X'$, $Y'$, $Z'$) wirkt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X',\ \text{etc. oder}\ \frac{dx}{dt} = \int Y' dt,\ \text{etc.}$$

*) Denn weil bei dieser Vergleichung $dt$ proportional mit $\varrho\varepsilon ds$ gesetzt wird (vor. §.), und weil der Faden gleichförmig dick, also $\varepsilon$ constant seyn soll, so wird $\varrho$ oder die Dichtigkeit proportional mit $dt : ds$, d. h. umgekehrt mit der Geschwindigkeit.

$$\text{d. i.}\quad -\int X'dt + v\frac{dx}{ds} = 0, \text{ etc.}$$

wenn $v$ die Geschwindigkeit, $= ds : dt$, bezeichnet.

So wie daher beim Gleichgewichte eines Fadens die stets nach der Tangente der Fadencurve gerichtete Spannung, wenn man sie nach den drei Coordinatenaxen zerlegt, durch die Integrale $-\int Xds$, $-\int Yds$, $-\int Zds$ ausgedrückt wird, so führt bei der Bewegung eines Körpers die Zerlegung der Geschwindigkeit, welche ihrer Natur nach die tangentiale Richtung der vom Körper beschriebenen Curve hat, zu den drei Integralen: $\int X'dt$, etc. Ist folglich die Fadencurve einerlei mit der vom Körper beschriebenen, so ist für einen und denselben Punkt der Curve und bei gehöriger Bestimmung der durch die Integration hinzukommenden Constanten:

$$\frac{\int Xds}{\int X'dt} = \frac{\int Yds}{\int Y'dt} = \frac{\int Zds}{\int Z'dt} = -\frac{T}{v}.$$

Setzen wir daher noch für jeden Punkt die Geschwindigkeit auf der einen der Spannung auf der andern Seite proportional, also $v = cT$, so wird auch $\int X'dt = -c\int Xds$, etc., folglich $X'dt = -cXds$, etc. d. i. $X' = -cXv$, etc. Die Richtungen von $(X, Y, Z)$ und $(X', Y', Z')$, d. i. von $P$ und $Q$, fallen mithin in dieselbe Gerade, und es ist $Q = -cPv$, also $Q : v$ mit $P$, und $Pv$ oder $PT$ mit $Q$ proportional. Endlich erhält man durch Elimination von $c$ aus den Gleichungen $v = cT$ und $Q = -cPv$ die Proportion:

$$Q : v^2 = -P : T.$$

Eben so lässt sich analytisch auch der Fall behandeln, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine Fläche beschränkt sind, was ich aber weiter zu erörtern für überflüssig halte, da der hier zu nehmende Gang dem vorigen ganz ähnlich ist.

## §. 303.

In Bezug auf die Bewegung eines Systems von Körpern giebt es in der Dynamik einige Sätze, die unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung folgen und unter den Namen des Princips der Flächen, des Princips der lebendigen Kräfte und des Princips der kleinsten Wirkung bekannt sind. Diese Sätze können, wenn es sich nur um eines Körpers Bewegung handelt, folgendergestalt ausgesprochen werden:

I. Ist die einen Körper beschleunigende Kraft nach einem unbeweglichen Punkte oder Centrum gerichtet, so bewegt sich der Körper in einer das Centrum enthaltenden Ebene, und die vom Centrum bis zum Körper gezogene Gerade beschreibt der Zeit proportionale Flächen, oder, was auf dasselbe hinauskommt: die Geschwindigkeit verhält sich in jedem Punkte der Bahn umgekehrt wie das Perpendikel, welches vom Centrum auf die durch den Punkt an die Bahn gelegte Tangente gefällt wird.

II. Ist $(X, Y, Z)$ die beschleunigende Kraft im Punkte $(x, y, z)$, und $Xdx + Ydy + Zdz$, d. h. das Product aus dem Elemente der Bahn in die nach der Richtung des Elements geschätzte beschleunigende Kraft, ein vollständiges Differential, so kann mit Hülfe des Integrals davon, und wenn man zwei Punkte der Bahn kennt, die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten in diesen Punkten, ohne weitere Kenntniss der Bahn selbst, angegeben werden.

III. Unter derselben Bedingung, dass $Xdx + \ldots$

ein vollständiges Differential ist, ist das Integral des Productes aus dem Quadrate der Geschwindigkeit in das Differential der Zeit, oder, was dasselbe ausdrückt, das Integral des Productes aus der Geschwindigkeit in das Differential des Weges, für den wirklich vom Körper beschriebenen Weg ein Minimum.

Letztere zwei Sätze gelten übrigens auch dann, wenn die Bewegung des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt ist.

Zufolge des Zusammenhanges, den wir jetzt zwischen der Bewegung eines Körpers und dem Gleichgewichte eines Fadens kennen gelernt haben, müssen nun analoge Sätze aus den allgemeinen Gleichungen für das Fadengleichgewicht hergeleitet werden können.

## §. 304.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines frei beweglichen Fadens sind nach §. 282. (2*):

$$Xds + Td\xi + \xi dT = 0,$$
$$Yds + Td\eta + \eta dT = 0,$$
$$Zds + Td\zeta + \zeta dT = 0,$$

wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die ebendaselbst angegebene Bedeutung haben.

Lassen wir nun zuerst die Kräfte ($X$, $Y$, $Z$) nach einem und demselben Punkte $O$, etwa nach dem Anfangspunkte der Coordinaten, gerichtet seyn und setzen daher $X : Y : Z = x : y : z$, mithin

$$yZ - zY = 0,\quad zX - xZ = 0,\quad xY - yX = 0,$$

so kommt, wenn wir in diesen drei Gleichungen für $X$, $Y$, $Z$ ihre Werthe aus den vorhergehenden substituiren:

$$T(yd\zeta - zd\eta) + (y\zeta - z\eta)\,dT = 0,$$

d. i., weil $\zeta dy = \eta dz$:

$$d[T(y\zeta - z\eta)] = 0,$$

$$\text{folglich}\quad T(y\zeta - z\eta) = \text{einer Constante } a,$$

$$\text{und eben so}\quad T(z\xi - x\zeta) = b,\ T(x\eta - y\xi) = c,$$

$$\text{folglich}\quad ax + by + cz = 0,$$

d. h. der Faden ist in einer durch den Punkt $O$ gehenden Ebene enthalten. Da ferner durch

$$\sqrt{\left\{(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2\right\}}$$
$$= \sqrt{\left\{(y\zeta - z\eta)^2 + (z\xi - x\zeta)^2 + (x\eta - y\xi)^2\right\}}\, ds$$

das Doppelte der Dreiecksfläche ausgedrückt wird, welche $O$ zur Spitze und das Curvenelement $ds$ zur Basis hat, so kommt, wenn man diese Dreiecksfläche $= \frac{1}{2}q\,ds$ setzt, wo daher $q$ das von $O$ auf die Verlängerung von $ds$ gefällte Perpendikel bezeichnet:

$$Tq = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Dies giebt folgendes dem Satze I. entsprechende Theorem:

*Wird ein Faden durch Centralkräfte im Gleichgewichte erhalten, so liegt er in einer durch das Centrum gehenden Ebene, und seine Spannung verhält sich in jedem Punkte umgekehrt wie das Perpendikel, das vom Centrum auf die durch den Punkt an den Faden gelegte Tangente gefällt wird.*

Zusatz. Die Spannung im Punkte $M$ des Fadens ist daher auch umgekehrt proportional mit $OM \sin\varphi$, wo $\varphi$ den Winkel von $OM$ mit der Berührenden an $M$ bezeichnet.

Ist das Centrum $O$ unendlich entfernt, so werden die Kräfte einander parallel. $OM$ ist alsdann von einem Punkte des Fadens zum andern als constant zu betrachten, und daher die Spannung bloss proportional mit $1 : \sin\varphi$. Hiermit kommen wir zu den schon in

§. 287. für den Fall paralleler Kräfte erwiesenen Sätzen zurück: dass der Faden in einer Ebene enthalten ist, und dass die Spannung jedes seiner Elemente umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional ist, den das Element mit den Kräften bildet.

## §. 305.

Was noch die Uebertragung der zwei andern dynamischen Sätze auf das Fadengleichgewicht anlangt, so haben wir bereits in §. 283. *a*. gefunden, dass

$$Xdx + Ydy + Zdz + dT = 0,$$

*Ist daher* $Xdx + Ydy + Zdz$ *das vollständige Differential einer Function* $V$ *von* $x$, $y$, $z$, und sind $V_1$ und $V_2$ dieselben Functionen der Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$, und $x_2$, $y_2$, $z_2$ irgend zweier Punkte $M_1$ und $M_2$ der Fadencurve, $T_1$ und $T_2$ die Spannungen daselbst, so kommt, wenn man von $M_1$ bis $M_2$ integrirt:

$$V_2 - V_1 + T_2 - T_1 = 0,$$

*und man kann daher, wenn man die Function* $V$ *und von irgend zwei Punkten der Fadencurve die Coordinaten kennt, die Differenz zwischen den daselbst herrschenden Spannungen bestimmen.*

Dies ist demnach der entsprechende Satz von II. Ein dazu gehöriges Beispiel giebt uns die Kettenlinie, bei welcher die Differenz der Spannungen der Differenz der verticalen Coordinaten proportional ist (§. 292. *c*.).

Man ziehe jetzt von $M_1$ bis $M_2$ eine beliebige Curve $l$ und bestimme für jeden Punkt ($x$, $y$, $z$) derselben den Werth von $V$ nach der nämlichen Gleichung

$$(a) \quad V - V_1 + T - T_1 = 0,$$

nach welcher beim Faden selbst aus der Spannung $T_1$ in $M_1$ die jedes andern seiner Punkte gefunden werden kann. Mit diesen Werthen von $T$, welche in $M_1$

und $M_2$, so wie in jedem andern Punkte, den die Curve $l$ mit der des Fadens zufällig gemein hat, für beide Curven gleich gross seyn werden, berechne man für die Curve $l$ von $M_1$ bis $M_2$ das Integral $\int T ds$, so wird dieses, wenn die Curve die des im Gleichgewichte befindlichen Fadens selbst ist, seinen grössten oder kleinsten Werth haben.

Der Beweis hiervon ist eben so, wie der des entsprechenden Satzes III., durch Variationsrechnung zu führen. Man lässt nämlich die willkührlich von $M_1$ bis $M_2$ gezogene Curve $l$, ohne dass diese zwei Punkte ihre Grenzen zu seyn aufhören, sich um ein unendlich Weniges ändern und zeigt nun, dass die dadurch entstehende Aenderung $\delta\int T ds$ des Integrals dann $=0$ ist, wenn diese Curve mit der des Fadens zusammenfällt. Die Rechnung steht also. — Zuerst ist:

$$(b)\quad \delta\int T ds = \int \delta\,.\,T ds,$$
$$\text{und } \delta\,.\,T ds = \delta T\,.\,ds + T\delta ds.$$

Wegen $(a)$ aber hat man:

$$\delta T = -\delta V = -\frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y - \frac{dV}{dz}\delta z,$$

$$\text{und weil } \frac{dV}{dx} = X, \text{ etc. ist:}$$

$$\delta T = -X\delta x - Y\delta y - Z\delta z.$$

Ferner ist $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, und daher $ds\delta ds = dx\delta dx + \ldots$,

$$\text{d. i. } \delta ds = \xi\delta dx + \eta\delta dy + \zeta\delta dz \quad (\text{§. 282.})$$
$$= \xi d\delta x + \ldots$$

Hiermit wird

$$(c)\quad \delta\,.\,T ds = -X ds\delta x - \ldots + T\xi d\delta x + \ldots$$

Ist nun die zu variirende Curve die Fadencurve, so ist $X ds = -d(T\xi)$, etc. und daher in diesem Falle

$$(d) \quad \delta . Tds = d(T\xi)\delta x + \ldots + T\xi d\delta x + \ldots$$
$$= d(T\xi\delta x) + \ldots .$$

Hieraus folgt nach ($b$) durch Integration:

$$\delta \int Tds = T\xi\delta x + T\eta\delta y + T\zeta\delta z + \text{Const.}$$

und wenn man das Integral von $M_1$ bis $M_2$ erstreckt und die Werthe von $T\xi$, $T\eta$, $T\zeta$ in $M_1$ und $M_2$ resp. durch $A_1$, $B_1$, $C_1$ und $A_2$, $B_2$, $C_2$ bezeichnet:

$$\delta \int Tdx = A_2\delta x_2 - A_1\delta x_1 + \ldots + C_2\delta z_2 - C_1\delta z_1.$$

Dieses Aggregat ist aber $= 0$, weil die Punkte $M_1$ und $M_2$ unveränderlich seyn sollen und daher $\delta x_1$ $\delta x_2$, $\delta y_1, \ldots = 0$ sind. *Mithin ist das Integral $\int Tds$, wenn die Grenzen desselben zwei bestimmte Punkte der Fadencurve sind, und wenn die Curve, auf welche es bezogen wird, die Fadencurve selbst ist, ein Maximum oder Minimum.*

## §. 306.

Eben so, wie das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung nicht bloss für einen sich frei bewegenden Körper gelten, sondern auch dann noch Anwendung leiden, wenn die Bewegung des Körpers auf eine gegebene Fläche beschränkt ist, so behalten die im vor. §. bewiesenen, jenen Principen analogen Sätze auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn der Faden über eine Fläche gespannt ist.

Für den ersten derselben geht dieses unmittelbar daraus hervor, dass die Gleichung $Xdx + .. + dT = 0$, aus welcher er gefolgert wurde, nach §. 285. auch bei einem auf einer Fläche beweglichen Faden statt findet.

Rücksichtlich des zweiten, das Maximum und Minimum von $\int Tds$ betreffenden Satzes ist zu bemerken, dass bei seiner Anwendung auf einen über eine Fläche gespannten Faden die von einem Punkte $A$ der Fadencurve bis zu einem andern $B$ derselben beliebig zu ziehenden Curven nur solche seyn dürfen, die in der Fläche selbst enthalten sind. Ist nun, wie in §. 284., $F=0$ die Gleichung der Fläche, sind $u$, $v$, $w$ die partiellen Differenzen von $F$ nach $x$, $y$, $z$, dividirt durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, und bezeichnet $R$ den Druck der Fläche auf den Faden, so hat man gegenwärtig in der Gleichung ($c$) des vorigen §., wenn die zu variirende Curve die Fadencurve selbst seyn soll, $-Ruds - d(T\xi)$ für $Xds$, u. s. w. zu setzen (§. 284.). Hierdurch kommen in der Gleichung ($d$) rechter Hand noch die Glieder $Rds(u\delta x + v\delta y + w\delta z)$ hinzu, die sich aber gegenseitig aufheben, weil die Variation in der Fläche selbst geschehen soll, und folglich $u\delta x + v\delta y + w\delta z = 0$ ist (§. 285.). Die Gleichung ($d$) bleibt daher unverändert, und es wird mithin auch im jetzigen Falle $\delta\int Tds = 0$; d. h. unter allen Werthen, die das Integral $\int Tds$ für die verschiedenen auf der Fläche von $A$ bis $B$ zu ziehenden Curven erhält, ist der für die Fadencurve selbst der grösste oder kleinste.

Specielle Folgerungen aus diesen Sätzen sind, dass, wenn auf den über die Fläche gelegten Faden keine anderen Kräfte, als die Spannungen an beiden Enden wirken, die Spannung überall gleich gross und die Fadencurve die kürzeste Linie ist, die von dem einen Ende zum andern auf der Fläche gezogen werden kann. Denn alsdann sind $X$, $Y$, $Z$ null, folglich $T$ constant. Hiermit aber wird das Integral $\int Tds$ der Länge der von einem zum andern Ende gezogenen Curve selbst proportional.

## §. 307.

Es dürfte nicht überflüssig seyn, uns noch den

Satz, welcher den grössten oder kleinsten Werth des Integrals von $Tds$ betrifft, an einem Beispiele deutlich zu machen. Wir wählen hierzu die Kettenlinie, die uns bereits in §. 305. zur Erläuterung des Gesetzes von den Differenzen der Spannungen diente.

Beziehen wir eine in zwei Punkten $A$ und $B$ aufgehängte schwere Kette auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Axe der $y$ vertical nach oben gerichtet ist, und dessen horizontale Ebene der $x$, $z$ die Directrix der von der Kette gebildeten Linie enthält, so ist in jedem Punkte ($x$, $y$, $z$) dieser Linie die Spannung $T$ mit $y$, also $Tds$ mit $yds$ proportional. *Sind folglich eine horizontale Ebene,* als Ebene der $x$, $z$, *und zwei darüber liegende Punkte $A$ und $B$ gegeben, so ist es unter allen von $A$ bis $B$ zu ziehenden Curven die Kettenlinie, deren Directrix in die Ebene fällt, für welche* das Integral $\int yds$, von $A$ bis $B$ genommen, d. h. *das Product aus der Länge* ($\int ds$) *der Curve in den Abstand* $\left(\frac{\int yds}{\int ds}\right)$ *ihres Schwerpunktes von der Ebene, seinen grössten oder kleinsten Werth hat.*

Dasselbe ergiebt sich auch, wie gehörig, durch Variation des Integrals von $yds$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\delta\int yds &= \int ds\delta y + \int y\,(\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z)\\ &= \int ds\delta y + y\,(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)\\ &\quad - \int\,[d(y\xi)\,\delta x + d(y\eta)\,\delta y + d(y\zeta)\,\delta z].\end{aligned}$$

Soll mithin das Integral $\int yds$ ein Maximum oder Minimum seyn, so hat man nach den bekannten Regeln

$$(1)\ldots\; d(y\xi) = 0,\; d(y\eta) - ds = 0,\; d(y\zeta) = 0$$

zu setzen. Hieraus fliesst durch Integration:

$$(2)\ldots\; ydx = ads,\; ydy = (b+s)\,ds,\; ydz = cds,$$

folglich $adz = cdx$, welches, von Neuem integrirt,

$$(3) \quad az = cx + c'$$

giebt. Addirt man ferner die Quadrate der 3 Gleichungen (2), so kommt die endliche Gleichung

$$y^2 = a^2 + (b+s)^2 + c^2,$$

oder einfacher, wenn man $a^2 + b^2 + c^2 = f^2$ setzt und den Bogen $s$ von dem Punkte an rechnet, in welchem die Tangente horizontal, also $dy : ds = 0$ ist:

$$(4) \quad y^2 = f^2 + s^2.$$

Man multiplicire noch die 3 Gleichungen (1) resp. mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und addire sie, so findet sich, weil $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ und $\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0$ ist:

$$dy = \eta ds,$$

d. i. eine identische Gleichung. Von den 3 Gleichungen (1) ist daher jede eine Folge der beiden übrigen, und es können mithin irgend zwei von einander unabhängige aus (1) fliessende Gleichungen die Stelle dieser drei vertreten und als das Resultat der Rechnung angesehen werden. Man wähle nun (3) und (4) zu solchen zwei Gleichungen. Die erstere derselben giebt zu erkennen, dass die gesuchte Curve in einer auf der Ebene der $x$, $z$ normalen, also in einer verticalen, Ebene enthalten seyn muss. Hiermit in Verbindung zeigt die letztere Gleichung (4) an, dass die Curve eine Kettenlinie ist, deren Directrix in der horizontalen Ebene der $x$, $z$ liegt (§. 290. $b$.).

Man gewahrt leicht, wie aus der hiermit bewiesenen Eigenschaft der Kettenlinie der bekannte Satz, dass der Schwerpunkt einer mit ihren Endpunkten befestigten Kette am tiefsten liegt, wenn sie, frei hängend, im Gleichgewichte ist, als specielle Folgerung hergeleitet werden kann. Denn für dieselbe Curve, für welche unter allen von $A$ bis $B$ gezogenen Curven das Integral $\int y ds$ ein Maximum oder Minimum ist, muss auch unter allen Curven von $A$ bis $B$, welche mit ihr gleiche Länge $= l$ haben, dasselbe Integral, folglich auch $\int y ds : l$, ein Maximum oder Minimum seyn; d. h. für eine mit ihren Enden in $A$ und $B$ aufgehängte schwere Kette ist unter allen Linien von $A$ bis $B$, welche mit der Kette gleiche Länge haben, die Höhe des Schwerpunktes über der horizontalen Ebene, welche die Directrix der Kette enthält, mithin auch die Höhe über irgend einer andern horizontalen Ebene, ein Maximum oder Minimum. Die Höhe des Schwerpunktes der Kettenlinie über einer horizontalen Ebene kann aber nur ein Minimum seyn. Denn wird ein auch noch so kleiner Theil der Kettenlinie um die Gerade, welche seine Endpunkte verbindet, um etwas gedreht, so steigt ersichtlich sein Schwerpunkt, folglich auch der Schwerpunkt der ganzen Linie, während die Länge der Linie unverändert bleibt.

