GEOMETRIE DER BEWEGUNG

IN

SYNTHETISCHER DARSTELLUNG

VON

DR. ARTHUR SCHOENFLIES,

PRIVATDOCENT DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1886.

1888

Vorwort.

Die Geometrie der Bewegung, auch kinematische Geometrie genannt, hat bisher noch keine zusammenhängende Darstellung gefunden. Das vorliegende Lehrbuch ist bestimmt, eine solche zum ersten Male darzubieten und die Wissenschaft selbst in einigen, wie ich glaube, wichtigen Punkten weiterzuführen.

Die neueren Untersuchungen, welche der Geometrie der Bewegung gewidmet sind, gehen meist von der Betrachtung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aus. In ihnen kann jedoch eine natürliche Quelle rein geometrischer Resultate nicht gesehen werden. Denn die Gestalt und die Eigenschaften der durch Bewegung erzeugten Raumgebilde hängen nicht von der grösseren oder geringeren Geschwindigkeit ab, mit welcher die Bewegung vor sich geht, sondern einzig und allein von dem Gesetz der Bewegung, d. h. von den verschiedenen Lagen, welche der bewegliche Körper der Reihe nach im Raume einnimmt.

Bei dieser Auffassung erscheint die Geometrie der Bewegung als ein Zweig der synthetischen Geometrie. Chasles und Mannheim, die Begründer dieser Wissenschaft,*) haben

*) Die Arbeiten von Chasles und Mannheim sind von fundamentaler Bedeutung für die Geometrie der Bewegung. Es mag daher genügen, hier auf dieselben ein für alle Mal hingewiesen zu haben. Besonders wichtig sind folgende Arbeiten von Chasles:

1) Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit etc. Compt. rend. Bd. 16, S. 1420.

2) Propriétés relatives au déplacement fini etc. Compt. rend. Bd. 51 u. 52,

sowie die nachstehenden Arbeiten von Mannheim:

1) Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Journ. de l'école polyt. Heft 43, S. 57.

sich von demselben Gedanken leiten lassen. Man findet ihn auch in Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte teilweise durchgeführt; ich bekenne gern, dass es gerade dieses Werk ist, welches in mir den Plan entstehen liess, die Geometrie der Bewegung auf rein geometrischer Basis aufzubauen.

Die Hilfsmittel der Darstellung sind in erster Linie die elementaren Sätze der synthetischen Geometrie, andererseits die stete Rücksichtnahme auf den relativen Character aller Bewegung, d. h. die gemeinschaftliche Betrachtung der beiden Bewegungen, welche einerseits ein Körper Σ gegen einen Körper Σ', andererseits gleichzeitig der Körper Σ' gegen Σ ausführt. In ihr darf ich dasjenige Hilfsmittel erblicken, welches meines Erachtens den Aufbau der behandelten Lehren erleichtert und zur Einfachheit und Durchsichtigkeit der Darstellung besonders beiträgt.

Das vorliegende Lehrbuch erhebt nicht den Anspruch die Geometrie der Bewegung erschöpfend zu behandeln. Im Gegenteil habe ich mich zunächst nur auf einen Teil, allerdings den wichtigsten, beschränkt, nämlich auf die Betrachtung starrer Körper und auf diejenigen Bewegungen, bei denen jeder Punkt eine Curve beschreibt. Für die anderen Bewegungen sind nur die wichtigsten Sätze abgeleitet worden.

Die Beispiele dienen zur Illustration der allgemeinen Resultate, und sind nicht bestimmt eine ausführliche Erörterung specieller Bewegungsmechanismen zu geben. Ich behalte mir vor, eine Theorie der einzelnen Bewegungsmechanismen diesem Lehrbuche folgen zu lassen.

Berlin, April 1886.

A. Schoenflies.

---

2) Sur les surfaces trajectoires etc., Liouville's Journ. de Math. Serie III, Bd. 1, S. 57.

3) Der kürzlich erschienene Cours de géometrie descriptive, Paris 1882, welchem Mannheim seine eigenen Arbeiten über kinematische Geometrie beigefügt hat.

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Capitel.

Die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene.

Zweites Capitel.

Die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

Drittes Capitel.

Die Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems.

Verzeichniss der Berichtigungen am Schluss des Buches.

Erstes Capitel.

Die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene.

§ 1. Das Drehungscentrum.

1. Es sei σ' eine beliebige Ebene und σ ein in ihr liegendes begrenztes ebenes Flächenstück, welches irgend eine Bewegung in σ' ausführt. Denken wir uns, dass sich die Grenzen des Flächenstückes σ ohne Ende ausdehnen, so gelangen wir zu der Vorstellung, dass sich eine unbegrenzte Ebene σ in einer ruhenden, festen Ebene σ' bewegt. Nach dem Sprachgebrauch der synthetischen Geometrie nennen wir die Ebene σ ein *ebenes System.* Jeder Punkt A desselben beschreibt eine in σ' gelegene Curve, welche die *Bahn* des Punktes A heissen möge.

Wir werden die Punkte und Geraden des Systems σ durch Buchstaben ohne Index bezeichnen, so lange es nur darauf ankommt, einen bestimmten Punkt oder eine bestimmte Gerade desselben zu kennzeichnen, ohne dass ihre Lage in σ' in Frage kommt. Dagegen sollen die verschiedenen Lagen, welche σ im Verlauf der Bewegung in der festen Ebene σ' einnimmt, durch

$$\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2 \dots$$

bezeichnet werden; ebenso werden

$$A_0,\ A_1,\ A_2 \dots$$

die bezüglichen Lagen des Punktes A und

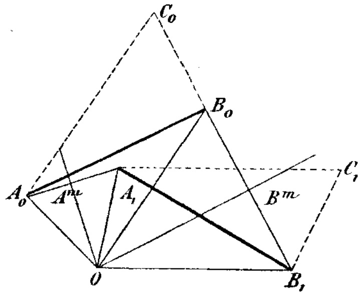
$$g_0,\ g_1,\ g_2 \dots$$

diejenigen der Geraden g von σ bedeuten.

2. Seien nun σ_0 und σ_1 zwei beliebige Lagen von σ, und A_0, B_0, resp. A_1, B_1 die zugehörigen Lagen der Punkte A und B.

Wir errichten (Fig. 1) in dem Mittelpunkt A^m der Strecke $A_0 A_1$ das Lot a^v und im Mittelpunkt B^m von $B_0 B_1$ das Lot b^v. Der Schnittpunkt von a^v und b^v sei O. Da $A_0 O = A_1 O$, $A_0 B_0 = A_1 B_1$ und $B_0 O = B_1 O$ ist, so sind die Dreiecke $A_0 O B_0$ und $A_1 O B_1$ congruent, folglich sind die Winkel $A_0 O A_1$ und $B_0 O B_1$ einander gleich, und man sieht, dass durch Drehung um O gleichzeitig A_0 nach A_1 und B_0 nach B_1 gelangt. Alsdann muss aber auch jeder dritte Punkt C_0 in die zugehörige Lage C_1 gekommen sein; also folgt:

Fig. 1.

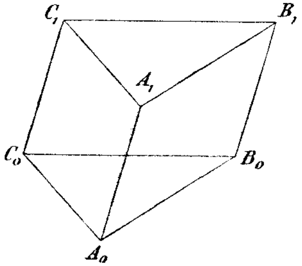


Jede Verschiebung eines ebenen Systems in seiner Ebene kann durch Drehung des Systems um einen festen Punkt ausgeführt werden.[1])

Dieser Punkt soll das *Drehungscentrum* oder der *Drehungspol* heissen. Er ist derjenige reelle Punkt, welchen die in einander liegenden congruenten Systeme σ_0 und σ_1 entsprechend gemein haben.

Wir nennen A_0A_1 die zu A gehörige *Sehne* und das in ihrem Mittelpunkt A^m errichtete Lot a^v den *Normalstral* des Punktes A. Wird das System σ um O gedreht, so dass es aus der Lage σ_0 in die Lage σ_1 gelangt, so beschreibt jeder Punkt C ein Stück eines Kreises, dessen Mittelpunkt O ist; also geht C^v durch O und es folgt:

Fig. 2.



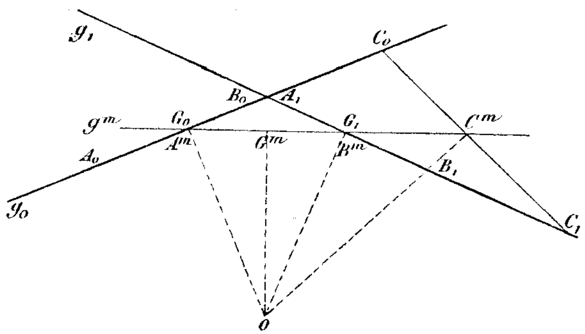
Die Normalstralen aller Punkte des ebenen Systems gehen durch das Drehungscentrum.

Es kann der besondere Fall eintreten, dass die beiden Normalstralen a^v und b^v einander parallel sind. Alsdann liegt ihr Schnittpunkt im Unendlichen. Die Sehnen A_0A_1 und B_0B_1 sind daher (Fig. 2) ebenfalls parallel, und da $A_0B_0 = A_1B_1$ ist, so sind sie auch einander gleich.

Ist ferner C_0 und C_1 irgend ein drittes Paar entsprechender Punkte von σ_0 und σ_1, so folgt aus der Congruenz der Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ dass auch C_0C_1 gleich und parallel zu A_0A_1 und B_0B_1; d. h. die Sehnen *aller* Punkte von σ sind gleich und parallel zu einander. Es bedarf daher nur einer einfachen Translationsbewegung, welche der Grösse und Richtung nach durch A_0A_1 resp. B_0B_1 gegeben ist, um das System σ aus der Lage σ_0 in die Lage σ_1 überzuführen. Wenn nichts anderes bestimmt wird, soll dieser Fall im Folgenden stets ausgeschlossen werden.

3. Wir betrachten nun zwei entsprechende Lagen g_0 und g_1 einer Geraden g von σ. Der Schnittpunkt von g_0 und g_1 möge (Fig. 3) als Punkt von g_0 durch B_0, und als Punkt von g_1 durch A_1 bezeichnet werden; B_1 und A_0 seien wieder die

Fig. 3.



entsprechenden Punkte von g_1 resp. g_0. Die zugehörigen Punkte A^m und B^m sind ebenfalls zwei entsprechende Punkte von g_0 und g_1; wir nennen sie G_0 und G_1 und bezeichnen ihre Verbindungslinie durch g^m. Dieselbe bildet mit g_0 und g_1 gleiche Winkel.

Die Sehnen aller Punkte von g umhüllen eine Parabel, die g_0, g_1 und g^m zu Tangenten hat. Nun werden je zwei Tangenten einer Parabel von allen andern in ähnlichen Punktreihen geschnitten; ist daher C ein beliebiger Punkt von g, so wird seine Sehne C_0C_1 durch g^m halbirt; d. h. C^m liegt auf g^m. Wie bewiesen, geht aber das vom Drehungscentrum O auf C_0C_1 gefällte Lot durch C^m; demnach lässt sich jede

Sehne als Schenkel eines rechten Winkels betrachten, dessen anderer Schenkel durch O geht, und dessen Scheitel stets auf g^m liegt. Also ergiebt sich:

Die Mitten der Sehnen aller Punkte einer Geraden g liegen auf einer Geraden g^m, welche mit g_0 und g_1 gleiche Winkel bildet. Die Sehnen selbst umhüllen eine Parabel, welche das Drehungscentrum zum Brennpunkt und die Gerade g^m zur Scheiteltangente hat.

Die Gerade g^m soll die *Mittelgerade* von g genannt werden.

Wir denken uns die Sehne C_0C_1 auf g^m projicirt. Die Projection von C_0C_1 ist gleich der Projection des Linienzuges $C_0B_0C_1$. Da g_0 und g_1 gleiche Winkel mit g^m bilden, so sind die Projectionen von C_0B_0 und B_1C_1 entgegengesetzt gleich, folglich ist die Projection einer jeden Sehne C_0C_1 gleich derjenigen von B_0B_1, also auch gleich G_0G_1; d. h.

Die Projectionen der Sehnen aller Punkte einer Geraden g auf der Mittelgeraden sind constant, und zwar gleich derjenigen Sehne, welche in die Mittelgerade g^m fällt.

4. Es entspricht gemäss den vorstehenden Sätzen nicht allein jedem Punkt A_0 ein Punkt A^m, sondern auch jeder Geraden g_0 eine Gerade g^m. Nun ist der von g_0 und g^m eingeschlossene Winkel gleich $\frac{1}{2}G_0OG_1$, d. h. gleich der Hälfte desjenigen Winkels, um welchen σ rotiren muss, um aus der Lage σ_0 in die Lage σ_1 zu gelangen. Dieser Winkel ist daher für alle Geraden g_0 constant. Hieraus folgt, dass sich zwei beliebige Geraden g_0 und h_0 stets unter dem nämlichen Winkel schneiden, wie die entsprechenden Geraden g^m und h^m, d. h.:

Das System σ_0 und das von den Sehnenmittelpunkten gebildete System σ^m sind ähnliche ebene Systeme, welche das Drehungscentrum entsprechend gemein haben.

5. Die vorstehenden Resultate sind von der Lage σ_0 und σ_1 ganz unabhängig. Lassen wir dieselben beliebig nahe an einander rücken, so folgen aus den obigen Sätzen Theoreme, welche in jedem Augenblick von einem ebenen System ausgesagt werden können, das sich in seiner Ebene beliebig verschiebt. Dabei geht die Sehne A_0A_1 in die Tangente der von

A beschriebenen Bahn und a^v in die Normale derselben über; und es ergiebt sich folgender Satz:

Wenn sich ein ebenes System beliebig in seiner Ebene verschiebt, so gehen in jedem Augenblick die Normalen der Bahnen aller Punkte durch einen und denselben Punkt.

Das System führt im betrachteten Augenblick eine unendlich kleine Rotation um diesen Punkt aus; er heisst daher das *momentane Drehungscentrum* oder der *momentane Drehungspol.*[2]) Ferner erhalten wir:

Die Tangenten der Bahnen aller Punkte einer Geraden g von σ umhüllen in jedem Augenblick eine Parabel, welche das momentane Drehungscentrum zum Brennpunkt und die Gerade g zur Scheiteltangente hat.

6. An die vorstehenden Erörterungen, welche sich ausschliesslich mit den Punktbahnen beschäftigen, soll sich die Untersuchung der Enveloppen schliessen, welche im Verlauf der Bewegung von den Geraden und Curven des Systems umhüllt werden.

Wir setzen zunächst wieder beliebige Systemlagen σ_0, σ_1, $\sigma_2 \ldots$ voraus. Zu ihnen gehören die oben definirten ihnen ähnlichen Systeme; sie sollen σ_0^m, $\sigma_1^m \ldots$ heissen, und zwar ist σ_0^m das System der Mittelpunkte A_0^m der Sehnen $A_0 A_1$, σ_1^m das System der Sehnenmittelpunkte A_1^m von $A_1 A_2$. Der Drehungspol von σ_0 und σ_1 heisse jetzt O_{01}.

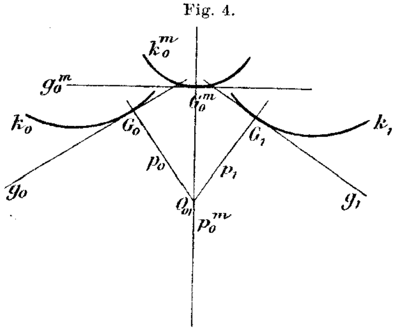
Mit Hilfe dieser Systeme wird es möglich sein, die für continuirliche Bewegungen geltenden Sätze in vollkommener Strenge abzuleiten. Der Grund ist der, dass die Eigenschaften von σ_0^m, $\sigma_1^m \ldots$ von der Lage der Systeme σ_0, σ_1, $\sigma_2 \ldots$ zu einander unabhängig sind, dass sie also auch bestehen bleiben, wenn wir unendlich kleine Verschiebungen von σ zu betrachten haben. Da nun in der Grenzlage σ_0^m in σ_0 übergeht, so lassen sich aus den *unveränderlichen* Eigenschaften der Systeme σ_0^m, $\sigma_1^m \ldots$ Sätze entnehmen, welche in jedem Augenblick der Bewegung von σ selbst ausgesagt werden können.

7. Ist wieder g_0 eine Gerade von σ_0 und sind g_0^m und g_1 die entsprechenden Geraden von σ_0^m und σ_1, so sind (§ 1, 3) die Punkte, in denen g_0 und g_1 von g_0^m geschnitten werden,

zwei entsprechende Punkte G_0 und G_1 (vgl. Fig. 3 Seite 3), und das vom Drehungscentrum O_{01} auf $g_0{}^m$ gefällte Lot geht durch $G_0{}^m$. Aus der Aehnlichkeit der Systeme σ_0, $\sigma_0{}^m$, σ_1 folgt daher, dass die von ihrem gemeinsamen Doppelpunkt O_{01} auf g_0 und g_1 gefällten Lote diese Geraden in G_0 resp. G_1 treffen, und dass die drei Lote entsprechende Geraden der drei Systeme sind. Dies gilt, wie auch g_0 und g_1 zu einander liegen mögen. Lassen wir nun die Ortsveränderung von σ unendlich klein werden, so geht der Punkt $G_0{}^m$ in den momentanen Berührungspunkt der Geraden g mit ihrer Enveloppe über, und das vom Drehungscentrum auf $g_0{}^m$ gefällte Lot wird Normale dieser Enveloppe. Dieses Lot geht aber stets durch $G_0{}^m$, d. h. das vom momentanen Drehungspol auf eine Systemgerade gefällte Lot trifft dieselbe im momentanen Berührungspunkt mit der von ihr umhüllten Enveloppe.

Derselbe Satz gilt für die Enveloppe einer beliebigen Curve k von σ. Seien (Fig. 4) k_0 und k_1 ihre Lagen in σ_0, resp. σ_1, und sei $k_0{}^m$ die entsprechende Curve von $\sigma_0{}^m$. Wir legen vom Drehungscentrum O_{01} irgend eine Normale $p_0{}^m$ an $k_0{}^m$, bezeichnen ihren Schnittpunkt mit $k_0{}^m$ durch $G_0{}^m$, und ziehen in $G_0{}^m$ die Tangente $g_0{}^m$ an $k_0{}^m$. Alsdann construiren wir die entsprechenden Punkte und Geraden in σ_0 und σ_1, so berührt g_0 die Curve k_0 in G_0 und g_1 die Curve k_1 in G_1; überdies sind G_0 und G_1 wieder die Schnittpunkte von $g_0{}^m$ mit g_0 resp. g_1. Die Geraden p_0 und p_1 sind Normalen von k_0 resp. k_1 in G_0 resp. G_1, stehen also auf g_0 resp. g_1 senkrecht. Dies gilt wieder, wie auch die Systeme σ_0 und σ_1 zu einander liegen, also auch für unendlich kleine Verschiebungen. Machen wir nun den Grenzübergang, so wird $g_0{}^m$ zur Tangente der von k umhüllten Enveloppe, und $G_0{}^m$ wird ihr Berührungspunkt; es folgt daher,

Fig. 4.



dass die Normale der von k erzeugten Enveloppe durch das momentane Drehungscentrum hindurchgeht. Also:

Wenn sich ein ebenes System beliebig in seiner Ebene bewegt, so gehen bei allen von den Geraden und Curven des Systems umhüllten Enveloppen die Normalen in den momentanen Berührungspunkten durch das momentane Drehungscentrum.

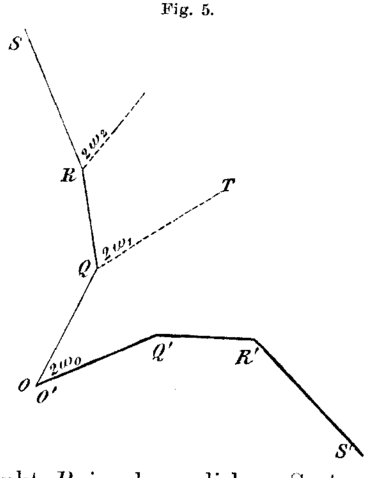
8. Betrachten wir jetzt alle durch einen beliebigen Punkt A von σ hindurchgehenden Geraden g des ebenen Systems. Der Punkt, in welchem jede Gerade ihre Enveloppe berührt, liegt auf dem vom Drehungspol O auf sie gefällten Lote. Diese Punkte bilden einen Kreis, denn sie sind das Erzeugniss von zwei Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte O und A sind, und je zwei entsprechende Strahlen beider Büschel stehen senkrecht auf einander. Also:

Die Punkte, in denen die Geraden eines Büschels ihre Enveloppen berühren, liegen in jedem Augenblick auf einem Kreise, welcher die Verbindungslinie des Drehungspols mit dem Mittelpunkt des Büschels zum Durchmesser hat.

§ 2. Die Polcurven und die Umkehrung der Bewegung.

1. Das ebene System σ möge nach einander vorgeschriebene Rotationen von der Grösse $2\omega_0, 2\omega_1, 2\omega_2 \dots$ um beliebig gegebene Punkte O', Q', R' der festen Ebene ausführen. Dabei gelangt es aus der Anfangslage σ_0 der Reihe nach in die Lagen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$ Wir zeichnen (Fig. 5) in der ursprünglichen Lage σ_0 den Punkt Q so, dass $QO' = Q'O'$ und $\sphericalangle QO'Q' = 2\omega_0$ ist; ferner ziehen wir durch Q die Gerade QT so, dass

Fig. 5.



$$\sphericalangle TQO' = \sphericalangle R'Q'O',$$

zeichnen dann wieder den Punkt R im beweglichen System so, dass $RQ = R'Q'$ und $RQT = 2\omega_1$ ist u. s. w. Bezeichnen wir noch den Punkt O' als Punkt von σ durch O, so erhalten wir auf diese Weise in σ ein ganz bestimmtes Polygon $OQRS\ldots$, dessen Seiten denjenigen des Polygons $O'Q'R'S'\ldots$ der Reihe nach gleich sind. Rotirt nun σ um O' um den Winkel $2\omega_0$, so fällt Q auf Q'; die nächste Rotation, welche um Q' erfolgt, und deren Winkel $2\omega_1$ ist, bewirkt, dass R' auf R fällt, u. s. w. Die Bewegung geht also in der Weise vor sich, dass das Polygon $OQRS\ldots$ von dem Polygon $O'Q'R'S'\ldots$ so zu sagen abrollt.

2. Die vorstehenden Schlüsse sind von der Anzahl der betrachteten Systeme und von ihrer Lage zu einander ganz unabhängig; sie bleiben daher in Kraft, wenn die Systeme $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$ beliebig nahe an einander rücken, so dass σ irgend eine continuirliche Bewegung in seiner Ebene ausführt. Die beiden Polygone gehen dabei in Curven über. Das Polygon $O'Q'R'S'\ldots$ verwandelt sich in diejenige Curve $\mathfrak{C}'$ der festen Ebene, deren Punkte im Verlauf der Bewegung die momentanen Drehungscentra sind; und das Polygon $OQRS\ldots$ giebt uns den Ort derjenigen Punkte des beweglichen Systems, welche im Verlauf der Bewegung mit den momentanen Drehungscentren zusammenfallen. Die Bewegung selbst geht in der Weise vor sich, dass die letztere Curve, die wir durch $\mathfrak{C}$ bezeichnen, von der Curve $\mathfrak{C}'$ der festen Ebene abrollt.

Es ist jedoch wieder vorauszusetzen, dass die Drehungspole nicht in das Unendliche fallen; d. h., dass die Bewegung nicht in einer reinen Translation besteht, bei welcher alle Punkte des Systems in jedem Augenblick parallele Bahnelemente beschreiben. Mit Rücksicht darauf ergiebt sich:

Jede Bewegung eines ebnen Systems in seiner Ebene, welche nicht in einer reinen Translation besteht, kann dadurch vermittelt werden, dass eine der beweglichen Ebene angehörige Curve von einer der festen Ebene angehörigen Curve abrollt.[3])

Jede der beiden Curven ist als geometrischer Ort der momentanen Drehungspole definirt worden; sie sollen daher *Polcurven* genannt werden. Der eben bewiesene Satz zeigt, dass die Art der Bewegung einzig und allein von der Wahl der Polcurven abhängt. Dieselben können ganz beliebig angenommen werden. Umgekehrt ist evident, dass die Bewegung von σ in jedem Augenblick vollständig bestimmt ist, sobald die von einander abrollenden Polcurven bekannt sind.

Auch die oben betrachteten Polygone repräsentiren zwei Curven, durch welche eine ganz bestimmte Bewegung von σ definirt ist. Wir wollen jedoch festsetzen, dass im Folgenden nur solche Bewegungen betrachtet werden sollen, bei denen der momentane Drehungspol jeden Augenblick wechselt. Ausser den Bewegungen der Translation schliessen wir damit auch diejenigen aus, bei welchen das Drehungscentrum während einer endlichen Zeit constant bleibt. Dies geschieht, weil in beiden ausgeschlossenen Fällen die Probleme, welche wir im Folgenden zu behandeln haben, nicht allein an Interesse verlieren, sondern zum Theil sogar ganz aufhören zu existiren.

3. Wir haben bisher angenommen, dass sich das System σ in einer festen Ebene σ' verschiebt. Denken wir uns nun einen Beobachter, welcher mit dem System σ fest verbunden ist, so wird sich für ihn die Ebene σ' in der Ebene σ bewegen. Diese Bewegung von σ' gegen σ soll die *umgekehrte* oder die *indirecte* Bewegung genannt werden. Im Gegensatz dazu wird die Bewegung von σ in σ' auch die *ursprüngliche* oder die *directe* Bewegung heifsen. Beide Bewegungen gehören eng zusammen; wir werden sie deshalb vielfach gleichzeitig zu betrachten haben.[4])

Was die Bezeichnungen betrifft, welche sich auf die indirecte Bewegung beziehen, so ist Folgendes zu bemerken. Wie die Lagen von σ in σ' durch $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$ bezeichnet worden sind, so sollen

$$\sigma_0', \sigma_1', \sigma_2' \ldots$$

die entsprechenden Lagen von σ' in σ sein; d. h. hat σ in irgend einem Augenblick die Lage σ_n in σ', so soll die Lage, welche σ' im selben Augenblick in σ einnimmt, σ_n' genannt werden. Ferner haben wir oben festgesetzt, dass unter A, B, ... bestimmte Punkte der Ebene σ zu verstehen sind, ohne Rücksicht darauf, an welcher Stelle von σ' sie sich gerade befinden, und haben die Lagen, welche A der Reihe nach in σ' einnimmt, durch $A_0, A_1, A_2 \ldots$ bezeichnet. Analog sollen die Punkte der Ebene σ' durch C', D', ... bezeichnet werden, wenn es sich nur darum handelt, sie als bestimmte Punkte von σ' zu definiren; und

$$C_0', C_1', C_2' \ldots$$

sollen wieder die successiven Lagen des Punktes C' in σ, $C^{m\prime}$ der Halbirungspunkt der Strecke $C_0'C_1'$, und $c^{\nu\prime}$ der zugehörige Normalstrahl sein.

In Folge dieser Festsetzungen haben wir in

$$A_0, A_1, A^m, a^\nu, g_0, g^m, \ldots$$

bestimmte Punkte und Geraden des ebenen Systems σ' zu erblicken, dagegen in

$$C_0', C_1', C^{m\prime}, c^{\nu\prime}, h_0', h^{m\prime}, \ldots$$

bestimmte Elemente des Systems σ.

4. Es ist eben bewiesen worden, dass sich die Bewegung, welche σ in σ' ausführt, dadurch vermitteln lässt, dass eine der Ebene σ angehörige Curve $\mathfrak{C}$ von einer der Ebene σ' angehörigen Curve $\mathfrak{C}'$, ohne zu gleiten, abrollt. Da nun der geometrische Character der Bewegung davon unabhängig sein muss, ob wir uns während derselben in der Ebene σ' oder in σ befinden, so ist evident, dass die Bewegung, welche σ' in σ ausführt, darin besteht, dass die Curve $\mathfrak{C}'$ des Systems σ' von der Curve $\mathfrak{C}$ der Ebene σ abrollt. Wir sehen daraus noch, dass beide Curven genau die gleiche geometrische Bedeutung besitzen, und dass es daher gerechtfertigt ist, sie, wie oben geschehen, mit demselben Namen zu belegen.

Die analogen Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn wir irgend welche Systemlagen σ_0, σ_1, σ_2 ... in's Auge fassen, welche σ nach einander in σ' einnimmt. Die entsprechenden Lagen von σ' in σ haben wir nach dem Obigen durch σ_0', σ_1', σ_2' ... zu bezeichnen. Um das System σ_0 der Reihe nach mit σ_1, σ_2 ... zur Deckung zu bringen, liessen wir, wie § 2, 1 gezeigt, das Polygon $OQRS$.. von $O'Q'R'S'$... abrollen, und zwar in der Weise, dass σ der Reihe nach Rotationen von der Grösse $2\omega_0$ $2\omega_1$, $2\omega_2$ ... um O', Q', R' ... ausführt, während in Folge derselben Q, R, S ... mit Q', R', S' ... zusammenfallen. Wir benutzen nun wieder das Princip, dass es für die Natur der Bewegung gleichgültig ist, ob wir uns als zu σ' oder zu σ gehörig betrachten. Die Bewegung, welche σ' in σ ausführt, muss daher darin bestehen, dass das Polygon $O'Q'R'S' \ldots$ von $OQRS \ldots$ abrollt; d. h. σ' führt nach einander Rotationen, deren Grösse ebenfalls $2\omega_0$, $2\omega_1$, $2\omega_2 \ldots$ ist, um die Punkte O, Q, $R \ldots$ aus, während in Folge derselben Q', R', $S' \ldots$ nach und nach mit Q, R, $S \ldots$ zusammenfallen.

5. Während der Bewegung der Systeme gegen einander beschreibt jeder Punkt A von σ eine in σ' gelegene Bahn; ebenso wird auch umgekehrt jeder Punkt B' von σ' eine in σ gelegene Bahn durchlaufen. Für die Normalen dieser Bahnen bestehen in jedem Augenblick gewisse Beziehungen, die wir aufsuchen wollen. Um dieselben streng zu begründen, wollen wir zunächst wieder von beliebig gegebenen Systemlagen ausgehen. Seien dieselben σ_0 und σ_1, seien A_0 und A_1 die entsprechenden Lagen des Punktes A von σ und sei a^v der zugehörige Normalstral. Ferner sei B_0' irgend ein auf a^v liegender Punkt von σ_0', so ist A_0 und A_1 von B_0' gleichweit entfernt. Dies ist aber unabhängig davon, ob wir uns während der Bewegung in der Ebene σ' oder in σ befinden; es haben daher B_0' und B_1' von A_0 gleichen Abstand; d. h. der zu B_0' und B_1' zugehörige Normalstral $b^{v'}$ geht durch A_0. Also folgt:

Geht der Normalstral a^v eines Punktes A von σ durch einen Punkt B' von σ', so geht bei der indirecten Bewegung der Normalstral $b^{v'}$ von B' durch den Punkt A.)*

Hieraus folgt im Fall continuirlicher Bewegung:

Geht in einem bestimmten Augenblick die Normale der Bahn eines Punktes A von σ durch den Punkt B' von σ', so geht bei

*) Da der Definition nach B' und a^v ganz bestimmte Elemente des Systems σ' sind, und ebenso A resp. $b^{v'}$ bestimmte Elemente von σ, so ist die specielle Eigenschaft derselben, dass a^v durch B' und $b^{v'}$ durch A geht, von der Lage der Systeme zu einander unabhängig; sie bleibt für alle Lagen bestehen. Deshalb sind im Lehrsatz die Indices weggelassen worden

der indirecten Bewegung die Normale der Bahn des Punktes B' von σ' durch A.

Die folgenden Paragraphen werden uns mit weiteren wichtigen Beziehungen beider Bewegungen zu einander bekannt machen.

§ 3. Die quadratische Verwandtschaft und die Wendekreise.

1. Seien nunmehr σ_0, σ_1, σ_2 drei beliebig gewählte Lagen des ebenen Systems σ. Das Drehungscentrum für σ_0 und σ_1 bezeichnen wir jetzt, insofern wir es als Punkt von σ betrachten, durch O_{01} und als Punkt von σ' durch O_{01}', ebenso dasjenige für σ_1 und σ_2 durch O_{12}, resp. O_{12}'. Der Halbirungspunkt der Sehne $A_0 A_1$ möge von nun an A_0^m heissen und derjenige von $A_1 A_2$ A_1^m; endlich seien a_0^v und a_1^v die zugehörigen Normalstralen. Diese beiden Normalstralen schneiden sich in einem Punkte A' von Σ', welcher das Centrum des durch A_0, A_1, A_2 gehenden Kreises ist.

Ist g_0 eine beliebige Gerade von σ_0, so bilden die Normalstralen a_0^v ihrer Punkte A_0 einen zur Mittelgeraden g_0^m perspectivischen Stralenbüschel, dessen Mittelpunkt O_{01}' ist. Ebenso bilden die Normalstralen a_1^v einen Stralenbüschel, dessen Mittelpunkt O_{12}' ist, und der zur Mittelgeraden g_1^m perspectivisch liegt. Die Punktreihen auf g_0^m und g_1^m sind einander ähnlich, da beide zur Punktreihe g_1 ähnlich sind. Daher sind die beiden Normalstralenbüschel projectivisch und erzeugen einen in σ' gelegenen Kegelschnitt, der durch die festen Punkte O_{01}' und O_{12}' hindurchgeht. Dieser Kegelschnitt geht noch durch einen dritten festen Punkt, nämlich durch das Drehungscentrum O_{20}' der Systeme σ_2 und σ_0. Denn A' ist der Schnittpunkt aller drei Mittellote des Dreiecks $A_0 A_1 A_2$; also lässt sich statt des Normalstrales a_1^v auch das auf $A_2 A_0$ errichtete Mittellot, welches durch O_{20}' hindurchgeht, zur Erzeugung des Punktes A' benutzen.

Wie sich auf die eben angegebene Weise jedem Punkt A von σ ein bestimmter Punkt A' von σ' zuordnen lässt, so findet auch das umgekehrte statt. Dies lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Umkehrung der Bewegung beweisen.

Aus dem vorletzten Satz des vorigen Paragraphen folgt nämlich, dass A_0 der Schnittpunkt der zu A' gehörigen Normalstralen $a_0^{\nu'}$ und $a_1^{\nu'}$ für die indirecte Bewegung ist. Dies ergiebt sich übrigens auch direct mit Hilfe der Erwägung, dass, wenn A_0' von A_0, A_1, A_2 gleichen Abstand hat, auch A_0', A_1', A_2' von A_0 gleichweit entfernt sind. Die geometrische Bedeutung der Punkte A und A' ist daher eine ganz wechselseitige. Es folgt daher unmittelbar, dass auch den Punkten einer Geraden h' von σ' in σ die Punkte eines Kegelschnittes entsprechen. Derselbe ist das projectivische Erzeugniss der beiden Normalstralenbüschel, welche zu h' für die umgekehrte Bewegung gehören, und geht stets durch die drei festen Punkte O_{12}, O_{20}, O_{01} von σ, wenn diese Punkte die drei Drehungscentra für die umgekehrte Bewegung sind.

Wir erhalten demnach folgendes Resultat:

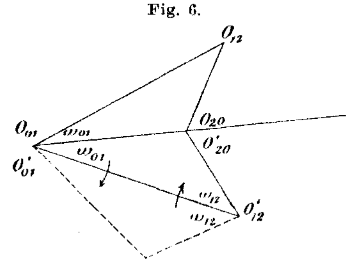
Wenn wir jedem Punkt A von σ denjenigen Punkt A' von σ' zuordnen, in welchem sich die Normalstralen a_0^ν und a_1^ν schneiden, so ist gleichzeitig der Punkt A von σ der Schnittpunkt der beiden Normalstralen $a_0^{\nu'}$ und $a_1^{\nu'}$ für die umgekehrte Bewegung. Die beiden in dieser Weise bezogenen ebenen Systeme σ und σ' stehen in quadratischer Verwandtschaft zu einander. Die Hauptpunkte von σ' sind die drei Drehungscentra der directen Bewegung, und die Hauptpunkte von σ sind die drei Drehungscentra der indirecten Bewegung.

2. Die Lage dieser Drehungscentra ist durch ein einfaches Gesetz bestimmt, das sich, wie folgt, ergiebt. Wir nehmen an, dass die Punkte O_{01}' und O_{12}', sowie die zugehörigen Drehungswinkel $2\omega_{01}$ und $2\omega_{12}$ beliebig gegeben sind, was stets zulässig ist, und dass die ebenen Systeme die anfängliche Lage σ_0, σ_0' zu einander haben. Bei dieser Annahme fallen (Fig. 6) O_{01} und O_{01}' zusammen, und die Punkte O_{12} und O_{12}' liegen so, dass

$$O_{01}O_{12} = O_{01}'O_{12}' \text{ und}$$
$$\sphericalangle\, O_{12}O_{01}'O_{12}' = 2\omega_{01}$$

ist. Der Punkt O_{20} ist Drehungscentrum für σ_2 und σ_0; er

Fig. 6.



ist daher so zu bestimmen, dass nach Richtung und Grösse

$$\sphericalangle\, O_{12} O_{01} O_{20} = \omega_{01} \text{ und } \sphericalangle\, O_{20} O_{12} O_{01} = \omega_{12}$$

ist. Denn dieser Punkt O_{20} gelangt in der That, wenn σ erst um O_{01}' und dann um O_{12}' die bezüglichen Drehungen ausführt, wieder in seine ursprüngliche Lage zurück. Er ist also derjenige Punkt, welchen σ_2 und σ_0 entsprechend gemein haben; d. h. er ist Drehungscentrum für die Lagen σ_2 und σ_0.

Das Drehungscentrum O_{20}' der umgekehrten Bewegung ist in derselben Weise zu bestimmen. Nun behalten aber für die umgekehrte Bewegung die Rotationswinkel $2\omega_{01}$ und $2\omega_{12}$ ihren Werth (§ 2, 4), also liegt O_{20}' wieder auf der Halbirungslinie des Winkels $O_{12}'O_{01}'O_{12}$, und es ist auch $\sphericalangle\, O_{20}'O_{12}'O_{01}' = \omega_{12}$; d. h. O_{20}' fällt mit O_{20} zusammen, und es folgt:

Das von den Drehungscentren der directen Bewegung gebildete Dreieck und das von den Drehungscentren der indirecten Bewegung gebildete Dreieck sind symmetrisch gleiche Figuren.

3. Da jeder Geraden des einen Systems, welche nicht durch die Hauptpunkte desselben hindurchgeht, im anderen System ein Kegelschnitt entspricht, der stets die Hauptpunkte enthält, so gilt dies auch für die unendlich fernen Geraden beider Systeme. Nun ist jeder Punkt A' von σ' Schnittpunkt der Normalstralen a_0^v und a_1^v des entsprechenden Punktes A; diejenigen Punkte von σ, welche der unendlich fernen Geraden von σ' entsprechen, haben also die Eigenschaft, dass für sie a_0^v und a_1^v parallel sind; für diese Punkte A liegen also A_0, A_1, A_2 auf einer und derselben Geraden. Es giebt daher unendlich viele Punkte A des Systems σ, für welche A_0, A_1, A_2 auf derselben Geraden liegen, und die Gesammtheit derselben bildet einen durch die drei Hauptpunkte von σ gehenden Kegelschnitt.

Das analoge gilt für σ'. Auch der unendlich fernen Geraden von σ entspricht ein durch die Hauptpunkte von σ' gehender Kegelschnitt, und jeder Punkt B' desselben ist dadurch ausgezeichnet, dass $b_0^{v'}$ und $b_1^{v'}$ parallel zu einander sind, d. h. dass B_0', B_1', B_2' auf derselben Geraden liegen.

4. Die Sehne $A_0 A_1 A_2$, welche die drei aufeinander folgenden Lagen des Punktes A enthält, ist eine Gerade des Systems σ'. Bezeichnen wir dieselbe durch a', so hat a' bei der umgekehrten Bewegung die Eigenschaft, dass sich a_0', a_1', a_2' sämmtlich in A schneiden. Dies gilt für die Sehnen aller betrachteten Punkte A; umgekehrt, ist a' eine Gerade von σ', welche für alle drei Systemlagen durch einen und denselben Punkt von σ hindurchgeht, so ist sie eine dieser Sehnen. Ebenso sind die Sehnen der analogen Punkte B' von σ' die entsprechenden Geraden des Systems σ.

Diese Geraden lassen sich für jedes der beiden ebenen Systeme leicht bestimmen. Wir thun es für σ'. Sei daher S_0' der Mittelpunkt eines beliebigen Stralenbüschels von σ_0' und S_1' der Mittelpunkt des homologen Büschels von σ_1', so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Stralen auf einem Kreis, welcher durch S_0' und S_1' hindurchgeht. Der Kreis enthält auch das Drehungscentrum O_{01}'; denn ist l_0' der Stral des Büschels S_0', welcher O_{01}' trifft, so geht auch der Stral l_1' des Büschels S_1' durch O_{01}'. Ebenso erzeugen die beiden entsprechenden Stralenbüschel von σ_1' und σ_2', deren Mittelpunkte S_1' und S_2' sind, einen Kreis, welcher durch S_1', S_2' und O_{12}' geht.

Beide Kreise enthalten den Punkt S_1', sie haben daher im Allgemeinen noch einen von S_1' verschiedenen Punkt gemein, und dieser Punkt ist Schnittpunkt von drei entsprechenden Stralen $a_0' a_1' a_2'$ der Stralenbüschel; d. h. es geht durch jeden Punkt S' von σ' im Allgemeinen eine Gerade a', welche die Eigenschaft hat, dass sich die drei Lagen a_0', a_1', a_2' in einem und demselben Punkte A von σ schneiden. Die Geraden bilden daher einen Stralenbüschel erster Ordnung. Dasselbe gilt für σ, und es folgt:

Alle Geraden eines jeden Systems, welche für drei beliebige Systemlagen durch einen und denselben Punkt gehen, bilden einen Stralenbüschel erster Ordnung.

5. Sei R' der Mittelpunkt des Stralenbüschels von σ'. Jede Gerade a' desselben ist der Definition nach die Sehne $A_0 A_1 A_2$ eines Punktes A. Sie enthält daher auch die Punkte

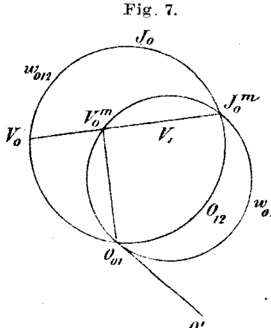
A_0^m und A_1^m. Fällen wir von O_{01}' das Lot auf $A_0 A_1$, so geht dasselbe durch A_0^m. Die Gesammtheit der Punkte A_0^m bildet daher einen Kreis, nämlich das Erzeugniss zweier Stralenbüschel, deren Stralen senkrecht auf einander stehen. Die Mittelpunkte beider Büschel sind O_{01}' und R'; also ist $O_{01}'R'$ der Durchmesser des Kreises; wir bezeichnen ihn durch w_{012}^m. Nun sind σ und σ_0^m ähnliche ebene Systeme, also bilden die Punkte A von σ ebenfalls einen Kreis. Dieser Kreis geht durch die Hauptpunkte von σ, folglich ist er der dem Hauptpunktedreieck umschriebene Kreis. Er soll der *Wendekreis der directen Bewegung* genannt und durch w_{012} bezeichnet werden.

Die entsprechenden Resultate ergeben sich für die Punkte B' von σ'; dieselben bilden den *Wendekreis der indirecten Bewegung*. Wir bezeichnen ihn durch w_{012}'. Die beiden Hauptpunktedreiecke sind symmetrisch gleiche Figuren, also haben beide Kreise gleichen Durchmesser, und es folgt:

Sind irgend drei Lagen der beiden ebenen Systeme zu einander gegeben, so existiren in jedem System unendlich viele Punkte von der Eigenschaft, dass für jeden von ihnen die drei auf einander folgenden Lagen je einer und derselben Geraden angehören. Diese Punkte bilden in beiden Systemen den dem Hauptpunktedreieck umschriebenen Kreis. Beide Kreise haben gleichen Durchmesser.

6. Alle Sehnen $A_0 A_1 A_2$ gehen, wie eben bewiesen, durch einen Punkt des Kreises w_{012}^m von σ_0^m, und zwar durch den Endpunkt des durch O_{01} gezogenen Durchmessers. (Fig. 7.) Dieser Punkt, insofern wir ihn als Punkt von σ_0^m betrachten, soll durch J_0^m bezeichnet werden. Ihm entspricht in σ ein Punkt J des Wendekreises w_{012} und zwar derjenige, dessen Sehne $J_0 J_1$ von J_0^m halbirt wird. Da $J_0^m O_{01}$ ein Durchmesser des Kreises w_{012}^m ist, so ist $J_0 J_1$ eine Tangente desselben.

Fig. 7.



Der Punkt J_0^m liegt auch auf dem Wendekreise w_{012}. J_0^m ist nämlich derjenige Punkt der Sehne $J_0 J_1$, welcher senkrecht unter O_{01} liegt. Nun ist $J_0 O_{01}$ ein Durchmesser des Kreises w_{012}, also muss J_0^m in der That ein Punkt desselben sein. Wir nennen ihn den *Wendepol*, so folgt:

Die Sehnen aller Punkte des Wendekreises gehen durch einen Punkt dieses Kreises, nämlich durch den Wendepol.

Der entsprechende Punkt existirt für die umgekehrte Bewegung auf dem Wendekreis w_{012}' von σ'. Er ist Schnittpunkt der Sehnen aller Punkte von w_{012}' und soll der *Wendepol der umgekehrten Bewegung* genannt werden. Unter Anwendung dieser Bezeichnung können wir noch folgenden Satz aussprechen:

Sind drei Lagen der beiden ebenen Systeme beliebig gegeben, so ist der Wendepol der umgekehrten Bewegung der Mittelpunkt des Stralenbüschels derjenigen Geraden a von σ, für welche die drei Lagen a_0, a_1, a_2 sich in je einem Punkt schneiden. Die Gesammtheit dieser Schnittpunkte bildet den Wendekreis der umgekehrten Bewegung. Die nämliche Bedeutung haben Wendepol und Wendekreis der directen Bewegung für σ'.

Die Geraden der beiden Stralenbüschel sollen *Rückkehrstralen* genannt werden.

7. Betrachten wir ausser den drei Lagen σ_0, σ_1, σ_2 noch eine vierte Lage σ_3, so entspricht auch den Systemen σ_1, σ_2, σ_3 ein Wendekreis w_{123}, und zwar geht derselbe durch O_{23}, O_{31}, O_{12}. Die beiden Kreise w_{012} und w_{123} haben den Punkt O_{12} gemein, und schneiden sich daher im Allgemeinen noch in einem von O_{12} verschiedenen Punkt A. Derselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass A_0, A_1, A_2, A_3 auf derselben Geraden liegen, während dies für den Punkt O_{12} im Allgemeinen nicht der Fall ist. Das entsprechende gilt für denjenigen Punkt B' von σ', in welchem sich abgesehen von O_{12}' die Wendekreise w_{012}' und w_{123}' noch schneiden; mithin folgt:

Sind vier Lagen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 des ebenen Systems σ beliebig gegeben, so existirt in demselben ein ganz bestimmter Punkt A von der Eigenschaft, dass A_0, A_1, A_2, A_3 auf einer und derselben Geraden liegen. Er ist der von O_{12} verschiedene Schnitt-

punkt der beiden Wendekreise w_{012} und w_{123}. Der analoge Punkt existirt in σ' für die indirecte Bewegung.

Die Sehne $A_0 A_1 A_2 A_3$ dieses Punktes hat als Gerade a' von σ' die Eigenschaft, dass ihre vier Lagen a_0', a_1', a_2', a_3' sämmtlich durch den Punkt A hindurchgehen. Sie ist Verbindungslinie der beiden aufeinanderfolgenden Wendepole der directen Bewegung. Ebenso ist die Verbindungslinie der Wendepole der indirecten Bewegung diejenige Gerade von σ, welche für alle vier Systemlagen durch einen und denselben Punkt geht. Also folgt:

Sind vier Lagen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 des Systems σ beliebig gegeben, so existirt in demselben eine bestimmte Gerade, welche für alle vier Systemlagen durch einen und denselben Punkt hindurchgeht. Die entsprechende Gerade existirt in σ' für die umgekehrte Bewegung.

