Neue Theorie

der

Drehung der Körper

von

Poinsot.

Uebersetzt

von

K. H. Schellbach,
Professor der Mathematik und Physik.

Mit Holzschnitten.

Berlin, 1851.

Druck und Verlag von A. W. Hayn.

Vorwort.

Ich wünsche durch die Herausgabe dieser Schrift einer der wichtigsten Arbeiten Poinsot's in Deutschland eine größere Verbreitung zu verschaffen und erwarte dafür den Dank derer, welche an den Fortschritten der Mathematik, Physik, Mechanik und Astronomie einen wirklichen Antheil nehmen, ja ich glaube mit meiner Bemühung sogar allen Freunden klarer Speculationen einen wesentlichen Dienst erwiesen zu haben. Die Untersuchungen Poinsot's erscheinen hier zwar nicht immer in wörtlicher Uebersetzung, aber doch nur in so weit verkürzt, daß von dem zur Sache Gehörigen auch nicht das Mindeste fehlt.

Der Gewinn aus dem Verkaufe dieser Schrift ist zu Zwecken des Gymnasiums bestimmt.

Professor **Schellbach**,

Lehrer der Mathematik und Physik am Königlichen
Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Berlin.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung der Körper.

§. 1.

Begriff der einfachen Drehung und der Winkel-Geschwindigkeit.

1) Die einzige drehende Bewegung, von der wir eine klare Vorstellung haben, ist die eines Körpers, welcher sich um eine unbewegliche Axe dreht, deren Richtung also sowohl im Körper als im Raume ungeändert bleibt; denn man kann fast mit dem Auge alle die verschiedenen Kreise verfolgen, welche die Punkte des Körpers in Ebenen beschreiben, auf denen diese Axe senkrecht steht. Auch ist einleuchtend, daß alle diese gleichzeitigen Bewegungen möglich sind, nämlich alle zugleich ausgeführt werden können ohne Störung ihrer gegenseitigen Lage, also ohne Aenderung der Gestalt des Körpers.

2) Auch die Größe oder das Maaß dieser Drehung läßt sich mit völliger Klarheit auffassen; denn da alle Punkte Kreisbogen beschreiben, die ihren Halbmessern proportional sind, so ist das Verhältniß der Geschwindigkeit eines Punktes zum Halbmesser des Kreises, den er beschreibt, für alle Punkte des Körpers dasselbe, und eben dieses unveränderliche Verhältniß oder die Winkel-Geschwindigkeit ist das Maaß der Drehung. Diese Winkel-Geschwindigkeit ist nichts anderes als die absolute Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers in der Entfernung Eins von der Drehungsaxe. Nennt man also Θ diese Geschwindigkeit, so ist Θr die absolute Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r von dieser Axe.

§. 2.

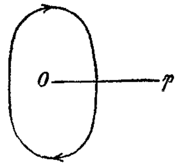
Zusammensetzung der Drehungen.

3) Die Theorie der Kräftepaare, die an einer homogenen Kugel wirken, lehrt, daß mehrere Drehungen, welche ein Körper um verschiedene durch einen Punkt gehende Axen in

Folge irgend welcher Ursachen zu machen strebt, sich ebenso wie einfache an diesem Punkte wirkende Kräfte zusammensetzen lassen.

4) Wir beschäftigen uns indessen hier nur mit der Bewegung an sich selbst, d. h. abgesehen von den Kräften welche sie erzeugen und von der Natur der Körper auf die sie wirken, daher muß hier Alles durch bloße geometrische Betrachtungen bewiesen werden.

Fig. 1.

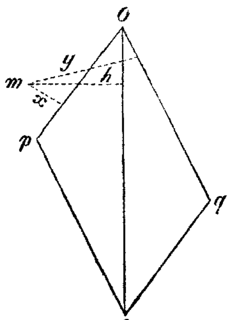


Im Folgenden stelle eine Linie $Op = p$ stets die A x e und die G r ö ß e einer Drehung p vor und zu gleicher Zeit auch den Sinn derselben, indem ein Auge in p die Drehung der Ebene des Fußpunkts O von der Linken zur Rechten erfolgen sieht.

§. 3.

Parallelogramm der Drehungen.

Fig. 2.



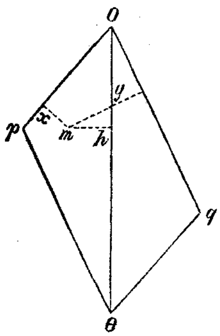
5) Wenn ein Körper zu gleicher Zeit zwei Drehungen p und q zu machen strebt, welche die Seiten Op und Oq eines Parallelogramms $Op\Theta q$ darstellen, so nimmt er eine Drehung Θ an, die durch die Diagonale $O\Theta$ dieses Parallelogramms versinnlicht wird.

Sind nämlich x, y, h die Entfernungen eines Punktes m in der Ebene des Parallelogramms von den Seiten und der Diagonale desselben, so lehrt eine einfache geometrische Betrachtung, daß stets

$$px + qy = \Theta h$$

ist. Nun erhält aber in Folge der Drehung p der Punkt m die Geschwindigkeit px und in Folge der Drehung q die Geschwindigkeit qy; die Richtungen dieser Geschwindigkeiten sind aber beide senkrecht auf der Ebene des Parallelogramms, daher nimmt er durch beide Anregungen zur Drehung die Geschwindigkeit $px + qy$ an, die er also auch erhalten würde, wenn er sich um die Diagonale mit der Winkelgeschwindigkeit Θ drehte.

Fig. 3.

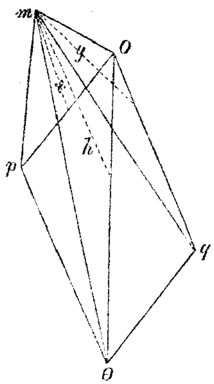


Liegt der Punkt m, wie in Fig. 3., so wird x negativ, also

$$qy - px = \Theta h.$$

In der That erhebt sich auch jetzt der Punkt m mit der Geschwindigkeit qy über die Ebene der Figur und senkt sich mit der Geschwindigkeit px, daher steigt er nur noch mit der Geschwindigkeit $qy - px$ empor, welche ebenfalls der Geschwindigkeit eines Punktes m gleich ist, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit Θ um die Diagonale des Parallelogramms dreht. Dieser Betrachtung läßt sich jeder Punkt der Ebene unterwerfen und die Bewegung der Ebene zieht die des ganzen Körpers nach sich.

Fig. 4.



6) Liegt der Punkt m des rotirenden Körpers nicht mehr in der Ebene der Figur und sind x, y, h die drei Entfernungen desselben von den Seiten und der Diagonale des Parallelogramms $Op\Theta q$, so sind px, qy, Θh die drei Geschwindigkeiten, welche die drei Drehungen p, q, Θ dem Punkte m ertheilen. Aber diese Geschwindigkeiten liegen nicht mehr in ein und derselben Ebene, sondern stehen senkrecht auf den Ebenen der Dreiecke pmO, qmO, ΘmO und sind diesen Dreiecken proportional; zugleich muß aber Θh die Resultante von px und qy sein. Errichtet man also in m auf den Ebenen der erwähnten Dreiecke die Lothe px, qy, Θh, so bilden diese zwei Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms, so daß man also, wenn die Größe der beiden Dreiecke pmO und qmO gegeben ist, den Inhalt des Dreiecks ΘmO auf dieselbe Weise finden kann, wie man die Resultante zweier Kräfte aus ihrer Größe und Richtung erhält.

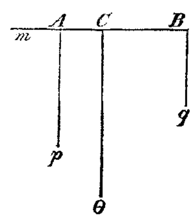
7) Es ist hierin ein hübscher geometrischer Satz ausgesprochen, den man auch leicht rein geometrisch beweisen kann; denn denkt man sich die drei Dreiecke pmO, qmO, ΘmO von einer Ebene durchschnitten, welche auf der Kante $m\Theta$ senkrecht steht und projicirt das Parallelogramm $Opq\Theta$ auf diese Ebene, so ist die Projection wieder ein Parallelogramm, dessen Seiten und Diagonale die Höhen der erwähnten Dreiecke darstellen, von denen mO die gemeinsame Basis ist. Diese Höhen verhalten sich daher wie die Flächeninhalte der Dreiecke und sind zugleich unter Winkeln gegen einander geneigt, welche die Neigungswinkel der Ebenen der Dreiecke darstellen.

8) Durch Zusammensetzung je zweier Drehungen vermittelst des Parallelogramms der Drehungen können beliebig viele, deren Axen durch einen festen Punkt gehen, in eine einzige zusammengesetzt werden.

§. 4.

Zusammensetzung zweier Drehungen, die um zwei parallele Axen stattfinden.

Fig. 5.



9) Um die Parallelen Ap und Bq mögen die beiden Drehungen p und q in demselben Sinne stattfinden. Steht ein Punkt m des Körpers, in der Ebene der Axen, von ihnen um die Strecken $mA = x$ und $mB = y$ ab, dann erhebt er sich mit der Geschwindigkeit $px + qy$. Diese Geschwindigkeit kann man sich auch dadurch hervorgebracht denken, daß der Punkt m mit der Winkelgeschwindigkeit $p + q$ um eine Axe $C\Theta$ rotirt, die in der Entfernung $mC = h$ parallel mit Ap und Bq liegt. Es muß dann sein

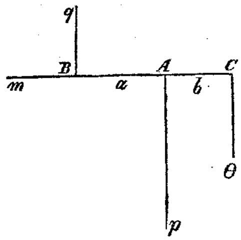
$$px + qy = (p + q)h$$

wonach also $p(h - x) = q(y - h)$ oder $p \cdot AC = q \cdot BC$ ist.

1*

Durch diese Gleichung wird die Lage der neuen Axe, ganz dem Gesetze des Hebels gemäß, bestimmt.

Fig. 6.



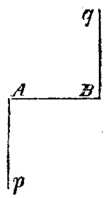
10) Finden die Drehungen p und q im entgegengesetzten Sinne statt, so erhebt sich der Punkt m mit der Geschwindigkeit $px - qy$ über die Ebene der Axen. Ist nun wieder $\Theta = p - q$ und $mC = h$, so kann man setzen $px - qy = (p - q)h$ oder $p(h - x) = q(h - y)$.

Aber, für $AB = a$ und $AC = b$, wird $pb = q(a + b)$ oder

$$b = \frac{aq}{p - q}$$

Man kann so die Entfernung der Axe $C\Theta$ von Ap angeben, um welche die Drehung des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit $p - q$ erfolgt, wenn er zu zwei entgegengesetzten Drehungen um zwei parallele Axen angeregt worden ist.

Fig. 7.

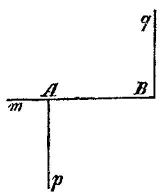


11) Wenn $p = q$ ist, so fällt die resultirende Drehungsaxe des Körpers, um welchen er sich mit der Geschwindigkeit Null dreht, ins Unendliche und die hier gelehrte Construction verliert ihre Bedeutung.

§. 5.

Von den Drehungs-Paaren.

Fig. 8.



12) Zwei gleiche und entgegengesetzte Drehungen p und $-p$ um parallele Axen, bilden ein **Drehungspaar**. Ein solches Drehungspaar kann nicht auf eine einfache Drehung um eine einzige Axe zurückgeführt werden. **Die Bewegung, welche aus einer solchen Drehung hervorgeht, ist eine bloße fortschreitende aller Punkte des Körpers nach Linien, die auf der Ebene des Paars senkrecht stehen, mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit, welche durch das Moment des Paars, nämlich durch das Product pa, einer der Drehungen p mit der Entfernung a der beiden Axen, gemessen wird.**

Denn, in der That, irgend ein Punkt m des Körpers in der Ebene des Paars in der Entfernung x von der ersten Axe p, also in der Entfernung $x - a$ von der zweiten $-p$, erhebt sich durch die Drehung p mit der Geschwindigkeit px über diese Ebene und senkt sich durch die Drehung $-p$ mit der Geschwindigkeit $p(x-a)$ unter dieselbe, so daß er sich also mit der Geschwindigkeit $px - p(x-a) = pa$ erhebt. Diese Größe ist von x unabhängig, also haben alle Punkte der Ebene oder des Körpers dieselbe Geschwindigkeit pa, welche senkrecht gegen die Ebene des Paars gerichtet ist.

13) Jedes Drehungspaar kann also in seiner Ebene gedreht und verschoben oder auch in eine andere parallele Ebene verlegt werden, ohne daß sich dadurch die Bewegung des Körpers ändert. Ebenso kann auch das Paar durch ein anderes p' und $-p'$ mit dem Arme a' ersetzt werden, wenn nur das Moment $p'a'$ dem ersten pa gleich ist.

14) Aus dieser Eigenschaft und dem Parallelogramm der Drehungen schließt man leicht, daß sich Drehungspaare in verschiedenen Ebenen durch ein einziges ersetzen und überhaupt ebenso wie die gewöhnlichen Kräftepaare behandeln lassen.

15) Die Wirkung eines Drehungspaars kann offenbar durch eine einfache Kraft ersetzt werden, die im Schwerpunkt des Körpers senkrecht gegen die Ebene des Paars wirkt, wenn sie nur dem Producte der ganzen Masse des Körpers in das Moment des Paars gleich ist. Indessen soll in dieser ganzen Theorie der Drehungen die Mechanik nicht benutzt, sondern Alles aus der Geometrie geschöpft werden.

§. 6.

Allgemeine Zusammensetzung der Drehungen, die um beliebige im Raume vertheilte Axen stattfinden.

16) Es finde zunächst eine einfache Drehung p um die Axe Ap statt, welche durch den Punkt A des Körpers geht. Wenn man an irgend einem anderen Orte O zwei entgegengesetzte Drehungen p' und $-p'$ anbringt, welche der ersten p parallel und gleich sind, so wird dadurch die Bewegung des Körpers nicht geändert. Man hat dann aber erstens statt der einfachen Drehung p eine ihr gleiche und gleichgerichtete Drehung p' deren Axe durch O geht und zweitens ein Drehungspaar $(p, -p')$. Man kann daher eine Drehung, parallel mit sich selbst, in irgend einen Punkt des Raumes verlegen, wenn man nur noch das Drehungspaar berücksichtigt, welches durch diese Verlegung entsteht und dessen Maaß oder Moment erhalten wird, wenn man die gegebene Drehung mit dem Wege multiplicirt, welchen ihre Axe durchlaufen hat.

17) Hat man nun beliebig viele Drehungen $p, q, r, \ldots$ um willkürlich liegende Axen $Ap, Bq, Cr, \ldots$ und man verlegt alle parallel mit sich selbst in irgend einen Punkt O des Raumes, so lassen sie sich dort in eine einzige Θ zusammensetzen, welche man die resultirende Drehung nennen kann; und alle Drehungspaare, welche bei dieser Verlegung entstanden sind, setzen sich zu einem einzigen zusammen $(\varrho, -\varrho)$, welches das resultirende Drehungspaar heißt.

Ebenso wie beliebig viele Kräfte stets auf ein einziges Kräftepaar, und auf eine einzige Kraft, die durch einen gegebenen Punkt geht, zurückgeführt werden können, so lassen sich auch beliebig viele Drehungen um verschiedene willkürlich im Raume liegende Axen stets auf ein einziges Drehungspaar und auf eine einzige Drehung, deren Axe durch einen beliebig gewählten Punkt geht, zurückführen.

Die resultirende Drehung Θ wird stets ungeändert bleiben, wo man auch den Punkt O annehmen mag, und sie verschiebt sich nur parallel mit sich selbst, wenn der Punkt O einen anderen Ort einnimmt, aber das Drehungspaar $(\varrho, -\varrho)$ ändert bei dieser Verschiebung seine Ebene und seine Größe.

18) Man kann den Punkt O stets so wählen, daß die Axe der resultirenden Drehung auf der Ebene des Drehungspaars senkrecht steht. Das resultirende Drehungspaar $(\varrho, -\varrho)$ läßt sich nämlich stets in zwei andere $(\varrho', -\varrho')$ und $(\varrho'', -\varrho'')$ zerlegen, von denen das erste in eine Ebene fällt, die senkrecht auf der Axe $O\Theta$ der resultirenden Drehung steht und das andere in eine Ebene, welche durch diese Axe selbst geht. Wählt man nun einen Punkt O' in dieser Ebene so, daß wenn man in ihm die Drehungen Θ und $-\Theta$ anbringt, das entstehende Drehungspaar $(\Theta, -\Theta)$ das Paar $(\varrho'', -\varrho'')$ vernichtet, so bleibt, außer dem Paare $(\varrho', -\varrho')$, nur noch die Drehung Θ um die Axe $O'\Theta$ übrig, welche auf der Ebene dieses Paares senkrecht steht. Diese Axe kann die Central-Axe der Drehungspaare genannt werden.

Also kann jedes System von Drehungen stets auf eine einzige Drehung um eine bestimmte Axe und auf ein Drehungspaar zurückgeführt werden, dessen Ebene auf dieser Axe senkrecht steht. Dieses Paar ist unter allen die erhalten werden können das kleinste, denn brächte man die Drehungen Θ und $-\Theta$ an einem anderen Punkte O'' an, so erhielte man in O'' eine Drehung Θ und ein Drehungspaar $(\Theta, -\Theta)$, welches auf dem Paare $(\varrho', -\varrho')$ senkrecht stände, also mit diesem in ein einziges aber größeres zusammengesetzt werden könnte.

19—21) Da ein Drehungspaar eine bloße Verschiebung senkrecht gegen seine Ebene hervorbringt, so kann jede Bewegung eines Körpers in Folge von beliebig vielen Drehungen nur einer Drehung um eine gewisse Axe und einer Verschiebung im Sinne dieser Axe gleichgelten.

§. 7.

Vorstellung einer Drehung um einen Punkt.

22) Diese Vorstellung läßt sich auf die einer Drehung um eine bloße Axe zurückführen. Denn betrachtet man zwei Punkte A und B des Körpers, welche mit dem Mittelpunkte O der Drehung das Dreieck OAB bilden, so wird nach Verlauf eines Zeitelements der Punkt A nach A' und B nach B' gekommen sein, also das Dreieck OAB die unendlich wenig von der ersten verschiedene Lage $OA'B'$ einnehmen. In diese Lage kann es aber durch zwei auf einander folgende Drehungen gelangen; nämlich durch eine Drehung p um den gemeinschaftlichen Durchschnitt OS der beiden Dreiecksebenen, wodurch das Dreieck OAB bloß in die Ebene des Dreiecks $OA'B'$ geführt wird, und durch eine Drehung q um die Normale oder Axe OH dieser Ebene, wodurch der Punkt A nach A' also B nach B' gelangt. Aber zwei Drehungen p und q um zwei durch O gehende Axen lassen sich durch eine einzige Θ um eine Axe OJ ersetzen. Also, wie sich auch ein Körper um einen festen Punkt drehen mag, seine Bewegung in irgend einem Zeitelemente wird stets nur eine einfache Drehung um eine, während dieses Zeitelements, im Körper und im

Raume feste Axe sein, die durch den festen Punkt geht. Man kann sich nun vorstellen, daß in den folgenden Zeitelementen die Drehungen um andere Axen geschehen, ähnlich wie sich die Bewegung eines Punktes in einer krummen Linie als ein Durchlaufen der unendlich kleinen Seiten eines Polygons auffassen läßt, dessen Grenze die krumme Linie ist. Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

23) Die Bewegung eines Körpers, welcher sich um einen festen Punkt dreht, ist die Bewegung dieses Körpers um eine durch diesen Punkt gehende Axe, deren Richtung sich jeden Augenblick ändert und die daher die **augenblickliche Drehungsaxe** genannt wird.