*Unter allen Curven von gleicher Länge, die von einem gegebenen Punkte zu einem andern gegebenen gezogen werden, ist demnach die Kettenlinie diejenige, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.*

Bei dieser Gelegenheit mag noch eine möglichst einfache Herleitung der Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunkts der Kettenlinie eine Stelle finden.

Bezeichnet $f$ den Parameter der Linie, und wird der Bogen $s$ vom Scheitel an gerechnet, so ist nach §. 290. *b.* und *c.*:

$$y^2 - f^2 = s^2 \text{ und } s dx = f dy,$$

folglich $y dy = s ds,\ y dx = f ds,$

$$s y dy = s^2 ds = (y^2 - f^2) ds = y^2 ds - f y dx,$$

$$s dy = y ds - f dx \text{ und } d(sy) = 2 y ds - f dx.$$

Heissen daher $x_1$ und $y_1$ die Coordinaten des Schwerpunktes von $s$, so ist (§. 111.), wenn wir bei den Integrationen die Constanten für einen vom Scheitel anfangenden Bogen $s$ bestimmen:

$$sx_1 = \int x ds = sx - \int s dx = sx - fy + f^2,$$

$$sy_1 = \int y ds = \tfrac{1}{2}(sy + fx).$$

Hiermit kann aber nach §. 111. auch jedes andern Bogens Schwerpunkt ohne Mühe gefunden werden.

## §. 308.

Die Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte $A$ (Fig. 84.) bis zu einem andern gegebenen $B$ eine Curve zu ziehen, für welche in Bezug auf eine gegebene, mit $A$ und $B$ in einer Ebene liegende Gerade $CD$, als Axe der $x$, das Integral $\int y ds$ ein Maximum oder Minimum ist, kommt nach vor. §. auf die Construction einer Kettenlinie hinaus, welche durch $A$ und $B$ geht und $CD$ zur Directrix hat. Am leichtesten lässt sich diese Construction in dem besonderen Falle ausführen, wenn $A$ und $B$ gleichweit von $CD$ entfernt sind.

Man denke sich zu dem Ende die Kettenlinie in ihrer natürlichen Lage, also die Ebene $ABCD$ vertical, und die Gerade $CD$, so wie auch $AB$, horizontal, und letztere Gerade oberhalb der erstern. Durch den Mittelpunkt $E$ der $AB$ lege man eine Verticale, welche $CD$ in $F$ treffe und den Scheitel der zu construirenden Kettenlinie enthalten wird.

Man beschreibe nun mit einem Parameter von beliebiger Grösse und zu einer willkührlich gezogenen Horizontalen $OX$, als Directrix, eine Kettenlinie $SN$. $S$ sey der Scheitel derselben, und $O$ der unter $S$ liegende Punkt der Directrix, also $OS$ der Parameter. Von $O$ ziehe man eine Tangente an die Kettenlinie, und $N$ sey der Berührungspunkt. Man ziehe ferner $FA$ und lege durch $O$ auf derselben Seite von $OS$, auf welcher $N$ liegt, eine Gerade $OP$, welche mit $OS$ einen Winkel $= EFA$ mache.

Ist nun erstens dieser Winkel kleiner als $SON$, so wird $OP$ die Kettenlinie in zwei Punkten schneiden, von denen der eine $M_1$ zwischen $S$ und $N$, der andere $M_2$ ausserhalb $SN$ auf der Seite von $N$ liegt. Man trage alsdann von $F$ nach $E$ zu eine Linie $FS_1$, die sich zu $FA$, wie $OS$ zu $OM_1$, verhält, und ziehe von $S_1$ bis $A$ eine dem Bogen $SM_1$ ähnliche Curve. Hiernach sind die mit Bögen begrenzten Winkel $SOM_1$ und $S_1FA$ einander ähnliche Figuren, und weil $SM_1$ der Bogen einer Kettenlinie ist, welche $S$ zum Scheitel und $OS$ zum Parameter hat, so wird auch $S_1A$ der Bogen einer Kettenlinie, $S_1$ der Scheitel derselben und $FS_1$ ihr Parameter seyn. Dass dieser Bogen, über $S_1$ hinaus verlängert, durch $B$ gehen wird, ist von selbst klar. Auf gleiche Weise erhellet, dass, wenn man auf $FE$ von $F$ nach $S_2$ die vierte Proportionallinie zu $OM_2$, $OS$, und $FA$ trägt, auch die durch $S_2$, als Scheitel, und mit $FS_2$, als Parameter, zu beschreibende Kettenlinie den Punkten $A$ und $B$ begegnen wird. Es giebt demnach im gegenwärtigen Falle zwei Kettenlinien, welche durch $A$ und $B$ gehen und $CD$ zur Directrix haben.

Ist zweitens der Winkel $EFA$ dem $SON$ gleich, so fällt die Gerade $OP$ mit der Tangente, also die Punkte $M_1$ und $M_2$ mit $N$, zusammen, und es giebt nur eine die Bedingung der Aufgabe erfüllende Kettenlinie, deren Parameter die vierte Proportionale zu $ON$, $OS$ und $FA$ ist.

Findet sich aber drittens $EFA$ grösser als $SON$, so wird die Kettenlinie $SN$ von $OP$ in keinem Punkte getroffen, und die Lösung der Aufgabe ist unmöglich.

Die Richtigkeit dieser Schlüsse beruht darauf, dass die Kettenlinie zu den Curven gehört, welche nur **einen** Parameter haben, und dass daher alle Kettenlinien einander ähnlich sind. Eben deswegen muss auch der Winkel $SON$, auf welchen es hier besonders ankommt, einen für alle Kettenlinien constanten Werth haben. Um ihn numerisch zu bestimmen, erinnere man sich, dass $p$ oder die trigonometrische Tangente des Winkels, den eine an den Endpunkt $(x, y)$ des Bogens $s$ gelegte Berührende mit der Axe der $x$ macht, $= hs$ ist (§. 288.). Geht diese Berührende zugleich durch den Anfangspunkt $O$ der Coordinaten, wie $ON$, so ist auch $p = y : x$, und man hat daher für den Punkt $N$ die Gleichung: $y = hxs$, oder wenn man $y$ und $s$ durch $x$ ausdrückt (§. 289. und §. 290. $b$.):

$$e^{hx} + e^{-hx} = hx(e^{hx} - e^{-hx}),$$

und wenn man $hx = u$ setzt:

$$(u+1)e^{-u} = (u-1)e^{u},$$

$$\text{oder } \log(u+1) - \log(u-1) = 2u.$$

Hieraus aber findet sich .... $u = 1{,}19969$,

$$tang\, XON = hs = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2} = 1{,}5088 = \mathrm{tang}\, 56^\circ\, 28',$$

also $SON = 33^\circ\, 32'$. Man kann daher durch $A$ und $B$ entweder zwei, oder nur eine, oder keine Kettenlinie legen, welche $CD$ zur Directrix hat, nachdem der Winkel $EFA <, =$ oder $> 33^\circ\, 32'$, oder, was dasselbe ausdrückt, jenachdem $FE$, d. i. der Abstand der Horizontalen $AB$ von der Directrix, $>, =$ oder $<$ $0{,}7544\, AB$ $(= \frac{1}{2} \cdot 1{,}5088\, AB)$ ist.

## §. 309.

Ohne die Untersuchung auf den Fall auszudehnen, wenn die zwei Punkte $A$ und $B$, durch welche die Kettenlinie geführt werden soll, nicht in einer Horizontalen liegen, wollen wir nur noch die Maxima und Minima näher betrachten, welche die so eben construirten zwei Kettenlinien unter der einfachen Annahme darstellen, dass alle von $A$ bis $B$ zu ziehenden Curven gleichfalls Kettenlinien in ihrer natürlichen Lage sind, d. h. Kettenlinien, deren Scheitel sämmtlich in der Verticalen $EF$, und in deren Verlängerung über $F$ hinaus, liegen.

Tritt nun, dieses vorausgesetzt, der erste jener drei Fälle ein, und können daher von $A$ bis $B$ zwei verschiedene Kettenlinien $AS_1B$ und $AS_2B$ gezogen werden, welche $CD$ zur Directrix haben, so wird unter allen von $A$ bis $B$ möglichen Kettenlinien die eine jener beiden es seyn, für welche das Integral $\int y ds$ ein Maximum, und die andere, für welche es ein Minimum ist, indem sonst, wenn für jede von beiden Linien das Integral ein Maximum (Minimum) wäre, zwischen $S_1$ und $S_2$ noch der Scheitel einer dritten Kettenlinie liegen müsste, für welche das Integral einen kleinsten (grössten) Werth hätte, also einer dritten, deren Directrix gleichfalls $CD$ wäre; diese dritte ist aber nicht möglich, weil die Gerade $OP$ die Kettenlinie $SN$ in nicht mehr, als zwei Punkten, schneiden kann.

Es ist ferner leicht einzusehen, dass jenes Integral, oder das ihm gleiche Product aus der Länge der Kettenlinie in den Abstand ihres Schwerpunktes von $CD$, für die tiefer hängende Kettenlinie $AS_2B$ ein Maximum, und mithin für die höhere $AS_1B$ ein Minimum ist. Denn je tiefer der Scheitel einer von $A$ bis $B$ gehenden Kettenlinie liegt, desto tiefer, und dieses ohne angebbare Grenze, liegt offenbar auch der Schwerpunkt derselben. Bei einem genugsam tief unter $CD$ liegenden Scheitel $S$ wird daher der Schwerpunkt in $CD$

selbst fallen, und mithin jenes Product $=0$ seyn. Lässt man nun diese Kettenlinie in Gedanken immer kürzer werden, so steigen ihr Scheitel $S$ und ihr Schwerpunkt, letzterer von $CD$ an, in die Höhe; das Product muss folglich positiv werden, also wachsen, und, wenn $S$ bis $S_2$ gekommen ist, seinen grössten Werth erreichen. — Steigt $S$ noch höher, so nimmt das Product wieder ab, wird, wenn $S$ mit $S_1$ zusammenfällt, ein Minimum, und wächst daher von Neuem, wenn $S$ von $S_1$ bis $E$ zu steigen fortfährt.

Fallen $S_1$ und $S_2$ zusammen, und giebt es mithin nur eine durch $A$ und $B$ zu legende Kettenlinie, welche von $CD$ um ihren Parameter absteht, so folgt auf die Zunahme des Products, wenn der Scheitel $S$ von $F$ bis $S_2$ rückt, unmittelbar die weitere Zunahme bei der Bewegung des Scheitels von $S_1$ bis $E$, und das Maximum und Minimum fallen daher weg.

Auf gleiche Art endlich wächst das Product fortwährend, wenn $A$ und $B$ der $CD$ so nahe liegen, dass auch jene eine Kettenlinie nicht mehr construirt werden kann.

---

# Achtes Kapitel.

## Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

### §. 310.

Wie gleich am Anfange dieses Werkes erinnert worden, giebt es in der Natur keinen Körper, dessen Theilchen vollkommen fest mit einander verbunden wären. Vielmehr ist jeder Körper, den wir fest nennen, zugleich elastisch, d. h. er besitzt die Eigenschaft, dass, wenn Kräfte auf ihn einwirken, seine Gestalt in etwas verändert wird, eben dadurch aber neue Kräfte erzeugt werden, welche die anfängliche Lage der Theilchen gegen einander zurückzuführen streben, und dieses mit desto grösserer Intensität, je mehr die gegenseitigen Entfernungen der Theilchen geändert worden sind. Uebrigens halten diese neu entstehenden Kräfte einander das Gleichgewicht, indem sonst, wenn die Theilchen des Körpers in ihrer neuen Lage durch unelastische Bänder mit einander verbunden und die äusseren Kräfte entfernt würden, die damit nicht aufgehobenen elastischen Kräfte den Körper in eine continuirliche Bewegung setzen würden, welches nicht möglich ist. Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den äusseren Kräften bei elastischen Körpern dieselben, als wie bei unelastischen Körpern sind.

Bei einem Systeme von nur zwei Punkten wird demnach die Elasticität darin bestehen, dass, wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte durch Einwirkung äusserer Kräfte vergrössert oder verringert wird, zwei auf sie gleich Pressungen wirkende, und daher einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte erzeugt werden, welche sie im erstern Falle gegen einander treiben, im letztern von einander zu entfernen streben. Und wenn Kräfte, welche auf die beiden Punkte wirken, im Gleichgewichte sind, so muss an jedem Punkte besonders zwischen den an ihn angebrachten Kräften und der ihn treibenden elastischen Kraft Gleichgewicht herrschen.

Eine elastische Linie, Fläche oder Körper kann man sich als ein Aggregat von physischen einander unendlich nahe liegenden Punkten vorstellen, von denen jeder mit jedem der übrigen, oder doch mit allen um ihn herum bis auf eine gewisse Entfernung liegenden, auf die eben besagte Weise elastisch verbunden ist. Wirken nun auf ein solches System äussere Kräfte, und sind diese, nachdem sich die ursprünglichen Entfernungen der Punkte von einander dem Gesetze der Elasticität gemäss geändert haben, im Gleichgewichte, so müssen eben so, wie bei dem vorigen Systeme von nur zwei Punkten, an jedem Punkte besonders die äusseren Kräfte den elastischen das Gleichgewicht halten.

## §. 311.

Von der Function, welche die elastische Kraft von einer Aenderung $=x$ des Abstandes zweier elastisch verbundener Punkte ist, lässt sich im Allgemeinen nur soviel bestimmen, dass sie für $x=0$ ebenfalls null seyn und mit $x$ gleichzeitig das Zeichen wechseln muss. Die einfachste Hypothese, die wir hinsichtlich dieser Function machen können, ist daher, dass wir sie der Aenderung $x$ einfach proportional setzen. Auch stimmt diese Annahme, so lange $x$ nur klein ist, sehr wohl mit der Erfahrung überein. Wie übrigens diese Function von der anfänglichen Entfernung der beiden Punkte selbst mit abhängt, lassen wir unentschieden.

Seyen nun $A$ und $B$ die beiden Punkte; auf $A$ wirke die Kraft $P$, auf $B$ die Kraft $Q$, und halte die eine der andern das Gleichgewicht. Die Entfernung $AB$ erhalte dadurch das Increment $x$, und die damit erzeugten auf $A$ und $B$ in $AB$ wirkenden elastischen Kräfte seyen resp. $ex$ und $-ex$, wobei, wenn die Richtung von $A$ nach $B$ für die positive genommen wird, $e$ eine positive Grösse ist. Alsdann müssen an $A$ die Kräfte $P$ und $ex$, und an $B$ die Kräfte $Q$ und $-ex$ einander das Gleichgewicht halten. Die Kräfte $P$ und $Q$ müssen folglich eben so, als wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte unveränderlich wäre, einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Das Increment $x$ aber findet sich $= - P : e = Q : e$, ist also desto grösser, je grösser die Kräfte $P$ und $Q$ sind, und ist entweder ein wirkliches Increment, oder eine Verkürzung der Linie $AB$, nachdem $P$ negativ oder positiv ist, d. h. nachdem die Kräfte $P$ und $Q$ die Punkte $A$ und $B$ von einander zu entfernen, oder einander zu nähern streben.

Seyen ferner $A$, $B$, $C$ drei in einer Geraden, $B$ zwischen $A$ und $C$, liegende Punkte, von denen je zwei elastisch mit einander verbunden sind. Auf sie wirken nach Richtungen, die mit derselben Geraden zusammenfallen, die sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $P$, $Q$, $R$. Die dadurch bewirkten Incremente der Abstände $AB$, $BC$ und $AC$ seyen $x$, $y$ und $z$, $= x + y$, weil die Punkte in der anfänglichen Geraden bleiben. Die diesen Incrementen proportionalen elastischen Kräfte setze man $= fx$, $gy$, $hz$, so dass auf $A$ und $B$ nach der Richtung $AB$ die Kräfte $fx$ und $-fx$ wirken, u. s. w. Hiernach hat man für das Gleichgewicht an $A$, $B$ und $C$ resp. die Gleichungen:

$$P + fx + hz = 0,\quad Q - fx + gy = 0,\quad R - gy - hz = 0,$$

oder, weil $z = x + y$ ist:

$$P + (f+h)x + hy = 0,\quad Q - fx + gy = 0,\quad R - hx - (g+h)y = 0.$$

Hieraus folgt zuerst die schon bekannte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht des ganzen Systems:

$$P + Q + R = 0,$$

und sodann die Werthe der Incremente:

$$x=\frac{Qh-Pg}{fg+gh+hf},\; y=\frac{Rf-Qh}{fg+gh+hf}, \text{ und}$$

$$z=x+y=\frac{Rf-Pg}{fg+gh+hf}.$$

Indem man also nächst den Kräften $P$, $Q$, $R$ noch die Grössen $f$, $g$, $h$, welche die Stärke der Elasticität für die Linien $AB$, $BC$, $AC$ ausdrücken, als gegeben voraussetzt, kann man die Aenderungen $x$, $y$, $z$ dieser Linien und damit zugleich die Pressungen $fx$, $gy$, $hz$ derselben einzeln berechnen.

Man bemerke hierbei, dass diese drei Pressungen unbestimmt geblieben seyn würden, wenn man die Punkte $A$, $B$, $C$ fest, nicht elastisch mit einander verbunden, angenommen hätte, indem zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dreier Punkte $A$, $B$, $C$ in einer Geraden schon zwei Abstände, wie $AB$ und $BC$, hinreichen, der dritte $AC$ aber überflüssig ist.

Auf ähnliche Weise verhält es sich auch bei jedem andern Systeme mit einander verbundener Punkte, wenn die Anzahl der Verbindungslinien mehr als hinreichend ist, um die gegenseitige Lage der Punkte zu bestimmen. So lange man diese Linien von unveränderlicher Länge annimmt, bleiben ihre Pressungen zum Theil unbestimmt; sie lassen sich aber insgesammt einzeln angeben, wenn man die Linien elastisch veränderlich setzt.

So hat man für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche an $n$ in einer Geraden liegende und elastisch mit einander verbundene Punkte angebracht sind, und deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, $n$ Gleichungen, für jeden der $n$ Punkte nämlich eine. Aus diesen $n$ Gleichungen wird sich zuerst die Bedingung des Gleichgewichts herleiten lassen, welche ausdrückt, dass die Summe der angebrachten Kräfte null ist. Die $n-1$ übrigen davon unabhängigen Gleichungen enthalten nächst jenen äussern Kräften noch die elastischen Kräfte und damit die den letztern proportionalen Aenderungen der Entfernungen der Punkte. Da nun bei einem Systeme von $n$ Punkten in einer Geraden aus $n-1$ solchen Aenderungen, welche von einander unabhängig sind, alle übrigen gefunden werden können, so wird man mittelst jener $n-1$ Gleichungen alle in dem Systeme vorkommenden Aenderungen, und damit die elastischen Kräfte selbst oder die Pressungen berechnen können.

Sind die $n$ Punkte und die auf sie wirkenden äusseren Kräfte in einer und derselben Ebene begriffen, so hat man für das Gleichgewicht jedes Punktes zwei Gleichungen, also zusammen $2n$ Gleichungen. Hieraus müssen sich nach Elimination der elastischen Kräfte die 3 bekannten Gleichungen für das Gleichgewicht eines Systems von Punkten in einer Ebene ergeben. Es bleiben daher $2n-3$ davon unabhängige Gleichungen übrig, welche die elastischen Kräfte, d. i. den Abstandsänderungen der Punkte proportionale Grössen enthalten. Mithin lassen sich auch hier alle diese Aenderungen und damit die elastischen Kräfte oder Pressungen bestimmen, da bei einem Systeme von $n$ Punkten in einer Ebene die Anzahl der von einander unabhängigen Entfernungen, also auch ihrer Aenderungen, aus denen sich alle übrigen herleiten lassen, gleichfalls $= 2n-3$ ist.