8. Lassen wir nunmehr die Systemlagen σ_0, σ_1, σ_2 . . . beliebig nahe an einander rücken, so erhalten wir wiederum Sätze, welche in jedem Augenblick von einem in beliebiger Bewegung begriffenen ebenen System ausgesagt werden können. Dabei gehen die Punkte A' in die Krümmungsmittelpunkte der von den Punkten A beschriebenen Bahnen über, und ebenso wird A zum Krümmungsmittelpunkt der Bahn, welche A' bei der umgekehrten Bewegung in σ beschreibt. Jeder Punkt des Wendekreises erhält die Eigenschaft, gerade einen Wendepunkt seiner Bahn zu passiren. Die Hauptpunkte rücken in jedem der beiden Systeme unendlich nahe und fallen in der Grenzlage sämmtlich mit dem momentanen Drehungscentrum zusammen. Endlich gehen die Geraden $O_{01} O_{12}$ und $O_{01}' O_{12}'$ in die gemeinsame Tangente der Polcurven über. Wir können daher folgende Sätze aussprechen:

Bewegt sich ein ebenes System σ in der Ebene σ' und ist A' Krümmungsmittelpunkt der von A beschriebenen Bahn, so ist A Krümmungsmittelpunkt der Bahn von A' für die indirecte Bewegung. Ordnen wir diese Punkte A und A' einander als entsprechend zu, so stehen die so bezogenen Systeme σ und σ' in einer quadratischen Verwandtschaft. Die Hauptpunkte resp. Hauptlinien beider Systeme fallen sämmtlich mit einander zu-

sammen, und zwar die Hauptpunkte in das momentane Drehungscentrum und die Hauptlinien in die gemeinschaftliche Tangente der Polcurven.

Der Ort aller Punkte von σ, resp. σ', welche gerade Wendepunkte ihrer Bahnen passiren, ist in jedem Augenblick der Bewegung ein Kreis, welcher die gemeinsame Tangente der Polcurven im momentanen Drehungscentrum berührt. Beide Kreise haben gleichen Durchmesser und liegen auf verschiedenen Seiten dieser Tangente.[5])

Diese beiden Kreise sollen durch w, resp. w' bezeichnet werden.

9. Der Wendepol J_0^m fällt beim Grenzübergang mit J zusammen; er ist der von O verschiedene Punkt, in welchem die Polcurvennormale den Wendekreis w schneidet. Der entsprechende Schnittpunkt dieser Normale mit w' ist der momentane Wendepol der umgekehrten Bewegung. Jede durch ihn gehende Gerade wird, als Gerade von σ betrachtet, im Allgemeinen die Eigenschaft haben, dass ihre Enveloppe im momentanen Berührungspunkt einen Rückkehrpunkt hat, und das entsprechende gilt von den durch J gehenden Geraden von σ' für die umgekehrte Bewegung. Wir erhalten demnach noch folgende Sätze:

Die Tangenten der Wendepunkte gehen in jedem Augenblick durch einen und denselben Punkt, nämlich durch den momentanen Wendepol.

Es giebt in dem ebenen System σ in jedem Augenblick unendlich viele gerade Linien, welche ihre Enveloppen gerade in Rückkehrpunkten berühren. Dieselben bilden einen Stralenbüschel, dessen Mittelpunkt der Wendepol der umgekehrten Bewegung ist. Der Ort der Rückkehrpunkte ist der Wendekreis des Systems σ'.[6])

10. Der Punkt A, für welchen A_0, A_1, A_2, A_3 derselben Geraden angehören, geht für unendlich nahe Systeme in einen Punkt über, welcher gerade einen Undulationspunkt seiner Bahn durchläuft. Er ist der eine der beiden Punkte, in welchen zwei auf einander folgende Wendekreise sich schneiden. Der andere Schnittpunkt derselben ist das momentane Drehungscentrum. Nun ist das momentane Drehungscentrum derjenige

Punkt des ebenen Systems, welcher gerade einen Rückkehrpunkt seiner Bahn durchläuft; wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Die Enveloppe der Wendekreise besteht aus zwei Teilen von wesentlich verschiedener geometrischer Bedeutung. Der eine von ihnen ist die Polcurve des Systems, ihre Punkte haben die Eigenschaft, Bahnen mit Spitzen zu beschreiben, der andere ist der Ort derjenigen Punkte des Systems, deren Bahnen einen Undulationspunkt besitzen.[7])

Ebenso wird *eine* Gerade des von den Rückkehrstralen gebildeten Büschels im Allgemeinen die Eigenschaft haben, für vier unendlich nahe Systemlagen durch denselben Punkt zu gehen. Denken wir uns nämlich in σ diejenige Curve gezeichnet, deren Punkte im Verlauf der Bewegung mit den Wendepolen von σ' zusammenfallen, so ist die Tangente derselben als eine Gerade von σ zu betrachten, von der vier auf einander folgende Lagen durch einen und denselben Punkt gehen.

Die analogen Sätze gelten für die umgekehrte Bewegung.

11. Die quadratische Verwandtschaft der Systeme σ und σ' ist die Quelle einer grossen Reihe von Sätzen über die Systempunkte und die Krümmungsmittelpunkte der zugehörigen Bahnen. Dieselben lassen sich aus den bekannten Beziehungen quadratisch verwandter ebener Systeme ohne Schwierigkeit entnehmen. Wir wollen jedoch hier nur den einfachsten Fall erwähnen und eine Gerade irgend eines der beiden Systeme betrachten, von der wir voraussetzen, dass sie nicht durch das momentane Drehungscentrum hindurchgeht. In diesem Fall ist die zugehörige Curve der Krümmungsmittelpunkte ein Kegelschnitt. Behufs Untersuchung seiner Lage zum Hauptpunkt und zur Hauptlinie der quadratischen Verwandtschaft, d. h. zum Drehungspol und zur Polcurventangente, gehen wir noch einmal auf den Fall willkürlicher Systemlagen zurück. Es hatte sich ergeben, dass alle Kegelschnitte des einen Systems, welche den Geraden des andern Systems entsprechen, durch die drei Hauptpunkte gehen, und dass zu ihnen auch der dem Hauptpunktedreieck umschriebene Wende-

kreis gehört. Lassen wir die Systemlagen beliebig nahe an einander rücken, so behält der Wendekreis stets die Eigenschaft, dass er mit jedem der Kegelschnitte die drei Hauptpunkte gemein hat; in der Grenzlage geht daher der Wendekreis in den Krümmungskreis eines jeden Kegelschnittes im momentanen Drehungscentrum über.

Es ist leicht zu erkennen, von welcher Art ein solcher Kegelschnitt ist. Sei z. B. g eine beliebige Gerade von σ, so ist der zugehörige Kegelschnitt von σ' eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem g keinen, einen oder zwei Punkte mit dem Wendekreis w von σ gemein hat. Das entsprechende gilt für die Geraden von σ' und die ihnen zugeordneten Kegelschnitte von σ, also folgt:

Für jede Gerade des einen Systems, welche nicht durch das Drehungscentrum geht, liegen die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen ihrer Punkte auf einem Kegelschnitt, welcher durch das Drehungscentrum geht, und in ihm den Wendekreis des andern Systems zum Krümmungskreis hat. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Gerade mit dem Wendekreis ihres eigenen Systems keinen, einen oder zwei Punkte gemein hat.

In jedem der beiden ebenen Systeme osculiren sich somit die sämmtlichen Kegelschnitte im momentanen Drehungscentrum. Die Gesammtheit derselben bildet daher für jedes System ein specielles Kegelschnittnetz. Die Kegelschnitte des in σ' liegenden Netzes sind projectivisch zu den sämmtlichen Geraden von σ und ebenso sind die Kegelschnitte des in σ liegenden Netzes projectivisch zu den Geraden von σ'.

Für specielle Lagen der Geraden kann der ihr entsprechende Kegelschnitt zerfallen. Geht nämlich die Systemgerade durch den Hauptpunkt, d. h. durch den Drehungspol, so zerfällt der Kegelschnitt bekanntlich in die Hauptlinie, d. h. die Polcurventangente, und eine zweite Gerade. Betrachten wir endlich die Polcurventangente selbst als eine Systemgerade, z. B. als Gerade von σ, so entspricht ihr in σ' nur der Hauptpunkt, d. h. das Drehungscentrum. Demnach ist der Krümmungsmittelpunkt eines jeden Punktes der Polcurventangente der Drehungspol, und zwar gilt dies sowohl für die directe, wie für die indirecte Bewegung.

12. Der Wendekreis eines jeden Systems erscheint seiner Entstehung nach als Ort derjenigen Punkte des Systems, welche gerade Wendepunkte ihrer Bahnen passiren. Wir werden demselben später (§ 6) unter anderem Gesichtspunkt wieder begegnen. Hier wollen wir nur noch auf eine Eigenschaft desselben hinweisen, die sich unmittelbar aus der quadratischen Verwandtschaft ergiebt. Der Wendekreis von σ ist nämlich derjenige Kegelschnitt, welcher der unendlich fernen Geraden von σ' entspricht; d. h. der Wendekreis von σ kann als Ort der Krümmungsmittelpunkte aller unendlich fernen Punkte von σ' für die indirecte Bewegung betrachtet werden, und ebenso können wir den Wendekreis von σ' als Ort der Krümmungsmittelpunkte aller unendlich fernen Punkte von σ definiren.

§ 4. **Constructionen und metrische Relationen.**

1. Ist die Bewegung eines ebenen Systems in irgend einer Weise gegeben, so wird für jede momentane Systemlage die Aufgabe zu lösen sein, den Drehungspol und die Polcurventangente, die Wendekreise, und den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines jeden Systempunktes zu construiren. Wir sind im Stande, die Constructionen, welche in jedem Fall anzuwenden sind, sämmtlich aus den im vorigen Paragraphen enthaltenen allgemeinen Gesetzen abzuleiten.

Die Bewegung eines ebenen Systems ist bestimmt, sobald wir in jedem Augenblick den momentanen Drehungspol kennen. Der Drehungspol ist Schnittpunkt der Normalen aller Punktbahnen, er ist daher durch zwei beliebige derselben bestimmt. In jedem Augenblick müssen demnach die Bahnen von irgend zwei Punkten gegeben sein. Das System wird somit eine ganz bestimmte Bewegung ausführen, sobald zwei Punkte desselben gezwungen werden, vorgeschriebene Bahnen zu durchlaufen. Die Wahl dieser beiden Punktbahnen kann willkürlich getroffen werden.

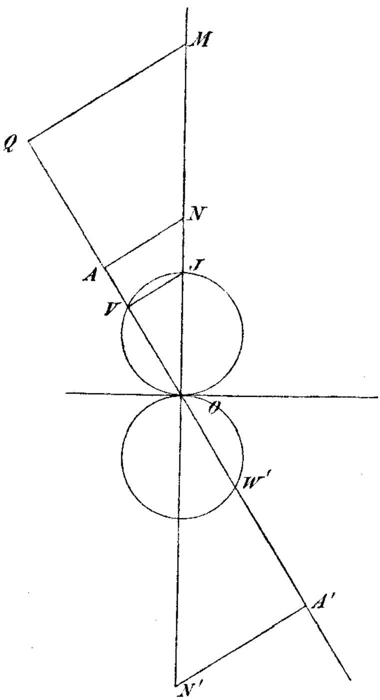
Um in jedem Augenblick ausser dem momentanen Drehungscentrum auch die Polcurventangente, sowie die Wendekreise und die Krümmungsmittelpunkte aller Punktbahnen zu construiren, bedürfen wir der Kenntniss der quadratischen Verwandtschaft, welche den betrachteten Bewegungsmoment characterisirt. Da wir eben gesehen haben, dass die Bahnen von zwei Punkten die Bewegung vollständig definiren, so lässt sich erwarten, dass die quadratische Verwandtschaft bestimmt sein wird, wenn wir die Krümmungsmittelpunkte von zwei Systempunkten kennen. In der That wird sich zeigen, dass, wenn zwei Paare zugeordneter Punkte A, A' und B, B' gegeben sind, zu jedem dritten Punkt C der Krümmungsmittelpunkt C' construirt werden kann.

2. Wir haben im vorigen Paragraphen bereits darauf hingewiesen (§ 3, 11), dass für jede Gerade des einen Systems, welche durch den Hauptpunkt geht, der zugehörige Kegelschnitt des andern Systems in die Hauptlinie und eine zweite Gerade zerfällt. Um dies genauer zu untersuchen, wollen wir zunächst wieder auf den Fall beliebiger Systemlagen zurückgehen. Auch werden wir, da für directe und indirecte Bewegung die gleichen Gesetze bestehen, für das Folgende im Allgemeinen nur die directe Bewegung in's Auge fassen.

Ist l_0 irgend eine durch O_{01} gehende Gerade von σ_0 und A_0 ein beliebiger Punkt derselben, so fällt sein Normalstral a_0^v mit l_0^m zusammen. Die Schnittpunkte $(a_0^v a_1^v)$ liegen daher sämmtlich auf l_0^m selbst. Nun bilden die Normalstralen a_1^v aller Punkte von l einen zu l_1^m perspectivischen Stralenbüschel; derselbe schneidet daher l_0^m in einer zu l_1^m also auch zu l_0^m perspectivischen Punktreihe und jeder Punkt A' derselben ist der Schnittpunkt der entsprechenden Stralen a_0^v und a_1^v.

Gehen wir zur Grenze über, so fällt l_0^m mit l zusammen, der Krümmungsmittelpunkt A' jedes Punktes A von l liegt daher auf l selbst, und es folgt, dass die Punkte A und A' zwei in einander liegende projectivische Punktreihen bilden. Die Punktreihen haben das momentane Drehungscentrum O entsprechend gemein. Dies folgt sowohl aus den Gesetzen der quadratischen Verwandtschaft, als auch aus der Erwägung, dass O im betrachteten Augenblick einen Rückkehrpunkt durchläuft, sein Krümmungsradius sich also auf Null reducirt.

Fig. 8.



Sind ferner (Fig. 8) V und W' die Punkte, in denen $\bar{l}$ die Wendekreise w und w' schneidet, so ist $VO = OW'$, und V, resp. W' ist derjenige Punkt einer jeden Punktreihe, welcher dem unendlich fernen Punkt der andern Punktreihe entspricht. Die Punktreihen haben daher die besondere Eigenschaft, dass ihre Doppelpunkte im momentanen Drehungspol zusammenfallen.

Von zwei in einander liegenden projectivischen Punktreihen dieser Art ist bekannt, dass zu jedem Punkt der einen der entsprechende der andern construirt werden kann, sobald ausser dem Doppelpunkt noch ein Paar homologer Punkte gegeben ist. Hiermit lässt sich die oben ausgesprochene Behauptung erhärten, dass die quadratische Verwandtschaft der Systeme σ und σ' durch zwei Paare zugeordneter Punkte A, A' und B, B' vollkommen bestimmt ist. Nennen wir noch jede durch O gehende Gerade l einen Normalstral, weil sie nämlich Normale für die Bahnen aller ihrer Punkte ist, und sind l_a und l_b die beiden Normalstralen, welche die Punktepaare A, A', resp. B, B' enthalten, so folgt, dass wir auf l_a und l_b die Wendepunkte V_a und V_b construiren können. Damit ist der Wendekreis w bestimmt, als der dem Dreieck $O V_a V_b$ umschriebene Kreis. Ist nun l_c irgend ein dritter Normalstral, so ist auch auf ihm ein Paar zugehöriger Punkte, nämlich V_c und der unendlich ferne Punkt, bekannt;

also lässt sich zu jedem Punkt C dieses Strales der Krümmungsmittelpunkt C' construiren; d. h.

Die quadratische Verwandtschaft der Systeme σ und σ' ist durch zwei Paare entsprechender Punkte vollständig bestimmt.

Es entsteht demnach die Aufgabe, aus zwei Paaren entsprechender Punkte A, A' und B, B' die Polcurventangente, die Wendekreise und den Krümmungsmittelpunkt jedes Systempunktes zu zeichnen. Die folgenden Betrachtungen werden uns die Mittel an die Hand geben, mit denen die genannten Constructionen sich ausführen lassen.

3. Sei A und A' (Fig. 8) ein Paar zugeordneter Punkte von σ und σ', und l der sie verbindende Normalstral. Wir bezeichnen die Entfernungen der Punkte A und A' von O durch r, resp. r' und setzen fest, dass r und r' dann als positiv zu betrachten sind, wenn der Punkt A resp. A' auf derselben Seite der Polcurventangente liegt, wie der Wendekreis seines Systems; d. h. A auf derselben Seite wie w, und A' auf derselben Seite wie w'. Auf jedem Normalstral sind demnach die positiven Richtungen von r und r' entgegengesetzt zu einander.

Da A und A' projectivische Punktreihen bilden, so ist

$$AV \cdot A'W' = OV^2 = OW'^2;$$

setzen wir noch $OV = OW' = h$, so folgt

$$(r-h)\,(r'-h) = h^2,$$

also

1) $$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{h}.$$

Diese Gleichung besteht für jeden Normalstral. Aus ihr lässt sich eine allgemeinere Relation ableiten. Bezeichnen wir nämlich den Winkel, welchen der Nomalstral l mit der Normale der Polcurven bildet, durch α, und den Durchmesser des Wendekreises durch h_0, so folgt

2) $$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\cos\alpha = \frac{1}{h_0};$$

der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck ist demnach für alle Normalstralen constant.

Wir nennen den Krümmungsradius AA' noch ϱ und setzen $AV = s$, so ergiebt sich aus Gl. 1)

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho - r} = \frac{1}{r - s}$$

und hieraus

$$r^2 = \varrho \cdot s. \tag{3}$$

Wählen wir daher den Punkt Q der Geraden l so, dass $OA = AQ$ ist, so lehrt die vorstehende Gleichung, dass

$$QA^2 = AO^2 = AV \cdot AA';$$

d. h. Q, V, O und A' sind vier harmonische Punkte, und zwar sind einerseits Q und O, andrerseits V und A' einander zugeordnet.

Ist n die gemeinsame Normale der Polcurven, und errichten wir jetzt in Q, A, V, A' Lote auf l, so treffen dieselben die Normale in vier harmonischen Punkten M, N, J, N'; und zwar ist J der Wendepol und N der Halbirungspunkt der Strecke OM. Demnach ist N, N' ein Paar entsprechender Punkte des Normalstrales, und N' der Krümmungsmittelpunkt der Bahn von N. Folglich ergiebt sich:

Ist N und N' ein Paar entsprechender Punkte der Polcurvennormale und projiciren wir N und N' auf irgend einen Normalstral l, so sind die Projectionen A und A' ebenfalls entsprechende Punkte.

Denken wir uns nun durch O alle Normalstralen l gezogen, und projiciren auf jeden derselben das Punktepaar N, N', so liegen alle so erhaltenen Punkte A auf dem Kreis, welcher ON zum Durchmesser hat, und die zugehörigen Punkte A' auf demjenigen, welcher ON' zum Durchmesser hat; d. h.

Jedem Kreis von σ, welcher die Polcurve $\mathfrak{C}$ im Drehungscentrum O berührt, entspricht in σ' ein Kreis, welcher die Polcurve $\mathfrak{C}'$ seines Systems gleichfalls in O berührt.

Hiermit haben wir ein anschauliches Bild von der speciellen Natur der quadratischen Verwandtschaft gewonnen, welche zwischen den Systemen σ und σ' statt hat.

4. Seien jetzt l_p und l_q irgend zwei Normalstralen von σ. Wir bezeichnen die Paare entsprechender Punkte auf l_p durch

$$A_p A_p', \; B_p B_p', \; C_p C_p', \ldots$$

und diejenigen auf l_q durch

$$A_q A_q', \; B_q B_q', \; C_q C_q' \ldots$$

Projiciren wir nun die in einander liegenden projectivischen Punktreihen der Geraden l_q von A_p und A_p' aus durch die Stralenbüschel

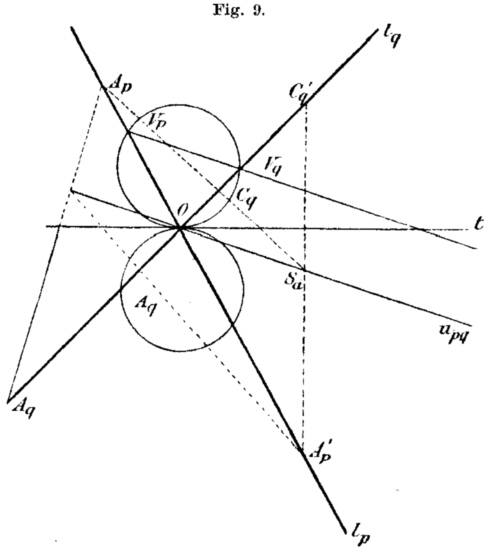
$$A_p \; |A_q, \; B_q, \; C_q \ldots| \text{ und } A_p' \; |A_q', \; B_q', \; C_q' \ldots|,$$

so haben dieselben den Stral $A_p A_p'$, da er den Doppelpunkt O mit A_p und A_p' verbindet, entsprechend gemein. Sie liegen daher perspectivisch, d. h. die Schnittpunkte entsprechender Stralen liegen sämmtlich auf einer durch O gehenden Geraden.

Um diese Gerade zu erhalten, bestimmen wir (Fig. 9) den Schnittpunkt S_a irgend zweier entsprechenden Stralen

$$|A_p C_q| \text{ und } |A_p' C_q'|$$

Fig. 9.



und verbinden ihn mit O. Wählen wir nun irgend zwei andere entsprechende Punkte B_p und B_p' des Strales l_p zu Scheiteln der beiden Stralenbüschel, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Stralen ebenfalls auf einer Geraden; ist S_b der Schnittpunkt der homologen Stralen $|B_p C_q|$ und $|B_p' C_q'|$, so kann die Gerade als Verbindungslinie von S_b mit O construirt werden.

Wir erhalten somit zu jedem Punktepaar des Strales l_p eine derartige Gerade. Alle diese Geraden fallen aber mit einander zusammen. Um dies nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, dass die Punkte S_a, $S_b, \ldots$ sämmtlich in einer durch O gehenden Geraden liegen. In der That, projiciren wir von C_q aus die Punktreihe A_p, $B_p, \ldots$ durch den Stralenbüschel

$$C_q \; |A_p,\; B_p,\; C_p, \ldots|$$

und von C_q' aus die zu ihr projectivische Punktreihe A_p', $B_p' \ldots$ durch den Büschel

$$C_q' \; |A_p',\; B_p',\; C_p', \ldots|,$$

so haben beide Büschel den Stral $C_q C_q'$ entsprechend gemein; sie liegen daher perspectivisch und die Schnittpunkte entsprechender Stralen liegen sämmtlich auf einer durch O gehenden Geraden. Diese Schnittpunkte sind aber die Punkte S_a, $S_b, \ldots$; also können wir schliesslich folgenden Satz aussprechen:

Sind l_p und l_q irgend zwei Normalstralen, und A_p, A_p', A_q, A_q' irgend zwei Paare entsprechender Punkte auf denselben, so schneiden sich die Verbindungslinien $A_p A_q$ und $A_p' A_q'$ auf einer und derselben festen Geraden.

Wir bezeichnen diese Gerade, da sie nur von l_p und l_q abhängt, durch u_{pq}. Denken wir uns, dass die auf l_p, resp. l_q in einander liegenden projectivischen Punktreihen die collineare Beziehung zweier zusammenfallenden ebenen Felder vermitteln, so liegen dieselben in Collineation und zwar ist O das Centrum und u_{pq} die Axe der Collineation. Wir wollen deshalb u_{pq} *die zu l_p und l_q gehörige Collineationsaxe* nennen.[8])

Um die Lage derselben zu bestimmen, benützen wir die Wendepunkte V_p und V_q der beiden Normalstralen. Die ihnen entsprechenden Punkte liegen unendlich fern; also trifft

$$V_p V_q$$

die unendlich ferne Gerade in einem Punkt von u_{pq}; d. h. u_{pq} ist die durch O parallel zu

$$V_p V_q$$

gezogene Gerade. Ziehen wir noch die Polcurventangente t, so ist

$$\sphericalangle (t l_q) = \sphericalangle (l_p u_{pq}),$$

weil nach elementaren Sätzen beide Winkel gleich $\sphericalangle (V_q V_p O)$ sind. Also folgt:

Sind l_p und l_q irgend zwei Normalstralen, so ist der Winkel, welchen die Polcurventangente mit dem einen Normalstral bildet, gleich demjenigen Winkel, welchen der andere Normalstral mit der Collineationsaxe bildet.

Halten wir jetzt l_p fest und lassen l_q sich um O drehen, so dreht sich auch die Collineationsaxe u_{pq} um O; d. h. l_q und u_{pq} beschreiben zwei Stralenbüschel. Nun ist stets

$$\sphericalangle\,(tl_p) = \sphericalangle\,(l_q u_{pq})\,;$$

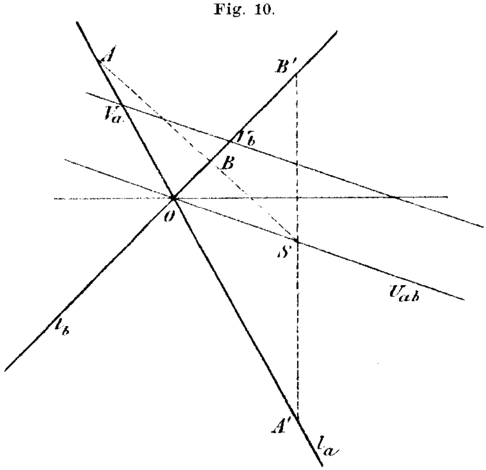
d. h. je zwei Stralen l_q und u_{pq} bilden denselben Winkel mit einander. Ordnen wir diese Stralen einander als entsprechende zu, so folgt noch:

Ist l_p irgend ein fester Normalstral, so sind der Büschel aller Normalstralen und der zugehörige Collineationsaxenbüschel zwei gleiche concentrische Stralenbüschel. Je zwei entsprechende Stralen desselben bilden denselben Winkel mit einander wie l_p und die Tangente der Polcurven.

Zu jedem Normalstral gehört demnach ein bestimmter Collineationsaxenbüschel.

Was die von l_p, l_q u_{pq} und t gebildeten Winkel betrifft, so möge noch folgende Bemerkung Platz finden. Die Normalstralen l_p und l_q teilen die Ebene in zwei verschiedene Winkelräume; wie sich aus der Herleitung der obigen Sätze ergiebt, liegen aber u_{pq} und t stets in demselben Winkelraum. Ist daher die eine dieser beiden Geraden gegeben, so ist die Lage der andern vollständig bestimmt.

Fig. 10.



5. An der Hand der vorstehenden Resultate lassen sich die oben erwähnten Constructionen nunmehr leicht ausfüh-

ren. Sei die quadratische Verwandtschaft durch zwei Paare zugeordneter Punkte A, A' und B, B' bestimmt, und nennen wir die zugehörigen Normalstralen wieder l_a und l_b, so erhalten wir die Polcurventangente wie folgt: Wir ziehen (Fig. 10) AB und $A'B'$, und verbinden den Schnittpunkt S beider Geraden mit O, so ist OS die Collineationsaxe u_{ab}. Jetzt construiren wir eine Gerade t so, dass $\measuredangle\ (tl_a) = \measuredangle\ (l_a u_{ab})$ ist und dass t und u_{ab} in einem und demselben der beiden Winkelräume liegen, welche l_a und l_b bestimmen, so ist t die Polcurventangente.

Diese Construction ist zuerst von *Bobillier* gegeben und nach ihm die *Bobillier'sche Construction* genannt worden.[9])

Um die auf l_a und l_b liegenden Wendepunkte V_a und V_b zu construiren, verfahren wir folgendermassen. Durch A' ziehen wir eine Parallele zu l_b und verbinden den Punkt, in welchem sie die Collineationsaxe trifft, mit A. Diese Gerade schneidet l_b im Punkte V_b. Ziehen wir nun noch durch V_b eine Parallele zu u_{ab}, so trifft dieselbe l_a in V_a. Damit ist auch der Wendekreis w von σ selbst bestimmt.

Sind also zwei Paare entsprechender Punkte A, A' und B, B' gegeben, so lassen sich auf den zugehörigen Normalstralen die Wendepunkte linear construiren.

Es werde nun verlangt, zu irgend einem Punkt C von σ den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt C' zu construiren. Sei l_c der Normalstral, auf dem C liegt, so schneiden sich die Geraden AC und $A'C'$ auf der Collineationsaxe u_{ac}. Diese ist aber, wie aus dem letztbewiesenen Satz folgt, durch den Stral l_c bestimmt. Demnach folgt: Wir construiren die Collineationsaxe u_{ac}, und zwar so, dass u_{ac} mit l_c denselben Winkel bildet, wie u_{ab} mit l_b, ziehen AC und verbinden den Punkt, in welchem u_{ac} von AC getroffen wird, mit A'; diese Gerade schneidet l_c in C'.

Ist die Polcurventangente und ein Paar entsprechender Punkte A, A' gegeben, so lässt sich der Durchmesser des Wendekreises ohne Weiteres bestimmen. Zeichnen wir nämlich die Polcurvennormale, so hat der zu ihr gehörige Collineationsaxenbüschel die Eigenschaft, dass jeder Normalstral auf seiner

Collineationsaxe senkrecht steht. Also folgt: Wir ziehen (Fig. 11) durch A' eine Parallele zur Polcurvennormale, errichten in O auf dem Normalstral l_a ein Lot, und nennen den Schnittpunkt beider Geraden E, so trifft EA die Polcurvennormale im Wendepol J.

Umgekehrt lässt sich auf diese Weise, wenn der Wendepol gegeben ist, zu jedem Punkt A des ebenen Systems σ der zugehörige Krümmungsmittelpunkt finden.

Fig. 11.

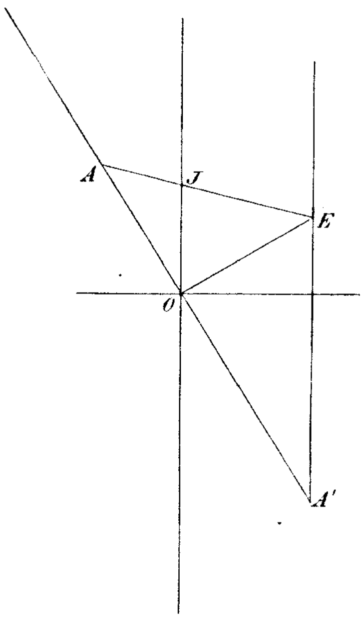
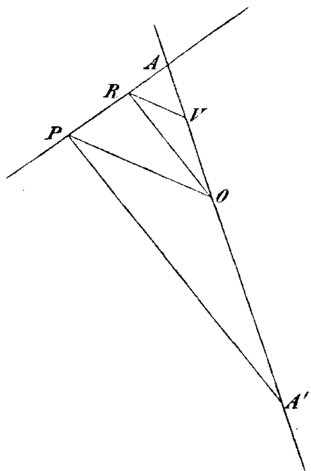


Fig. 12.



Endlich möge noch folgende Construction angeführt werden, welche gestattet, auf jedem Normalstral den Wendepunkt linear zu construiren, wenn ein Paar entsprechender Punkte auf demselben gegeben ist. Wir ziehen nämlich (Fig. 12) durch A eine beliebige Gerade g und verbinden irgend einen Punkt P derselben mit O und A'; alsdann ziehen wir durch O eine Parallele zu $A'P$, und durch ihren Schnittpunkt R mit g eine Parallele zu PO; dieselbe trifft den Normalstral l im Wendepunkt V. Es ist nämlich

$$PA : RA = A'A : OA \text{ und}$$
$$PA : RA = OA : VA;$$

also folgt:

$$AA' \cdot AV = AO^2,$$

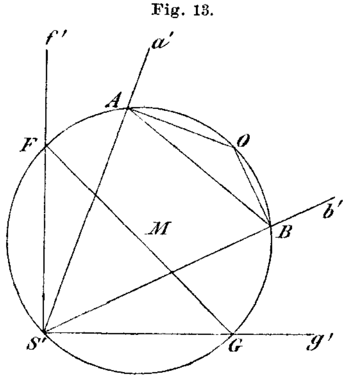
und dies ist genau die in No. 3 abgeleitete Relation. Analog kann, wenn A und V gegeben sind, der Krümmungsmittelpunkt A' construirt werden.[10])

6. Einige Beispiele mögen zur Illustration der gewonnenen Resultate dienen. Dabei benutzen wir folgende Sätze: Bewegt sich ein Punkt von σ auf einer Geraden, so liegt er auf dem Wendekreis w von σ. Geht eine Gerade von σ beständig durch einen festen Punkt, so durchläuft derselbe bei der umumgekehrten Bewegung eine Gerade und liegt daher auf dem Wendekreis w' von σ'.

a. Das ebene System σ bewege sich so, dass zwei Punkte A und B desselben auf zwei festen Geraden a' und b' von σ' laufen. Bekanntlich beschreibt jeder Punkt des Systems alsdann eine Ellipse.

Drehungscentrum und Wendekreis lassen sich unmittelbar construiren. Die in A und B auf a' resp. b' errichteten Lote (Fig. 13) schneiden sich im Drehungscentrum O. Der Wendekreis ist bestimmt, da er durch A, B und O geht. Ist S' der Schnittpunkt von a' und b', so folgt noch, dass $ABOS'$ ein Kreisviereck ist, und da der von a' und b' gebildete Winkel constant ist, so lässt sich schliessen, dass in diesem Fall der Wendekreis ein unveränderlicher Kreis des ebenen Systems σ ist. Alle Punkte des Wendekreises laufen daher, gleichwie A und B, auf geraden Linien.

Fig. 13.



Da die Wendetangenten sämmtlich durch den Wendepol gehen (§ 3, 9) und a' und b' Tangenten der Punkte A und B sind, so ist S' der Wendepol; und daraus folgt wieder, dass auch jeder andere Punkt C des Wendekreises sich auf einer durch S' gehenden Geraden c' bewegt. Wir können daher die Bewegung von σ dadurch definiren, dass wir A und B durch irgend zwei andere Punkte des Wendekreises ersetzen, z. B. durch die Endpunkte eines Durchmessers. Sind F und G diese Punkte, so stehen f' und g' senkrecht auf einander; die Bewegung des Systems σ kann daher im Speciellen auch so bestimmt werden, dass zwei Punkte F und G desselben auf zwei zu einander senkrechten Geraden f' resp. g' laufen.

Ist M der Halbirungspunkt von FG, so ist

$$MF = MG = MS'.$$

Der Punkt M hat daher stets denselben Abstand von S'; d. h. für ihn wird die Ellipse ein Kreis, der S' zum Centrum hat.

b. Die Bewegung sei dadurch bestimmt, dass eine Gerade g von σ stets durch einen festen Punkt P' geht, während ein Punkt A von g eine Gerade a' von σ' durchläuft. Jeder Punkt der Geraden beschreibt bekanntlich eine Conchoide.

Das in A auf a' errichtete Lot und das in P' auf g errichtete Lot schneiden sich im momentanen Drehungspol. Vom Wendekreis kennen wir bereits zwei Punkte, nämlich O und A. Ferner liegt P' auf dem Wendekreis von σ'. Zeichnen wir also den Punkt B auf OP' so, dass $P'O = OB$ ist, so ist B ein dritter Punkt des Wendekreises von σ.

c. Die Bewegung von σ sei dahin definirt, dass ein Punkt A auf einem Kreise K' und ein Punkt B auf einem Durchmesser b' dieses Kreises läuft. (Kurbelbewegung.)

Der durch A gehende Kreisradius und das in B auf b' errichtete Lot schneiden sich im Drehungscentrum O. Der Wendekreis geht durch O und B. Der Krümmungsmittelpunkt A' von A ist der Mittelpunkt des Kreises K'; also lässt sich nach den vorstehenden Constructionen der auf AA' liegende Punkt des Wendekreises zeichnen.

d. Die Bewegung eines ebenen Systems finde in der Weise statt, dass ein Punkt A desselben auf einem festen Kreis K' läuft, während eine durch A gezogene Gerade g

stets durch einen festen Punkt P' von K' geht. Alsdann beschreibt jeder Punkt der Geraden eine Pascalsche Schneckenlinie.

Der durch A gehende Kreisradius und das in P' auf g errichtete Lot schneiden sich im Drehungspol O. Der Wendekreis geht durch O und denjenigen Punkt V von OP', für den $OV = OP'$ ist. Nennen wir den Mittelpunkt des Kreises K' A', so ist durch A und A' ein dritter Punkt des Wendekreises bestimmt.

e. Das eben erörterte Beispiel lässt sich noch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten. Wir haben gesehen, dass bei der unter a besprochenen Bewegung der Punkt M einen Kreis mit dem Mittelpunkt S' beschreibt. Diese Bewegung kann daher auch so definirt werden, dass ein Punkt M von σ einen Kreis beschreibt, während ein zweiter Punkt A auf einer Geraden a' läuft. Bei der umgekehrten Bewegung geht demnach die Gerade a' stets durch einen festen Punkt A von σ, und da M einen Kreis mit dem Centrum S' durchläuft, so bewegt sich S' auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M, welcher durch den Punkt A geht. Die Umkehrung der Bewegung a ist also identisch mit der Bewegung d; alle für die erstere ausgeführten Constructionen gelten daher auch für die letztere. Im Besonderen folgt, dass nicht allein a', sondern vielmehr jede Gerade des Stralenbüschels, dessen Mittelpunkt S' ist, durch je einen festen Punkt geht, und dass der Wendekreis des Systems stets dieselbe Grösse behält. Der Undulationspunkt (§ 3, 10) fällt daher in jedem Augenblick in den Wendepol.

Wir sehen daraus, welchen Nutzen die Umkehrung der Bewegung auch in speciellen Fällen zu gewähren vermag.

§ 5. Die Punkte stationärer Krümmung.

1. Wir haben uns bisher im Wesentlichen mit denjenigen Eigenschaften der Punktbahnen beschäftigt, welche sich aus der Betrachtung von zwei unendlich nahen Bahnelementen ergeben. In diesem Paragraph sollen die Untersuchungen noch einen Schritt weiter geführt und auf drei auf einander folgende Bahnelemente ausgedehnt werden.

Wir setzen dazu zunächst vier beliebige Lagen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 des ebenen Systems σ voraus. Die drei auf einander folgenden Normalstralen eines Punktes A seien a_0^v, a_1^v, a_2^v. Dieselben werden im Allgemeinen ein Dreieck bilden; wir können aber die Frage aufwerfen, ob es Punkte A von σ giebt, deren Normalstralen a_0^v, a_1^v, a_2^v sich in einem und demselben Punkt treffen, die also die Eigenschaft haben, dass die vier Lagen A_0, A_1, A_2, A_3 je einem und demselben Kreise angehören.

Solche Punkte existiren in der That. Ist nämlich g eine beliebige Gerade von σ, so bilden die Schnittpunkte der ihr zugehörigen Normalstralen a_0^v und a_1^v einen Kegelschnitt, der durch O_{12}', O_{20}', O_{01}' geht (§ 3, 1). Ebenso bilden die Schnittpunkte der Normalstralen a_1^v und a_2^v einen Kegelschnitt, welcher durch die Drehungscentra O_{23}', O_{31}', O_{12}' hindurchgeht. Diese Kegelschnitte enthalten beide den Punkt O_{12}'; sie schneiden sich daher im Allgemeinen noch in drei von O_{12}' verschiedenen Punkten, und jeder derselben ist dadurch ausgezeichnet, dass er der Treffpunkt von drei entsprechenden Normalstralen a_0^v, a_1^v, a_2^v ist. Es giebt daher auf g drei Punkte A von der betrachteten Art und die Gesammtheit dieser Punkte A von σ bildet eine Curve dritter Ordnung. Dieselbe soll durch k_{0123}^3 oder kurz durch k_{03}^3 bezeichnet werden.

Die Punkte dieser Curve lassen sich auch folgendermassen definiren. Die drei Systeme σ_0, σ_1, σ_2 bestimmen eine quadratische Verwandtschaft zwischen den Punkten von σ und denen von σ'; ebenso wird auch durch die Systemlagen σ_1, σ_2, σ_3 eine solche quadratische Verwandtschaft zwischeu σ und σ' definirt. Jedem Punkte A von σ werden im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte von σ' entsprechen. Die Punkte A der Curve k_{03}^3 haben aber die Eigenschaft, dass ihnen für beide quadratischen Beziehungen derselbe Punkt von σ' zugeordnet ist, und die Punkte A' sind diejenigen Punkte von σ', welche die beiden in einander liegenden Systeme σ', deren jedes mit σ quadratisch verwandt ist, entsprechend gemein haben.

2. Eine derartige Curve $k_{03}^{3'}$ besteht auch in dem ebenen

System σ' für die umgekehrte Bewegung, und zwar stehen beide Curven in einer reciproken Beziehung zu einander. Ist nämlich A ein Punkt von k_{03}^3 und A' wiederum der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch A_0, A_1, A_2, A_3 geht, so ist A' ein Punkt von $k_{03}^{3'}$. Denn gleichgiltig, ob wir σ oder σ' als beweglich betrachten, so haben die beiden Punkte A und A' für die vier betrachteten Lagen von σ und σ' den nämlichen Abstand von einander; d. h. A_0', A_1', A_2', A_3' liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt A ist. Also ist in der That jeder Punkt A' von k_{03}^3 der Mittelpunkt des zum Punkt A von k_{03}^3 gehörigen Kreises, und umgekehrt ist jeder Punkt A von k_{03}^3 Mittelpunkt des Kreises, welcher zu A' gehört. Die Curve $k_{03}^{3'}$ ist daher Ort der Mittelpunkte der Kreise für die Punkte von k_{03}^3, und k_{03}^3 ist Ort der Kreismittelpunkte für die Punkte von $k_{03}^{3'}$ bei der umgekehrten Bewegung.

Jedes Punktepaar A, A' repräsentirt zwei entsprechende Punkte der Systeme σ und σ'; also sind k_{03}^3 und $k_{03}^{3'}$ entsprechende Curven. Daher geht k_{03}^3 durch O_{12}, O_{20}, O_{01} und $k_{03}^{3'}$ durch O_{12}', O_{20}', O_{01}'; in der That gehören für jeden dieser Punkte die vier betrachteten Lagen demselben Kreise an, da zwei derselben mit einander zusammenfallen. Nun ist aber ersichtlich, dass sich $k_{03}^{3'}$ in Bezug auf die vier Systemlagen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 gleichartig verhält; in jedem Punkt A' derselben schneiden sich nämlich ausser a_0^ν, a_1^ν, a_2^ν noch je drei andere Normalstralen, welche wir erhalten, wenn wir die Mittellote der Sehnen A_0A_2, A_0A_3, A_1A_3 construiren. Demnach folgt, dass $k_{03}^{3'}$ durch die sechs Drehungscentra

$$O_{01}',\ O_{02}',\ O_{03}',\ O_{12}',\ O_{13}',\ O_{23}'$$

hindurchgeht, welche zu je zwei Systemlagen bei der umgekehrten Bewegung gehören, ebenso enthält die Curve k_{03}^3 von σ die sechs Drehungscentra

$$O_{01},\ O_{02},\ O_{03},\ O_{12},\ O_{13},\ O_{23}$$

der directen Bewegung.

3. Beide Curven enthalten auch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Um dies zu beweisen, verfahren wir folgendermassen. Wir sahen, dass wenn g eine beliebige

Gerade von σ ist, ihr für jede der beiden oben erwähnten quadratischen Verwandtschaften ein bestimmter Kegelschnitt zugeordnet ist, und dass die von O_{12}' verschiedenen Schnittpunkte beider Kegelschnitte stets Punkte von $k_{03}^{3'}$ sind. Betrachten wir im Speciellen die unendlich ferne Gerade von σ, so ist ihr für die Lagen σ_0, σ_1, σ_2 in σ' der Wendekreis w_{012}' zugeordnet, und für die Lagen σ_1, σ_2, σ_3 der Wendekreis w_{123}'; beide Kreise schneiden sich ausser in O_{12}' noch in einem im Endlichen gelegenen Punkt und in den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten, welche allen Kreisen einer Ebene gemeinsam sind. Diese Punkte liegen daher auf $k_{03}^{3'}$, und das gleiche gilt von k^3_{03}. Folglich ergiebt sich:

Sind σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 vier beliebige Lagen des ebenen Systems σ, so giebt es unendlich viele Punkte A desselben, für welche die vier Lagen A_0, A_1, A_2, A_3 je einem und demselben Kreise angehören. Dieselben bilden eine Curve dritter Ordnung, k_{03}^3, welche durch die sechs Drehungspole O_{01}, O_{02}, O_{03}, O_{12}, O_{13}, O_{23} und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte hindurchgeht. Die Mittelpunkte dieser Kreise bilden eine in σ' gelegene Curve dritter Ordnung $k_{03}^{3'}$, welche durch die sechs Drehungspole der umgekehrten Bewegung und gleichfalls durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte hindurchgeht. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen beide Curven ihre Bedeutung.[11])

Sei W' der von O_{12}' verschiedene reelle Schnittpunkt der Wendekreise w_{012}' und w_{123}', so liegt, wie eben bewiesen, W' auf $k_{03}^{3'}$. Ihm entspricht auf der Curve k_{03}^3 ein unendlich ferner Punkt W_∞, und dies ist der einzige unendlich ferne Punkt, von k_{03}^3. Ebenso schneiden sich die Wendekreise w_{012} und w_{123} in einem Punkt V von k_{03}^3, dem auf $k_{03}^{3'}$ ein unendlich ferner Punkt V_∞' entspricht. Die drei Normalstralen von V schneiden sich also in V_∞'; d. h. V_0, V_1, V_2, V_3 liegen auf einer Geraden und ebenso liegen W_0', W_1', W_2', W_3' auf einer Geraden. Wir finden daher für die Punkte V und W diejenigen Eigenschaften wieder, welche wir von anderen Gesichtspunkten aus bereits früher (§ 3, 7) bewiesen haben.

Von den unendlich fernen imaginären Kreispunkten, welche beiden Curven k_{03}^3 und $k_{03}^{3'}$ gemeinsam sind, müssen wir schliessen, dass sie als Punkte der quadratisch verwandten ebenen Systeme σ und σ' betrachtet, sich selbst zugeordnet sind, dass also jeder derselben mit dem Mittelpunkt des ihm zugehörigen Krümmungskreises zusammenfällt. Wir haben daher diese beiden Punkte für jede beliebige Verschiebung eines ebenen Systems in seiner Ebene als feste Punkte zu betrachten.

Sind daher σ_i und σ_k zwei ganz beliebige Lagen des ebenen Systems σ, so bilden die unendlich fernen imaginären Kreispunkte mit dem Drehungscentrum O_{ik} diejenigen drei Punkte, welche zwei in einander liegende collineare ebene Systeme stets entsprechend gemein haben. Als die Doppelgeraden beider Systeme haben wir daher ausser der unendlich fernen Geraden die beiden Linien zu betrachten, welche vom Drehungscentrum nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten hinlaufen.

4. Nachdem wir die Existenz der Curve k_{03}^3 gezeigt haben, liegt es nahe mit ihr die analog definirte Curve dritter Ordnung k_{14}^3 zu verbinden, welche zu den Systemlagen σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 gehört. Beide Curven haben die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und ausserdem die Drehungscentra O_{23}, O_{31}, O_{12} gemein, und schneiden sich daher im Allgemeinen noch in vier anderen Punkten. Jeder dieser Punkte A hat die Eigenschaft, dass für ihn die fünf Lagen A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 je einem und demselben Kreise angehören. Für die Punkte O_{23}, O_{31}, O_{12} ist dies jedoch im Allgemeinen nicht der Fall; wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

Sind σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 fünf beliebige Lagen des ebenen Systems σ, so giebt es in demselben im Allgemeinen vier Punkte A von der Eigenschaft, dass für jeden derselben A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 auf je einem und demselben Kreise liegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die entsprechenden Punkte von σ' für die indirecte Bewegung, und umgekehrt.[12])

5. Lassen wir die willkürlich gewählten Systemlagen σ_0, σ_1, σ_2 ... beliebig nahe aneinander rücken, so ergeben sich wiederum Sätze, welche in jedem Moment von einem in irgend

welcher Bewegung begriffenen System ausgesagt werden können. Wir erhalten nämlich:

Bewegt sich ein ebenes System σ in seiner Ebene, so giebt es in jedem Augenblick eine Curve k^3 dritter Ordnung, deren Punkte gerade Bahnen mit stationärem Krümmungskreis beschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise bilden eine in der festen Ebene σ' gelegene Curve $k^{3\prime}$, die ebenfalls von der dritten Ordnung ist. Jede derselben berührt die Polcurve ihrer Ebene im momentanen Drehungscentrum dreipunktig. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen die beiden Curven ihre Bedeutung.