Diese augenblickliche Drehungsaxe verhält sich ähnlich wie die Tangente einer Curve, welche ein Punkt durchläuft.

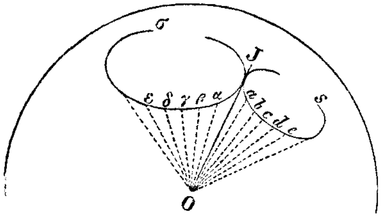
24) Diese augenblickliche Drehungsaxe ändert ihre Lage stets im Körper und im Raume zugleich. Der Winkel, den sie während eines Zeitelements im Raume beschreibt und der ihre absolute Bewegung ausmacht, ist derselbe, den sie im Innern des Körpers beschreibt und der ihre relative Bewegung ist.

Dreht sich also ein Körper um eine in ihm selbst feste Axe, deren Lage sich aber im Raume ändert, so ist diese nicht die augenblickliche Drehungsaxe, um welche die Bewegung wirklich vor sich geht, denn die augenblickliche Drehungsaxe kann nicht unbeweglich im Körper bleiben, ohne zugleich unbeweglich im Raume zu verharren.

§. 8.

Anschauliches Bild dieser Drehung.

Fig. 9.



25) Die augenblickliche Drehungsaxe kann offenbar im Raume nur eine gewisse Kegelfläche beschreiben, deren Spitze der feste Mittelpunkt der Drehung ist und ebenso wird sie im Körper eine andere Kegelfläche mit derselben Spitze durchlaufen.

Es sei O der Mittelpunkt der Drehung und OJ die augenblickliche Drehungsaxe im gegenwärtigen Zeitelemente. Mit dem beliebigen Halbmesser OJ beschreibe man eine Kugel, welche die beiden Kegelflächen in zwei Curven schneidet, von denen die eine σ fest im Raume und die andere s fest im Körper ist, also beweglich mit ihm im Raume.

Man theile die Zeit t in gleiche unendlich kleine Theile dt oder Zeitelemente, welche auch Augenblicke heißen mögen; und auf der festen Curve σ bezeichne man die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zu denen der Pol J der augenblicklichen Drehungsaxe in den auf einander folgenden Augenblicken gelangt. Verbindet man diese Punkte durch Bogen größter Kreise, so entsteht ein sphärisches Polygon $J\alpha\beta\gamma\ldots$ von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Construirt man nun auf der Curve s, welche die Basis des beweglichen Kegels bildet, die

Bogen größter Kreise Ja, ab, bc, ... welche den ersteren entsprechend gleich sind, so ist klar, daß der Körper, welcher sich im ersten Augenblicke um OJ dreht, den Punkt a des Körpers auf den Punkt α des Raumes führt, im zweiten, wo die Drehung des Körpers um $O\alpha$ geschieht, gelangt der Punkt b des Körpers zum Punkte β des Raumes u. s. w., so daß die Elemente der Curve s sich allmälig an die gleichen Elemente der Curve σ anlegen, also der bewegliche Kegel, ohne zu gleiten, auf dem festen hinrollt.

26) Denkt man sich also den beweglichen Kegel im Körper befestigt, so daß er ihn, wenn er auf dem festen Kegel rollt, mit sich führt, so ist die Berührungslinie beider Kegel die augenblickliche Drehungsaxe und also zugleich beweglich im Körper und im Raume, indem sie im Raume den Mantel des festen Kegels beschreibt und im Körper den Mantel des beweglichen. Man wird nun deutlich die Wahrheit des Satzes einsehen, daß wie sich auch ein Körper um einen festen Punkt drehen mag, diese Bewegung immer nur die eines Kegels ist, dessen Spitze in dem festen Punkte liegt und der ohne zu gleiten, auf einem anderen festen Kegel, mit derselben Spitze, hinrollt.

27) Wäre die Drehung eines Körpers um einen Punkt O discontinuirlich, d. h. änderte die augenblickliche Drehungsaxe ihre Lage plötzlich um einen endlichen Winkel, statt daß sie, wie gewöhnlich, nur unendlich kleine Aenderungen erfährt, so ließe sich die ganze Bewegung des Körpers statt durch zwei Kegel mit Hülfe zweier Pyramiden, deren Spitzen in O liegen, vollständig nachahmen, indem nämlich die bewegliche ihre Seitenflächen auf die entsprechend gleichen Seitenflächen der festen auflegt und sich dabei stets um eine beiden gemeinschaftliche Kante herumdreht.

28—29) Da sich die augenblickliche Drehungsaxe selbst nicht bewegt, sondern immer nur im nächsten Augenblicke eine andere Linie Drehungsaxe wird, so ist es nur ein bildlicher Ausdruck, wenn man vorher von der durch die Drehungsaxe beschriebenen Kegelfläche sprach, statt sie die Fläche zu nennen, welche durch die stetige Folge aller der Linien gebildet wird, um deren jede einmal die Drehung stattfindet.

Mit gleichem Rechte kann man auch den Winkel $d\varphi$ zwischen zwei auf einander folgenden Erzeugungslinien dieser Fläche, als in dem Augenblicke dt durch die augenblickliche Drehungsaxe beschrieben ansehen, und also den Bruch $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit nennen, mit der diese Axe zu gleicher Zeit die beiden erwähnten Kegelflächen beschreibt. Eben so ist $\frac{ds}{dt}$, oder das ihm gleiche $\frac{d\sigma}{dt}$, die Geschwindigkeit, mit der sich der augenblickliche Pol J in den beiden Curven bewegt.

§. 9.

Von den verschiedenen Größen, welche man naturgemäß beim Studium der Bewegung eines Körpers um einen Punkt zu beobachten hat und von der wechselseitigen Abhängigkeit dieser Größen von einander.

30) Wenn die beiden Curven s und σ mit der Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung um die augenblickliche Drehungsaxe OJ gegeben sind, so ist die Bewegung des Körpers völlig bestimmt.

Wenn außer der Winkelgeschwindigkeit Θ eine einzige dieser beiden Curven und die Geschwindigkeit des beschreibenden Pols gegeben ist, so ist schon die andere Curve nothwendiger Weise mit bestimmt. Denn es sei z. B. die Curve σ mit der Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$ des sie beschreibenden Pols J und die Winkelgeschwindigkeit Θ gegeben, so ist im Körper bereits der Punkt bestimmt, der nach Verlauf des Zeitelements dt während dessen sich der Körper um OJ dreht, auf die feste Curve σ fallen muß, um seiner Seits der neue Pol der Drehung zu werden. Ebenso sind dann auch schon die Punkte im Körper bestimmt, die in den folgenden Zeitelementen Drehungspole werden; daher bleibt über die Gestalt und Lage der Curve s keine Unsicherheit mehr.

Ebenso bestimmen die bewegliche Curve s, $\frac{ds}{dt}$ und Θ die im Raume feste Curve σ.

Fig. 10.

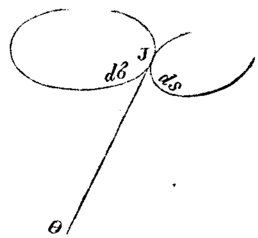
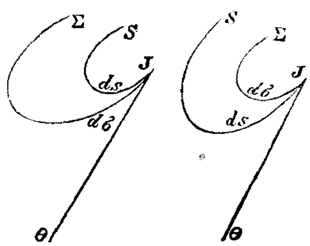


Fig. 11.



31) Außer der Winkelgeschwindigkeit Θ des Körpers um die augenblickliche Drehungsaxe OJ unterscheiden wir noch die Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher diese Axe die beiden Kegelflächen S und Σ gleichzeitig im Innern des Körpers und im Raume beschreibt; die Krümmungshalbmesser r und ϱ dieser beiden Flächen; die Winkelgeschwindigkeiten p und π des Pols um die Axe OP des die bewegliche Fläche S osculirenden Kegels und um die Axe $O\Pi$ des Kegels, der die feste Fläche osculirt; u. s. w. Wenn von diesen verschiedenen Größen irgend drei gegeben sind, so ist die Bewegung des Körpers bestimmt.

Man nehme auf der augenblicklichen Drehungsaxe stets $OJ = 1$ und betrachte die beiden Curven s und σ, welche der Pol J beschreibt, als sphärische Polygone von unendlich kleinen Seiten. Während des Augenblicks dt, wo der Pol J unbeweglich bleibt, beschreibt die Seite ds des beweglichen Polygons s, um sich an die ihr gleiche Seite $d\sigma$ des festen Polygons σ anlegen zu können, einen Winkel, der die Summe der Außenwinkel de und $d\varepsilon$ des beweglichen und festen Polygons ist, wenn die Polygone s und σ wie in Fig. 10. nach entgegengesetzten Seiten gekrümmt sind, dagegen die Differenz dieser Winkel, wenn, wie in Fig. 11., ihre Krümmungen nach ein und derselben Seite hin liegen. Dieser Satz wird durch die Formel ausgedrückt

$$\Theta = \frac{de \pm d\varepsilon}{dt}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Curven s und σ im Berührungspunkte J nach entgegengesetzten oder gleichen Seiten gekrümmt sind.

Aber der Winkel de des Polygons s ist der Winkel, den die Verlängerung einer Seite der Pyramide, deren Spitze O und Basis das Polygon s ist, mit der folgenden Seite bildet, und dieser Winkel, welcher dem gleich ist, den die beiden Lothe auf den erwähnten Seiten mit einander machen, hat den Quotienten $\frac{ds}{r}$ zum Maaß, so daß also

$$de = \frac{ds}{r}$$

und ganz ebenso

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\varrho}$$

folglich

$$\Theta = \frac{ds}{rdt} \pm \frac{d\sigma}{\varrho dt}$$

ist. Aber $\frac{ds}{dt}$ oder $\frac{d\sigma}{dt}$ bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit mit der die augenblickliche Drehungsaxe OJ die beiden Kegelflächen beschreibt; setzt man also

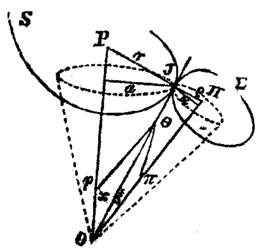
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \omega$$

so wird

$$\Theta = \omega\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\varrho}\right)$$

was ein sehr einfacher Ausdruck für die Geschwindigkeit der Drehung Θ durch die Winkelgeschwindigkeit ω der augenblicklichen Drehungsaxe und die Krümmungshalbmesser r und ϱ der von ihr beschriebenen konischen Flächen ist.

Fig. 12.



32) Construirt man die beiden Krümmungshalbmesser $JP = r$ und $J\Pi = \varrho$, so sind OP und $O\Pi$ die Axen der beiden geraden Kreiskegel, welche die Kegelflächen S und Σ osculiren, und die Lothe a und α von J auf diese beiden Axen sind die Halbmesser der Kreise, welche den beiden geraden Kegeln als Grundfläche dienen. Nach der Figur ist aber

$$r^2 = \frac{a^2}{1 - a^2} \text{ und } \varrho^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

Durch diese Werthe für r und ϱ verwandelt sich der obige Ausdruck für Θ in

$$\Theta = \frac{\omega}{a}\sqrt{1 - a^2} \pm \frac{\omega}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2}$$

Aber ω ist die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehungsaxe auf der Fläche S oder auch auf der osculirenden Kegelfläche, also $\frac{\omega}{a}$ die Winkelgeschwindigkeit der Projection der Axe OJ auf dessen Basis oder die Winkelgeschwindigkeit dieses Pols J um die Axe OP dieses Kegels. Ebenso ist $\frac{\omega}{\alpha}$ die Winkelgeschwindigkeit dieses Pols um die Axe $O\Pi$ des andern Kegels. Diese Winkelgeschwindigkeiten wurden aber oben durch p und π bezeichnet, so daß also

$$\frac{\omega}{a} = p \text{ und } \frac{\omega}{\alpha} = \pi$$

und daher $$\Theta = p\sqrt{1-a^2} \pm \pi\sqrt{1-\alpha^2}$$

Nennt man x den Winkel JOP und ξ den Winkel $JO\Pi$, so ist

$$a = \sin x \text{ und } \alpha = \sin\xi$$

und in dem Falle, den unsere Figur darstellt, ist

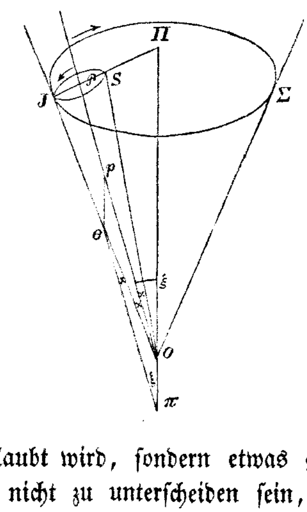
$$\Theta = \frac{\omega \sin(x+\xi)}{\sin x \sin\xi}$$

also $$\omega = \frac{\Theta \sin x \sin\xi}{\sin(x+\xi)} = p \sin x = \pi \sin\xi$$

oder auch $$\frac{p}{\sin\xi} = \frac{\pi}{\sin x} = \frac{\Theta}{\sin(x+\xi)}$$

so daß also p und π die beiden Seiten eines Parallelogramms sind, von dem Θ die Diagonale ist. Die Winkelgeschwindigkeiten des Pols J um die Axen der beiden osculirenden Kegel sind also die Drehungsgeschwindigkeit Θ nach diesen beiden Axen zerlegt.

Fig. 12a.



33) Kennt man drei der erwähnten Größen als Funktionen der Zeit, so kann man die übrigen finden.

Sind diese drei gegebenen Größen constant, so sind es die übrigen auch und die Bewegung des Körpers ist die eines geraden Kreiskegels, welcher auf einem anderen solchen Kegel mit gleichförmiger Geschwindigkeit rollt.

Es stelle z. B. in Fig. 12a. die Linie $O\Pi$ die Axe der Ekliptik dar und OJ die augenblickliche Drehungsaxe der Erde, welche mit der Axe der Ekliptik einen Winkel von ohngefähr $23^\circ 27' 30''$ macht. Dieser Winkel ist nicht derselbe, den die Erdaxe OP mit der Axe der Ekliptik bildet, wie gewöhnlich irriger Weise geglaubt wird, sondern etwas größer als der letztere. Er würde von diesem Winkel nur dann nicht zu unterscheiden sein, wenn die Erdaxe ihre Lage gegen die Ekliptik nicht änderte, aber sie beschreibt in der That in einem Zeitraume von 26000 Jahren eine Kegelfläche, deren Axe die Axe der Ekliptik ist. Die Winkelgeschwindigkeit π dieser Drehung ist also $26000 \cdot 365{,}24$ oder fast $9\frac{1}{2}$ Million mal kleiner als die Winkelgeschwindigkeit Θ mit der die Drehung um die augenblickliche Drehungsaxe OJ innerhalb eines Tages ausgeführt wird, oder es ist

$$\Theta = 9500000\,\pi.$$

Da die Drehung der Erdaxe um die Axe der Ekliptik der täglichen Bewegung entgegengesetzt ist, so erfolgt die Bewegung der Erde so, als ob der Kegel S mit seiner Spitze O in ihrem Mittelpunkte befestigt wäre, während seine Axe OP mit der Erdaxe zusammenfällt und dieser Kegel auf der inneren Fläche des festen Kegels Σ hinrollt.

Aus dem Parallelogramm der Drehungen $Op\Theta\pi$ ergiebt sich nun, wenn $Op=p$, $O\pi=\pi$ und $O\Theta=\Theta$ genommen wird,

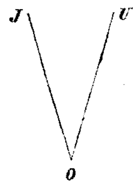
$$\operatorname{tg} x = \frac{\pi \sin \xi}{\Theta + \pi \cos \xi} = \frac{\sin 23^\circ\, 27'\, 30''}{9500000}$$

da $\cos\xi$ gegen 9500000 vernachlässigt werden kann. Hieraus findet man sogleich den Durchmesser der Basis des Kegels S an der Erdoberfläche 1,7 Fuß groß. Man kann also auch sagen: die augenblickliche Drehungsaxe beschreibt täglich um den Erdpol einen Kreis von diesem Durchmesser. Bei dieser Rechnung ist eine gleichförmige tägliche Präcession und Rotation vorausgesetzt worden.

§. 10.

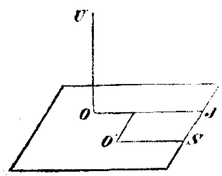
Vorstellung der allgemeinsten Bewegung, welche ein Körper im absoluten Raume haben kann.

Fig. 13.



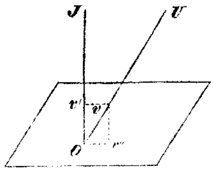
34) Jede Bewegung eines Körpers kann angesehen werden als hervorgebracht 1) durch eine einfache Verschiebung, welche alle Theile mit derselben Geschwindigkeit u nach parallelen Richtungen fortführt; 2) durch eine einfache Drehung Θ um eine gewisse Axe OJ, welche durch den Punkt O geht, dessen Bewegung man beobachtet.

Fig. 14.



Wenn die Richtung OU der Verschiebung u auf der Axe OJ der Drehung Θ senkrecht steht, so kann man die ganze Bewegung auf eine einfache Drehung Θ um eine der OJ parallele Axe $O'S$ zurückführen. Denn legt man durch OJ senkrecht gegen OU eine Ebene und setzt voraus, daß in dieser Ebene und von der Seite der Axe, wo die Geschwindigkeit der Drehung der Punkte des Körpers ihrer Verschiebung entgegengesetzt ist, ein Punkt O' in der Entfernung $x = \dfrac{u}{\Theta}$ von dieser Axe OJ genommen wird; so ist klar, daß dieser Punkt O im Raume eine Geschwindigkeit $x\Theta - u = 0$ hat und daß alle Punkte auf $O'S$ dieselbe Geschwindigkeit haben. Also in dem besonderen Falle, wo OU senkrecht auf der augenblicklichen Drehungsaxe OJ steht, reducirt sich die doppelte Bewegung auf eine einfache Drehung um eine gewisse bestimmte Axe $O'S$, welche man die freiwillige Drehungsaxe nennt.

Fig. 15.



Wenn OU nicht senkrecht auf OJ steht, so zerlege man die Geschwindigkeit v der Verschiebung in eine v, senkrecht auf OJ, und eine v' parallel derselben Axe. Die erste v giebt, in Verbindung mit der Drehung Θ, eine freiwillige Drehung um eine gewisse mit OJ parallele Axe, und die zweite v' verschiebt alle Punkte des Körpers parallel dieser freiwilligen Drehungsaxe.

Also, jede Bewegung eines Körpers läßt sich auf eine Drehung um eine gewisse Axe und eine Verschiebung entlang dieser Axe zurückführen; so daß also die ganze Bewegung des Körpers die einer Schraube ist. Alle seine Punkte beschreiben also auf concentrischen Cylindern kleine Bogen von Schraubenlinien, deren Gänge alle gleiche Höhe haben. Im nächsten Augenblicke wird eine andere Schraube mit einer anderen Axe und einer anderen Höhe des Ganges beschrieben und so fort, woraus man deutlich sieht, wie sich die gleichzeitigen Curven bilden, welche alle Punkte des Körpers durchlaufen.

35) Bisweilen ist die Weite dieser Schraubenwindungen Null und die ganze Bewegung reducirt sich auf eine einfache Drehung um eine gewisse Axe, welche die freiwillige Drehungsaxe ist. Wenn es aber auch nicht immer im Körper eine Linie giebt, deren Punkte sämmtlich für einen Augenblick in Ruhe sind, so läßt sich in ihm doch stets eine Linie auffinden, deren Punkte während eines Augenblicks nur eine Verschiebung in ihr selbst erfahren, und diese Linie könnte man etwa die gleitende freiwillige Drehungsaxe nennen.