Bei einem Systeme von Kräften, welche auf $n$ Punkte im Raume wirken, hat man zunächst 3 Gleichungen für das Gleichgewicht jedes Punktes, also im

Ganzen $3n$ Gleichungen, und nach Absonderung der 6 Bedingungen für das Gleichgewicht des ganzen Systemes noch $3n-6$ Gleichungen. Eben so gross aber ist bei $n$ Punkten im Raume die Anzahl der von einander unabhängigen Aenderungen der Entfernungen; folglich u. s. w.

## §. 312.

Kehren wir jetzt zu dem im vorigen §. näher betrachteten Systeme von drei elastisch mit einander verbundenen Punkten $A$, $B$, $C$ zurück und setzen, dass bloss $A$ mit $B$ und $B$ mit $C$, nicht aber auch $A$ mit $C$, elastisch verbunden seyen, und dass nur auf $A$ und $C$ die Kräfte $P$ und $R$ wirken. Die drei Gleichungen für das Gleichgewicht werden damit:

$$P+fx=0,\ -fx+gy=0,\ R-gy=0,$$

woraus, eben so wie in §. 269., zu schliessen, dass, wenn auch die 3 Punkte in einer Geraden zu liegen ursprünglich nicht genöthigt sind, sie doch beim Gleichgewichte der auf $A$ und $C$ wirkenden Kräfte $P$ und $R$ in einer solchen liegen, und dass alsdann diese zwei Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt seyn müssen. Die Incremente der Entfernungen $AB$ und $BC$ sind resp. $x=-P:f$ und $y=-P:g$.

Zu einem ganz analogen Resultate gelangt man bei einer Reihe von vier oder mehrern Punkten $A$, $B$, $C$, $D$,..., von denen jeder mit dem nächstfolgenden elastisch verbunden ist, so dass, wenn $AB$, $BC$, $CD$,... sich resp. um $x, y, z,\ldots$, ändern, die elastischen Kräfte $fx$, $gy$, $hz$,... erzeugt werden. Sollen nämlich zwei auf den ersten und letzten Punkt der Reihe wirkende Kräfte $P$ und $Q$ im Gleichgewichte seyn, so müssen sämmtliche Punkte in einer Geraden liegen und die zwei

Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Incremente der einzelnen Abstände aber werden:

$$x = -\frac{P}{f},\ y = -\frac{P}{g},\ z = -\frac{P}{h},\ \text{etc.},$$

folglich die Längenzunahme der ganzen Reihe

$$= -P\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}+..\right).$$

Nehmen wir sämmtliche Abstände $AB$, $BC$,... gleich gross an und setzen auch alle die constanten $f$, $g$, $h$,... einander gleich, so ist, wenn $n$ die Zahl der Abstände, und daher $n.AB$ die anfängliche Länge der Reihe ausdrückt, das Wachsthum ihrer Länge $= -nP:f = nQ:g$, also der anfänglichen Länge und den äusseren Kräften, welche am Anfang und Ende angebracht sind, proportional.

## Gleichgewicht an einem elastisch dehnbaren Faden.

### §. 313.

Je kleiner man bei der eben betrachteten Reihe elastisch verbundener Punkte die einander gleichen Abstände derselben werden lässt, desto mehr nähert man sich dem Begriffe eines gleichförmig dichten und seiner Länge nach gleichförmig elastischen Fadens. Wenn demnach ein solcher Faden eine Länge $=1$ hat, und von zwei an seinen Enden angebrachten Kräften, deren jede $=1$, um eine Länge $=E$ ausgedehnt wird, so wird, zufolge des vorhin von der Reihe Erwiesenen, ein Faden von derselben physischen Beschaffenheit und von einer Länge $=a$ durch zwei ihn spannende Kräfte, deren jede $=P$ ist, eine Längenzunahme $= aPE$ erhalten, und man ersieht zugleich, dass, indem auf diese Weise die anfängliche Länge des Fadens $a$ sich in $a\,(1+PE)$ verwandelt, seine anfängliche Dichtigkeit sich in dem Verhältniss $1 + PE : 1$ vermindern muss.

Mit Hülfe dieser Principien können wir jetzt leicht das Gleichgewicht eines elastisch dehnbaren Fadens in Untersuchung nehmen, wenn nicht blos an seinem Anfang und Ende, sondern auch in allen seinen übrigen Punkten $(x, y, z)$ äussere Kräfte $(X, Y, Z)$ thätig sind. Ist nämlich beim Zustande des Gleichgewichts $\varrho$ die Dichtigkeit des Fadenelements $ds$, mithin $\varrho ds$ seine Masse, und bezeichnet $T$ die Spannung des Elements, so hat man für das Gleichgewicht desselben, mag es elastisch seyn, oder nicht, die drei Gleichungen (§. 280. und §. 286.):

$$X\varrho\, ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \text{ u. s. w.}$$

Unter der Voraussetzung nun, dass der Faden vor Einwirkung der Kräfte eine gleichförmige Dichtigkeit $= 1$ gehabt habe und seiner Länge nach eine gleichförmige durch $E$ bestimmte Elasticität besitze, ist die nachherige Dichtigkeit des Elements $ds$, $= 1 : (1 + ET)$, und die drei Gleichungen für das Gleichgewicht werden damit:

$$Xds + (1 + ET)\, d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$Yds + (1 + ET)\, d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$Zds + (1 + ET)\, d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

aus denen, wenn $X$, $Y$, $Z$ als Functionen von $x$, $y$, $z$ gegeben sind, durch Elimination von $T$ und durch Integration die zwei Gleichungen für die Fadencurve gefunden werden können.

Ist ferner $d\sigma$ die ursprüngliche Länge des Elements $ds$, so hat man

$$d\sigma = \frac{ds}{1+ET},$$

woraus sich mit Hülfe des aus den vorigen Gleichungen sich ergebenden Werthes von $T$ die durch die Kräfte bewirkte Ausdehnung $s-\sigma$ des ganzen Fadens oder irgend eines Theils desselben berechnen lässt.

Man kann in dieser Hinsicht bemerken, dass, wenn man vorige drei Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und hierauf addirt, die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz + (1 + ET)\,dT = 0$$

hervorgeht (§. 283. *a.*). Hierin $T$ und $dT$ durch das Verhältniss $ds : d\sigma$ und dessen Differential ausgedrückt, kommt

$$Xdx + Ydy + Zdz + \frac{1}{2E}\, d\left(\frac{ds^2}{d\sigma^2}\right) = 0,$$

eine Formel, wodurch sich die Ausdehnung des Fadens unmittelbar bestimmen lässt.

## §. 314.

Lassen wir, um die Theorie des vorhergehenden §. durch ein Beispiel zu erläutern, die Schwerkraft $g$ es seyn, welche auf den Faden wirkt, so ist der Faden, wie im Früheren die unelastische Kettenlinie, in einer verticalen Ebene enthalten, und es sind, wenn diese zur Ebene der $x$, $y$ genommen wird, bloss die zwei ersten der drei Hauptgleichungen zu berücksichtigen. Hierin werden, wenn man die Axe der $y$ vertical, nach oben zu positiv, seyn lässt: $X=0$ und $Y=-g$, und die zwei Gleichungen selbst reduciren sich damit auf:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,\ gds=(1+ET)\,d\left(T\frac{dy}{ds}\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wie in §. 287:

$$T=A\frac{ds}{dx},$$

und die zweite wird damit, wenn man noch, wie in §. 289., den von der Tangente der Curve mit der Axe der $y$ gebildeten Winkel $=\psi$ setzt:

$$gds=\left(1+\frac{AE}{\sin\psi}\right)d\,.\,A\operatorname{cotg}\psi.$$

Hieraus folgt weiter:

$$gdx=gds\,.\,\sin\psi=(\sin\psi+AE)\,d\,.\,A\operatorname{cotg}\psi,$$

$$gdy=gds\,.\,\cos\psi=(\cos\psi+AE\operatorname{cotg}\psi)\,d\,.\,A\operatorname{cotg}\psi,$$

und wenn man integrirt und $Ah$ für $g$ schreibt:

$$hx=-\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi+AE\operatorname{cotg}\psi$$

$$hy=\frac{1}{\sin\psi}+\tfrac{1}{2}AE\operatorname{cotg}\psi^2.$$

Die Constanten sind bei diesen zwei Integrationen null gesetzt worden, wodurch es geschieht, dass hier eben so, wie bei der unelastischen Kettenlinie, für $\psi=90^\circ$, d. i. für den tiefsten Punkt oder den Scheitel der Curve, $x=0$ und $hy=1$ wird.

Die Elimination von $\psi$ aus den letzt erhaltenen zwei Gleichungen giebt die Gleichung der Curve zwischen $x$ und $y$. Wir wollen aber diese Elimination nur für den Fall ausführen, wenn die Elasticität des Fadens so gering und damit $E$ so klein ist, dass die zweite und die höheren Potenzen von $E$ vernachlässigt werden können. Werde nun

$$(a)\quad AE\operatorname{cotg}\psi=-i,\ \tfrac{1}{2}AE\operatorname{cotg}\psi^2=-k$$

gesetzt, wo daher $i$ und $k$ kleine Grössen von derselben Ordnung, wie $E$, sind. Hiermit werden jene zwei Gleichungen:

$$(b)\quad hx+i=-\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi,\quad hy+k=\frac{1}{\sin\psi},$$

woraus, wie in §. 289.:

$$2(hy+k)=e^{hx+i}+e^{-hx-i}\text{, also}$$

$$(c)\quad 2hy=e^{hx}+e^{-hx}+i\,(e^{hx}-e^{-hx})-2k$$

folgt. Ferner fliesst aus $(b)$:

$$\operatorname{cotg}\psi=\tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi)=\tfrac{1}{2}(e^{hx}-e^{-hx}),$$

wenn man bloss das von $i$ freie Glied beibehält. Substituirt man nun diesen Werth von $\operatorname{cotg}\psi$ in $(a)$ und setzt die damit hervorgehenden Werthe von $i$ und $k$ in $(c)$, so findet sich

$$2hy=e^{hx}+e^{-hx}-\tfrac{1}{4}AE(e^{hx}-e^{-hx})^2,$$

als Gleichung der elastischen Kettenlinie.

Was hierbei noch die Ausdehnung des Fadens anlangt, so ist unter derselben Annahme, dass die höheren Potenzen von $E$ vernachlässigt werden können, und zufolge des obigen Werthes von $T$:

$$d\sigma=\frac{ds}{1+ET}=ds-ETds=ds-AE\frac{ds^2}{dx}$$
$$=ds-AEhyds=ds-Egyds,$$

weil $hydx=ds$ (§. 290. $c$.) und $Ah=g$.

Die Ausdehnung des Bogens $\sigma$ ist daher

$$s-\sigma=Eg\int yds.$$

Hiernach, und weil $(\int yds):s=$ dem Abstande des Schwerpunktes des Bogens $s$ von der Directrix, ist die Ausdehnung eines Bogens seiner Länge und dem Abstande seines Schwerpunkts von der Directrix proportional.

## §. 315.

In dem besondern Falle, wenn von dem elastisch dehnbaren Faden nur das eine Ende $B$ befestigt ist, das andere $A$ aber frei herabhängt, und daher der Faden selbst eine Verticale bildet, ist die Spannung in jedem Punkte $P$ des Fadens dem Gewichte des unter $P$ befindlichen Theiles $AP$ gleich. Setzen wir daher $AP = s$, und die ursprüngliche Länge von $AP$, $= \sigma$, so haben wir $T = g\sigma$ und

$$ds = (1 + ET)\, d\sigma = (1 + Eg\sigma)\, d\sigma,$$

und wenn wir von $A$ bis $P$ integriren:

$$s = \sigma + \tfrac{1}{2} Eg\sigma^2,$$

wo $\sigma$ und $s$ auch die ursprüngliche und nachherige Länge des ganzen Fadens $AB$ bedeuten können.

Ist an dem herabhängenden Ende $A$ ein Gewicht befestigt, dessen Masse $= M$, so ist $T = g\,(M + \sigma)$, und es findet sich damit auf gleiche Weise

$$s = \sigma + Eg\sigma\,(M + \tfrac{1}{2}\sigma).$$

Hierauf gründet sich eine von John Herschel *) vorgeschlagene Methode, um das Verhältniss, in welchem die Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde vom Aequator nach den Polen zunimmt, statt durch die bisherigen Pendelbeobachtungen, auf statischem Wege mit Hülfe eines ausdehnbaren Fadens oder einer seine Stelle vertretenden schraubenförmig gewundenen Feder zu messen. Durch kleine versuchsweise zu bestimmmende Zusätze oder Verminderungen der Masse $M$, welche an dem Faden, dessen ursprüngliche Länge $= \sigma$ ist, angehängt wird, sucht man es nämlich zu bewirken, dass bei der von einem Orte zum andern sich nicht ganz gleich bleibenden Schwerkraft, der Faden doch immer zu derselben Länge $s$ ausgedehnt wird. Da nun alsdann in dem obigen Ausdrucke für $s$, nächst $\sigma$ und $E$, noch $s$ constant ist, so ergiebt sich von einem Orte der Erde zum andern die Schwerkraft $g$ umge-

*) Siehe dessen Treatise on Astronomy, Seite 124.

kehrt der jedesmal angehängten Masse, vermehrt um die halbe Masse des Fadens, proportional.

## Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden.

### §. 316.

Die Kraft der Elasticität kann sich an einem Faden ausserdem, dass sie die Ausdehnung desselben zu verhindern strebt, auch dadurch äussern, dass sie der Biegung des Fadens, d. i. den Kräften, welche seine ursprüngliche Krümmung zu ändern suchen, sich widersetzt. Um auch diese Aeusserung der Elasticität zu untersuchen und dabei auf das Einfachste zu Werke zu gehen, wollen wir die erstere Art von Elasticität jetzt unwirksam seyn lassen, also die Elemente des Fadens von unveränderlicher Länge setzen und für die anfängliche Form des Fadens eine Gerade annehmen.

Sind demnach $AB$ und $BC$ (Fig. 85.) zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, so sollen sich, sobald $BC$ nicht mehr die geradlinige Fortsetzung von $AB$ ist, sondern mit $AB$ einen Winkel macht, elastische Kräfte erzeugen, welche die anfängliche geradlinige Lage wieder herzustellen streben. Diese elastischen Kräfte werden ohne Wirkung seyn, sobald man irgend zwei Punkte $D$ und $E$ des einen und andern Schenkels in ihrer jetzigen Lage durch eine Linie $DE$ von unveränderlicher Länge mit einander verbindet; sie werden daher mit den Spannungen dieser Linie in $D$ und $E$ das Gleichgewicht halten und folglich als zwei einander gleiche Kräfte anzusehen seyn, welche auf zwei beliebige Punkte $D$ und $E$ der Schenkel nach direct entgegengesetzten Richtungen wirken.

Die Elasticität des Winkels $ABC$ wird hiernach gegeben seyn, wenn man für irgend zwei Punkte seiner Schenkel die gemeinschaftliche Grösse dieser zwei einander direct entgegengesetzten Kräfte kennt, und es muss sich daraus die gemeinschaftliche Grösse der an irgend zwei andern Punkten der Schenkel nach direct entgegengesetzten Richtungen anzubringenden mit der Elasticität gleichwirkenden Kräfte bestimmen lassen.

In der That, sollen zwei an den Punkten $D$ und $E$ der Schenkel eines beliebig veränderlichen und frei beweglichen Winkels $ABC$ nach direct entgegengesetzten Richtungen angebrachte einander gleiche Kräfte $Dd$ und $Ee$ mit zwei andern an den Punkten $F$ und $G$ der Schenkel angebrachten Kräften $Ff$ und $Gg$ gleiche Wirkung haben, also mit $fF$ und $gG$ im Gleichgewichte seyn, so müssen auch letztere einander gleich und direct entgegengesetzt seyn, indem sonst, wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte $D$ und $E$ unveränderlich gemacht und damit die Wirkung der Kräfte $Dd$ und $Ee$ aufgehoben würde, das Gleichgewicht nicht bestehen könnte. Es müssen ferner die Kräfte $Dd$ und $fF$ in Bezug auf den Punkt $B$ einander gleiche und entgegengesetzte Momente haben, damit sie, wenn der Punkt $B$ unbeweglich gemacht wird, den Schenkel $AB$ nicht zu drehen vermögen. Dasselbe gilt von den Kräften $Ee$ und $gG$ am andern Schenkel $BC$.

Und umgekehrt: Sind $Dd$ und $Ee$ sowohl, als $fF$ und $gG$, einander gleich und direct entgegengesetzt, und haben $Dd$ und $fF$, folglich auch $Ee$ und $gG$, in Bezug auf $B$ einander gleiche und entgegengesetzte Momente, so herrscht Gleichgewicht. Denn wegen der gleichen Momente haben $Dd$ und $fF$ sowohl, als $Ee$ und $gG$, eine durch $B$ gehende Resultante. Beide Resultanten aber sind einander gleich und entgegengesetzt, weil in derselben Beziehung $Dd$ und $fF$ zu $Ee$ und $gG$ stehen.

Kann demnach die Elasticität des Winkels $ABC$ durch die Kräfte $Dd$ und $Ee$ dargestellt werden, so kann sie es auch durch die Kräfte $Ff$ und $Gg$, wenn anders das Moment jeder der letztern Kräfte dem Momente jeder der erstern in Bezug auf die Spitze $B$ des Winkels gleich ist. Die Elasticität des Winkels $ABC$ ist folglich durch dieses Moment vollkommen gegeben, indem damit für je zwei beliebig in den Schenkeln angenommene Punkte $D$ und $E$ die daselbst anzubringenden mit der Elasticität gleichwirkenden Kräfte gefunden werden können. Man hat nämlich, wenn $u$ das Moment der am Schenkel $BC$ anzubringenden Kraft, also $-u$ das Moment der Kraft am Schenkel $AB$, bezeichnet:

$$dD = Ee = \frac{BEe}{BDE} \cdot DE = \frac{u \cdot DE}{2BDE} = \frac{u}{DB \cdot \sin EDB}$$

Uebrigens müssen die zwei Kräfte so gerichtet seyn, dass, wenn ihre Angriffspunkte beide in die Schenkel des Winkels selbst, oder beide in ihre Verlängerungen über die Spitze hinaus fallen, sie die Punkte von einander zu entfernen streben, dagegen die Punkte einander zu nähern suchen, wenn der eine in den einen Schenkel und der andere in die Verlängerung des andern Schenkels über die Spitze fällt.

## §. 317.

Durch die eben angestellten Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt, aus den im Frühern entwickelten Gleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften an einem vollkommen biegsamen Faden die

Gleichungen für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden herzuleiten. Ist nämlich ein solcher, der ursprünglich geradlinig war, durch äussere Kräfte zu der Curve $A \ldots IKLMN$ (Fig. 86.) gebogen worden, so können wir uns das Streben je zweier nächstfolgenden Elemente desselben, wie $IK$ und $KL$, sich geradlinig neben einander zu legen, durch zwei einander gleiche Kräfte hervorgebracht denken, welche auf zwei beliebige Punkte der Elemente selbst, etwa auf $I$ und $L$, nach den direct entgegengesetzten Richtungen $LI$ und $IL$ wirken. Indem wir daher solche Paare von Kräften für die Elasticität der von je zwei nächstfolgenden Elementen gebildeten Winkel substituiren, haben wir es wiederum mit einem vollkommen biegsamen Faden zu thun, auf dessen Elemente ausser den äusseren Kräften noch andere durch die Elasticität bestimmte Kräfte, gleich den äussern, wirken, und wir können nun die im Obigen für das Gleichgewicht zwischen bloss äussern Kräften erhaltenen Gleichungen auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden.