Bewegt sich ein ebenes System σ in seiner Ebene, so giebt es in jedem Augenblick im Allgemeinen vier Punkte desselben, deren Bahnen gerade fünfpunktig berührende Krümmungskreise besitzen. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die analogen Punkte der festen Ebene σ' für die indirecte Bewegung und umgekehrt.

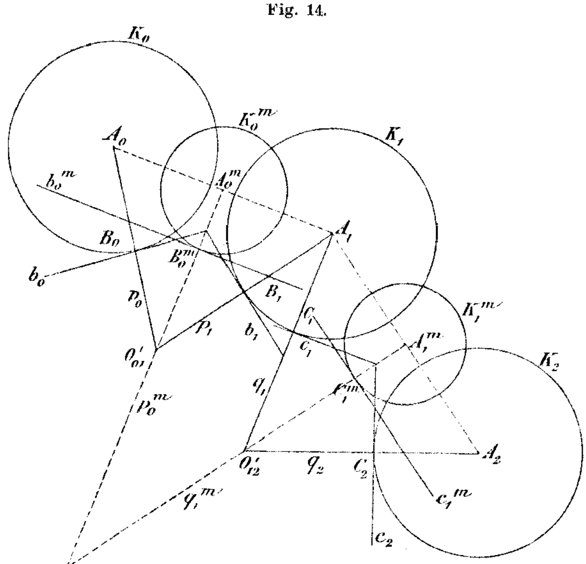
6. Um die vorstehenden Sätze auf ein Beispiel anzuwenden, betrachten wir die im vorigen Paragraphen unter 6 a besprochene Bewegung. Wir hatten bereits bewiesen, dass der Wendekreis ein fester Kreis des Systems ist. Jeder Punkt V desselben beschreibt eine Gerade und gehört daher in jedem Augenblick der Curve k^3 an. Die Curve muss daher in den Wendekreis und eine Gerade u zerfallen. Nun läuft der Mittelpunkt M des Wendekreises, wie oben bewiesen, auf einem Kreise; er ist daher ein Punkt von $k^{3\prime}$, und da er nicht auf dem Wendekreise liegt, so geht u durch M. Es folgt demnach, dass *in jedem Augenblick diejenigen Punkte von σ, welche gerade Scheitel ihrer Ellipsen passiren, auf einer durch M gehenden Geraden u liegen.* Die Gerade u ist somit stets Durchmesser des Wendekreises. Betrachten wir denjenigen Durchmesser, welcher auf der Polcurventangente senkrecht steht, so folgt leicht, dass die Endpunkte dieses Durchmessers als zwei Punkte anzusehen sind, welche gerade Scheitel ihrer Ellipsen durchlaufen; d. h. *u ist die gemeinsame Normale der Polcurven.*

§ 6. Die Krümmung der von den Systemcurven umhüllten Enveloppen.

1. Die Krümmungsverhältnisse der Enveloppen lassen sich auf die Krümmungsverhältnisse der von den Systempunkten beschriebenen Bahnen zurückführen.

Wir betrachten, um dies zu erweisen, die drei Lagen K_0, K_1, K_2 eines beliebigen Kreises K von σ (Fig. 14). Die Lagen seines Mittelpunktes seien A_0, A_1, A_2. Ferner denken wir

Fig. 14.



uns wieder die Kreise K_0^m, K_1^m und ihre Mittelpunkte A_0^m, resp. A_1^m gezeichnet. Wir verbinden das Drehungscentrum O_{01}' mit A_0, A_0^m und A_1, und erhalten so die entsprechenden Geraden p_0, p_0^m, p_1; sie schneiden die Kreise K_0, K_0^m, K_1 in den entsprechenden Punkten B_0, B_0^m, B_1, und zwar wollen wir, um die Begriffe zu fixiren, annehmen, dass B_0^m zwischen O_{01}' und A_0^m, also auch B_0 und B_1 zwischen O_{01}' und A_0, resp. A_1 liegen. Endlich sind auch die Tangenten der drei Kreise in B_0, B_0^m, B_1 drei entsprechende Geraden b_0, b_0^m, b_1 unserer ebenen Systeme σ_0, σ_0^m, σ_1.

Die analogen Constructionen machen wir für die Kreise K_1, K_1^m, K_2. Die Verbindungslinien ihrer Mittelpunkte A_1, A_1^m, A_2 mit dem Drehungscentrum O_{12}' seien resp. q_1, q_1^m, q_2. Die Schnittpunkte der Kreise mit q_1, q_1^m, q_2, und zwar wieder diejenigen, welche zwischen den Mittelpunkten und dem Drehungscentrum O_{12}' liegen, seien C_1, C_1^m, C_2, und die Tangenten in ihnen c_1, c_1^m, c_2.

Wir denken uns nun eine Systemcurve k von σ, welche den Kreis K in den beiden Punkten B und C berühren möge; im übrigen darf dieselbe ganz willkürlich angenommen werden. Lassen wir alsdann die Drehung um O_{01}' unendlich klein werden, so wird (§ 1, 7) b_0^m in die gemeinsame Tangente der Curve k und ihrer Enveloppe übergehen, B_0^m wird zum momentanen Berührungspunkt und p_0^m zur Normale der Enveloppe in diesem Punkt. Das entsprechende ergiebt sich für c_1^m, C_1^m und q_1^m, wenn wir die Drehung um O_{12}' unendlich klein werden lassen. Dies gilt für alle Curven k von σ, welche der Bedingung genügen, den Kreis K in B und C zu berühren, und für jede beliebige Lage der Punkte O_{01}' und O_{12}' zu einander.

Wir werden nun noch die weitere Annahme machen, dass σ irgend eine beliebige continuirliche Bewegung ausführt, dass also O_{01}' und O_{12}' zwei unendlich nahe Punkte der zugehörigen Polcurve von σ' sind. Alsdann rücken auch B und C unendlich nahe aneinander, und da k stets eine Curve bleiben soll, welche den Kreis K in B und C berührt, so geht K in den Krümmungskreis der Curve k über, und es folgt daher, dass für *jede* Systemcurve, welche den Kreis K zum Krümmungskreis hat, derjenige Punkt, in welchen der Schnittpunkt von p_0^m und q_1^m in der Grenzlage übergeht, der Krümmungsmittelpunkt der zugehörigen Enveloppe ist. Nun ist aber, und zwar für beliebige Systemlagen, p_0^m gleichzeitig der Normalstral a_0^v und q_1^m identisch mit dem Normalstral a_1^v, also wird beim Grenzübergang der Schnittpunkt von p_0^m und q_1^m zum Krümmungsmittelpunkt der von A beschriebenen Bahn. Demnach erhalten wir folgenden allgemeinen Satz:

Der Krümmungsmittelpunkt der von einer Systemcurve umhüllten Enveloppe fällt in jedem Augenblick mit dem Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahn zusammen, welche der Krümmungsmittelpunkt der Systemcurve beschreibt.

2. Nennen wir die von der Systemcurve k umhüllte Enveloppe k', so ist für die umgekehrte Bewegung k die Enveloppe von k'. Die Curven k und k' berühren sich nämlich in jedem Augenblick, und dies ist eine rein geometrische Eigenschaft, welche davon unabhängig ist, ob wir uns während der Bewegung in der Ebene σ', oder in der Ebene σ befinden. Die kinematische Bedeutung der quadratischen Verwandtschaft, welche zwischen den ebenen Systemen σ und σ' besteht, ist daher weit umfassender, als im vorigen Paragraphen bewiesen. Denn wenn k und k' irgend zwei beliebige Curven von σ und σ' sind, welche in dem gegenseitigen Verhältniss von Curve und Enveloppe zu einander stehen, so sind ihre Krümmungsmittelpunkte im momentanen Berührungspunkt stets zwei entsprechende Punkte A und A' für die quadratische Verwandtschaft, welche den betrachteten Bewegungsmoment charakterisirt.

Auch die Polcurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ sind ein Paar solcher Curven, wie wir sie eben betrachteten; in der That ist $\mathfrak{C}'$ die Enveloppe von $\mathfrak{C}$ für die directe Bewegung und $\mathfrak{C}$ diejenige von $\mathfrak{C}'$ für die indirecte Bewegung. Die Krümmungsmittelpunkte der Polcurven sind daher in jedem Augenblick entsprechende Punkte der quadratisch verwandten ebenen Systeme σ und σ'.

3. Die im § 4 für je zwei zugeordnete Punkte A und A' abgeleiteten Relationen und Constructionen gelten demnach auch für die momentanen Krümmungsmittelpunkte je zweier Curven k und k'. Sind daher r und r' jetzt die Entfernungen des Drehungspoles von den momentanen Krümmungsmittelpunkten einer Systemcurve und ihrer Enveloppe, so besteht auch für sie die Gleichung (§ 4, 3)

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos \alpha = \frac{1}{h_0},$$

wo α den Winkel bedeutet, welchen die Verbindungslinie von A und A' mit der Normale der Polcurven bildet, und das

Zeichen von r und r' ebenso definirt ist, wie in § 4. Nennen wir die Krümmungsradien der Polcurven im momentanen Drehungscentrum ϱ und ϱ', so besteht auch für sie die eben aufgestellte Relation, also folgt:

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\cos\alpha=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{h_0}.$$

Diese Gleichung führt nach ihrem Entdecker den Namen der *Savaryschen Gleichung.*[13])

Wir machen jetzt die besondere Voraussetzung, dass die Systemcurve k eine Gerade ist. Ihr Krümmungsmittelpunkt liegt im Unendlichen, daher liegt der Krümmungsmittelpunkt ihrer Enveloppe auf dem Wendekreise w' von σ'. Das analoge gilt für die umgekehrte Bewegung, also folgt:

Die Krümmungsmittelpunkte aller Enveloppen, welche von den Geraden des einen ebenen Systems umhüllt werden, liegen in jedem Augenblick auf dem Wendekreise des anderen Systems.

Ist umgekehrt k eine Curve des Systems σ, deren Krümmungsmittelpunkt auf dem Wendekreis von σ liegt, so fällt der Krümmungsmittelpunkt ihrer Enveloppe in das Unendliche; die Enveloppe besitzt daher einen Wendepunkt und es folgt:

Liegt der Krümmungsmittelpunkt einer Curve des einen ebenen Systems auf dem Wendekreis, so hat die von ihr umhüllte Enveloppe des andern Systems im momentanen Berührungspunkt einen Wendepunkt.

4. Um die vorstehenden Sätze auf einige Beispiele anzuwenden, geben wir zunächst die Construction des Krümmungsmittelpunktes der Fusspunktencurven. Ist k' irgend eine Curve, ist A' ein fester Punkt in der Ebene derselben und man fällt von A' Lote auf die Tangenten der Curve, so bilden die Fusspunkte dieser Lote die Fusspunktencurve. Dieselbe lässt sich daher auch folgendermassen definiren: Wenn sich ein rechter Winkel so bewegt, dass ein Schenkel a beständig durch einen festen Punkt A' geht, während der andere Schenkel b stets eine feste Curve k' berührt, so beschreibt der Scheitelpunkt S des Winkels eine Fusspunktencurve von k'.

Sei B der momentane Berührungspunkt von b und k', so schneiden sich das in B auf b errichtete Lot, und das in A' auf a errichtete Lot im momentanen Drehungspol O. Daher ist SO die Normale der Fusspunktencurve. Vom Wendekreis der umgekehrten Bewegung kennen wir bereits die Punkte O und P'; auf ihm liegt aber auch der Krümmungsmittelpunkt der gegebenen Curve k'. Kennen wir also den Krümmungsradius von k', so lässt sich der Wendekreis, und damit auch der Krümmungsradius der Fusspunktencurve construiren.

5. Ein zweites Beispiel sei das folgende: Ein ebenes System σ möge sich so bewegen, dass eine Gerade g desselben die Eigenschaft besitzt, stets Bahntangente eines ihrer Punkte A zu bleiben. Das in A auf g errichtete Lot l ist ebenfalls eine feste Gerade von σ; es ist stets Normale der von A beschriebenen Bahn und geht daher durch den momentanen Pol O. In jedem Augenblick wird demnach ein Punkt von l zum Pol; d. h. l ist der Ort dieser Pole in σ, und somit die Polcurve von σ.

Der Punkt A beschreibt eine Evolvente der Polcurve des Systems σ'. Diese Evolvente ist gleichzeitig die von g umhüllte Curve; denn da das vom momentanen Drehungscentrum auf g gefällte Lot stets durch A geht, so ist A stets ein Punkt der Enveloppe von g. Die Gerade g umhüllt daher dieselbe Curve, welche ihr Berührungspunkt beschreibt; folglich können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn sich ein ebenes System σ so bewegt, dass eine Gerade desselben die nämliche Curve umhüllt, welche ihr Berührungspunkt beschreibt, so ist die Normale l der Curve die Polcurve von σ und ihre Evolute die Polcurve von σ'.

Die Wendekreise von σ und σ' lassen sich in diesem Fall unmittelbar bestimmen. Sie haben nämlich, wie aus der Savaryschen Gleichung folgt, den Krümmungsradius der Evolute zum Durchmesser.

6. In der oben aufgestellten Savaryschen Gleichung sind die Krümmungsradien ϱ und ϱ' so definirt, dass jeder von beiden als positiv zu betrachten ist, wenn er auf derselben

Seite der Polcurventangente liegt, wie der Wendekreis seines Systems. Tritt der besondere Fall ein, dass ϱ und ϱ' auf der nämlichen Seite dieser Tangente liegen, und dass $\varrho = \varrho'$ ist, so hat der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$$

den Wert Null, und es wird h_0, d. h. der Durchmesser des Wendekreises, unendlich gross. Der Wendekreis reducirt sich also in diesem Fall auf die Tangente der Polcurven.

Diese aus der Savaryschen Gleichung gezogene Folgerung ist jedoch an eine Bedingung gebunden. Zu derselben gelangen wir auf folgende Weise. Denken wir uns zunächst, dass die Krümmungsradien ϱ und ϱ' stets nach verschiedenen Seiten gerichtet sind, so werden die beiden Polcurven sich von aussen berühren und von aussen auf einander abrollen. Sind dagegen ϱ und ϱ' nach derselben Seite hin gerichtet, so berühren sich die Polcurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ von innen, und es findet ein Rollen von innen statt. Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, dass in irgend einem Augenblick ϱ kleiner sei als ϱ' und betrachten σ als das bewegliche und σ' als das feste System; alsdann rollt momentan die Curve $\mathfrak{C}$ von innen auf $\mathfrak{C}'$. Nun mögen allmählich beide Krümmungsradien einander gleich werden, so wird der Durchmesser des Wendekreises stetig wachsen und zuletzt unendlich gross werden. Wenn aber, nachdem ϱ und ϱ' einander gleich geworden, ϱ der grössere Krümmungsradius wird, so liegt alsdann die Curve $\mathfrak{C}'$ innerhalb der Curve $\mathfrak{C}$, die Curve $\mathfrak{C}$ wird also $\mathfrak{C}'$ umschweben, und wir überzeugen uns, dass in dem Moment, in welchem ϱ und ϱ' gleich sind, in dem Drehungssinn des ebenen Systems σ ein Wechsel eintreten muss. In diesem Fall wird jeder beliebige Punkt A des Systems, also auch jeder Punkt der Polbahnentangente einen Rückkehrpunkt passiren; es giebt überhaupt keinen Punkt des Systems, der gerade einen Wendepunkt hätte. Wenn dagegen, nachdem ϱ gleich ϱ' geworden, ϱ der kleinere Krümmungsradius bleibt, so wird $\mathfrak{C}$ wieder von innen auf $\mathfrak{C}'$ rollen, der Drehungssinn der Bewegung ändert sich nicht, und jetzt kommt wirklich allen Punkten der Polcurventangente die Eigenschaft zu, Wendepunkte ihrer Bahnen zu durchlaufen.

Dies gilt sowohl für die directe, wie für die indirecte Bewegung; wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

Wenn in einem Augenblick der Bewegung die beiden Polcurven sich von innen berühren und gleichzeitig die Differenz ihrer Krümmungsradien das Vorzeichen wechselt, so beschreiben alle Punkte beider Systeme Rückkehrpunkte ihrer Bahnen.

Umgekehrt ist ersichtlich, dass die Polcurven die im Satz genannte Eigenschaft haben müssen, damit in irgend einem Augenblick die Bahn eines *jeden* Punktes des Systems einen Rückkehrpunkt besitzt. Rollt z. B. ein Kreis auf einem Kegelschnitt, und ist der Durchmesser des Kreises kleiner als die grosse, und grösser als die kleine Axe der Ellipse, so wird dies in denjenigen Punkten eintreten, in welchen der Kreis Krümmungskreis des Kegelschnittes ist.

Zweites Capitel.

Die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

§ 1. Die Drehungsaxe und die Polkegel.

1. Ein Körper S bewege sich um einen festen Punkt O. Der feste, unbewegliche Raum, in welchem die Bewegung vor sich geht, soll S' genannt werden. Wir stellen uns vor, dass der Körper S nach allen Richtungen unbegrenzt ausgedehnt ist. Jeder Punkt desselben beschreibt bei der Bewegung eine sphärische Curve, und es ist evident, dass alle Curven, welche von den Punkten einer durch O gehenden Geraden beschrieben werden, die gleichen geometrischen Eigenschaften besitzen. Es genügt daher, den beweglichen Körper S als einen Stralenbündel zu betrachten und die Bewegung eines Stralenbündels um seinen Mittelpunkt zu untersuchen.

In der synthetischen Geometrie erscheint jeder Stralenbündel im Allgemeinen nur als Gesammtheit seiner Stralen und Ebenen. Es ist jedoch wichtig, darauf hinzuweisen, dass hier, gemäss der Natur des Gegenstandes, auf jedem Stral des Bündels auch die Gesammtheit seiner Punkte in's Auge zu fassen ist.

Analog zu der im § 1 des vorigen Capitels eingeführten Bezeichnung werden wir die Punkte, Stralen und Ebenen von S durch Buchstaben ohne Index bezeichnen, wenn es sich darum handelt, bestimmte Elemente des Stralenbündels S zu fixiren, ohne dass ihre Lage im festen Raum S' in Frage kommt. Dagegen sollen die verschiedenen Lagen, welche ein Punkt A, ein Stral a, eine Ebene ε von S der Reihe nach in S' einnimmt, durch

$$A_0, A_1, A_2 \ldots \quad a_0, a_1, a_2 \ldots \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$$

bezeichnet werden, und

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2 \ldots$$

seien die entsprechenden Lagen von S in S'.

Alle Punkte des Stralenbündels, welche auf einer um O als Centrum beschriebenen Kugelfläche liegen, bewegen sich auf dieser Kugelfläche. Durch die Bewegung einer solchen Kugelfläche ist die Bewegung des Körpers selbst bestimmt. Mit Rücksicht darauf pflegt man die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt auch in der Weise zu behandeln, dass man sie durch die Bewegung eines sphärischen Systems auf seiner eigenen Kugelfläche ersetzt; wir ziehen es jedoch vor, dieselbe, wie eben geschehen, als Bewegung eines Stralenbündels um seinen Mittelpunkt zu definiren.

2. Seien also S und S_1 zwei beliebige Lagen des beweglichen Stralenbündels, und a_0, b_0, resp. a_1, b_1 die entsprechenden Lagen von zwei Stralen a und b desselben. Die beiden Stralen a_0 und a_1 sind Träger zweier congruenten Punktreihen und bilden zwei Paare von Scheitelwinkeln mit einander; wir wollen aber festsetzen, dass wir unter dem Winkel $(a_0 a_1)$ stets denjenigen Winkel verstehen wollen, um welchen wir a_0 drehen müssen, damit, wenn a_0 auf a_1 fällt, auch die beiden congruenten Punktreihen Punkt für Punkt auf einander fallen.

Wir zeichnen die Halbirungslinien a_0^m und b_0^m der so definirten Winkel $(a_0 a_1)$ und $(b_0 b_1)$, und legen durch a_0^m die Ebene α_0^v senkrecht zu $[a_0 a_1]$, und durch b_0^m die Ebene β_0^v senkrecht zu $[b_0 b_1]$. Diese beiden Ebenen, welche die Normalebenen der Stralen a und b heissen sollen, schneiden sich in einer durch den festen Punkt O gehenden Geraden x; und es ist leicht zu sehen, dass durch Drehung um x gleichzeitig a_0 mit a_1 und b_0 mit b_1 zur Deckung gelangt, und zwar so, dass jeder Punkt von a_0 mit dem entsprechenden von a_1 und jeder Punkt von b_0 mit dem entsprechenden von b_1 zusammenfällt. Diese Drehung bringt daher auch jeden dritten Stral c_0 Punkt für Punkt in die Lage c_1, und es folgt:

Jede Ortsveränderung eines Körpers, von dem ein Punkt O fest bleibt, lässt sich durch Drehung desselben um eine feste, *durch O hindurchgehende Axe ausführen. In ihr schneiden sich die Normalebenen aller Stralen des Körpers.*[14])

Die feste Axe heisst *Drehungsaxe.* Betrachten wir in den beiden congruenten und concentrischen Stralenbündeln wieder die Gesammtheit aller auf ihren Stralen liegenden Punkte, d. h. betrachten wir sie als zwei congruente Räume, welche den Punkt O zum Doppelpunkt haben, so ist die Drehungsaxe diejenige Gerade, welche beide congruenten Räume *Punkt für Punkt* entsprechend gemein haben. Ausserdem haben sie auch die auf x senkrechte Ebene $\mathfrak{x}$ entsprechend gemein.

3. Sind c_0 und c_1 irgend zwei entsprechende Stralen von S_0 und S_1, und ist c_0^x die Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{x}$ und $[c_0 c_1]$, so stehen c_0^x und c_0^m senkrecht auf einander; denn c_0^x ist senkrecht zu x und c_0^m ist die Projection von x auf $[c_0 c_1]$; folglich sind für jeden Stral c des Bündels S

$$c_0, \ c_0^m, \ c_1, \ c_0^x$$

vier harmonische Stralen.

Seien ε_0 und ε_1 zwei entsprechende Ebenen von S_0 und S_1, so möge ihre Schnittlinie als Stral von ε_0 durch b_0 und als Stral von ε_1 durch a_1 bezeichnet werden. Ihnen entsprechen in S_1 resp. S_0 die Stralen b_1, resp. a_0. Die zugehörigen Geraden a_0^m und b_0^m sind ebenfalls zwei homologe Stralen von ε_0 und ε_1; sie sollen h_0 und h_1 heissen; ε_0^m sei die h_0 und h_1 verbindende Ebene. Die Winkel, welche ε_0^m mit ε_0 und ε_1 bestimmt, sind einander gleich. Ist daher h_0^m die Halbierungslinie des Winkels $(h_0 h_1)$, so ist h_0^m die Projection von x auf ε_0^m; d. h. die Ebene $[x h_0^m]$ steht auf ε_0^m senkrecht.

Die beiden in ε_0 und ε_1 liegenden gleichen Stralenbüschel erzeugen einen Kegel $k^{(2)}$ zweiter Classe, welcher ε_0, ε_1, ε_0^m und die Doppelebene $\mathfrak{x}$ zu Tangentialebenen hat. Je zwei Tangentialebenen dieses Kegels werden von der Gesammtheit aller Tangentialebenen in projectivischen Stralenbüscheln geschnitten. Da nun a_0, a_0^m, a_1, a_0^x vier harmonische Stralen sind, so treffen ε_0, ε_0^m, ε_1 und $\mathfrak{x}$ die Ebene $[a_0 a_1]$ in vier harmonischen Stralen; dasselbe gilt daher für jede andere

Ebene $[c_0 c_1]$ des Kegels, und da auch c_0, c_0^m, c_1, c_0^x harmonische Stralen sind, so folgt, dass ε_0^m die Ebene $[c_0 c_1]$ im Stral c_0^m schneidet; d. h. alle Geraden c_0^m, die zu den verschiedenen Stralen des in ε liegenden Stralenbüschels gehören, liegen in ε_0^m. Also:

Ist ε eine beliebige Ebene des Bündels S, und a ein beliebiger Stral derselben, so liegen die Halbirungslinien a_0^m der Winkel $(a_0 a_1)$ sämmtlich in einer und derselben Ebene ε_0^m.

Diese Ebene soll die *Mittelebene* von ε heissen.

Es gehört demnach nicht allein zu jedem Stral a_0 von S_0 ein bestimmter Stral a_0^m, sondern es entsprechen auch allen Stralen a_0, die in einer Ebene ε_0 liegen, die Stralen a_0^m einer und derselben Ebene ε_0^m. Die Stralen a_0^m bilden daher einen zu S_0, resp. S_1 collinearen Ebenenbündel, und es folgt:

Der von den Halbirungslinien a_0^m gebildete Stralenbündel S_0^m und die Stralenbündel S_0 und S_1 sind collineare Bündel, welche die Drehungsaxe x und die zu ihr senkrechte Ebene ξ entsprechend gemein haben.

4. Jede Tangentialebene des Kegels $k^{(2)}$ lässt sich als Verbindungsebene der auf einander senkrechten Geraden c_0^m und c_0^x definiren. Nun liegt c_0^m stets in ε_0^m und c_0^x in ξ; daher kann der Kegel $k^{(2)}$ auch erzeugt werden, indem wir den rechten Winkel $(c_0^m c_0^x)$ so bewegen, dass sein Scheitel unveränderlich in O bleibt, während der eine Schenkel sich in ξ, der andere in ε_0^m um O dreht; alsdann umhüllt die Ebene dieses Winkels den Kegel $k^{(2)}$.

Sei e der zu ε senkrechte Stral des Bündels S, so erzeugen die beiden congruenten Ebenenbüschel, deren Axen e_0 und e_1 sind, einen Kegel $K^{(2)}$ zweiter Ordnung. Sind γ_0, resp. γ_1 die Ebenen beider Büschel, welche auf den Stralen c_0, resp. c_1 von ε_0 und ε_1 senkrecht stehen, so ist auch die Schnittlinie

$$|\gamma_0 \gamma_1|$$

senkrecht zur Ebene $[c_0 c_1]$; d. h. $K^{(2)}$ ist der Polarkegel von $k^{(2)}$. Nun sind c_0, c_0^m, c_1, c_0^x vier harmonische Stralen, und c_0^m und c_0^x sind die Halbirungslinien der Winkel, die c_0 und c_1 bilden; also folgt sofort, dass γ_0, γ_1 und die Ebenen γ_m, γ_x, welche auf c_0^m, resp. c_0^x senkrecht stehen, sich sämmtlich in der Kegelkante

$$|\gamma_0 \gamma_1|$$

schneiden, dass sie ein Büschel von vier harmonischen Ebenen bilden, und dass γ_m und γ_x die von γ_0 und γ_1 gebildeten Winkel halbiren. Ferner liegt die Gerade c_0^x stets in ξ und c_0^m stets in ε_0^m; also geht γ_x durch x und γ_m durch die zu ε_0^m senkrechte Gerade m. Der Kegel $K^{(2)}$ enthält demnach x und m und lässt sich auch dadurch erzeugen, dass wir um x und m zwei Ebenen γ_x resp. γ_m drehen, welche beständig rechtwinklig zu einander sind.

Aus diesem Grunde soll der Kegel ein *orthogonaler* Kegel heissen.[15])

Die Büschel, welche von den Ebenen γ_x und γ_m beschrieben werden, sind projectivisch zu einander. Sei α irgend eine zu x senkrechte Ebene. Dieselbe schneidet die beiden Ebenenbüschel in je einem Stralenbüschel. Nun ist der Stral

$$|\alpha \gamma_m|$$

Schnittlinie zweier zu γ_x normalen Ebenen, also steht er auf γ_x und daher auch auf der Geraden

$$|\alpha \gamma_x|$$

senkrecht, in welcher γ_x von α geschnitten wird. Je zwei entsprechende Stralen der beiden Stralenbüschel stehen also senkrecht auf einander; sie erzeugen daher einen Kreis, und die Verbindungslinie der Punkte (αx) und (αm) ist ein Durchmesser desselben. Das analoge folgt für die zu m senkrechten Ebenen.

Beachten wir noch, dass zwei Polarkegel in der Beziehung zu einander stehen, dass die Brennstralen des einen lotrecht zu den Kreisebenen des andern liegen, so ergiebt sich schliesslich folgendes Resultat:

Die Ebenen, welche die entsprechenden Stralen c_0 und c_1 zweier Stralenbüschel ε_0 und ε_1 mit einander verbinden, umhüllen einen Kegel $k^{(2)}$, welcher die Drehungsaxe x und das auf ε_0^m in O errichtete Lot m zu Brennstralen hat. Jeder Brennstral steht auf einer Tangentialebene des Kegels senkrecht, nämlich x auf ξ, und m auf ε_0^m.

Die Geraden, in denen sich die entsprechenden Ebenen zweier Büschel e_0 und e_1 von S_0 und S_1 schneiden, erzeugen einen orthogonalen Kegel. Sind e_0 und e_1 die Axen beider Büschel und ε die zu e senkrechte Ebene des Bündels S, so sind ξ und $\varepsilon_0{}^m$ die Kreisschnittebenen dieses Kegels.

Seien g und h zwei Stralen des Kegels $K^{(2)}$, welche symmetrisch zur Durchmesserebene $[xm]$ liegen, so wird $K^{(2)}$ aus ihnen durch die projectivischen Büschel

$$g\,[e_0 x e_1 m] \text{ und } h\,[e_0 x e_1 m]$$

projicirt. Nun wurde oben bewiesen, dass

$$\sphericalangle\,(e_0 g x) = \sphericalangle\,(x g e_1) = \tfrac{1}{2}\,(e_0 g e_1),$$
$$\sphericalangle\,(e_0 h x) = \sphericalangle\,(x h e_1) = \tfrac{1}{2}\,(e_0 h e_1);$$

ferner ist

$$\sphericalangle\,(e_0 g e_1) = (e_0 h e_1),$$

also ist auch

$$\sphericalangle\,(e_0 g x) = (e_0 h x) \text{ und } \sphericalangle\,(x g e_1) = (x h e_1).$$

Drei Ebenen des einen Büschels bilden demnach dieselben Winkel mit einander, wie die entsprechenden Ebenen des andern Büschels, mithin sind die beiden Büschel congruent; also folgt:

Aus je zwei Stralen, welche mit der Drehungsaxe gleiche Winkel bilden, wird der orthogonale Kegel $K^{(2)}$ durch congruente Ebenenbüschel projicirt.

Hieraus folgt für den Polarkegel $k^{(2)}$:

Je zwei Ebenen von $k^{(2)}$, welche mit der Drehungsaxe x gleiche Winkel bilden, werden von der Gesammtheit der Tangentialebenen in congruenten Stralenbüscheln geschnitten.

5. Die im Vorstehenden abgeleiteten Resultate sind von der Grösse der Ortsveränderung, welche der Stralenbündel S erfährt, unabhängig; sie bleiben daher bestehen, wenn die Lagen S_0 und S_1 beliebig nahe rücken. Wir dürfen sie daher auf zwei unendlich nahe Lagen eines Körpers anwenden, welcher irgend eine continuirliche Bewegung um einen festen Punkt ausführt. Alsdann werden die Ebenen $[a_0\,a_1]$ die Tangentialebenen der von den Stralen des Körpers beschriebenen Kegel-

flächen und die Ebenen α_0^v die Normalebenen derselben. Also folgt:

Wenn sich ein starrer Körper um einen festen Punkt bewegt, so führt er in jedem Augenblick eine unendlich kleine Drehung um eine durch den festen Punkt gehende Axe aus. Dieselbe heisst die momentane Drehungsaxe. Die Normalebenen aller von den Stralen des Körpers beschriebenen Kegelflächen gehen durch sie hindurch.

Ferner ergiebt sich:

Die Tangentialebenen aller Kegelflächen, welche von den Stralen einer Ebene ε beschrieben werden, umhüllen in jedem Augenblick einen Kegel zweiter Ordnung, welcher ε und die zur momentanen Drehungsaxe senkrechte Ebene ξ enthält. Derselbe ist der Polarkegel eines orthogonalen Kegels und hat die Drehungsaxe sowie die zu ε normale Gerade zu Brennstralen.

Jede Ebene ε des Stralenbündels umhüllt im Verlauf der Bewegung eine Kegelfläche; jeder Stral derselben ist Schnittlinie zweier unendlich nahen Lagen von ε. Um die Eigenschaften dieser Flächen zu erhalten, lassen wir ε_0 und ε_1 beliebig nahe an einander rücken. In der Grenzlage fällt ε_0^m mit ε_0 zusammen, und h_0^m wird Berührungsstral von ε mit der Kegelfläche. Da für jede Ortsveränderung des Bündels S ε_0^m auf der Ebene $[xh_0^m]$ senkrecht steht, so ist die Projection von x auf ε in jedem Augenblick diejenige Gerade, längs welcher ε die von ihr erzeugte Kegelfläche gerade berührt. Die momentane Normalebene der Kegelfläche geht daher stets durch die Drehungsaxe.

Ist ferner K eine beliebige Kegelfläche des beweglichen Bündels, so gilt der nämliche Satz auch für die Enveloppe von K. Sind nämlich K_0, K_1, K_0^m die entsprechenden Kegelflächen von S_0, S_1, S_0^m, so legen wir durch die Drehungsaxe eine zu K_0^m senkrechte Ebene π_0^m, welche K_0^m in b_0^m schneiden möge. Alsdann construiren wir die Ebene β_0^m, welche K_0^m längs b_0^m berührt, und bestimmen die entsprechenden Geraden und Ebenen in S_0 und S_1. Die Ebene β_0 berührt den Kegel K_0 längs b_0, ebenso berührt β_1 K_1 längs b_1, und b_0, resp. b_1 sind Schnittlinien von β_0^m mit β_0 und β_1. Da b_0^m die Projection der Drehungsaxe auf β_0^m ist, so sind b_0 und b_1 ihre Projectionen auf β_0 resp. β_1; daher sind die zu π_0^m homologen Ebenen π_0 und π_1 Normalebenen der Kegel K_0 und K_1 längs b_0 resp. b_1.

Machen wir nun den Grenzübergang, so geht β_0^m in die momentane Tangentialebene der Enveloppe von K über; es folgt daher in der That, dass die Normalebene der von K erzeugten Enveloppe in jedem Augenblick durch die Drehungsaxe hindurchgeht. Also:

Wenn sich ein Körper um einen festen Punkt bewegt, so gehen bei allen von den Ebenen und Kegelflächen desselben umhüllten Enveloppen die Normalebenen in den momentanen Berührungsstralen durch die momentane Drehungsaxe.

Im besonderen folgt noch:

Ist g die Axe eines beliebigen Ebenenbüschels von S, so bildet die Gesammtheit der Stralen, in denen die Ebenen dieses Büschels ihre Enveloppen berühren, in jedem Augenblick einen orthogonalen Kegel, dessen Kreisschnittebenen auf g und der momentanen Drehungsaxe senkrecht stehen.

6. Bei der continuirlichen Bewegung des Bündels S wird die momentane Drehungsaxe sowohl in S, wie auch im festen Raum S' fortwährend wechseln. Die Gesammtheit der Axen bildet daher in S wie in S' je eine Kegelfläche. Um das Verhältniss dieser Kegelflächen zu einander zu erkennen, brauchen wir nur die früher in § 2 des ersten Capitels angestellten Untersuchungen aus der Geometrie der Ebene in die Geometrie des Stralenbündels zu übertragen. Wir erkennen alsdann, dass die Kegelfläche Γ des Bündels S von der Kegelfläche Γ' des unbeweglichen Raumes abrollt; d. h.

Jede Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt geht in der Weise vor sich, dass ein dem beweglichen Körper angehöriger Kegel von einem dem festen Raum angehörigen Kegel abrollt.

Diese beiden Kegel sollen *Axenkegel* oder *Polkegel* genannt werden.[16])

7. Denken wir uns einen Beobachter, welcher mit dem Bündel S fest verbunden ist, so wird für ihn der Raum S'

eine Bewegung im Bündel S ausführen. Dieselbe soll wieder die *Umkehrung* der ersten Bewegung genannt werden.

Was die Bezeichnung betrifft, so wählen wir sie ganz analog zu derjenigen des ersten Capitels. Den Raum S' betrachten wir jetzt auch als einen Stralenbündel, nennen seine Stralen und Ebenen a' resp. ε', wenn ihre Lage gegen S nicht in Frage kommt, bezeichnen die verschiedenen Lagen, welche a' und ε' der Reihe nach in S einnehmen, durch

$$a_0', \; a_1', \; a_2' \ldots, \; \varepsilon_0', \; \varepsilon_1', \; \varepsilon_2' \ldots\ldots$$

und nennen die aus ihnen abgeleiteten Geraden und Ebenen resp.

$$a_0^{m'}, \; \alpha_0^{\nu'}, \; \varepsilon_0^{m'} \text{ u. s. w.}$$

Die im vorigen Capitel für das Verhältniss beider Bewegungen zu einander gefundenen Sätze werden in analoger Form auch hier wiederkehren. An erster Stelle ergiebt sich, dass die umgekehrte Bewegung dadurch characterisirt ist, dass der Polkegel Γ' des Bündels S' von dem Polkegel Γ des Bündels S abrolllt.

Ferner beschreibt jeder Stral b' von S' eine in S gelegene Kegelfläche. Seien zunächst wieder S_0 und S_1 irgend zwei Lagen des Bündels S gegen S', mithin S_0' und S_1' die entsprechenden Lagen des Bündels S' gegen S. Wir construiren die Normalebene α_0^{ν} irgend eines Strales a von S, und betrachten einen beliebigen Stral b_0' derselben, so lässt sich zeigen, dass die Normalebene $\beta_0^{\nu'}$ durch a_0 hindurchgeht. In der That, da die Winkel, welche b_0' mit a_0 und a_1 einschliesst, einander gleich sind, so muss bei der umgekehrten Bewegung auch a_0 mit b_0' und b_1' gleiche Winkel bilden; denn diese Eigenschaft ist davon unabhängig, ob wir S_0 oder S' als unbeweglich betrachten. Also folgt:

Geht die Normalebene des Strales a von S durch den Stral b' von S', so geht bei der umgekehrten Bewegung die Normalebene von b' durch a.

Ebenso für continuirliche Bewegung:

Geht in irgend einem Augenblick die Normalebene der von a beschriebenen Kegelfläche durch den Stral b' von S', so geht bei der umgekehrten Bewegung die Normalebene der von b' in S beschriebenen Kegelfläche durch a.

Mit Hilfe dieser Sätze werden wir, genau wie im vorhergehenden Capitel, die Existenz einer quadratischen Verwandtschaft zwischen den Bündeln S und S' nachweisen.

§ 2. **Die quadratische Verwandtschaft.**

1. Seien S_0, S_1, S_2 drei beliebig angenommene Lagen des Bündels S. Die entsprechenden Lagen eines Strales a von S seien a_0, a_1, a_2; ferner seien a_0^m und a_1^m die Halbirungslinien der Winkel $(a_0 a_1)$ und $(a_1 a_2)$, und α_0^v resp. α_1^v die zugehörigen Normalebenen. Die Drehungsaxe von S_0 und S_1 bezeichnen wir jetzt, indem wir sie als Stral von S betrachten, durch x_{01}, und insofern sie als Stral von S' angesehen wird, durch x_{01}'. Ebenso sei x_{12}, resp. x_{12}' die Drehungsaxe für die Lagen S_1 und S_2 des Bündels.

Die beiden Normalebenen α_0^v und α_1^v schneiden sich in einer Geraden a', welche die Axe eines durch a_0, a_1, a_2 gehenden Rotationskegels ist. Betrachten wir jetzt eine beliebige Ebene ε_0 von S_0, so bilden die Normalebenen α_0^v ihrer Stralen a_0 einen Ebenenbüschel, dessen Axe x_{01}' ist, und der zu den Stralen a_0^m der Mittelebene ε_0^m perspectivisch liegt. Ebenso bilden die Normalebenen α_1^v einen zu den Stralen a_1^m der Mittelebene ε_1^m perspectivischen Büschel, welcher x_{12}' zur Axe hat. Beide Büschel sind demgemäss projectivisch und erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung, welcher durch x_{01}' und x_{12}' hindurchgeht. Derselbe enthält aber auch die Drehungsaxe x_{20}' der Bündel S_2 und S_0; denn jeder Stral a' ist Schnittlinie der drei Normalebenen, welche die Winkel $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_0)$, $(a_0 a_1)$ halbiren und auf den Ebenen derselben senkrecht stehen.

Da a' in α_0^v und α_1^v liegt, so ist, wie aus dem vorletzten Satz des vorigen Paragraphen folgt, die Gerade a Schnittlinie der Normalebenen $a_0^{v'}$ und $a_1^{v'}$ für die umgekehrte Bewegung; sie ist daher Axe desjenigen Rotationskegels, welche die drei Stralen a_0', a_1', a_2' enthält. Die geometrische Bedeutung der auf diese Weise einander zugeordneten Stralen a und a' von S und S' ist daher eine völlig wechselseitige. Es folgt, dass auch umgekehrt, wenn die Stralen a' von S' in einer Ebene ε' liegen, die zugeordneten Geraden a von S einen Kegel zweiter Ordnung bilden, welcher durch x_{20}, x_{01}, x_{12} hindurchgeht. Zwei so auf einander bezogene Bündel heissen *quadratisch verwandt,* und x_{12}, x_{20}, x_{01}, resp. x_{12}', x_{20}', x_{01}' ihre *Hauptstralen.* Es folgt daher:

Ordnen wir jedem Stral a des Bündels S denjenigen Stral a' des Bündels S' zu, in welchem sich die Normalebenen α_0^v *und* α_1^v *schneiden, so ist gleichzeitig der Stral a Schnittlinie der Normalebenen* $\alpha_0^{v'}$ *und* $\alpha_1^{v'}$ *für die umgekehrte Bewegung. Die beiden in dieser Weise bezogenen Stralenbündel stehen in quadratischer Verwandtschaft zu einander. Die Hauptstralen von S' sind die drei Drehungsaxen der directen Bewegung, und die Hauptstralen von S sind die Drehungsaxen der umgekehrten Bewegung.*

Die Drehungsaxen x_{12}, x_{20}, x_{01} des Bündels S bilden ein Dreikant und ebenso diejenigen von S'. Analog zu dem entsprechenden Satz aus der Geometrie der ebenen Bewegung (Cap. I, § 2, 2) lässt sich beweisen, dass *beide Dreikante symmetrisch gleiche Figuren sind.* Setzen wir die Bündel S und S' in der ursprünglichen Lage S_0 und S_0' voraus, so fallen überdies x_{01} und x_{01}', sowie x_{20} und x_{20}' mit einander zusammen.

2. Wir behalten für das Folgende die Annahme bei, dass S und S' sich in der ursprünglichen Lage S_0, S_0' befinden. Sei η irgend eine zu x_{01} senkrechte Ebene, so schneidet sie die in einander liegenden quadratisch verwandten Stralenbündel in zwei quadratisch verwandten ebenen Systemen. Die Hauptpunkte derselben sind diejenigen Punkte

$$X_{12},\ X_{20},\ X_{01},\ X_{12}',\ X_{20}',\ X_{01}',$$

in welchen η die Hauptstralen beider Bündel trifft. Da η auf x_{01} senkrecht steht, so sind die beiden Hauptpunktedreiecke symmetrisch gleiche Figuren; die vereinigt liegenden ebenen Systeme sind also ihrer Natur nach vollständig identisch mit denjenigen quadratisch verwandten ebenen Systemen σ und σ', welche wir im vorstehenden Capitel behandelt haben. Wir dürfen daher alle dort gefundenen Resultate ohne Weiteres auf die hier betrachteten Systeme, die wir nun auch durch σ und σ' bezeichnen, übertragen.[17])

Damit sind diejenigen Probleme, welche sich an die quadratische Verwandtschaft von S und S' anknüpfen, im Princip als erledigt zu betrachten. Wir haben nämlich nur nötig, aus den bekannten Eigenschaften der Systeme σ und σ' die entsprechenden der Bündel S und S' abzuleiten.

Der unendlich fernen Geraden des einen ebenen Systems entspricht im andern der dem Hauptpunktedreieck umschriebene Kreis. Die unendlich ferne Gerade beider Systeme ist aber Schnittlinie der Ebenen ξ_{01} und η, wenn $\xi_{01} = \xi_{01}'$ die zu $x_{01} = x_{01}'$ normale Ebene ist. Also folgt, dass der Ebene ξ_{01} in jedem der beiden Bündel ein Kegel entspricht, welcher durch die Drehungsaxe geht und von den zu x_{01} senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten wird. Der Kegel ist daher orthogonal und es ist ersichtlich, dass er durch die drei Hauptstralen völlig bestimmt ist. Wir wollen den Kegel von S, welcher der Ebene von ξ_{01}' entspricht, durch W_{012} und denjenigen von S', welcher der Ebene ξ_{01} zugeordnet ist, durch W_{012}' bezeichnen.

Von den beiden in σ resp. σ' liegenden Wendekreisen ist bewiesen, dass sie gleichen Durchmesser besitzen; also sind auch die Oeffnungswinkel von W_{012} und W_{012}' einander gleich.

3. Rücken die Lagen S_0, S_1, S_2 beliebig nahe an einander, so erhalten wir Sätze, welche in jedem Augenblick für die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt giltig sind. Dabei geht a' in die Krümmungsaxe der Bahn eines *jeden* Punktes von a über. Wir wollen sie deshalb kurz als *Krümmungsaxe des Strales* a bezeichnen. In diesem Sinne ist a auch Krümmungsaxe von a' für die umgekehrte Bewegung, und es folgt:

Bewegt sich ein Körper S um einen festen Punkt, und ist a' Krümmungsaxe des Strales a, so ist gleichzeitig a Krümmungsaxe des Strales a' für die umgekehrte Bewegung. Ordnen wir diese Stralen a und a' einander zu, so stehen die so bezogenen Stralenbündel in quadratischer Verwandtschaft zu einander. Die Hauptstralen fallen sämmtlich in die momentane Drehungsaxe, und die Hauptebenen in die gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Polkegel.

Die orthogonalen Kegel W_{012} und W_{012}' werden beim Grenzübergang zu zwei ebenfalls orthogonalen Kegeln W und

W', welche die gemeinschaftliche Tangentialebene der Polkegel Γ und Γ' längs der momentanen Drehungsaxe x berühren. Die durch x gelegte Normalebene von Γ und Γ' möge den Kegel W noch in u und W' noch in v' schneiden, so sind x und u die beiden Stralen von W, auf denen die Kreisschnittebenen senkrecht stehen, und x' und v' die analogen Stralen des Kegels W'.

Jeder Stral s von W ist dadurch ausgezeichnet, dass seine Krümmungsaxe auf x senkrecht steht, und das gleiche gilt von den Stralen t' des Kegels W' für die umgekehrte Bewegung. Die Stralen beider Kegel besitzen aber noch eine zweite geometrische Eigentümlichkeit. Die Ebene $[sx]$ ist nämlich die Normalebene des Strales s; ferner wird jeder dieser Stralen s aus x und u durch zwei zu einander senkrechte Ebenen projicirt, also ist die Ebene $[su]$ die Tangentialebene des Strales s. Das entsprechende gilt für die Stralen des Kegels W', und zwar sowohl für die directe, wie für die indirecte Bewegung; demnach ergiebt sich:

Die Tangentialebenen der Stralen des orthogonalen Kegels W gehen sämmtlich durch eine und dieselbe Gerade, nämlich durch die Gerade u dieses Kegels; ebenso gehen die Tangentialebenen der Stralen des orthogonalen Kegels W' sämmtlich durch den Stral v' desselben. Dies gilt sowohl für die directe, wie für die umgekehrte Bewegung.

Soeben haben wir gezeigt, dass den Stralen jeder Ebene ε von S ein Bündel S' ein Kegel zweiter Ordnung entspricht, welcher die drei Drehungsaxen der umgekehrten Bewegung, x_{12}', x_{20}', x_{01}' enthält. Also geht auch der orthogonale Kegel W_{012}' durch diese drei Drehungsaxen. Dies gilt für beliebige Lagen S_0, S_1, S_2 des Bündels S, also auch für unendlich nahe. In diesem Fall wird W' den eben genannten Kegel zweiter Ordnung längs x osculiren, und das gleiche gilt von W in Bezug auf denjenigen Kegel, welcher den Stralen einer Ebene ε' von S' zugeordnet ist. Also folgt:

Die sämmtlichen Kegel zweiter Ordnung des Bündels S', welche den Ebenen ε des Bündels S entsprechen, werden von dem orthogonalen Kegel W' längs der momentanen Drehungsaxe oscu-

lirt; ebenso osculirt der orthogonale Kegel W alle Kegel zweiter Ordnung des Bündels S', welche den ebenen Stralenbüscheln von S' zugeordnet sind.