36) Wenn also ein Körper sich auf irgend eine Weise um einen festen Punkt dreht, so ist es stets nur die Bewegung eines Kegels der auf einem anderen festen rollt, der mit ihm gleiche Spitze hat. Unter diesen verschiedenen Kegelflächen muß man die Ebene, den Cylinder und die gerade Linie mit einbegriffen denken. Wenn aber ein Körper sich auf irgend eine Weise im Raume bewegt, so ist seine Bewegung in jedem Augenblicke nur eine Schraubenbewegung. Da sich auf diese Bewegung beliebige Drehungen zurückführen lassen (No. 19.), so kann man also durch bloße Drehungen um verschiedene Axen einem Körper die allgemeinste Bewegung ertheilen deren er fähig ist.

Zweites Kapitel.

Kräfte die fähig sind eine gegebene Bewegung hervorzubringen.

37) Eine Kraft ist jede Ursache, welche eine gleichförmige und gradlinige Bewegung einem materiellen Punkte zu ertheilen vermag. Die Richtung und der Sinn der Bewegung dieses Punktes machen die Richtung und den Sinn der Kraft aus. Die Größe dieser Kraft hat das Product der Masse in die mitgetheilte Geschwindigkeit zum Maaß.

38) Welche Bewegung auch ein Körper annehmen mag, immer giebt es Kräfte welche, an dem ruhenden Körper angebracht, fähig sind, die beobachtete Bewegung hervorzubringen. Denn jedes Atom dm des Körpers hat eine gewisse Geschwindigkeit u und brauchte daher nur in der Ruhe von der Kraft udm ergriffen zu werden, um die Geschwindigkeit u anzunehmen. Denkt man sich an allen Atomen die ähnlichen Kräfte udm angebracht, so wird der Körper die beobachtete Bewegung erlangen. Führt man, nach den Gesetzen der Statik, die Elementarkräfte udm auf andere P, Q, R, ... zurück, so hat man ein anderes System von Kräften, welches dem Körper ebenfalls seine Bewegung ertheilen kann.

39) Die Kräfte udm würden die Bewegung des Körpers hervorbringen, auch wenn die Atome, auf die sie wirken, nicht mit einander verbunden wären; würden also im ersten Augenblicke weder Spannungen noch Drucke in dem Systeme hervorrufen. Treten diese Spannungen aber im nächsten Augenblicke ein, so sind sie Folgen der Schwungkräfte, welche aus den krummlinigen Bewegungen der Atome in ihren Verbindungen entstehen.

Führt man aber statt der Elementarkräfte udm ihre Resultanten P, Q, R, ... ein, so muß man gleich anfangs die Atome des Körpers mit einander verbunden denken, damit sich diese Resultanten wieder in die Kräfte udm zerlegen lassen.

40) Diese Unterscheidung zwischen den Kräften udm und P, Q, R, ... ist nur nöthig zu machen, wenn man plötzliche Drucke, Stöße oder Spannungen untersucht, die der Körper durch seine Festigkeit zu überwinden hat, aber nicht mehr dann, wenn man bloß seine Bewegung im Auge hat, wo diese Kräfte z. B. sehr wohl durch eine einzige Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden können.

§. 1.

Kräfte die fähig sind eine bloß fortschreitende Bewegung hervorzubringen.

41) Wenn ein Körper nur eine fortschreitende Bewegung hat, sich also alle Atome in demselben Sinne und mit derselben Geschwindigkeit u nach parallelen Linien bewegen, so sind die Elementarkräfte udm, die auf die Atome wirken, ebenfalls parallel, gleichsinnig und den Massen dm dieser Atome bezüglich proportional. Aber aus der Statik weiß man, daß sich solche Kräfte stets auf eine einzige $R = \int udm$ zurückführen lassen, die ebenfalls in gleichem Sinne und in gleicher Richtung den Schwerpunkt des Körpers angreift.

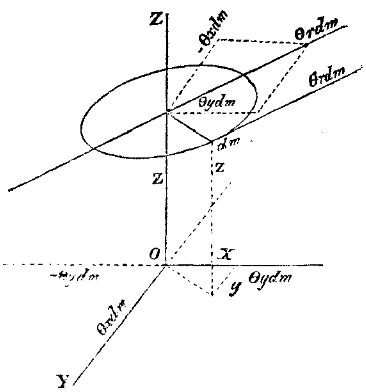
Also, umgekehrt, wenn irgend eine Kraft R den Schwerpunkt eines Körpers angreift, so ist die Wirkung dieser Kraft, da sie sich in die angegebenen Elementarkräfte zerlegen läßt, die, alle Theile des Körpers nach ihrer eigenen Richtung und mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $u = R : m$ (wenn m die Masse des Körpers ist) fortzubewegen.

42) Wenn die Kraft R, stets den Schwerpunkt des Körpers angreifend, ihre Richtung und Größe auch jeden Augenblick änderte, so würde doch die Bewegung des Körpers nur eine fortschreitende sein, denn eine mit ihm fest verbundene Ebene würde sich stets parallel bleiben, auch wenn die einzelnen Punkte des Körpers Curven beschrieben.

§. 2.

Kräfte die eine Drehung um eine gegebene Axe bewirken können.

Fig. 16.



43) Ein Körper drehe sich, im gegenwärtigen Augenblicke, um eine gegebene Axe OZ mit der Winkelgeschwindigkeit Θ; ein Atom dm in der Entfernung r von dieser Axe hat die Geschwindigkeit Θr nach der Tangente des Kreises gerichtet, den es zu beschreiben strebt, und die darauf wirkende Kraft ist $\Theta r dm$. Aehnliche Kräfte wirken auf alle Atome des Körpers in Richtungen, die zugleich senkrecht auf der Entfernung r und der Axe OZ stehen.

Reduction dieser Kräfte.

44) Die rechtwinkligen Coordinaten des Atoms dm mögen x, y, z sein. Man zerlege die Kraft $\Theta r dm$ nach den drei Coordinatenaxen in die Kräfte

$$X = \Theta y dm, \quad Y = -\Theta x dm, \quad Z = 0$$

Bringt man diese Kräfte, parallel mit sich selbst, in gleichem und entgegengesetztem Sinne wirkend, im Punkte O an, so erhält man in O zwei Kräfte

$$X = \Theta y dm \text{ und } Y = -\Theta x dm$$

und drei Kräftepaare L, M, N deren Axen die Coordinatenaxen sind. Die Momente dieser Paare sind $(Yz - Zy)$, $(Zx - Xz)$, $(Xy - Yx)$ oder, wenn man für X, Y, Z ihre Werthe setzt

$$L = -\Theta xz dm, \quad M = -\Theta yz dm, \quad N = \Theta(x^2 + y^2) dm = \Theta r^2 dm$$

Nimmt man diese Zerlegung an allen Atomen vor, so erhält man

1) Nach den Axen OX und OY zwei Kräfte

$$X = \Theta \int y dm, \quad Y = -\Theta \int x dm$$

die man in eine einzige P, senkrecht gegen OZ wirkend, zusammensetzen kann, so daß

$$P = \Theta \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2}$$

oder, wenn man die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehungsaxe D nennt,

$$P = \Theta m D$$

2) Zwei Kräftepaare um die Axen OX und OY

$$L = -\Theta \int xz dm, \quad M = -\Theta \int yz dm$$

die man in ein einziges K zusammensetzen kann, dessen Ebene durch OZ geht und dessen Moment ist

$$K = \Theta \sqrt{(\int xz dm)^2 + (\int yz dm)^2}$$

3) Endlich hat man noch das Paar N dessen Moment

$$N = \Theta \int (x^2 + y^2) dm = \Theta \int r^2 dm$$

ist und dessen Axe die Richtung OZ hat.

Berechnet man also für die ganze Masse des Körpers die fünf Integrale

$$\int x dm, \int y dm, \int xz dm, \int yz dm, \int (x^2 + y^2) dm$$

so hat man vollständig die Kraft P und die Paare K und N, deren vereinte Wirkung die Drehung um die Axe OZ hervorbringen.

Zusatz 1.

45) Geht die Axe OZ durch den Schwerpunkt des Körpers, so werden

$$\int x dm = 0, \int y dm = 0, \text{ also } P = 0$$

und es bleiben nur die Paare K und N und ihre Resultanten

$$G = \sqrt{K^2 + N^2}$$

Die Kräfte also, welche fähig sind einen Körper um eine Axe zu drehen die durch seinen Schwerpunkt geht, lassen sich stets auf ein Kräftepaar zurückführen.

Man beachte noch, daß dieses Paar G mit der Axe OZ einen Winkel macht, dessen Cosinus $\frac{K}{\sqrt{K^2 + N^2}}$ ist, also OZ nie seine Axe werden kann, wenn nicht $K = a$ ist.

Zusatz 2.

46) Ist OZ eine der Hauptaxen des Körpers, also

$$\int xz dm = 0, \int yz dm = 0$$

so bleibt von allen Kräften nur das Paar $N = \Theta \int r^2 dm$ dessen Axe OZ parallel ist.

Also lassen sich Kräfte, welche einen Körper um eine seiner Hauptaxen drehen können, stets auf ein Paar zurückführen, dessen Axe dieser Hauptaxe parallel ist.

Umgekehrt läßt sich also auch ein Paar N, dessen Axe die Richtung einer Hauptaxe hat, stets in Elementarkräfte $\Theta r dm$ zerlegen, welche den Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Theta = N : \int r^2 dm$ um diese Axe drehen können; denn solche Kräfte $\Theta r dm$ lassen sich auf ein einziges Paar $\Theta \int r^2 dm$ von gleicher Größe und Richtung mit dem Paare N zurückführen.

Wenn also ein Kräftepaar an einem freien Körper wirkt, dessen Axe die Richtung einer Hauptaxe des Körpers hat, so dreht es denselben um diese Hauptaxe mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich dem Momente dieses Paars dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Hauptaxe.

Zusatz 3.

47) Die Wirkung eines Paars G, welches in irgend einer Ebene einen Körper angreift, kann nun leicht gefunden werden, denn zerlegt man das Paar G in drei andere L, M, N, deren Axen die Richtung der drei Hauptaxen haben und nennt A, B, C die drei Trägheitsmomente in Bezug auf diese Hauptaxen, so sind

$$p = \frac{L}{A},\ q = \frac{M}{B},\ r = \frac{N}{C}$$

die drei Drehungen p, q, r, welche diese Paare um die Hauptaxen hervorzubringen streben. Setzt man also diese drei Drehungen in eine einzige Θ zusammen, so hat man die Axe und Größe der Drehung, zu der das Paar G im ersten Augenblicke Veranlassung giebt.

Allgemeiner Zusatz.

Kräfte die erforderlich sind eine bestimmte Bewegung hervorzubringen und Bewegung eines Körpers in Folge der Einwirkung gegebener Kräfte.

48) Jede Bewegung kann in eine bloß fortschreitende zerlegt werden, welche der Bewegung des Schwerpunkts gleich und parallel ist, und in eine einfache Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Man hat also nur die Kraft R für die erste Art der Bewegung zu bestimmen und das Paar G für die zweite.

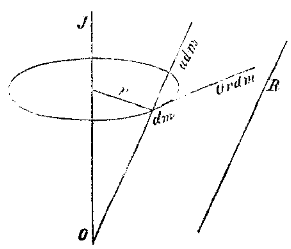
49) Ebenso, wenn beliebige Kräfte einen Körper angreifen, verlege man sie parallel mit sich selbst in den Schwerpunkt des Körpers. Alle Kräfte setzen sich dort zu einer einzigen R zusammen und alle Kräftepaare zu einem einzigen G.

Aber die Resultante R im Schwerpunkt des Körpers strebt allen Atomen eine gemeinsame Geschwindigkeit $u = \frac{R}{m}$ in der Richtung dieser Kraft zu ertheilen.

Das Paar G strebt dem Körper eine Drehung Θ um eine gewisse durch den Schwerpunkt gehende Axe OJ mitzutheilen, die auf die oben angegebene Weise gefunden wird.

Bemerkung.

Fig. 17.



50) Jedes Atom dm wird also von zwei Kräften getrieben, von udm parallel mit R und von Θrdm senkrecht gerichtet gegen die Axe OJ und gegen seine Entfernung r von derselben. Also beschreibt dieses Atom in jedem Augenblicke dt die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten udt und Θrdt sind.

§. 3.

Von den Schwungkräften, die aus der Drehung entstehen.

51) Wenn sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit Θ um eine Axe OZ dreht, so wird jedes Atom von der Kraft $\Theta r dm$ ergriffen, aber aus seiner Drehung entsteht eine unendlich kleine Kraft, welche es vom Mittelpunkt der Drehung zu entfernen strebt und die man Centrifugalkraft oder Schwungkraft nennt.

52) Ist u die Geschwindigkeit in der Tangente der Curve welche ein Atom beschreibt und r der Krümmungshalbmesser derselben, so ist bekanntlich

$$f = \frac{u^2}{r}$$

das Maaß für die Schwungkraft. Es ist aber $u = \Theta r$ also

$$f = \Theta^2 r$$

der Ausdruck der Schwungkraft eines Punktes, welcher mit der Winkelgeschwindigkeit Θ einen Kreis vom Radius r durchläuft.

53) Fügte man zu jeder Tangentialkraft $\Theta r dm$, welche jedes Atom des Körpers beherrscht, die entsprechende Schwungkraft $-dm\Theta r^2 dt$ (mit dem negativen Zeichen versehen, weil sie die Entfernung r von der Axe OZ zu vermindern strebt) so würde die Vereinigung dieser Atome, also der ganze Körper, sich um die Axe OZ mit der Winkelgeschwindigkeit Θ drehen, und zwar völlig frei, d. h. in dieser Weise, wenn auch die Atome nicht unter einander verbunden wären, und ohne daß dadurch der innere Zustand des Körpers gestört würde.

In dem Falle, der uns beschäftigt, wird freilich jedes Atom dm nur von der Tangentialkraft $\Theta r dm$ getrieben und es ist keine Schwungkraft vorhanden; aber man kann stets statt der Kraft $\Theta r dm$ die folgenden drei

$$\Theta r dm, \quad -dm\Theta r^2 dt, \quad +dm\Theta r^2 dt$$

einführen und die beiden ersten dazu benutzt denken, das Atom frei durch den Kreisbogen $\Theta r dt$ zu führen, während die dritte $+dm\Theta r^2 dt$ es in demselben Sinne forttreibt, in welchem es sich vom Mittelpunkte zu entfernen strebt; und dies ist die aus der Drehung entstandene Schwungkraft. Diese Kraft ist es, welche die Spannungen unter den Verbindungen der Atome hervorruft.

Zurückführung der Schwungkräfte auf eine einzige Kraft und ein Kräftepaar.

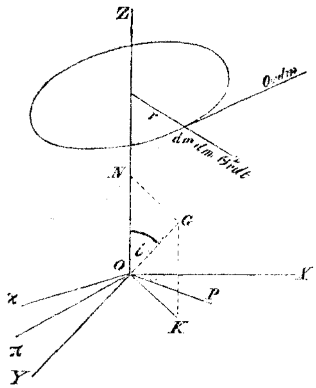
54) Die Schwungkräfte $dm\Theta^2 r dt$, die aus der Drehung Θ entstehen, sind, bis auf den Factor Θdt, den unmittelbar wirkenden Kräften $\Theta r dm$ gleich, aber sind senkrecht gegen diese Tangentialkräfte und die Axe OZ gerichtet. Zerlegt man sie in ähnlicher Weise wie diese (Nr. 44.), so erhält man für ihre Resultante π im Punkte O

$$\pi = \Theta^2 \sqrt{(\textstyle\int x dm)^2 + (\int y dm)^2} = \Theta P$$

und für das resultirende Paar χ, in dessen Ebene die Axe OZ fällt,

$$\chi = \Theta^2 \sqrt{(\textstyle\int z dm)^2 + (\int y dm)^2} = \Theta K$$

Fig. 18.



Ein dem Paar N in Nr. 44. entsprechendes Paar giebt es nicht, da die Richtung aller Schwungkräfte durch die Axe OZ geht.

55) So wie jede einzelne Schwungkraft der Tangentialkraft proportional ist und auf ihr senkrecht steht, so steht auch die Resultante π auf der Resultante P senkrecht.

Ebenso bildet auch die Axe des Paars χ mit der Axe des Paars K einen rechten Winkel und da sie auf OZ, der Axe des Paars N, senkrecht steht, so steht sie auch auf der Axe des Paars G, der Resultante von N und K, senkrecht. Also ist die Axe des aus den Schwungkräften entstehenden Paars χ senkrecht auf der Drehungsaxe und auf dem Paar G der unmittelbar einwirkenden Kräfte.

Bedeuten G und P zwei von O ausgehende Linien, welche die Richtung und Größe der Resultante P und der Axe des Paars G darstellen, deren Verein die Drehung Θ um die freie Axe OZ bewirkt, und i ist der Winkel den G mit der Drehungsaxe bildet, so hat man also für die Kraft π und das Paar χ, welche aus den Schwungkräften entstehen, die einfachen Ausdrücke

$$\pi = \Theta P, \ \chi = \Theta G \sin i$$

wo π senkrecht auf P und der Axe Θ steht, ebenso wie χ senkrecht auf G und der Axe Θ ist.

Bemerkung.

56) Wenn die Richtung jeder Schwungkraft eine viertel Umdrehung im Sinne der Drehung machte, so würde sie im Sinne der angreifenden Kräfte wirken; also müßten dann die Linien $O\pi$ und $O\chi$ auf OP und OK fallen. Hierdurch läßt sich die Lage von $O\pi$ und $O\chi$ bestimmen. Aendert sich Θ in Zeichen, so ändern auch P und K ihr Zeichen, aber π und χ bleiben ungeändert; wie es auch sein muß, da die Schwungkräfte nicht von dem Sinne der Drehung abhängen.

Zusatz.

57) Geht die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt, so ist

$$\int x dm = 0, \ \int y dm = 0 \ \text{ also } \pi = 0$$

und die Schwungkräfte geben nur das Paar χ.

Ist ferner OZ eine der Hauptaxen, so ist

$$\int xz dm = 0, \ \int yz dm = 0 \ \text{ also } \chi = 0$$

und alle Schwungkräfte halten sich das Gleichgewicht. Ebenso können umgekehrt sich die Schwungkräfte nur an einer Hauptaxe das Gleichgewicht halten, da π und χ zugleich Null sein müssen, was nur möglich ist, wenn $\int xdm$, $\int ydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$ sämmtlich zugleich Null sind.

Bemerkung.

58—59) Wenn sich der Körper um einen festen Punkt O dreht, so brauchen $\int x dm$ und $\int y dm$ nicht zu verschwinden, denn die Kräfte P und π, die an diesem Punkte wirken, werden durch ihn aufgehoben. Es braucht also in diesem Falle nur K oder $\chi = \Theta K$ Null zu sein oder nur die Integrale $\int x dm$ und $\int y dm$ müssen verschwinden. Durch diese beiden Bedingungen erhält man zwei Gleichungen, die auch zu drei auf einander senkrechten Axen führen; so daß es also für jeden Punkt O eines festen Körpers drei Hauptaxen giebt, welche die Eigenschaft haben: 1) Wenn sich der Körper um diese Axe dreht und man reducirt alle Kräfte $\Theta r dm$ auf eine einzige P die durch O geht und auf ein Paar N, so ist dieses Paar auf der Axe senkrecht. 2) Reducirt man ebenso die Schwungkräfte $\Theta^2 r dm$, so ist das resultirende Paar χ von selbst Null, aber die Resultante π so wie die Kraft P müssen durch den Widerstand des Punktes O aufgehoben werden.