Am geeignetsten hierzu sind die in §. 281. *b*. gegebenen Momentengleichungen. Sind nämlich, wie wir fürs Erste annehmen wollen, der Faden und die auf ihn wirkenden äussern Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten, so hat man nur auszudrücken, dass das Moment aller auf den Faden von seinem Anfange $A$ bis zu irgend einem andern Punkte $M$ desselben wirkenden Kräfte in Bezug auf letztern Punkt null ist. Es ist aber dieses Moment, wenn zur Ebene des Fadens die der $x$, $y$ genommen wird, wenn auf jedes seiner Elemente $ds$ die äussere Kraft ($Xds$, $Yds$) wirkt, und wenn $x$, $y$ die Coordinaten von $M$ sind,

$$= \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds.$$

Mit diesem Momente ist daher jetzt das auf $M$ bezogene Moment aller von $A$ bis $M$ für die Elasticität substituirten Kräfte zu einer Summe zu vereinigen und diese Summe $=0$ zu setzen. Das Moment der letztern Kräfte reducirt sich aber auf das Moment der Kraft allein, welche auf das letzte Element $LM$ wirkt und mit einer ihr gleichen und direct entgegengesetzten Kraft an dem nicht mehr zum Bogen $AM$ gehörigen Elemente $MN$ die Stelle der Elasticität des Winkels $LMN$ vertritt. Denn alle übrigen von $A$ bis $M$ für die Elasticität zu substituirenden Kräfte sind paarweise einander gleich und direct entgegengesetzt, und es ist folglich ihr Moment in Bezug auf $M$, oder auf irgend einen andern Punkt der Ebene, $=0$. Setzen wir daher noch von den zwei die Elasticität des Winkels $LMN$ darstellenden Kräften das auf $M$ bezogene Moment der auf den Schenkel $MN$ wirkenden, $=u$, also das Moment der auf $LM$ wirkenden, $=-u$, so ist

$$(A) \quad \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = u$$

die verlangte Gleichung des Gleichgewichts.

## §. 318.

**Zusätze.** *a.* Werden für die zwei elastischen Kräfte am Winkel $LMN$ die Punkte $L$ und $N$ zu Angriffspunkten genommen, so sind resp. $NL$ und $LN$ die Richtungen dieser Kräfte. Das Moment $u$ hat folglich einerlei Zeichen mit der Dreiecksfläche $MLN$, also auch mit dem unendlich kleinen Winkel $MN^{\wedge}LM$, um welchen das Element $MN$ gedreht werden muss, bis es in die Richtung des Elements $LM$ fällt, also das entgegengesetzte Zeichen des Winkels $LM^{\wedge}MN$ oder $d\psi$, wenn $\psi$ den Winkel von $LM$ mit der Axe der $x$, und folglich $\psi + d\psi$ den Winkel von $MN$ mit derselben Axe bezeichnet. Das Moment $u$ ist daher positiv oder negativ, jenachdem dieser Winkel $\psi$ ab- oder zunimmt.

*b.* Unter derselben Annahme, dass $L$ und $N$ die Angriffspunkte der zwei elastischen Kräfte des Winkels $LMN$ sind, ist die gemeinschaftliche Intensität dieser Kräfte $= u : LM \sin NLM$ (§. 316.), also unendlich gross von der zweiten Ordnung, weil $u$ nach der letzten Gleichung des vorigen §. eine endliche Grösse ist.

Will man die Elasticität des Winkels durch endliche Kräfte darstellen, so nehme man zum Angriffe der auf $LM$ wirkenden Kraft einen Punkt $l$, der in der geradlinigen Verlängerung von $LM$ in endlicher Entfernung von $M$ liegt, lege durch $l$ unter einem endlichen Winkel mit $LM$ eine Gerade, welche die Verlängerung von $MN$ in $n$ treffe, und lasse $n$ den Angriffspunkt der Kraft an $MN$ seyn. Die beiden Kräfte haben alsdann die Richtungen $ln$ und $nl$, und ihre gemeinschaftliche Grösse ist $= u : Ml \sin Mln$, also endlich.

*c.* Wird von dem im Gleichgewichte befindlichen elastischen Faden $AMO$ ein Theil $MO$ getrennt, und soll der übrig bleibende Theil $AM$ im Gleichgewichte verharren, so ist es hier nicht, wie beim vollkommen biegsamen Faden, hinreichend, den Endpunkt $M$ dieses Theils unbeweglich zu machen. Denn auf den Theil $AM$ wirkt der Theil $MO$ nicht allein durch die in $M$ ausgeübte Pressung, sondern auch durch die eine der zwei elastischen Kräfte des Winkels $LMN$, welche irgendwo in $LM$, etwa in $L$, nur nicht in $M$ selbst, ihren Angriffspunkt hat. Soll daher der Theil $AM$ nach Wegnahme des Theils $MO$ im Gleichgewichte noch bleiben, so müssen entweder zwei, die Stelle jener Pressung und dieser elastischen Kraft vertretende Kräfte hinzugefügt werden, oder man muss die Angriffspunkte $M$ und $L$ dieser zwei Kräfte, und somit das Element $LM$ selbst, unbeweglich machen.

*d.* Die zwei an dem Elemente $LM$ hinzuzufügenden Kräfte lassen sich im Allgemeinen zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, und es reicht dann zur Erhaltung des Gleichgewichts hin, diese eine Kraft, welche $R$ heisse, an irgend einem Punkte ihrer Richtung, der aber mit dem Elemente $LM$ fest verbunden seyn muss, anzubringen, oder einen solchen Punkt unbeweglich zu machen. Da das Gleichgewicht noch am Fadentheile $AM$ fortdauern muss, wenn derselbe steif angenommen wird, so muss die Kraft $R$ mit den äussern Kräften an $AM$ eben so, wie an einem festen Körper, im Gleichgewichte seyn. Der Ausdruck von $R$ ist daher $(-\int X ds, -\int Y ds)$, und das Moment von $R$ in Bezug auf $M$, $= -u$, da das Moment der äussern Kräfte in Bezug auf denselben Punkt $= u$ war. Hiermit ist die Grösse und Richtung von $R$ vollkommen bestimmt.

*e.* Man denke sich die Kraft $R$ in demjenigen Punkte $m$ ihrer Richtung angebracht, in welchem sie die Verlängerung des Elements $LM$, d. i. die in $M$ an die Curve gelegte Tangente, schneidet, und zerlege sie hier in zwei Kräfte $T$ und $V$, von denen $T$ in die Richtung der Tangente fällt, und $V$ mit dieser Richtung $90°$ macht. Sey zu dem Ende noch der Winkel von $R$ mit der Axe der $x$, $= \varphi$, und der Winkel des Elements $ds$ mit derselben Axe, $= \psi$, so hat man $R\cos\varphi = -\int X ds$, $R\sin\varphi = -\int Y ds$, $ds\cos\psi = dx$, $ds\sin\psi = dy$, und daher:

$$T = R\cos(\varphi - \psi) = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds,$$

$$V = R \sin(\varphi - \psi) = -\frac{dx}{ds}\int Y ds + \frac{dy}{ds}\int X ds = \frac{du}{ds}.$$

Nun ist in Bezug auf den Punkt $M$ das Moment von $T, = 0$ und das Moment von $V, = Mm \,.\, V,$ folglich auch das Moment der Resultante $R$ von $T$ und $V, = Mm \,.\, V.$ Das Moment von $R$ ist aber nach $d., = -u,$ folglich ist

$$Mm = -\frac{u}{V} = -\frac{ds\int(dy\int X ds - dx\int Y ds)}{dy\int X ds - dx\int Y ds} = -\frac{u ds}{du},$$

wodurch der Punkt $m$ in der Richtung von $R$ bestimmt ist. — Statt das Element $LM$ unbeweglich anzunehmen, reicht es daher auch hin, den in der geradlinigen Verlängerung von $LM$ liegenden Punkt $m$ unbeweglich seyn zu lassen.

*f.* Ist der Faden nicht elastisch, so genügt zur Erhaltung des Gleichgewichts des in $M$ unterbrochenen Theils $AM$ eine auf $M$ nach der Richtung der Tangente wirkende Kraft, welche im Obigen die Spannung des Fadens genannt wurde. Bei dem elastischen Faden aber ist zur Bewahrung des Gleichgewichts die Kraft $T$, deren Richtung in die Tangente fällt, und für deren Angriffspunkt $M$ selbst genommen werden kann, noch nicht hinreichend, sondern es muss noch die auf der Tangente in $m$ normale Kraft $V$ hinzugefügt werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es muss das Element $LM$ durch irgend welche Mittel, — etwa durch zwei unbewegliche Punkte, an denen es verschiebbar ist, — nur in sich selbst beweglich gemacht werden. Wollen wir daher auf analoge Weise, wie beim vollkommen biegsamen Faden, auch bei dem elastischen von der Spannung sprechen, so haben wir sie als die Kraft zu definiren, die, wenn der Faden irgendwo unterbrochen und das letzte Element daselbst bloss in der Richtung der Tangente beweglich gemacht wird, zur Erhaltung des Gleichgewichts nach derselben Richtung am letzten Punkte angebracht werden muss.

Die Kraft $T$ ist daher die Spannung der elastischen Linie, und zwar eine wirkliche Spannung, wie bei vollkommen biegsamen Fäden, oder eine Pressung, nachdem sich $T$ positiv oder negativ findet.

Uebrigens ergiebt sich derselbe Ausdruck, den wir jetzt für die Spannung am elastischen Faden gefunden haben, auch für die Spannung am vollkommen biegsamen Faden, wenn man die für letzteren geltenden Gleichungen

$\int X ds + T\xi = 0$ und $\int Y ds + T\eta = 0$ (§. 280.),

wo $\xi = dx : ds$, und $\eta = dy : ds$, resp. mit $\xi$ und $\eta$ multiplicirt und hierauf addirt.

## §. 319.

In der am Ende des §. 317. erhaltenen Gleichung ($A$) für das Gleichgewicht des elastischen Fadens ist noch der von einem Punkte des Fadens zum andern veränderliche Werth des Moments $u$ zu bestimmen übrig. In dieser Hinsicht erwäge man zuerst, dass unter der Voraussetzung eines gleichförmig elastischen Fadens, und wenn man alle Elemente des Fadens von gleicher Länge annimmt, die Veränderlichkeit des Moments $u$ von einem Punkte $M$ des Fadens zum andern bloss von der Veränderlichkeit des Winkels $d\psi$, um welchen das Element $MN$ von der Richtung des vorhergehenden $LM$ abgelenkt worden, abhängig seyn kann. Von dieser Abhängigkeit ist aber im Allgemeinen gewiss, dass mit der Zunahme des Winkels $d\psi$ auch das Moment $u$ wachsen muss. Lässt man nämlich

lich von den zwei Elementen $LM$ und $MN$ das eine $LM$ unbeweglich werden und normal auf das andere $MN$ in einem bestimmten Punkte $N'$ eine Kraft $p$ wirken, welche dieses Element in der geneigten Lage, die es gegen das erstere haben soll, zu erhalten im Stande ist, so muss die Kraft $p$, folglich auch ihr auf $M$ bezogenes Moment $= MN'.p$, um so grösser seyn, je grösser die Neigung $d\psi$ von $MN$ gegen $LM$ ist.

Am einfachsten ist es nun, und stimmt auch sehr wohl mit der Erfahrung überein, die Kraft $p$ bei unverändertem Angriffspunkte $N'$, und somit ihr Moment, welches nach §. 316. mit dem Momente $u$ der Elasticität des Winkels $LMN$ einerlei ist, dem Winkel $d\psi$ proportional anzunehmen. Hiernach, und weil $u$ zufolge der Gleichung ($A$) eine endliche Grösse ist, die mit $-d\psi$ einerlei Zeichen hat (§. 318. $a$.), und weil $ds$ constant angenommen worden, haben wir

$$u = -\frac{\varepsilon d\psi}{ds}$$

zu setzen, wo $\varepsilon$ eine positive von der Elasticität des Fadens abhängende constante Grösse bedeutet, und wobei die Unveränderlichkeit von $ds$ nicht mehr in Betracht kommt, da es sich nunmehr bloss um das Verhältniss von $d\psi$ zu $ds$ handelt.

Noch andere Ausdrücke für $u$ sind:

$$u = -\frac{2\varepsilon\Delta}{ds^3} = \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon\,\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}.$$

Hierin bezeichnet $\Delta$ das Elementardreieck $LMN = \frac{1}{2}ds^2 d\psi$, und $r$ den Krümmungshalbmesser in $M$ (§. 273.), der positiv oder negativ zu rechnen ist, nachdem der Winkel $\psi$ ab- oder zunimmt. Der vierte Ausdruck für $u$ ergiebt sich unmittelbar aus dem ersten durch Differentiation der Gleichung $\tang\psi = dy : dx$.

Wird der vierte Ausdruck für $u$ in der Gleichung ($A$) substituirt, so kommt:

$$(B) \quad \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = \varepsilon \frac{dy d^2 x - dx d^2 y}{ds^3}$$

als die Differentialgleichung für das Gleichgewicht am elastisch biegsamen Faden in einer Ebene; sie drückt aus, *dass das auf irgend welchen Punkt des Fadens bezogene Moment aller äussern auf den Faden von seinem Anfange bis zu diesem Punkte wirkenden Kräfte der Krümmung des Fadens in demselben Punkte proportional ist.*

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich, wenn $X$ und $Y$ gegebene Functionen von $x$ und $y$ sind, und daher auf jeden Punkt des Fadens eine Kraft wirkt, deren Grösse und Richtung von dem Orte des Punktes in der Ebene auf gegebene Weise abhängt, die Gleichung für die Fadencurve herleiten. Bei den deshalb nöthigen Integrationen kommen fünf willkührliche Constanten hinzu, nämlich drei von der rechten Seite der Gleichung, wie beim vollkommen biegsamen Faden (§. 281. *d.*), und zwei von der linken Seite, weil diese noch Differentiale der zweiten Ordnung enthält. Von diesen fünf Constanten lassen sich, wie beim nicht elastischen Faden in §. 281., drei dadurch bestimmen, dass der Faden durch zwei gegebene Punkte gehen, und dass der dazwischen enthaltene Theil des Fadens von gegebener Länge seyn soll; die vierte und fünfte Constante können durch gegebene Richtungen der Elemente des Fadens in den beiden Punkten bestimmt werden.

Bei einem elastisch biegsamen Faden in einer Ebene, an welchem in der Ebene wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, können daher zwei

Punkte, durch welche der Faden gehen soll, die Richtungen der Tangenten des Fadens in diesen Punkten und die Länge des Fadens von dem einem Punkte zum andern nach Belieben genommen werden. Sind aber diese Stücke bestimmt, so ist damit auch die Gestalt des Fadens beim Gleichgewichte vollkommen bestimmt.

## §. 320.

Die im vorigen §. erhaltene Gleichung ($B$) wollen wir jetzt auf den einfachst möglichen Fall anwenden, wenn nicht auf die einzelnen Elemente des Fadens Kräfte wirken, sondern bloss der Anfangs- und Endpunkt des Fadens gegebene Oerter einnehmen und der Faden daselbst gegebene Linien zu berühren genöthigt ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn das erste und letzte Element des Fadens in gegebenen Lagen befestigt sind. Die unter dieser Bedingung von einem elastisch biegsamen, gleichförmig elastischen und ursprünglich geradlinigen Faden gebildete Curve wird vorzugsweise die elastische Linie genannt.

Statt das eine oder das andere der beiden Grenzelemente unbeweglich anzunehmen, kann man auf zwei Punkte des Elementes selbst zwei Kräfte wirken lassen, oder auch eine einzige Kraft, als die Resultante jener, an einem mit dem Elemente fest verbundenen Punkte anbringen (§. 318. *d.*). Zufolge des vor. §. ist alsdann auszudrücken, dass das Moment der zwei Kräfte am ersten Elemente, also auch das Moment ihrer Resultante, wenn es auf den Punkt ($x$, $y$) der Curve bezogen wird, dem Krümmungshalbmesser an diesem Punkte umgekehrt proportional ist.

Ist demnach ($A$, $B$) die Resultante der auf das erste Element wirkenden Kräfte und ($a$, $b$) ein Punkt der Resultante, der mit dem Elemente in fester Verbindung steht, so hat man für die elastische Linie die Gleichung

$$B(a-x) - A(b-y) = \frac{\varepsilon}{r},$$

eine Gleichung, die auch unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung ($B$) hätte hergeleitet werden können, wenn man $X = 0$, $Y = 0$, die hiernach constanten Grössen $\int X ds$, $\int Y ds$ resp. $= A$, $B$ und die nach der letzten Integration links noch hinzuzufügende Constante $= Ba - Ab$ gesetzt hätte.

Die Kraft ($A$, $B$), welche auf einen mit dem ersten Elemente verbundenen Punkt wirkt, und die Resultante der das letzte Element afficirenden Kräfte müssen, weil sie die einzigen auf den Faden wirkenden äusseren Kräfte sind, einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Gerade, in welcher ihre Richtungen gemeinschaftlich enthalten sind, heisse die Axe der elastischen Linie. Lassen wir mit dieser Axe die Axe der $x$ zusammenfallen, so werden $B = 0$, $b = 0$, und die Gleichung gewinnt die höchst einfache Gestalt:

$$Ay = \frac{\varepsilon}{r}.$$

*Die elastische Linie besitzt hiernach die charakteristische Eigenschaft, dass ihre Krümmung in jedem ihrer Punkte dem Abstande des Punktes von der Axe proportional ist.* An gleichweit von der Axe abstehenden Punkten ist daher auch die Krümmung gleich gross, und an ungleich entfernten verschieden: an dem entfernteren grösser und an dem näheren geringer. An den Stellen, wo die Curve von der einen auf die andere Seite der Axe sich wendet, geht die Krümmung durch Null aus dem Positiven in's Negative, oder umgekehrt, über, d. h. die Curve hat an jeder Stelle, wo sie die Axe schneidet, einen Wendepunkt. Auch kann sie nirgendwo anders einen solchen haben, da nur für $y=0$ der Krümmungshalbmesser $r$ unendlich gross werden kann.

Endlich erhellet, dass, wenn der erste oder letzte Punkt des Fadens in die Axe fällt, die mit dem Elemente daselbst in Verbindung zu setzende Kraft $A$ an ihm selbst, nicht erst an einem andern mit ihm verbundenen Punkte, angebracht werden kann. So ist z. B. bei einem durch eine Sehne gespannten elastischen Bogen die Sehne selbst die Axe, und die Spannung der Sehne = der mit $A$ bezeichneten Kraft. Die Krümmung des Bogens ist daher an seinen beiden Enden null und in dem von der Sehne entferntesten Punkte am stärksten. Eben so ist bei einem elastischen Stabe, dessen erstes Element in irgend einer Lage unbeweglich gemacht wird, und an dessen letztes Element ein Faden mit einem angehängten Gewichte befestigt wird, die verticale Linie des Fadens die Axe der von dem Stabe gebildeten elastischen Curve.

## §. 321.

Um aus der Gleichung der Curve zwischen $y$ und $r$ eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ herzuleiten, führe man zunächst statt $r$ den Winkel $\psi$ ein, den das Element $ds$ mit der Axe macht, und es wird (§. 319.):

$$Ay=\frac{\varepsilon}{r}=-\frac{\varepsilon d\psi}{ds}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt:

$$Ady=A\sin\psi ds=-\varepsilon d\left(\frac{d\psi}{ds}\right).$$

Multiplicirt man hierein $\frac{d\psi}{ds}$ und integrirt dann, so kommt:

$$A\cos\psi + C = \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = \frac{A^2y^2}{2\varepsilon}.$$

Die Constante $C$ kann man unter andern durch die grösste Abweichung der Curve von der Axe, d. i. durch den grössten Werth von $y$, welcher $h$ heisse, bestimmen. Er findet statt für $\psi = 0$, oder für $\psi = 180^\circ$, nachdem man die Axe der $x$, d. i. die Axe der elastischen Linie, nach der einen oder nach der andern Seite zu positiv seyn lässt. Man wähle diejenige Richtung dieser Axe zur positiven, bei welcher für den grössten Werth von $y$, $\psi = 0$ wird, und man hat:

$$A + C = \frac{A^2}{2\varepsilon}h^2,$$

$$\text{folglich}\quad 2\varepsilon\,(1 - \cos\psi) = A\,(h^2 - y^2),$$

woraus zugleich ersichtlich, dass die Richtung der auf den Anfang der Curve in der Axe wirkenden Kraft $A$ mit der für die Axe festgesetzten positiven Richtung übereinstimmt; denn $\varepsilon$ sowohl, als $h^2 - y^2$, ist positiv.

Setzt man nun noch $\frac{A}{2\varepsilon}(h^2 - y^2) = \mathfrak{z}^2$,

$$\text{so wird } \frac{dx}{ds} = \cos\psi = 1 - \mathfrak{z}^2, \text{ und}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\cos\psi}\sqrt{1+\cos\psi}},$$

$$\text{d. i.}\quad dx = \frac{1-\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}\sqrt{2-\mathfrak{z}^2}}\,dy.$$

Weil $\mathfrak{z}$ eine bekannte Function von $y$ ist, so sind in dieser Gleichung die Veränderlichen getrennt, und die dadurch mögliche Integration giebt die verlangte Gleichung zwischen $x$ und $y$. Indessen hängt diese Integration von der Rectification der Kegelschnitte ab und ist daher durch einen geschlossenen Ausdruck nicht ausführbar.