Die Kegel W und W' spielen demnach für die quadratische Verwandtschaft der beiden Bündel dieselbe Rolle, wie die Wendekreise für die quadratische Verwandtschaft der Ebenen σ und σ'.

4. Wir haben im § 6 des vorigen Capitels bewiesen, dass die geometrische Bedeutung zweier entsprechenden Punkte A und A' der quadratisch verwandten ebenen Systeme σ und σ' sich auf die Enveloppen der Systemcurven ausdehnen lässt. Das gleiche gilt, wie sofort gezeigt werden soll, für die Bewegung eines Stralenbündels um einen festen Punkt.

Sei nämlich R ein beliebiger Rotationskegel des Bündels S, R_0, R_1, R_2 seine Lagen in S_0, S_1, S_2 und $R_0{}^m$, $R_1{}^m$ die entsprechenden Kegel der zu S collinearen Bündel $S_0{}^m$, resp. $S_1{}^m$. Dieselben werden zwar im Allgemeinen keine Rotationskegel sein; dies ist jedoch, wie der Fortgang der Untersuchung lehren wird, nicht wesentlich. Die Axe des Kegels R sei a; a_0, a_1, a_2 seien ihre Lagen in S_0, S_1, S_2, und $a_0{}^m$, $a_1{}^m$ die entsprechenden Geraden von $S_0{}^m$ und $S_1{}^m$. Die Ebenen

$$[a_0 x_{01}'] = \pi_0, \ [a_0{}^m x_{01}'] = \pi_0{}^m, \ [a_1 x_{01}'] = \pi_1$$

sind entsprechende Ebenen der Bündel S_0, $S_0{}^m$ und S_1.

Eine der beiden Geraden, in denen $\pi_0{}^m$ den Kegel $R_0{}^m$ schneidet, sei $b_0{}^m$, und zwar wollen wir, um die Begriffe zu fixiren, annehmen, dass $b_0{}^m$ zwischen x_{01}' und $a_0{}^m$ liegt. Alsdann schneidet π_0 den Kegel R_0 in b_0 und π_1 den Kegel R_1 in b_1, und es liegt auch b_0 zwischen x_{01}' und a_0, und b_1 zwischen x_{01}' und a_1. Endlich sei $\beta_0{}^m$ die Tangentialebene des Kegels $R_0{}^m$ längs $b_0{}^m$, so sind die entsprechenden Ebenen β_0 und β_1 Tangentialebenen der Kegel R_0, resp. R_1.

In derselben Weise construiren wir die entsprechenden Ebenen

$$[a_1 x_{12}'] = \varrho_1, \ [a_1{}^m x_{12}'] = \varrho_1{}^m, \ [a_2 x_{12}'] = \varrho_2$$

der Bündel S_1, $S_1{}^m$ und S_2, und nennen den zwischen $a_1{}^m$ und x_{12}' liegenden Stral, in welchem $\varrho_1{}^m$ den Kegel $R_1{}^m$ schneidet, $c_1{}^m$, so wird R_1 von ϱ_1 in c_1, und R_2 von ϱ_2 in c_2 geschnitten. Die Tangentialebene von $R_1{}^m$ längs $c_1{}^m$ bezeichnen wir durch γ_1^m, so berührt γ_1 den Kegel R_1 längs c_1, und γ_2 den Kegel R_2 längs c_2.

Jetzt sei K irgend ein Kegel des Bündels S, der nur der Bedingung unterworfen werden soll, dass er den Rotationskegel R in den beiden Kanten b und c berühre. Lassen wir dann die Drehung um x_{01}' unendlich klein werden, so geht, wie im vorigen Paragraph bewiesen, β_0^m in die Tangentialebene der von K umhüllten Enveloppe über, b_0^m wird der Berührungsstral und π_0^m die Normalebene der Enveloppe in diesem Stral. Ebenso wird, wenn die Drehung um x_{12}' unendlich klein wird, x_{12}' momentane Drehungsaxe, γ_1^m Tangentialebene, c_1^m Berührungsstral und ϱ_1^m Normalebene der Enveloppe.

Nehmen wir nunmehr weiter an, dass x_{01}' und x_{12}' in zwei unendlich nahe Stralen des Axenkegels Γ' übergehen, so folgt sofort, dass der Schnittstral der beiden Normalebenen π_0^m und ϱ_1^m zur momentanen Krümmungsaxe der von K erzeugten Enveloppe wird, und R zum Krümmungskegel von K für den Stral b; d. h. für jeden Kegel K, welcher R zum Krümmungskegel hat, ist diejenige Gerade, auf welche sich die Schnittlinie von π_0^m und ϱ_1^m in der Grenze reducirt, die Krümmungsaxe der zugehörigen Enveloppe.

Wir haben nun noch zu zeigen, dass diese Gerade wirklich die Krümmungsaxe der von a beschriebenen Kegelfläche, d. h. die Gerade a' von S' ist. Dies ergiebt sich, wie folgt:

Sei α_0^m diejenige durch a_0^m gelegte Ebene, welche auf π_0^m senkrecht steht, so ist, wie leicht zu sehen, auch π_0 zur entsprechenden Ebene α_0 von S_0 und π_1 zu α_1 senkrecht. Daher sind a_0, a_1, a_0^m die Projectionen von x_{01}' auf α_0, α_1, α_0^m; d. h. a_0 und a_1 sind die Schnittlinien der Ebene α_0^m mit α_0 und α_1. Die Ebene α_0^m ist mithin identisch mit der Ebene $[a_0 a_1]$; folglich ist auch π_0^m identisch mit der Normalebene α_0^ν des Strales a, welche zu den Bündellagen S_0 und S_1 gehört. In derselben Weise folgt, dass ϱ_1^m identisch mit der Normalebene α_1^ν ist, welche zu S_1 und S_2 gehört; d. h. die Schnittlinie von π_0^m und ϱ_1^m ist in der That gleichzeitig Schnittlinie von α_0^ν und α_1^ν, und fällt daher in der Grenze mit a' zusammen.

Bezeichnen wir die Enveloppe des Kegels K durch K' und beachten, dass für die umgekehrte Bewegung K die Enveloppe von K' ist, so gelangen wir zu folgendem allgemeinen Satz:

Sind K und K' irgend zwei Kegelflächen beider Bündel, welche in dem gegenseitigen Verhältniss von Enveloppen zu einander stehen, so sind ihre momentanen Krümmungsaxen im gemeinsamen Berührungsstral stets zwei zugeordnete Stralen a und a' in derjenigen quadratischen Verwandtschaft, welche den betrachteten Bewegungsmoment characterisirt.

Die orthogonalen Kegel W und W' erhalten auf Grund dieses Satzes noch eine weitere Bedeutung für die quadratische Verwandtschaft der beiden Bündel S und S'. Seien nämlich wieder K und K' zwei Kegelflächen der eben betrachteten Art. Liegt nun die Krümmungsaxe des einen Kegels, z. B. die von K in der zur momentanen Drehungsaxe senkrechten Ebene ξ, so liegt diejenige des Kegels K' auf dem orthogonalen Kegel W' des Bündels S'; und liegt die Krümmungsaxe von K auf dem orthogonalen Kegel W des Bündels S, so liegt diejenige von K' in der Ebene ξ.

§ 3. Metrische Relationen und Beispiele.

1. Wie oben nachgewiesen, werden die beiden Stralenbündel S und S' von jeder zur momentanen Drehungsaxe senkrechten Ebene η in zwei quadratisch verwandten ebenen Systemen σ und σ' geschnitten. Die Wendekreise w und w' dieser Systeme sind die Kreise, welche η mit den orthogonalen Kegeln W und W' gemein hat.

Daher ist jede Construction, welche die Bewegung eines Stralenbündels betrifft, als gelöst zu betrachten, wenn wir die analoge Construction für die Bewegung eines ebenen Systems ausführen können; denn wir haben nur nötig, die letztere aus der Geometrie der Ebene in die Geometrie des Stralenbündels zu übersetzen.

Wir dürfen es wohl unterlassen, die im vorigen Capitel § 4 gegebenen Constructionen für den Stralenbündel wirklich auszusprechen. Nur einige der dort gegebenen Relationen sollen in der Form, welche sie für die Geometrie des Stralenbündels annehmen, besonders aufgestellt werden.

2. Liegen die Stralen a von S in einer Ebene ε, welche durch die momentane Drehungsaxe geht, so liegen auch die entsprechenden Stralen a' in dieser Ebene. Die Stralen a und a' bilden zwei in einander liegende projectivische Stralenbüschel, welche die Drehungsaxe x entsprechend gemein haben. Sind s und t' die von x verschiedenen Stralen, in denen W, resp. W' von der Ebene ε geschnitten werden, so setzen wir

$$\sphericalangle\,(ax) = \lambda,\ \sphericalangle\,(a'x) = \lambda',\ \sphericalangle\,(sx) = \sphericalangle\,(t'x) = \mu,$$

wo die Winkel λ, λ' analog zu definiren sind, wie die Strecken r und r' in der Ebene. Alsdann ergiebt sich aus § 4, 3 sofort die Relation

$$\operatorname{ctg} \lambda + \operatorname{ctg} \lambda' = \operatorname{ctg} \mu.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Ebene ε mit der gemeinschaftlichen Normalebene der Axenkegel bildet, durch α, und nennen φ den Winkel, in welchem diese Normalebene die orthogonalen Kegel schneidet, so erhalten wir

$$(\operatorname{ctg} \lambda + \operatorname{ctg} \lambda') \cos \alpha = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck ist daher für alle Paare zugeordneter Stralen a und a' eine Constante.

Die momentanen Krümmungsaxen der beiden Polkegel Γ und Γ' sind ebenfalls ein Paar entsprechender Stralen a und a'. Bezeichnen wir die Winkel, welche diese Krümmungsaxen mit x bilden, durch ψ, resp. ψ', so erhalten wir (§ 6) die specielle Relation

$$\operatorname{ctg} \psi + \operatorname{ctg} \psi' = \operatorname{ctg} \varphi.$$

In den ebenen Systemen σ und σ' entspricht jedem Kreis des einen Systems, welcher die Tangente der Polcurven im Drehungscentrum berührt, ein gleichartiger Kreis des andern Systems. Einem orthogonalen Kegel des einen Bündels, welcher die Tangentialebene der Polkegel längs der Drehungsaxe berührt, und für welchen die Drehungsaxe die eine Gerade ist, auf der die Kreisschnitte senkrecht stehen, entspricht daher ein gleichartiger orthogonaler Kegel des andern Bündels. Dies giebt uns ein durchsichtiges Bild von der Verteilung der zugeordneten Stralen a und a' im Raume.

3. Die vorstehenden Resultate mögen auf einige Beispiele angewendet werden.

Die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt ist bestimmt, sobald in jedem Augenblick die ihn characterisirende quadratische Beziehung der Bündel S und S' bekannt ist. Aus dem vorigen Capitel (§ 4, 2) folgern wir, dass dazu die Kenntniss von zwei Paaren entsprechender Stralen hinreichend und notwendig ist. Schreiben wir daher vor, dass zwei Stralen des einen Bündels auf zwei festen Flächen laufen, oder geben wir ganz allgemein zwei Paare von Kegelflächen K und K', welche im Verhältniss von Enveloppen zu einander stehen, so werden die Bündel eine ganz bestimmte Bewegung gegen einander ausführen.

a. Die Bewegung des Bündels S sei dadurch bestimmt, dass zwei Stralen a und b gezwungen sind, in zwei festen Ebenen α' und β' zu bleiben.

Die Ebene durch a senkrecht zu α' und die Ebene durch b senkrecht zu β' schneiden sich in der momentanen Drehungsaxe x. Da a die Ebene α' beschreibt, so ist die Krümmungsaxe a' die zu α' senkrechte Gerade; ebenso ist die Krümmungsaxe von b die zu β' normale Gerade b'. Damit sind zwei Paare entsprechender Stralen beider Bündel bestimmt, also auch ihre quadratische Verwandtschaft und diejenige der ebenen Schnitte σ und σ'.

Wir betrachten die umgekehrte Bewegung. Dieselbe ist dadurch definirt, dass zwei Ebenen α' und β' des Bündels S' gezwungen werden, sich um zwei feste Stralen a und b von S zu drehen. Ist im besondern der von α' und β' eingeschlossene Winkel ein Rechter, so durchläuft die Schnittlinie

$$|\alpha'\beta'|$$

einen orthogonalen Kegel, dessen Kreisschnittebenen auf a und b senkrecht stehen; in der That ist ja

$$|\alpha'\beta'|$$

stets Schnittlinie zweier zu einander senkrechter Ebenen, die sich um die festen Geraden a und b drehen.

4. Hieraus folgt eine einfache Construction der Normalebene eines orthogonalen Kegels. Ist nämlich c ein beliebiger Stral desselben, so bestimmen wir die beiden Ebenen

$$[ca] = \alpha' \text{ und } [cb] = \beta',$$

errichten auf α' in a und auf β' in b die Normalebenen, so schneiden sich dieselben in einer Geraden x, durch welche die Normalebene des orthogonalen Kegels für den Stral s hindurchgeht; d. h. $[cx]$ ist die Normalebene.

Um die Krümmungsaxe des orthogonalen Kegels zu construiren, übertragen wir die im vorigen Capitel § 4, 5 angegebene Construction auf den Stralenbündel. Wir bezeichnen die Ebene $[bb']$ durch β und $[cx]$ durch γ. Wir bestimmen die Ebenen

$$[ab] \text{ und } [a'b']$$

und verbinden ihre Schnittlinie h mit x durch die Ebene

$$[hx] = \eta.$$

Nun construiren wir eine Ebene $\varkappa$ so, dass

$$\sphericalangle\,(\eta\beta) = \sphericalangle\,(\varkappa\gamma),$$

verbinden a und c durch eine Ebene und legen schliesslich durch a' und die Gerade, in welcher $\varkappa$ von $[ac]$ getroffen wird, eine Ebene; dieselbe schneidet γ in der Krümmungsaxe c'.

5. Wir kehren zu der ursprünglich betrachteten Bewegung zurück.

Die von der Ebene $[ab]$ umhüllte Kegelfläche ist in dem besonderen Fall, dass a und b senkrecht auf einander stehen, der Polarkegel eines orthogonalen Kegels. Dies folgt unmittelbar aus dem, was wir in diesem Capitel, § 1, 4, gezeigt haben; in der That ist $[ab]$ die Ebene eines rechten Winkels, der sich so um seinen Scheitel bewegt, dass der eine Schenkel stets in einer Ebene α' und der andere in einer Ebene β' bleibt.

Ist daher $k^{(2)}$ irgend ein Kegel, dessen Polarkegel orthogonal ist, und ε irgend eine Tangentialebene desselben, so lässt sich ihr Berührungsstral, wie folgt, construiren. Seien α' und β' die Ebenen, welche auf den Brennstralen von $k^{(2)}$ senkrecht stehen, so bestimmen wir die Schnittlinien

$$|\alpha' \varepsilon| = a \text{ und } |\beta' \varepsilon| = b,$$

errichten in a auf α' und in b auf β' je eine Normalebene, und legen durch die Schnittgerade x dieser beiden Ebenen eine zu ε senkrechte Ebene; dieselbe trifft ε im Berührungsstral e.

Nun lässt sich auch die Krümmungsaxe des Kegels $k^{(2)}$ für den Stral e construiren. Dies geschieht in der nämlichen Weise, wie eben für den orthogonalen Kegel. Nämlich die zu α' senkrechte Gerade a' ist wieder der zu a zugeordnete Stral, und ebenso ist die zu β' senkrechte Gerade b' dem Stral b zugeordnet. Die Ebene ε und der Kegel $k^{(2)}$ sind als zwei Kegel K und K' zu betrachten, welche in dem gegenseitigen Verhältniss von Enveloppen zu einander stehen; folglich ist die Krümmungsaxe c' des Kegels $k^{(2)}$ derjenige Stral von S', welcher der auf ε senkrechten Geraden c von S zugeordnet ist. Dieselbe kann daher ebenso, wie diejenige des orthogonalen Kegels, construirt werden.

6. Der Stralenbündel S bewege sich so, dass die Ebene α desselben stets durch einen Stral a' von S' geht, während ein Stral b der Ebene α den Rotationskegel K' beschreibt.

Die momentane Drehungsaxe lässt sich unmittelbar construiren. Sie liegt einerseits in der durch b gelegten Durchmesserebene des Kegels K', und da bei der umgekehrten Bewegung a' stets in α bleibt, so liegt sie andrerseits in einer Ebene, die durch a' geht und zu α normal ist.

Hieraus folgt weiter, dass der zu a' zugeordnete Stral von S der auf α senkrechte Stral a ist. Der zu b zugeordnete Stral ist die Axe b' des Rotationskegels. Damit sind wieder zwei Paare entsprechender Stralen, also auch die quadratische Verwandtschaft der Bündel S und S' bestimmt.

Bei der umgekehrten Bewegung beschreibt der Stral a' von S' die Ebene α, und der Kegel K' geht stets durch den festen Stral b des Bündels S. Da aber bei der directen Bewegung

b einen Rotationskegel mit der Axe b' durchläuft, so folgt sofort, dass bei der umgekehrten Bewegung b' einen Rotationskegel K mit der Axe b beschreibt. Die umgekehrte Bewegung lässt sich daher auch dahin definiren, dass der Stral a' stets in der Ebene α und der Stral b' auf einem Rotationskegel K zu laufen gezwungen sind.

Wenn wir die umgekehrte Bewegung in dieser Weise definiren, so lässt sich leicht erkennen, dass die vorstehend behandelte Bewegung ein specieller Fall der oben behandelten ist. Wenn nämlich der Rotationskegel K in eine Ebene degenerirt, so wird nicht nur a', sondern auch b' sich in einer Ebene bewegen, d. h. dann bewegen sich zwei Stralen von S' in zwei festen Ebenen des Bündels S.

§ 4. Die Wendekegel.

1. Von den orthogonalen Kegeln W und W' haben wir gezeigt, dass sie für die quadratische Verwandtschaft der beiden Bündel S und S' genau dieselbe Rolle spielen, wie die Wendekreise w und w' in der Ebene. Die Wendekreise haben jedoch eine doppelte kinematische Bedeutung. Sie bilden nämlich gleichzeitig den geometrischen Ort der Punkte, welche gerade Wendepunkte ihrer Bahnen passiren. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht auf die Stralen der orthogonalen Kegel übergegangen. Ein Stral a von S, welcher ein den Punkten der Wendekreise analoges Verhalten zeigen soll, muss die Eigenschaft haben, dass seine drei auf einander folgenden Lagen in einer und derselben Ebene enthalten sind, d. h. dass a und a' senkrecht auf einander stehen. Dies ist jedoch für die Stralen der orthogonalen Kegel im Allgemeinen nicht der Fall. Ist nämlich v irgend ein Stral des Kegels W, so liegt er mit v' in einer durch die Drehungsaxe x gehenden Ebene, und da v' in der zu x normalen Ebene ξ' liegt, so kann v nur auf v' senkrecht stehen.

Es fragt sich demnach jetzt: Giebt es Stralen a der eben betrachteten Art und welches ist der Ort derselben?

2. Um diese Frage zu beantworten, gehen wir zunächst wieder von drei willkürlich angenommenen Lagen S_0, S_1, S_2

des beweglichen Bündels S aus. Sei ε eine beliebige Ebene von S, so erzeugen die in ε_0 und ε_1 liegenden congruenten Stralenbüschel einen Kegel zweiter Classe, nämlich denjenigen, welchen wir oben (§ 1, 4) bereits genauer betrachtet haben. Ebenso erzeugen die in ε_1 und ε_2 liegenden congruenten Stralbüschel einen derartigen Kegel. Beide Kegel können im Allgemeinen nur ε_1 zur gemeinschaftlichen Tangentialebene haben; sie besitzen daher im Allgemeinen noch drei von einander verschiedene gemeinsame Tangentenebenen, und in jeder derselben liegen drei entsprechende Stralen a_0, a_1, a_2. Die Ebene ε enthält daher drei Stralen der betrachteten Art, und die Gesammtheit derselben bildet einen Kegel $K_{012}^{(3)}$ dritter Ordnung.

Auf diesem Kegel liegen auch die drei Drehungsaxen x_{12}, x_{20}, x_{01}; denn für jede derselben fallen zwei Lagen mit einander zusammen.

Die zu den Stralen von $K_{012}^{(3)}$ senkrechten Ebenen α besitzen die Eigenschaft, dass sich α_0, α_1, α_2 in je einer und derselben Geraden schneiden; es giebt daher unendlich viele Ebenen dieser Art und die Gesammtheit derselben bildet einen Kegel dritter Classe $k_{012}^{(3)}$, welcher der reciproke Polarkegel von $K_{012}^{(3)}$ ist.

Sind ξ_{12}, ξ_{20}, ξ_{01} die auf x_{12}, resp. x_{20}, x_{01} senkrechten Ebenen, so liegen dieselben auf k_{012}^{3}. Die Ebene ξ_{01} ist diejenige Ebene, welche die Bündel S_0 und S_1 entsprechend gemein haben. Dreht sich der Bündel S um x_{01}, so verschiebt sich daher die Ebene ξ_{01} in sich selbst, indem sie sich um den Punkt O dreht. In derselben existiren daher zwei Doppelstralen, nämlich diejenigen, welche von O nach den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten hingehen (Cap. I, § 3, 5); dieselben sollen durch i_{01} und j_{01} bezeichnet werden. Sie bilden im Verein mit x_{01} diejenigen drei Stralen, welche zwei in einander liegende collineare Stralenbündel stets entsprechend gemein haben.

Da i_{01} und j_{01} für die um x_{01} stattfindende Drehung als unbeweglich zu betrachten sind, so genügt jeder derselben der Bedingung, dass seine drei entsprechenden Lagen in einer

Ebene bleiben; d. h. i_{01} und j_{01} sind Stralen von K_{012}^3. Das nämliche gilt für die analogen Stralen der Ebenen ξ_{12} und ξ_{20}; d. h. die sechs imaginären Geraden

$$i_{12},\ j_{12},\ i_{20},\ j_{20},\ i_{01},\ j_{01}$$

liegen auf dem Kegel K_{012}^3.

Wir erhalten daher folgenden Satz:

Sind S_0, S_1, S_2 drei willkürlich angenommene Lagen des Bündels S, so giebt es in demselben unendlich viele Stralen a von der Eigenschaft, dass für jeden von ihnen a_0, a_1, a_2 in je einer und derselben Ebene enthalten sind. Diese Stralen bilden einen Kegel dritter Ordnung K_{012}^3, welcher die drei Drehungsaxen x_{12}, x_{20}, x_{01} und die sechs imaginären Geraden i_{12}, j_{12}, i_{20}, j_{20}, i_{01}, j_{01} enthält. Ebenso giebt es unendlich viele Ebenen α des Bündels S, für welche α_0, α_1, α_2 sich in je einer und derselben Geraden schneiden. Dieselben umhüllen einen Kegel dritter Classe k_{012}^3, nämlich den Polarkegel von K_{012}^3.

Die analogen Kegel existiren im Bündel S' für die umgekehrte Bewegung. Dieselben sollen durch $K_{012}^{3\prime}$ und $k_{012}^{3\prime}$ bezeichnet werden.

3. Die Schnittlinie der Ebenen α_0, α_1, α_2 steht auf der Ebene der Geraden a_0, a_1, a_2 senkrecht. Diese Schnittlinie ist daher nichts anderes, als die Gerade a', welche in Bezug auf die quadratische Verwandtschaft der beiden Bündel der Geraden a zugeordnet ist.

Betrachten wir jetzt die umgekehrte Bewegung. Da die Schnittlinie von α_0, α_1, α_2, wie eben gezeigt, als Gerade des Bündels S' durch a' zu bezeichnen ist, so dürfen wir sagen, dass die Ebene α für die drei Lagen S_0, S_1, S_2 stets durch a' geht. Bei der umgekehrten Bewegung bleibt daher der Stral a' in den drei Lagen a_0', a_1', a_2' in derselben Ebene α des Bündels S; d. h. er ist ein Stral des Kegels $K_{012}^{3\prime}$. Die zu einem Stral a von K_{012}^3 zugeordnete Gerade a' liegt also stets auf dem Kegel $K_{012}^{3\prime}$; d. h.

Die beiden Kegel K_{012}^3 und $K_{012}^{3\prime}$ entsprechen einander in Bezug auf die quadratische Verwandtschaft der Bündel S und S'.

Bezeichnen wir ferner die Ebene der drei Geraden a_0, a_1, a_2, insofern wir sie als Ebene von S' betrachten, durch α, so bleibt der Stral a für die drei Lagen S_0, S_1, S_2 in derselben Ebene α' von S'; bei der umgekehrten Bewegung gehen also α_0', α_1', α_2' sämmtlich durch die Gerade a von S. Daher ist α' eine Tangentialebene des Kegels $k_{012}^{3\prime}$.

4. Lassen wir die Lagen S_0, S_1, S_2 nunmehr beliebig nahe an einander rücken, so erhalten die Geraden a des Kegels K_{012}^3 die Eigenschaft, gerade Wendestralen ihrer Kegelflächen zu passiren, und die Ebenen α von k_{012}^3 sind dadurch ausgezeichnet, dass sie die von ihnen umhüllten Kegel gerade in Rückkehrstralen berühren. Demnach folgt:

Bewegt sich ein Körper S um einen festen Punkt, so giebt es in jedem Augenblick unendlich viele Stralen desselben, die gerade Wendestralen ihrer Kegelflächen sind. Dieselben bilden einen Kegel dritter Ordnung K^3, welcher die Tangentialebene der Polkegel in der momentanen Drehungsaxe berührt. Ein analoger Kegel $K^{3\prime}$ existirt im Bündel S' für die umgekehrte Bewegung.[18])

Der Polarkegel k^3 des Kegels K^3 hat die Eigenschaft, dass jede seiner Tangentialebenen gerade durch einen Rückkehrstral des von ihr umhüllten Kegels geht. Das gleiche gilt vom Polarkegel $k^{3\prime}$ des Kegels $K^{3\prime}$ für die umgekehrte Bewegung.

Die Kegel K^3 und $K^{3\prime}$ sollen die *Wendekegel*, und k^3 und $k^{3\prime}$ die *Rückkehrkegel* der beiden Bündel genannt werden. Jede Gerade von S, die sich in einer Ebene bewegt, liegt auf K^3, und jede Ebene, welche stets durch dieselbe Gerade geht, ist eine Ebene von k^3.

Da jedem Stral a von K^3 in Bezug auf die quadratische Verwandtschaft der Bündel S und S', welche den betrachteten Bewegungsmoment characterisirt, ein Stral a' von S' zugeordnet ist, so dürfen wir noch folgenden Satz aussprechen:

Der Wendekegel $K^{3\prime}$ ist der Ort der Krümmungsaxen der Stralen von K^3; ebenso ist für die umgekehrte Bewegung der Wendekegel K^3 der Ort der Krümmungsaxen der Stralen von $K^{3\prime}$.

Auch die Kegel K^3 und $k^{3\prime}$ besitzen eine geometrische Beziehung zu einander. Wir haben nämlich soeben gezeigt, dass jede Ebene α' von $k^{3\prime}$ Verbindungsebene dreier Geraden

a_0, a_1, a_2 ist; ebenso ist jede Gerade a' von $K^{3'}$ Schnittlinie von drei Ebenen α_0, α_1, α_2. Gehen wir zur Grenze über, so folgt:

Die Ebenen des Kegels $k^{3'}$ sind die Wendetangentialebenen der Stralen von K^3, und die Stralen von $K^{3'}$ sind die Rückkehrstralen der von den Ebenen von k^3 umhüllten Kegel; und analog für die umgekehrte Bewegung.

Für je zwei zugeordnete Stralen a und a' der beiden Wendekegel besteht die Relation (§ 3, 2)

$$(\operatorname{ctg}\lambda + \operatorname{ctg}\lambda')\cos\alpha = \operatorname{ctg}\varphi.$$

Im vorliegenden Fall stehen aber a und a' senkrecht auf einander, also ergiebt sich für den Winkel λ, welchen der Stral a mit x bildet,

$$(\operatorname{ctg}\lambda + \operatorname{tg}\lambda)\cos\alpha = \operatorname{ctg}\varphi,$$

d. h.

$$\sin 2\lambda = 2\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Diese Gleichung bestimmt für jede durch die momentane Drehungsaxe gehende Ebene die beiden Stralen, welche sie ausser x mit dem Wendekegel gemein hat.

5. Wir betrachten nunmehr vier willkürlich gegebene Lagen S_0, S_1, S_2, S_3 des Bündels S. Der Wendekegel, welcher den Lagen S_0, S_1, S_2 entspricht, sei wieder $K_{012}{}^3$, und der Wendekegel, welcher zu S_1, S_2, S_3 gehört, der also alle Stralen a von S enthält, für welche a_1, a_2, a_3 in derselben Ebene liegen, sei $K_{123}{}^3$. Beide Kegel schneiden sich im Allgemeinen in neun Stralen a, und jeder derselben ist dadurch ausgezeichnet, dass für ihn sowohl a_0, a_1, a_2, als auch a_1, a_2, a_3 in je einer Ebene liegen. Jeder dieser Stralen a hat daher im Allgemeinen die Eigenschaft, dass für ihn a_0, a_1, a_2, a_3 in einer einzigen Ebene enthalten sind.

Nun gehören dem Kegel $K_{012}{}^3$ die Drehungsaxen x_{12}, x_{20}, x_{01} an, und dem Kegel $K_{123}{}^3$ die Axen x_{23}, x_{31}, x_{12}; beide Kegel haben also die Axe x_{12} mit einander gemein. Die Axe x_{12} ist eine Gerade, für welche die zweite und dritte Lage, d. h. diejenigen, welche den Bündeln S_1 und S_2 entsprechen, mit einander zusammenfallen; sie wird daher im Allgemeinen nicht die Eigenschaft haben, dass ihre vier verschiedenen Lagen in einer und derselben Ebene enthalten sind. Dasselbe gilt von den beiden imaginären Geraden i_{12} und j_{12}, welche auf beiden Wendekegeln liegen; für jede der anderen sechs Schnittlinien findet dagegen die eben genannte Eigenschaft statt, und es folgt:

Sind vier Lagen S_0, S_1, S_2, S_3 des Bündels S willkürlich angenommen, so giebt es in demselben im Allgemeinen sechs Stralen a von der Eigenschaft, dass a_0, a_1, a_2, a_3 in einer einzigen Ebene enthalten sind.

Ebenso giebt es sechs Ebenen α des Bündels S von der Eigenschaft, dass α_0, α_1, α_2, α_3 durch eine und dieselbe Gerade hindurchgehen. Dies sind die zu den sechs Stralen a senkrechten Ebenen.

Rücken die Bündellagen unendlich nahe an einander, so erhalten wir die analogen Sätze für die continuirliche Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Wir sehen, dass es in jedem Augenblick sechs Stralen im Körper giebt, für welche vier auf einander folgende Lagen in je einer Ebene bleiben. Dieselben können in Analogie zu den Bezeichnungen für Punktbahnen, Undulationsstralen ihrer Kegelflächen genannt werden. Jede der sechs Ebenen, welche auf diesen Stralen senkrecht stehen, hat die Eigenschaft, während vier auf einander folgender Lagen durch dieselbe Gerade zu gehen.

Dasselbe gilt für die umgekehrte Bewegung. Ist überdies α' eine der sechs Ebenen von S', so ist sie gleichzeitig Tangentialebene eines der sechs Stralen von S; und ebenso ist jeder der sechs Stralen a' von S' eine der Geraden, in welcher die vier auf einander folgenden Lagen einer Ebene α von S sich schneiden.

6. Jeder Stral x des Polkegels Γ durchläuft in dem Augenblick, in welchem er momentane Drehungsaxe ist, einen Rückkehrstral des von ihm beschriebenen Kegels, und im Allgemeinen werden nur diejenigen Stralen des Bündels S, welche dem Polkegel Γ angehören, die Eigenschaft besitzen, Kegelflächen mit Rückkehrstralen zu durchlaufen.

Ebenso ist ersichtlich, dass die zu x senkrechte Ebene ξ, wenn x momentane Drehungsaxe ist, dadurch ausgezeichnet ist, dass sie gerade Wendetangentialebene des von ihr umhüllten Kegels ist; und im Allgemeinen wird es ausser den Tangentialebenen des Polarkegels von Γ keine andere Ebene geben, welche Kegelflächen mit Wendetangentialebenen umhüllen.

Es lassen sich aber hier die Ueberlegungen wiederholen, welche wir im vorigen Capitel (§ 5, 6) für die ebene Bewegung angestellt haben. Wir haben nur nötig, die dort benutzten Schlüsse auf die Geometrie des Stralenbündels zu übertragen. Nennen wir daher die Winkel, welche die momentanen Krümmungsaxen der Polkegel mit der Drehungsaxe x bilden, ψ, resp. ψ', so folgt sofort:

Wenn in irgend einem Augenblick die Krümmungsaxen der Polkegel auf derselben Seite ihrer Tangentialebene liegen, und gleichzeitig die Differenz $\psi - \psi'$ ihr Zeichen wechselt, so ist jeder Stral der beiden Bündel ein Rückkehrstral seiner Kegelfläche, und jede Ebene beider Bündel ist Wendetangentialebene der von ihr umhüllten Kegelfläche.

Endlich können wir auch noch folgenden Satz aussprechen:

Die Enveloppe aller Wendekegel des Bündels S besteht aus zwei Teilen von wesentlich verschiedener geometrischer Bedeutung. Der eine von ihnen ist der Polkegel Γ, die Stralen desselben haben die Eigenschaft, Kegelflächen mit Rückkehrstralen zu beschreiben. Der andere ist der Ort derjenigen Stralen des Bündels, welche Kegel mit Undulationsstralen beschreiben.

Die entsprechenden Gesetze gelten für die Enveloppe der sämmtlichen Rückkehrkegel.

§ 5. **Die Kegel der stationären Krümmungsaxen.**

1. Seien S_0, S_1, S_2, S_3 wieder vier willkürlich angenommene Lagen des Bündels S. Die Halbirungslinien der Winkel $(a_0 a_1)$, $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$ seien resp. $a_0{}^m$, $a_1{}^m$, $a_2{}^m$ und die zugehörigen Normalebenen $\alpha_0{}^\nu$, $\alpha_1{}^\nu$, $\alpha_2{}^\nu$. Ist nun ε eine beliebige Ebene

von S, so bilden die Schnittlinien der Ebenen α_0^v, α_1^v, welche zu den Stralen a von ε gehören, einen Kegel zweiter Ordnung, welcher die Drehungsaxen x_{12}', x_{20}', x_{01}' enthält. Ebenso bilden die Schnittlinien der Normalebenen α_1^v, α_2^v einen Kegel zweiter Ordnung, welcher x_{23}', x_{31}', x_{12}' enthält. Beide Kegel haben daher die Axe x_{12}' gemein; mithin schneiden sie sich im Allgemeinen noch in drei anderen Stralen und jeder derselben ist Schnittlinie von drei entsprechenden Normalebenen α_0^v, α_1^v, α_2^v. Die Ebene ε enthält demnach drei Stralen a, deren Normalebenen α_0^v, α_1^v, α_2^v durch je eine und dieselbe Gerade gehen. Die Gesammtheit dieser Stralen bildet also eine Kegelfläche dritter Ordnung. Dieselbe soll durch H_{0123}^3 oder kürzer durch H_{03}^3 bezeichnet werden. Die geometrische Bedeutung dieser Kegelfläche ist, dass für jeden Stral a derselben a_0, a_1, a_2, a_3 auf einem und demselben Rotationskegel liegen.

Die nämlichen Schlüsse gelten für die Bewegung des Bündels S' in S. Es giebt daher für die umgekehrte Bewegung eine in S' gelegene Kegelfläche dritter Ordnung $H_{0123}^{3'}$, resp. $H_{03}^{3'}$, deren Stralen b' die Eigenschaft besitzen, dass die drei Normalebenen $\beta_0^{v'}$, $\beta_1^{v'}$, $\beta_2^{v'}$ durch eine und dieselbe Gerade gehen, d. h. dass b_0', b_1', b_2', b_3' auf einem Rotationskegel liegen.

Die Kegelfläche $H_{03}^{3'}$ ist nichts anderes, als die Fläche der Krümmungsaxen der Stralen a von H_{03}^3. In der That lässt sich zeigen, dass die Krümmungsaxe a' eines jeden Strales a von H_{03}^3 auf $H_{03}^{3'}$ liegt. Dies folgt einerseits aus dem § 1, 7 dieses Capitels gegebenen Satz, andrerseits ergiebt es sich auch direct in folgender Weise. Da die Geraden a_0, a_1, a_2, a_3 auf einem Rotationskegel liegen, so ist die Axe a' dieses Kegels die Schnittlinie der drei Normalebenen α_0^v, α_1^v, α_2^v. Diese Axe a' ist mit a durch die metrische Relation verbunden, mit a_0, a_1, a_2, a_3 gleiche Winkel zu bilden. Diese Eigenschaft ist aber davon unabhängig, ob wir S oder S' als den beweglichen Bündel betrachten; es bilden also auch a_0', a_1', a_2', a_3' mit a denselben Winkel; d. h. a ist Schnittlinie der Normalebenen $\alpha_0^{v'}$, $\alpha_1^{v'}$, $\alpha_2^{v'}$. Da aber diese drei Ebenen sich in einer Geraden schneiden, so liegt a' auf $H_{03}^{3'}$. Ferner folgt nun auch, dass für die umgekehrte Bewegung a die Krümmungsaxe der von a' beschriebenen Kegelfläche ist.

2. Die beiden Kegel H_{03}^3 und $H_{03}^{3\prime}$ sind demnach entsprechende Flächen in den quadratisch verwandten Stralenbündeln S und S'. Jeder der beiden Kegel enthält die Hauptstralen seines Bündels, d. h. die Drehungsaxen; denn für jede derselben fallen zwei von den vier betrachteten Lagen mit einander zusammen. Daher liegen die Drehungsaxen x_{12}, x_{20}, x_{01} auf H_{03}^3, und die Drehungsaxen der umgekehrten Bewegung, x_{12}', x_{20}', x_{01}' auf $H_{03}^{3\prime}$. Nun hatten wir die Stralen a von H_{03}^3 mittelst der drei Normalebenenbüschel α_0^v, α_1^v, α_2^v definirt; es ist aber evident, dass für jeden dieser Stralen auch diejenigen Ebenen, welche zu den Winkeln $(a_0 a_2)$, $(a_0 a_3)$, $(a_1 a_3)$ gehören, durch die Axe a' des bezüglichen Rotationskegels hindurchgehen. Die Kegel verhalten sich nämlich ganz gleichmässig gegenüber den vier Lagen S_0, S_1, S_2, S_3, und es können daher irgend drei der sechs Gruppen

$$S_0 S_1,\ S_0 S_2,\ S_0 S_3,\ S_1 S_2,\ S_1 S_3,\ S_2 S_3$$

zu ihrer Erzeugung benutzt werden. Daraus folgt, dass H_{03}^3 die sechs Drehungsaxen

$$x_{01},\ x_{02},\ x_{03},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{23}$$

enthält, und ebenso $H_{03}^{3\prime}$ die Axen

$$x_{01}',\ x_{02}',\ x_{03}',\ x_{12}',\ x_{13}',\ x_{23}'$$

der umgekehrten Bewegung.

Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Sind S_0, S_1, S_2, S_3 vier beliebig gewählte Lagen des Bündels S, so giebt es in demselben eine Kegelfläche dritter Ordnung H_{03}^3, deren Stralen a die Eigenschaft haben, dass a_0, a_1, a_2, a_3 vier Kanten desselben Rotationskegels sind. Diese Kegelfläche enthält die sechs Drehungsaxen, welche zu irgend zweien der vier Bündel S_0, S_1, S_2, S_3 gehören. Die Axen dieser Rotationskegel bilden eine in S' gelegene Kegelfläche $H_{03}^{3\prime}$, welche durch die sechs Drehungsaxen der indirecten Bewegung hindurchgeht. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen beide Kegelflächen ihre Bedeutung.

Auf diesen Kegelflächen liegen auch die oben (§ 4) gefundenen sechs Stralen, welche zwei auf einander folgende Wendekegel mit einander gemein haben.

3. Rücken die Bündellagen unendlich nahe an einander, so erhalten die von den Stralen a beschriebenen Kegelflächen die Eigenschaft, stationäre Krümmungsaxen zu besitzen. Jeder Punkt des Strales a beschreibt daher eine Curve, welche von ihrem Krümmungskreis vierpunktig berührt wird. Wenn wir die sich ergebenden Sätze diesmal ausnahmsweise nicht für die Stralen a selbst, sondern für die auf ihnen liegende Punkte aussprechen, so folgt:

Bewegt sich ein starrer Körper um einen festen Punkt, so giebt es in demselben in jedem Augenblick einen Kegel dritter Ordnung H^3, dessen sämmtliche Punkte dadurch ausgezeichnet sind, dass ihre Bahnen gerade vierpunktig berührende Krümmungskreise besitzen. Die Krümmungsaxen dieser Bahnen bilden eine in S' gelegene Kegelfläche $H^{3\prime}$. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen beide Kegelflächen ihre Bedeutung.

Jede dieser beiden Kegelflächen osculirt den Polkegel ihres Bündels in der momentanen Drehungsaxe.

4. Seien endlich S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 fünf beliebig gewählte Lagen des Bündels S. Zu den vier Lagen S_1, S_2, S_3, S_4 gehört ein Kegel $H_{14}{}^3$, welcher der geometrische Ort derjenigen Geraden ist, für welche a_1, a_2, a_3, a_4 auf einem Rotationskegel liegen. Die Kegel $H_{03}{}^3$ und $H_{14}{}^3$ enthalten beide die Drehungsaxen x_{23}, x_{31}, x_{12}; sie schneiden sich daher im Allgemeinen noch in sechs anderen Stralen, und jeder von ihnen ist dadurch ausgezeichnet, dass a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 Kanten desselben Rotationskegels sind. Für die Axen x_{23}, x_{31}, x_{12} ist dies jedoch im Allgemeinen nicht der Fall. Demnach folgt:

Sind fünf Lagen des Bündels S beliebig angenommen, so giebt es in demselben im Allgemeinen sechs Stralen a, welche die Eigenschaft haben, dass a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 auf einem und demselben Rotationskegel liegen. Die Axen dieser Kegel sind die analogen Stralen von S' für die umgekehrte Bewegung.

Ebenso giebt es, wenn ein starrer Körper sich beliebig um einen festen Punkt dreht, in jedem Augenblick im Allgemeinen sechs Stralen desselben, deren Punkte dadurch ausgezeichnet sind, dass ihre Bahnen gerade fünfpunktig berührende Krümmungskreise besitzen. Die Krümmungsaxen dieser Bahnen sind die analogen Stralen von S' für die umgekehrte Bewegung.

5. Die Untersuchungen dieses Paragraphen lassen sich auf die von den Ebenen des Bündels umhüllten Kegelflächen übertragen. Ist z. B. a ein Stral von $H_{03}{}^3$, so hat die zu ihm senkrechte Ebene α die Eigenschaft, dass α_0, α_1, α_2, α_3 Tangentialebenen eines und desselben Rotationskegels sind. Es giebt daher einen Kegel $h_{03}{}^{(3)}$ dritter Classe, nämlich den Polarkegel von $H_{03}{}^3$, welcher der geometrische Ort dieser Ebenen α des Bündels S ist. Mithin erhalten wir zu jedem der vorstehend bewiesenen Sätze einen neuen, wenn wir ihn auf die orthogonalen Polarbündel der beiden Stralenbündel S und S' ausdehnen.

Es zeigt sich also auch hier, dass bei der Bewegung eines Stralenbündels die Stralen und Ebenen desselben gleichartigen Gesetzen unterworfen sind. Wir hätten in Folge davon die Betrachtungen dieses Capitels in völlig dualer Weise durchführen können, indem wir uns mit den Bündeln S und S' stets ihre orthogonalen Polarbündel verbunden denken. Auch für die Ebenen der beiden Polarbündel besteht alsdann eine quadratische Verwandtschaft, und zwar so, dass je zwei Ebenen α und α' einander entsprechen, die auf zwei zugeordneten Stralen a und a' senkrecht stehen. Betrachten wir die Polarbündel nur als Ebenenbündel, so existiren auch für sie zwei Kegelflächen (γ) und (γ'), nämlich die Polarkegel von Γ und Γ', deren gegenseitige Bewegung die Bewegung des starren Körpers bestimmt, u. s. w.

Bei der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt besteht also für die von den Stralen beschriebenen Kegel und für die von den Ebenen desselben umhüllten Kegel eine *ausnahmslose* Dualität. Für die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene war dies nicht der Fall. Während z. B. der Wendekreis, als Ort aller Punkte A, für welche A_0, A_1, A_2 auf derselben Geraden liegen, eine Curve der *zweiten*

Ordnung ist, bilden diejenigen Geraden g, für welche g_0, g_1, g_2 durch einen und denselben Punkt gehen, einen Stralenbüschel *erster* Ordnung.

Der Grund dieser Differenz liegt bekanntlich in dem verschiedenen Charakter der Maassbestimmung für die Punktreihe und den Stralenbüschel. Für den Stralenbüschel und den Ebenenbüschel dagegen ist die Maassbestimmung die gleiche, und darauf ist die Dualität bei der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt zurückzuführen.

Drittes Capitel.

Die Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems.

§. 1. Die Bewegung einer Geraden.

1. Ein unveränderliches räumliches System Σ, das wir uns als unbegrenzt vorstellen wollen, möge sich in vorgeschriebener Weise in dem festen Raum Σ' bewegen. Die Lage desselben wird in jedem Augenblick bekannt sein, sobald die Lage von drei Punkten desselben gegeben ist, welche eine Ebene bestimmen. Wissen wir also, dass drei nicht in einer Geraden liegende Punkte von Σ an die ihnen vorgeschriebenen Stellen gekommen sind, so dürfen wir dasselbe von dem räumlichen System selbst behaupten.

Die Bezeichnungen wählen wir in derselben Weise, wie in den beiden vorhergehenden Capiteln. A, g, ε bedeutet daher einen bestimmten Punkt, eine bestimmte Gerade, resp. eine bestimmte Ebene von Σ, wenn ihr Ort im Raum Σ' nicht in Frage kommt; dagegen sollen die verschiedenen Lagen, welche Σ in Σ' einnimmt, wieder durch Σ_0, $\Sigma_1, \ldots$ bezeichnet werden. Ebenso seien A_0, $A_1 \ldots$ die entsprechenden Lagen des Punktes A von Σ u. s. w.

2. Während der Bewegung des Systems durchläuft jeder Punkt desselben eine Curve, welche wieder seine Bahn heissen soll, jede Gerade erzeugt eine Regelschaar, jede Ebene umhüllt eine abwickelbare Fläche u. s. w. Um die geometrischen Eigenschaften dieser Curven und Flächen zu untersuchen, werden wir zunächst wieder zwei beliebige Systemlagen Σ_0 und Σ_1 betrachten. Wie dieselben auch gewählt sein mögen, immer wird die unendlich ferne Ebene eine Doppelebene von

Σ_0 und Σ_1 sein. Wir schliessen aber von vorn herein den Fall aus, dass die beiden Systeme einen im Endlichen liegenden Punkt oder eine im Endlichen liegende Ebene entsprechend gemein haben.

Haben sie nämlich einen im Endlichen gelegenen Punkt entsprechend gemein, so können sie als zwei verschiedene Lagen eines starren Körpers betrachtet werden, welcher sich um einen festen Punkt dreht; die auf diesen Fall bezügliche Untersuchung ist aber bereits im vorigen Capitel durchgeführt worden. Haben sie dagegen eine im Endlichen liegende Ebene entsprechend gemein, so muss es für die in einander liegenden congruenten ebenen Systeme, wie wir im ersten Capitel gesehen haben, stets einen Doppelpunkt geben. Liegt derselbe nicht unendlich fern, so erhalten wir wieder den eben betrachteten Fall; ist derselbe dagegen ein unendlich ferner Punkt der Ebene, so bedarf es nur einer einfachen Translation, um die Ebene und damit auch das räumliche System Σ selbst aus der Anfangslage in die Endlage überzuführen.

3. Seien nunmehr Σ_0 und Σ_1 irgend zwei Lagen von Σ, welche die eben angegebene Bedingung erfüllen, seien g_0 und g_1 die entsprechenden Lagen einer Geraden g und A_0, B_0 ... A_1, B_1 ... die bezüglichen Lagen der Punkte A, B ... von g. Die Mittelpunkte der Sehnen A_0A_1, B_0B_1 ... sollen wieder mit A^m, B^m ... bezeichnet werden. Ferner sei α^v die Ebene, welche in A^m auf der Sehne A_0A_1 senkrecht steht; sie soll die *Normalebene* des Punktes A heissen.