60) In allen Fällen genügt es die drei Hauptaxen zu kennen, welche durch den Schwerpunkt gehen und natürliche Drehungsaxen heißen. Denn hat man diese Axen und die drei Trägheitsmomente A, B, C, welche sich auf sie beziehen, so kann man leicht das Trägheitsmoment des Körpers für eine beliebige andere durch den Schwerpunkt gehende Axe finden und dann auch für jede mit dieser parallele Axe.

§. 4.

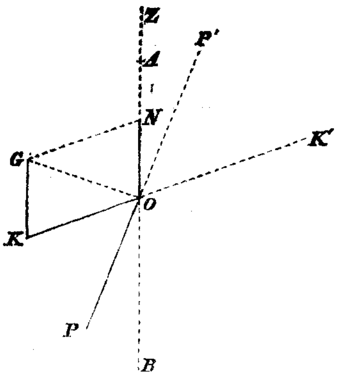
Bewegung eines Körpers um eine feste Axe.

61) Alle Kräfte, welche den Körper angreifen, lassen sich auf eine einzige R, in einem Punkte O der festen Axe OZ wirkend, und auf ein Kräftepaar G zurückführen. Macht R mit OZ den Winkel α, so erfährt sie einen senkrechten Stoß $R \sin\alpha$ und einen zweiten $R \cos\alpha$ in ihrer eigenen Richtung. Macht ferner die Axe des Paars G mit OZ den Winkel ν, so kann G in zwei Paare $N = G \cos\nu$ und $N = G \sin\nu$ zerlegt werden, von denen die Axe des ersten mit OZ zusammenfällt und die des zweiten darauf senkrecht steht. Dieses letztere muß die Festigkeit der Axe OZ aufheben. Will man also einen Körper um eine Axe drehen und diese dabei schonen, so ist es nöthig die angreifenden Kräfte so zu wählen, daß die Resultante Null wird und die Axe des resultirenden Paars in die Drehungsaxe fällt. Aber auch das letztere Paar bewirkt noch eine Erschütterung dieser Axe.

Aufgabe.

62) Ein ruhender Körper, um die feste Axe OZ beweglich, werde von einem Paare N, dessen Axe in OZ fällt, ergriffen, man verlangt zu wissen: 1) welche Winkelgeschwindigkeit Θ der Körper annimmt; 2) den Stoß, den die feste Axe im ersten Augenblicke zu ertragen hat; 3) den steten Druck, den sie in Folge der erstehenden Schwungkräfte erleidet.

Fig. 19.



Auf der Drehungsaxe OZ stelle ON die Größe der Axe des angreifenden Paars N dar. In einer auf OZ senkrechten Ebene mögen OP und OK die Kraft P und das Paar K bedeuten, welche, mit N vereint, fähig sind den Körper um OZ in eine freie Drehung zu versetzen, durch welche die Axe OZ nicht erschüttert wird.

Man bringe nun in O die Kräfte P und $-P$ und die Paare K und $-K$ an, wodurch der Zustand des Körpers zwar nicht geändert, er aber jetzt von drei Paaren N, K, $-K$ und zwei Kräften P und $-P$ angegriffen wird. Nach der Voraussetzung drehen aber die Paare N, K und die Kraft P den Körper um OZ mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$$

ohne die Axe zu erschüttern. Endlich nimmt der Körper wirklich diese Drehung Θ an, denn $-P$ und $-K$, welche beide durch diese Axe gehen, werden von ihrer Festigkeit aufgehoben. Also erfährt die Axe wirklich eine Erschütterung durch die Kraft $-P$ und eine zweite durch das Paar $-K$. Man findet also

$$-P = -\Theta\sqrt{(\int xdm)^2 + (\int ydm)^2} = P'$$

$$-K = -\Theta\sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2} = K'$$

63) Werden nur zwei Punkte A und B der Axe OZ festgehalten, so kann man leicht P' und K' so zerlegen, daß sich die Widerstände ergeben, welche diese Punkte dem angreifenden Paare N im ersten Augenblicke zu leisten haben.

64) Hat die Festigkeit der Axe OZ die Kraft P' und das Paar K' beim ersten Angriff ausgehalten, dann wird der Körper nur von der Kraft P und den Paaren N, K angegriffen, und dieses System dreht ihn bekanntlich um OZ ohne diese Axe zu erschüttern.

65) Aber von der bloßen Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung entstehen die Schwungkräfte $\Theta^2 rdm$ und diese Kräfte lassen sich zurückführen auf eine einzige

$$\pi = \Theta P = \Theta^2\sqrt{(\int xdm)^2 + (\int ydm)^2}$$

und ein Paar

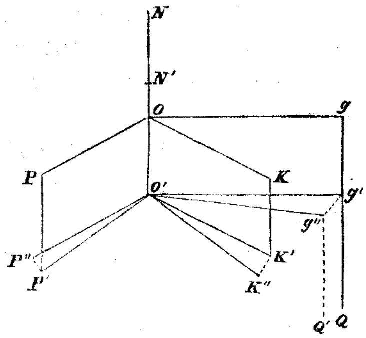
$$\chi = \Theta K = \Theta^2\sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2}$$

so daß also die Axe, in jedem Augenblicke dt, einen Druck πdt in O und ein Paar χdt auszuhalten hat, die auch auf zwei Punkte A und B vertheilt werden können u. s. w.

§. 5.

Erhaltung der Kräfte und Kräftepaare bei der Bewegung eines freien Körpers.

Fig. 20.



Wir haben gezeigt, daß jede Bewegung eines Körpers in irgend einem Augenblicke dt angesehen werden kann als zusammengesetzt aus einer Drehung Θ um eine bestimmte Axe ON und einer Verschiebung u parallel dieser Axe, welche wir die gleitende freiwillige Drehungsaxe genannt haben.

Es mögen P, K, N die Kraft und die beiden Paare sein, welche die Drehung Θ um die Axe ON hervorzubringen vermögen, und Q die Kraft, welche, im Schwerpukt g angebracht, die Verschiebung in der Richtung dieser Kraft verursacht.

Nennt man m die Masse des Körpers und macht $gO = a$, so ist

$$P = ma\Theta \text{ und } Q = mu$$

Am Ende der Zeit dt wird der Körper der Axe ON entlang um $OO' = adt$ fortgerückt sein und sich um ON um einen Winkel Θdt gedreht haben. Bei der ersten dieser Bewegungen möge er die Linien OP, OK, ON, Og mit sich fortgenommen und in die Lagen $O'P'$, $O'K'$, $O'N'$, $O'g'$ gebracht haben und bei der zweiten sollen diese Linien, um den Winkel Θdt gedreht, in die Lagen $O'P''$, $O'K''$, $O'N''$, $O'g''$ gekommen sein. Die Punkte P', N', g' haben dann die Bogen

$$P'P'' = P\Theta dt,\ K'K'' = K\Theta dt,\ g'g'' = a\Theta dt$$

beschrieben.

Aber am Ende dieses Augenblicks ist aus den Schwungkräften entstanden: 1) eine Kraft $\pi dt = P\Theta dt$ senkrecht gegen P', welche in Verbindung mit P' diese Kraft in ihre frühere Lage $O'P'$ zurückführt; 2) ein Paar $\chi dt = K\Theta dt$ senkrecht gegen K', welche in Verbindung mit K'' das Paar in seine Stelle $O'K'$ zurückführt. Also am Ende eines Augenblicks werden die Kräfte und Paare, welche den Körper angreifen, durch die Linien $O'P'$, $O'K'$, $O'N'$ und $g'Q'$ dargestellt.

Aber dieses System von Kräften und Kräftepaaren ist ganz dasselbe, welches gleich anfangs wirkte; denn die beiden Paare $O'K'$, $O'N'$ wirken ganz ebenso wie die Paare OK, ON, die ihnen gleich und parallel sind. Ferner kann man in O die Kräfte P und $-P$ parallel und gleich der P' anbringen. Dadurch erhält man in O die Kraft P und das Paar $(P, -P)$ an dem Arme $OO' = udt$ wirkend. Ebenso bringt man in g' die Kräfte Q und $-Q$ parallel und gleich mit Q' an, so daß man in g' die Kraft Q und das Paar $(Q, -Q)$ erhält, welches an dem Arme $g'g'' = a\Theta dt$ wirkt. Diese beiden Paare, welche einander parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, haben gleiche Momente, denn da

$P = ma\Theta$ und $Q = mu$, so ist das Moment $P \cdot OO' = ma\Theta \cdot udt$ dem Momente $Q \cdot g'g'' = mu \cdot a\Theta dt$ gleich. Also vernichten sich die beiden Paare und die beiden Kräfte P', Q' sind auf die Kräfte P, Q zurückgeführt.

Also ist das System der Kräfte und Paare, welche den Körper nach Verlauf eines Augenblicks angreifen, nicht verschieden von dem, welches anfangs auf ihn einwirkte: daher findet diese Erhaltung der Kräfte und Paare für alle Zeiten statt.

Nach Verlauf eines Augenblicks hat der Körper seine Stellung im Raume geändert und die Kräfte sind nach Richtung und Größe ungeändert geblieben, daher bietet sich ihnen der Körper nicht mehr auf dieselbe Weise dar, muß also seine Bewegung jetzt ändern oder sich um eine andere gleitende freiwillige Axe on drehen. Da aber diese Bewegung aus demselben System von Kräften (P, K, N, Q) entspringt, so läßt sich dieses nothwendiger Weise auf ein ähnliches System (p, k, n, q) zurückführen, welches die Bewegung um die neue Axe on hervorbringen kann. Aber auch dieses System wird sich während der nächsten Augenblicke erhalten; daher erhält sich auch das System (P, K, N, Q) und stellt die Kräfte und Paare, welche den Körper ergreifen, auch am Ende des zweiten Augenblicks, also für immer dar.

Drittes Kapitel.

Theorie der Trägheitsmomente.

§. 1.

Trägheitsmomente eines Körpers von beliebiger Gestalt und verschiedenen Axen, die durch ein und denselben Punkt gehen.

66) Man lege durch den Punkt drei rechtwinklige Axen X, Y, Z, auf welche man die Punkte des Körpers bezieht. Die Gerade h durch den Anfangspunkt der Coordinaten, für welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, bilde mit den Axen die Winkel α, β, γ. Nennt man dm ein Atom des Körpers und r seine Entfernung von der Linie h, so hat man als Trägheitsmoment das Integral $\int r^2 dm$, welches sich über alle Atome des Körpers erstreckt.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Atoms dm und ϱ seine Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und die Entfernung r dieses Atoms von der Axe h

$$r = \varrho \sin\varphi$$

wenn φ der Winkel zwischen ϱ und h ist. Läßt man nun von den Winkeln das Zeichen cos weg, was nie zu Verwechslungen Anlaß geben kann, so wird

$$r^2 = \varrho^2 \sin^2\varphi = \varrho^2(1 - \varphi^2)$$

Aber bekanntlich ist

$$\varphi = \frac{x}{\varrho}\alpha + \frac{y}{\varrho}\beta + \frac{z}{\varrho}\gamma \text{ und } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

daher wird

$$r^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy$$

also

$$\int r^2 dm = \alpha^2 \int (y^2 + z^2)dm + \beta^2 \int (z^2 + x^2)dm + \gamma^2 \int (x^2 + y^2)dm$$
$$2\beta\gamma \int yzdm - 2\gamma\alpha \int zxdm - 2\alpha\beta \int xydm$$

oder wenn man die Integrale durch Buchstaben bezeichnet

$$H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C^2 - 2\beta\gamma l - 2\gamma\alpha m - 2\alpha\beta n$$

Diese Gleichung bestimmt das Trägheitsmoment H in Bezug auf die Axe h durch die Integrale l, m, n und die drei Trägheitsmomente A, B, C in Bezug auf die Coordinatenaxen und durch die Winkel, welche h mit diesen Axen bildet.

System der Axen h, für welches das Trägheitsmoment stets denselben Werth H hat.

67) Man bestimme auf der Axe h einen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, so daß

$$h^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

dann ist offenbar

$$x = h\alpha,\ y = h\beta,\ z = h\gamma$$

und wenn man diese Werthe für α, β, γ in die Gleichung für H einsetzt, so wird

$$(H - A)x^2 + (H - B)y^2 + (H - C)z^2 + 2lyz + 2mzy + 2nxy = 0$$

68) Es giebt also in jedem Körper und für jeden Punkt desselben, oder des Raumes, eine stetige Folge von Axen, für welche das Trägheitsmoment denselben Werth hat; und diese stetige Folge von solchen Axen bildet eine Kegeloberfläche zweiten Grades.

Hauptaxen.

69) Eine solche Fläche zweiten Grades läßt sich stets, durch Coordinatenverwandlung, so umgestalten, daß in ihr die Producte yz, zx, xy nicht mehr erscheinen. Man muß sie dann bekanntlich auf ihre drei Axen beziehen. Hätte man also gleich diese drei Axen zu Coordinatenaxen gewählt, so wären die drei Integrale l, m, n verschwunden.

70) Solche Axen, für welche die drei Integrale $\int yzdm$, $\int zxdm$, $\int xydm$ verschwinden, heißen Hauptaxen; sie sind also die drei aufeinander rechtwinkligen Durchmesser derjenigen Kegelfläche zweiten Grades, deren Spitze im Anfang der Coordinaten liegt, und die der Ort aller geraden Linien ist in Bezug auf welche die Trägheitsmomente gleichen Werth haben.

Bestimmung der Hauptaxen.

71) Man nimmt die allgemeine Gleichung der No. 67. angegebenen Kegelfläche auf drei beliebige rechtwinkliche Axen bezogen und sucht die Werthe der sechs Integrale A, B, C, l, m, n in Bezug auf diese Axen. Dann giebt man H einen beliebigen Werth, den es erlangen kann, macht z.B. $H = A$ oder $= B$ oder $= C$. Durch Transformation der Coordinaten sucht man nun drei neue Axen, für welche die Gleichung der Kegelfläche die Gestalt annimmt

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0$$

und diese drei rechtwinkligen Axen sind die drei Hauptaxen.

72) Die Bestimmung der drei Hauptaxen erfordert die Auflösung einer kubischen Gleichung.

73) Wenn man aber eine dieser Axen kennt, so kann man die beiden andern durch Auflösung einer quadratischen Gleichung finden. Denn es sei z eine Axe, für welche $\int yzdm$, $\int xzdm$ oder l, m Null sind, dann reducirt sich die Gleichung der Kegelfläche auf

$$(H-A)x^2 + (H-B)y^2 + (H-C)z^2 + 2nxy = 0$$

In der Ebene der x, y kann man aber zwei neue rechtwinklige Axen X' und Y' finden, für welche das Product xy verschwindet. Macht y' mit x den Winkel ω, so hat man

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega \text{ und } y = x'\sin\omega + y'\cos\omega$$

Setzt man diese Werthe für x, y in die vorige Gleichung ein und will man, daß der Coofficient von $x'y'$ verschwinde, so erhält man

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2n}{B-A}$$

Also in Bezug auf die drei rechtwinkligen Axen x', y' und z erhält die Gleichung der Kegelfläche die Form

$$Px'^2 + Qy'^2 + Rz^2 = 0$$

daher sind diese drei Axen die drei Hauptaxen des Körpers, für welche man findet

$$\int y'zdm = 0, \ \int x'zdm = 0, \ \int x'y'dm = 0$$

Die zwei ersten Gleichungen stimmen mit den beiden vorausgesetzten $\int yzdm = 0$ und $\int xzdm = 0$ überein, was sich auch aus den Transformationsformeln für x und y in x' und y' ergiebt, und zwar findet diese Uebereinstimmung statt unabhängig von dem Winkel ω.

Eigenschaften der drei Hauptaxen.

74—76) Bezieht man alle Punkte des Körpers auf die drei Hauptaxen, so hat man für das Trägheitsmoment H in Bezug auf eine durch den Anfangspunkt gezogene Gerade h, welche mit diesen Axen die Winkel α, β, γ bildet

$$H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

wo die Zeichen cos weggelassen sind und A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers für die drei Hauptaxen bedeuten.

77) Es ist jetzt leicht das Trägheitsmoment H' eines Körpers um eine Axe h' aus dem Trägheitsmoment H um eine ihr parallele Axe h zu finden, welche durch den Schwerpunkt geht. Denn sind r und r' die Entfernungen eines Atoms dm des Körpers von den Axen h und h' und ist D die gegenseitige Entfernung der beiden parallelen Axen, so giebt das Dreieck, aus den Linien r, r', D gebildet, wenn φ der Winkel zwischen r und D ist, die Gleichung

$$r'^2 = r^2 + D^2 - 2rD\cos\varphi$$

Daher wird

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + mD^2 - 2D\int r\cos\varphi\, dm$$

Aber $r\cos\varphi$ ist die Entfernung des Atoms dm von einer Ebene, die durch den Schwerpunkt senkrecht gegen die Linie D gelegt ist; es ist daher $\int r\cos dm = 0$ und folgleich

$$H' = H + mD^2$$

oder man findet das Trägheitsmoment H' eines Körpers in Bezug auf irgend eine Axe h', wenn man zu dem Trägheitsmomente H, um eine durch den Schwerpunkt gelegte der h' parallelen Axe h, das Product der Masse m des Körpers in das Quadrat der Entfernung D des Schwerpunkts von der Axe h addirt.

78—79) Es sind also die Trägheitsmomente eines Körpers für alle Axen, die an der Oberfläche eines graden Kreiscylinders liegen, dessen Axe durch den Schwerpunkt geht, einander gleich

Läßt man die Axe irgend eines solchen Cylinders von constanter Basis so drehen, daß sie die Kegelfläche

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = H = \text{constans}$$

beschreibt, so sind auch alle Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Erzeugungslinien der Cylinder einander gleich, aber man hat auf diese Weise noch nicht alle Axen im Körper gefunden, die gleiche Trägheitsmomente haben, da in der Gleichung $H' = H + m D$ sich H und D zugleich ändern können und doch H' ungeändert bleibt.

80) Für alle Axen, die durch den Mittelpunkt einer Kugel oder der regelmäßigen Körper gehen, sind die Trägheitsmomente sämmtlich einander gleich; man kann nun fragen, ob es in einem Körper einen Punkt O geben kann, für welchen auch alle Axen gleiche Trägheitsmomenet haben.

Es sei g der Schwerpunkt des Körpers und O ein Punkt der die verlangte Eigenschaft hat; man ziehe $gO = D$ und lege durch O eine Ebene E senkrecht auf D. Alle Axen durch O in E sind, nach der Voraussetzung, gleiche Axen, also sind auch alle Axen durch g in einer mit E parallelen Ebene, gleiche Axen, da sie von der ersten um die gleiche Größe D entfernt sind.

Also kann O nur existiren, wenn durch g zwei gleiche Axen gehen und O auf der dritten durch g gehenden Axe liegt. Nun sei A der gemeinschaftliche Werth der Trägheitsmomente um die beiden ersten Axen und C der Werth des Trägheitsmoments um die dritte Axe Og. Man hat also für H' folgende zwei Gleichungen:

$$H' = A + mD^2 \text{ und } H' = C$$

folglich

$$D = \pm\sqrt{\frac{C-A}{m}}$$

Wenn also zwei der natürlichen Trägheitsaxen einander gleich sind und die dritte C größer ist als die beiden gleichen A, so giebt es auf dieser, in der durch den Werth für D bestimmten Entfernung vom Schwerpunkte, zwei Punkte O, für welche alle Trägheitsaxen einander gleich sind.