Was noch die Spannung der elastischen Linie anlangt, so ist hier wegen $\int X ds = A$ und $\int Y ds = B = 0$:

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\cos\psi \text{ (§.318. } e.\text{)}.$$

*Die Spannung in irgend einem Punkte der elastischen Linie ist demnach dem Cosinus des Winkels proportional, den die Berührende daselbst mit der Axe macht, und ist eine Pressung oder eine wirkliche Spannung*, je nachdem $dx$ positiv oder negativ ist, d. h. *je nachdem, wenn man in der Curve vom Anfange zum Ende fortgeht, die Richtung dieses Wegs, wenn sie nach der Richtung der am Anfange wirkenden Kraft $A$ geschätzt wird, mit dieser Richtung*, als der positiven Richtung der Axe der $x$, *übereinstimmt, oder ihr entgegensetzt ist.* In dem von der Axe entferntesten Punkte, wo $dx = ds$, ist daher die Spannung stets eine Pressung und hat unter allen Pressungen und eigentlichen Spannungen den absolut grössten Werth $= A$.

Bei der elastischen Linie $PRSTQ$ (Fig. 87.) z. B., auf deren Anfangspunkt $P$ und Endpunkt $Q$ gleiche und entgegengesetzte Kräfte nach den Richtungen $MP$ und $NQ$ wirken, wo daher $PQ$ die Axe und $MP$ die positive Richtung derselben ist, und wo die in $R$ und $T$ an die Curve gelegten Tangenten die Axe rechtwinklich treffen, nimmt $x$ von $P$ bis $R$ ab, von $R$ bis $T$ zu und von $T$ bis $Q$ wieder ab. Mithin findet von $P$ bis $R$ und von $T$ bis $Q$ wirkliche Spannung, von $R$ bis $T$ aber Pressung statt. In $R$ und $T$, wo $dx = 0$, geht die eine in die andere durch Null über.

Bei der weniger gekrümmten Linie $PSQ$ (Fig. 88.) nimmt $x$ von $P$ bis $Q$ fortwährend zu, und es herrscht folglich hier überall Pressung. In beiderlei Curven aber bezeichnet $S$ den von der Axe entlegensten Punkt, wo die Pressung am stärksten ist.

## §. 322.

Entwickelt man in der im vor. §. erhaltenen Differentialgleichung den Coefficient von $dy$ in eine nach wachsenden Potenzen von $z$ fortlaufende Reihe, so wird diese, wenn die Curve nur wenig von ihrer Axe abweicht, wenn also $h$, und folglich auch $z$ nur klein ist, schnell convergiren. Für eine sehr geringe Abweichung kann es hinreichen, nur das erste Glied dieser Reihe beizubehalten; man hat alsdann:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \cdot z}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{h^2 - y^2}},$$

und wenn man integrirt:

$$y = h \sin\left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon}} \cdot x\right),$$

wo die neue Constante unter der Voraussetzung, dass $y$ mit $x$ zugleich verschwinden soll, weggelassen ist. Die hierdurch ausgedrückte Linie läuft wellenförmig über und unter der Axe hin (Fig. 89.) und schneidet sie in Punkten $F$, $H$, $K$, $M$, deren jeder von dem nächstfolgenden um ein Intervall $= \pi\sqrt{(\varepsilon : A)}$ entfernt ist, wo $\pi =$ der halben Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$. Mitten zwischen je zwei solchen Punkten ist die Abweichung der Curve von der Axe am grössten, nämlich $= h$.

Setzt man den Bogen $FGH$ der Curve, der zwischen zwei nächstfolgende Durchschnitte derselben mit der Axe fällt, $= l$, so ist $l$ grösser, als der davon überspannte Theil $\pi\sqrt{(\varepsilon : A)}$ der Axe, mithin

$$A > \frac{\pi\varepsilon}{l^2}.$$

Da nun, wenn der Bogen $FGH$ für sich im Gleichgewichte seyn soll, die zwei einander gleichen und direct entgegengesetzten Kräfte $A$ unmittelbar an dem Anfangs- und Endpunkte des Bogens angebracht werden müssen, so ziehen wir hieraus den merkwürdigen Schluss:

*Soll eine elastische Gerade durch zwei an ihren Enden angebrachte einander gleiche und entgegenwirkende Kräfte zu einem Bogen gekrümmt werden, so muss die gemeinschaftliche Intensität der Kräfte ein gewisses Minimum überschreiten. Dieses Minimum von Intensität, welches man auch die elastische Kraft der Geraden nennt, ist im directen Verhältnisse des Coefficienten der Elasticität* $\varepsilon$ *und im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Länge* $l$ *der Geraden.* — So ist z. B. die geringste Kraft, welche zur Krümmung einer zwei- oder dreimal so langen Geraden erfordert wird, nur der vierte oder neunte Theil der geringsten Kraft, welche zur Krümmung der Geraden von einfacher Länge nöthig ist.

Verlängert man die elastische Linie $FGH$ über $H$ hinaus, bis sie der Axe weiterhin in $K$, $M$, ... begegnet, so sind nicht nur die Geraden $FH$, $HK$, $KM$, etc. unter sich, sondern auch die Bögen $FGH$, $HIK$, etc. unter sich gleich, und man kann die der $A$ gleiche und entgegengesetzte Kraft, statt in $H$, auch in $K$, oder in $M$, etc. anbringen. Es wird folglich auch die geringste Kraft, um eine Gerade $= 2l$, oder $3l$, etc. oder $il = k$ zu einem doppelten Bogen, wie $FK$, oder zu einem dreifachen, wie $FM$, etc. oder zu einem *i*fachen zu krümmen, eben so gross seyn seyn müssen, als die geringste Kraft, welche nöthig ist, um eine Gerade $= l = k : i$ in einen einfachen Bogen *FGH* zu verwandeln; die Kraft wird folglich proportional mit $i^2 : k^2$ seyn müssen, d. h. direct proportional dem Quadrate der Zahl der Bögen, in welche die Gerade sich theilen soll, und umgekehrt dem Quadrate der Länge der Geraden.

## §. 323.

Unter den mannigfachen Formen, welche die elastische Linie haben kann *), ist auch die Kreisform enthalten. Denn stellt man sich vor, dass eine geschlossene Kreislinie gleichförmig elastisch wird, und sich in eine Gerade auszudehnen strebt, so ist bei der überall gleichen Krümmung des Kreises kein Grund vorhanden, warum irgend ein Theil desselben seine Krümmung, falls er sie ändert, mehr oder weniger, als ein anderer Theil ändern sollte. Durch eine gleichförmige Aenderung der Krümmung würde aber der Kreis selbst entweder grösser oder kleiner, welches nicht seyn kann, da die Linie von unveränderlicher Länge seyn soll. Mithin bleibt der Kreis unverändert.

Als Axe der elastischen Kreislinie ist eine in der Kreisebene unendlich entfernte Gerade anzunehmen. Denn nur bei dieser Annahme kann die Entfernung jedes Punktes der Kreislinie von der Axe als proportional der von einem Punkte zum andern constanten Krümmung des Kreises angesehen werden.

Soll daher ein Theil des elastischen Kreises, getrennt von dem übrigen, seine Kreisbogenform unver-

*) Euler zählt neun Species dieser Formen. Siehe dessen Methodus inveniendi lineas curv. etc. Additam I. de curvis elasticis.

ändert behalten, so hat man entweder das erste und letzte Element des Bogens unbeweglich zu machen, oder, wenn man das eine dieser Elemente, oder auch beide, beweglich bleiben lässt, an einem unendlich entfernten Punkte, der mit dem beweglichen Elemente in fester Verbindung steht, eine Kraft anzubringen, deren Moment in Bezug auf den beweglich gelassenen Endpunkt dem endlichen Momente der Elasticität daselbst gleich ist, also eine unendlich kleine Kraft, indem sonst, wäre die Kraft endlich, ihr Moment unendlich gross seyn würde. Wir wissen aber aus §. 26. *b.* dass eine unendlich kleine auf einen unendlich entfernten Punkt wirkende Kraft die Wirkung eines Kräftepaares hat. Mithin hat man an zwei Punkten, die mit dem beweglichen Endelemente des Bogens in fester Verbindung stehen, zwei einander gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte anzubringen, deren Moment, welches rücksichtlich aller Punkte der Ebene gleiche Grösse hat (§. 31.), dem Momente der Elasticität gleich ist.

Kann umgekehrt das freie Ende der elastischen Linie nur durch ein Kräftepaar im Gleichgewichte erhalten werden, so ist die Linie ein Kreisbogen. Denn da in jedem Punkte $M$ der elastischen Linie das auf ihn bezogene Moment der mit dem freien Endelemente in Verbindung gebrachten Kräfte der Krümmung in $M$ proportional ist, und da ein Paar, rücksichtlich aller Punkte seiner Ebene, gleich grosse Momente hat, so muss unter der gemachten Voraussetzung die Krümmung von einem Punkte der Curve zum andern constant, und folglich die Curve ein Kreis seyn.

Da übrigens ein Kräftepaar in seiner Ebene willkührlich verlegt werden kann (§. 17.), so erhellet noch, indem man die Richtungen der Kräfte jenes Paares normal auf der Tangente am Ende des Bogens seyn lässt, dass bei einem elastischen Kreise oder Kreisbogen die Spannung null ist.

## §. 324.

Wir gehen jetzt zum Gleichgewichte eines elastisch biegsamen Fadens im Raume über. — Für das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens, wenn auf jedes Element $ds$ desselben eine Kraft ($Xds$, $Yds$, $Zds$) wirkt, hat man nach §. 281. *b.* die drei Gleichungen:

$$\int dz \int Yds - \int dy \int Zds = 0,$$
$$\int dx \int Zds - \int dz \int Xds = 0,$$
$$\int dy \int Xds - \int dx \int Yds = 0,$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, und von denen die letzte z. B. ausdrückt, dass, wenn man die Fadencurve und die auf sie wirkenden Kräfte auf die Ebene der $x$, $y$ projicirt, in Bezug auf die Projection ($x$, $y$) des Punktes ($x$, $y$, $z$) das Moment aller projicirten Kräfte, welche vom Anfangspunkte der Curve bis zum Punkte ($x, y, z$) auf sie wirken, null ist.

Ist der Faden nicht vollkommen biegsam, sondern stellt sich der Biegung die Elasticität als Hinderniss entgegen, so können wir nach der Vorstellungsweise in §. 317. an je zwei nächstfolgenden Elementen der Curve, wie $LM$ und $MN$ (Fig. 86.) zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte hinzugefügt denken, welche die Biegung $LMN$ aufzuheben streben, und von welchen die auf $MN$ wirkende in Bezug auf $M$ ein Moment

$$u = -2\varepsilon \,.\, LMN : LM^3 \quad (\S.\ 319.)$$

hat, wo $\varepsilon$ wiederum den constanten Coefficienten der

Elasticität ausdrückt; das Moment der auf $LM$ wirkenden Kraft ist in Bezug auf denselben Punkt $M$, $= -u$. Je zwei auf diese Art zusammengehörige Kräfte sind nun auch in jeder Projection einander gleich und direct entgegengesetzt. Ist daher $A$ der Anfangspunkt des Fadens, $M$ der Punkt $(x, y, z)$, und sind $A'$, $L'$, $M'$, $N'$ die Projectionen von $A$, $L$, $M$, $N$ auf eine der drei Coordinatenebenen, so reducirt sich eben so, wie in §. 317., das auf $M'$ bezogene Moment aller in der Projection von $A'$ bis $M'$ wirkenden elastischen Kräfte auf das Moment der auf das Element $L'M'$ vom Elemente $M'N'$ her wirkenden Kraft allein, und dieses Moment, es sey $= -u'$, ist, wenn wir für die Coordinatenebene successive die der $yz$, der $zx$ und der $xy$ wählen, der 1sten, 2ten und 3ten obiger Gleichungen linker Hand noch hinzuzusetzen.

Ist aber $p$ irgend eine Kraft in der Ebene $LMN$, und $p'$ die Projection dieser Kraft auf die Ebene $L'M'N'$, so verhält sich das Moment von $p$ in Bezug auf $M$ zum Momente von $p'$ in Bezug auf $M'$, wie das durch $p$ und $M$ bestimmte Dreieck zu dem durch $p'$ und $M'$ bestimmten, also auch wie $LMN$ zu $L'M'N'$, da jedes Dreieck der einen Ebene zu seiner Projection auf die andere in einem und demselben Verhältnisse steht. Es verhält sich daher auch $u : u' = LMN : L'M'N'$, und es ist mithin
$$u' = -2\varepsilon \,.\, L'M'N' : LM^3.$$

Setzen wir folglich die Projectionen der Dreiecksfläche $LMN$ auf die Ebenen der $yz$, $zx$ und $xy$ resp. $= \Delta_1$, $\Delta_2$ und $\Delta_3$, so sind
$$\frac{2\varepsilon\Delta_1}{ds^3},\ \frac{2\varepsilon\Delta_2}{ds^3},\ \frac{2\varepsilon\Delta_3}{ds^3}$$
die in den drei Gleichungen links noch hinzuzufügenden Grössen. Da endlich nach §. 319.

$$2\Delta_3 = dx d^2y - dy d^2x, \text{ und eben so}$$
$$2\Delta_1 = dy d^2z - dz d^2y, \text{ u. s. w.}$$

ist, so werden die Gleichungen für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden im Raume, wenn auf jedes Element $ds$ desselben eine Kraft ($Xds$, $Yds$, $Zds$) wirkt:

$$\int dz \int Yds - \int dy \int Zds = \varepsilon \frac{dz d^2y - dy d^2z}{ds^3},$$

$$\int dx \int Zds - \int dz \int Xds = \varepsilon \frac{dx d^2z - dz d^2x}{ds^3},$$

$$\int dy \int Xds - \int dx \int Yds = \varepsilon \frac{dy d^2x - dx d^2y}{ds^3},$$

drei Gleichungen, deren jede, wie bei denen für die unelastische Linie, aus den beiden übrigen folgen muss. Diess bestätigt sich auch sogleich, wenn man die Gleichungen differentiirt, sie hierauf resp. mit $dx$, $dy$, $dz$ multiplicirt und endlich addirt: denn man gelangt damit zu der identischen Gleichung: $0 = 0$.

## §. 325.

**Zusätze.** *a.* Da jede der drei eben aufgestellten Gleichungen eine Folge der beiden übrigen ist, so reichen schon zwei derselben, die man beliebig wählen kann, hin, um, wenn $X$, $Y$, $Z$ als Functionen von $x$, $y$, $z$ gegeben sind, die Gestalt des Fadens beim Gleichgewichte zu bestimmen. Bei der hierzu nöthigen Rechnung führen die in den zwei gewählten Gleichungen linker Hand befindlichen Integralausdrücke zu 5 Constanten, wie schon in §. 281. *d.* bei der nicht elastischen Linie bemerkt worden. Hierzu kommen, wegen der rechter Hand in den 2 Gleichungen stehenden Differentialen der 2ten Ordnung noch 4 Constanten, so dass die 2 Gleichungen, vollständig integrirt, 9 Constanten in sich fassen.

Um diese Constanten zu bestimmen, kann man, wie a. a. O., die Werthe von fünf derselben dadurch festsetzen, dass man die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes des Fadens und seine Länge gegeben seyn lässt. Und da die Bedingung, dass eine durch ihre zwei Gleichungen ausgedrückte Curve im Raume in einem ihrer Punkte eine durch ihn gehende gegebene Gerade zur Tangente hat, von der Erfüllung zweier Gleichungen zwischen den Coordinaten des Punktes und den die Richtung der Geraden bestimmenden Winkeln abhängt, so kann man zur Bestimmung der vier übrigen Constanten die Richtungen der Tangenten im Anfangs- und Endpunkte des Fadens gegeben annehmen.

Derselbe Satz, den wir in §. 319. für die elastische Curve in einer Ebene aufgestellt haben, gilt daher auch für diese Curve im Raume. Wenn nämlich zwei Punkte eines elastisch biegsamen Fadens gegebene Oerter einnehmen und seine Elemente daselbst gegebene Richtungen haben, und wenn überdiess auf alle Elemente des Fadens Kräfte wirken, deren Intensitäten und Richtungen gegebene Functionen ihrer Angriffspunkte sind, so ist damit die Form des Fadens vollkommen bestimmt.

*b.* Wird der elastische Faden im Raume in irgend einem Punkte $M$ unterbrochen, so kann das Gleichgewicht, eben so wie im §. 318. *c.* entweder dadurch, dass man das letzte noch übrige Element $LM$ unbeweglich macht, oder dadurch, dass man an ihm gewisse Kräfte anbringt, gesichert werden. Das Moment dieser Kräfte in Bezug auf $LM$ als Axe ist daher null, mithin muss auch das auf $LM$ bezogene Moment aller auf den Faden bis $M$ wirkenden äusseren Kräfte, da sie den an $LM$ anzubringenden Kräften das Gleichgewicht halten, null seyn. — Dasselbe erhellet auch mittelst der 3 Hauptgleichungen. Denn die in ihnen linker Hand stehenden Momente der Projectionen der äusseren Kräfte in Bezug auf die Projectionen von $M$ kann man zugleich als die Momente dieser Kräfte selbst in Bezug auf drei durch $M$ mit den Axen der $x, y, z$ gelegte Parallelen betrachten (§. 281. *b.*). Mit diesen Parallelen macht das letzte Element $LM$ Winkel, deren Cosinus $= \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind. Multiplicirt man mit diesen Cosinussen die drei Momente und addirt sie hierauf, so erhält man das Moment der äussern Kräfte in Bezug auf $LM$ (§. 90.). Letzteres Moment reducirt sich aber auf null, wenn man für die drei erstern ihre in den Gleichungen rechter Hand stehenden Werthe setzt.

*c.* Die an dem letzten Elemente $LM$ oder $ds$ anzubringenden Kräfte lassen sich bei dem elastisch biegsamen Faden im Raume im Allgemeinen nicht auf eine einzige Kraft zurückführen. Zerlegt man jede derselben in zwei Kräfte, von denen die eine auf $ds$ normal ist und die andere mit $ds$ zusammenfällt, so ist zufolge des in §. 318. *f.* von der Spannung gegebenen Begriffs die Summe der mit $ds$ zusammenfallenden die Spannung des Elementes $ds$. Da nun bei dieser Zusammensetzung der Kräfte zur Spannung ihre Angriffspunkte nicht in Betracht kommen und da die an $ds$ anzubringenden Kräfte mit den auf den Faden von seinem Anfange bis zum Elemente $ds$ wirkenden äusseren Kräften im Gleichgewichte sind, so wird man die Spannung auch erhalten, wenn man letztere Kräfte parallel mit einer, ihrer ursprünglichen Richtung entgegengesetzten, Richtung an einen und denselben Punkt trägt und hierauf ihre Resultante, welche ($-\int Xds$, $-\int Yds$, $-\int Zds$) ist, auf die Richtung des Elementes $ds$ projicirt, d. i. mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den die Richtung der Resultante mit dem Elemente $ds$ bildet. Auf diese Weise findet sich die Spannung

$$T=-\frac{dx}{ds}\int Xds-\frac{dy}{ds}\int Yds-\frac{dz}{ds}\int Zds,$$

und ist wie in §. 318. $f$. eine wirkliche Spannung oder Pressung, nachdem sich für $T$ ein positiver oder negativer Werth ergiebt.

Man nimmt übrigens leicht wahr, dass dieselben Betrachtungen, welche uns jetzt zu dem Ausdrucke für $T$ bei dem elastischen Faden leiteten, zu dem nämlichen Ausdrucke für $T$ auch bei dem nicht elastischen Faden führen, und dass auch in der That dieser Ausdruck durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) in §. 280. hervorgeht.

## §. 326.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über den elastisch biegsamen Faden im Raume wollen wir noch den speciellen Fall näher untersuchen, wenn auf den äussern Faden keine Kräfte wirken, sondern bloss das erste und letzte Element desselben an gegebenen Oertern und in gegebenen Richtungen befestigt sind.