Die Normalebenen α^v, β^v der Punkte A und B von g schneiden sich in einer Geraden g^v: durch Drehung um g^v kommt daher gleichzeitig A_0 nach A_1 und B_0 nach B_1. Diese Drehung bringt demnach jeden beliebigen Punkt C von g aus der Lage C_0 in die Lage C_1 und es folgt:

Jede Ortsveränderung einer Geraden kann durch Drehung derselben um eine bestimmte Gerade g^v des Raumes ausgeführt werden. Die Normalebenen aller Punkte von g schneiden sich sämmtlich in g^v.

Die beiden Geraden g_0 und g_1 werden im Allgemeinen windschief zu einander liegen; sie können sich aber auch schneiden oder parallel sein. In jedem dieser drei möglichen Fälle existirt eine zu g gehörige Gerade g^v. Schneiden sich g_0 und g_1, so ist g^v überdies senkrecht zur Ebene $[g_0 g_1]$. Sind aber g_0 und g_1 einander parallel, so sind auch die Sehnen der Punkte $A, B, C\ldots$ einander parallel, die Normalebenen dieser Punkte gehen daher sämmtlich durch eine und dieselbe unendlich ferne Gerade $g_\infty{}^v$.

4. Sind g_0 und g_1 windschief zu einander, so bilden die Sehnen der Punkte $A, B, C\ldots$ von g die eine Regelschaar eines Paraboloids; jede derselben liegt in einer zu g^v senkrechten Ebene. Nun werden alle Geraden dieser Schaar von den Erzeugenden der anderen Schaar in ähnlichen Punktreihen getroffen; daher liegen die Mittelpunkte $A^m, B^m, C^m\ldots$ dieser Sehnen sämmtlich auf einer Geraden. Dieselbe soll die *Mittelgerade* von g heissen und durch g^m bezeichnet werden. Alsdann folgt:

Die Mittelpunkte der Sehnen aller Punkte von g liegen auf einer Geraden g^m.

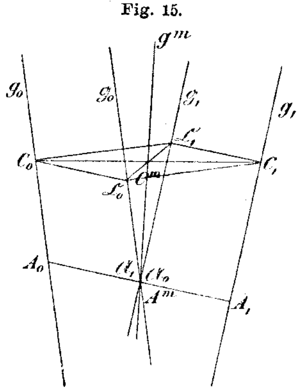
Der vorstehende Satz ist zwar unter der Voraussetzung bewiesen worden, dass g_0 und g_1 windschief zu einander liegen; er gilt aber, wie wir im ersten Capitel bereits gezeigt haben, auch in den besonderen Fällen, dass g_0 und g_1 sich schneiden oder parallel sind. In diesen Fällen hat die Mittelgerade g^m, wie bewiesen, die Eigenschaft, dass die Projectionen aller Sehnen auf g^m einander gleich sind, und dass

$$\sphericalangle\,(g_0 g^m) = \sphericalangle\,(g_1 g^m)$$

ist. Es liegt daher nahe, zu fragen, ob diese Eigenschaften auch im allgemeinen Fall bestehen bleiben.

Dies ist in der That der Fall. Um den Beweis zu liefern, ziehen wir (Fig. 15) durch A^m die Geraden $\mathfrak{g}_0$ parallel zu g_0 und $\mathfrak{g}_1$ parallel zu g_1. Auf ihnen bestimmen wir die Punktreihen

Fig. 15.



$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{B}_0,\ \mathfrak{C}_0\ldots,\ \text{resp. } \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1\ldots$$

congruent zur Punktreihe $A, B, C \ldots$, und zwar so, dass $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ mit A^m zusammenfallen. Nun ist für jeden Punkt C

$$C_0\mathfrak{C}_0 = A_0\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 A_1 = \mathfrak{C}_1 C_1;$$

d. h. $C_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{C}_1 C_1$ ist ein Parallelogramm. Daher ist C^m gleichzeitig Mittelpunkt von $\mathfrak{C}_0\mathfrak{C}_1$, und da überdies

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$$

ist, so halbirt g^m den Winkel $(g_0 g_1)$; d. h.

Die Mittelgerade g^m bildet mit g_0 und g_1 gleiche Winkel.

Die Projection der Sehne C_0C_1 auf g^m ist gleich der Projection des Linienzuges $C_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{C}_1C_1$. Die Strecke $\mathfrak{C}_0\mathfrak{C}_1$ ist aber senkrecht zu g^m, folglich ist ihre Projection auf g^m ein Punkt. Demnach ist die Projection von C_0C_1 gleich der Summe der Projectionen von $C_0\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1C_1$, also, da

$$C_0\mathfrak{C}_0 = A_0\mathfrak{A}_0 \text{ und } \mathfrak{C}_1 C_1 = \mathfrak{A}_1 A_1$$

ist, auch gleich der Projection von A_0A_1. Demnach folgt:

Die Projectionen der Sehnen aller Punkte von g auf der Mittelgeraden g^m sind einander gleich.

Ist also eine Sehne zu g^m senkrecht, so müssen es alle sein, d. h.

Ist die Sehne eines Punktes von g zur Mittelgeraden senkrecht, so sind es alle.

Dieser Satz ist von grosser Wichtigkeit. Die Mittelgeraden, welche auf den Sehnen ihrer Punkte senkrecht stehen, besitzen eine hervorragende Bedeutung für die Theorie der Bewegung eines räumlichen Systems. Wir werden die Eigenschaften derselben, sowie ihre Verteilung im Raume später eingehend zu behandeln haben.

§ 2. Die Bewegung einer Ebene.

§ 1. Seien jetzt ε_0 und ε_1 zwei entsprechende Lagen einer Ebene ε des räumlichen Systems, so gehört zu jedem Punkt A derselben ein Punkt A^m, und zu jeder durch A gehenden Geraden eine durch A^m gehende Gerade g^m. Sind nun g und und h zwei beliebige Geraden von ε, so haben dieselben stets einen endlichen oder unendlich fernen Punkt gemein, also gilt das gleiche auch von den entsprechenden Geraden g^m und

h^m. Je zwei Geraden g^m und h^m schneiden sich daher; da aber nicht alle durch denselben Punkt gehen können, so liegen sie sämmtlich in einer Ebene; d. h.

Die Mittelpunkte der Sehnen aller Punkte von ε liegen sämmtlich in einer und derselben Ebene.

Dieselbe soll die *Mittelebene* von ε heissen und durch ε^m bezeichnet werden.

Die Sehnen der Punkte von ε sind Verbindungslinien homologer Punkte der congruenten ebenen Systeme ε_0 und ε_1. Bei der Voraussetzung, welche wir über Σ_0 und Σ_1 gemacht haben, werden ε_0 und ε_1 niemals einen im Endlichen gelegenen Doppelpunkt besitzen. Dagegen könnte es wohl möglich sein, dass sie ihre Schnittlinie oder einen unendlich fernen Punkt entsprechend gemein haben. Schliessen wir diese beiden Fälle zunächst aus, so erzeugen beide Ebenen ein Stralsystem dritter Ordnung und erster Classe; mithin gehen durch jeden Punkt des Raumes im Allgemeinen drei von den Sehnen. Wir wollen dies auf denjenigen unendlich fernen Punkt anwenden, dessen Richtung zu ε^m senkrecht ist. Da der unendlich fernen Geraden von ε_0 die unendlich ferne Gerade von ε_1 entspricht, so liegen zwei der durch ihn gehenden Sehnen in der unendlich fernen Ebene selbst; es existirt daher noch eine im Endlichen liegende Sehne, welche auf ε^m senkrecht steht. Also folgt:

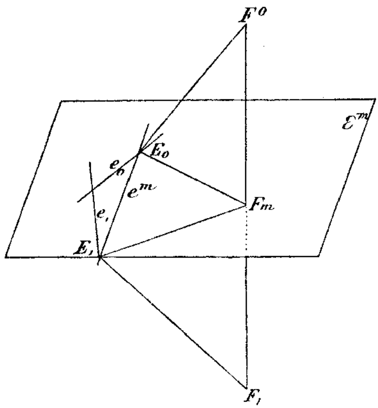
In jeder Ebene ε giebt es im Allgemeinen einen im Endlichen liegenden Punkt F, dessen Sehne auf der Mittelebene ε^m senkrecht steht. Die Normalebene dieses Punktes ist ε^m selbst.

2. Jedem Punkt A von ε entspricht eine Normalebene α^v und jeder Geraden g, welche durch A geht, eine Gerade g^v, die in α^v liegt. Zu irgend zwei Geraden g und h von ε gehören somit zwei sich schneidende Geraden g^v und h^v. Zwei beliebige Geraden g^v und h^v haben daher stets einen Punkt gemein, und da sie nicht alle in einer Ebene liegen können, so gehen sie sämmtlich durch denselben Punkt, der E^v heissen möge. Derselbe ist gleichzeitig Schnittpunkt aller Normalebenen, welche den verschiedenen Punkten von ε entsprechen. Eine dieser Normalbenen ist ε^m, also liegt E^v in ε^m, d. h.

Die Normalebenen aller Punkte einer Ebene ε schneiden *sich sämmtlich in einem und demselben Punkt E^v der Mittelebene ε^m. Die Geraden g^v, welche zu den Geraden g von ε gehören, laufen ebenfalls sämmtlich durch E^v.*

Die beiden Geraden, in denen ε^m von ε_0 und ε_1 geschnitten wird, sind zwei entsprechende Geraden e_0 und e_1 beider Ebenen. Die Sehne jedes Punktes B_0 von e_0 liegt nämlich ganz in ε^m, folglich liegt auch B_1 und demnach auch e_1 in ε^m. Verstehen wir nun wieder unter F^m denjenigen Punkt von ε^m, dessen Sehne normal zu ε^m ist, und fällen (Fig. 16) von den entsprechenden Punkten F_0 und F_1 Lote auf e_0 und e_1, so sind diese Lote entsprechende Geraden, treffen also e_0 und e_1 in zwei entsprechenden Punkten E_0 und E_1. Nun ist die Gerade e_0 eine Normale der Ebene $F_0E_0F^m$, denn sie ist zu den beiden Geraden F_0E_0 und F_0F^m dieser Ebene senkrecht. Hieraus folgt, dass e_0 auch auf der Geraden E_0F^m senkrecht steht, und dasselbe gilt aus analogen Gründen für e_1 und E_1F^m. Aus der Congruenz der Dreiecke $F_0E_0F^m$ und $F_1E_1F^m$ folgt überdies, dass

Fig. 16.



$$F^mE_0 = F^mE_1;$$

wir dürfen daher schliessen, dass F^m Drehungscentrum für die Geraden e_0 und e_1 ist. Daraus ergiebt sich, dass die Normalebenen der Punkte von e sich in einer durch F^m gehenden Geraden schneiden und dass ihre Schnittlinie e^v mit der Sehne F_0F_1 identisch ist. Daher fallen die Punkte F^m und E^v zusammen, d. h.:

Der Punkt E^v, in welchem die Normalebenen aller Punkte von ε sich schneiden, ist derjenige Punkt F^m der Mittelebene ε^m, dessen Sehne auf ε^m senkrecht steht.

Aus der Congruenz der Dreiecke $F_0E_0F^m$ und $F_1E_1F^m$ folgt noch, dass

$$\sphericalangle\, F_0 E_0 F^m = \sphericalangle\, F_1 E_1 F^m$$

ist. Diese Winkel sind aber die Neigungswinkel der Ebenen ε_0 und ε_1 gegen ε^m; also erhalten wir den Satz:

Die Ebenen ε_0 und ε_1 bilden mit der Mittelebene ε^m gleiche Winkel.

E_0 und E_1 sind diejenigen Punkte der Geraden e_0 und e_1, in denen dieselben von der Mittelgeraden e^m geschnitten werden. Diese Gerade soll die *Characteristik* der Ebene ε^m genannt werden. Dieselbe ist durch zwei Besonderheiten ausgezeichnet. Einerseits hat sie die Eigenschaft, dass die Sehnen aller ihrer Punkte in ε^m selbst liegen, andrerseits kann sie auch so definirt werden, dass sie die einzige Gerade von ε^m ist, welche die ihr zugehörige Gerade e^v rechtwinklig kreuzt.

3. Mittelst der vorstehenden Sätze sind wir im Stande, anzugeben, auf welche Weise die Ebene ε aus der Anfangslage ε_0 in die Endlage ε_1 übergeführt werden kann. Wir erteilen ihr nämlich zunächst eine Drehung um e^v, bis e_0 auf e_1 fällt. Dabei ändern F_0 und F_1 ihre Lage im Raume nicht. Drehen wir sie nun noch um e_1, bis sie mit ε_1 zusammenfällt, so wird F_0 in die Lage F_1 gelangen, und da jetzt drei nicht in einer Geraden liegende Punkte von ε an die ihnen vorgeschriebenen Stellen gekommen sind, so gilt dies von allen Punkten.

Die Reihenfolge der beiden Bewegungen ist vertauschbar. Drehen wir nämlich die Ebene ε_0 zuerst um e_0, bis sie mit ε_1 zur Deckung gelangt, so fällt F_0 auf F_1, während die Gerade e_0 ihre Lage im Raume nicht ändert. Lassen wir nun die Drehung um e^v eintreten, so werden die Punkte von e_0 mit den entsprechenden von e_1 zusammenfallen; also gilt dies für alle Punkte von ε_0 und ε_1, und es folgt:

Jede Ortsveränderung einer Ebene ε kann im Allgemeinen durch successive Drehung derselben um zwei zu einander senkrechte Geraden ausgeführt werden. Die Reihenfolge der Drehungen ist beliebig. Die eine derselben findet um eine bestimmte Gerade e der Ebene statt, nämlich um diejenige, welche der Characteristik e^m von ε^m zugeordnet ist; die andere um eine bestimmte Gerade des absoluten Raumes, nämlich um die zu e zugehörige Gerade e^v.

Es mag noch besonders darauf hingewiesen werden, dass, in welcher Reihenfolge die Drehungen auch vorgenommen werden, unter e stets dieselbe Gerade von ε zu verstehen ist. Ihre Lage im absoluten Raum wechselt allerdings, je nachdem wir e oder e^v als erste Rotationsaxe wählen.

Da die Ordnung der beiden Drehungen vertauscht werden darf, so können sie auch gleichzeitig vorgenommen werden.

§ 3. Das Nullsystem.

§ 1. Die Sehnenmittelpunkte A^m, B^m, $C^m \ldots$, welche zu den Punkten A, B, $C \ldots$ des räumlichen Systems Σ gehören, haben eine solche Lage im Raume, dass jeder Geraden g eine Gerade g^m und jeder Ebene ε eine Ebene ε^m entspricht. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet daher ein zu Σ_0, resp. Σ_1 collineares räumliches System Σ^m. Beachten wir noch, dass jedem unendlich fernen Punkt von Σ auch ein unendlich ferner Punkt von Σ^m entspricht, so folgt:

Das System Σ^m der Sehnenmittelpunkte ist affin zu den räumlichen Systemen Σ_0 und Σ_1.

Die Normalebenen α^v, β^v, $\gamma^v \ldots$, welche zu den Punkten A, B, $C \ldots$ von Σ gehören, bilden ein räumliches System Σ^v, welches, wie aus § 2, 2 folgt, zu Σ_0 und Σ_1 reciprok ist. Es sind daher auch Σ^m und Σ^v reciproke räumliche Systeme. Der Punkt A^m liegt in der ihm entsprechenden Ebene α^v, und ebenso geht die Ebene ε^m durch den ihr zugeordneten Punkt E^v. Die beiden reciproken räumlichen Systeme Σ^m und Σ^v haben daher eine solche Lage zu einander, dass jede Ebene des einen durch den entsprechenden Punkt des andern geht. Zwei derartig verbundene Systeme nennt man ein *Nullsystem*;[19]) demnach folgt:

Die beiden räumlichen Systeme Σ^m und Σ^v bilden zusammen ein Nullsystem.

2. Die characteristische Eigenschaft des Nullsystems besteht darin, dass jedem Punkt des Raumes dieselbe Ebene zugeordnet ist, gleichgültig, ob wir ihn als Punkt von Σ^m oder als Punkt von Σ^v betrachten, und dass auch umgekehrt jeder Ebene des Raumes derselbe Punkt doppelt entspricht. Dies sehen wir deutlich aus den in § 2, 2 bewiesenen Sätzen. Denn dem

Punkt E^v von Σ^v entspricht im System Σ^m die Ebene ε^m; andrerseits, wenn wir den Punkt E^v als einen Punkt F^m von Σ^m betrachten, so ist ε^m seine Normalebene; d. h. die ihm im System Σ^v zugeordnete Normalebene φ^v ist in der That eben dieselbe Ebene, welche ihm in Σ^m entspricht.

Die beiden räumlichen Systeme können demnach als ein einziges System aufgefasst werden, dessen Elemente paarweise einander reciprok zugeordnet sind. Dies ist auch der Grund, weshalb sie zusammen als Nullsystem bezeichnet worden sind. Wir nennen die einem beliebigen Punkte entsprechende Ebene seine *Nullebene*, und den einer beliebigen Ebene entsprechenden Punkt ihren *Nullpunkt*.

3. Sei jetzt g^m irgend eine Gerade von Σ^m, und g^v die zugehörige Gerade von Σ^v. Ist nun A^m ein beliebiger Punkt von g^m, so geht der Definition nach seine Normalebene α^v, d. h. seine Nullebene durch g^v.

Ist ferner β^m eine beliebige Ebene von g^m, so muss, da β^m die Gerade g^m enthält, ihr Nullpunkt B^v auf g^v liegen.

Wir betrachten nun g^v als eine Gerade von Σ^m und bezeichnen sie als solche durch h^m. Nennen wir den Punkt B^v jetzt D^m, so ist die zugeordnete Ebene δ^v, da eben Punkt und Ebene sich doppelt entsprechen, identisch mit β^m und geht daher durch g^m, und da dies für jeden der Punkte B^v gilt, so ist h^v identisch mit g^m.

Bezeichnen wir ferner die Ebene α^v als Ebene von Σ^m durch γ^m, so ist C^v identisch mit A^m und liegt daher auf g^m, woraus wieder folgt, dass h^v dieselbe Gerade wie g^m ist.

Die Geraden g^m und g^v entsprechen sich daher ebenfalls doppelt; d. h., wenn wir g^v als eine Gerade h^m von Σ^m betrachten, so schneiden sich die Nullebenen, d. h. die Normalebenen aller ihrer Punkte in g^m. Also folgt:

Zwei Geraden g^m und g^v stehen in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen Schnittlinie der Normalebenen, resp. der Nullebenen der Punkte der andern ist.

Zwei solche Geraden heissen *conjugirte Geraden* des Nullsystems. Für sie besteht, wie aus Obigem folgt, der weitere Satz:

Von zwei conjugirten Geraden des Nullsystems enthält jede die Nullpunkte aller Ebenen, welche durch die andere hindurchgehen.

Die specielle Art der Beziehung, welche die beiden reciproken Räume Σ^m und Σ^ν mit einander verbindet, ist somit, vom rein *geometrischen* Standpunkt aus betrachtet, eine völlig wechselseitige. Wir werden jedoch, da Σ^m und Σ^ν verschiedene *kinematische* Bedeutung besitzen, die beiden Bestandteile des Nullsystems im Allgemeinen auseinander halten müssen, und wie bisher, so auch ferner durch die Art der Bezeichnung ausdrücken, ob wir einen Punkt des Raumes als einen Punkt von Σ^m oder als einen Punkt von Σ^ν, d. h. als den Nullpunkt einer Ebene ε^m betrachten.

4. Liegt die Gerade g^m im Unendlichen, so heisst die Gerade g^ν ein *Durchmesser* des Nullsystems. Für sie gilt der Satz:

Alle Durchmesser des Nullsystems sind einander parallel.

Da nämlich die unendlich fernen Geraden g^m sämmtlich in einer Ebene liegen, nämlich in der unendlich fernen, so gehen alle Durchmesser durch den Nullpunkt derselben und sind somit parallel. Jeder Durchmesser enthält die Nullpunkte aller derjenigen Ebenen, welche sich in der ihm conjugirten unendlich fernen Geraden schneiden; er ist also einem Büschel paralleler Ebenen zugeordnet, und soll der diesen Ebenen *adjungirte Durchmesser* heissen.[20])

Unter allen Durchmessern existirt einer, adjungirt zu dem Büschel derjenigen Ebenen, welche auf der Durchmesserrichtung senkrecht stehen; er heisst die *Hauptaxe* des Nullsystems. Die Hauptaxe enthält demgemäss den Nullpunkt einer jeden zu ihr senkrechten Ebene ξ^m, und da der Nullpunkt von ξ^m derjenige Punkt F^m ist, dessen Sehne zu ξ^m normal ist, so folgt, dass die Hauptaxe gleichzeitig die Sehne dieses Punktes F^m ist Auf ihr liegen daher auch die entsprechenden Punkte F_0 und F_1 von ξ_0 resp. ξ_1. Dies gilt für jede zur Hauptaxe senkrechte Ebene; und daraus folgt, dass die Hauptaxe eine selbstentsprechende Gerade der Systeme Σ_0, Σ_1 und Σ^m ist. Als solche soll sie durch x_0, resp. x_1, x^m oder auch kurz durch x bezeichnet werden.

Die beiden congruenten Punktreihen, welche auf der Hauptaxe in einander liegen, haben nur ihren unendlich fernen Punkt entsprechend gemein. Derselbe ist daher der einzige reelle Doppelpunkt der Systeme Σ_0 und Σ_1.

5. Wir sind nunmehr im Stande, die Lage des Nullpunktes auch für diejenigen Ebenen zu bestimmen, die wir zuerst von der Betrachtung ausgeschlossen hatten. Sind z. B. ε_0 und ε_1 zu einander parallel, d. h. haben sie ihre unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, so sind sie auch zu ε^m parallel, und ε^m enthält die unendlich ferne Schnittgerade $|\varepsilon_0 \varepsilon_1|$; ihr Nullpunkt ist daher ihr Schnittpunkt mit dem zu ihr adjungirten Durchmesser.

Sollen ε_0 und ε_1 eine im Endlichen gelegene Gerade entsprechend gemein haben, so kann dies nur die Hauptaxe x sein. Alsdann liegt der Nullpunkt von ε^m auf der zu x conjugirten unendlich fernen Geraden; er ist daher derjenige unendlich ferne Punkt von ε^m, dessen Richtung zu x normal ist.

Haben beide Ebenen einen unendlich fernen Punkt entsprechend gemein, so muss dies der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe sein; demnach ist jede der beiden Ebenen, also auch ε^m zur Hauptaxe parallel. Die Ebene ε^m enthält daher unendlich viele Durchmesser des Nullsystems; ihr Nullpunkt ist derjenige unendlich ferne Punkt, durch welchen die den Durchmessern conjugirten unendlich fernen Geraden sämmtlich hindurch gehen.

Endlich erwähnen wir noch, dass als Nullpunkt der unendlich fernen Ebene der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe zu betrachten ist.

Diesem Punkt lässt sich noch eine andere Bedeutung beilegen. Die unendlich ferne Ebene verschiebt sich während der Bewegung in sich selbst. Sie besitzt daher ein Drehungscentrum, und zwar ist dies ihr Doppelpunkt. Dieser Doppelpunkt ist aber der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe; demnach kann der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe als Drehungscentrum der unendlich fernen Ebene betrachtet werden.

Wir hatten bisher nur von den Normalebenen der im Endlichen liegenden Punkte des räumlichen Systems gesprochen.

Die Eigenschaften des Nullsystems zeigen, dass auch jedem unendlich fernen Punkt eine ganz bestimmte Normalebene zugehört, nämlich seine Nullebene. Daraus folgt, dass die Normalebene eines jeden unendlich fernen Punktes zur Hauptaxe parallel ist.

Ist der unendlich ferne Punkt im besondern der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe, so ist die unendlich ferne Ebene selbst als seine Normalebene zu betrachten.

§ 4. **Die Schraubenbewegung und die Axenflächen.**

1. Mit Hilfe der im vorigen Paragraphen entwickelten Sätze gelingt es, die einfachste Bewegung zu finden, durch welche der Uebergang eines räumlichen Systems Σ aus einer Lage Σ_0 in eine Lage Σ_1 vermittelt werden kann.

Wir betrachten dazu das System in der Anfangslage Σ_0 und erteilen ihm eine Translationsbewegung parallel zur Hauptaxe x, und zwar so, dass irgend ein Punkt A_0 derselben mit dem entsprechenden Punkt A_1 zusammenfällt, so wird auch jeder andere Punkt B_0 von x_0 auf B_1 fallen. Diese Translation, welche der Richtung und Grösse nach gleich $A_0 A_1$ ist, möge durch $2\,U$ bezeichnet werden.

In der jetzigen Lage haben beide räumlichen Systeme die Hauptaxe x Punkt für Punkt entsprechend gemein; es genügt daher, dem System Σ noch eine Drehung von bestimmter Grösse um x als Axe zu erteilen, um es in die Endlage Σ_1 überzuführen. Den Drehungswinkel wollen wir durch $2\,\Omega$ bezeichnen.

Die Aufeinanderfolge beider Bewegungen lässt sich vertauschen. Denn drehen wir das System Σ_0 zuerst um x_0 als Axe, und zwar um den Winkel $2\,\Omega$, und lassen es dann die Translation $2\,U$ parallel x_0 ausführen, so wird es augenscheinlich ebenfalls in die Endlage Σ_1 gelangen. Es ist daher auch gestattet, beide Bewegungen gleichzeitig eintreten zu lassen. Gehen dieselben überdies gleichförmig vor sich, so verschmelzen sie zu einer Schraubenbewegung von der Ganghöhe

$$2\,\pi\,U : \Omega$$

um x als Axe, und es folgt:

Jede Ortsveränderung eines starren räumlichen Systems lässt *sich dadurch vermitteln, dass dasselbe gezwungen wird, eine bestimmte Schraubenbewegung um eine gewisse Gerade des Raumes als Axe auszuführen. Die Axe ist diejenige im Endlichen gelegene Gerade, welche Anfangslage und Endlage des räumlichen Systems entsprechend gemein haben.*[21])

Den Quotienten $U:\Omega$, welcher die Ganghöhe der Schraubenbewegung bestimmt, werden wir auch den *Parameter* der Schraubenbewegung nennen.

2. Von dem Character dieser Bewegung können wir uns auf folgende Weise eine anschauliche Vorstellung bilden. Wir benützen eine Schraube, deren Ganghöhe $2\pi U:\Omega$ ist, und die wir so legen, dass ihre Axe mit der Geraden x des Systems zusammenfällt. Wir denken uns nun, dass die Schraubenmutter eine unveränderliche Lage im Raume behält, dass dagegen das System Σ mit der Schraubenspindel fest verbunden wird. Bewegen wir nun die Schraube in der Schraubenmutter, so wird in Folge dieser Bewegung das mit der Schraubenspindel verbundene räumliche System Σ allmählich aus der Lage Σ_0 in die Lage Σ_1 gelangen.

Hierbei beschreibt jeder Punkt von Σ ein Stück einer Schraubenlinie, und alle diese Schraubenlinien haben eine gemeinsame Axe und gleiche Ganghöhe. Für alle Punkte von Σ, welche auf einem Rotationscylinder liegen, der x zur Axe hat, sind die zugehörigen Schraubenlinien congruent. Dieselben werden um so flacher, je grösser der Abstand des beschreibenden Punktes von der Axe der Schraubenbewegung ist.

Wir haben im Eingang dieses Capitels darauf hingewiesen, dass die Ortsveränderung von Σ in speciellen Fällen mittelst einer blossen Rotation oder mittelst einer blossen Translation bewirkt werden kann. Rotation und Translation lassen sich aber auch als Ausartungen der Schraubenbewegung auffassen. Die Schraubenbewegung wird nämlich zur Rotation, wenn $2U$ den Wert Null hat, und zur Translation, wenn dasselbe mit 2Ω der Fall ist. Mit Rücksicht hierauf dürfen wir sagen, dass der in diesem Paragraphen bewiesene Hauptsatz für jede beliebige Ortsveränderung eines unveränderlichen räumlichen Systems Giltigkeit besitzt.

3. Um diejenigen Gesetze zu erhalten, welche ein in beliebiger Bewegung begriffenes System betreffen, haben wir Σ_0 und Σ_1 unendlich nahe an einander rücken zu lassen. Da A^m stets Halbirungspunkt der Strecke A_0A_1 bleibt, so fällt in der Grenzlage Σ^m mit Σ selbst zusammen. Die über das System Σ^m gefundenen Sätze sind aber von der Grösse der Verschiebung ganz unabhängig; wir können daher das System Σ^m wieder benutzen, um aus den constanten Eigenschaften desselben in aller Strenge diejenigen Gesetze zu entnehmen, welche die Bewegung eines starren Körpers in jedem Augenblick characterisiren.

Beachten wir, dass in der Grenzlage die Sehne A_0A_1 in die Tangente der von A beschriebenen Bahn und die Ebene α^v in die Normalebene dieser Bahn übergeht, und dass jetzt Σ und Σ^v selbst das Nullsystem bilden, so erhalten wir die folgenden fundamentalen Sätze:

Wenn sich ein unveränderliches räumliches System beliebig im Raume bewegt, so führt es in jedem Augenblick eine gewisse unendlich kleine Schraubenbewegung um eine bestimmte Gerade x des Raumes als Axe aus.[22])

Wenn sich ein unveränderliches räumliches System beliebig im Raume bewegt, so bilden in jedem Augenblick die Systempunkte A mit den Normalebenen ihrer Bahnen ein Nullsystem. Die Hauptaxe desselben ist die Axe der momentanen Schraubenbewegung.

In jeder Ebene des Systems giebt es in jedem Augenblick einen Punkt, dessen Bahntangente auf der Ebene senkrecht steht, nämlich ihren Nullpunkt.

Endlich folgt noch mit Rücksicht auf den letzten Satz von § 1, 4:

Bewegt sich ein unveränderliches System beliebig im Raume, und ist in irgend einem Augenblick eine Gerade desselben senkrecht zur Tangente der Bahn eines ihrer Punkte, so ist sie es zu den Bahntangenten aller Punkte.

Die Bahnelemente aller Punkte können daher in jedem Bewegungsmoment als Elemente von Schraubenlinien betrachtet werden, die sämmtlich x zur Axe haben und dieselbe Ganghöhe besitzen, und zwar ist die Ganghöhe gleich dem momentanen Grenzwert des Quotienten $2\pi U : \Omega$. Die Bahntangente eines jeden Punktes ist identisch mit der Tangente der bezüglichen durch diesen Punkt gehenden Schraubenlinie.

4. Von den vielen Folgerungen, welche sich aus dem zweiten der obigen Sätze ergeben, sollen einige, die wir öfters zu benutzen haben, besonders angeführt werden. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass das Entsprechen der Elemente im Nullsystem ein wechselseitiges ist. Mit Rücksicht auf die verschiedene *kinematische* Bedeutung der Systeme Σ und Σ^ν werden wir jedoch meist auch fernerhin unterscheiden, ob wir die Elemente des Raumes als Elemente von Σ oder als solche von Σ^ν betrachten. Wir erhalten daher folgende Sätze:

Sind g und g^ν zwei conjugirte Geraden des Nullsystems, so schneiden sich die Normalebenen aller Punkte von g in g^ν, und die Normalebenen aller Punkte von g^ν in g; d. h. wenn wir g^ν als eine Gerade h von Σ betrachten, so ist die zu h gehörige Gerade h^ν mit g identisch.

Die Nullpunkte aller Ebenen, welche durch g gehen, liegen auf g^ν, und die Nullpunkte aller durch g^ν gehenden Ebenen liegen auf g.

Gehen die Geraden g durch einen Punkt, so liegen die conjugirten Geraden g^ν in einer Ebene, und zwar in der Normalebene dieses Punktes, und liegen die Geraden g in einer Ebene ε, so gehen die conjugirten Geraden sämmtlich durch den Nullpunkt dieser Ebene, d. h. durch denjenigen Punkt, dessen Normalebene ε ist.

Sind im Besonderen die Geraden g parallel, so liegen die Geraden g^ν in einer Ebene, die zur Axe der momentanen Schraubenbewegung parallel ist, und liegen die Geraden g in einer zu dieser Axe parallelen Ebene, so sind die g^ν zu einander parallel.

Ist endlich ε eine beliebige Ebene von Σ und E^ν ihr Nullpunkt, so schneiden sich die Normalebenen der Bahnen aller Punkte von ε in E^ν; überdies ist ε die Normalebene von E^ν; d. h. bezeichnen wir E^ν als Punkt von ε durch F, so ist seine Normalebene φ^ν mit ε identisch.

5. Um ein Bild von der continuirlichen Bewegung eines unveränderlichen Systems zu gewinnen, betrachten wir zunächst wieder beliebig viele discrete Systemlagen Σ_0, Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3 \ldots$ Die sich selbst entsprechende Gerade der Systeme Σ_0 und Σ_1 sei $x_0 = x_1$, $y_1 = y_2$ diejenige von Σ_1 und Σ_2, ebenso $z_2 = z_3$ diejenige von Σ_2 und Σ_3 u. s. w.

Wir bezeichnen nunmehr den festen Raum, in welchem die Bewegung von Σ vor sich geht, durch Σ', und diejenigen Geraden desselben, um welche die erste, zweite, dritte ... Schraubenbewegung stattfindet, durch x', y', z' ... Die Schraubenbewegung um x' bringt y nach y' und Σ aus der Anfangslage Σ_0 in die Lage Σ_1; die jetzt eintretende Schraubenbewegung um y' bewirkt, dass z nach z' und Σ in die Lage Σ_2 gelangt, u. s. w.; wir erhalten so eine wohldefinirte Schaar von Geraden x, y, z, ... des Systems Σ, welche im Verlauf der Bewegung Schraubenaxen werden, und in Σ' eine Schaar von Geraden x', y', z' ..., welche die Reihe der Schraubenaxen im festen Raum repräsentiren. Die erste Schaar möge durch (R), die zweite durch (R') bezeichnet werden. Durch sie ist die Bewegung des räumlichen Systems vollständig bestimmt.

Seien X und Y die Punkte kürzesten Abstandes für x und y, ebenso X' und Y' diejenigen für x' und y'. Da in Folge der ersten Schraubenbewegung y mit y' zusammenfällt, so ist

$$XY = X'Y'$$

und

$$\sphericalangle (xy) = \sphericalangle (x'y').$$

Nennen wir die Ebene, welche durch x geht und zu y parallel ist, die Centralebene der Schaar (R) für den Stral x, und die Ebene, welche durch x' geht und zu y' parallel ist, die Centralebene von (R') für den Stral x', ferner die Punkte X, resp. X' die Centralpunkte von (R) und (R') für x resp. x', so folgt demnach:

Die Bewegung des Raumes Σ gegen den Raum Σ' geht in der Weise vor sich, dass in Folge der Rotationen 2Ω die

Centralebenen, und in Folge der Translationen $2\,U$ die Centralpunkte von (R) und (R') zusammenfallen.

Die Rotation $2\,\Omega$ ist demnach gleich dem Winkel zweier entsprechenden Centralebenen der Schaaren (R) und (R') und die Translation $2\,U$ gleich dem Abstand von zwei entsprechenden Centralpunkten derselben.

6. Betrachten wir nun irgend eine stetige Bewegung des räumlichen Systems Σ, so werden nicht allein die Systemlagen Σ_0, Σ_1, Σ_2 . . ., sondern im Allgemeinen auch die Geraden x, y, z . . ., resp. x', y', z' . . . beliebig nahe an einander rücken; jedenfalls werden wir im Folgenden nur solche Bewegungen zu betrachten haben, für welche dies stattfindet. In diesem Fall gehen die Schaaren (R) und (R') in zwei geradlinige Flächen R, resp. R' über.

Für je zwei benachbarte Erzeugenden x, y, resp. x', y' dieser Flächen bestehen die oben abgeleiten Gleichungen. Da man die unendlich kleinen Abstände der entsprechenden Erzeugenden für beide Flächen als gleich betrachten darf, so lassen sich die Gleichungen in diesem Fall durch eine einzige ersetzen, nämlich durch

$$\frac{XY}{\sphericalangle\,(xy)} = \frac{X'Y'}{\sphericalangle\,(x'y')}.$$

Bei jeder Regelfläche nennt man aber das Verhältniss zwischen dem kürzesten Abstand zweier benachbarten Erzeugungslinien und dem Winkel derselben den Parameter der Fläche für die bezügliche Erzeugungslinie; also folgt, dass R und R' für je zwei entsprechende Erzeugungslinien, d. h. für solche, welche im Verlauf der Bewegung in einander fallen, gleichen Parameter besitzen.

Ist g eine beliebige Erzeugungslinie einer Regelfläche, so sind unter allen durch g gelegten Tangentialebenen zwei besonders ausgezeichnet, nämlich diejenige, welche die Fläche im unendlich fernen Punkt von g berührt, und die zu ihr senkrechte. Die erste heisst *die Centralebene* der Fläche für die Erzeugende g, und der Berührungspunkt der letzteren heisst der *Centralpunkt* von g. Die Ebenen und Punkte, die wir oben als Centralebenen, resp. Centralpunkte der Schaaren (R)

und (R') definirt haben, gehen in der Grenze direct in die Centralebenen und Centralpunkte der Flächen R, resp. R' über. Demnach folgt aus dem letztbewiesenen Satz sofort:

Die Regelflächen R und R' haben in jedem Augenblick eine Erzeugende, sowie die Centralebene und den Centralpunkt derselben gemein.

Dies lässt sich auch dahin aussprechen, dass beide Flächen in jedem Augenblick zwei auf einander folgende Erzeugungslinien gemein haben.

Nunmehr können wir die Bewegung des Systems Σ in folgender Weise beschreiben. Wir haben bereits gesehen, dass dieselbe aus lauter unendlich kleinen Schraubenbewegungen um die Erzeugenden x', y', z' . . . der Fläche R' besteht. Während der unendlich kleinen Schraubenbewegung um x' ist x mit x' vereinigt; die Bewegung bewirkt, dass y mit y' zusammenfällt, und jetzt haben R und R' die Erzeugenden x, y und x', y' gemein. Dann findet die Schraubenwegung um y' statt; die Erzeugenden x und x' trennen sich, während z und z' zur Deckung gelangen, u. s. w. Das System Σ dreht sich dabei um jede Schraubenaxe, während es gleichzeitig längs derselben gleitet. Diese Bewegung von Σ, resp. der Fläche R gegen die Fläche R' hat man in Folge dessen ein Rollen und Gleiten genannt. Wir gewinnen also folgendes wichtige Resultat:

Die allgemeinste Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems besteht in dem Rollen und Gleiten einer dem System angehörigen geradlinigen Fläche R auf einer dem absoluten Raum angehörigen Fläche R'. Beide Flächen haben für je zwei Erzeugenden, welche im Lauf der Bewegung zusammenfallen, gleichen Parameter.[23])

7. Da die Centralebenen die Flächen im unendlich fernen Punkt der Erzeugenden berühren, so berühren sich die Flächen selbst in diesem Punkt, d. h. die Curven r_∞ und r_∞', in denen die unendlich ferne Ebene von R und R' geschnitten wird, berühren sich in jedem Augenblick im unendlich fernen Punkt der momentanen Schraubenaxe. Wir haben aber bereits oben gesehen, dass dieser Punkt als das momentane Drehungs-

centrum der unendlich fernen Ebene aufgefasst werden kann; die unendlich ferne Ebene verschiebt sich daher so, dass die beiden Curven r_∞ und $r_\infty{}'$ von einander abrollen.

Die Flächen R und R' characterisiren die Bewegung des räumlichen Systems; sind sie gegeben, so ist auch die Art der Bewegung bestimmt. Sie sollen die *Polflächen* oder die *Axenflächen* genannt werden. Sie spielen für die räumliche Bewegung dieselbe Rolle, wie die Polcurven für die ebene Bewegung und die Polkegel für die Drehung um einen festen Punkt. Während jedoch die Polcurven und die Polkegel ganz beliebig angenommen werden dürfen, ist die Wahl der Flächen R und R' nicht willkürlich, vielmehr sind dieselben, wie eben bewiesen, an die Bedingung gebunden, dass zu je zwei entsprechenden Erzeugenden derselbe Wert des Parameters gehört. Daraus folgt z. B., dass beide Flächen Regelflächen, oder beide abwickelbar, oder endlich beide Cylinderflächen sein müssen.

Sind beide Flächen cylindrisch, so bestimmen sie übrigens die Bewegung des Systems nicht eindeutig. Der Grund liegt in Folgendem. Die Ganghöhe der momentanen Schraubenbewegung ist von dem Verhältniss zwischen dem Winkel der Centralebenen und dem Abstand der Centralpunkte abhängig. Der Abstand der Centralpunkte wird aber, wenn beide Flächen cylindrisch sind, unbestimmt; daher kann die Ganghöhe der momentanen Schraubenbewegung jeden beliebigen Wert annehmen.

8. Den Raum Σ', in welchem die Bewegung von Σ vor sich geht, haben wir uns bisher stets als ruhend vorgestellt. Denken wir uns nunmehr einen Beobachter, welcher mit dem in Bewegung begriffenen System Σ fest verbunden ist, so wird derselbe den Raum Σ' sich gegen Σ verschieben sehen. Diese Bewegung von Σ' in Σ soll wieder die *umgekehrte* Bewegung genannt werden, während die Bewegung von Σ in Σ' die directe oder ursprüngliche Bewegung heissen soll.

Da der geometrische Character beider Bewegungen davon ganz unabhängig ist, ob wir uns während derselben in Σ oder in Σ' befinden, so ergiebt sich sofort, dass für die ursprüngliche und die umgekehrte Bewegung die momentanen Schraubenbewegungen in jedem Augenblick sowohl in der Lage der Axe als auch in der Ganghöhe übereinstimmen. Ebenso folgt, dass die Bewegung des Raumes Σ' in Σ in dem Rollen und Gleiten der Fläche R' auf der Fläche R besteht.

Wie jeder Punkt A von Σ eine in Σ' gelegene Bahn beschreibt, so beschreibt auch umgekehrt jeder Punkt B' von Σ' eine Bahn in Σ. Wir werden später dazu gelangen, einige Reciprocitätsbeziehungen aufzustellen, welche für die Bahnen gewisser Punktgruppen von Σ und Σ' statthaben. Hier beschränken wir uns zunächst darauf, einen für spätere Untersuchungen wichtigen Satz auszusprechen.

Wir wählen die Bezeichnungen wieder so, wie es in den vorigen beiden Capiteln für die umgekehrte Bewegung festgesetzt ist, und betrachten zunächst zwei beliebige Systemlagen Σ_0 und Σ_1. Ist nun B_0' ein Punkt der Normalebene α^v, so hat B_0' von A_0 und A_1 gleichen Abstand. Demnach haben auch B_0' und B_1' von A_0 denselben Abstand, mithin geht die Normalebene $\beta^{v\prime}$ durch A_0 und es folgt:

Enthält die Normalebene α^v eines Punktes A von Σ einen Punkt B' von Σ', so geht die Normalebene $\beta^{v\prime}$ der umgekehrten Bewegung durch A.

Ebenso für continuirliche Bewegung:

Enthält die Normalebene der Bahn eines Punktes A von Σ einen Punkt B' von Σ', so geht bei der umgekehrten Bewegung die Normalebene der Bahn von B' durch A.

Auch mit der umgekehrten Bewegung ist in jedem Augenblick ein bestimmtes Nullsystem verbunden. Beide Nullsysteme sind identisch. Wenn daher in irgend einem Augenblick ein Punkt A von Σ mit einem Punkt B' von Σ' zusammenfällt, so fällt auch die Normalebene α^v mit der Normalebene $\beta^{v\prime}$ zusammen.

§ 5. **Der lineare Stralencomplex.**

1. In dem Satz, dass mit einem in Bewegung begriffenen räumlichen System in jedem Augenblick ein Nullsystem verbunden ist, haben wir dasjenige fundamentale Resultat zu

erblicken, aus welchem sich die Theorie der Bewegung eines räumlichen unveränderlichen Systems ohne Schwierigkeit ableiten lässt. Wir werden in diesem Paragraphen neue wichtige Eigenschaften des Nullsystems kennen lernen.

Wir beschränken uns übrigens von nun an im Wesentlichen auf die Betrachtung unendlich naher Lagen des räumlichen Systems; nur wenn es zum Zweck des Beweises nötig sein sollte, werden wir wieder auf beliebige Lagen Σ_0, Σ_1 und auf das zu ihnen gehörige System Σ^m zurückgreifen.

2. Irgend zwei conjugirte Geraden g und g^v des Nullsystems liegen entweder windschief, oder sie fallen mit einander zusammen.

Ist nämlich g eine beliebige Gerade und legen wir durch sie irgend eine Ebene ε, so geht g^v durch den Nullpunkt E^v von ε, und ist daher, wenn g den Punkt E^v nicht enthält, zu g windschief. Liegt aber der Punkt E^v auf g, so hat E^v, als Punkt F von Σ betrachtet, die Eigenschaft, dass seine Bahntangente auf ε, also auch auf g senkrecht steht; daher ist die Gerade g senkrecht zu den Bahntangenten aller ihrer Punkte A (§ 4, 3), die Normalebene α^v jedes Punktes A geht durch g, und g^v fällt mit g zusammen, d. h.

Jede Gerade von Σ, welche auf den Bahnen aller ihrer Punkte senkrecht steht, ist eine sich selbst conjugirte Gerade des Nullsystems, und umgekehrt.

In jeder beliebigen Ebene ε giebt es mithin unendlich viele Geraden, welche sich selbst conjugirt sind; dieselben bilden einen ebenen Stralenbüschel, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt von ε ist.

Ist ferner A ein beliebiger Punkt, und suchen wir die durch ihn gehenden Geraden dieser Art, so ist jede derselben normal zur Bahntangente von A; sie liegt daher in der Normalebene α^v von A; und jede durch A gehende Gerade von α^v ist sich selbst conjugirt.

Demnach folgt:

Die Gesammtheit aller Geraden des räumlichen Systems Σ, welche sich selbst conjugirt sind, bildet in jedem Augenblick einen linearen Stralencomplex.

Da jede Gerade dieses linearen Stralencomplexes in der Normalebene eines jeden ihrer Punkte liegt, so ist sie Normale für die Bahnen aller dieser Punkte. Wir wollen sie deshalb *Normalstral* oder kurz *Normale* nennen, und werden jede derartige Gerade von nun an durch l bezeichnen.

3. *Jede Gerade, welche irgend zwei conjugirte Geraden g und g^v schneidet, gehört dem linearen Complex an.*

Bezeichnen wir dieselbe nämlich bereits durch l, so geht die Normalebene des Punktes (gl) durch (gl) und durch g^v; ebenso geht die Normalebene des Punktes $(g^v l)$ durch $(g^v l)$ und g; folglich fällt die Schnittlinie beider Normalebenen, d. h. die zu l conjugirte Gerade mit l selbst zusammen.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich zeigen, dass zwei Paare conjugirter Geraden, z. B. die Geradenpaare g, g^v und h, h^v stets hyperboloidische Lage besitzen. Denn ist l irgend eine Gerade, welche g, g^v und h trifft, so ist l sich selbst conjugirt, und da l und h einen Punkt gemein haben, so müssen die zu l und h conjugirten Geraden l und h^v in einer Ebene liegen; also werden g, g^v, h, h^v in der That von einer und derselben Geraden l geschnitten.

4. Wir legen durch g eine Ebene α parallel zu g^v, und durch g^v eine Ebene β parallel zu g. Beide Ebenen sind zu einander parallel. Der Nullpunkt der durch g gelegten Ebene ist ihr Schnittpunkt mit g^v; er liegt daher unendlich fern, und da die Normalebene eines jeden unendlich fernen Punktes der Axe x der momentanen Schraubenbewegung parallel läuft, so ist die Ebene α parallel zu x. Das gleiche gilt für die durch g^v gelegte Ebene β. Construiren wir nun den kürzesten Abstand von g und g^v, so ist derselbe senkrecht zu beiden Ebenen, und trifft daher die zu x senkrechte unendlich ferne Gerade. Er ist aber gleichzeitig ein Stral l des linearen Complexes, mithin schneidet er auch die conjugirte dieser unendlich fernen Geraden, d. h. die Axe x. Also fogt:

Der kürzeste Abstand zweier conjugirten Geraden g und g^v trifft die Momentanaxe und steht senkrecht auf ihr. Eine Ebene, welche zwei conjugirten Geraden parallel läuft, ist auch zur Momentanaxe parallel.