Zweiter Theil.

Erstes Kapitel.

Auflösung des Problems der Drehung freier Körper.

§. 1.
Analytische Definitionen.

1) Es sei O der Mittelpunkt der Drehung des Körpers; OX, OY, OZ die Richtung der drei auf einander rechtwinkligen Hauptaxen, und A, B, C die drei Trägheitsmomente für diese Axen. Für eine andere Axe OJ, welche mit den Axen OX, OY, OZ die Winkel λ, μ, ν macht, findet man das Trägheitsmoment J durch die Gleichung

$$J = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu$$

2) Jedes Trägheitsmoment $\int r^2 dm$ kann man bequem durch das Product mK^2 ausdrücken, in welchem m die ganze Masse des Körpers und K ein Mittel zwischen den Entfernungen aller Punkte des Körpers von der Drehungsaxe ist.

Man kann diese Linie K ganz passend den Hebelsarm der Trägheit oder kurz den Trägheitsarm für diese Axe nennen.

Statt der Größen A, B, C kann man also die Ausdrücke

$$m\alpha^2,\ m\beta^2,\ m\gamma^2$$

einführen, in denen α, β, γ die Trägheitsarme für die entsprechenden Axen sind.

Das Centralellipsoid der Körper.

3) Für die Bewegung freier Körper genügt es den Drehungsmittelpunkt zu kennen, die Richtung der drei Hauptaxen und die drei Trägheitsarme für diese Axen.

Man beschreibe um O als Mittelpunkt über den Linien OX, OY, OZ als Axen das Ellipsoid

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = R^4$$

wo R eine beliebige constante Linie ist.

Die Halbaxen dieses Ellipsoids sind dann

$$a = \frac{R^2}{\alpha},\ b = \frac{R^2}{\beta},\ c = \frac{R^2}{\gamma}$$

Die drei Axen dieses Ellipsoids sind also den drei Trägheitsarmen des Körpers für diese Axen umgekehrt proportional. Ganz allgemein ist aber auch $m\frac{R^4}{\varrho^2}$ das Trägheitsmoment für irgend einen Halbmesser ϱ dieses Ellipsoids, so wie es z. B. $m\frac{R^4}{a^2}$ für die Halbaxe a ist.

Denn sind x', y', z' die Coordinaten des Endpunkts des Halbmessers ϱ, so sind $\frac{x'}{\varrho}, \frac{y'}{\varrho}, \frac{z'}{\varrho}$ die Cosinus der Winkel, welche ϱ mit den Axen des Ellipsoids macht; und ist $m\delta^2$ das Trägheitsmoment des Körpers für die Axe ϱ, so hat man nach No. 1.

$$m\delta^2 = m\frac{R^4}{a^2}\frac{x'^2}{\varrho^2} + m\frac{R^4}{b^2}\frac{y'^2}{\varrho^2} + m\frac{R^4}{c^2}\frac{z'^2}{\varrho^2}$$

oder da

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

$$m\delta^2 = m\frac{R^4}{\varrho^2} \text{ oder } \delta = \frac{R^2}{\varrho}$$

4) Dieses Centralellipsoid hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß das Trägheitsmoment für irgend einen seiner Durchmesser dem Quadrate desselben umgekehrt proportional ist. Zugleich versinnlicht es uns den Mittelpunkt der Drehung, die Hauptaxen und alle Trägheitsmomente, die man bei der Drehung eines Körpers zu beachten hat.

5) Wir betrachten nun einen Körper, der von beliebigen Kräften angegriffen wird, die aber gleich auf eine Kraft P und ein Kräftepaar G zurückgeführt worden sind.

Wenn der Körper gezwungen ist sich um einen festen Punkt zu drehen, so nimmt man diesen Punkt zum Mittelpunkte O; wenn aber der Körper frei ist, so wählt man für O den Schwerpunkt des Körpers. Im ersten Falle wird die Kraft P unmittelbar durch den Widerstand des festen Punktes vernichtet; im zweiten bringt die Kraft P, die auf den Schwerpunkt wirkt, nur eine fortschreitende Bewegung des Körpers hervor und die ganze Schwierigkeit besteht also nur darin, die Drehung zu bestimmen, welche das Paar G hervorbringt.

Drehung des Körpers im ersten Augenblicke.

Durch den Punkt O ziehe man eine Linie G, welche die Axe und Größe des angreifenden Paars darstellt. Die drei Projectionen L, M, N der Linie G auf die drei Axen des Centralellipsoids stellen die Axen der drei Paare vor, in welche sich das Paar G nach diesen Richtungen zerlegen läßt.

Jedes dieser Paare, senkrecht auf einer Hauptaxe, würde für sich allein den Körper um diese Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit drehen, welche dem Quotienten aus der Größe dieses Paars durch das Trägheitsmoment für diese Axe gleich ist. Man erhält also die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten p, q, r durch die Formeln

$$p = \frac{La^2}{mR^2};\ q = \frac{Mb^2}{mR^2};\ r = \frac{Nc^2}{mR^2}$$

Aber diese drei Drehungen p, q, r setzen sich zu einer einzigen

$$\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

zusammen.

6) Im ersten Augenblick strebt also das Paar G den Körper mit der angegebenen Winkelgeschwindigkeit Θ um eine Axe zu drehen, die mit den Hauptaxen des Körpers Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{p}{\Theta}, \frac{q}{\Theta}, \frac{r}{\Theta}$$

sind. (Siehe No. 47. des ersten Theils.)

7) Dreht sich dagegen ein Körper wirklich um eine Axe mit der gegebenen Geschwindigkeit Θ, so zerlege man diese Drehung Θ in drei andere p, q, r um die drei Hauptaxen, dann geben die Formeln in No. 5. die Werthe der drei Paare L, M, N, welche diese drei Drehungen hervorzubringen streben und aus ihnen ergiebt sich das Paar G, welches die Drehung Θ veranlaßt durch die Gleichung

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche seine Axe mit den Hauptaxen macht, sind

$$\frac{L}{G}, \frac{M}{G}, \frac{N}{G}$$

8) Aus den Ausdrücken für p, q, r in Nr. 5. sieht man, daß die augenblickliche Drehungsaxe im Allgemeinen nicht mit der Axe des Paars zusammenfällt, welches die Drehung erzeugt. Diese beiden Axen vereinigen sich nur, wenn die Axe des Paars eine der Hauptaxen ist. Den Winkel i, welchen beide Axen mit einander bilden, findet man offenbar durch die Formel

$$\cos i = \frac{Lp + Mq + Nr}{G\Theta}$$

Neuer Ausdruck der vorhergehenden Theoreme.

9) Den Punkt J, in welchem die augenblickliche Drehungsaxe das Centralellipsoid trifft, wollen wir den augenblicklichen Pol der Drehung nennen. Sind x', y', z' die Coordinaten dieses Pols, so ist

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0$$

die Gleichung einer Diametralebene, welche der Berührungsebene in J parallel ist.

Die Richtung der augenblicklichen Drehungsaxe OJ ist aber die Diagonale des über p, q, r, als Seiten, construirten rechtwinkligen Parallelepipedons, daher sind die Coordinaten x', y', z' diesen Seiten proportional. Aber nach No. 5. sind diese wiederum den Größen La^2, Mb^2, Nc^2 proportional, daher erhält man für die obige Diametralebene auch den Ausdruck

$$Lx + My + Nz = 0$$

Diese Ebene steht aber offenbar auf der Linie G senkrecht, deren Projectionen L, M, N sind, daher ist diese Ebene die Ebene des Kräftepaars.

Also ist die augenblickliche Drehungsaxe nichts anderes als der der Ebene des Kräftepaars conjugirte Durchmesser.

Bemerkung.

10) Man kann diesen Satz auch auf eine mehr directe Weise finden, durch welche man auch unmittelbar zum Begriffe des Centralellipsoids geführt wird. Denn es ist klar, daß die Ebene des Paars G durch die Gleichung

$$Lx + My + Nz = 0$$

gegeben ist, welche sich in

$$Apx + Bqy + Crz = 0$$

verwandelt, wenn man für L, M, N ihre Werthe Ap, Bq, Cr setzt. Dies ist aber offenbar eine Ebene derjenigen parallel, welche die Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F^2 = \text{constans}$$

in einem Punkte berührt, dessen Coordinaten den Größen p, q, r proportional sind. Diese krumme Fläche ist aber ein Ellipsoid, dessen Axen $F:\sqrt{A}$, $F:\sqrt{B}$, $F:\sqrt{C}$ sind, also umgekehrt proportional den Quadratwurzeln der Trägheitsmomente A, B, C oder den Trägheitsarmen a, b, c selbst.

Die Ebene des Paars ist also die der augenblicklichen Drehungsaxe conjugirte Diametralebene dieses Ellipsoids. Man sieht hieraus, daß in der Dynamik die Einführung des Begriffs des Centralellipsoids eben so natürlich ist als die des Schwerpunkts.

11) Da ein Kräftepaar stets in eine der seinigen parallele Ebene verlegt werden kann, ohne seine Wirkung auf den Körper zu ändern, so kann man also das Paar auch aus dem Mittelpunkte auf die Oberfläche des Centralellipsoids verlegen und behaupten:

Wenn ein Körper von einem Kräftepaare ergriffen wird, dessen Ebene das Centralellipsoid berührt, so befindet sich der augenblickliche Drehungspol, welchen das Paar hervorruft, im Berührungspunkte.

Und umgekehrt, wenn sich ein Körper dreht, so liegt das Paar, welches ihn in diesem Augenblicke angreift, in der Berührungsebene des Pols.

Drehung des Körpers während des Verlaufs der Zeit.

12) Die Schwungkräfte, welche durch die Drehung des Körpers entstehen, halten sich im Allgemeinen nicht das Gleichgewicht. Verlegt man sie, parallel mit sich selbst, in den Drehungsmittelpunkt O, so geben sie eine Resultante, welche von selbst Null ist, wenn dieser Punkt der Schwerpunkt des Körpers ist, oder vernichtet wird, wenn der Punkt O fest ist; aber das resultirende Paar g ist nicht Null. Während eines Augenblicks dt ist seine Wirkung gdt und theilt dem Körper eine unendlich kleine Drehung γdt mit, welche sich mit der bereits vorhandenen Drehung Θ vereinigt und die Axe und Größe derselben ändert.

13—14) Wir haben bewiesen, daß die Axe des Paars g zugleich senkrecht steht auf der augenblicklichen Drehungsaxe OJ und auf der Axe des Paars G, welches die gegenwärtige Drehung Θ bewirkt, und daß die Größe dieses Paars g durch $G\Theta \sin i$ ausgedrückt wird, wenn i die gegenseitige Neigung der beiden Axen G und Θ ist. Man kann diesen Satz auf folgende Weise aussprechen:

Wenn man auf den Axen des angreifenden Paars und der augenblicklichen Drehung vom Drehungsmittelpunkte aus Linien abschneidet, welche diese Größen bedeuten, so wird das Paar, welches aus den Schwungkräften entspringt, in Bezug auf seine Ebene und Größe durch das Parallelogramm dargestellt, dessen Seiten diese Linien sind.

15) Das Paar g der Schwungkräfte liegt also stets in der Ebene OGJ, daher ist nach dem Satze in No. 9. die Axe, um welche das Paar g den Körper zu drehen sucht, der Halbmesser $O\gamma$ des Centralellipsoids, welcher der Diametralebene OGJ conjugirt ist. Da aber dieser Halbmesser $O\gamma$ allen in der Ebene OGJ gezogenen Halbmessern conjugirt ist, so ist er auch der Axe OJ conjugirt; folglich liegt $O\gamma$ in der Ebene des Paars G selbst, weil nämlich diese Ebene der augenblicklichen Drehungsaxe OJ conjugirt ist (No. 10.), so ist sie der Ort aller Geraden, die OJ conjugirt sein können.

Also die Axe $O\gamma$ der Drehung γ, welche aus dem Paar g der Schwungkräfte entspringt, liegt stets in der Ebene des im gegenwärtigen Augenblick angreifenden Paars G.

16) Wenn man also zwei Linien nimmt, eine Θ, welche die gegenwärtige Drehung darstellt, die andere $O\gamma' = \gamma dt$, welche die Drehung bezeichnet, die das Paar g in dem Augenblicke dt hervorbringt, und wenn man aus diesen beiden Linien ein Parallelogramm construirt, um in der Diagonale Θ' die Linie zu haben, welche die Axe und Größe der Drehung am Ende eines Augenblicks dt darstellt, so sieht man, daß das Ende dieser Diagonale Θ' eben so hoch über der Ebene des Paars G ist als das Ende der Linie Θ, weil die Seite $O\gamma'$, in der Ebene des Paars selbst liegend, die entgegengesetzte Seite des Parallelogramms dieser Ebene parallel ist. Aber der Endpunkt der Linie Θ liegt um die Größe $\Theta \cos i$ über der Ebene des Paars, man hat daher die merkwürdige Gleichung

$$\Theta \cos i = \text{constans}$$

d. h. **die Winkelgeschwindigkeit Θ geschätzt nach der festen Axe des angreifenden Paars, bleibt während des ganzen Verlaufs der Drehung ungeändert.**

17) Wenn $\Theta \cos i$ constant ist, so ist auch

$$G\Theta \cos i = \text{constans}$$

da G constant ist. Aber der Factor $G \cos i$, oder das Paar G geschätzt nach der Richtung OJ, ist offenbar gleich ΘJ, wenn man durch J das Trägheitsmoment des Körpers für die augenblickliche Drehungsaxe OJ bezeichnet. Man hat daher

$$G\Theta \cos i = \Theta^2 J = \text{constans}$$

Es bezeichnet aber J die Summe der Producte aller Atome des Körpers in das Quadrat ihrer Entfernung von der Drehungsaxe, folglich drückt $\Theta^2 J$ die Summe der Producte dieser Atome in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit aus. Jedes dieser Producte heißt aber die lebendige Kräft des Atoms, welches man betrachtet, daher kann man auch sagen, daß **die Summe der lebendigen Kräfte aller Atome des Körpers während des Verlaufs der Drehung constant bleibt.** Es ist dies ein bloßer Zusatz zu dem Princip der **Erhaltung der Kräftepaare** oder der **Flächen**, welches ausdrückt, daß G sowohl der Größe als auch im absoluten Raum der Richtung nach constant ist.

18) Wenn man den Radiusvector OJ durch u bezeichnet, so wird das Trägheitsmoment des Körpers um OJ, wie wir gesehen haben, durch $m\frac{R^4}{u^2}$ ausgedrückt. Setzt man daher diesen Ausdruck statt J in die vorhergehende Gleichung, so erhält man

$$m\frac{R^4}{u^2}\Theta^2 = \text{constans}$$

Setzt man für die Constante den Ausdruck $\frac{mR^4}{k^2}$, wo k eine constante Linie bezeichnet, so ergiebt sich

$$\frac{\Theta}{u} = \frac{1}{k}$$

Hieraus fließt der Satz, daß **während des ganzen Verlaufs der Drehung die Winkelgeschwindigkeit Θ der Länge des Radiusvector selbst proportional ist, welcher vom Mittelpunkte nach dem Pole der augenblicklichen Drehungsaxe auf dem Centralellipsoid gezogen wird.**

19) Da nach dem Früheren $\Theta\cos i$ constant ist, so ist auch $u\cos i$ constant und folglich die Höhe h oder $u\cos i$ des Pols J über der Diametralebene des Paars G ist während des ganzen Verlaufs der Drehung constant. Da man aber für die Ebene des Paars G auch die Berührungsebene am Pol setzen kann, die ihr parallel ist, so kann man auch sagen, daß **die Ebene des Paars der angreifenden Kräfte stets in derselben Entfernung h vom Mittelpunkte O des Centralellipsoids bleibt.**

20) Aber dieser Mittelpunkt ist im absoluten Raume unbeweglich und die Ebene des Paars bleibt stets mit sich selbst parallel; folglich **diese Ebene, welche das Centralellipsoid im augenblicklichen Drehungspol berührt, ist eine unveränderliche im Raume feste Ebene.**

21) Dieses Ellipsoid rollt also nun, ohne zu **gleiten**, auf der erwähnten festen Ebene hin; denn da seine ganze Bewegung darin besteht, sich während eines Augenblicks um eine vom Mittelpunkte zum Berührungspunkte gezogene Gerade zu drehen, so bringt das Ellipsoid am Ende des Augenblicks dt einen neuen Punkt seiner Oberfläche mit der Ebene in Berührung; und dieser neue Punkt, welcher der Pol der Drehung für den nächsten Augenblick wird, bleibt ebenfalls während dieses Augenblicks unbeweglich; daher kann auch in der Folge keiner dieser Punkte, welche nach und nach mit der festen Ebene in Berührung kommen, jemals auf dieser Ebene gleiten.

22—23) Man kann sich also folgende klare und neue Vorstellung von der Drehung eines Körpers bilden, welcher sich frei um seinen Schwerpunkt oder um irgend einen anderen festen Punkt dreht, wenn er von irgend einem Kräftepaare angegriffen worden ist.

Um den Schwerpunkt, oder, wenn der Körper nicht frei ist, um den festen Punkt lege man ein Ellipsoid, dessen Axen in die Richtung der Hauptaxen fallen, welche diesem Punkte zukommen und deren Längen den Trägheitsarmen dieser Hauptaxen umgekehrt proportional sind. Wenn dieses Centralellipsoid, dessen Mittelpunkt im Raume unbeweglich ist, ohne zu gleiten, auf einer festen Ebene, mit der es in Berührung gekommen ist, hinrollt und so den Körper mit sich herumführt, so hat man eine genaue Darstellung der Bewegung, welche der Körper in Folge der Einwirkung eines Kräftepaars annimmt, welches ihn in der festen Ebene angegriffen hat. Die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich der Körper jeden Augenblick um den nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius dreht, ist der Länge dieses Radius proportional.

Zweites Kapitel.

Entwicklung der Auflösung.

24) Die stetige Folge von Punkten, mit welchen das Centralellipsoid des Körpers allmälig die feste Ebene des angreifenden Paars berührt, bezeichnet deutlich den Weg, welchen der Pol der augenblicklichen Drehung im Innern des Körpers durchläuft. Sein Weg im absoluten Raume wird durch diese Berührungspunkte auf der festen Ebene verzeichnet. Man kann also diese beiden Curven sogleich bestimmen und sie als die Basen zweier Kegelflächen betrachten, deren Spitzen zusammenfallen und von denen die eine mit dem Körper zugleich beweglich, auf der andern, im absoluten Raume festen, hinrollt und so dem Körper seine Bewegung ertheilt.

§. 1.

Die Curve, welche der augenblickliche Pol auf der Oberfläche des Centralellipsoids beschreibt.

25) Diese Curve s von doppelter Krümmung ist die stetige Folge der Punkte, in welcher ein Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c eine Ebene berühren kann, welche in der unveränderlichen Entfernung h vom Mittelpunkte desselben bleibt; oder auch die stetige Folge der Berührungspunkte einer Ebene und dieses Ellipsoids, welche sich so bewegt, daß sie außerdem noch eine ihm concentrische Kugel vom Radius h berührt. Diese Curve s ist offenbar eine geschlossene Linie doppelter Krümmung, eine Art elliptisches Rad, dessen Axe entweder die große Halbaxe a oder die kleine c des Centralellipsoids vorstellt, je nachdem der Radius h der Kugel größer oder kleiner als die mittlere Halbaxe b ist.