Wird die Unbeweglichkeit des einen der beiden äussersten Elemente aufgehoben, und soll dabei die Gestalt des Fadens unverändert bleiben, so müssen an

Punkten dieses Elements, oder auch an Punkten, die mit ihm fest verbunden sind, Kräfte von gewisser Richtung und Intensität angebracht werden. Eben so kann auch die Unbeweglichkeit des andern Grenzelements durch Kräfte ersetzt werden, und letztere Kräfte müssen den erstern eben so, wie an einem festen Körper, das Gleichgewicht halten.

Die auf solche Weise an dem beweglich gemachten ersten Elemente anzubringenden Kräfte wollen wir, wie dies im Allgemeinen immer möglich ist, auf eine einfache Kraft $A$ und ein Paar reduciren, und zwar so, dass die einfache Kraft auf der Ebene des Paares normal steht. Werde nun die Richtung von $A$ zur Axe der $x$, und folglich die Ebene des Paares, oder eine mit ihr parallele, zur Ebene der $y$, $z$ genommen. Alsdann ist, wenn das Moment des Paares in Bezug auf einen Punkt seiner Ebene $= m$ gesetzt wird, sein Moment auch rücksichtlich der Axe der $x$, so wie jeder damit parallelen Axe, $= m$; rücksichtlich der Axe der $y$ aber, oder der Axe der $z$, oder irgend einer damit parallelen Axe ist es $= 0$. Ferner sind von der Kraft $A$ in Bezug auf drei durch den Punkt $(x, y, z)$ der Curve mit den Axen der $x$, $y$, $z$ parallel gelegte Axen die Momente resp. $= 0$, $- Az$, $+ Ay$ *). In Bezug auf diese drei Axen sind daher die Momente aller auf das erste Element des Fadens wirkenden Kräfte resp.

$$= m, \ - Az, \ + Ay;$$

---

*) Ueberhaupt nämlich sind in Beziehung auf dieselben drei Axen die Momente einer Kraft $(A, B, C)$, deren Angriffspunkt $(a, b, c)$ ist:

$$C(b-y) - B(c-z), \ A(c-z) - C(a-x),$$
$$B(a-x) - A(b-y) \ (\text{§§. 65. und 66.}).$$

und da bis zum Punkte $(x, y, z)$ ausser ihnen keine andern Kräfte auf den Faden wirken sollen, so haben wir diese drei Momente in den drei Hauptgleichungen für die Integralausdrücke linker Hand zu substituiren, und wir erhalten damit, wenn wir noch, grösserer Einfachheit willen, $dx$ constant setzen, die drei Gleichungen:

$$(A)\begin{cases} m = \varepsilon\dfrac{dzd^2y - dyd^2z}{ds^3}, \\ -Az = \varepsilon\dfrac{dxd^2z}{ds^3},\; Ay = -\varepsilon\dfrac{dxd^2y}{ds^3}, \end{cases}$$

oder auch $m = -\dfrac{2\varepsilon\Delta_1}{ds^3}, -Az = -\dfrac{2\varepsilon\Delta_2}{ds^3}, Ay = -\dfrac{2\varepsilon\Delta_3}{ds^3}$,

wo $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ die Projectionen des Elementardreiecks $LMN$ auf die drei coordinirten Ebenen sind (§. 324.). Es ist aber, wenn wir dieses Dreieck $LMN = \Delta$ setzen, und wenn $r$ den Krümmungshalbmesser der Curve in $M$ bedeutet: $r = -ds^3 : 2\Delta$ (§. 319.), und wir können daher letztere drei Gleichungen auch also schreiben:

$$(B)\quad m = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_1}{\Delta}, -Az = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_2}{\Delta}, Ay = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Aus ihnen lassen sich nachstehende merkwürdige Eigenschaften der elastischen Linie im Raume (vergl. §. 320.) herleiten. — Die jetzige Axe der $x$ oder diejenige Gerade, welche rücksichtlich der auf das erste Element der Curve wirkenden Kräfte die Hauptlinie des Systems ist (§. 82.), heisse vorzugsweise die Axe der Curve. Nun ist $\Delta_1$ die Projection des Dreiecks $\Delta$ auf die Ebene der $y, z$, folglich $\Delta_1 : \Delta$ = dem Cosinus des Winkels, den die Ebene des Dreiecks $\Delta$ mit der Ebene der $y, z$ macht, $= \sin\chi$, wenn

$\chi$ der Winkel der Ebene von $\Delta$, d. i. der Krümmungsebene, mit der Axe der Curve bedeutet. Statt der ersten der Gleichungen ($B$) können wir daher auch schreiben:

$$(a) \quad m = \frac{\varepsilon}{r}\sin\chi.$$

Ferner ist zu Folge der Eigenschaft rechtwinkliger Projectionen: $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \Delta^2$, und daher, wenn man die Quadrate der 3 Gleichungen ($B$) addirt:

$$(b) \quad m^2 + \Delta^2(y^2 + z^2) = \frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

woraus in Verbindung mit ($a$)

$$(c) \quad \Delta\sqrt{(y^2 + z^2)} = \frac{\varepsilon}{r}\cos\chi \text{ und}$$

$$(d) \quad \Delta\sqrt{(y^2 + z^2)} = m\,\mathrm{cotg}\,\chi \text{ folgt.}$$

Die erste ($a$) dieser Gleichungen lehrt nun, *dass die Krümmung der elastischen Linie umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional ist, den die Krümmungsebene mit der Axe der Linie bildet.*

Die zweite Gleichung ($b$) ist der Gleichung $\Delta y = \varepsilon : r$ für die elastische Linie in einer Ebene (§. 320.) analog und drückt aus, *dass die Krümmung in jedem Punkte proportional der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete von constanter Länge* ($= m : \Delta$), *und dessen andere Kathete dem Abstande des Punktes von der Axe gleich ist.*

Auch hier also wird, wie in §. 320., die Krümmung desto schwächer, je näher die Curve der Axe kommt; und weil mit wachsendem $r$ nach ($a$) auch $\sin\chi$ wächst, so nähert sich dabei die Krümmungsebene immer mehr der auf der Axe normalen Lage. Begegnet die Curve irgendwo der Axe, so ist daselbst die Krümmung am schwächsten (jedoch nicht null, wie in §. 320.), und die Krümmungsebene, folglich auch die Curve selbst, auf der Axe normal. — Parallel mit der Axe kann die Curve erst in unendlicher Entfernung von der Axe werden. Denn wird es die Curve, so wird auch die Krümmungsebene mit der Axe parallel, folglich $\chi = 0$, folglich nach $(a)$ $r = 0$ und nach $(b)$ $y^2 + z^2 = \infty$.

Dasselbe fliesst auch unmittelbar aus der Gleichung $(d)$, welche zu erkennen giebt, *dass der Abstand eines Punktes der Curve von der Axe der Cotangente des Winkels der Krümmungsebene mit der Axe proportional ist.*

Man multiplicire noch die 3 Gleichungen $(A)$ resp. mit $dx$, $dy$, $dz$ und addire sie, so erhält man:

$$(e)\quad m dx + A(y dz - z dy) = 0.$$

Sind nun $F$, $G$ zwei Punkte der Curve, $F'$, $G'$ ihre Projectionen auf die Axe der $x$ und $F_1$, $G_1$ ihre Projectionen auf die Ebene der $y$, $z$, und ist $O$ der Durchschnitt jener Axe mit dieser Ebene, so kommt, wenn man die Gleichung $(e)$ von $F$ bis $G$ integrirt:

$$m . F'G' + A . OF_1G_1 = 0,$$

wo $OF_1G_1$ die Fläche in der Ebene der $y$, $z$ vorstellt, welche von den Geraden $OF_1$, $OG_1$ und der Projection $F_1G_1$ des Bogens $FG$ der Curve begrenzt wird. Indem wir uns daher die Curve durch den einen Endpunkt $F$ einer sich an der Axe rechtwinklig fortbewegenden und um sie sich zugleich drehenden Geraden $F'F$ erzeugt denken und diese Gerade den Radius Vector nennen, können wir die erhaltene Gleichung also aussprechen:

*Jeder Theil der Axe, um welchen sich der Ra-*

*dius Vector an ihr fortbewegt, steht zu der Fläche, welche die Projection des Radius auf eine die Axe rechtwinklig treffende Ebene beschreibt, in einem constanten Verhältnisse, — in dem nämlichen, welches die Cotangente des Winkels, den die Krümmungsebene in irgend einem Punkte mit der Axe bildet, zu dem Abstande des Punktes von der Axe hat.*

In dem besonderen Falle, wenn $m = 0$, und wenn daher die auf das erste Element wirkenden Kräfte auf eine einzige Kraft $A$ zurückgeführt werden können, wird zu Folge der Gleichung ($e$): $ydx - xdy = 0$, und daher $y = ax$, d. h. die Curve ist in einer die Axe und somit die Richtung der Kraft $A$ enthaltenden Ebene begriffen. Ihre Krümmung im Punkte ($x$, $y$, $z$) ist alsdann, wie die Gleichung ($b$) lehrt, und wie wir bereits aus §. 320. wissen, proportional mit $\sqrt{(y^2 + x^2)}$ d. h. mit dem Abstande des Punktes von der Axe.

Wenn dagegen die am ersten Elemente anzubringenden Kräfte auf ein Paar reducirbar sind, und somit $A = 0$ ist, so gehen die Gleichungen ($b$) und ($e$) über in $m = \varepsilon : r$ und $mdx = 0$ oder $x =$ Const., d. h. die Curve liegt in einer mit der Ebene des Paares parallelen oder zusammenfallenden Ebene, was nach §. 50. auf eines und dasselbe hinauskommt, und die Krümmung ist unveränderlich, die Curve selbst also ein Kreis, — übereinstimmend mit dem bereits in §. 323. Gefundenen.

## §. 327.

Statt der drei Gleichungen ($A$) können auch die zwei ($b$) und ($e$) als die Gleichungen der elastischen Linie im Raume angesehen werden. Kennt man daher eine Linie, welche diesen zwei Gleichungen Genüge leistet, so wird sie eine elastische seyn und die Axe der $x$ zu ihrer Axe haben.

So wird unter anderen hierher die cylindrische Spirale oder die Schraubenlinie gehören, und die Axe des Cylinders wird die Axe der Curve seyn. Denn erstens ist der Abstand jedes Punktes dieser Spirale von der Axe von gleicher Grösse, desgleichen auch die Krümmung constant, und hiermit wird die Gleichung ($b$) erfüllt. Da ferner eine cylindrische Spirale von dem Endpunkte eines auf der Axe normal stehenden Radius beschrieben wird, wenn derselbe um die Axe gedreht und zugleich längs der Axe fortgerückt wird, so dass seine Fortrückung der gleichzeitigen Drehung immer proportional ist, so geschieht auch der durch die Gleichung ($e$) ausgedrückten Bedingung Genüge.

Ist eine Spirale ihrer Form und Grösse nach gegeben und sollen die zu ihrer Erhaltung nöthigen Kräfte gefunden werden, oder soll umgekehrt aus den Kräften die Form und Grösse der Spirale bestimmt werden, so hat man nur die Gleichungen ($A$) der elastischen Linie mit denen der Spirale in Verbindung zu setzen. Sey zu dem Ende $a$ der Halbmesser des Cylinders der Spirale oder die Länge des vorhin gedachten Radius Vector und $b$ der Weg, um welchen derselbe an der Axe während einer ganzen Umdrehung fortrückt. Wird nun diese Axe zur Axe der $x$ genommen, und geschieht bei einem Fortrücken nach der positiven Seite dieser Axe die gleichzeitige Drehung in dem Sinne, nach welchem die Axe der $x$ mit der der $y$ einen Winkel $= 90°$, nicht $= 270°$, macht, so sind die Gleichungen der Spirale:

$$y = a \cos \frac{2\pi x}{b},\ z = a \sin \frac{2\pi x}{b}.$$

Hieraus fliesst durch Differentiation

$$dy = -\frac{2\pi z}{b}\, dx,\ dz = \frac{2\pi y}{b}\, dx,$$

folglich $ds = \frac{l}{b}\, dx$, wo $l = \sqrt{(b^2 + 4\pi^2 a^2)}$

= dem, während einer ganzen Umdrehung des Radius, erzeugten Theile der Spirale.

Durch nochmalige Differentiation, wobei wir $dx$, wie bei den Gleichungen ($A$), constant setzen, erhalten wir:

$$d^2 y = -\frac{4\pi^2 y}{b^2}\, dx^2,\ d^2 z = -\frac{4\pi^2 z}{b^2}\, dx^2.$$

Substituiren wir nun diese Werthe von $y$ und $z$ und ihren Differentialen in den 3 Gleichungen ($A$), so giebt die erste derselben:

$$m = -\frac{8\pi^3 \varepsilon a^2}{l^3};$$

jede der beiden andern aber giebt:

$$A = \frac{4\pi^2 \varepsilon b}{l^3};$$

und hiermit sind die Relationen zwischen den Kräften und den Parametern der Curve gefunden.

Der hierbei sich negativ ergebende Werth von $m$ zeigt an, dass der Sinn dieses Moments dem Sinne, nach welchem der Winkel der Axe der $z$ mit der der $y$, $= 90°$ ist, also auch dem Sinne, nach welchem die Drehung des Radius bei einem positiven Fortrücken an der Axe der $x$ geschieht, entgegengesetzt seyn muss. Denken wir uns daher diese Axe etwa vertical, und windet sich die Spirale nach oben zu von rechts nach links um die Axe, und wird ihr unterstes Element als das erste betrachtet, als dasjenige also, mit welchem die einfache Kraft $A$ und die Kräfte des Paares in Verbindung gesetzt sind, so muss die mit der Axe zusammenfallende Kraft $A$ nach oben, und der Sinn des horizontalen Paares von der Linken nach der Rechten gerichtet seyn.

Aus den für $A$ und $m$ erhaltenen Werthen fliesst die Proportion:

$$-m : A = 2\pi a^2 : b.$$

Sie giebt zu erkennen, dass, wenn man die in der Axe wirkende Kraft $A$ geometrisch durch den vom Radius $a$ während einer Umdrehung längs der Axe zurückgelegten Weg $b$ ausdrückt, das Moment $m$ des normal auf der Axe wirkenden Paares durch das Doppelte der auf der Axe normalen Basis des Cylinders vorgestellt wird.

Macht man die Breite des Paares $= a$ und setzt $m : a = B$, so dass $+B$ und $-B$ die Kräfte des Paares sind, so wird

$$-B : A = 2\pi a : b = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx.$$

Man kann alsdann dem Paare eine solche Lage geben, dass seine Kräfte auf einem Radius in den zwei Endpunkten desselben perpendicular stehen, dass also die eine Kraft $+B$ irgend einem Elemente der Curve und die andere $-B$ der Axe, also auch der Kraft $A$, begegnet. Zufolge der letztern Proportion werden sich dann $-B$ und $A$ zu einer mit dem Elemente parallelen Kraft zusammensetzen lassen, also zu einer Kraft, deren Moment in Bezug auf das Element null ist. Da nun auch die dem Elemente begegnende Kraft $+B$ rücksichtlich desselben ein Moment $=0$ hat, so erhellet auf diese Weise ganz einfach, dass, wie wir bereits aus §. 325. $b$. schliessen können, das Moment der Kräfte $A$, $B$, $-B$ in Bezug auf jedes Element der Curve $=0$ ist.

Um endlich noch der Spannung der Spirale zu gedenken, so ist sie, weil $\int X ds = A$, $\int Y ds = 0$ und $\int Z ds = 0$ sind;

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\frac{b}{l},$$

also von einem Punkte der Curve zum andern constant und wegen des negativen Zeichens keine eigentliche Spannung, sondern eine Pressung.

---

## §. 328.

Ehe ich die Lehre vom Gleichgewichte an einem elastisch biegsamen Faden verlasse, will ich noch zeigen, wie die Sätze, welche in der Dynamik das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung heissen und in §. 305. auf das Gleichgewicht an einem vollkommen biegsamen Faden übergetragen wurden, mit gehöriger Modification auch auf einen elastisch biegsamen Faden angewendet werden können, wobei ich mich aber, um nicht eine allzulange Rechnung herbeizuführen, auf den Fall beschränken werde, wenn der Faden und die auf ihn wirkenden Kräfte in einer Ebene enthalten sind.

Für diesen Fall ist die Gleichung für's Gleichgewicht:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = \varepsilon p \quad (\text{§. } 319.),$$

wo $p$ das Reciproke des Krümmungshalbmessers $r$ bedeutet; die Gleichung für die Spannung aber ist:

$$dx \int X ds + dy \int Y ds = -T ds \quad (\text{§. } 318. \; e.).$$

Man setze [1] $dx = \xi ds$, $dy = \eta ds$, $dp = \varrho ds$,

wo daher $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und $\xi d\xi + \eta d\eta = 0$, so werden die beiden Gleichungen, nachdem man zuvor die erstere differentiirt hat:

$$\eta \int X ds - \xi \int Y ds = \varepsilon \varrho,$$
$$\xi \int X ds + \eta \int Y ds = - T,$$

Hieraus folgt: [2] $\begin{cases} \int X ds = - T\xi + \varepsilon\varrho\eta, \\ \int Y ds = - T\eta - \varepsilon\varrho\xi; \end{cases}$

und wenn man diese zwei Gleichungen abermals differentiirt, sie dann resp. mit $\xi$ und $\eta$ multiplicirt und hierauf addirt:

$$X dx + Y dy = - dT + \varepsilon\varrho\,(\xi d\eta - \eta d\xi).$$

Es ist aber, wenn $\psi$, wie im Vorigen, den Winkel der Tangente der Curve mit der Axe der $x$ bezeichnet:

$$[3] \quad \begin{cases} dx = \cos\psi ds, \quad dy = \sin\psi ds, \text{ folglich} \\ \xi = \cos\psi, \quad \eta = \sin\psi \text{ und daher} \end{cases}$$
$$\xi d\eta - \eta d\xi = d\psi;$$

ferner ist [4] $\dfrac{d\psi}{ds} = -\dfrac{1}{r}$ (§. 319.) $= -p$.

Hiermit wird: $X dx + Y dy = - dT - \varepsilon p dp$.

*Ist demnach $X dx + Y dy$ das vollständige Differential einer Function $V$ von $x$ und $y$, $V'$* dieselbe Function der Coordinaten des Punktes $(x', y')$ der Fadencurve, $T'$ die Spannung und $p'$ das Reciproke des Krümmungshalbmessers daselbst, so kommt, wenn man letztere Gleichung vom Punkte $(x', y')$ bis zum Punkte $(x, y)$ der Curve integrirt:

$$\text{I.} \quad V - V' + T - T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2 - p'^2) = 0,$$

*und man kann folglich, wenn man die Function $V$, für irgend zwei Punkte der Fadencurve die Coordinaten und die Krümmungshalbmesser, und in dem einen Punkte die Spannung kennt, die Spannung in dem anderen ohne Weiteres berechnen.*

Dies ist der erste der hier zu beweisenden Sätze. Um den zweiten zu entwickeln, welcher dem Princip der kleinsten Wirkung entspricht, denke man sich in der Ebene des Fadens von einem beliebigen Punkte $M_1$ der Ebene bis zu einem andern beliebigen $M_2$ irgend eine Curve gezogen. Unter der abermaligen Voraussetzung, dass $Xdx + Ydy$ das Differential einer gegebenen Function $V$ von $x$ und $y$ ist, werde für jeden Punkt $(x, y)$ dieser Curve mit Hülfe ihres Krümmungshalbmessers $1:p$ in $(x, y)$ der Werth von $T$ nach der Gleichung I., in welcher man die auf den Punkt $(x', y')$ des Fadens sich beziehenden $V'$, $T'$, $p'$ als gegebene Constanten ansehe, berechnet, und damit das Integral $\int Tds$ von $M_1$ bis $M_2$ gebildet. Man lasse nun die Curve sich um ein unendlich Weniges ändern und untersuche die Aenderung $\delta\int Tds$, welche dadurch das Integral erfährt.

Nach I. ist $\delta T = -\delta V - \varepsilon p\delta p$

$$= -X\delta x - Y\delta y - \varepsilon p\delta p \text{ (vgl. §. 305.)}$$

und daher $\delta\,(Tds) = \delta T\,.\,ds + T\delta ds$

$$= -Xds\delta x - Yds\delta y - \varepsilon pds\delta p$$
$$+ T\xi d\delta x + T\eta d\delta y \text{ (ebendas.).}$$

Hiervon das Integral von $M_1$ bis $M_2$ genommen, giebt, weil $\int\delta\,(Tds) = \delta\int Tds$ ist, die gesuchte Aenderung.