Denken wir uns daher irgend eine zu x senkrechte Ebene, so trifft dieselbe zwei conjugirte Geraden g und g^v allemal so, dass ihre drei Schnittpunkte mit g, g^v und x auf einer und derselben Geraden liegen.

Bei den Beweisen der vorstehenden Sätze haben wir uns zwar nur mit dem von Σ und Σ^v gebildeten Nullsystem beschäftigt; es ist jedoch einleuchtend, dass dieselben in analoger Form auch für das von Σ^m und Σ^v gebildete Nullsystem Geltung haben. Wir werden später davon Gebrauch zu machen haben.

5. Die continuirliche Bewegung eines räumlichen Systems ist in jedem Augenblick als bekannt zu betrachten, sobald wir das Nullsystem kennen, welches den betreffenden Bewegungsmoment characterisirt.

Das momentane Nullsystem und der zugehörige lineare Stralencomplex der Normalstralen l sind bestimmt, wenn wir zwei Paare von conjugirten Geraden kennen. Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass und wie die Axe der momentanen Schraubenbewegung und die Normalebene jedes Punktes aus zwei Paaren conjugirter Geraden construirt werden kann.

Seien diese Geradenpaare g, g^v und h, h^v. Wir bestimmen die Geraden, welche auf g und g^v, resp. auf h und h^v senkrecht stehen, so ist nach dem eben bewiesenen Satz der kürzeste Abstand dieser beiden Geraden die Axe der momentanen Schraubenbewegung.

Soll ferner die Normalebene α^v eines Punktes A construirt werden, so ziehen wir durch A zwei Geraden, von denen die eine g und g^v, die andere h und h^v trifft; jede dieser beiden Geraden ist als Complexstral l eine Normale der Bahn von A, also bestimmen sie die Normalebene α^v von A.

In analoger Weise können wir zu jeder Ebene ihren Nullpunkt construiren, d. h. denjenigen Punkt, dessen Normalebene sie ist. Wir verbinden nämlich die Punkte, in denen ε von g und g^v getroffen wird, ebenso die Punkte, in denen sie von h und h^v getroffen wird, so ist jede Verbindungslinie eine Complexgerade l; der Schnittpunkt derselben ist daher der Nullpunkt der Ebene.

6. Das Nullsystem und der lineare Complex sind auch bestimmt, wenn fünf Stralen dieses Complexes gegeben sind. Seien dieselben nämlich l, m, n, p, q. Jeder Stral des Complexes, welcher eine Gerade g trifft, schneidet auch die conjugirte Gerade g^v. Bestimmen wir daher die beiden Geraden, welche von l, m, n, p getroffen werden, so sind dies zwei conjugirte Geraden g und g^v des Nullsystems; ebenso liefern die beiden Geraden h und h^v, welche von l, m, n, q geschnitten werden, ein zweites Paar conjugirter Geraden. Beide Paare bestimmen das Nullsystem. Damit ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Ist das Geradenpaar g, g^v nicht reell, so kann man sich auf folgende Weise ein reelles Paar conjugirter Geraden bestimmen. Betrachten wir die durch l, m, q bestimmte Regelschaar. Ist a irgend eine Gerade der anderen Schaar, die also l, m, q schneidet, so gehört auch a^v zu dieser Schaar, denn da l, m und q die Gerade a treffen, so treffen sie auch a^v. Daraus folgt aber, dass jede Gerade der Regelschaar l, m, q dem linearen Complex angehört. Dasselbe gilt von der durch n, p, q bestimmten Regelschaar. Nun ziehen wir irgend eine Gerade g, welche jede Regelschaar in zwei reellen Punkten schneidet, so ist g eine reelle Gerade, welche von vier Complexstralen getroffen wird, demnach bildet sie mit g^v ein reelles Paar conjugirter Geraden des Nullystems.

Hieraus folgt, dass wir uns stets zwei reelle Paare conjugirter Geraden g, g^v und h, h^v construiren können, wenn fünf Stralen des linearen Complexes gegeben sind. Mittelst dieser Geradenpaare lassen sich alsdann die Constructionen, wie vorstehend angegeben, ausführen.

§ 6. Die von den Ebenen und Geraden des Systems erzeugten Flächen.

1. Wie jeder Punkt des räumlichen Systems eine Bahn durchläuft, so erzeugt jede Ebene desselben eine abwickelbare Fläche. Die momentane Berührungslinie der Ebene und der abwickelbaren Fläche heisst bekanntlich die *Characteristik* der

Ebene; sie ist Schnittlinie zweier unmittelbar auf einander folgenden Lagen der beweglichen Ebene.

Um die Eigenschaften der Characteristiken abzuleiten, wollen wir zunächst wieder auf die Systeme Σ_0, Σ_1, Σ^m zurückgehen. Wir sehen, dass die Gerade e^m der Ebene ε^m diejenige Gerade ist, welche in der Grenzlage in die Characteristik der Ebene ε übergeht; dies ist auch der Grund, weshalb wir sie oben (§ 2, 2) bereits Characteristik von ε^m genannt haben. Wir haben dort bereits bewiesen, dass die Sehnen aller Punkte von e^m in ε^m selbst liegen, dass e^m und e^v sich unter rechtem Winkel kreuzen, und dass e^m von e_0 und e_1 in zwei homologen Punkten E_0 und E_1 geschnitten wird. Der Punkt E^m, welcher ihnen entspricht, ist der Fusspunkt des vom Nullpunkt $F^m = E^v$ auf e^m gefällten Lotes. Daraus folgt, dass e^m selbst Sehne eines ihrer Punkte ist, und zwar desjenigen, welcher senkrecht unter dem Nullpunkt der Ebene ε^m liegt. Gehen wir nun zur Grenze über, so folgt:

Die Characteristik einer Ebene ist dadurch ausgezeichnet, dass die Tangenten der Bahnen ihrer Punkte sämmtlich in der Ebene liegen. Die Characteristik ist selbst Tangente der Bahn eines ihrer Punkte, und zwar desjenigen, welcher senkrecht unter dem Nullpunkt der Ebene liegt. Die Characteristik und die zu ihr conjugirte Gerade kreuzen sich rechtwinklig.

2. Die Characteristik ist die einzige Gerade einer Ebene ε, deren Bahntangenten sämmtlich in ihr liegen; denn es giebt in ε^m nur *ein* Paar zugeordneter Geraden e_0 und e_1. Daher enthält ε ausser ihrer Characteristik keine andere Gerade, deren conjugirte auf ihr senkrecht steht.

Sind daher d und $d^v = e$ zwei conjugirte Geraden, die sich rechtwinklig kreuzen, und legen wir durch d eine zu e normale Ebene δ, so folgt unmittelbar, dass d die Characteristik von δ ist. Der Punkt E, in welchem δ von e getroffen wird, ist der Nullpunkt von δ; denn jede durch d gelegte Ebene hat ihren Schnittpunkt mit e zum Nullpunkt.

Legen wir nun auch durch e eine zu d normale Ebene ε, so folgt ebenso, dass e ihre Characteristik und der Punkt D, in welchem sie d trifft, ihr Nullpunkt ist. Die Ebenen δ

und ε schneiden sich aber in einer Geraden, welche durch D und E geht und auf d und e senkrecht steht; also ist d die Tangente der Bahn von D und e die Tangente der Bahn von e, und es folgt:

Sind d und e zwei conjugirte Geraden, die sich rechtwinklig kreuzen, so ist jede derselben Characteristik derjenigen durch sie gelegten Ebene, welche auf der anderen Geraden senkrecht steht. Jede dieser beiden Geraden trifft die zu ihr senkrechte Ebene im Nullpunkt, und ist Tangente der Bahn dieses Nullpunktes.

Da D und E diejenigen Punkte beider Geraden sind, welche den kürzesten Abstand von einander haben, so können wir auch folgenden Satz aussprechen:

Sind d und e zwei conjugirte Geraden, welche sich rechtwinklig kreuzen, so ist jede von beiden Tangente der Bahn desjenigen Punktes, welcher von der anderen den kürzesten Abstand hat.

Wie oben bewiesen, schneidet die Verbindungslinie der Punkte D und E die Axe der momentanen Schraubenbewegung und steht senkrecht auf ihr. Der Nullpunkt einer beliebigen Ebene ε liegt daher stets auf derjenigen Geraden der Ebene, welche durch ihren Schnittpunkt mit der Axe geht und auf letzterer senkrecht steht.

3. Seien g und g^{v} wieder zwei beliebige conjugirte Geraden des Nullsystems, so construiren wir dasjenige Lot der Ebene ε, welches g und g^{v} trifft. Dasselbe ist ein Stral l des linearen Complexes. Sei L sein Schnittpunkt mit ε, so ist L ein Punkt der Characteristik e von ε; denn da l zu ε normal ist, so liegt die Bahntangente von L in ε selbst, d. h.

Wenn zwei conjugirte Geraden auf eine beliebige Ebene projicirt werden, so schneiden sich ihre Projectionen in einem Punkte der Characteristik dieser Ebene.

Fassen wir den besonderen Fall in's Auge, dass eine der beiden conjugirten Geraden, z. B. g^{v} auf ε senkrecht steht. Dann ist jedes Lot von ε, welches g trifft, als eine Complexgerade l zu betrachten; denn alle diese Lote gehen durch den unendlich fernen Punkt von g^{v}. Daher ist die Projection von g auf ε die Characteristik dieser Ebene; also ergiebt sich:

Ist g eine Gerade, deren conjugirte auf der Ebene ε senkrecht steht, so ist die Projection von g auf ε die Characteristik der Ebene.

Rückt die zu ε normale Gerade g^v in's Unendliche, so wird g ein Durchmesser des Nullsystems, und da alle Durchmesser zu x parallel sind, so folgt:

Die Characteristik einer jeden Ebene ist parallel zur Projection der Axe der momentanen Schraubenbewegung.

Da alle zu ε senkrechten Geraden g^v durch einen und denselben unendlich fernen Punkt hindurchgehen, so liegen ihre conjugirten Geraden g sämmtlich in einer Ebene, und zwar in derjenigen, welche zu ε normal ist und durch die Characteristik e hindurchgeht. Eine dieser Geraden ist e selbst; in der That wissen wir bereits, dass e zu derjenigen auf ε senkrechten Geraden conjugirt ist, welche den Nullpunkt von ε enthält. Ferner befinden sich unter ihnen unendlich viele Durchmesser; dies sind diejenigen Geraden, welche den unendlich fernen auf ε senkrechten Geraden conjugirt sind. Nach der oben (§ 3, 4) eingeführten Bezeichnung können sie auch die zu den Ebenen senkrecht ε adjungirten Durchmesser genannt werden; es folgt daher:

Die Projection irgend eines Durchmessers, welcher einer zur Ebene ε senkrechten Ebene adjungirt ist, giebt die Characteristik von ε.

Legt man durch die Characteristik einer Ebene ε eine zu ihr normale Ebene, so enthält dieselbe alle Durchmesser, welche den auf ε senkrechten Ebenen adjungirt sind.

Ist η eine Ebene, welche der Momentanaxe x parallel ist, so kann ihre Characteristik in noch einfacherer Weise bestimmt werden. Da nämlich die zu x conjugirte Gerade die unendlich ferne Gerade einer zu x senkrechten Ebene ist, so ist x selbst eine Gerade, die zu einer auf η senkrechten Ebene adjungirt ist; d. h.

Die Characteristik einer Ebene η, welche zur Axe der momentanen Schraubenbewegung parallel läuft, ist die Projection dieser Axe auf η.

4. Ausser den Bahnen, welche die Punkte des räumlichen

Systems durchlaufen, und den abwickelbaren Flächen, welche die Ebenen desselben erzeugen, betrachten wir noch die geradlinigen Flächen, welche von den einzelnen Systemgeraden g beschrieben werden.

Um die Eigenschaften derselben streng abzuleiten, gehen wir zunächst wieder auf den Fall endlicher Verschiebungen zurück. Seien also Σ_0 und Σ_1 beliebig gegebene Lagen des räumlichen Systems, so bilden die zugehörigen Systeme Σ^m und Σ^v ein Nullsystem, von dem alle diejenigen Sätze gelten, die wir im vorigen Paragraphen entwickelt haben.

Von den entsprechenden Lagen g_0 und g_1 der Geraden g setzen wir zunächst ausdrücklich fest, dass sie windschief zu einander sind. Sind ferner A, B . . . beliebige Punkte von g, so ist die durch g^m und die Sehne A_0A_1 gelegte Ebene diejenige, welche, wenn die Verschiebungen unendlich klein werden, in die Tangentialebene der von g erzeugten Fläche im Punkt A übergeht. Gleichzeitig wird das auf dieser Ebene in A^m errichtete Lot zur Normale der Fläche im Punkte A.

Diese Lote können wir uns folgendermassen construiren. Wir legen durch g^m irgend eine Ebene α, welche g^v in einem Punkte A^v schneiden möge, so ist A^v der Nullpunkt dieser Ebene. Fällen wir nun von A^v das Lot A^vB^m auf g^m, so ist dasselbe ein Stral l^m des linearen Complexes; die Sehne B_0B_1 des Punktes B^m ist daher senkrecht zu l^m; also ist auch umgekehrt l^m eine Normale der durch g^m und B_0B_1 gehenden Ebene.

Um daher die Gesammtheit derjenigen Geraden zu erhalten, welche in der Grenzlage in die momentanen Normalen der von g erzeugten Fläche übergehen, haben wir von den Punkten von g^v Lote auf g^m zu fällen. Dieselben bilden ein gleichseitiges Paraboloid. Jede Erzeugende desselben ist den Ebenen senkrecht zu g^m parallel, und da sie überdies Complexstral ist, so trifft sie auch den diesen Ebenen adjungirten Durchmesser u^m. Gehen wir nun zur Grenze über, so folgt:

Die Normalen der von einer Systemgeraden g beschriebenen geradlinigen Fläche bilden in jedem Augenblick ein gleichseitiges

Paraboloid, welches die zu g conjugirte Gerade g^v und den den Ebenen senkrecht g adjungirten Durchmesser u enthält.

5. Ist demnach A ein beliebiger Punkt von g, und legen wir durch A und u die Ebene $[Au]$, so enthält dieselbe die Normale der Fläche im Punkte A. Die Tangentialebene der Fläche in diesem Punkt ist daher diejenige durch g gelegte Ebene, welche zur Ebene $[Au]$ normal ist.

Dies setzt uns in den Stand, sofort die momentane Centralebene und den momentanen Centralpunkt der von g erzeugten Fläche zu bestimmen. Bezeichnen wir den unendlich fernen Punkt von g durch G_∞, so ist die Centralebene senkrecht zur Ebene $[uG_\infty]$, d. h. senkrecht zur Ebene, welche durch u geht und zu g parallel ist. Legen wir nun durch g eine zu u parallele Ebene, so steht die Centralebene auch auf ihr senkrecht; die Centralebene ist daher diejenige durch g gehende Ebene, welche zu u, also auch zur Axe der momentanen Schraubenbewegung parallel ist. Diese Ebene ist aber auch parallel zu g^v, also folgt:

Die momentane Centralebene der von g erzeugten geradlinigen Fläche ist in jedem Augenblick der zu g conjugirten Geraden und der Axe der momentanen Schraubenbewegung parallel.

Da die Centralebene zur Axe x parallel läuft, so erhalten wir die Characteristik derselben, indem wir x auf sie projiciren. Der Punkt, in welchem g die Characteristik schneidet, ist aber derjenige Punkt von g, dessen Bahntangente in der Centralebene selbst liegt; d. h. er ist der Centralpunkt von g. Demnach ergiebt sich:

Der Centralpunkt der von g erzeugten geradlinigen Fläche fällt in jedem Augenblick in denjenigen Punkt der Geraden, welcher von der Momentanaxe den kürzesten Abstand hat.

6. Wir haben bisher ausdrücklich angenommen, dass g_0 und g_1 windschief zu einander liegen; beide Geraden können sich aber auch schneiden. Tritt dies ein, so beschreibt die bewegliche Gerade in dem betrachteten Augenblick ein Element einer abwickelbaren Fläche. In diesem Fall verlieren die früher gegebenen Definitionen des Centralpunktes und der Centralebene ihre Bedeutung; wir wollen aber festsetzen, dass

alsdann derjenige Punkt der Geraden ihr Centralpunkt heissen soll, welcher von der conjugirten Geraden, also auch von der Axe der momentanen Schraubenbewegung den kürzesten Abstand hat. Wie der letztbewiesene Satz zeigt, ist dies eine Definition, welche für alle Geraden des räumlichen Systems Giltigkeit hat.

Zwei Geraden von Σ_0 und Σ_1, die sich schneiden, sollen durch d_0 und d_1 bezeichnet werden. Dieselben werden auch von ihrer Mittelgeraden d^m geschnitten; alle drei Geraden liegen daher in einer Ebene, die wir als Ebene von Σ^m durch δ^m bezeichnen. Da δ^m durch d^m geht, so geht auch δ_0 durch d_0 und δ_1 durch d_1; also folgt, dass d^m die Characteristik der Ebene δ^m ist. Gehen wir zur Grenze über, so wird die betrachtete Gerade d Characteristik der Ebene δ, also auch Bahntangente eines Punktes D, und wir können nun folgern, dass der Centralpunkt einer solchen Geraden derjenige Punkt ist, welcher sie selbst zur Bahntangente hat.

Weiss man von einer Geraden des räumlichen Systems, dass sie während der Bewegung eine abwickelbare Fläche beschreibt, so gehört sie in jedem Augenblick zu den eben betrachteten Geraden d. Der Punkt, welchen wir soeben den Centralpunkt genannt haben, ist in diesem Falle der momentane Berührungspunkt mit der Gratlinie der von ihr erzeugten abwickelbaren Fläche.

7. Den vorstehenden Sätzen fügen wir einige elementare Constructionen an, welche sich aus den Sätzen dieses Paragraphen unmittelbar ergeben. Wir gehen wieder davon aus, dass die momentane Bewegung von Σ durch zwei Paare conjugirter Geraden g, g^v und h, h^v gegeben ist.

Um die Characteristik einer Ebene ε zu finden, projiciren wir g, g^v, h, h^v auf ε. Wir bestimmeu den Schnittpunkt der Projectionen von g und g^v resp. von h und h^v; die Verbindungslinie beider Punkte ist die Characteristik von ε.

Ist A ein Punkt einer Geraden g und soll die Normale der von g beschriebenen Fläche construirt werden, so legen wir durch A die zu g senkrechte Ebene, bestimmen in der eben angegebenen Weise den Nullpunkt derselben und verbinden ihn mit A. Diese Verbindungslinie ist die gesuchte Normale.

Soll der Centralpunkt der Geraden g bestimmt werden, so construiren wir die Normalebenen irgend zweier Punkte von g; dieselben schneiden sich in g^{ν} und das gemeinsame Lot von g und g^{ν} trifft g im Centralpunkt. Ueberdies ist die zu diesem Lot senkrechte Ebene die Centralebene.

§ 7. Der Complex der Bahntangenten.

1. Jede Sehne $A_0 A_1$ verbindet zwei entsprechende Punkte von Σ_0 und Σ_1, folglich bildet die Gesammtheit derselben einen tetraedralen Stralencomplex, nämlich das Erzeugniss der beiden congruenten Räume Σ_0 und Σ_1. Derselbe Satz gilt auch für unendlich nahe Lagen von Σ_0 und Σ_1, daher folgt:

Die Gesammtheit der Bahntangenten aller Punkte des räumlichen Systems bildet in jedem Augenblick der Bewegung einen tetraedralen Stralencomplex $\mathfrak{C}^{(2)}$.

Dieser Complex ist identisch mit der Gesammtheit der Characteristiken aller Ebenen des Systems, resp. mit der Gesammtheit derjenigen Geraden desselben, welche im betrachteten Augenblick gerade Elemente abwickelbarer Flächen beschreiben. Denn wir haben bewiesen (§ 5, 2), dass jede Bahntangente d eines Punktes D zugleich Characteristik einer Ebene δ ist und die Eigenschaft besitzt, dass d_0 und d_1 sich schneiden. (§ 5, 6.)

Das Fundamentaltetraeder des von Σ_0 und Σ_1 gebildeten Complexes reducirt sich auf die Axe der zugehörigen Schraubenbewegung und die zu ihr senkrechte unendlich ferne Gerade; denn dies sind die einzigen beiden Geraden, welche Σ_0 und Σ_1 entsprechend gemein haben. Das gleiche gilt also auch von dem Complex der Bahntangenten. Es lässt sich daher erwarten, dass die demselben angehörigen geometrischen Gebilde von ganz specieller Natur sein werden.

Jeder Bewegungsmoment ist durch die augenblickliche Schraubenbewegung vollständig bestimmt, von ihr wird demnach der besondere Character des Complexes $\mathfrak{C}^{(2)}$ einzig und allein abhängen. Um denselben zu erkennen, werden wir bei den Beweisen, wenn nötig, zunächst wieder von beliebigen Systemlagen Σ_0 und Σ_1 ausgehen.

2. Ist d_0 eine Gerade, welche von der entsprechenden Geraden d_1 geschnitten wird, so ist die zugehörige Mittelgerade d^m Characteristik der Ebene $\delta^m = [d_0 d_1]$ von Σ^m; demnach folgt aus § 1, 3 des ersten Capitels, dass die Sehnen aller Punkte von d_0 die sämmtlichen Tangenten einer Parabel bilden, welche d^m zur Scheiteltangente und den Nullpunkt der Ebene δ^m zum Brennpunkt hat. Gehen wir zu unendlich nahen Systemen Σ_0 und Σ_1 über, so ergiebt sich demnach:

Diejenigen Bahntangenten, welche in einer beliebigen Ebene δ liegen, umhüllen in jedem Augenblick eine Parabel, welche die Characteristik der Ebene zur Scheiteltangente und den Nullpunkt der Ebene zum Brennpunkt hat.

Dieser Satz lässt sich auch folgendermassen aussprechen. Ist d irgend eine Gerade des Complexes $\mathfrak{C}^{(2)}$, so bilden die Bahntangenten aller Punkte von d eine Parabel, deren Scheiteltangente d ist, und deren Brennpunkt im Nullpunkt derjenigen Ebene liegt, welche d zur Characteristik hat.

3. Ist g_0 eine Gerade von Σ, welche zur entsprechenden Geraden g_1 windschief liegt, so bilden die zugehörigen Sehnen die eine Regelschaar eines Paraboloids. Auf demselben liegt auch die Mittelgerade g^m. Sind G^m und G^v die Punkte kürzesten Abstandes auf g^m und g^v, und ist l^m die Verbindungslinie dieser Punkte, so ist l^m ein Stral des linearen Complexes, welcher mit dem von Σ^m und Σ^v gebildeten Nullsystem verbunden ist. Er ist daher senkrecht zur Sehne $G_0 G_1$ des Punktes G^m, und da er auch auf g^m senkrecht steht, so folgt, dass er die Normale des Paraboloids im Punkte G^m ist.

Jede Sehne des Paraboloids liegt in einer zu g^v senkrechten Ebene. Als Richtungsebene der Sehnenschaar können wir daher diejenige wählen, welche durch l^m geht und auf g^v senkrecht steht.

Die Richtungsebene der zweiten Regelschaar ist parallel zu den Geraden g_0 und g_1. Wir legen durch l^m und g^m eine Ebene und betrachten sie als eine Ebene δ^m von Σ^m. Da l^m auf der Axe der Schraubenbewegung senkrecht steht, so ist die

Characteristik d^m von δ^m zu l^m normal, also zu g^m parallel. Nun enthält δ^m auch d_0 und d_1, und da Σ_0, Σ_1, Σ^m affine räumliche Systeme sind, so ist d_0 parallel g_0 und d_1 parallel g_1; d. h. δ^m ist die Richtungsebene der zweiten Regelschaar.

Beide Richtungsebenen schneiden sich in der Geraden l^m. Dieselbe ist aber, wie eben bewiesen, Normale des Paraboloids im Punkte G^m, folglich ist sie die Hauptaxe und G^m der Scheitel des Paraboloids. Gehen wir nun zur Grenze über und beachten, dass dabei G^m zum Centralpunkt von g wird, so ergiebt sich:

Die Tangenten der Bahnen aller Punkte einer Geraden g, welche nicht dem Complex $\mathfrak{C}^{(2)}$ angehört, bilden in jedem Augenblick die eine Regelschaar eines Paraboloids. Dasselbe hat den Centralpunkt von g zum Scheitel, und das von demselben auf die Axe der momentanen Schraubenbewegung gefällte Lot zur Hauptaxe. Die Richtungsebene der Bahntangenten steht auf der zu g conjugirten Geraden g^v senkrecht.

4. Jede Gerade g ist die Axe eines Ebenenbüschels. Die beiden entsprechenden Ebenenbüschel von Σ_0 und Σ_1, deren Axen g_0 und g_1 sind, bestimmen im Allgemeinen eine Regelschaar eines Hyperboloids. Jede Schnittlinie von zwei homologen Ebenen ε_0 und ε_1 beider Büschel ist eine Erzeugende desselben; sie geht in der Grenze in die Characteristik der Ebene ε über.

Mit Hilfe der Sätze, welche wir über die Characteristiken früher aufgestellt haben, ist es möglich, die besondere Natur des Hyperboloids direct zu erkennen, ohne dass es nötig wäre, wieder von beliebig gewählten Systemen Σ_0 und Σ_1 auszugehen.

Von der Geraden g soll zunächst festgesetzt werden, dass sie nicht dem Complex der Bahntangenten angehört. Ist e wieder die Characteristik einer Ebene ε des Büschels, so enthält die Ebene η, welche durch e geht und auf ε senkrecht steht, alle diejenigen Durchmesser des Nullsystems, welche den zu ε normalen Ebenen adjungirt sind (§ 5, 3), also auch sicher den Durchmesser u adjungirt zu derjenigen Ebene, welche auf g selbst senkrecht steht. Dies gilt aber für jede Ebene des Büschels g; d. h. die Ebenen η, welche in den Characteristiken e normal zu den Ebenen ε errichtet werden, enthalten sämmtlich eine und dieselbe Gerade u. Jede Characteristik ist daher Schnittlinie zweier zu einander normalen Ebenen, von denen die eine durch u, die andere durch g geht.

Von zwei Ebenenbüscheln, deren entsprechende Ebenen senkrecht auf einander stehen, lässt sich zeigen, dass sie projectivisch sind. Für den speciellen Fall, dass die Axen der Büschel sich schneiden, ist dies bereits Cap. II, § 1 gezeigt worden; wir könnten den allgemeinen Satz daraus folgern, ziehen aber vor, einen selbständigen Beweis dafür beizubringen. Sei ε_g irgend eine durch g gehende Ebene. Wir legen durch g einen zweiten Ebenenbüschel von Ebenen ε_g', so dass ε_g' auf ε_g senkrecht steht, so sind beide Büschel einander congruent. Eine beliebige zu g normale Ebene α schneidet den Büschel der Ebenen ε_g' in einem Büschel von Stralen e_g' und den Büschel der durch u gehenden Ebenen ε_u in den Stralen e_u. Nun ist aber stets ε_g' parallel zu ε_u, also auch e_g' parallel e_u; also liegen die beiden Stralenbüschel perspectivisch zu derselben unendlich fernen Punktreihe. Demnach sind die Büschel der Ebenen ε_u und ε_g', also auch die Büschel der Ebenen ε_u und ε_g zu einander projectivisch.

Mit Rücksicht darauf, dass das betrachtete Hyperboloid durch zwei projectivische Büschel erzeugt werden kann, deren entsprechende Ebenen senkrecht auf einander stehen, soll dasselbe *orthogonales Hyperboloid* genannt werden. Alsdann ergiebt sich:

Die Characteristiken aller Ebenen, welche durch eine beliebige Gerade g des räumlichen Systems hindurchgehen, bilden in jedem Augenblick im Allgemeinen ein orthogonales Hyperboloid. Dasselbe kann durch zwei Ebenenbüschel erzeugt werden, deren entsprechende Ebenen senkrecht auf einander stehen. Der eine derselben hat g zur Axe, während die Axe des andern der zu den Ebenen senkrecht g adjungirte Durchmesser u ist.[24])

5. Wie der orthogonale Kegel (Cap. II, § 1), so besitzt auch das orthogonale Hyperboloid die Eigenschaft, dass seine Kreisschnittebenen auf je einer seiner Erzeugenden senkrecht stehen, und zwar sind dies die Geraden g und u. Die eben

betrachtete zu g normale Ebene α schneidet nämlich die Ebene ε_g in einem zu e_g' senkrechten Stral e_g, und da e_g' zu e_u parallel ist, so stehen auch e_u und e_g senkrecht auf einander. Ihr Schnittpunkt ist ein Punkt des Hyperboloids. Nun geht e_g stets durch den Punkt (εg) und e_u stets durch (εu), also ist die Schnittcurve der Ebene α mit dem Hyperboloid ein Kreis, dessen Durchmesser die Punkte (εg) und (εu) zu Endpunkten hat. Das analoge gilt von den zu u normalen Ebenen, und es folgt:

Das orthogonale Hyperboloid wird von jeder zu g oder u senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten.

Für jede Ebene des Büschels giebt die Projection des Durchmessers u die Characteristik. Zwei unter ihnen wollen wir besonders betrachten, nämlich die Ebene μ, welche zu x parallel ist, und die zu ihr senkrechte Ebene ν. Die Characteristik m der Ebene μ ist parallel zu u, und die Characteristik n der Ebene ν ist parallel zu g, also sind die Ebenen $[gm]$ und $[nu]$ einander parallel. Beide Ebenen sind überdies Tangentialebenen des Hyperboloids in den Punkten (gm), resp. (nu).

Sei nun l das gemeinsame Lot von g und x. Da es in einer zu g senkrechten Ebene liegt, so trifft es die unendlich ferne Gerade derselben, und da es ein Stral des linearen Complexes ist, so trifft es auch die conjugirte dieser unendlich fernen Geraden, d. h. den Durchmesser u. Die Punkte (gm) und (nu) liegen mithin beide auf l. Die Ebenen $[gm]$ und $[nu]$ stehen aber senkrecht auf l, folglich ist l eine Hauptaxe des Hyperboloids, und zwar diejenige, welche den Kreisschnittebenen parallel läuft; d. h.

Der kürzeste Abstand von g und u ist eine Hauptaxe des Hyperboloids, und zwar diejenige, welcher die beiden Kreisschnittebenen parallel sind.

Der eine Scheitelpunkt dieser Hauptaxe fällt sonach in den Centralpunkt von g.

6. Wenn die Axe g des Ebenenbüschels gegen die Axe der Schraubenbewegung rechtwinklig geneigt ist, so geht das Hyperboloid in ein gleichseitiges Paraboloid über. Die Characteristik einer Ebene ist nämlich parallel zur Projection der

Axe der Schraubenbewegung; also stehen die Characteristiken aller Ebenen des Büschels auf g senkrecht. Der Scheitelpunkt des Paraboloids ist wiederum der Centralpunkt von g. Umgekehrt ist ersichtlich, dass, wenn in einem Ebenenbüschel die Characteristik einer Ebene auf der Axe g senkrecht steht, g und x sich rechtwinklig kreuzen müssen; d. h. alsdann stehen die Characteristiken aller Ebenen auf g senkrecht.

Da dies in jedem Augenblick der Bewegung gilt, so erhalten wir gelegentlich den folgenden Satz:

Wenn ein Ebenenbüschel sich so bewegt, dass die Characteristik einer Ebene stets auf der Axe des Büschels senkrecht steht, so gilt dies von den Characteristiken aller Ebenen.

7. Wenn die Axe des Ebenenbüschels dem Complex der Bahntangenten angehört, — ein Fall, den wir bisher direct ausgeschlossen hatten —, so reducirt sich das Hyperboloid auf einen orthogonalen Kegel. Bezeichnen wir eine derartige Gerade nämlich wieder mit d, und den Punkt, dessen Bahntangente sie ist, mit D, so ist D der Nullpunkt der zu d senkrechten Ebene; also geht der zu dieser Ebene adjungirte Durchmesser u ebenfalls durch D. Die Geraden d und u schneiden sich daher, und die Ebenenbüschel, deren Axen sie sind, erzeugen einen orthogonalen Kegel, welcher D zum Scheitel hat.

Jede Ebene, welche durch d geht, hat mit dem Kegel zwei Geraden gemein, nämlich d und ihre Characteristik. Daraus folgt, dass diejenige Ebene, deren Characteristik d selbst ist, den Kegel längs d berührt. Auch jede durch u gehende Ebene schneidet den Kegel noch in einer zweiten Geraden, mit Ausnahme derjenigen, welche auf der von d und u gebildeten Hauptebene senkrecht steht. Diese letztere ist daher Tangentialebene des Kegels längs v; sie enthält überdies die Axe der momentanen Schraubenbewegung. Demnach folgt:

Ist eine Gerade d Tangente der Bahn eines Punktes D, so bilden die Characteristiken aller durch sie gehenden Ebenen in jedem Augenblick einen orthogonalen Kegel. Die Axen der orthogonalen Ebenenbüschel, durch welche er erzeugt wird, sind d und der zu den Ebenen senkrecht d adjungirte Durchmesser u.

Der Scheitel des Kegels ist der Punkt D. Die Ebene, deren Characteristik d ist, berührt ihn längs d, und die ihn längs u berührende Tangentialebene enthält die Axe der momentanen Schraubenbewegung.

Diesem Satz lässt sich auch folgende Form geben:

In dem Complex $\mathfrak{C}^{(2)}$ bilden alle durch einen beliebigen Punkt D gehenden Complexstralen einen orthogonalen Kegel. Die Axen der ihn erzeugenden orthogonalen Büschel sind die Bahntangente d von D, und der zur Normalebene des Punktes D adjungirte Durchmesser.

Ist endlich die Gerade des räumlichen Systems ein Durchmesser v, so ist jede durch u gelegte Ebene μ zu x parallel, und die Characteristik m ist daher die Projection von x auf μ. Jede Characteristik ist demnach Schnittlinie von zwei senkrechten Ebenen, deren Axen die einander parallelen Geraden x und v sind. Die Gesammtheit der Characteristiken bildet somit einen Kreiscylinder, welcher die Ebene $[vx]$ zur Durchmesserebene hat.

8. Jede Gerade des räumlichen Systems beschreibt eine geradlinige Fläche. Auf ihr giebt es in jedem Augenblick einen ausgezeichneten Punkt, nämlich den Centralpunkt; derselbe ist (§ 6, 5) derjenige Punkt der Geraden, welcher von der Axe der momentanen Schraubenbewegung den kürzesten Abstand hat. Wir wollen bestimmen, welche Fläche von den Centralpunkten aller Geraden eines Stralenbündels gebildet wird.

Sei D der Mittelpunkt des Stralenbündels und u der durch ihn hindurchgehende Durchmesser. Wir betrachten denjenigen Ebenenbüschel, dessen Axe u ist. Sei μ eine beliebige Ebene dieses Büschels, so schneidet sie den Stralenbündel in einem Stralenbüschel, dessen Mittelpunkt A ist. Da μ zu x parallel ist, so ist der Centralpunkt irgend einer Geraden g dieses Büschels ihr Schnitt mit der Projection m von x auf ε; folglich liegen die Centralpunkte aller Geraden des Stralenbüschels auf m. Nun ist m die Characteristik der Ebene μ, folglich bilden die den sämmtlichen Ebenen μ zugehörigen Geraden m, wie eben bewiesen, einen Kreiscylinder, und es folgt:

Die Centralpunkte der Flächen, welche von den durch einen beliebigen Punkt D gehenden Geraden beschrieben werden, liegen in jedem Augenblick auf einem Kreiscylinder, welcher die Axe der momentanen Schraubenbewegung enthält und den Abstand des Punktes D von derselben zum Durchmesser hat.

Unter den durch den Punkt D gehenden Geraden sollen diejenigen einer besonderen Betrachtung unterworfen werden, welche dem Complex zweiter Ordnung $\mathfrak{C}^{(2)}$ angehören. Jede derselben ist die Tangente ihres Centralpunktes. Die Centralpunkte dieser Geraden können daher als diejenigen Punkte des räumlichen Systems definirt werden, deren Bahntangenten sämmtlich nach einem und demselben Punkte des Raumes gerichtet sind.

Die Geraden des Complexes $\mathfrak{C}^{(2)}$, welche durch D hindurch gehen, bilden einen orthogonalen Kegel; ihre Centralpunkte liegen daher auf dem Durchschnitt des Cylinders mit diesem Kegel. Nun enthalten beide Flächen den durch D gehenden Durchmesser u; sie haben daher ausserdem eine Raumcurve dritter Ordnung c^3 gemein. Die Ebene $[xu]$ ist eine Durchmesserebene des Cylinders, während sie den orthogonalen Kegel längs u berührt; folglich schneiden sich beide Flächen in ihrer gemeinschaftlichen Erzeugenden rechtwinklig. Demnach ergiebt sich:

Die sämmtlichen Punkte des Systems Σ, deren Bahnen nach einem festen Punkte D des Raumes gerichtet sind, liegen in jedem Augenblick auf einer Raumcurve dritter Ordnung c^3. Dieselbe ist der Durchschnitt eines orthogonalen Kegels und eines Kreiscylinders, welche den durch D gehenden Durchmesser u gemein haben und sich in ihm rechtwinklig schneiden. Die Ebene, welche den Cylinder längs u berührt, ist Durchmesserebene des Kegels, und die Ebene, welche den Kegel längs u berührt, ist eine Durchmesserebene des Cylinders.

9. Jede zur Momentanaxe normale Ebene schneidet den Cylinder in einem Kreis, und da u eine der beiden Kegelkanten ist, auf welcher die Kreisschnittebenen senkrecht stehen, so schneidet sie auch den Kegel in einem Kreise. Beide Kreise gehen durch denselben Punkt von u; aber nur ihre übrigen

Schnittpunkte sind Punkte der Raumcurve c^3. Zwei davon sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der auf x senkrechten Ebenen. Diese liegen daher auf c^3, und es folgt:

Die Raumcurve c^3 enthält die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der zur Axe der Schraubenbewegung senkrechten Ebenen.

Sie soll aus diesem Grunde als *cubischer Kreis* bezeichnet werden.

Der reelle Punkt, welchen c^3 mit der unendlich fernen Ebene gemein hat, ist der unendlich ferne Punkt X_∞ der Momentanaxe. Als Gerade des Kreiscylinders ist dieselbe eine Sehne von c^3. Nun ist die Ebene $[xu]$ eine Tangentialebene des orthogonalen Kegels, folglich kann die Axe x von keinem Stral des Kegels ausser von u getroffen werden. Sie enthält demnach ausser X_∞ keinen weiteren Punkt von c^3, d. h. sie ist die Asymptote dieser Curve.

Wir erhalten die Schmiegungsebene eines beliebigen Punktes P von c^3, indem wir seine Tangente bestimmen, und durch sie die Tangentialebene des Kegels legen, durch welchen c^3 von P aus projicirt wird. Die Asymptotenebene ist daher diejenige Ebene, welche die Asymptote enthält und den Kreiscylinder berührt; mithin folgt:

Die Axe der momentanen Schraubenbewegung ist die Asymptote des cubischen Kreises; seine Asymptotenebene ist senkrecht zu der durch D und die Axe gelegten Ebene.

10. Jede zu x senkrechte Ebene α schneidet den orthogonalen Kegel in einem Kreis, und jeden Stral a desselben in einem Punkt A_α. Ist d wieder die Bahntangente des Punktes D, so ist die Gerade $D_\alpha U_\alpha$ der Durchmesser dieses Kreises. Ordnen wir je zwei Punkte A_α und B_α des Kreises einander zu, deren Verbindungslinie auf dem Durchmesser $D_\alpha U_\alpha$ senkrecht steht, so bilden alle diese Punktepaare eine Involution, deren Centrum der unendlich ferne Punkt der auf $D_\alpha U_\alpha$ lotrechten Geraden ist. Die Doppelpunkte dieser Involution sind D_α und U_α. Mithin sind die Stralen a und b des orthogonalen Kegels ebenfalls involutorisch gepaart, und zwar so, dass d und u die Doppelstralen sind.

Da der Kegel perspectivisch zur Raumcurve c^3 liegt, so bestimmt er auf ihr eine Punktinvolution, welche D und den unendlich fernen Punkt X_∞ zu Doppelpunkten hat. Zwei conjugirte Punkte derselben sollen *conjugirte Punkte des cubischen Kreises* genannt werden. Nun ist die Momentanaxe x eine Tangente von c^3, also wird die Punktinvolution von x aus durch einen involutorischen Ebenenbüschel projicirt. Die Doppelebenen desselben sind die Durchmesserebenen $[xu]$ und die zu ihr senkrechte Ebene; folglich bilden je zwei conjugirte Ebenen desselben mit der Durchmesserebene gleiche Winkel.

Je zwei conjugirte Punkte A und B des cubischen Kreises c^3 haben also die Eigenschaft, dass die Ebenen, welche sie mit x verbinden, gegen die Ebene $[xu]$ gleich geneigt sind. Von den Kegelstralen a und b, auf denen A resp. B liegen, wissen wir, dass sie gleiche Neigung gegen die Ebene $[du]$, also auch gegen die zu derselben senkrechte Ebene $[xu]$ besitzen, und daraus dürfen wir schliessen, dass die Punkte A und B von D gleichen Abstand haben.

Nennen wir die Ebene $[xu]$ *die Hauptebene*, und den Punkt *D den Scheitel* des cubischen Kreises, so erhalten wir demnach:

Je zwei conjugirte Punkte des cubischen Kreises sind vom Scheitel gleichweit entfernt, und die Ebenen, welche sie mit der Axe der momentanen Schraubenbewegung verbinden, bilden gleiche Winkel mit der Hauptebene.

Diese Sätze geben ein anschauliches Bild von der Lage und dem Verlauf des cubischen Kreises auf dem Cylinder.

11. Der orthogonale Kegel wird aus den beiden conjugirten Stralen a und b durch congruente Ebenenbüschel projicirt (II, § 1, 4); dasselbe gilt daher auch von den Punkten des cubischen Kreises. Wir wählen nun die beiden conjugirten Punkte A und B zu Mittelpunkten von Stralenbündeln und betrachten c^3 als Erzeugniss derselben; damit sind beide Bündel projectivisch auf einander bezogen. Die Stralen a und b, welche sich im Punkt D schneiden, sind entsprechende Stralen beider Bündel; folglich sind die beiden congruenten Ebenenbüschel, durch welche c^3 von a und b aus projicirt wird, entsprechende Büschel der beiden Stralenbündel. Die zur Schraubenaxe parallelen Geraden u_a und u_b der Bündel sind, da sie

durch X_∞ gehen, auch zwei entsprechende Geraden, und aus ihnen werden alle Geraden des Cylinders, d. h. aber alle Punkte von c^3 ebenfalls durch zwei congruente Ebenenbüschel projicirt.

Die beiden Bündel haben daher die Eigenschaft, dass zwei Ebenenbüschel des einen den homologen des andern congruent sind; also sind sie, wie leicht folgt, selbst congruent, d. h.

Der cubische Kreis wird aus je zwei conjugirten Punkten durch congruente Stralenbündel projicirt.

Hieraus fliesst die weitere Folgerung, dass der cubische Kreis aus jedem seiner Punkte durch einen orthogonalen Kegel projicirt wird.

12. Der cubische Kreis hatte sich zunächst als Ort der Centralpunkte für diejenigen durch D gehenden Geraden ergeben, welche dem Complex der Bahntangenten angehören. Diese Geraden sind diejenigen Stralen e des Bündels D, die momentan Elemente abwickelbarer Flächen beschreiben; für jeden derselben schneiden sich die unendlich nahen Geraden e_0 und e_1. Der cubische Kreis ist daher auch das Erzeugniss der beiden auf einander folgenden Bündel D_0 und D_1. Jede Secante desselben ist daher Characteristik einer Ebene des Bündels D und es folgt:

Die Characteristiken aller Ebenen, welche durch irgend einen Punkt D des Raumes hindurchgehen, bilden in jedem Augenblick die sämmtlichen Secanten eines cubischen Kreises, welcher D zum Scheitel hat.

Da der cubische Kreis aus je zwei conjugirten Punkten durch congruente Stralenbündel projicirt wird, so ist nunmehr der Schluss erlaubt, dass die vorstehenden Sätze in analoger Form auch für beliebige Systemlagen Σ_0 und Σ_1 Geltung besitzen. Wir sind daher hier im Stande, aus den für unendlich kleine Bewegungen erwiesenen Sätzen die entsprechenden für beliebige endliche Verschiebungen zu entnehmen.

Sind also A_0 und A_1 die Mittelpunkte zweier entsprechenden Bündel von Σ_0 und Σ_1, so bestimmen wir die Axe x der Schraubenbewegung und construiren denjenigen Kreiscylinder, welcher durch x, A_0 und A_1 geht. Die Durchmesserebene desselben, welche x enthält, ist die Hauptebene des cubischen

Kreises. Sind ferner X_0 und X_1 die Fusspunkte der von A_0 und A_1 auf x gefällten Lote, so trifft $A^m X^m$ den Scheitel D des cubischen Kreises. Damit ist auch der orthogonale Kegel bestimmt, welcher D zur Spitze hat.

13. Den Punkten des räumlichen Systems, deren Bahntangenten nach einem beliebigen Punkt D gerichtet sind, stehen als duale Gebilde diejenigen Ebenen gegenüber, deren Characteristiken in einer Ebene ε liegen, ebenso den Characteristiken aller durch D gehenden Ebenen die Bahntangenten aller Punkte von ε. Um diese Gebilde zu untersuchen, ist es zweckmässig, zunächst wieder von beliebig gewählten Systemen Σ_0 und Σ_1 auszugehen.

Seien also ε_0 und ε_1 die entsprechenden Lagen einer Ebene ε von Σ, so bilden die Sehnen aller Punkte von ε ein Stralensystem S^3 dritter Ordnung und erster Classe, und jede dieser Sehnen geht, wenn ε_0 und ε_1 beliebig nahe an einander rücken, in die Bahntangente eines Punktes von ε über. Ferner erzeugen ε_0 und ε_1 einen Ebenenbüschel dritter Ordnung E^3, welcher die unendlich ferne Ebene enthält. Die Stralen von S^3, d. h. die Sehnen $A_0 A_1$, sind die Axen dieses Ebenenbüschels. Derselbe ist identisch mit der Gesammtheit der Schmiegungsebenen einer cubischen Parabel. Jede derselben geht, wenn die Verschiebung von Σ unendlich klein wird, in eine der Ebenen über, deren Characteristiken in ε liegen. Die besonderen Eigenschaften des Ebenenbüschels E^3 und des mit ihm zusammenhängenden Stralsystems S^3 sollen im Folgenden genauer untersucht werden.

Jede Ebene von E^3 ist Verbindungsebene zweier entsprechenden Geraden von ε_0 und ε_1. Nun enthält die Mittelebene ε^m die homologen Geraden e_0 und e_1, in denen sie ε_0 und ε_1 schneidet, es folgt daher zunächst, dass ε^m dem Ebenenbüschel E^3 angehört.

Ferner ergiebt sich, dass jede Ebene α von E^3 von der Gesammtheit aller Ebenen in einer Parabel geschnitten wird. Denn da die unendlich ferne Ebene zu den Ebenen von E^3 gehört, so hat der in α liegende Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade von α zur Tangente.

14. Seien X_0, X_1, X^m jetzt die Schnittpunkte der Axe der Schraubenbewegung mit ε_0, ε_1, ε^m. Wir betrachten diejenigen Stralenbüschel von ε_0, ε_1 und ε^m, deren Mittelpunkte resp. X_0, X_1 und X^m sind. Es ist leicht zu sehen*), dass sowohl die drei Geraden

$$n_0, \; n_1, \; n^m,$$

welche auf der Axe der Schraubenbewegung senkrecht stehen, als auch die zu ihnen senkrechten Stralen

$$p_0, \; p_1, \; p^m,$$

d. h. die Projectionen von x auf ε_0, ε_1 und ε^m entsprechende Stralen der Büschel sein müssen.

Diejenigen Sehnen, d. h. diejenigen Stralen des Stralsystems S^3, welche die entsprechenden Punkte von p_0 und p_1 verbinden, bilden (§ 7, 3) ein Paraboloid $\mathfrak{P}_p^{(2)}$, welches p^m enthält und den Punkt $(xp^m) = X^m$ zum Scheitel hat. Die Hauptaxe des Paraboloids ist die Gerade n^m und die Richtungsebenen seiner Regelschaaren sind die Ebenen $[xn^m]$ und $[p^m n^m] = \varepsilon^m$.