26) Die einfachste Rechnung lehrt dies auch, denn wenn das Centralellipsoid durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

gegeben ist, so erhält man bekanntlich die Entfernung h der Berührungsebene für den Punkt x, y, z durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen nach einander x, y, z, so erhält man die drei Gleichungen

$$\frac{b^2 - a^2}{b^4} y^2 + \frac{c^2 - a^2}{c^4} z^2 = \frac{h^2 - a^2}{h^2}$$

$$\frac{c^2 - b^2}{c^4} z^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^2 = \frac{h^2 - b^2}{h^2}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^4} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^4} y^2 = \frac{h^2 - c^2}{h^2}$$

welche die Projectionen der gesuchten Curve auf die drei Coordinatenebenen sind.

27) Man nehme stets an, es sei

$$a > b > c \text{ und } a > h > c$$

dann giebt offenbar die Projection der Curve s auf eine der Ebenen der yz oder xy eine ganze Ellipse und auf der andern einen Bogen einer Ellipse. Auf der Ebene der xz aber bildet sich ein hyperbolischer Bogen.

28) Wenn $h = b$ ist, so wird die Curve eben und eine bloße Ellipse, deren kleine Halbare b und große $\sqrt{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}$ ist.

29) Für $h = a$ und $h = c$ verwandelt sich die Curve in einen Punkt, der entweder der Pol A oder der Pol C des Centralellipsoids ist.

30) Während der augenblickliche Pol J die Curve s beschreibt, durchläuft ebenso der entgegengesetzte Pol J' eine dieser völlig gleiche s'.

31) Diese Curve doppelter Krümmung hat, wie eine Ellipse, vier Scheitel, durch welche sie in vier gleiche und symmetrische Theile getheilt wird. Diese Scheitel sind die vier Punkte, in welchen sie von den beiden Coordinatenebenen geschnitten wird, welche durch die zugehörige Are gehen. Man erhält diese Scheitel, wenn man die Marima des Ausdrucks

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sucht, in welchem die Veränderlichen x, y, z durch die beiden ersten Gleichungen der No. 26. verbunden sind.

§. 2.

Die Curve, welche der augenblickliche Pol im absoluten Raume beschreibt.

32) Betrachtet man die so eben bestimmte Curve s als die Basis einer Kegelfläche, deren Spitze der Mittelpunkt O des Ellipsoids ist, so beschreibt die Curve s die ebene Curve σ auf die Weise, daß sich, während der Bewegung des Körpers, der Kegel stets um seine Erzeugungslinie OJ dreht und dabei seine Basis an die feste Ebene anlegt. Daher sind die

Bogenelemente $d\sigma$ den Bogenelementen ds gleich; so daß, wenn man eine Gleichung der letzteren zwischen der Länge ihres Bogens s und dem zugehörigen Radiusvector u hat, man bloß in ihr s mit σ zu vertauschen braucht, um die Gleichung der ebenen Curve zwischen ihrem Bogen und dem zugehörigen von O ausgehenden Radiusvector u zu erhalten.

33) Da aber σ eine ebene Curve ist, so fällt man lieber vom Mittelpunkte O des Ellipsoids ein Loth h auf die feste Ebene und zieht vom Fußpunkte P desselben einen Radiusvector v nach der Curve σ, so daß man jetzt u durch $\sqrt{h^2+v^2}$ ersetzen und so eine Gleichung zwischen σ und v erhalten kann.

34) Der Radiusvector v ist nichts anderes als die Projection der Speiche u des Radius s, dessen Elemente ds sich allmälig an die feste Ebene anlegen und so die Elemente $d\sigma$ der ebenen Curve σ bilden. Der Radiusvector v geht also eben so wie der Radiusvector u von einem Maximum zu einem Minimum über und von diesem wieder zu einem Maximum, welches dem ersten völlig gleich ist, und dies wiederholt sich ins Unendliche in Zwischenräumen der Curve σ, welche dem vierten Theile der erzeugenden Curve s und also unter einander völlig gleich sind.

Also ist die Curve σ, welche der augenblickliche Pol im absoluten Raume beschreibt, eine ebene Curve, welche in regelmäßigen Windungen um ein und denselben Mittelpunkt läuft; also eine Curve durch eine Folge gleicher und regelmäßiger Wellen gebildet, deren Gipfel gleich weit von einander abstehen und welche sich zwischen zwei concentrischen Kreisen hinzieht, deren Umfänge sie abwechselnd berührt.

35) Wenn der Winkel am Mittelpunkte, welcher zwei auf einander folgenden oberen oder unteren Scheiteln der wellenförmigen Curve σ entspricht, mit vier rechten commensurabel ist, und wenn man durch u die kleinste ganze Zahl von Kreisen bezeichnet, welche dieser Winkel oder Sector mißt, so ist σ eine geschlossene Curve; und der Pol, welchen sie beschreibt, durchläuft genau seinen ersten Weg wieder, nachdem er n mal den ganzen Winkelraum durchlaufen hat.

Da aber der Zwischenraum zwischen zwei gleichnamigen Scheiteln nur einer Hälfte der beweglichen Curve s entspricht, so muß man offenbar diese Zahl der Umläufe verdoppeln, wenn man will, daß der augenblickliche Pol sich nicht allein an demselben Orte im absoluten Raume, sondern auch an derselben Stelle auf der Oberfläche des Centralellipsoids befinden soll.

36) Wenn der erwähnte Winkel nicht mit vier rechten commensurabel ist, so schließt sich die wellenförmige Curve σ nie; und der augenblickliche Pol, welcher periodisch zu demselben Orte im Körper zurückkehrt, kann niemals zu gleicher Zeit denselben Ort des Raumes wieder erreichen.

37) Obgleich die beiden Curven s und σ von so verschiedener Gestalt sind, so sind doch ihre Gleichungen zwischen dem Radiusvector, der vom Punkte O ausgeht, und der Länge des

durchlaufenen Bogens nur ein und dieselbe. Der rollende Kegel, dessen Basis die Curve s ist, ist bloß ein gerader Kegel zweiten Grades; aber der feste Kegel, auf welchem er rollt, ist ein transcendenter Kegel, dessen Oberfläche unaufhörlich um die feste Axe des Kräftepaars Wellen schlägt; es ist auch eine Art von geraden und kreisförmigen Kegel, dessen Oberfläche aber, seiner wellenförmigen Basis σ gemäß, ausgefurcht ist.

§. 3.

Verschiedenheiten, welche die beiden Curven s und σ in besonderen Fällen darbieten können.

38) Diese beiden Curven hängen nur von den Halbaxen a, b, c des Centralellipsoids und von der Entfernung h, des Mittelpunkts desselben von der Berührungsebene oder der Ebene des angreifenden Kräftepaars ab.

Die Verschiedenheiten, welche diese Curven bei ein und demselben Körper darbieten können, hängen also nur von den besonderen Werthen der constanten Linie h ab.

Diese Linie liegt offenbar zwischen dem größten und kleinsten Halbmesser des Ellipsoids, und da wir annahmen

$$a > b > c$$

so hat man im Allgemeinen nur zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem h zwischen a und b oder zwischen b und c liegt.

Außerdem müssen noch die besonderen Fälle, wenn $h = a$ und $h = c$ ist, untersucht werden und ferner der eigenthümliche Fall, wenn $h = b$ ist.

In den beiden allgemeinen Fällen sind die Curven s und σ bereits beschrieben.

In den beiden besonderen Fällen, wo $h = a$ oder $h = c$ ist, verwandelt sich jede von ihnen in einen Punkt, welcher der Scheitel A oder C des Ellipsoids ist; und der Körper dreht sich gleichförmig um die eine oder die andere der beiden Axen $2a$ oder $2c$. Diese Axen bleiben dann unbeweglich im absoluten Raume und fallen stets mit der Axe des Paars G zusammen.

39) In dem eigenthümlichen Falle, wenn $h = b$ ist, giebt es auf dem Ellipsoide außer dem Scheitel B noch unendlich viele Punkte, für welche die Berührungsebene den Abstand b vom Mittelpunkte O hat. Die Folge dieser Punkte bildet zwei gleiche Ellipsen, deren Ebenen sich in der Axe $2b$ schneiden und gegen die Ebene (ab) unter einem Winkel geneigt sind, dessen Tangente $\pm \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$ ist. Ihre kleine Halbaxe ist b und ihre große

$$\beta = \sqrt{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}$$

wie schon in No. 28. angegeben wurde.

40) In diesem eigenthümlichen Falle, wenn $h = b$ ist, wird also die Curve σ durch die Bewegung einer der beiden Ellipsen s erzeugt, deren Mittelpunkt in O, in der Höhe b über der festen Ebene, unbeweglich gehalten wird, während ihr Umfang auf der festen Ebene hinrollt. Die Curve σ, welche der Berührungspunkt beschreibt, ist eine Spirale, welche sich

dem Mittelpunkte P in unaufhörlichen Windungen nähert, ohne ihn je zu erreichen. Diese Spirale ist eine symmetrische Curve in Bezug auf eine gewisse gerade Linie, welche sie in zwei gleiche Theile theilt. Denn läßt man die Ellipse im entgegengesetzten Sinne zurückrollen, so erreicht der Radiusvector v ein gewisses Maximum

$$v = \sqrt{\beta^2 - b^2}$$

worauf er in derselben Weise wieder abnimmt wie er zugenommen hat, so daß sein Endpunkt J nun eine der ersten vollkommen gleiche Spirale beschreibt, welche mit ihr zusammen die stetige Curve σ bildet. Diese Curve hat also einen Scheitel, von dem aus zu beiden Seiten zwei gleiche Zweige auslaufen, welche sich um den Mittelpunkt P winden; und obgleich jeder dieser Zweige diesen Punkt P in unendlich vielen Windungen umgiebt, ohne ihn jemals erreichen zu können, so ist doch die ganze Länge der Curve endlich und dem halben Umfange der rollenden Ellipse gleich.

Der Pol J, welchen diese Spirale von endlicher Länge durchläuft, kann sie doch niemals ganz zurücklegen.

In diesem eigenthümlichen Falle der Bewegung der Körper ist der augenblickliche Pol der Drehung ein immer neuer Punkt, sowohl im Körper als im Raume.

So eigenthümlich ist also die Bewegung des Pols, wenn $h = b$ ist oder die Ebene des angreifenden Kräftepaars das Centralellipsoid in einem Punkte berührt, welche der einen oder der anderen der beiden erwähnten Ellipsen angehört.

41) Berührt aber die Ebene den mittleren Scheitel B des Ellipsoids, wo sich die beiden Ellipsen schneiden, selbst, dann bleibt der Pol J, welcher jetzt mit B und dem Mittelpunkte P zusammenfällt, vollkommen unbeweglich und der Körper dreht sich unaufhörlich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die mittlere Axe OB, ganz so wie er sich auch um OA oder OC drehen würde, wenn die Ebene A oder C berührte. Denn in der That sähe man nicht ein, warum er lieber die eine als die andere der beiden völlig gleichen Ellipsen durchlaufen sollte, und daher ist die mittlere Axe des Centralellipsoids, eben so wie die beiden anderen, eine dauernde Drehungsaxe.

42) Aber um diese mittlere Axe hat die Drehung keine Stabilität oder Sicherheit, d. h. wenn sich der Pol J, vermöge eines kleinen fremden Kräftepaars, welches den Körper angreift, auch noch so wenig vom Scheitel B entfernt, so wächst diese Entfernung stets mehr und mehr und er beschreibt dann an der Oberfläche eine elliptische Curve s um die große Axe oder um die kleine, je nachdem diese zufällige Verschiebung des Pols die Entfernung h von der Berührungsebene vermehrt oder vermindert hat. Hat diese Verschiebung aber die Entfernung h nicht verändert, so durchläuft der Pol eine der beiden erwähnten Ellipsen.

43) In einem einzigen Falle würde der Pol J, wenn er sich vom Scheitel B entfernt hat, wieder dahin zurückkehren; nämlich dann, wenn er auf einer der beiden Ellipsen nach der Seite fortgerückt wäre, von wo ihn der Sinn der Drehung wieder nach B zurücktriebe.

Hat er sich aber auf derselben Ellipse nach der anderen Seite entfernt, so entfernt er sich immer weiter von dem Scheitel B und fällt nach einer unendlich langen Zeit auf den entgegengesetzten Scheitel B' des Ellipsoids. Also in diesem Falle würde das Ellipsoid, welches anfangs die feste Ebene mit seinem Scheitel B berührte, sie endlich mit dem entgegengesetzten Scheitel B' berühren; so daß sich also die Stellung des Körpers im Raume vollständig umgekehrt hätte. Es ist dies die größte Aenderung, welche der Angriff eines kleinen fremden Kräftepaars in der Stellung eines Körpers hervorbringen kann, welcher sich gegenwärtig um seine mittlere Axe dreht; denn wenn sich der Pol auf irgend eine andere Weise auf der Oberfläche des Ellipsoids verschoben hat, so beschreibt er, wie wir gesehen haben, eine geschlossene Curve s entweder um die große Axe oder um die kleine, und wenn er sich also anfangs von B entfernt, so nähert er sich dann wieder und kehrt periodisch zu derselben Entfernung von B auf der Oberfläche zurück und zu derselben Entfernung vom festen Mittelpunkte P im absoluten Raume.

44) Es giebt noch eine andere Verschiedenheit der Curve σ, welche der augenblickliche Pol im Raume beschreiben kann, aber sie hängt nicht von der Lage des angreifenden Kräftepaars ab, sondern von dem Verhältniß der drei Halbaxen a, b, c zu einander.

45) Wenn zwei der drei Axen des Ellipsoids gleich sind, so ist es entweder ein verlängertes oder abgeplattetes Sphäroid. In beiden Fällen ist offenbar der Weg s des Pols ein Kreis um die Axe des Sphäroids, und folglich der Weg σ des Pols auf der festen Ebene auch ein Kreis um die Axe des Paars, welches den Körper in Bewegung gesetzt hat. Dies ist einer der einfachsten Fälle der Drehung eines Körpers, weil hier Alles kreisförmig und gleichförmig ist. Ist aber der Umfang des rollenden Kreises s nicht commensurabel mit dem des festen σ, so kann der augenblickliche Pol niemals wieder zu gleicher Zeit in demselben Punkte des Körpers und des Raumes anlangen.

46) Sind alle drei Axen des Centralellipsoids einander gleich, so wird es eine Kugel und die Drehungsaxe fällt mit der Axe des Kräftepaars zusammen, die beiden Curven s und σ verwandeln sich beide in ein und denselben Punkt und der augenblickliche Pol J bleibt völlig unbeweglich, sowohl im Körper als im absoluten Raume.

§. 4.

Das Maß der Stabilität für jede der beiden äußersten Axen des Centralellipsoids.

47) Man denke sich die Oberfläche des Centralellipsoids durch die beiden erwähnten eigenthümlichen Ellipsen in vier keilförmige Stücke getheilt. Der Scheitel B liegt nach No. 39. im Durchschnitt der beiden Ellipsen. Nennt man λ den Winkel, den die Ebenen der Ellipse mit der großen Axe $2a$ des Ellipsoids bilden, so ist $\operatorname{tg}\lambda = \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ und der Scheitel A fällt in den Mittelpunkt der Kreisfläche, deren Schneidenebenen den Winkel 2λ mit einander bilden, während der Scheitel C der kleinen Axe in die supplementare Keilfläche fällt.

Fällt nun der augenblickliche Pol J der Drehung in die Keilfläche, welche den Scheitel A enthält, so beschreibt er seine Curve s stets um diesen Scheitel; fällt er dagegen in die supplementare Keilfläche, so legt er seinen Weg um den Scheitel C zurück. Die krummen Oberflächen dieser beiden Keile geben also ein passendes Maß für die Größe der Stabilität der Drehung um den größten und kleinsten Scheitel des Centralellipsoids ab. Es ist bereits oben der Fall besprochen, wenn der augenblickliche Pol in den eigenthümlichen Ellipsen selbst liegt.

48) Unterscheidet sich a nur wenig von b, so ist der Keil mit dem Scheitel A sehr klein und der mit dem Scheitel C sehr groß. Die Axe, welche sich also wenig von der mittleren unterscheidet, hat nur geringe Stabilität, die andere dagegen viel.

Es ist also falsch zu sagen, daß wenn die augenblickliche Drehungsaxe sich ein Wenig von der Axe entfernt, welche dem größten oder kleinsten Trägheitsmomente entspricht, sie während der ganzen Dauer der Bewegung nur kleine Oscillationen um diese Axe machen wird; denn wenn das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe nur wenig von dem mittleren Trägheitsmomente verschieden ist, so kann der augenblickliche Pol durch eine kleine Störung aus der Oberfläche des kleinen Keils, in dem er sich gegenwärtig befindet, in die Oberfläche des benachbarten treten und dort seinen Weg um die andere Axe beschreiben. Selbst wenn er durch die Störung im Innern des kleinen und schmalen Keils bleibt, in dem er sich befindet, so kann er doch sehr große Schwankungen um den Scheitel machen, von dem er sich so eben entfernt hat.

In Körpern, wo eins der äußersten Trägheitsmomente wenig von dem mittleren verschieden ist, also das Centralellipsoid fast die Gestalt eines Umdrehungssphäroids hat, ist die Stabilität der Drehung nur wirklich für diese Umdrehungsaxe groß. Dies ist der Fall bei der Erde, deren Drehung um ihre gegenwärtige Axe sehr sicher ist, während eine Drehung um die dritte Axe, welche bekanntlich von der mittleren sehr wenig abweicht, sehr unsicher sein würde.

Ist das Centralellipsoid ein wirkliches Umdrehungssphäroid, so ist nur die Umdrehungsaxe eine sichere Drehungsaxe. Denn wenn der augenblickliche Pol gegenwärtig in den Aequator fällt, und durch irgend eine Ursache ein Wenig von ihm entfernt wird, so bleibt er nicht mehr unbeweglich, sondern beschreibt auf der Oberfläche des Ellipsoids einen Kreis s, welcher dem Aequator parallel und ihm fast gleich ist; nimmt also eine sehr beträchtliche Bewegung an. Dagegen im absoluten Raume ist seine Bewegung nur gering, denn der feste Kreis σ, welchen er im Raume beschreibt, hat die sehr kleine Entfernung JP des Pols J vom Fuße P des Lothes, welches vom Mittelpunkte O auf die Berührungsebene in J gefällt ist, zum Radius. So beschreibt also die augenblickliche Drehungsaxe OJ im absoluten Raume einen Kegel mit sehr kleiner Basis und scheint fast unbeweglich, während sie im Körper die Oberfläche eines weit geöffneten fast ebenen Kegels durchläuft.

Nur in dem einen Falle, wenn die augenblickliche Axe von einem Punkte des Aequators, in dem sie sich bereits befindet, in einen anderen Punkt desselben verschoben wird, behält sie diese Stellung unverändert bei, sowie sie ihren ersten Ort behauptet hätte, wenn sie nicht durch eine Störung aus ihm verdrängt worden wäre.

49) Verwandelt sich das Centralellipsoid in eine Kugel, dann sind alle Axen gleich sicher oder gleichgültig gegen jede zufällige Verschiebung. Denn nach einer solchen Verschiebung bleibt die Axe in ihrer neuen Lage und wird abermals sowohl im Körper als im Raume unbeweglich.

§. 5.

Die Namen, welche man den beiden Curven s und σ geben könnte.