Nehmen wir jetzt an, die zu variirende Curve sey der im Gleichgewichte befindliche elastische Faden selbst, also $M_1$ und $M_2$ zwei Punkte desselben. Für den Faden haben $Xds$ und $Yds$ die aus [2] durch Differentiation sich ergebenden Werthe, und es wird damit

$$\delta(Tds) = d(T\xi - \varepsilon\varrho\eta)\,.\,\delta x + d(T\eta + \varepsilon\varrho\xi)\,.\,\delta y$$
$$- \varepsilon pds\delta p + T\xi d\delta x + T\eta d\delta y$$

$$= d(T\xi\delta x) + d(T\eta\delta y) + \varepsilon\Omega,$$

wo $\Omega = -d(\varrho\eta)\,\delta x + d(\varrho\xi)\,\delta y - pds\delta p$

$$= -d(\varrho\eta\delta x) + d(\varrho\xi\delta y) + \Psi,$$

wo $\Psi = \varrho\eta\delta dx - \varrho\xi\delta dy - pds\delta p.$

Nach den Formeln [3] ist aber

$$\eta\delta dx - \xi\delta dy = \sin\psi\ \delta(\cos\psi\ ds) - \cos\psi\ \delta(\sin\psi\ ds)$$

$$= -ds.\delta\psi;$$ folglich nach [1] und [4]

$$\Psi = -dp\delta\psi + d\psi\delta p = -d(p\delta\psi) + \delta(pd\psi)$$

$$= -d(p\delta\psi) - \delta(p^2 ds).$$

Hiermit wird, wenn man

$T\xi - \varepsilon\varrho\eta = F$ und $T\eta + \varepsilon\varrho\xi = G$ setzt:

$$\delta(Tds) = d(F\delta x) + d(G\delta y) - \varepsilon d(p\delta\psi) - \varepsilon\delta(p^2 ds);$$

und wenn man vom Punkte $M_1$ bis zum Punkte $M_2$ der Fadencurve integrirt und den Werth von

$$F\delta x + G\delta y - \varepsilon p\delta\psi$$

in $M_1$, $= A_1$ und in $M_2$, $= A_2$ setzt:

$$\delta\int(Tds + \varepsilon p^2 ds) = A_2 - A_1.$$

Werde nun angenommen, dass bei der Variation des Stücks $M_1\ M_2$ der Fadencurve die Punkte $M_1$ und $M_2$ ihre Oerter unverändert behalten, und dass daher $\delta x$ und $\delta y$ für jeden der beiden Punkte null sind. Werde ferner gesetzt, dass die variirte Curve mit der ursprünglichen in $M_1$ und $M_2$ einerlei Tangenten habe, so ist auch $\delta\psi$, als die Variation des Winkels der Tangente mit der Axe der $x$, an beiden Orten null. Hiermit werden die Grössen $A_1$ und $A_2$, welche von den Werthen der Variationen $\delta x$, $\delta y$ und $\delta\psi$ in $M_1$ und $M_2$ abhängen, gleichfalls null, und die zuletzt erhaltene Gleichung reducirt sich auf

$$\text{II.}\quad \delta\int(Tds + \varepsilon p^2 ds) = 0,$$ d. h.

*Sind Kräfte* ($X$, $Y$) *an einem elastisch biegsamen Faden im Gleichgewichte, und ist* $Xdx + Ydy$ *das vollständige Differential einer Function* $V$ *von*

*$x$ und $y$, so ist es unter allen Curven, welche von einem beliebigen Punkte $M_1$ des Fadens bis zu einem beliebigen andern $M_2$ desselben gezogen werden und in $M_1$ und $M_2$ den Faden zugleich berühren, die zwischen $M_1$ und $M_2$ enthaltene Fadencurve selbst, für welche das von $M_1$ bis $M_2$ ausgedehnte Integral*

$$\int\left(T ds + \varepsilon\frac{ds}{r^2}\right)$$

*seinen grössten oder kleinsten Werth hat. Dabei ist $T$ mit Hülfe der Gleichung*

$$V - V' + T - T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2}\right) = 0$$

*zu berechnen, wo $V'$, $T'$ und $r'$ die irgend einem Punkte der Fadencurve zugehörigen Werthe der Function $V$, der Spannung und des Krümmungshalbmessers bedeuten.*

## §. 329.

**Zusätze.** *a.* Sind $X$ und $Y$ null, wirken also auf den Faden keine Kräfte, sondern sind bloss das erste und letzte Element in gegebenen Lagen befestigt, so ist $V$ constant, also $V = V'$ und

$$T - T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2 - p'^2) = 0, \text{ d. h.}$$

*Bei der elastischen Linie* (§. 320.) *ist der Unterschied der Spannungen in irgend zwei Punkten dem Unterschiede der Quadrate der Reciproken der Krümmungshalbmesser in den beiden Punkten proportional.*

*b.* Substituirt man den aus letzterer Gleichung sich ergebenden Werth von $T$ in dem Integrale, welches ein Maximum oder Minimum ist, so wird dasselbe

$$= \int(T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2 + p'^2))ds = Cl + \tfrac{1}{2}\varepsilon\int p^2 ds,$$

wo $C =$ der constanten Grösse $T' + \frac{1}{2}\varepsilon p'^2$, und $l =$

der Länge der von $M_1$ bis $M_2$ gezogenen Curve. Wird folglich noch die Bedingung hinzugefügt, dass $l$ constant, dass also alle von $M_1$ bis $M_2$ gezogenen Curven von gleicher Länge seyn sollen, so wird $\int p^2 ds$ selbst ein Minimum, — nicht ein Maximum, weil hier das Integral mit der Länge der Curve offenbar über jede Grenze hinaus wachsen kann. — Wir gelangen hiermit zu dem merkwürdigen schon von Daniel Bernoulli *) entdeckten Satze:

*Unter allen Linien von gleicher Länge, welche von einem gegebenen Punkte zu einem andern gegebenen gezogen werden und in diesen Punkten von Geraden, die ihrer Lage nach gegeben sind, berührt werden, ist es die elastische Linie, für welche das von dem einen zum andern Punkte ausgedehnte Integral des durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers dividirten Linienelements seinen kleinsten Werth hat.*

*c.* In den bisherigen Untersuchungen über den elastisch biegsamen Faden ist in Uebereinstimmung mit Allen, welche über diesen Gegenstand geschrieben haben, das Moment der Elasticität $u$ an jeder Stelle des Fadens der Krümmung daselbst proportional gesetzt worden, indem dieses nicht allein die einfachste, sondern auch eine mit der Erfahrung gut harmonirende Hypothese ist (§. 319.). Ohne die Erfahrung näher zu

*) Siehe den Eingang zu der bereits in §. 323. angeführten Euler'schen Abhandlung de curvis elasticis. Euler berichtet daselbst, wie Bernoulli ihm mitgetheilt habe, dass er die gesammte in einem elastischen Bleche (lamina) enthaltene Kraft in dem einfachen Ausdrucke $\int(ds : r^2)$ zusammenfassen könne, und dass dieser Ausdruck, welchen er die vis potentialis des Bleches nennt, für die elastische Linie ein Minimum seyn müsse.

befragen, kann man bloss behaupten, dass das Moment $u$ eine Function der Krümmung ist, und zwar eine solche, die mit der Krümmung zugleich wächst und abnimmt und durch Null in das Entgegengesetzte übergeht. Denn unter der Annahme, dass alle Elemente des Fadens von gleicher Länge sind, kann das Moment $u$ des von den Richtungen zweier nächstfolgenden Elemente gebildeten Winkels $d\psi$ von diesem Winkel allein abhängig seyn; und da $u$ eine endliche Grösse, $ds$ aber constant gesetzt worden ist, so muss $u$ eine Function von $d\psi : du$, d. i. von der Krümmung, seyn. Dass aber $u$ mit der Krümmung zugleich ab- und zunehmen muss u. s. w., folgt aus der Natur der Sache selbst.

Ich mache diese Bemerkung hier um deswillen, weil, wie ich noch hinzufügen will, die im vor. §. angestellte Rechnung auch unter der Voraussetzung, dass das Moment $u$ überhaupt eine Function der Krümmung, also von $r$ oder von $p, = 1 : r$, ist, geführt werden kann.

In der That stelle $P$ irgend eine gegebene Function von $p$ vor, und sey dem gemäss die allgemeinere Gleichung für das Gleichgewicht am elastischen Faden:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = P.$$

Alsdann werden, wenn man $dP = \Pi dp$ setzt, die Gleichungen [2]:

$$\int X ds = - T\xi + \Pi \varrho \eta,$$
$$\int Y ds = - T\eta - \Pi \varrho \xi.$$

Verbindet man diese Gleichungen auf die oben angezeigte Weise und setzt $\int \Pi p dp = Q$, und den Werth, welchen $Q$ für $x = x'$ und $y = y'$ erlangt, $= Q'$, so erhält man statt der Gleichung I.:

$$V - V' + T - T' + Q - Q' = 0,$$

und man kann daher auch jetzt noch die Spannung $T$ schon durch die Function $V$ und durch den Krümmungshalbmesser, von welchem $Q$ eine gegebene Function ist, bestimmen.

Eine weitere analoge Durchführung der Rechnung giebt mit der Bemerkung, dass $\delta Q = \Pi p \delta p$ und $\delta P = \Pi \delta p$ ist:

$$\Psi = -dP\delta\psi + \delta P d\psi = -d(P\delta\psi) + \delta(Pd\psi)$$
$$= -d(P\delta\psi) - \delta(Ppds),$$

und man gelangt damit zu dem Integrale

$$\int (Tds + Ppds),$$

welches unter den nämlichen Voraussetzungen, welche im vor. §. gemacht wurden, ein Maximum oder Minimum seyn muss.

### Gleichgewicht an einem elastisch drehbaren Faden.

### §. 330.

Eine krumme Linie im Raume können wir ihrer Grösse und Form nach als gegeben ansehen, wenn die Längen ihrer Elemente, die Winkel je zweier nächstfolgenden Elemente und die Winkel, welche die Ebenen von je zwei nächstfolgenden der erstern Winkel mit einander machen, gegeben sind. Von diesen drei, zur Bestimmung einer Linie von doppelter Krümmung dienenden Arten von Grössen setzten wir in diesem Kapitel zuerst alle drei veränderlich und liessen durch die Veränderung der Längen der Elemente elastische Kräfte entstehen (§. 313—315.). Wir setzten zweitens die Längen der Elemente constant, und nur die beiden Arten von Winkeln veränderlich, und liessen durch die Aenderung der Winkel der ersten Art elastische Kräfte erzeugt werden (§. 316—§. 329.).

Auf diesem Wege fortgehend, wollen wir nun drittens und letztens die Längen der Elemente sowohl, als die Winkel der ersten Art, constant und nur die der zweiten Art als veränderlich annehmen und durch ihre Veränderung elastische Kräfte hervorgehen lassen. So wie wir aber bei der zuletzt geführten Untersuchung der Einfachheit willen die Winkel der ersten Art beim anfänglichen Zustande der Linie sämmtlich null setzten und damit die Linie eine Gerade seyn liessen, so wollen wir auch jetzt, so lange auf die Linie noch keine Kräfte wirken, die Winkel der zweiten Art null annehmen und somit eine Curve von einfacher Krümmung voraussetzen.

Sind demnach $L$, $M$, $N$, $O$ irgend vier zunächst auf einander folgende Punkte der Curve, also $LM$, $MN$, $NO$ drei nächstfolgende Elemente derselben und $LMN$, $MNO$ zwei nächstfolgende Winkel der ersten Art, so sollen die ursprünglich zusammenfallenden Ebenen derselben, wenn sie, durch äussere Kräfte genöthigt, an ihrem gemeinschaftlichen Elemente $MN$ einen Winkel (der zweiten Art) mit einander machen, durch elastische Kräfte zur Wiedervereinigung getrieben werden. Entfernt man die äussern Kräfte und soll nichtsdestoweniger der Ebenenwinkel unverändert erhalten werden, so kann dieses dadurch geschehen, dass man irgend zwei Punkte, etwa $L$ und $O$, der einen und andern Ebene, von denen keiner in dem gemeinschaftlichen Elemente $MN$ liegt, durch eine steife gerade Linie $LO$ von unveränderlicher Länge mit einander verbindet; denn hierdurch werden die beiden Ebenen in eine unveränderliche Lage gegen einander gebracht. Den elastischen Kräften halten daher die Pressungen der Linie $LO$ das Gleichgewicht, und man kann sich folglich die elastischen Kräfte als zwei einander gleiche, nach den Richtungen $LO$ und $OL$ auf die Ebenen $LMN$ und $MNO$ wirkende, Kräfte vorstellen, und eben so als zwei nach $L'O'$ und $O'L'$ gerichtete Kräfte, wenn $L'$ und $O'$ irgend zwei andere Punkte in den Ebenen $LMN$ und $MNO$ sind. Heissen nun $p$ und $-p$ die beiden erstern und $p'$ und $-p'$ die beiden letztern Kräfte, so müssen nach demselben Schlusse, wie in §. 316., wenn das Element $MN$ unbeweglich angenommen wird, die Kräfte $p$ und $p'$, welche nach den Richtungen $LO$ und $L'O'$ auf die um $MN$ drehbare Ebene $LMN$ wirken, gleichwirkend seyn; es müssen folglich die Momente von $p$ und $p'$ in Bezug auf $MN$, als Axe, einander gleich seyn. Die gemeinschaftliche Grösse dieser Momente wollen wir das Moment der Elasticität des Ebenenwinkels $LMN^{\wedge}MNO$ nennen und, wenn die Länge der Axe $=1$ ist, mit mit $v$ bezeichnen. Kennt man dieses Moment, so kann man für jede gegebene Richtung der Kraft $p$ oder $p'$ die Intensität der letztern finden. Denn das Moment einer ihrer Grösse und Richtung nach durch $LO$ ausgedrückten Kraft in Bezug auf die Linie $MN$, als Axe, ist gleich dem Sechsfachen der Pyramide $MNLO$ (§. 59.) $= LMNO$ (§. 63. 1.), und daher nach §. 91. das Moment einer nach $LO$ gerichteten Kraft $p$ in Bezug auf eine Axe, welche die Richtung $MN$ und eine Länge $=1$ hat:

$$v=\frac{6.LMNO}{LO.MN}p, \text{ folglich } p=\frac{LO.MN}{6.LMNO}.v.$$

Eben so, wie bei dem Linienwinkel in §. 316., ist demnach auch hier mit dem Momente der Elasticität die Wirkung derselben vollkommen bestimmt.

Was zuletzt noch die Grösse des Moments $v$ anlangt, so ist wohl auch hier die naturgemässeste Hypothese, dasselbe bei einem gleichförmig elastischen Faden, sobald die Elemente desselben einander gleich angenommen werden, dem mehrgedachten Ebenenwinkel proportional zu setzen, also überhaupt, — mag $ds$ constant angenommen werden, oder nicht —

$$v = \vartheta \frac{d\chi}{ds}$$

zu setzen, wenn $d\chi$ den unendlich kleinen Ebenenwinkel und $\vartheta$ eine von der Elasticität des Fadens abhängige Constante bezeichnet.

Weil endlich

$$6 \,.\, LMNO = 2LMN \,.\, \frac{2MNO}{MN} \,.\, \sin LMN^{\wedge} MNO$$

$$= 4 \,.\, \frac{LMN^2}{ds} d\chi = 4LMN^2 \,.\, \frac{v}{\vartheta},$$

so kann nach derselben Hypothese das Moment $v$ auch

$$= \vartheta \,.\, 6LMNO : 4LMN^2$$

gesetzt werden. Dabei ist $\vartheta$ eine positive Grösse, weil das Moment $\vartheta$ mit der Pyramide $LMNO$ einerlei Zeichen hat.

## §. 331.

Dieses vorausgeschickt, gehen wir jetzt zur Entwickelung der unser Problem in Rechnung setzenden Differentialgleichungen über. Hierbei wollen wir, wie bei der vorigen Untersuchung, die in §. 281. *b.* aufgestellten Gleichungen für das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens zum Grunde legen. Diese vollkommene Biegsamkeit wird gegenwärtig durch die zwei Bedingungen beschränkt, dass die im vor. §. sogenannten Winkel der ersten Art unveränderlich und dass die der zweiten Art elastisch seyn sollen, und wir haben desshalb zu den in jenen Gleichungen bereits vorkommenden Kräften noch zweierlei andere Kräfte hinzuzufügen. Damit aber diese neuen Kräfte, gleich den bereits vorkommenden, den Faden selbst afficiren und somit auf eben die Art, wie jene, in Rechnung genommen werden können, wollen wir die Unveränderlichkeit der Winkel der ersten Art uns dadurch bewerkstelligt denken, dass von je drei nächstfolgenden Punkten des Fadens, wie $L$, $M$, $N$, der erste mit dem dritten durch eine gerade Linie $LN$ von unveränderlicher Länge verbunden ist. Die Elasticität der Winkel der zweiten Art oder der Ebenenwinkel wollen wir, den vorangegangenen Erläuterungen gemäss, als darin bestehend uns vorstellen, dass auf den ersten und vierten von je vier nächstfolgenden Punkten, wie $L$, $M$, $N$, $O$, zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte wirken. Die Kräfte, welche gegenwärtig am Faden sich das Gleichgewicht halten sollen, sind demnach:

1) Die äusseren Kräfte ($Xds$, $Yds$, $Zds$), welche auf die einzelnen Elemente $LM$, $MN$, $NO$, ... wirken, und wohin auch die endlichen Kräfte gehören, die am Anfang und Ende des Fadens thätig sind;

2) die Pressungen, welche von den steifen Geraden $LN$, $MO$,... auf die sie begrenzenden Punkte des Fadens hervorgebracht werden;

3) die elastischen Kräfte, deren Richtungen in $LO$,... fallen.

Den allgemeinen Gleichungen in §. 281. zufolge ist nun zunächst analytisch auszudrücken, dass in Bezug auf jede der drei Axen, welche durch irgend einen Punkt ($x$, $y$, $z$) oder $M$ des Fadens parallel mit den

Coordinatenaxen gelegt werden, das Moment aller jener vom Anfangspunkte $A$ bis zum Punkte $M$ auf den Faden wirkenden Kräfte null ist. Auf solche Weise erhalten wir drei Gleichungen, oder vielmehr nur zwei, da aus je zweien derselben, nachdem sie differentiirt worden, die dritte folgt.

Von allen auf den Faden von $A$ bis $M$ wirkenden Pressungen sind aber zwei und zwei einander gleich und direct entgegengesetzt, die zwei ausgenommen, welche die Punkte $L$ und $M$ nach den Richtungen $LN$ und $MO$ treiben, indem die ihnen entgegengesetzten auf die nicht mehr zum Theil $AM$ des Fadens gehörigen Punkte $N$ und $O$ wirken; und weil die nach $MO$ gerichtete Pressung jeder durch $M$ gelegten Axe begegnet, so reducirt sich in Bezug auf eine solche Axe das Moment aller jener Pressungen auf das Moment der nach $LN$ gerichteten Pressung allein. Wir wollen die Momente dieser Pressung in Bezug auf die drei durch $M$ mit den Axen der $x$, $y$, $z$ parallel gelegten Axen resp. $= p, q, r$ setzen.