Von derjenigen Regelschaar, welcher p_0, p_1, p^m angehören, liegt in jeder Ebene α von E^3 eine Gerade, und zwar die Gerade p_α, welche p_0 und p_1 entspricht. Alle Geraden p_α werden von den Sehnen, welche die andere Regelschaar bilden, in ähnlichen Punktreihen geschnitten; auf je zwei Geraden p_α und p_β, welche mit der Richtungsebene $[xn^m]$ gleiche Winkel bilden, sind die Punktreihen sogar congruent. Die unendlich ferne Gerade der Ebene ε^m wird bekanntlich von allen Paaren p_α und p_β in einer Punktinvolution geschnitten, deren Doppelpunkte die unendlich fernen Punkte von p^m und n^m sind. Durch die Geraden p_α des Paraboloids wird diese Punktinvolution aber so auf x projicirt, dass X^m und der unendlich ferne Punkt X_∞ die Doppelpunkte der auf x liegenden Involution sind. Je zwei conjugirte Punkte derselben sind daher von X^m gleichweit entfernt, und es folgt:

Je zwei Geraden des Paraboloids $\mathfrak{P}_p^{(2)}$, die von den Sehnen in congruenten Punktreihen geschnitten werden, sind gleich geneigt gegen die Ebene $[xp^m]$ und treffen die Axe der Schraubenbewegung in zwei Punkten, deren Mitte X^m ist.

*) Ein ausführlicher Beweis befindet sich § 11, 6.

Das Paraboloid $\mathfrak{P}_n^{(2)}$, welches von den congruenten Punktreihen n_0 und n_1 erzeugt wird, hat ebenfalls den Punkt X^m zum Scheitel. Jede Ebene α von E^3 enthält die Erzeugende n_α derjenigen Regelschaar, welcher n_0 und n_1 angehören. Da n_0 und n_1 auf x senkrecht stehen, so ist das Paraboloid gleichseitig und jede Gerade n_α steht auf x senkrecht. Die Richtungsebene der auf $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ liegenden Sehnen ist die Ebene $[xp^m]$. Für je zwei Erzeugende der Schaar n_α, die von den Sehnen in congruenten Punktreihen getroffen werden, lassen sich daher dieselben Folgerungen ziehen, wie für die analogen Erzeugenden p_α und p_β von $\mathfrak{P}_p^{(2)}$; d. h.

Je zwei Geraden des Paraboloids $\mathfrak{P}_n^{(2)}$, die von den Sehnen in congruenten Punktreihen getroffen werden, stehen auf der Axe der Schraubenbewegung senkrecht, treffen dieselbe in zwei Punkten, deren Mitte X^m ist, und bilden mit der Ebene $[xp^m]$ gleiche Winkel.

15. Die Regelschaar p_α von $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ und die Regelschaar n_α von $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ liegen beide perspectivisch zur Punktreihe X_α. Daher sind die Ebenenbüschel, durch welche die beiden Regelschaaren aus x projicirt werden, zu einander projectivisch. Diese Ebenenbüschel haben aber die besondere Lage, dass drei Ebenen des einen, nämlich

$$[xp_0],\ [xp_1],\ [xp^m]$$

auf den entsprechenden des andern, nämlich auf

$$[xn_0],\ [xn_1],\ [xn^m]$$

senkrecht stehen; daher stehen je zwei entsprechende Ebenen senkrecht auf einander; d. h. es ist auch p_α senkrecht zu n_α und p_β senkrecht zu n_β. Demnach sind die Winkel (xp_α) und (xp_β) die Neigungswinkel der Ebenen α und β gegen x; d. h.

Je zwei Ebenen von E^3, welche die Axe der Schraubenbewegung in zwei von X^m gleichweit entfernten Punkten schneiden, bilden gleiche Winkel mit derselben. Die Projectionen der Axe auf den Ebenen des Büschels sind entsprechende Stralen aller Ebenen.

Da alle Geraden p_α der Ebene ε^m parallel sind, und p^m die Projection von x auf ε^m ist, so folgt noch, dass ε^m den kleinsten Winkel mit x bildet. Es kann daher keine reelle Ebene von E^3 geben, welche x enthält; d. h. x ist eine uneigentliche Axe des Ebenenbüschels.

Beachten wir ferner, dass p_α und p_β, ebenso n_α und n_β von den Stralen von S^3 in congruenten Punktreihen getroffen werden, so folgt:

Je zwei Ebenen von E^3, die mit der Axe der Schraubenbewegung gleiche Winkel bilden, werden von den Stralen des Stralsystems S^3 in congruenten ebenen Systemen geschnitten.

Die Axe der Schraubenbewegung hat demnach eine bevorzugte Lage zum Ebenenbüschel E^3. Wir werden sie daher *die Hauptaxe* von E^3 nennen. Ebenso soll ε^m die *Hauptebene* des Ebenenbüschels heissen. Die Hauptaxe kann rein geometrisch auch als Verbindungsebene derjenigen zwei entsprechenden Punkte von ε_0 und ε_1 definirt werden, welche den kürzesten Abstand von einander haben, und die Hauptebene ist diejenige Ebene, welche mit der Hauptaxe den kleinsten Winkel bildet.

Wir sahen bereits, dass x von der Gesammtheit der Ebenen von E^3 in einer involutorischen Punktreihe getroffen wird, deren Doppelpunkte X^m und X_∞ sind. Dies giebt noch Veranlassung zu folgendem Satz:

Ordnen wir je zwei Ebenen von E^3 einander zu, die von den Sehnen in congruenten ebenen Systemen getroffen werden, so bilden alle diese Ebenenpaare eine Involution, deren Doppelelemente die Hauptebene ε^m und die unendlich ferne Ebene sind. Jede Sehne A_0A_1 wird von ihnen in einer Punktinvolution geschnitten, deren Doppelpunkte A^m und der unendlich ferne Punkt A_∞ sind.

Auf Grund der vorstehenden Sätze ist es nicht schwer, uns ein anschauliches Bild von der Verteilung der Ebenen von E^3 zu verschaffen. Sind nämlich X_α und X_β zwei gleich weit von X^m entfernte Punkte, so sind die durch sie gehenden Ebenen α und β dadurch bestimmt, dass sie erstens gleiche Winkel mit x einschliessen, und zweitens die Projectionen von x auf α und β gleiche Neigung gegen die Ebene $[xp^m]$ haben, d. h. gegen die Ebene, welche durch x geht und auf ε^m senkrecht steht. Ferner bildet ε^m den kleinsten Neigungswinkel mit x und die Neigungswinkel der Ebenen α nehmen stetig zu, je weiter sich X_α von X^m entfernt. Die unendlich ferne Ebene ist schliesslich als diejenige Ebene zu betrachten, welche den grössten Neigungswinkel besitzt, und auf der Axe der Schraubenbewegung senkrecht steht.

Je zwei Ebenen von E^3 liegen symmetrisch in Bezug auf die Ebenen $[xp^m]$ und ε^m, wir wollen daher E^3 den *symmetrischen Ebenenbüschel* dritter Ordnung nennen.

16. Wir wenden uns nun zur Untersuchung des von den Sehnen A_0A_1 gebildeten Stralsystems. Wir bezeichnen die Sehne A_0A_1 im Folgenden durch s_a.

Seien s_a und s_b irgend zwei dieser Sehnen, welche mit der Axe der Schraubenbewegung denselben Winkel bilden. Die Ebenen ε_0, ε_1, α, β von E^3 bestimmen auf ihnen die Punktreihen

$$A_0,\ A_1,\ A_\alpha,\ A_\beta\ \ldots,\ \text{resp.}\ B_0,\ B_1,\ B_\alpha,\ B_\beta\ \ldots$$

Aus dem geometrischen Character der Schraubenbewegung folgt, dass die Projectionen von A_0A_1 und B_0B_1 auf x einander gleich sind, und zwar gleich X_0X_1. Nun sind aber α und β congruente ebene Systeme, für welche x die Axe der zugehörigen Schraubenbewegung ist, also sind auch die Projectionen von $A_\alpha A_\beta$ und $B_\alpha B_\beta$ auf x einander gleich, und zwar gleich $X_\alpha X_\beta$. Beachten wir nun, dass jede Sehne s_a von den Ebenenpaaren α, β in conjugirten Punkten einer Involution geschnitten wird, welche A^m und A_∞ zu Doppelpunkten hat, und dass s_a und s_b gleiche Winkel mit x bilden, so folgt, dass die Punktreihen, in denen s_a und s_b von den Ebenen des Büschels E^3 getroffen werden, einander congruent sind; d. h.

Alle Sehnen des Stralsystems, welche mit der Hauptaxe denselben Winkel bilden, werden von den Ebenen des Büschels E^3 in congruenten Punktreihen getroffen.

Diesen Satz können wir benutzen, um den Ebenenbüschel und sein Stralsystem in einfacher Weise auf einen Stralenbündel abzubilden.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Allgemeinen drei Stralen s_a. Dies gilt also auch für jeden unendlich fernen

Punkt P_∞. Da ε_∞ eine Ebene von E^3 ist, so liegen zwei dieser Stralen in ε_∞; es giebt daher nur eine im Endlichen liegende Sehne s_a, die durch P_∞ geht, d. h. eine gegebene Richtung hat.

Legen wir nun durch einen beliebigen Punkt O' des Raumes einen Stralenbündel von Stralen s_a', so giebt es zu jeder Sehne s_a von S^3 *einen* ihr parallelen Stral s_a' von O' und umgekehrt. Sehen wir also von den in ε_∞ liegenden Stralen ab, so folgt, dass sich das Stralsystem S^3 eindeutig auf einen Stralenbündel so abbilden lässt, dass jedem Stral s_a der ihm parallele Stral s_a' des Bündels entspricht und umgekehrt.

Diese Abbildung lässt sich noch weiter durchführen. Die Projection der Strecke A_0A^m auf x ist nämlich für jede Sehne s_a gleich der Strecke X_0X^m. Beziehen wir nun die Punktreihe, in welcher eine jede Sehne s_a von den Ebenen $\alpha, \beta \ldots$ getroffen wird, congruent auf die Punktreihe des parallelen Strales s_a', und zwar so, dass dem Punkt A^m von s_a der Punkt O' von s_a' entspricht, also auch dem Punkt X^m von x der Punkt O' von x', so folgt sofort, dass den sämmtlichen Punkten $A_\alpha B_\alpha \ldots$ einer Ebene α die Punkte $A_\alpha' B_\alpha'$ einer Ebene α' entsprechen, welche durch X_α' geht und auf x' senkrecht steht. Der Gesammtheit der Ebenen $\alpha, \beta \ldots$ von E^3 entspricht also ein Büschel paralleler Ebenen $\alpha', \beta' \ldots$, welche auf x' senkrecht stehen.

Sei nun g_α eine beliebige Gerade von α, so bilden die sie schneidenden Sehnen s_a ein Paraboloid, welches mit ε^m die Gerade g^m gemein hat. Die entsprechenden Stralen s_a' bilden daher einen ebenen Stralenbüschel. Jeder Punkt A_α von g_α liegt sowohl auf s_a als auch in α; jeder Punkt der Schnittlinie des Stralenbüschels mit α' entspricht daher einem Punkt von g_α; d. h. jeder Geraden g_α entspricht in α' eine Gerade g_α'. Nun entspricht aber auch jedem unendlich fernen Punkt von α ein unendlich ferner Punkt von α'; also folgt, dass die Ebenen α und α' affine ebene Systeme sind.

17. Betrachten wir jetzt denjenigen Stralenbüschel von α, dessen Mittelpunkt X_α ist. Ihm entspricht in α' ein homo-

loger Büschel mit dem Mittelpunkt X_α'. Seien $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ wieder die beiden Paraboloide, welche zu den Geraden p_α und n_α gehören, so ist $[xn^m]$ die Richtungsebene der auf $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ liegenden Sehnen und $[xp^m]$ diejenige der Sehnen von $\mathfrak{P}_n^{(2)}$. Beide Richtungsebenen stehen senkrecht auf einander. Das gleiche gilt daher von den ihnen parallelen Ebenen des Bündels O'; mithin schneiden dieselben α' in zwei zu einander senkrechten Stralen p_α' und n_α', welche den zu einander senkrechten Geraden p_α und n_α entsprechen; d. h. für jedes Ebenenpaar α und α' sind die Stralenpaare p_α, n_α und p_α', n_α' entsprechende Paare rechtwinkliger Stralen.

Betrachten wir dagegen irgend zwei andere zu einander senkrechte Stralen des in α' liegenden Stralenbüschels, so können die entsprechenden Stralen von α nicht rechtwinklig sein; denn sonst wären die Büschel von α und α' einander gleich; und da alle Stralenbüschel von α', β' . . ., deren Mittelpunkte auf x' liegen, einander gleich sind, so müssten es auch die entsprechenden Büschel der Ebenen α, β . . . sein, was jedoch nicht der Fall sein kann.

Allen Sehnen s_α, die mit der Hauptaxe gleiche Winkel bilden, entsprechen in O' die Stralen s_α' eines Rotationskegels, dessen Axe x' ist. Derselbe schneidet α' in einem Kreise, dessen Mittelpunkt X_α' ist. Ihm entspricht in der affinen Ebene α eine Ellipse, welche X_α zum Mittelpunkt und p_α und n_α zu Hauptaxen hat; und zwar ist, wie wir sogleich zeigen werden, n_α die kleine und p_α die grosse Axe der Ellipse.

Um dies zu beweisen, betrachten wir zunächst die in der Mittelebene ε^m liegende Ellipse.

Alle Sehnen, welche gegen die Axe der Schraubenbewegung gleich geneigt sind, haben auch gleichen Abstand von derselben. Sei nun P^m ein Endpunkt der auf p^m liegenden Axe und N^m ein Endpunkt der auf n^m liegenden Axe, und seien s_p und s_n die durch diese Punkte gehenden Sehnen, so ist n_α senkrecht zu x, während p_α mit x einen spitzen Winkel bildet. Nun ist N^m derjenige Punkt von s_n, welcher von x den kürzesten Abstand hat, und P^m der analoge Punkt von s_p. Es ist also in der That

$$N^m X^m < P^m X^m,$$

d. h. $N^m X^m$ ist die kleine, und $P^m X^m$ ist die grosse Halbaxe der Ellipse.

Hieraus lässt sich der Satz auch für die andern Ebenen von E^3 folgern, und es ergiebt sich somit:

Alle Sehnen, welche gegen die Hauptaxe gleich geneigt sind, schneiden jede Ebene α *des Büschels* E^3 *in einer Ellipse, deren grosse Axe auf* p_α *und deren kleine Axe auf* n_α *liegt. Die grossen Axen aller dieser Ellipsen bilden das Paraboloid* $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ *und die kleinen das Paraboloid* $\mathfrak{P}_n^{(2)}$. *Die Mittelpunkte aller Ellipsen liegen auf der Hauptaxe von* E^3.

Die Sehnen s_α selbst bilden eine geradlinige Fläche R vierter Ordnung. Jedem Rotationskegel K' von O', der x' zur Rotationsaxe hat, entspricht eine solche Fläche. Alle diese Kegel schneiden auf α' concentrische Kreise aus. Die Endpunkte der auf p_α' und n_α' liegenden Durchmesser dieser Kreise bilden congruente Punktreihen. Die Endpunkte der Halbaxen aller Ellipsen, in denen α von den Flächen R geschnitten wird, bilden die entsprechenden Punktreihen; diese sind daher ähnlich zu einander und es folgt:

In jeder Ebene des symmetrischen Ebenenbüschels E^3 *stehen die Hauptaxen der Ellipsen, in denen diese Ebene von den Flächen* R *geschnitten wird, in constantem Verhältniss zu einander.*

18. Die zur Axe der Schraubenbewegung senkrechte Ebene ist zwar unter den Ebenen des Büschels nicht enthalten, sie hat jedoch eine besondere Bedeutung für denselben, die wir noch anführen wollen.

Diejenige Gerade, längs welcher die Ebene α den Ebenenbüschel E^3 berührt, möge durch t_α bezeichnet werden. Ist g^m wieder eine beliebige Gerade der Mittelebene ε^m, so erhält man bekanntlich die in der Ebene α liegende Sehne s_α des Paraboloids $\mathfrak{P}_g^{(2)}$, indem man durch den Schnittpunkt von g_α und t_α an die in α liegende Parabel die zweite von t_α verschiedene Tangente legt. Dasselbe gilt auch für ε_∞; ist daher t_∞ der Berührungsstral von ε_∞, so ist die in ε_∞ liegende Axe von $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ diejenige von t_∞ verschiedene Tangente, die vom Punkt $(g_\infty t_\infty)$ an die in ε_∞ liegende Parabel gezogen werden kann. Der Schnittpunkt der beiden unendlich fernen Geraden von $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ liegt also stets auf t_∞; d. h. die Hauptaxe von $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ geht stets durch einen Punkt von t_∞. Also folgt:

Die zur Hauptaxe des symmetrischen Ebenenbüschels senkrechte Ebene enthält die Tangente t_∞ der unendlich fernen Ebene des Büschels.

Endlich soll noch der Berührungspunkt der unendlich fernen Ebene bestimmt werden. Dazu betrachten wir das zur Geraden n^m gehörige Paraboloid $\mathfrak{P}_n^{(2)}$. Da vom unendlich fernen Punkt $(n_\infty\, t_\infty)$ keine von t_∞ verschiedene Tangente an die Parabel der Ebene ε_∞ gezogen werden kann, so muss der Punkt $(n_\infty\, t_\infty)$ der Berührungspunkt der Ebene ε_∞ sein; also folgt:

Die unendlich ferne Ebene von E^3 hat denjenigen Punkt zum Berührungspunkt, in welchem t_∞ von einer zu n^m senkrechten Ebene geschnitten wird.

19. Wenn wir die vorstehenden Sätze nunmehr auf ein in beliebiger Bewegung begriffenes räumliches System Σ anwenden, so gelangen wir schliesslich zu folgenden Resultaten.

Die sämmtlichen Ebenen von Σ, deren Characteristiken in einer beliebigen Ebene ε des Raumes liegen, bilden einen symmetrischen Ebenenbüschel dritter Ordnung, für welchen ε die Hauptebene und die Axe der momentanen Schraubenbewegung die Hauptaxe ist. Die Tangenten der Bahnen aller Punkte von ε bilden ein besonderes Stralsystem dritter Ordnung und erster Classe; alle Tangenten, welche gegen die Momentanaxe gleich geneigt sind, treffen ε in einer Ellipse, deren Mittelpunkt auf x liegt.

Der cubische Kreis c^3 und der Ebenenbüschel E^3 sind reciproke Gebilde in dem von Σ und Σ^ν gebildeten Nullsystem; d. h. die Normalebenen aller Punkte von c^3 bilden einen symmetrischen Ebenenbüschel. Betrachten wir nämlich den cubischen Kreis, dessen Scheitelpunkt D ist, und nennen die Normalebene δ^ν von D wieder ε, so liegt das von D auf x gefällte Lot in ε und ist diejenige Gerade von ε, die bisher durch n bezeichnet wurde. Sind nun A und B wieder zwei conjugirte Punkte von D, und n_α und n_β die von ihnen auf x gefällten Lote, so sind n_α und n_β gleich geneigt gegen die Ebene $[xn]$; es folgt daher, dass diese Lote n_α das Paraboloid $\mathfrak{P}_{(n)}{}^2$ bilden, und dass der Punkt $(xn) = X$ der Scheitel desselben ist. Ferner haben die Punkte A und B gleichen Abstand von der Axe der Schraubenbewegung; also bilden ihre durch n_α, resp. n_β gehenden Normalebenen α^ν, resp. β^ν gleiche Winkel mit x. Endlich sind A und B auch vom Scheitel X des Paraboloids gleichweit entfernt, daher sind auch die Punkte X_α und X_β, in welchen die Normalebenen α^ν und β^ν die Axe x treffen, von X gleichweit entfernt, und daraus folgt in der That, dass der von den Normalebenen α^ν, β^ν gebildete Ebenenbüschel genau diejenigen Eigenschaften besitzt, durch welche E^3 definirt ist; d. h.

*Die Normalebenen aller Punkte des cubischen Kreises c^3 bilden einen symmetrischen Ebenenbüschel E^3 und die Nullpunkte aller Ebenen eines solchen Büschels bilden stets einen cubischen Kreis.**)

§ 8. Der Complex der Krümmungsaxen.

1. Wir betrachten im Folgenden drei beliebig gewählte Systemlagen Σ_0, Σ_1, Σ_2. Das von den Sehnenmittelpunkten von Σ_0 und Σ_1 gebildete räumliche System bezeichnen wir nunmehr durch $\Sigma_{01}{}^m$ und das entsprechende für Σ_1 und Σ_2 durch $\Sigma_{12}{}^m$. Analog sollen $\Sigma_{01}{}^\nu$ und $\Sigma_{12}{}^\nu$ die aus den Normalebenen aller Punkte bestehenden beiden räumlichen Systeme bedeuten. Die Axe der zu Σ_0 und Σ_1 gehörigen Schraubenbewegung bezeichnen wir durch x_{01}, resp. x_{01}', je nachdem wir sie als Gerade von Σ oder Σ' betrachten; analog möge x_{12}, resp. x_{12}' die Axe der zu den Lagen Σ_1 und Σ_2 zugehörigen Schraubenbewegung sein.

---

*) Hieraus müssen wir schliessen, dass die cubische Parabel, deren Schmiegungsebenen den Büschel E^3 bilden, von specieller Natur ist. Betrachten wir nämlich irgend eine cubische Ellipse des Systems Σ, deren reeller unendlich ferner Punkt der Punkt X_∞ ist, so enthält der reciproke Ebenenbüschel der Normalebenen zwar auch die unendlich ferne Ebene; er kann jedoch mit dem im Text betrachteten nicht identisch sein.

Da jedes der beiden Systeme $\Sigma_{01}{}^v$ und $\Sigma_{12}{}^v$ dem System Σ reciprok verwandt ist, so sind beide Systeme zu einander collinear. Dieselben erzeugen daher einen tetraedralen Stralencomplex, welcher aus der Gesammtheit der Schnittlinien entsprechender Ebenen besteht. Je zwei entsprechende Ebenen $\alpha_{01}{}^v$ und $\alpha_{12}{}^v$ schneiden sich in einer Geraden k_a, welche durch den Mittelpunkt des dem Dreieck $A_0A_1A_2$ umschriebenen Kreises geht, und auf der Ebene desselben senkrecht steht. Nennen wir diese Gerade die *Mittelpunktsaxe* k_a des Punktes A, so folgt:

Die sämmtlichen zu den Punkten A des räumlichen Systems Σ gehörigen Mittelpunktsaxen bilden einen allgemeinen tetraedralen Stralencomplex.

2. Von diesem Complex lässt sich beweisen, dass derselbe im Allgemeinen keine reellen Hauptebenen und Hauptpunkte enthält. Die Hauptebenen des Complexes sind diejenigen Ebenen von $\Sigma_{01}{}^v$, welche mit den entsprechenden Ebenen von $\Sigma_{12}{}^v$ zusammenfallen. Soll $\alpha_{01}{}^v$ und $\alpha_{12}{}^v$ ein Paar solcher Ebenen sein, so muss, da $\alpha_{01}{}^v$ durch $A_{01}{}^m$ geht und auf der Sehne A_0A_1 senkrecht steht, und da $\alpha_{12}{}^v$ durch $A_{12}{}^m$ geht und auf A_1A_2 senkrecht steht, auch A_0 mit A_2 zusammenfallen. Dies wird jedoch im Allgemeinen nicht der Fall sein, denn die beiden congruenten Räume Σ_0 und Σ_2 haben im Allgemeinen keinen im Endlichen gelegenen Punkt entsprechend gemein.

Fällt A_0 mit A_2 zusammen, so können die zwei Systeme Σ_0 und Σ_2 als zwei verschiedene Lagen eines starren Körpers betrachtet werden, welcher sich um einen festen Punkt dreht; alsdann haben sie, wie wir aus Capitel II wissen, auch eine durch A gehende Axe Punkt für Punkt entsprechend gemein. Jeder Punkt B_0 dieser Axe fällt daher mit B_2 zusammen, also auch $B_{01}{}^m$ mit $B_{12}{}^m$ und $\beta_{01}{}^v$ mit $\beta_{12}{}^v$; d. h. die beiden collinearen Systeme $\Sigma_{01}{}^v$ und $\Sigma_{12}{}^v$ haben in diesem Fall einen Ebenenbüschel, also auch eine Punktreihe entsprechend gemein. Hat der Complex daher *eine* reelle Hauptebene, so hat er unendlich viele, welche einen Ebenenbüschel bilden.

Enthalten $\Sigma_{01}{}^v$ und $\Sigma_{12}{}^v$ noch ein weiteres Paar zusammenfallender Ebenen γ_{01}^{ν} und γ_{12}^{ν}, welches nicht dem eben genannten Ebenenbüschel angehört, so folgt in derselben Weise, dass auch C_0 mit C_2 zusammenfällt; alsdann liegen aber je zwei entsprechende Punkte von Σ_0 und Σ_2 in einander; d. h. Σ_{01}^{ν} und Σ_{12}^{ν} haben alle ihre Ebenen und Punkte entsprechend gemein, und der Complex der Geraden k wird unbestimmt. Wir erhalten demnach folgenden Satz:

Der Complex der Mittelpunktsaxen k enthält im Allgemeinen weder reelle Hauptpunkte, noch reelle Hauptebenen. Besitzt er reelle Hauptebenen, so bilden dieselben einen Ebenenbüschel.

Es giebt noch einen Ausnahmefall, der besonders erwähnt werden muss, nämlich denjenigen, in welchem die unendlich ferne Ebene eine Hauptebene von Σ_{01}^{ν} und Σ_{12}^{ν} ist. Die unendlich ferne Ebene ist stets die Normalebene des unendlich fernen Punktes der Axe der Schraubenbewegung. Soll sie also eine selbstentsprechende Ebene von Σ_{01}^{ν} und Σ_{12}^{ν} sein, so müssen die Axen der beiden auf einander folgenden Verschiebungen parallel sein oder zusammenfallen. Umgekehrt ist klar, dass wenn die beiden Schraubenaxen parallel sind, die unendlich ferne Ebene eine selbstentsprechende Ebene der beiden collinearen Räume Σ_{01}^{ν} und Σ_{12}^{ν}, also auch eine Hauptebene des von ihnen erzeugten Complexes ist. Sind dagegen die Axen x_{01}' und x_{12}' der aufeinander folgenden Verschiebungen nicht parallel, so ist die unendlich ferne Ebene für die erste Verschiebung Normalebene des unendlich fernen Punktes der Axe x_{01}, dagegen für die zweite Verschiebung Normalebene des unendlich fernen Punktes von x_{12}, während die Normalebene des unendlich fernen Punktes von x_{01}, wie die Normalebene eines jeden unendlich fernen Punktes, zu x_{12}' parallel ist.

Diesen Ausnahmefall mussten wir besonders anführen, weil er von Wichtigkeit ist, und uns an anderer Stelle wieder begegnen wird.

3. Der von den Mittelpunktsaxen k_a gebildete Stralencomplex lässt sich bekanntlich in einfacher Weise auf das räumliche System Σ projectivisch abbilden, und zwar so, dass wir jedem Punkt A von Σ den Complexstral k_a zuordnen,

welcher die Schnittlinie der Ebenen α_{01}^{ν} und α_{12}^{ν} ist. Von den vielen Folgerungen, welche sich daraus ergeben, mögen die nachstehenden angeführt werden.

Die zu den Punkten einer Geraden g gehörigen Mittelpunktsaxen k_a bilden im Allgemeinen die eine Regelschaar eines einfachen Hyperboloids. Dieselben sind nämlich das Erzeugniss der beiden projectivischen Ebenenbüschel, deren Axen die zu g reciproken Geraden g_{01}^{ν} und g_{12}^{ν} sind.

Die zu den Punkten einer beliebigen Ebene ε zugehörigen Geraden k_a bilden im Allgemeinen die sämmtlichen Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung. Denn sie sind das Erzeugniss der beiden collinearen Ebenenbündel, deren Scheitel die Nullpunkte der Ebenen ε_{01}^{m} und ε_{12}^{m} sind.

Ferner bilden diejenigen Geraden k_a, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen, im Allgemeinen einen Kegel zweiten Grades. Derselbe wird von zwei projectivischen Ebenenbüscheln erzeugt, deren Axen g_{01}^{ν} und g_{12}^{ν} sich in dem genannten Punkte schneiden. Daher liegen die Punkte von Σ, welche jenen Geraden k_a entsprechen, auf der zu g_{01}^{ν}, resp. g_{12}^{ν} reciproken Geraden g.

Diejenigen Mittelpunktsaxen, welche in einer beliebigen Ebene δ des Raumes enthalten sind, umhüllen im Allgemeinen einen Kegelschnitt, und die Ebenen von Σ_{01}^{ν}, welche sich mit den zugehörigen Ebenen von Σ_{12}^{ν} in diesen Axen schneiden, bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung. Bezeichnen wir nämlich die Ebene δ als Ebene von Σ_{01}^{ν} durch ε_{01}^{ν}, so erzeugt dieselbe mit ε_{12}^{ν} einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, welcher ε_{01}^{ν} und ε_{12}^{ν} enthält. Dieser Ebenenbüschel wird im Allgemeinen nicht zerfallen. Denn soll dies eintreten, so müssen ε_{01}^{ν} und ε_{12}^{ν} einen Punkt, resp. eine Gerade entsprechend gemein haben, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Betrachtet man den Ebenenbüschel als einen Büschel des Systems Σ_{12}^{ν} und bezeichnet die Ebene ε_{01}^{ν} als Ebene von Σ_{12}^{ν} durch η_{12}^{ν}, so entspricht ihm im System Σ_{01}^{ν} ein Büschel, der von den Ebenen η_{01}^{ν} und ε_{01}^{ν} gebildet wird. Je zwei homologe Ebenen dieser beiden Büschel schneiden sich alsdann in je einer Geraden k_a, welche in der Ebene ε_{01}^{ν} liegt. Nun entspricht einem Ebenenbüschel, der die Ebenen $\varepsilon_{01}{}^{v}$ und $\eta_{01}{}^{v}$ enthält, im System Σ eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch diejenigen Punkte E und H hindurchgeht, deren Normalebenen $\varepsilon_{01}{}^{v}$ und $\eta_{01}{}^{v}$ sind; die Punkte von Σ, deren Mittelpunktsaxen in der Ebene δ liegen, bilden daher eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch E und H hindurchgeht.

Diese Raumcurve geht noch durch einen dritten, leicht angebbaren Punkt. In jeder Geraden k_a schneiden sich nämlich nicht allein die Ebenen $\alpha_{01}{}^{v}$ und $\alpha_{12}{}^{v}$, sondern es geht auch die auf der Sehne $A_2 A_0$ in ihrem Mittelpunkt errichtete Normalebene $\alpha_{20}{}^{v}$ durch k_a. Die Gesammtheit der Ebenen $\alpha_{20}{}^{v}$ bildet ein $\Sigma_{01}{}^{v}$ und $\Sigma_{12}{}^{v}$ collineares System $\Sigma_{20}{}^{v}$, und der Ebenenbüschel dritter Ordnung ist das gemeinsame Erzeugniss von $\varepsilon_{12}{}^{v}$, $\varepsilon_{20}{}^{v}$ und $\varepsilon_{01}{}^{v}$. Bezeichnen wir daher die Ebene $\varepsilon_{01}{}^{v}$, d. h. die Ebene δ, als Ebene von $\Sigma_{20}{}^{v}$ durch $\varphi_{20}{}^{v}$, so muss die Raumcurve dritter Ordnung auch durch denjenigen Punkt F von Σ gehen, dessen Normalebene im System $\Sigma_{01}{}^{v}$ die Ebene $\varphi_{01}{}^{v}$ ist. Demnach ergiebt sich:

Die Punkte des Systems Σ, deren Mittelpunktsaxen in einer beliebigen Ebene δ des Raumes liegen, bilden eine Raumcurve dritter Ordnung. Dieselbe geht durch diejenigen drei Punkte von Σ, welche die Ebene δ in den Systemen $\Sigma_{12}{}^{v}$, $\Sigma_{20}{}^{v}$, $\Sigma_{01}{}^{v}$ zur Normalebene haben.

Da der Ebenenbüschel dritter Ordnung, welcher der Raumcurve im System $\Sigma_{01}{}^{v}$ entspricht, das Erzeugniss der drei collinearen ebenen Systeme $\varepsilon_{01}{}^{v}$, $\eta_{01}{}^{v}$, $\varphi_{01}{}^{v}$ ist, so folgt, dass die Raumcurve durch irgend zwei der drei collinearen Bündel erzeugt werden kann, deren Scheitel die Punkte E, H und F von Σ sind.

4. Wird für die eben betrachtete Ebene δ die unendlich ferne Ebene gesetzt, so bilden demnach, da die unendlich ferne Ebene im Allgemeinen keine selbstentsprechende Ebene von $\Sigma_{01}{}^{v}$ und $\Sigma_{12}{}^{v}$ ist, die in ihr liegenden Geraden k_a im Allgemeinen einen Stralenbüschel zweiter Ordnung und die zugehörigen Punkte A von Σ eine Raumcurve dritter Ordnung. Für jeden Punkt A dieser Curve sind aber die beiden zugehörigen Normalebenen einander parallel, er hat also die Eigen-

schaft, dass für ihn A_0, A_1, A_2 auf derselben Geraden liegen. Bezeichnen wir nun die Schraubenaxe, welche zu den beiden Systemlagen Σ_2 und Σ_0 gehört, durch x_{20}, resp. x_{20}', und beachten, dass die unendlich ferne Ebene Normalebene des unendlich fernen Punktes der Schraubenaxe ist, dass also die Punkte F, H und E die unendlich fernen Punkte der drei Geraden x_{12}, x_{20}, x_{01} sind, so folgt:

Alle Punkte A des starren Systems, welche die Eigenschaft haben, dass A_0, A_1, A_2 auf einer und derselben Geraden liegen, bilden im Allgemeinen eine Raumcurve dritter Ordnung. Dieselbe geht durch die unendlich fernen Punkte der drei Schraubenaxen x_{12}, x_{20}, x_{01}, welche den drei Systemgruppen $\Sigma_1\Sigma_2$, $\Sigma_2\Sigma_0$ und $\Sigma_0\Sigma_1$ entsprechen.

Die Curve wird demnach im Allgemeinen eine räumliche Hyperbel sein. Dieselbe soll die *Wendecurve* von Σ heissen und durch $i_{012}{}^3$ bezeichnet werden.

So lange die Raumcurve $i_{012}{}^3$ nicht zerfällt, können auf einer beliebigen Geraden höchstens zwei Punkte A existiren, für welche die drei Lagen A_0, A_1, A_2 eine gerade Linie bilden. Für eine solche Gerade haben die beiden Paraboloide, welche von den Sehnen A_0A_1, resp. A_1A_2 der Punkte von g gebildet werden, zwei Erzeugenden gemein, woraus noch beiläufig folgt, dass die Schnittcurve dieser Paraboloide in vier gerade Linien zerfällt. Die Gesammtheit aller Geraden dieser Art bildet ein Stralsystem erster Ordnung und dritter Klasse, nämlich das Secantensystem der Raumcurve $i_{012}{}^3$.

Wie oben gezeigt wurde, bilden die Mittelpunktsaxen, welche zu den Punkten einer beliebigen Geraden g gehören, die eine Regelschaar eines Hyperboloids. Hat die Gerade g einen Punkt mit der Wendecurve $i_{012}{}^3$ gemein, so geht die Regelschaar in ein Paraboloid über. Enthält g zwei Punkte der Wendecurve, ist sie also eine Sehne derselben, so liegen zwei Geraden k im Unendlichen, d. h. zwei Paare entsprechender Normalebenen der Büschel $g_{01}{}^v$ und $g_{12}{}^v$ sind parallel. Daher sind $g_{01}{}^v$ und $g_{12}{}^v$ selbst parallel, die Geraden k bilden daher eine Cylinderfläche, und zwar eine hyperbolische, elliptische oder parabolische, je nachdem die Gerade g eine eigentliche Secante, eine uneigentliche Secante oder eine Tangente von i_{012}^3 ist.

5. Die soeben gewonnenen Resultate verlieren ihre Gültigkeit, wenn die unendlich ferne Ebene eine selbstentsprechende Ebene von Σ_{01}^{ν} und Σ_{12}^{ν} ist, d. h. wenn die beiden Schraubenaxen x_{01} und x_{12} parallel sind. Die Raumcurve i_{012}^3 lässt sich nämlich, wie oben bewiesen, als Erzeugniss zweier collinearen Stralenbündel darstellen, deren Scheitel die unendlich fernen Punkte der beiden Geraden x_{01} und x_{12} sind. Während aber x_{01} und x_{12} im Allgemeinen windschief zu einander liegen, erhält man in diesem Fall die Punkte A der Wendecurve durch zwei collineare Stralenbündel, deren Scheitel die unendlich fernen Punkte zweier parallelen Geraden sind. Demnach reducirt sich der Ort derjenigen dieser Punkte, welche im Endlichen liegen, auf eine Gerade, welche selbst zu den Axen der Schraubenbewegungen parallel ist.

Es lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass wenn die Raumcurve i_{012}^3 zerfällt, die Axen der beiden Schraubenbewegungen parallel sein müssen. Denn wenn i_{012}^3 zerfallen soll, so muss es eine Gerade g von der Eigenschaft geben, dass für alle Punkte A derselben A_0, A_1, A_2 in derselben Geraden liegen. Nun bilden aber die Sehnen aller Punkte einer beliebigen Geraden von Σ im Allgemeinen die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids; dies enthält in dem hier betrachteten Fall drei Lagen g_0, g_1, g_2 der Geraden g, und zwar werden diese drei Geraden von allen Geraden der Regelschaar in congruenten Punktreihen getroffen. Es kann aber kein eigentliches Paraboloid existiren, für welches dies zutrifft. Denn je zwei Geraden einer Regelschaar eines Paraboloids, welche von allen Erzeugenden der andern Schaar in congruenten Punktreihen getroffen werden, sind gleich geneigt gegen die Richtungsebene dieser Schaar, und solcher Geraden kann es nur zwei geben. Demnach liegen die Verbindungslinien der homologen Punkte von g_0 und g_1 sämmtlich in einer Ebene, und daraus folgt wieder, dass sie zu einander parallel sind, da es ja sonst nur zwei Punkte der betrachteten Art auf der Geraden g geben kann. Aber jede Gerade, für welche die Sehnen $A_0 A_1$ sämmtlich zu einander parallel sind, ist zur Axe der Schraubenbewegung parallel, also muss g_0 mit der Axe x_{01} selbst parallel laufen. Beachtet man nun, dass die Sehnen $A_0 A_1$, d. h. Verbindungslinien der Punkte von g_0 und g_1 mit den Sehnen $A_1 A_2$, d. h. mit den Verbindungslinien der Punkte von g_1 und g_2 identisch sind, so folgt ebenso, dass auch die Gerade g_1 der Schraubenaxe x_{12} parallel ist, d. h. die beiden Axen x_{01} und x_{12} sind selbst parallel. Demnach ergiebt sich:

Wenn eine Gerade existirt, deren sämmtliche Punkte A die Eigenschaft haben, dass A_0, A_1, A_2 in einer Geraden liegen, so sind die beiden Axen x_{01} und x_{12}, um welche die beiden Schraubenbewegungen stattfinden, einander parallel und umgekehrt: Sind die Axen x_{01} und x_{12} zu einander parallel, so existirt eine derartige Gerade.

6. Während es unendlich viele Punkte giebt, für welche drei auf einander folgende Lagen derselben Geraden angehören, wird es im Allgemeinen keinen im Endlichen liegenden Punkt A geben, für den auch noch A_3 auf der Geraden $A_0 A_1 A_2$ bleibt. Ist nämlich Σ_3 das räumliche System in der vierten Lage, so gehört zu Σ_1, Σ_2, Σ_3 eine Raumcurve $i_{123}{}^3$ als Ort aller Punkte A, für welche A_1, A_2, A_3 eine Gerade bilden. Die Raumcurve $i_{012}{}^3$ lässt sich als Erzeugniss von zwei collinearen Bündeln betrachten, deren Mittelpunkte in den unendlich fernen Punkten von x_{01} und x_{12} liegen; ebenso erscheint die Raumcurve $i_{123}{}^3$ als Erzeugniss von zwei collinearen Bündeln, deren Mittelpunkte in den unendlich fernen Punkten der Schraubenaxen x_{12} und x_{23} liegen. Die beiden Raumcurven $i_{012}{}^3$ und $i_{123}{}^3$ haben daher im Allgemeinen nur den unendlich fernen Punkt der Geraden x_{12} gemein; sie haben nur in dem Falle noch andere gemeinsame Punkte, wenn irgend drei entsprechende Stralen der drei collinearen Bündel sich in einem und demselben Punkte schneiden, was jedoch im Allgemeinen nicht einzutreten braucht.

7. Rücken die Systemlagen Σ_0, Σ_1, Σ_2 ... unendlich nahe an einander, so geht die Mittelpunktsaxe k_α in die Krümmungsaxe der von A beschriebenen Bahn über. Die Punkte der Curve $i_{012}{}^3$ werden diejenigen Punkte des Systems, welche ge-

rade Wendepunkte ihrer Bahnen passiren. Die Curve $i_{012}{}^3$ verwandelt sich, da ihre unendlich fernen Punkte sämmtlich in einen einzigen Punkt zusammen fallen, in eine cubische Parabel, die wir durch i^3 bezeichnen wollen. Wir erhalten demnach für die continuirliche Bewegung eines räumlichen Systems folgende beiden Hauptsätze:

Die Krümmungsaxen der Bahnen aller Punkte von Σ bilden in jedem Augenblick der Bewegung einen tetraedralen Stralencomplex. Die Hauptpunkte und Hauptebenen desselben sind imaginär.

Wenn sich ein räumliches System Σ beliebig bewegt, so giebt es in jedem Augenblick unendlich viele Punkte desselben, welche gerade Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen. Dieselben bilden im Allgemeinen eine cubische Parabel i^3, welche den unendlich fernen Punkt der momentanen Schraubenaxe enthält. Haben die Polflächen den Character von Cylinderflächen, so reducirt sich i^3 auf eine Gerade.[25])

Die Folgerungen, die sich aus dem ersten dieser beiden Sätze ergeben, sind ganz analog zu denen, welche wir oben für discrete Systemlagen ausgesprochen haben. Es erscheint daher überflüssig, dieselben nochmals besonders anzuführen.

8. Für die umgekehrte Bewegung des Raumes Σ' im Raum Σ existirt ebenfalls ein Complex der Mittelpunktsaxen k_b' und eine Wendecurve $i^{3'}$. Beide Complexe stehen in reciprokem Verhältniss zu einander. Ist nämlich B' irgend ein Punkt der Geraden k_a, so geht (§ 4, 8), da k_a in $\alpha_{01}{}^v$ liegt, die Normalebene $\beta_{01}{}^{v'}$ durch A, und da k_a auch in $\alpha_{12}{}^v$ liegt, geht die Ebene $\beta_{12}{}^{v'}$ auch durch A. Der Punkt A liegt daher auf der Mittelpunktsaxe k_b' des Punktes B' für die umgekehrte Bewegung. Dies gilt für jeden Punkt B' von k_a. Bezeichnen wir daher k_a als Gerade von Σ' durch h', so folgt, dass die Mittelpunktsaxen k_b' aller Punkte von $k_a = h'$ einen Kegel bilden, dessen Spitze der Punkt A ist. Während also die Mittelpunktsaxen einer beliebigen Geraden im Allgemeinen ein Hyperboloid bilden, ist jede Krümmungsaxe dadurch ausgezeichnet, dass sich dies Hyperboloid für sie auf einen Kegel reducirt. Wir gelangen daher, wenn wir sofort unendlich nahe Systemlagen annehmen, zu folgendem Satz:

Der Complex der Krümmungsaxen der ursprünglichen Bewegung und derjenige der umgekehrten Bewegung haben reciproke Bdeutung für einander. Jede Axe k_a ist eine Gerade von Σ', deren Krümmungsaxen einen Kegel bilden, und dasselbe gilt für die Axen k_b', wenn wir sie als Geraden von Σ betrachten.

Die Wendecurve von Σ' ist daher der Ort der Spitzen derjenigen Kegel, welche unendlich fernen Geraden von Σ entsprechen, und ebenso enthält die Wendecurve von Σ die Spitzen der Kegel, welche bei der umgekehrten Bewegung zu unendlich fernen Geraden von Σ' gehören.

Ferner gehört jede Sehne von i^3 zum Complex der Krümmungsaxen k'; denn die Krümmungsaxen ihrer Punkte bilden einen Cylinder. Ebenso ist jede Sehne der Wendecurve $i^{3\prime}$ eine Gerade des Complexes der Axen k für die directe Bewegung.

Wenn wir die Krümmungsaxe k_a als Gerade h' von Σ' betrachten, so ist A die Spitze des zu h' gehörigen Kegels. Bezeichnen wir ebenso eine Krümmungsaxe k_b' als Gerade von Σ durch g, so ist B' derjenige Punkt von Σ', welcher die Spitze des zu $g = k_b'$ gehörigen Kegels ist; d. h.

Ist g eine Gerade von Σ, deren Krümmungsaxen einen Kegel bilden, so ist die Spitze des Kegels derjenige Punkt B' von Σ', dessen Bahn bei der umgekehrten Bewegung g zur Krümmungsaxe hat.

§ 9. **Die cubische Verwandtschaft und die Punkte stationärer Krümmung.**

1. Seien Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 vier beliebige Lagen des räumlichen Systems, und Σ_{01}^{ν}, Σ_{12}^{ν}, Σ_{23}^{ν} die zu den Sehnen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 gehörigen Systeme der Normalebenen. Je drei entsprechende Ebenen α_{01}^{ν}, α_{12}^{ν}, α_{23}^{ν} schneiden sich in einem Punkt A' von Σ', welcher der Mittelpunkt einer Kugel ist, welche durch A_0, A_1, A_2, A_3 hindurchgeht. Es schneiden sich aber auch die Normalebenen $\alpha_{01}^{\nu\prime}$, $\alpha_{12}^{\nu\prime}$, $\alpha_{23}^{\nu\prime}$, welche für die umgekehrte Bewegung zu den Sehnen $A_0'A_1'$, $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$ gehören, im Punkte A; d. h. A ist Mittelpunkt der durch A_0', A_1', A_2', A_3' gelegten Kugel.

Ordnen wir je zwei solche Punkte von Σ und Σ' einander als entsprechend zu, so stehen die beiden so auf einander bezogenen Räume in einer eindeutigen Verwandtschaft zu einander. Jedem Punkt A von Σ entspricht im Allgemeinen ein Punkt A' von Σ' und umgekehrt. Welcher Art diese Verwandtschaft ist, ersehen wir aus den folgenden Sätzen.

Liegen die Punkte A von Σ auf einer Geraden g, so bilden die Mittelpunkte A' der ihnen entsprechenden Kugeln eine Raumcurve dritter Ordnung. Dieselbe ist das Erzeugniss der drei projectivischen Ebenenbüschel, deren Axen die Geraden g_{01}^v, g_{12}^v, g_{23}^v sind. Umgekehrt entsprechen auch allen Punkten A' von Σ', welche eine Gerade g' bilden, in Σ die Punkte A einer cubischen Raumcurve. Denn jeder Punkt A ist Schnittpunkt von drei entsprechenden Ebenen $\alpha_{01}^{v'}$, $\alpha_{12}^{v'}$, $\alpha_{23}^{v'}$ derjenigen projectivischen Ebenenbüschel, deren Axen $g_{01}^{v'}$, $g_{12}^{v'}$, $g_{23}^{v'}$ sind.

Liegen die Punkte A von Σ auf einer Ebene ε, so bilden die Punkte A' von Σ' eine Fläche dritter Ordnung. Dieselbe ist das Erzeugniss der drei collinearen Ebenenbündel, deren Mittelpunkte die Nullpunkte von ε_{01}^m, ε_{12}^m, ε_{23}^m sind. Umgekehrt entsprechen auch allen Punkten A' einer Ebene ε' von Σ' die Punkte einer Fläche dritter Ordnung von Σ; denn die Normalebenen $\alpha_{01}^{v'}$, $\alpha_{12}^{v'}$, $a_{23}^{v'}$, welche für die umgekehrte Bewegung zu den Punkten A' von Σ' gehören, bilden ebenfalls drei collineare Bündel.