50) Denkt man sich einen schweren Körper im Raume fortgeschleudert, so wird offenbar die drehende Bewegung, welche er um seinen Schwerpunkt annimmt, ganz dieselbe sein, wie wenn er keine Schwere hätte, denn die parallelen Schwerkräfte, welche jeden Augenblick auf alle Atome des Körpers wirken, setzen sich stets zu einer einzigen Kraft zusammen, die durch den Schwerpunkt geht und geben durchaus kein Kräftepaar, welches die Drehung des Körpers um diesen Punkt ändern könnte. Eine solche Aenderung der augenblicklichen Drehungsaxe kann nur das Paar g der Schwungkräfte, welche aus der Drehung selbst entstehen, hervorbringen, ähnlich wie bei einem Körper, der von jeder fremden Einwirkung völlig frei ist.

Die beiden Curven s und σ, welche der augenblickliche Pol beschreibt, bieten uns stets die Bewegungen der Geschosse dar, und jede von ihnen verdient eben so gut einen besonderen Namen, wie die Bahn, welche ihr Schwerpunkt beschreibt, Parabel genannt worden ist.

Poinsot schlägt vor, von den Curven, die der augenblickliche Pol durchläuft, die eine s Poloïde und die andere σ Serpoloïde zu nennen, um an das französische serpenter, sich schlängeln, zu erinnern. Diese Namen sind auch bereits von anderen Schriftstellern angenommen worden.

§. 6.

Differenzialgleichungen dieser Curven.

51) Die Gleichung der Poloide ist leicht zu finden; denn sind x, y, z die Coordinaten des Pols, welcher die Curve s auf der Oberfläche des Centralellipsoids beschreibt, so ist nach Nr. 28.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ und } \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2}$$

und wenn u den vom Mittelpunkte ausgehenden Radiusvector bezeichnet

$$x^2+y^2+z^2=u^2$$

Bestimmt man aus diesen drei Gleichungen die Werthe von x^2, y^2, z^2, so erhält man

$$x^2=\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left\{u^2-\left(b^2+c^2-\frac{b^2c^2}{h^2}\right)\right\}$$

$$y^2=\frac{b^4}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\left\{u^2-\left(c^2+a^2-\frac{c^2a^2}{h^2}\right)\right\}$$

$$z^2=\frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\left\{u^2-\left(a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{h^2}\right)\right\}$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen dx, dy, dz durch u und du und setzt diese Werthe in den Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

so erhält man zwischen den Veränderlichen s und u die gesuchte Gleichung der Poloide.

Verwandelt man in dieser Gleichung ds in $d\sigma$ und u^2 in $v^2 + h^2$ oder udu in vdv, so erhält man die Gleichung der Serpoloide zwischen ihrem Bogen σ und dem Radiusvector v, der vom Mittelpunkte P dieser ebenen Curve ausgeht. Nennt man noch φ den Winkel, welchen der Radiusvector v mit einer willkürlich in der Ebene dieser Curve gezogenen Geraden macht, so hat man bekanntlich die Gleichung

$$d\sigma^2 = dv^2 + v^2 d\varphi^2$$

und setzt man in ihr statt $d\sigma$ seinen Ausdruck in v und dv aus der vorigen Gleichung, so erhält man die Gleichung der Serpoloide zwischen ihrem Radiusvector v und dem Winkel φ, welchen er um den Mittelpunkt beschreibt, oder die Polargleichung dieser Curve.

Alle diese Rechnungen haben zwar keine Schwierigkeit, aber es ist gut, dabei einige analytische Abkürzungen zu benutzen und die folgende wesentliche Bemerkung zu beachten.

Bemerkung 1.

Die Angaben zu dieser Analyse.

52) Die drei ersten sind die Halbaxen a, b, c des Centralellipsoids, welche stets durch die Natur des Körpers bestimmt sind, da diese drei Linien den Trägheitsarmen für die drei Hauptaxen umgekehrt proportional sind. Wir nehmen an, wie schon bemerkt,

$$a > b > c$$

Die Radien a und c, als die größten und kleinsten des Centralellipsoids, kommen in ihm nur zweimal vor, dagegen der mittlere b findet sich, seiner Größe nach, unendlich oft. Alle diese gleichen Radien b liegen in den Ebenen der Kreisschnitte des Ellipsoids. Diese Ebenen sind gegen die Ebene (ab) unter einem Winkel geneigt, dessen Tangente $\pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ ist.

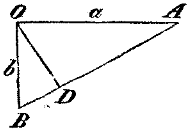
Die Hauptträgheitsmomente des Körpers verhalten sich wie die drei Größen der Ungleichungen

$$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$$

Aus der Bildungsweise der Trägheitsmomente erhellt, daß jedes derselben kleiner ist als die Summe der beiden andern. Für die beiden Momente $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{b^2}$ ist dies von selbst klar, aber für das größte $\frac{1}{c^2}$ nicht. Außer den beiden obigen Ungleichungen muß also noch die stattfinden

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ oder } c > \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Fig. 21.



53) Es ist aber $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ die Entfernung OD der Spitze O eines rechtwinkligen Dreiecks AOB von der Hypotenuse, wenn a und b die Catheten des Dreiecks sind. Die kleine Axe c des Centralellipsoids muß also stets größer als OD und kleiner als OB sein.

Daraus folgt, daß das Centralellipsoid ein beliebig verlängertes sein kann, selbst bis ins Unendliche, in welchem Falle die beiden Axen b und c gleich werden; aber es kann nicht ein beliebig stark abgeplattetes sein, wie sich aus der Figur ergiebt, da nämlich, der Bedingung gemäß, $a > b$ bleiben muß.

Ist $b = a$ also das Ellipsoid ein Umdrehungsellipsoid mit der Axe $2c$, so kann sich seine Gestalt nur von der einer Kugel bis zu einem abgeplatteten Sphäroide erstrecken, dessen Umdrehungsaxe $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vom Durchmesser des Aequators ist.

54) Obgleich es also in der Natur Körper giebt von der mannigfaltigsten Gestalt und Zusammensetzung, so sind die ihnen entsprechenden Centralellipsoide doch nicht eben so mannigfaltig gestaltet; denn wenn man zwar die Halbaxen a und b willkürlich wählen kann, so muß doch die kleinste c zwischen b und $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ liegen. Diese Bemerkung ist wichtig, denn man würde, ohne sie zu beachten, Eigenschaften der Bewegung in Betracht ziehen, die nur emaginären Körpern angehörten.

55) Bei der vierten Angabe h, der Entfernung des Mittelpunktes O von der Ebene des angreifenden Paares, welche das Centralellipsoid berührt, ist nur zu beachten, daß sie stets zwischen a und c liegt.

Analytische Abkürzungen.

56) Man setze

$$b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2} = \alpha^2$$

$$c^2 + a^2 - \frac{c^2 a^2}{h^2} = \beta^2$$

$$a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2} = \gamma^2$$

und bemerke, daß die Größen α^2, β^2, γ^2 stets positiv sind, was sich, wegen $h > c$, von selbst versteht. Da nach Nr. 52. $c^2 > a^2 b^2 : (a^2 + b^2)$, so ist auch $h^2 > a^2 b^2 : (a^2 + b^2)$ und daher auch γ^2 positiv.

Also sind α, β, γ stets drei reelle Linien, von denen nur die letzte Null werden kann, was nur für $h = ab : \sqrt{a^2 + b^2}$ oder, was dasselbe ist, für $h = c$ geschehen kann.

57) Man findet

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{h^2 - c^2}{h^2}(a^2 - b^2)$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \frac{a^2 - h^2}{h^2}(b^2 - c^2)$$

daher ist β die größte der drei Linien α, β, γ.

Ferner ist

$$\gamma^2 - \alpha^2 = \frac{h^2 - b^2}{h^2}(a^2 - c^2)$$

daher ist offenbar

$$\beta > \gamma > \alpha \text{ für } h > b$$
$$\text{und } \beta > \alpha > \gamma \text{ für } h < b$$

Bemerkung 2.

Maxima und Minima der Vectoren der Poloide.

58) Die drei Linien α, β, γ haben in unserem Probleme eine besondere Bedeutung. Aus den drei Gleichungen der Poloide in No. 51., welche sich so schreiben lassen

$$x^2 = \frac{a^4(u^2 - \alpha^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad y^2 = \frac{b^4(u^2 - \beta^2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \quad z^2 = \frac{c^2(u^2 - \gamma^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

sieht man, daß β der größte der Vectoren u ist, denn für $u = \beta$ werden diese Gleichungen befriedigt und führen nur zu positiven Werthen von x^2, y^2, z^2; aber jeder Werth von $u > \beta$ macht y^2 negativ, also y imaginär, kann daher kein Radiusvector der Curve sein.

Also ist $u = \beta$ der größte Radiusvector und fällt, da $y = 0$ wird, in die Ebene (ac).

Für den kleinsten Radiusvector muß man zwei Fälle unterscheiden:

1) Wenn $h > b$, so ist dieser kleinste Radiusvector die Linie γ; denn jeder Werth $u < \gamma$ führt zu $z^2 < 0$, also zu einem imaginären z. Die Linie γ ist also dann der kleinste Radiusvector und da für ihn $z = 0$, so fällt er in die Ebene (ab).

In diesem selben Falle, wenn $h > b$, kann die Linie α keinem Radiusvector der Curve s zukommen, denn es ist aus No. 57. $\alpha < \gamma$ und γ ist schon der kleinste Radiusvector.

2) Wenn $h < b$, so ist α der kleinste Vector, dem $x = 0$ entspricht, der also in die Ebene (bc) fällt und γ kann keinem Vector entsprechen, da jetzt $\gamma < \alpha$.

Andere Abkürzungen.

59) Man setze

$$a^2 - b^2 = e^2$$
$$b^2 - c^2 = e'^2$$
$$c^2 - a^2 = e''^2$$
$$e^2 e'^2 e''^2 = -\varepsilon^6$$

dann bezeichnen e^2, e'^2, $-e''^2$ die Quadrate der Excentricitäten der drei Axenschnitte (ab), (bc), (ac) des Centralellipsoids.

60) Hiernach lassen sich nun die drei Gleichungen der Poloide in No. 51. so schreiben

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^6 x^2 &= a^4 e'^2 (u^2 - \alpha^2) \\ \varepsilon^6 y^2 &= b^4 e''^2 (u^2 - \beta^2) \\ \varepsilon^6 z^2 &= c^4 e^2 (u^2 - \gamma^2) \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt

$$\varepsilon^6 (x^2 + y^2 + z^2) = (a^4 e'^2 + b^4 e''^2 + c^4 e^2) u^2 - (a^4 e'^2 \alpha^2 + b^4 e''^2 \beta^2 + c^4 e^2 \gamma^2)$$

oder, da

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2$$

so folgt hieraus

$$a^4 e'^2 + b^4 e''^2 + c^4 e^2 = \varepsilon^6$$
$$a^4 e'^2 \alpha^2 + b^4 e''^2 \beta^2 + c^4 e^2 \gamma^2 = 0$$

Dividirt man die erste der Gleichungen (A) durch α^2, die zweite durch β^2, die dritte durch γ^2 und addirt die drei erhaltenen Quotienten, so findet man

$$\varepsilon^6 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = (a^2 e'^2 + b^2 e''^2 + c^2 e^2) u^2 - (a^2 e'^2 \alpha^2 + b^2 e''^2 \beta^2 + c^2 e^2 \gamma^2)$$

Aber da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und die gefundene Gleichung für jedes u gelten muß, so ergiebt sich

$$a^2 e'^2 \alpha^2 + b^2 e''^2 \beta^2 + c^2 e^2 \gamma^2 = -\varepsilon^6$$
$$a^2 e'^2 + b^2 e''^2 + c^2 e^2 = 0$$

Dividirt man dagegen dieselben Gleichungen entsprechend durch a^4, b^4, c^4 und addirt die Quotienten, so entsteht die Gleichung

$$\varepsilon^6 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) = (e'^2 + e''^2 + e^2) u^2 - (\alpha^2 e'^2 + \beta^2 e''^2 + \gamma^2 e^2)$$

Aber

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2}$$

daher wird, wie oben,

$$\alpha^2 e'^2 + \beta^2 e''^2 + \gamma^2 e^2 = -\frac{\varepsilon^6}{h^2}$$
$$e'^2 + e''^2 + e^2 = 0$$

Benutzt man das Summenzeichen Σ, so kann man die erhaltenen sechs Gleichungen so schreiben

(1) $\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6$	(2) $\Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 = 0$
(3) $\Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 = -\varepsilon^6$	(4) $\Sigma a^2 e'^2 = 0$
(5) $\Sigma \alpha^2 e'^2 = -\dfrac{\varepsilon^6}{h^2}$	(6) $\Sigma e'^2 = 0$

61) Wir benutzen ferner noch folgende Abkürzungen

$$(h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)=h^6-Ah^4+Bh^2-C=D$$
$$(h^2-\alpha^2)(h^2-\beta^2)(h^2-\gamma^2)=h^6-Ph^4+Qh^2-R=\varDelta$$

wobei

$$A=a^2+b^2+c^2 \qquad P=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$
$$B=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \qquad Q=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$$
$$C=a^2b^2c^2 \qquad R=\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Die Größen P, Q, R lassen sich durch A, B, C, aus No. 56., auf folgende Weise ausdrücken

$$P=2A-\frac{B}{h^2}$$
$$Q=A^2+B-\frac{AB+3C}{h^2}+\frac{AC}{h^4}$$
$$R=AB-C-\frac{B^2+AC}{h^2}+\frac{2BC}{h^4}-\frac{C^2}{h^6}$$

62) Aus No. 56. erhält man

$$h^2-\alpha^2=\frac{(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h^2}$$
$$h^2-\beta^2=\frac{(h^2-c^2)(h^2-a^2)}{h^2}$$
$$h^2-\gamma^2=\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)}{h^2}$$

Daher vermöge No. 61.

$$\varDelta h^6=D^2$$

Gleichung der Poloide zwischen dem Bogen s und dem Radiusvector u.

63) Die Differenziale der Gleichungen (A) in No. 60. geben

$$dx^2=\frac{a^4e'^2u^2du^2}{\varepsilon^6(u^2-\alpha^2)},\quad dy^2=\frac{b^4e''^2u^2du^2}{\varepsilon^6(u^2-\beta^2)},\quad dz^2=\frac{c^4e^2u^2du^2}{\varepsilon^6(u^2-\gamma^2)}$$

und wenn man addirt

$$ds^2=\frac{u^2du^2}{\varepsilon^6}\left(\frac{a^4e'^2}{u^2-\alpha^2}+\frac{b^4e''^2}{u^2-\beta^2}+\frac{c^4e^2}{u^2-\gamma^2}\right)$$

oder

$$ds^2=\frac{u^2du^2}{\varepsilon^6}\left\{\frac{u^4\Sigma a^4e'^2-u^2\Sigma a^4e'^2(\beta^2+\gamma^2)+\Sigma a^4e'^2\beta^2\gamma^2}{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)(u^2-\gamma^2)}\right\}$$

Es ist aber, vermöge No. 60.,

$$\Sigma a^4e'^2=\varepsilon^6$$
$$\Sigma a^4e'^2(\beta^2+\gamma^2)=\Sigma a^4e'^2(P-\alpha^2)=P\Sigma a^4e'^2-\Sigma a^4e'^2\alpha^2=P\varepsilon^6$$
$$\Sigma a^4e'^2\beta^2\gamma^2=\Sigma a^4e'^2(Q-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2))=Q\Sigma a^4e'^2-\Sigma a^4e'^2\alpha^2(P-\alpha^2)$$
$$=Q\varepsilon^6+\Sigma a^4e'^2\alpha^4=Q\varepsilon^6+\Sigma a^2e'^2\alpha^2(a^2\alpha^2)$$

Es ist aber

$$(a^2\alpha^2) = a^2b^2 + a^2c^2 - \frac{a^2b^2c^2}{h^2} = B - b^2c^2 - \frac{C}{h^2}$$

also

$$\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2 = Q\varepsilon^6 + \left(B - \frac{C}{h^2}\right)\Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 - C\Sigma \alpha^2 e'^2 = \varepsilon^6\left(Q - B + \frac{2C}{h^2}\right)$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$ds^2 = u^2 du^2 \cdot \frac{u^4 - Pu^2 + Q - B + 2C : h^2}{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)}$$

oder

$$ds = udu\sqrt{\frac{u^4 - Pu^2 + Q - B + 2C : h^2}{u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R}}$$

als Differenzialgleichung der Poloide.

64) In dem Falle wenn $h = b$ wird

$$\alpha = \gamma = b,\ P = 2b^2 + \beta^2,\ Q - B + 2C : h^2 = b^2(b^2 + \beta^2)$$

also die Gleichung der Poloide

$$ds = udu\sqrt{\frac{u^2 - b^2 - \beta^2}{(u^2 - b^2)(u^2 - \beta^2)}}$$

Dies ist aber nichts Anderes als die Differenzialgleichung einer Ellipse, mit den Halbaxen b und β, zwischen dem Bogen s und dem Radiusvector u, ein Resultat, welches uns bereits bekannt ist. Man kann also diese Gleichung integriren und das Integral etwa so ausdrücken

$$s = arc\,(\text{radvect} = u)\ \ (\text{Ellipse } b, \beta)$$

Gleichung der Serpoloide σ.

65) In der Gleichung der Poloide braucht man bekanntlich nur ds mit $d\sigma$ und u^2 mit $v^2 + b^2$, also udu mit vdv zu vertauschen, um die Gleichung der Serpoloide zu erhalten; man finde so

$$d\sigma = vdv\sqrt{\frac{(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + Q - B + 2C : h^2}{(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2) + Q(v^2 + h^2) - R}}$$

als Differenzialgleichung der Serpoloide zwischen dem Bogen σ und dem Radiusvector v, welcher vom Mittelpunkte dieser ebenen Curve ausgeht.

Polargleichung der Serpoloide.

66) Bildet v mit einer festen Geraden den Winkel φ, so ist bekanntlich

$$d\sigma^2 = dv^2 + v^2 d\varphi^2 \text{ oder } d\varphi = \frac{1}{v}\sqrt{d\sigma^2 - dv^2}$$

Setzt man in diesen Ausdrnck für $d\sigma$ seinen Werth, so erhält man leicht

$$d\varphi = \frac{dv}{v}\sqrt{\frac{h^2v^4 + (2h^4 - Ph^2 - B + 2C : h^2)v^2 + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R)}{R - Q(v^2 + h^2) + P(v^2 + h^2)^2 - (v^2 + h^2)^3}}$$

Der Zähler dieses Bruches ist aber ein Quadrat, wie man bald sieht, wenn statt Ph^2 sein Werth $2Ah^2 - B$ gesetzt wird. Man findet dann, mit Hülfe von No. 61., leicht

$$d\varphi = \frac{dv}{v} \cdot \frac{hv^2 + D:h^3}{\sqrt{R - Q(v^2+h^2) + P(v^2+h^2)^2 - (v^2+h^2)^3}}$$

als die gesuchte Polargleichung.

67) Es ist aber

$$\Delta = h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R$$

und wenn man die Differenzialquotienten nach h^2 durch Accente bezeichnet,

$$\Delta' = 3h^4 - 2Ph^2 + Q$$
$$2\Delta'' = 2 \cdot 3h^2 - 2P$$

wo statt Δ'' bequemer $2\Delta''$ geschrieben ist. Setzt man diese Werthe in dem Ausdruck für φ ein und bemerkt, daß $D:h^3$ durch $\sqrt{\Delta}$ ersetzt werden kann, so verwandelt sich die gefundene Differenzialgleichung in

$$d\varphi = \frac{dv}{v\sqrt{-1}} \cdot \frac{hv^2 + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta + \Delta' v^2 + \Delta'' v^4 + v^6}}$$

ein Ausdruck, der nicht etwa imaginär ist, da die Wurzelgröße stets negativ sein muß.