Ganz auf dieselbe Weise kommen, wenn $K$ der dem $L$ nächstvorangehende Punkt ist, die Momente aller elastischen Kräfte von $A$ bis $M$ auf die Momente der zwei auf $K$ und $L$ nach $KN$ und $LO$ gerichteten Kräfte zurück. Heissen rücksichtlich jener drei Axen die Momente der erstern dieser zwei Kräfte: $f_{\prime}, g_{\prime}, h_{\prime}$, der letztern: $f, g, h$. Alsdann sind, wenn wir noch die Momente der äussern Kräfte von $A$ bis $M$ rücksichtlich derselben drei Axen kurz mit $(X)$, $(Y)$, $(Z)$ bezeichnen, die vorhin gedachten drei Gleichungen:

$$(a)\quad \begin{cases}(X)+p+f_{\prime}+f=0,\\(Y)+q+g_{\prime}+g=0,\\(Z)+r+h_{\prime}+h=0,\end{cases}$$

und es ist nur noch übrig, aus diesen Gleichungen die die Werthe von $p$, $q$, $r$ bestimmende Pressung zu eliminiren. Die zwei Gleichungen, welche dadurch hervorgehen, findet man am leichtesten, wenn man jene drei addirt, nachdem man sie das einemal mit den Cosinussen $\xi_{\prime}$, $\eta_{\prime}$, $\zeta_{\prime}$ der Winkel multiplicirt hat, welche das Element $LM$ mit den Coordinatenaxen macht, und das anderemal mit den Cosinussen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ der Winkel des Elements $MN$ mit denselben drei Axen. Man erhält auf diese Weise:

$$(b)\quad \begin{cases}(X)\xi_{\prime}+(Y)\eta_{\prime}+(Z)\zeta_{\prime}+f_{\prime}\xi_{\prime}+g_{\prime}\eta_{\prime}+h_{\prime}\zeta_{\prime}=0,\\ (X)\xi+(Y)\eta+(Z)\zeta+f\xi+g\eta+h\zeta=0.\end{cases}$$

Denn die Aggregate $p\xi_{\prime}+q\eta_{\prime}+r\zeta_{\prime}$ und $f\xi_{\prime}+g\eta_{\prime}+h\zeta_{\prime}$ sind nach §. 90. die auf $LM$, als Axe, bezogenen Momente der nach $LN$ gerichteten Pressung und der elastischen nach $LO$ gerichteten Kraft, und jedes dieser beiden Momente ist null, weil die Axe $LM$ den Richtungen der Pressung und der elastischen Kraft, in $L$, begegnet; und eben so erhellet, dass auch $p\xi+q\eta+r\zeta$ und $f_{\prime}\xi+g_{\prime}\eta+h_{\prime}\zeta$, als die Momente der Pressung nach $LN$ und der elastischen nach $KN$ gerichteten Kraft, in Bezug auf $MN$, als Axe, null sind.

Von den zwei Gleichungen ($b$) selbst drückt die erste aus, dass das Moment aller auf den Faden von $A$ bis $L$ (oder $M$) wirkenden Kräfte rücksichtlich des Elements $LM$, als Axe, null ist, und die zweite, dass das Moment aller Kräfte von $A$ bis $M$ (oder $N$) rücksichtlich der Axe $MN$ null ist. Beide Gleichungen drücken daher eines und dasselbe, nur in Bezug auf zwei verschiedene Punkte der Curve, aus, und da diese zwei Punkte einander unendlich nahe liegen, so muss sich die eine dieser Gleichungen durch Differentiation der andern ergeben. Durch die Elimination der Pressung aus ($a$) haben wir daher, genau betrachtet, nur Eine Gleichung erhalten; auch war dieses leicht vorauszusehen, da von den drei Gleichungen ($a$), nachdem sie differentiirt worden, eine jede eine Folge der beiden andern ist.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, in einer der beiden Gleichungen ($b$), wozu wir die zweite wählen, für die darin vorkommenden Momente ihre uns schon bekannten Werthe zu substituiren. Es ist nämlich

$(X) = \int dz \int Y ds - \int dy \int Z ds$, $(Y) =$ etc. (§. 281. $b$.)

Ferner ist $f\xi + g\eta + h\zeta =$ dem Momente $v$ der elastischen nach $LO$ gerichteten Kraft in Bezug auf eine nach $MN$ gerichtete Axe,

$$= \vartheta \,.\, 6LMNO : 4LMN^2 \text{ (vor. §.).}$$

Aus der analytischen Geometrie weiss man aber, dass

$$6LMNO = (dyd^2z - dzd^2y)\, d^3x + (dzd^2x - dxd^2z)d^3y \\ + (dxd^2y - dyd^2x)d^3z \;^{*)}$$

und $4LMN^2 = 4(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)^2$ (§. 324.)

$$= (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2.$$

Endlich ist $\xi = dx : ds$, etc. und es wird daher, wenn man noch der Einfacheit willen $dx$ constant annimmt, die gesuchte Gleichung fürs Gleichgewicht:

$$dx \int (dz \int Y ds - dy \int Z ds) + dy \int (dx \int Z ds - dz \int X ds) \\ + dz \int (dy \int X ds - dx \int Y ds) \\ = \vartheta ds \frac{dx(d^2zd^3y - d^2yd^3z)}{(dzd^2y - dyd^2z)^2 + dx^2(d^2y^2 + d^2z^2)}.$$

Mit dieser Gleichung ist aber noch die Bedingung

*) Auch kann dieser Ausdruck leicht aus dem in §. 64. durch die Coordinaten ihrer Ecken ausgedrückten Werthe einer Pyramide hergeleitet werden.

zu verbinden, dass die Curve von doppelter Krümmung, zu welcher die ebene Curve gedreht worden, in jedem ihrer Punkte denselben Krümmungshalbmesser $r$ hat, als die ebene Curve in dem entsprechenden Punkte; d. h. man hat zu der letztern Gleichung noch die zwischen $r$ und $s$ bei der ebenen Curve statt findende Gleichung, als eine auch bei der doppelt gekrümmten geltende, hinzuzufügen. Zu dem Ende bestimme man, wenn $y=f(x)$ die Gleichung der ebenen Curve ist, aus dieser Gleichung das Verhältniss $ds:dx$ und $r$, als Functionen von $x$. Hiermit findet sich auch das Verhältniss $\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{dx}:\frac{ds}{dx}$, als Function von $x$. Man eliminire hierauf $x$ aus den Werthen von $r$ und $dr:ds$, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen $r$ und $dr:ds$, in welcher nur noch für $ds$, $r$ und $dr$ ihre allgemeinen Werthe, durch die ersten, zweiten und dritten Differentiale von $x, y, z$ ausgedrückt, zu substituiren sind.

Ist z. B. die gegebene Curve ein Kreis, dessen Halbmesser $=a$, so hat man die Bedingungsgleichung

$$a=\frac{ds^3}{\sqrt{[(dzd^2y-dyd^2z)^2+\ldots]}}.$$

Durch diese zweite Gleichung, in Verbindung mit der vorhin entwickelten Momentengleichung, ist aber, sobald noch $X$, $Y$, $Z$ gegebene Functionen von $x,y,z$ sind, die Beschaffenheit der Curve bestimmt.

## §. 332.

**Zusätze.** *a.* Die Herleitung der zwei endlichen Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$ aus den zwei Differentialgleichungen des vor. §. erfordert 12 Integrationen und führt damit 12 willkührliche Constanten herbei. Denn zuerst hat man die 3 Integrale $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$ mit 3 willkührlichen Constanten. Hierzu kommen durch Integration der 3 Ausdrücke: $dz\int Y ds - dy\int Z ds$, etc. 3 neue Constanten; und da von den Integralen dieser Ausdrücke, nachdem sie resp. mit $dx$, $dy$, $dz$ multiplicirt worden, die Summe einem Ausdrucke gleich zu setzen ist, welcher Differentiale der 1sten bis 3ten Ordnung enthält, so kommen bei vollständiger Integration dieser ersten Differentialgleichung noch 3 neue Constanten hinzu. Diese 9 Constanten werden aber durch Integration der zweiten Gleichung, welche von der 3ten Ordnung im Allgemeinen ist, (nur für den Kreis von der 2ten) noch um 3 vermehrt, so dass die Anzahl sämmtlicher Constanten auf 12 steigt.

Sind demnach eine ebene Curve, zwei Punkte $A'$ und $B'$ in derselben und die Oerter $A$ nnd $B$ gegeben, welche diese Punkte im Raume einnehmen, nachdem die Curve unter dem Einflusse äusserer Kräfte und ihrer eigenen mit der zweiten Krümmung verbundenen Elasticität eine zweite Krümmung erhalten hat, sind ferner in diesen zwei Oertern noch die Tangenten und die Krümmungsebenen der doppelt gekrümmten Curve gegeben, so ist damit letztere Curve selbst vollkommen bestimmt. — Denn eben so gross, als die Zahl (zwölf) der willkührlichen Constanten, ist auch die Zahl der Gleichungen, welche zwischen den Constanten in den zwei Gleichungen der Curve erfüllt seyn müssen, wenn diese die eben aufgestellten Bedingungen erfüllen soll.

In der That giebt die Bedingung, dass die Curve durch den Punkt $A$ gehen soll, 2 Gleichungen, die bestimmte Richtung ihrer Tangente in $A$ führt zu einer

3ten und 4ten Gleichung (§. 325. *a.*), die bestimmte Lage der diese Tangente enthaltenden Krümmungsebene zu einer 5ten Gleichung, und die Bedingung, dass der Punkt $A$ der doppelt gekrümmten Curve ursprünglich der Punkt $A'$ der ebenen Curve gewesen, dass also erstere Curve in $A$ und letztere in $A'$ einander gleiche Krümmungshalbmesser haben, leitet zu einer 6ten Gleichung. Auf gleiche Art ergeben sich auch für den Punkt $B$ und für die Tangente, die Krümmungsebene und den Krümmungshalbmesser daselbst 6 Gleichungen. Man hat daher in Allem 12 Gleichungen zwischen den 12 Constanten und kann damit letztere vollkommen bestimmen.

Statt der einen der zwei Gleichungen für die Krümmungshalbmesser in $A$ und $B$ kann auch die Gleichung gesetzt werden, welche ausdrückt, dass die Länge der doppelt gekrümmten Curve von $A$ bis $B$ eben so gross, als die der ursprünglichen, einfach gekrümmten von $A'$ bis $B'$ ist.

In dem besondern Falle, wenn die ursprüngliche Curve ein Kreis ist, hat man von diesen zwei Gleichungen für den einen Krümmungshalbmesser und die Länge von $A$ bis $B$ nur die letztere beizubehalten, da der alsdann constante Krümmungshalbmesser in der zweiten Differentialgleichung selbst mit vorkömmt. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen reducirt sich daher in diesem Falle auf 11. Von der andern Seite ist dann, wie gehörig, auch die Zahl der durch Integration entstehenden Constanten um Eins geringer, als im allgemeinen Falle, da beim Kreise die zweite Differentiälgleichung sich nur bis zur zweiten Ordnung erhebt.

*b.* Wird die Curve in einem Punkte $M$ unterbrochen, und soll nichtsdestoweniger das Gleichgewicht fortdauern, so genügt es hier nicht, wie in §. 318. *c.* und §. 325. *b.*, bloss das letzte Element *LM* fest zu machen, sondern es müssen, um die zwei durch die Unterbrechung in *M* verloren gehenden, nach *KN* und *LO* gerichteten, elastischen Kräfte zu ersetzen, die zwei letzten Elemente *KL* und *LM*, oder, was dasselbe ist, die letzte Tangente und die letzte Krümmungsebene, unbeweglich gemacht werden.

## §. 333.

Ziehen wir zum Schlusse noch den einfachsten Fall in Betracht, wenn $X$, $Y$, $Z$ null sind, und daher nur durch Kräfte, welche am Anfang und Ende des Fadens angebracht sind, die zweite Krümmung desselben erzeugt wird. Die Kräfte am Anfange, d. h. die endlichen Kräfte, welche auf Punkte wirken, die mit den beiden ersten Elementen in unveränderlicher Verbindung stehen, seyen, wie in §. 326., auf eine einfache Kraft $A$ und ein Paar reducirt, dessen Moment $= m$, und dessen Ebene auf $A$ normal stehe; auch werde, wie dort, die Richtung von $A$ zur Axe der $x$ genommen. Die Momente dieser Kräfte in Bezug auf drei Axen, die man durch den Punkt $(x, y, z)$ parallel mit den Axen der $x$, $y$, $z$ gelegt hat, sind alsdann:

$$(X) = m,\ (Y) = -Az,\ (Z) = Ay,$$

und die erste Differentialgleichung der Curve wird damit:

$$mdx + A(ydz - zdy) = -vds = -\vartheta d\chi.$$

Wir ersehen hieraus unter andern, *dass, wenn auf den Anfang des Fadens bloss ein Kräftepaar wirkt, die zweite Krümmung*, $= d\chi : ds$, *in jedem Punkte proportional* mit $dx : ds$, d. i. mit dem Cosinus des

Winkels ist, den die Tangente der Curve mit der Axe der $x$ macht, also *mit dem Sinus des Winkels, den die Tangente mit der Ebene des Paares macht*, dass folglich an den Stellen der Curve, wo ihre Tangente mit der Ebene des Paares parallel läuft, die zweite Krümmung verschwindet, und an den Stellen am grössten ist, wo die Tangente auf der Ebene des Paares normal steht.

Zusatz. Ist die Gestalt des Fadens, auf welchen nur am Anfang und Ende Kräfte wirken, ursprünglich kreisförmig, so kann seine nachherige Gestalt auch die einer cylindrischen Spirale seyn, deren Axe, wenn die Kräfte am Anfange, wie vorhin, auf eine einfache Kraft $A$ und ein auf der Richtung von $A$ normales Paar reducirt worden, mit der Richtung von $A$ zusammenfällt. Denn erstens hat diese Spirale eben so, wie ein Kreis, einen constanten Krümmungshalbmesser, der hier dem des ursprünglichen Kreises gleich seyn muss; und zweitens wird auch der Momentengleichung durch die Gleichungen einer cylindrischen Spirale, deren Axe die Axe der $x$ ist, Genüge geleistet. Diese Gleichungen sind nämlich (§. 327.), wenn $a$ den Halbmesser des Cylinders der Spirale und $b$ die Weite ihrer Gänge bedeutet, und wenn man der Kürze willen $2\pi : b = h$ setzt:

$$y = a\cos hx,\quad z = a\sin hx.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt unter der Annahme, dass $dx$ constant ist:

$$\begin{aligned} dy &= -hz\,dx, & dz &= +hy\,dx,\\ d^2y &= -h^2y\,dx^2, & d^2z &= -h^2z\,dx^2,\\ d^3y &= +h^3z\,dx^3, & d^3z &= -h^3y\,dx^3; \end{aligned}$$

folglich $ds^2 = (1 + h^2a^2)\,dx^2$, und wenn man

$$ydz - zdy = t,\ dyd^2z - dzd^2y = t',$$
$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = t'' \text{ und } d^2y^2 + d^2z^2 = u \text{ setzt:}$$
$$t = ha^2dx,\ t' = h^3a^2dx^3,\ t'' = h^5a^2dx^5,\ u = h^4a^2dx^4.$$

Die Momentengleichung aber, welche sich mit den jetzt angenommenen Zeichen also schreiben lässt:

$$mdx + At = -\vartheta ds \frac{t''dx}{t'^2 + udx^2},$$

wird dadurch $m + Aha^2 = -\dfrac{\vartheta h}{\sqrt{1+h^2a^2}} = -\dfrac{2\pi\vartheta}{l}$,

wo $l$ die Länge eines Ganges der Spirale ausdrückt (§. 327.). Diese Gleichung enthält nun bloss Constanten und giebt eben damit zu erkennen, dass unter den vorausgesetzten Umständen der Faden die Spiralform annehmen kann. Hiernach sind wir berechtigt zu schliessen:

*Wird, wie dies immer möglich ist, ein elastisch drehbarer und ursprünglich kreisförmiger Faden in die Gestalt einer cylindrischen Spirale gebracht, und werden die zwei ersten, so wie die zwei letzten Elemente des Fadens in der dadurch erhaltenen Lage unbeweglich gemacht, so wird der dazwischen begriffene Faden von selbst in der Spiralform verharren.*

Noch kann man bemerken, dass der Krümmungshalbmesser der Spirale, also auch der Halbmesser des ursprünglichen Kreises,

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(t'^2 + udx^2)}} = \frac{1+h^2a^2}{h^2a} = \frac{l^2}{4\pi^2a} \text{ ist.}$$

## Druckfehler und Verbesserungen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Seite 31 | Zeile | 1 v. o. | lies: die ihn treffende. |
| — 32 | — | 6 v. u. | vor *nach* setze ein Komma. |
| — 45 | — | 3 v. o. | lies: und hiernach |
| — 59 | — | 8 v. u. | lies: $AF$, $A'F'$, $A''F''$, ... |
| — 101 | — | 12 v. u. | lies: unbekannten Richtungen |
| — 139 | — | 4 v. u. | An das Ende der Zeile setze ein Komma. |
| — 159 | — | 8 v. u. | vertilge: auch |
| — 185 | — | 9 v. u. | lies: wo |
| — 212 | — | 5 v. o. | vertilge: $+ (1 : h)$. |
| — 221 | — | 9 u. 10 v. o. | statt: geben, lies: getrieben. |
| — 230 | — | 5 v. u. | statt: $\int Y'dt$ lies: $\int X'dt$. |
| — 249 | — | 1 v. o. | lies: eine positive constante Gröss ist. |
| — 284 | — | 7 u. 6 v. u. | lies: auf den Faden keine äussern Kräfte |

Druck von J. B. Hirschfeld.

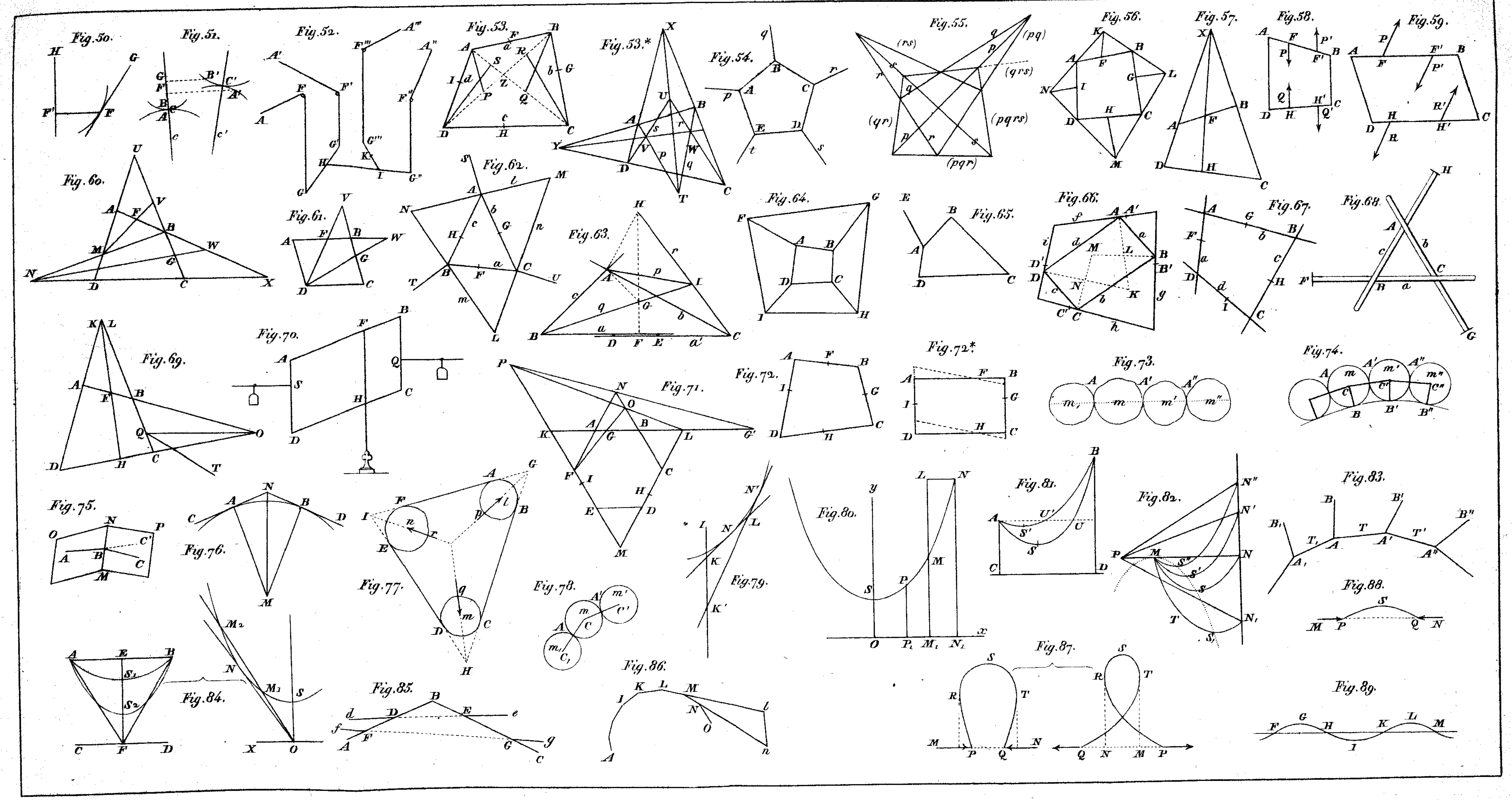
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 53.*
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 72.*
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.