Für $v^2 = \varrho$ führt diese Gleichung zu der Formel

$$d\varphi = \frac{(\sqrt{\Delta} + h\varrho)d\varrho}{2\varrho\sqrt{-1}\sqrt{\Delta + \Delta'\varrho + \Delta''\varrho^2 + \varrho^3}}$$

deren Integral elliptisch ist.

Besonderer Fall wenn $h = b$, wo die Serpoloide eine Spirale wird.

68) Setzt man in No. 64. $ds = d\sigma$ und $u^2 = v^2 + b^2$, so wird die Gleichung der Serpoloide

$$d\sigma = \frac{dv\sqrt{\beta^2 - v^2}}{\sqrt{\beta^2 - b^2 - v^2}}$$

deren Integral ebenfalls die Rectification einer Ellipse erfordert und in der Form erscheinen kann

$$\sigma = arc(\text{radvect} = \sqrt{b^2 + v^2})\ (\text{Ellipse } b, \beta)$$

69) Mit Hülfe der Formel $d\sigma^2 = dv^2 + v^2 d\varphi^2$ erhält man

$$d\varphi = \frac{b\,dv}{v\sqrt{\beta^2 - b^2 - v^2}}$$

als Polargleichung der Curve.

Setzt man

$$\sqrt{\beta^2 - b^2} = n$$

bezeichnet also durch n die Excentricität der rollenden Ellipse s, welche die Curve σ erzeugt, so wird das Integral der vorigen Gleichung

$$\varphi = \frac{b}{n} \log\left(\frac{n - \sqrt{n^2 - {}^2}}{v}\right)$$

Hierbei ist der Winkel φ da als Null angenommen, wo der Radiusvector gleich u ist, also sein Maximum erreicht hat.

Aus dieser Gleichung findet man

$$e^{\frac{n\varphi}{b}} = \frac{n - \sqrt{n^2 - v^2}}{v} \text{ und } e^{-\frac{n\varphi}{b}} = \frac{n + \sqrt{n^2 - v^2}}{v}$$

also

$$\frac{1}{v} = \frac{e^{\frac{n\varphi}{b}} + e^{-\frac{n\varphi}{b}}}{2n}$$

als Polargleichung der gesuchten Curve in diesem besonderen Falle.

70) Diese Gleichung ändert sich nicht, wenn φ sein Zeichen ändert, daher ist diese Linie symmetrisch gegen eine gewisse feste gerade Linie. Je größer φ wird, desto mehr nimmt v ab, wird aber erst für $\varphi = \pm \infty$ zu Null. Diese Curve ist also eine doppelte Spirale, deren beide Zweige in entgegengesetztem Sinne eine unendliche Menge von Windungen um denselben Mittelpunkt machen und sich ihm stets nähern, ohne ihn je erreichen zu können, ganz so, wie es oben bereits angegeben wurde.

Der Mittelpunkt ist übrigens kein wirklicher asymptotischer Punkt, oder kann nicht als ein unendlich kleiner Kreis betrachtet werden, den die Spirale endlich zu berühren strebt. Denn nennt man i die Neigung der Curve σ gegen den Radiusvector v, so findet man aus dem Elementardreiecke, dessen Seiten $d\sigma$, dv, $vd\varphi$ sind,

$$\sin i = \frac{b}{\sqrt{\beta^2 - v^2}}$$

Also ist die Spirale senkrecht gegen den Radiusvector, wenn

$$v^2 = \beta^2 - b^2$$

oder am Scheitel der Curve. Sie ändert nun ihre Neigung stets und bildet endlich, wenn $v = 0$, mit dem Vector einen Winkel i, der durch

$$\sin i = \frac{b}{\beta}$$

bestimmt wird, also kein rechter ist, da $b < \beta$.

71) Wenn $a = b$, $b = c$, so ist das Centralellipsoid ein Umdrehungssphäroid und z. B. für $b = c$ wird $u = \beta = \gamma =$ constans. Die Poloide ist dann ein Kreis um die Axe a, beschrieben mit einem Radius $\frac{b^2}{h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a^2 - b^2}}$, und die Serpoloide ist ebenfalls ein Kreis um die feste Axe des Kräftepaars mit einem Radius

$$\sqrt{\beta^2 - h^2} = \frac{\sqrt{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}}{h}$$

beschrieben.

§. 7.

Bestimmungsweise des Orts des Körpers am Ende einer gegebenen Zeit.

72) Nachdem man die Natur der Curven s und σ erkannt hat, ist es leicht die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ oder $\frac{d\sigma}{dt}$ zu bestimmen, mit welcher der augenblickliche Pol beide Curven durchläuft. Diese Bestimmung führt unmittelbar zur Kenntniß des Orts des Körpers.

Man betrachte die Veränderlichen x, y, z und u als Functionen der Zeit t und füge zu den drei Gleichungen in No. 51. die Gleichung, welche die Größe des Paars der Schwungkräfte ausdrückt, dann wird man leicht den Werth von $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ oder $\frac{ds}{dt}$ als Function des Radiusvector u ausdrücken können, so daß man die Gleichung erhält

$$\frac{ds}{dt}=f(u)$$

wo f eine gewisse bestimmte Function von u bedeutet.

Durch dieselben Gleichungen findet man auch leicht den Werth von $\frac{du}{dt}$ als Function von u, und von dieser Gleichung zwischen u und t kann man durch bloße Quadratur zu einem Ausdruck gelangen, welcher u durch die Zeit t bestimmt. Setzt man diesen Werth von u in die Gleichung $\frac{ds}{dt}=f(u)$ ein, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{ds}{dt}=F(t)=\frac{d\sigma}{dt}$$

welche die Geschwindigkeit des Pols in der Curve s oder σ durch die Zeit finden lehrt.

Von dieser letzten Gleichung, in welcher $F(t)$ offenbar eine periodische Function ist, führt eine zweite Integration unmittelbar zu der Länge der beiden Bogen s und σ selbst als Functionen der Zeit. Dieses Integral

$$s=\sigma=\Phi(t)$$

ist die vollständige Lösung des Problems der Rotation der Körper, denn nun kann man genau den Ort des Raumes bestimmen, wo sich der Körper nach Verlauf einer gegebenen Zeit befindet.

In der That weiß man nur, daß, am Ende dieser Zeit, der augenblickliche Pol sich auf der Oberfläche des Centralellipsoids am Ende S des Bogens s befinden muß, welcher dieser Zeit t entspricht; und ferner, daß dieser Pol auf der festen Ebene am Endpunkte Σ des Bogens σ, von gleicher Länge mit s, angekommen sein muß. Der Mittelpunkt O des Ellipsoids ist aber in der gegebenen Höhe h über der festen Ebene in Ruhe geblieben, daher braucht man dieses Ellipsoid nur mit dieser Ebene so in Verbindung zu setzen, daß es dieselbe in dem gegebenen Punkte S seiner Oberfläche und in dem bestimmten Punkte Σ der Ebene berührt. Auf diese Weise nimmt jetzt das Centralellipsoid den Ort des Raumes ein, an den es, vermöge seiner natürlichen Bewegung, am Ende der Zeit t anlangt.

Drittes Kapitel.

Vergleichung der gegebenen Analyse mit der Eulerschen.

Der Lehrsatz No. 13., durch welchen man für jeden Augenblick die Axe und Größe des Paars g der Schwungkräfte kennen lernt, welche stets die Axe und Größe des Paars G, von dem der Körper gegenwärtig ergriffen ist, verändern; ist der Hauptsatz unserer ganzen Lehre.

Dieser Satz braucht nur analytisch ausgedrückt zu werden, um unmittelbar zu den Gleichungen der Bewegung des Körpers zu führen; und man wird sehen, daß diese Uebertragung sehr leicht ist.

§. 1.

Gleichungen der Drehung.

73) Wir behalten die bisherigen Bezeichnungen bei und drücken die Hauptträgheitsmomente des Körpers durch A, B, C aus. Die drei Größen Ap, Bq, Cr sind die drei Componenten L, M, N des angreifenden Paars G, und die Drehungen p, q, r, als Functionen der Zeit t betrachtet, führen zu den Ausdrücken $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$, welche man kürzer durch Ap', Bq', Cr' bezeichnet und die drei Componenten des beschleunigenden Paars derselben, welches die Axe und Größe des gegenwärtig angreifenden Paars G ändern kann. Es giebt aber kein anderes angreifendes Paar als das, welches aus den Schwungkräften entspringt, die durch die Drehung des Körpers entstehen, und unser Lehrsatz sagt:

1) Die Axe des Paars g steht senkrecht auf der Axe des Paars G oder der Cosinus ihrer gegenseitigen Neigung ist Null; es ist also

$$\frac{Ap}{G}\cdot\frac{Ap'}{g}+\frac{Bq}{G}\cdot\frac{Bq'}{g}+\frac{Cr}{G}\cdot\frac{Cr'}{g}=0$$

oder

$$A^2pp'+B^2qq'+C^2rr'=0 \tag{1}$$

welches die erste Bewegungsgleichung ist.

2) Die Axe des Paars g steht auch senkrecht auf der gegenwärtigen augenblicklichen Drehungsaxe Θ, deren drei Projectionen auf die Hauptaxen entsprechend p, q, r sind. Setzt man also den Cosinus der gegenseitigen Neigung gleich Null, so erhält man

$$App'+Bqq'+Crr'=0 \tag{2}$$

als zweite Bewegungsgleichung.

3) Das Paar g ist dem Producte $G\cdot\Theta\sin i$ gleich, oder man hat

$$g^2=G^2\Theta^2(1-\cos^2 i)$$

wo i die Neigung zwischen G und Θ ist. Setzt man für G, Θ, $\cos i$ ihre Werthe in p, q, r und für g^2 seinen allgemeinen Ausdruck

$$A^2p'^2 + B^2q'^2 + C^2r'^2$$

so erhält man

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = (B-C)^2q^2r^2 + (C-A)^2r^2p^2 + (A-B)^2p^2q^2 \quad (3)$$

als dritte und letzte Bewegungsgleichung.

Zusatz.

74) Berechnet man aus diesen drei Gleichungen Ap', Bq', Cr', so erhält man

$$Ap' = (B-C)qr; \quad Bq' = (C-A)rp; \quad Cr' = (A-B)pq$$

die Gleichungen Eulers, welche sich so auf die einfachste Art beweisen lassen.

In der ersten Gleichung ist z. B. Ap' der allgemeine Ausdruck des beschleunigenden Paars geschätzt nach der Axe Ox; und das zweite Glied ist der Werth des Paars, welches aus den Schwungkräften entsteht, geschätzt nach derselben Axe. Weil aber der Körper sich selbst überlassen ist, oder von keinem fremden Paare gestört wird, so ist offenbar die Größe $(B-C)qr$ die einzige, der der Ausdruck Ap' gleichgesetzt werden muß. Dasselbe gilt für die beiden anderen Axen.

Bemerkung.

75) Dieser Beweis führt uns unmittelbar zu den Gleichungen der Bewegung, auch in dem allgemeinen Falle, wo der Körper fremden beschleunigenden Kräften unterworfen ist; denn man muß dann offenbar nur auf der rechten Seite das Kräftepaar hinzufügen, welches aus den beschleunigenden Kräften für die Axe entspricht, die man betrachtet. Bezeichnet man also durch X, Y, Z die Kräfte, welche auf jedes Atom dm des Körpers parallel den drei Hauptaxen einwirken, so ist $\int(Zy - Yz)dm$ das Paar, dessen Axe die Hauptaxe Ox ist. Die linke Seite $A\frac{dp}{dt}$, welche der allgemeine Ausdruck des beschleunigenden Paars ist, von welchem der Körper angegriffen wird, muß der Summe der beiden Paare $(B-C)qr$ und $\int(Zy - Yz)dm$ gleich sein, von denen das eine aus den Schwungkräften, das andere aus den fremden beschleunigenden Kräften entspringt. Daher sind die allgemeinen Gleichungen der Drehungsbewegung eines Körpers, welcher von beliebigen Kräften angegriffen wird, offenbar

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + \int(Zy - Yz)dm$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + \int(Xz - Zx)dm$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq + \int(Yx - Xy)dm$$

Wenn die Kräfte X, Y, Z sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen, welche stets durch den Mittelpunkt der Drehung geht, so verschwinden die drei Kräftepaare $\int(Zy - Yz)dm$, $\int(Xz - Zx)dm$, $\int(Yx - Xy)dm$ und die Gleichungen kommen auf die drei vorigen zurück, wie wenn der Körper von aller fremden Einwirkung frei wäre.

§. 2.

Wie man unsere Theorie aus den drei vorangehenden Gleichungen ableiten könnte.

Folgerung 1.

76) Die Differenzialgleichung (1) läßt sich unmittelbar integriren und giebt

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2$$

wo die Constante gleich G^2 gesetzt ist, weil die linke Seite das Quadrat des Paars G ausdrückt, von dem der Körper ergriffen wird. Dieses Integral entspricht also dem Satze von der Erhaltung der Größe des angreifenden Paars.

Folgerung 2.

Ebenso läßt sich die Gleichung (2) integriren und giebt

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = F$$

Die linke Seite dieser Gleichung durch Θ^2 dividirt, giebt das Trägheitsmoment J des Körpers um die Drehungsaxe Θ. Also ist die Constante F gleich $J\Theta^2$, welches der Ausdruck der lebendigen Kraft aller Atome des Körpers ist; es ist dies also der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft während des ganzen Verlaufs der Drehung.

Folgerung 3.

Dividirt man die linke Seite der Gleichung durch $G\Theta$, so drückt sie den Cosinus der Neigung i der Axe G gegen die Axe Θ aus. Also ist auch $F = G\cos i$, und da G constant ist, so ist

$$\Theta \cos i = \text{constans}$$

Dies ist der Satz von der Erhaltung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers, geschätzt um die Axe des angreifenden Paars G.

Folgerung 4.

Die Gleichung (2), welche in der Form

$$\frac{Ap' \cdot p + Bq' \cdot q + Cr' \cdot r}{g \cdot \Theta} = 0$$

ausdrückt, daß der Cosinus der Neigung von g gegen Θ gleich Null ist, also diese beiden Linien senkrecht auf einander stehen, zeigt auch unter der Form

$$\frac{Ap \cdot p' + Bq \cdot q' + Cr \cdot r'}{G \cdot \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}} = 0$$

daß die Axe G senkrecht auf der Drehungsaxe $\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}$ steht, welche dem Paare g zugehört. Daher liegt also diese Axe, um welche die Schwungkräfte den Körper zu drehen streben, in der Ebene des angreifenden Paars.

Folgerung 5.

Die Gleichung (3), welche sich leicht auf die Form bringen läßt

$$g\frac{dt}{G} = \Theta \sin i dt$$

zeigt, daß wenn nach Verlauf des Augenblicks dt, die Are OG des Paars aus ihrer gegenwärtigen Lage in die der Diagonale OG' des Rechtecks, mit den Seiten G und gdt, übergegangen ist, sie dabei in dem Körper einen Winkel $g\frac{dt}{G}$ beschrieben hat.

Durch die Drehung des Körpers hat sich aber diese Gerade OG' im entgegengesetzten Sinne um einen Winkel $\Theta \sin i dt$ gedreht, welcher dem ersten gleich ist, wodurch OG an dieselbe Stelle des Raumes zurückgelangt. Dies entspricht dem Satze von der Unveränderlichkeit der Ebene des Paars G während der Verlaufs der Bewegung.

Folgerung 6.

Bringt man die beiden vorhergehenden Integrale unter die Form

$$\frac{A^2}{G^2}p^2 + \frac{B^2}{G^2}q^2 + \frac{C^2}{G^2}r^2 = 1$$

$$\frac{A}{F}p^2 + \frac{B}{F}q^2 + \frac{C}{F}r^2 = 1$$

und betrachtet p, q, r als die Coordinaten eines Punktes, so sieht man, daß dieser Punkt, oder der augenblickliche Pol der Drehung Θ, stets auf den beiden Ellipsoiden liegt, welche diese Gleichungen darstellen. Die Aren des ersten dieser Ellipsoide sind umgekehrt proportional den Trägheitsmomenten A, B, C des Körpers, und die des zweiten den Quadratwurzeln derselben Momente. Das letztere haben wir das Centralellipsoid genannt.

Der augenblickliche Pol beschreibt also stets im Innern des Körpers die Curve, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt beider Ellipsoide ist.

Die Differenz beider Gleichungen giebt

$$A(G^2 - AF)p^2 + B(G^2 - BF)q^2 + C(G^2 - CF)r^2 = 0$$

die Gleichung der Kegelfläche zweiten Grades, welche die augenblickliche Drehungsare im Innern des Körpers beschreibt.

Folgerung 7.

Betrachtet man jetzt die Größen Ap, Bq, Cr oder L, M, N als die Coordinaten eines Punktes, so ist dieser der Endpunkt der Are G des angreifenden Kräftepaars, also das, was man den Pol dieses Paars nennen kann.

Man sieht aus diesen Gleichungen, welche die Gestalt

$$\frac{L^2 + M^2 + N^2}{G^2} = 1$$

$$\frac{L^2}{AF} + \frac{M^2}{BF} + \frac{N^2}{CF} = 1$$

annehmen, daß der Pol des Paars stets auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius G und auf der Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbaren $\sqrt{AF}$, $\sqrt{BF}$, $\sqrt{CF}$ liegt, welche direct proportional den Quadratwurzeln der drei Trägheitsmomente A, B, C sind. Der Pol des Paars beschreibt also im Innern des Körpers den gegenseitigen Durchschnitt dieser Flächen und die Are OG durchläuft den Kegel zweiten Grades

$$\left(\frac{G^2}{A} - F\right)L^2 + \left(\frac{G^2}{B} - F\right)M^2 + \left(\frac{G^2}{C} - F\right)N^2 = 0$$

dessen Gleichung die Differenz der beiden Gleichungen des Ellipsoids und der Kugel ist.

Folgerung 8.

Wenn man an die Oberfläche des Centralellipsoids

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = F$$

im Punkte p, q, r eine Berührungsebene legt und die laufenden Coordinaten dieses Punktes p_1, q_1, r_1 nennt, so ist ihre Gleichung

$$App_1 + Bqq_1 + Crr_1 = F$$

oder

$$Lp_1 + Mq_1 + Nr_1 = F$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene, welche senkrecht auf der Linie G steht, deren Projectionen auf die drei Aren L, M, N sind. Also ist die Berührungsebene des Centralellipsoids am augenblicklichen Pole stets der Ebene des angreifenden Paars parallel. Ihre Entfernung vom Mittelpunkte ist $\Theta \cos i$ und diese Größe ist constant (Folgerung 3.), daher bleibt diese parallele Ebene stets in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoids.

Dieser Mittelpunkt ist aber unbeweglich und die Ebene des Paars bleibt sich selbst stets parallel im absoluten Raume; daher ist diese Berührungsebene im Pol eine unveränderliche feste Ebene, und die ganze Bewegung des Centralellipsoids besteht darin, auf dieser Ebene zu rollen ohne zu gleiten, indem es sich um den Radius, welcher vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte gezogen ist, mit einer Winkelgeschwindigkeit Θ dreht, die durch diesen Radius gemessen wird.