Die Verwandtschaft der beiden Räume Σ und Σ' heisst in Folge dessen eine *cubische Verwandtschaft.*[26]) Wir gelangen also zu folgendem Satz:

Ordnen wir jedem Punkt A von Σ denjenigen Punkt A' von Σ' zu, in welchem die Normalebenen α_{01}^v, α_{12}^v, α_{23}^v sich schneiden, so ist gleichzeitig A der Schnittpunkt der drei Normalebenen $\alpha_{01}^{v'}$, $\alpha_{12}^{v'}$, $\alpha_{23}^{v'}$ des Punktes A' für die umgekehrte Bewegung. Die beiden so auf einander bezogenen Systeme Σ und Σ' stehen in einer cubischen Verwandtschaft zu einander.

2. Auch der unendlich fernen Ebene ε_∞' von Σ' entspricht im System Σ eine Fläche dritter Ordnung; dieselbe soll durch F_{0123}^3 oder auch durch F_{03}^3 bezeichnet werden. Jeder ihrer Punkte A ist dadurch ausgezeichnet, dass der Mittelpunkt der

durch A_0, A_1, A_2, A_3 gelegten Kugel im Unendlichen liegt. Daher bilden A_0, A_1, A_2, A_3 eine Ebene. Zu den Punkten der Fläche F_{03}^3 gehören auch die Punkte der Wendecurven i_{012}^3 und i_{123}^3. Denn ist A ein Punkt von i_{012}^3, so bilden A_0, A_1, A_2 eine Gerade, also auch A_0, A_1, A_2, A_3 eine Ebene, und ist B ein Punkt von i_{123}^3, so bilden B_1, B_2, B_3 eine Gerade, also wiederum B_0, B_1, B_2, B_3 eine Ebene. Ebenso existirt in Σ' eine analoge Fläche $F_{03}^{3\prime}$, welche für die umgekehrte Bewegung der Ebene ε_∞ von Σ entspricht. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Sind Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 vier beliebige Lagen des räumlichen Systems, so giebt es in demselben unendlich viele Punkte A von der Eigenschaft, dass A_0, A_1, A_2, A_3 derselben Ebene angehören. Die Gesammtheit derselben bildet eine Fläche dritter Ordnung F_{03}^3. Auf derselben liegen auch die Wendecurven i_{012}^3 und i_{123}^3. Eine entsprechende Fläche existirt für die umgekehrte Bewegung in dem räumlichen Systeme Σ'.

3. Betrachten wir noch eine fünfte Lage Σ_4, so liegen alle Punkte A von Σ, für welche A_1, A_2, A_3, A_4 in dieselbe Ebene fallen, auf einer Fläche dritter Ordnung F_{14}^3. Die Flächen F_{03}^3 und F_{14}^3 enthalten beide die Curve i_{123}^3, sie schneiden sich daher ausserdem in einer Raumcurve sechster Ordnung, die wir durch c_{04}^6 bezeichnen wollen. Da F_{03}^3 die Curve c_{04}^6 enthält, so liegt die nächste Curve dieser Art c_{15}^6 auf F_{14}^3. F_{14}^3 enthält also c_{04}^6 und c_{15}^6; d. h. jede Fläche F^3 enthält zwei Curven c^6 dieser Art.

Von jedem Punkt A der Curve c_{04}^6 lässt sich beweisen, dass für ihn sogar die fünf Lagen A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 derselben Ebene angehören. Denn es liegen sowohl A_0, A_1, A_2, A_3 in einer Ebene, als auch A_1, A_2, A_3, A_4; beide Ebenen haben also die Punkte A_1, A_2, A_3 gemein, und da dieselben, als Punkte von c_{04}^6, im Allgemeinen nicht in einer Geraden liegen, so müssen die beiden Ebenen zusammenfallen. Dies braucht jedoch nicht der Fall zu sein, wenn A_1, A_2, A_3 eine Gerade bilden. Dann werden vielmehr die beiden Ebenen im Allgemeinen verschieden sein und sich in der Geraden $A_1 A_2 A_3$ schneiden; d. h.

Sind fünf Lagen eines räumlichen Systems beliebig gegeben, so existiren unendlich viele Punkte A desselben, für welche A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *derselben Ebene angehören. Dieselben bilden im Allgemeinen eine Raumcurve sechster Ordnung* c_{04}^6, *welche zusammen mit* i_{123}^3 *den Durchschnitt der Flächen* F_{03}^3 *und* F_{14}^3 *darstellt.*

4. Betrachten wir noch eine sechste Systemlage Σ_5, so giebt es auch eine Fläche F_{25}^3 von Σ, deren Punkte A die Eigenschaft haben, dass A_2, A_3, A_4, A_5 in dieselbe Ebene fallen. Die drei Flächen F_{03}^3, F_{14}^3, F_{25}^3 schneiden sich in 27 Punkten. Jeder dieser 27 Punkte hat die Eigenschaft, dass für ihn je vier auf einander folgende Lagen derselben Ebene angehören. Für alle diejenigen dieser 27 Punkte, welche nicht auf i_{123}^3 oder i_{234}^3 liegen, fallen die drei Ebenen

$$[A_0 A_1 A_2 A_3],\ [A_1 A_2 A_3 A_4],\ [A_2 A_3 A_4 A_5]$$

zusammen, d. h. für jeden dieser Punkte gehören sogar sechs auf einander folgende Lagen einer und derselben Ebene an. Ist dagegen A ein Punkt von i_{123}^3, so brauchen die Ebenen $[A_0 A_1 A_2 A_3]$ und $[A_1 A_2 A_3 A_4]$ nicht zusammenzufallen, da ihre drei gemeinsamen Punkte eine Gerade bilden, und ist A ein Punkt von i_{234}^3, so gilt dasselbe für die Ebenen $[A_1 A_2 A_3 A_4]$ und $[A_2 A_3 A_4 A_5]$.

Die Flächen F_{03}^3 und F_{14}^3 enthalten beide die Curve i_{123}^3. Dieselbe schneidet die Fläche F_{25}^3 in neun Punkten, welche auf allen drei Flächen liegen. Ebenso enthalten die Flächen F_{14}^3 und F_{25}^3 die Curve i_{234}^3, und die neun Schnittpunkte derselben mit F_{03}^3 sind ebenfalls gemeinsame Punkte aller drei Flächen. Nun haben aber die Curven i_{123}^3 und i_{234}^3 einen Punkt gemein, nämlich den unendlich fernen Punkt der Geraden x_{23}, also ist dieser Punkt sowohl einer der Schnittpunkte von i_{123}^3 mit F_{25}^3, als auch einer der Schnittpunkte von i_{234}^3 mit F_{03}^3. Die beiden Gruppen von je neun Punkten repräsentiren daher nur 17 distincte Punkte, es bleiben daher noch 10 Schnittpunkte, die nicht auf i_{123}^3 oder i_{234}^3 liegen, und es folgt:

Sind sechs Lagen des räumlichen Systems Σ *beliebig gegeben, so existiren im Allgemeinen* 10 *Punkte A desselben von der*

Eigenschaft, dass A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *in eine und dieselbe Ebene fallen.*

Diese 10 Punkte sind gleichzeitig die Schnittpunkte der beiden Curven $c_{04}{}^6$ und $c_{15}{}^6$. Zwei auf einander folgende Curven dieser Art schneiden sich also im Allgemeinen in 10 Punkten. Zu ihnen gehört jeder Punkt des starren Systems, der gezwungen ist, sich auf einer festen Ebene zu bewegen.

5. Gehen wir zum Fall unendlicher naher Systemlagen über, so wird jede Ebene $[A_0 A_1 A_2 A_3]$ zu einer stationären, d. h. vierpunktig berührenden Schmiegungsebene der von A durchlaufenen Bahn. Die Curven i^3 und c^6 werden zu Schnittlinien zweier auf einander folgenden Flächen F^3. Wir erhalten daher folgende Sätze:

Bewegt sich ein System Σ *beliebig im Raume, so existiren in jedem Augenblick unendlich viele Punkte desselben, deren Bahnen vierpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen. Dieselben bilden eine Fläche dritter Ordnung* F^3, *welche die Wendecurve* i^3 *enthält. Auf dieser Fläche giebt es eine Curve sechster Ordnung* c^6, *deren Punkte Bahnen mit fünfpunktig berührenden Schmiegungsebenen besitzen; endlich sind* 10 *Punkte dieser Curve dadurch ausgezeichnet, dass ihre Bahnen von den Schmiegungsebenen sogar sechspunktig berührt werden.*

Die Enveloppe aller Flächen F^3 *zerfällt in zwei Flächen von verschiedener kinematischer Bedeutung. Die eine ist der Ort aller Wendecurven und enthält diejenigen Punkte, welche Bahnen mit stationären Tangenten beschreiben; die andere ist der Ort aller derjenigen Punkte des Systems, deren Bahnen im Verlauf der Bewegung einmal fünfpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen. Auf dieser Fläche existirt überdies eine Curve derjenigen Punkte, welche Bahnen mit sechspunktig berührenden Schmiegungsebenen besitzen; dieselbe ist die Enveloppe aller Curven* c^6.

6. Auf der Fläche $F_{03}{}^3$ giebt es noch eine andere Curve sechster Ordnung, welche erwähnenswert ist. Unter den Punkten des Systems Σ, welche auf $F_{03}{}^3$ liegen, existiren nämlich im Speciellen noch solche, für welche die vier Lagen A_0, A_1, A_2, A_3 nicht allein derselben Ebene, sondern sogar demselben Kreise angehören. Für die Punkte dieser Art

müssen sich die drei entsprechenden Normalebenen α_{01}^{v}, α_{12}^{v}, α_{23}^{v} in einer und derselben Geraden schneiden. Ist nun ε eine beliebige Ebene von Σ, so bilden die Normalebenen ihrer Punkte drei collineare Ebenenbündel, deren Scheitel die Nullpunkte von ε_{01}^{m}, ε_{12}^{m}, ε_{23}^{m} sind, die im Allgemeinen nicht zusammenfallen. Es giebt aber bekanntlich für drei collineare Ebenenbündel, deren Scheitel nicht zusammenfallen, im Allgemeinen sechs Geraden, in denen sich je drei homologe Ebenen der drei Bündel schneiden; also enthält auch die Ebene ε im Allgemeinen sechs Punkte der betrachteten Art. Demnach ergiebt sich:

Sind vier Lagen des räumlichen Systems Σ beliebig gegeben, so existiren in demselben unendlich viele Punkte A von der Eigenschaft, dass A_0, A_1, A_2, A_3 demselben Kreise angehören. Dieselben bilden eine Raumcurve sechster Ordnung, welche auf der Fläche F_{03}^{3} gelegen ist.

Wir bezeichnen diese Curve durch k_{0123}^{6} oder auch durch k_{03}^{6}. Eine analoge Curve $k_{03}^{6\prime}$ existirt im System Σ' für die umgekehrte Bewegung. Die Punkte beider Curven bilden eine Ausnahme von der oben gefundenen Regel, dass jedem Punkt des einen Systems in Bezug auf die cubische Verwandtschaft ein bestimmter Punkt des andern zugeordnet ist. Denn da die Normalebenen α_{01}^{v}, α_{12}^{v}, α_{23}^{v} eines Punktes A von k_{03}^{6} sich in derselben Geraden schneiden, so entspricht dem Punkt A von Σ im System Σ' nicht mehr ein Punkt, sondern eine Gerade, nämlich die zur Bahn des Punktes A zugehörige Krümmungsaxe. Dasselbe gilt für die Punkte der Curve $k_{03}^{6\prime}$ von Σ'.

Ist nun k_a die Krümmungsaxe dieses Punktes A, so folgt auch umgekehrt, dass *jedem* Punkt B' von k_a im System Σ der Punkt A zugeordnet ist. Nun entsprach jeder Ebene ε' von Σ' im System Σ eine Fläche dritter Ordnung; da aber ε' mit der Krümmungsaxe k_a *jedes* Punktes A von k_{03}^{6} mindestens einen Punkt B' gemein hat, so folgt, dass auf dieser Fläche dritter Ordnung alle Punkte von k_{03}^{6} liegen; d. h. jede Fläche dritter Ordnung von Σ, welche in der cubischen Verwandtschaft einer Ebene von Σ' entspricht, enthält die Curve

$k_{03}{}^6$; ebenso liegt $k_{03}{}^{6'}$ auf allen Flächen von Σ', welche den Ebenen von Σ zugeordnet sind.

Die Curven $k_{03}{}^6$ und $k_{03}{}^{6'}$ heissen die *Fundamentalcurven* der cubisch verwandten räumlichen Systeme Σ und Σ'.

7. Da die Punkte A von $k_{03}{}^6$ die Eigenschaft haben, dass die drei Normalebenen $\alpha_{01}{}^v$, $\alpha_{12}{}^v$, $\alpha_{23}{}^v$ durch dieselbe Gerade gehen, so gehört ein Punkt von Σ der Curve an, wenn für ihn zwei dieser Normalebenen zusammenfallen. Jede Ebene $\alpha_{01}{}^v$, welche mit der entsprechenden Ebene $\alpha_{12}{}^v$ zusammenfällt, ist eine Hauptebene des von den Systemen $\Sigma_{01}{}^v$ und $\Sigma_{12}{}^v$ gebildeten Complexes $\mathfrak{C}_{012}{}^{(2)}$ der Mittelpunktsaxen k_a. Nun enthält dieser Complex im Allgemeinen vier imaginäre Hauptebenen; daher liegen die vier imaginären Punkte von Σ, deren Normalebenen diese Hauptebenen sind, auf der Curve $k_{03}{}^6$.

Solcher Gruppen von je vier imaginären Punkten, die auf $k_{03}{}^6$ liegen, giebt es im Ganzen vier. Denn für jeden Punkt A dieser Curve gehen nicht nur $\alpha_{01}{}^v$, $\alpha_{12}{}^v$, $\alpha_{23}{}^v$, sondern auch die Ebenen $\alpha_{02}{}^v$, $\alpha_{03}{}^v$, $\alpha_{13}{}^v$, welche auf den Sehnen A_0A_2, A_0A_3, A_1A_3 in ihren Mittelpunkten senkrecht stehen, durch eine und dieselbe Gerade k_a. Nun lassen sich aus den sechs Systemen

$$\Sigma_{01}{}^v,\ \Sigma_{02}{}^v,\ \Sigma_{03}{}^v,\ \Sigma_{12}{}^v,\ \Sigma_{13}{}^v,\ \Sigma_{23}{}^v$$

im Ganzen vier Complexe bilden, nämlich

$$\mathfrak{C}_{012}{}^{(2)},\ \mathfrak{C}_{013}{}^{(2)},\ \mathfrak{C}_{023}{}^{(2)},\ \mathfrak{C}_{123}{}^{(2)},$$

also giebt es in der That vier Gruppen solcher imaginären Punkte auf $k_{03}{}^6$.

Betrachten wir noch eine fünfte Systemlage Σ_4, und ist $k_{14}{}^6$ die Curve derjenigen Punkte A von Σ, für welche A_1, A_2, A_3, A_4 auf einem Kreise liegen, so enthält dieselbe diejenigen 16 imaginären Punkte von Σ, welche den imaginären Hauptebenen der Complexe

$$\mathfrak{C}_{123}{}^{(2)},\ \mathfrak{C}_{124}{}^{(2)},\ \mathfrak{C}_{134}{}^{(2)},\ \mathfrak{C}_{234}{}^{(2)}$$

entsprechen. Beide Curven haben daher die vier imaginären Punkte gemein, welche den Hauptebenen des Complexes $\mathfrak{C}_{123}{}^{(2)}$ in Σ zugeordnet sind, und es folgt:

Die beiden Curven $k_{03}{}^6$ und $k_{14}{}^6$ schneiden sich im Allge-

meinen in vier imaginären Punkten, nämlich in denjenigen, welche den Hauptebenen des Mittelpunktsaxen-Complexes $\mathfrak{C}_{123}^{(2)}$ *entsprechen.*

Das analoge gilt für die Curven $k_{03}^{6\prime}$ und $k_{14}^{6\prime}$ von Σ' für die umgekehrte Bewegung.

8. Für unendlich nahe Lagen der räumlichen Systeme erhalten die Punkte der Curven k_{03}^{6} und $k_{03}^{6\prime}$ die Eigenschaft, dass ihre Bahnen einen vierpunktig berührenden Krümmungskreis besitzen; wir erhalten demnach folgenden Satz:

Bewegt sich ein unveränderliches System Σ beliebig im Raume, so giebt es in demselben in jedem Augenblick unendlich viele Punkte, deren Bahnen gerade vierpunktig berührende Krümmungskreise besitzen. Dieselben bilden eine Raumcurve sechster Ordnung k^6. Eine analoge Curve $k^{6\prime}$ existirt für die umgekehrte Bewegung. Beide Curven sind die Fundamentalcurven der momentanen cubischen Verwandtschaft, die zwischen den Räumen Σ und Σ' besteht; die Curve k^6 liegt daher auf F^3, ebenso liegt $k^{6\prime}$ auf $F^{3\prime}$.

Da zwei auf einander folgende Curven k^6 nur vier imaginäre Punkte gemein haben, so giebt es im Allgemeinen keinen im Endlichen gelegenen reellen Punkt von Σ, welcher von seinem Krümmungskreis fünfpunktig berührt wird.

9. Wir betrachten schliesslich fünf beliebig gewählte Systemlagen Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, und die zu den Sehnen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 gehörigen Systeme von Normalebenen Σ_{01}^{ν}, Σ_{12}^{ν}, Σ_{23}^{ν}, Σ_{34}^{ν}. Je vier homologe Ebenen α_{01}^{ν}, α_{12}^{ν}, α_{23}^{ν}, α_{34}^{ν} bilden ein Tetraeder; es kann jedoch der Fall eintreten, dass sich dieselben in einem und demselben Punkt, nämlich in A', schneiden. Ist nun g eine beliebige Gerade von Σ, so bilden die Normalebenen ihrer Punkte für die fünf auf einander folgenden Lagen von Σ vier projectivische Ebenenbüschel, deren Axen g_{01}^{ν}, g_{12}^{ν}, g_{23}^{ν}, g_{34}^{ν} sind. Es giebt aber bekanntlich im Allgemeinen je vier Ebenen eines jeden Büschels, welche sich mit den entsprechenden Ebenen der andern drei Büschel in einem und demselben Punkte schneiden. Demnach existiren auf der beliebigen Geraden g im Allgemeinen vier Punkte der betrachteten Art, nämlich diejenigen

vier Punkte, welche den vier Ebenen eines jeden Büschels in Σ entsprechen. Es giebt daher unendlich viele solcher Punkte, und zwar bildet die Gesammtheit derselben eine Fläche vierter Ordnung, die wir durch F_{01234}^4 oder auch durch F_{04}^4 bezeichnen. Jeder Punkt dieser Fläche ist dadurch characterisirt, dass er für alle fünf Lagen von Σ auf derselben Kugel bleibt.

Der Punkt A' ist der Schnittpunkt der Normalebenen α_{01}^v, α_{12}^v, α_{23}^v, α_{34}^v; folglich schneiden sich die Normalebenen von A' für die umgekehrte Bewegung, d. h. die Ebenen $\alpha_{01}^{v'}$, $\alpha_{12}^{v'}$, $\alpha_{23}^{v'}$, $\alpha_{34}^{v'}$ im Punkte A. Der Punkt A' ist daher ein Punkt, welcher bei der umgekehrten Bewegung für alle fünf Lagen von Σ' auf derselben Kugel bleibt, und diese Kugel hat A zum Mittelpunkt. Andrerseits ist A' der Mittelpunkt der zu A gehörigen Kugel; es folgt daher, dass die Mittelpunkte der Kugeln, welche zu den Punkten A von F_{04}^4 gehören, die Fläche $F_{04}^{4'}$ bilden, deren Punkte A' bei der umgekehrten Bewegung für alle fünf Lagen von Σ' auf derselben Kugel bleiben, und dass auch F_{04}^4 die Fläche der Mittelpunkte der zu den Punkten A' gehörigen Kugeln ist.

Die Fläche F_{04}^4 enthält die beiden Curven k_{03}^6 und k_{14}^6. Denn ist A ein Punkt von k_{03}^6, so liegen A_0, A_1, A_2, A_3 auf einem Kreis, also liegen diese vier Punkte mit A_4 auf einer Kugel; ebenso gehören, wenn B ein Punkt von k_{14}^6 ist, die fünf Punkte B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 einer Kugel an, weil B_1, B_2, B_3, B_4 vier Punkte eines Kreises sind. Das entsprechende gilt für die umgekehrte Bewegung. Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Sind fünf Lagen des räumlichen Systems Σ beliebig gegeben, so existiren in demselben unendlich viele Punkte A von der Eigenschaft, dass A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 derselben Kugel angehören. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet eine Fläche vierter Ordnung F_{04}^4, welche die Curven k_{03}^6 und k_{14}^6 enthält. Die Mittelpunkte der zu den Punkten von F_{04}^4 gehörigen Kugeln bilden ebenfalls eine Fläche vierter Ordnung $F_{04}^{4'}$. Beide Flächen entsprechen einander in der cubischen Verwandtschaft der Räume Σ und Σ'. Für die umgekehrte Bewegung vertauschen beide Flächen ihre Bedeutung.

10. Sei Σ_5 irgend eine sechste Systemlage, und $F_{15}{}^4$ die Fläche der Punkte A, für welche A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 auf derselben Kugel bleiben. Die Flächen $F_{04}{}^4$ und $F_{15}{}^4$ enthalten beide die Curve $k_{14}{}^6$; sie schneiden sich daher ausserdem in einer Curve zehnter Ordnung $k_{05}{}^{10}$. Da $F_{04}{}^4$ die Curve $k_{05}{}^{10}$ enthält, so liegt auf der Fläche $F_{15}{}^4$ noch eine analoge Curve $k_{16}{}^{10}$; $F_{15}{}^4$ enthält daher die beiden Curven $k_{05}{}^{10}$ und $k_{16}{}^{10}$, und das gleiche gilt für jede Fläche dieser Art.

Jeder Punkt von $k_{05}{}^{10}$ wird im Allgemeinen die Eigenschaft haben, dass er für alle sechs betrachteten Systemlagen auf derselben Kugel bleibt. Ist dagegen B ein Punkt von $k_{14}{}^6$, so liegen zwar einerseits B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 und andrerseits B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 auf je einer Kugel; aber da B_1, B_2, B_3, B_4 Punkte desselben Kreises sind, so werden die beiden Kugeln im Allgemeinen nicht zusammenfallen.

Ist A' der Mittelpunkt der zu einem Punkt A von $k_{05}{}^{10}$ gehörigen Kugel, so ist A' Schnittpunkt von fünf Normalebenen; also ist auch A Schnittpunkt der fünf Normalebenen von A' für die umgekehrte Bewegung; d. h. A' ist ein Punkt der Curve $k_{05}{}^{10\prime}$ und A der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel. Also folgt:

Sind sechs Lagen des räumlichen Systems Σ beliebig gegeben, so existirt in demselben eine Curve zehnter Ordnung $k_{05}{}^{10}$, deren Punkte für alle sechs Lagen von Σ auf je einer Kugel bleiben. Die Mittelpunkte dieser Kugeln bilden ebenfalls eine Raumcurve zehnter Ordnung $k_{05}{}^{10\prime}$. Beide Curven entsprechen einander in der cubischen Verwandtschaft der Systeme Σ und Σ'. Für die umgekehrte Bewegung vertauschen beide Curven ihre Bedeutung.

11. Wir nehmen endlich noch eine siebente Systemlage Σ_6 hinzu und die Fläche $F_{26}{}^4$, deren Punkte A die Eigenschaft haben, dass A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 auf derselben Kugel liegen. Die drei Flächen $F_{04}{}^4$, $F_{15}{}^4$, $F_{26}{}^4$ schneiden sich in 64 Punkten. Jeder derselben hat die Eigenschaft, in fünf auf einander folgenden Lagen auf einer Kugel zu bleiben. Alle diejenigen dieser 64 Punkte, welche nicht gleichzeitig auf $k_{14}{}^6$ oder auf $k_{25}{}^6$ liegen, sind daher dadurch ausgezeichnet, dass ihre sieben auf einander folgenden Lagen einer und derselben Kugel angehören.

Ist dagegen A ein Punkt von k_{14}^6, so haben die beiden Kugeln, welche A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, resp. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 enthalten, vier Punkte eines Kreises gemein, und werden daher im Allgemeinen von einander verschieden sein, und dasselbe gilt aus ähnlichen Gründen für die Punkte von k_{25}^6.

Die Flächen F_{04}^4 und F_{15}^4 enthalten beide die Curve k_{14}^6. Dieselbe schneidet F_{26}^4 in 24 Punkten, welche auf allen drei Flächen liegen. Ebenso enthalten F_{15}^4 und F_{26}^4 die Curve k_{25}^6; ihre 24 Schnittpunkte mit F_{04}^4 gehören ebenfalls zu den 64 Schnittpunkten aller drei Flächen. Nun haben k_{14}^6 und k_{25}^6 vier imaginäre Punkte gemein (§ 9, 7); jeder derselben ist daher sowohl einer der Schnittpunkte von k_{14}^6 mit F_{26}^4, als auch einer der Schnittpunkte von k_{26}^6 mit F_{04}^4. Die beiden Gruppen von je 24 Punkten bilden deshalb nur 44 von einander verschiedene Punkte; es bleiben also noch 20 von den 64 Schnittpunkten, die nicht auf k_{14}^6 oder auf k_{25}^6 liegen, und es folgt:

Sind sieben Lagen des räumlichen Systems beliebig gegeben, so existiren im Allgemeinen 20 *Punkte A desselben, welche für alle sieben Systemlagen auf je einer und derselben Kugel bleiben.*

Diese 20 Punkte A sind gleichzeitig die Schnittpunkte der Curven k_{05}^{10} und k_{16}^{10}. Zu ihnen gehört jeder Punkt des starren Systems, welcher gezwungen ist, sich auf einer festen Kugel zu bewegen.

Für die umgekehrte Bewegung von Σ' existiren ebenfalls 20 Punkte dieser Art. Die 20 Punkte von Σ und die 20 Punkte von Σ' entsprechen einander mit Bezug auf die cubische Verwandtschaft. Jeder derartige Punkt A' ist Mittelpunkt der zum entsprechenden Punkt A gehörigen Kugel, ebenso ist A Kugelmittelpunkt von A' für die umgekehrte Bewegung.

12. Gehen wir endlich wieder zu unendlich nahen Systemlagen über, so wird die durch A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 gelegte Kugel zu einer stationären Schmiegungskugel der von A beschriebenen Bahn, welche fünf unendlich nahe Lagen von A enthält. Wir erhalten sonach den folgenden Satz:

Bewegt sich ein unveränderliches System Σ beliebig im Raume, *so giebt es in jedem Augenblick unendlich viele Punkte desselben, deren Bahnen fünfpunktig berührende Schmiegungskugeln besitzen. Dieselben bilden eine Fläche vierter Ordnung F^4. Die Mittelpunkte dieser Schmiegungskugeln bilden ebenfalls eine Fläche vierter Ordnung $F^{4\prime}$. Auf der Fläche F^4 giebt es eine Curve zehnter Ordnung k^{10}, deren Punkte sogar Bahnen mit sechspunktig berührenden Schmiegungskugeln besitzen. Die Mittelpunkte derselben bilden ebenfalls eine Curve zehnter Ordnung $k^{10\prime}$, welche auf $F^{4\prime}$ liegt. Endlich sind sogar 20 Punkte A der Fläche F^4 dadurch ausgezeichnet, dass sie Bahnen mit siebenpunktig berührenden Schmiegungskugeln besitzen. Die Mittelpunkte A' dieser Kugeln liegen auf der Curve $k^{10\prime}$. Die Flächen F^4 und $F^{4\prime}$, ebenso die Curven k^{10} und $k^{10\prime}$ und die Punkte A und A' sind entsprechende Curven in der cubischen Verwandtschaft der Räume Σ und Σ'. Für die umgekehrte Bewegung vertauschen die Flächen, die Curven und die Punkte ihre Bedeutung.*

Die Enveloppe aller Flächen F^4, welche den sämmtlichen Lagen von Σ entsprechen, zerfällt wiederum in zwei Flächen von verschiedenem kinematischen Character. Die eine derselben ist der Ort aller Curven k^6 und enthält diejenigen Punkte von Σ, deren Bahnen im Verlauf der Bewegung einmal einen stationären Krümmungskreis besitzen; die andere ist der Ort aller Curven k^{10} und besteht aus denjenigen Punkten des Systems, welche Bahnen mit sechspunktig berührenden Schmiegungskugeln besitzen. Auf dieser Fläche existirt überdies eine Curve derjenigen Punkte, welche Bahnen mit siebenpunktig berührenden Schmiegungskugeln beschreiben; sie ist die Enveloppe aller Curven k^{10}.

Die wesentlichen Bestimmungsstücke der Bahn irgend eines Systempunktes A sind die Tangente, die Schmiegungsebene, die Normalebene, die Hauptnormale, die Krümmungsaxe und die Schmiegungskugel. Es kann im Allgemeinen keinen Punkt geben, dessen Bahn eine stationäre Normalebene oder Hauptnormale besitzt; denn es existirt im Allgemeinen kein Punkt des Systems, der sich in irgend einem Augenblick in Ruhe befindet. Es folgt somit, dass wir im Vorstehenden die Aufgabe gelöst haben, die geometrischen Oerter derjenigen

Punkte des Systems zu bestimmen, deren Bahnen in irgend einem Augenblick stationäre Eigenschaften besitzen.

§ 10. Die Grade der Bewegungsfreiheit.

1. Wir haben bisher stets vorausgesetzt, dass das räumliche System Σ eine ganz bestimmte Bewegung ausführt, und jeder Punkt des Systems im Verlauf derselben eine bestimmte Curve durchläuft. Ist daher Σ_0 irgend eine Lage von Σ, so kann sich das System von dieser Lage aus nur auf eine Art weiter bewegen, indem es nämlich eine unendlich kleine Schraubenbewegung um eine bestimmte Axe erfährt.

Es ist ersichtlich, dass es möglich ist, Bedingungen aufzustellen, welche dem System gestatten, sich von der Lage Σ_0 aus auf mehr als eine Art weiter zu bewegen. Haben wir es z. B. mit einem System zu thun, von welchem ein Punkt O fest ist, das aber sonst keinen Beschränkungen seiner Beweglichkeit unterworfen ist, so kann dasselbe noch doppelt unendlich viele verschiedene Bewegungen ausführen; denn jede Drehung um eine durch O gehende Axe ist eine dieser Bewegungen.

Je nach der Mannigfaltigkeit der Bewegungen, welche ein System von irgend einer Lage aus beginnen kann, spricht man von einem höheren oder niederen Grad der Bewegungsfreiheit, welcher dem System zukommt. Ist dasselbe unbeweglich, so sagt man, es besitze den nullten Grad der Freiheit, d. h. es ist unfrei; ist ihm nur eine einzige Bewegung erlaubt, so sagt man, es besitze den ersten Grad der Freiheit, oder Freiheit erster Stufe; wenn es von der Lage Σ_0 aus einfach unendlich viele Bewegungen beginnen kann, so schreibt man ihm Freiheit zweiter Stufe zu u. s. w.[27])

2. Wir wollen die wesentlichsten Gesetze, welche die Freiheit der Beweglichkeit eines Systems betreffen, im Folgenden ableiten. Wir haben bereits früher bewiesen, dass das System eine einzige bestimmte Bewegung auszuführen gezwungen ist, wenn in jedem Augenblick fünf Stralen des linearen Complexes gegeben sind, welcher die Bewegung characterisirt; das System besitzt alsdann Freiheit erster Stufe.

Seien l, m, n, p, q die fünf Complexstralen. Jeder Complexstral hat die Eigenschaft, Normale für die Bahnen aller seiner Punkte zu sein. Sind daher L, M, N, P, Q irgend welche Punkte von l, m, n, p, q, so liegt die Bahn von L jedenfalls auf einer Fläche, welche l zur Normale hat, ebenso liegt die Bahn von M auf einer Fläche, die m zur Normale hat, u. s. w. Wir dürfen daher in jedem Augenblick fünf Flächen beliebig annehmen, auf denen die Bahnen von je einem Systempunkt bleiben sollen, und es folgt:

Alle Punkte eines räumlichen Systems Σ beschreiben bestimmte Bahnen, sobald fünf Punkte desselben der Bedingung unterworfen werden, auf je einer Fläche zu bleiben. Das System besitzt Freiheit erster Stufe.

Die Bedingung, dass fünf Systempunkte sich auf gegebenen Flächen bewegen, lässt sich vielfach modificiren. Statt z. B. zu bestimmen, dass ein Punkt A von Σ auf einer festen Fläche Φ_a' laufe, dürfen wir auch vorschreiben, dass eine Fläche Φ_b von Σ stets durch einen festen Punkt B' gehe. Denn bei der umgekehrten Bewegung bleibt alsdann der Punkt B' von Σ' stets auf einer Fläche Φ_b; beide Bestimmungen sind also gleichwertig. Ebenso dürfen wir festsetzen, dass eine dem System Σ angehörige Fläche Φ_a eine Fläche Φ_a' des festen Raumes beständig berühre; denn diese Bestimmung läuft darauf hinaus, dass die gemeinsame Normale beider Flächen gleichzeitig Normale der Bahn des Berührungspunktes A ist.

Da die Geraden l, m, n, p, q nur der Bedingung unterworfen sind, Stralen eines linearen Complexes zu sein, so dürfen wir auch annehmen, dass zwei derselben, z. B. l und m sich schneiden. Nun waren L und M beliebige Punkte von l resp. m; lassen wir sie beide in den Schnittpunkt (lm) fallen, so sind zwei Normalen desselben bestimmt. Der Punkt (lm) beschreibt daher im betrachteten Augenblick ein bestimmtes Curvenelement. Wenn wir also vorschreiben, dass ein Punkt des Systems eine gewisse Curve durchlaufen soll, so ist dies gleichwertig mit der Bedingung, dass zwei Punkte auf Flächen laufen. Dasselbe gilt von der Bedingung, dass eine

Curve des Systems, z. B. eine Gerade, beständig durch einen festen Punkt geht u. s. w.

3. Sind in jedem Augenblick nur vier Complexstralen, d. h. die Normalen von nur vier Punkten des räumlichen Systems gegeben, so sind nur vier Punkte des Systems an die Bedingung gebunden, auf gegebenen Flächen zu bleiben, und die Bewegung des Systems ist nicht mehr bestimmt. In der That, sind l, m, n, p die momentanen Normalen von vier Punkten L, M, N, P des Systems, so kann die Normale eines beliebigen fünften Punktes Q noch ganz beliebig gewählt werden, und erst, wenn dies geschehen, wird jeder Punkt von Σ von der momentanen Systemlage aus ein Element einer bestimmten Curve durchlaufen. Da nun q beliebig ist, so folgt, dass wenn vier Punkte des Systems gezwungen sind, auf festen Flächen zu bleiben, noch unendlich viele Bewegungen von Σ möglich sind, bei denen jeder Punkt eine Bahn beschreibt.

Für alle diese möglichen Bewegungen sind l, m, n, p Normalen, und die Geraden g und g^r, welche l, m, n, p treffen, conjugirte Geraden. Daher ist auch jede Gerade, welche g und g^r schneidet, Normalstral für alle zulässigen Bewegungen von Σ. Die Gesammtheit derselben bildet ein Stralsystem erster Ordnung und erster Classe, welches g und g^r zu Leitstralen hat, und durch die vier Stralen l, m, n, p vollständig bestimmt ist.

Durch den Punkt Q von Σ geht bereits ein Stral s des Stralsystems; wie man also auch die Normale q von Q annehmen mag, die Normalebene $[qs]$ der bezüglichen Bahn von q enthält stets die Gerade s. Der Punkt Q wird daher für alle möglichen momentanen Bewegungen, welche Σ gerade ausführen kann, auf einer Fläche bleiben, welche q zur Normale hat. Dies gilt für jede Lage des Systems Σ; wenn also vier Punkte des Systems gezwungen sind, auf festen Flächen zu bleiben, so wird auch jeder andere Punkt Q des Systems eine Fläche beschreiben. Diese Fläche soll die *Bahnfläche* des Punktes Q heissen.

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Sind vier Punkte des Systems gezwungen auf festen Flächen zu bleiben, so gilt dies von jedem Punkt. Die Normalen der Bahnflächen aller Punkte von Σ bilden für jede Systemlage das durch die Normalen der vier Punkte bestimmte Stralsystem und schneiden daher sämmtlich zwei feste Geraden.

4. In derjenigen Systemlage, in welcher g und g^v diese beiden Geraden sind, findet dieser Satz auf g und g^v keine Anwendung. Nämlich alle Punkte der Geraden g und g^v sind dadurch ausgezeichnet, dass durch sie unendlich viele Stralen des Stralsystems, d. h. unendlich viele Normalstralen hindurchgehen. Dieselben bilden einen ebenen Stralenbüschel. Wie daher auch die Normale q eines fünften Punktes Q gewählt werden möge, die Punkte von g und g^v werden in jedem Fall die nämliche Normalebene besitzen, nämlich die Ebene dieses Stralenbüschels. Die Normalebene eines jeden Punktes von g geht durch g^v, und die Normalebene jedes Punktes von g^v geht durch g; d. h. bei jeder zulässigen Bewegung von Σ rotirt g um g^v und g^v um g; also folgt:

Ist Σ_0 eine beliebige Systemlage von Σ, und sind g und g^v die beiden Geraden, welche von allen Normalen des Systems getroffen werden, so können sich die Punkte von g und g^v von der Lage Σ_0 aus nur auf Curven bewegen. Jede der beiden Geraden rotirt um die andere.

Ist daher A irgend ein Punkt von g oder g^v, so hat seine Bahnfläche für die betrachtete Systemlage im Allgemeinen einen biplanaren Knotenpunkt. Liegt ein Punkt von Σ für jede Systemlage auf einer solchen Geraden, so beschreibt er für die ganze Bewegung von Σ eine Curve.

5. Die vorstehenden Sätze lassen noch eine andere Art der Begründung zu, die auch dann anwendbar bleibt, wenn g und g^v imaginär sind. Diejenige Bewegung von Σ, bei welcher jeder Punkt eine Curve beschreibt, ist in jedem Augenblick durch einen linearen Stralencomplex definirt, und zwar so, dass alle Stralen des Complexes, welche durch einen beliebigen Punkt Q von Σ hindurchgehen, die Normalebene von Q bilden. Sei nun irgend eine Lage von Σ gegeben, so denken wir uns alle linearen Complexe, welche dieselben vier Stralen l,

m, *n*, *p*, also auch das durch *l*, *m*, *n*, *p* bestimmte Stralsystem gemein haben. Jeder dieser Complexe definirt eine Bewegung von Σ, bei welcher Q eine bestimmte Curve beschreibt; aber für alle diese Curven ist der durch Q gehende Stral q des Stralsystems eine Normale von Q. Die sämmtlichen Bahntangenten von Q liegen daher auf der Tangentialebene irgend einer Fläche, welche q zur Normale hat; d. h. bei allen Bewegungen von Σ, welche zulässig bleiben, wenn *l*, *m*, *n*, *p* Normalstralen sind, bleibt der Punkt Q für die betrachtete Systemlage auf derjenigen Fläche, deren Normale q ist.

Da das System von jeder Lage Σ_0 aus einfach unendlich viele Bewegungen beginnen kann, so sagt man von ihm, es besitzt *Bewegungsfreiheit zweiter Stufe.* Mit Benutzung dieser Bezeichnung können wir aus dem vorstehenden den folgenden Satz entnehmen:

Besitzt ein System Σ Freiheit zweiter Stufe, so bilden für alle in der Systemlage Σ_0 zulässigen Bewegungen die Normalebenen eines Punktes Q, der nicht auf g oder g^v liegt, einen Ebenenbüschel, und die Bahntangenten desselben einen ebenen Stralenbüschel.

Ist ε irgend eine Ebene von Σ, welche nicht durch g oder g^v geht, so enthält sie stets einen Stral s des Stralsystems. Der Nullpunkt von ε liegt daher für jede zulässige Bewegung von Σ auf s. Projiciren wir ferner die beiden Geraden g und g^v auf ε, so ist der Schnittpunkt der beiden Projectionen ein Punkt der Characteristik von ε (§ 6, 3), und es folgt:

In jeder Systemlage bilden die Nullpunkte einer Ebene ε für alle zulässigen Bewegungen eine Gerade, und ihre Characteristiken einen ebenen Stralenbüschel.

6. Alle Geraden eines Stralsystems, welche eine beliebige Gerade h treffen, bilden im Allgemeinen ein Hyperboloid, also gilt dies auch von den Normalen der Bahnflächen, welche zu den Punkten einer Geraden h von Σ gehören. Sei nun ε irgend eine beliebige zu h senkrechte Ebene, so giebt es zwei Tangentialebenen des Hyperboloids, welche durch die unendlich ferne Gerade von ε gehen, also auf h senkrecht stehen. Jede von beiden enthält eine Gerade der von den

Normalen gebildeten Regelschaar. Es giebt daher zwei Punkte von h, deren Normalen g rechtwinklig schneiden; daher liegt h in der Tangentialebene dieser Bahnflächen, und es folgt:

Die Normalen der Bahnflächen aller Punkte einer Geraden h bilden im Allgemeinen ein Hyperboloid. Es giebt im Allgemeinen zwei Bahnflächen, welche h zur Tangente haben.

7. Um die von den Tangentialebenen aller Bahnflächen gebildete Fläche zu finden, denken wir uns, dass Σ irgend zwei der zulässigen Bewegungen beginne. Für jede derselben bilden die Bahntangenten der Punkte Q von h eine zur Punktreihe h perspektivische paraboloidische Regelschaar. Die beiden Bahntangenten von Q geben die Tangentialebene der Bahnfläche von Q; die Gesammtheit dieser Ebenen ist daher das Erzeugniss zweier paraboloidischen Regelschaaren, welche zur Punktreihe h perspectivisch liegen. Dieselben bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, welcher die unendlich ferne Ebene enthält. Da h nur zwei Bahnflächen berührt, so gehen nur zwei Ebenen dieses Büschels durch h, d. h. h ist eine Axe des Ebenenbüschels. Also folgt:

Die Tangentialebenen der Bahnflächen aller Punkte von h bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, welcher die unendlich ferne Ebene enthält. Die Gerade h ist eine Axe desselben.

8. Die zweite Regelschaar des obigen Hyperboloids besteht aus Geraden, welche die Normalen der Bahnflächen aller Punkte von h schneiden. Jede derselben muss daher für irgend eine dem System Σ erlaubte Bewegung zu h^v conjugirt sein. In der That, für jede Bewegung, welche Σ beginnen kann, gehen die Normalen aller Punkte von h sämmtlich durch eine Gerade; also liegt diese Gerade auf dem Hyperboloid, und ebenso ist das umgekehrte richtig. Dies lässt sich folgendermassen aussprechen:

Alle Geraden, welche einer Geraden h von Σ in Bezug auf sämmtliche zulässigen Bewegungen conjugirt sind, bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloids. Die andere Regelschaar desselben besteht aus den Normalen der Bahnflächen aller Punkte von h.

9. Zu jeder Bewegung, welche dem System Σ von einer

bestimmten Systemlage Σ_0 aus gestattet ist, gehört ein linearer Stralencomplex. Die Hauptaxe desselben ist die Axe derjenigen unendlich kleinen Schraubenbewegung, welche durch ihn definirt ist. Es fragt sich, was bildet die Gesammtheit dieser Hauptaxen, d. h. was bilden die Axen aller derjenigen unendlich kleinen Schraubenbewegungen, welche das System Σ ausführen kann, wenn es sich in der Lage Σ_0 befindet.

Die Gesammtheit dieser Momentanaxen ist geometrisch identisch mit den Hauptaxen aller linearen Stralencomplexe, welche die vier Normalen l, m, n, p, resp. das durch sie bestimmte Stralsystem enthalten.

Wir nennen die beiden Geraden, welche von l, m, n, p getroffen werden, die also conjugirte Geraden für alle Bewegungen von Σ sind, wieder g und g^{v} und bezeichnen ihr gemeinsames Lot durch k. Ist nun x eine der Momentanaxen, so steht x jedenfalls auf k senkrecht. (§ 4, 4.) Ferner bilden diejenigen Geraden des Stralsystems, welche x treffen, ein gleichseitiges Paraboloid, denn jeder Normalstral, welcher die Momentanaxe trifft, steht auf ihr senkrecht.

Sei nun ε irgend eine Ebene, welche durch g geht, und sei E ihr Schnittpunkt mit g^{v}. Sie enthält unendlich viele Stralen s des Stralsystems, welche einen Stralenbüschel mit dem Mittelpunkt E bilden, und schneidet das Paraboloid in einem einzigen durch E gehenden Stral dieses Büschels. Die willkürlich angenommene Momentanaxe x kann daher als eine Gerade definirt werden, welche gleichzeitig auf k und dem eben bestimmten Stral s senkrecht steht. Dies gilt für jede Momentanaxe. Umgekehrt muss aber auch jede Gerade, welche zugleich zu k und einem Stral s normal ist, die Hauptaxe x eines linearen Complexes, d. h. eine Momentanaxe sein; denn bezeichnen wir den Schnittpunkt von s und x durch X, und ist t irgend eine durch X gehende und zu x senkrechte Gerade, so giebt es stets einen und nur einen linearen Complex, für welchen die fünf Stralen l, m, n, p und t Complexstralen sind. Dieser Complex hat aber in der That die Eigenschaft, dass g und g^{v} zwei conjugirte Geraden sind und x seine Hauptaxe ist.

10. Wir erhalten sonach die sämmtlichen Momentanaxen, wenn wir alle Geraden construiren, welche gleichzeitig auf k und einem Stral s des in ε liegenden ebenen Stralenbüschels senkrecht stehen. Um das gemeinschaftliche Lot von k und s zu erhalten, construiren wir eine beliebige Ebene, die zu k und s parallel ist; dann legen wir durch k eine zu ihr senkrechte Ebene $\varkappa$, und durch s eine zu ihr senkrechte Ebene σ, so schneiden sich die beiden Ebenen $\varkappa$ und σ in dem gemeinschaftlichen Lot der Geraden k und s.

Ist nun K ein beliebiger Punkt von k, so ziehen wir durch K Stralen s' parallel zu s; alsdann bilden die Ebenen $[ks']$ einen zum Büschel der Stralen s projectivischen Ebenenbüschel. Die Ebenen senkrecht zu ihnen durch k bilden daher ebenfalls einen zu den Stralen s projectivischen Ebenenbüschel, und jede dieser Ebenen ist eine Ebene $\varkappa$. Ferner ziehen wir durch den Mittelpunkt E des Stralbüschels eine Gerade k' parallel zu k, so bilden die Ebenen $[k's]$ einen zu dem Stralbüschel perspectivischen Ebenenbüschel. Errichten wir jetzt auf der Ebene $[k's]$ eine zu ihr senkrechte Ebene, welche durch s geht, so ist dies eine Ebene σ, und die Gesammtheit derselben umhüllt einen Kegel zweiter Ordnung, und zwar denjenigen speciellen Kegel, welcher Reciprocalkegel des orthogonalen Kegels ist. Die Gesammtheit der Ebenen σ bildet daher einen zum Büschel der Stralen s perspectivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Der Ebenenbüschel erster Ordnung der Ebenen $\varkappa$ und der Ebenenbüschel zweiter Ordnung der Ebenen σ erzeugen die von den Momentanaxen gebildete Fläche; dieselbe ist daher von der dritten Ordnung und hat die Gerade k zur Doppelgeraden. Die Geraden g und g^v liegen ebenfalls auf der Fläche; denn betrachten wir wieder die Ebene ε und den in ihr liegenden Stralenbüschel, dessen Scheitel E auf g^v liegt, so giebt es stets einen Stral des Büschels, der auf g^v senkrecht steht. Daher hat g^v in der That die Eigenschaft, gleichzeitig auf k und einem Stral s senkrecht zu stehen. Dasselbe gilt von g; also folgt:

Für jede Lage des Systems Σ bildet die Gesammtheit der

Momentanaxen, welche den zulässigen Bewegungen von Σ entsprechen, eine geradlinige Fläche dritter Ordnung, welche g und g^{v} enthält, und den kürzesten Abstand von g und g^{v} zur Doppelgeraden hat. Jede Momentanaxe steht auf der Doppelgeraden der Fläche senkrecht.

Diese Fläche soll *Cylindroid* genannt werden. Sie lässt sich rein geometrisch als Fläche der Hauptaxen aller linearen Complexe definiren, welche ein und dasselbe Stralsytem erster Ordnung und erster Classe gemein haben.[28])

11. Die Ebene ε, welche durch g geht und g^{v} in E trifft, schneidet die Fläche ausser in g noch in einem Kegelschnitt; derselbe wird von denjenigen Punkten gebildet, in welchen die Stralen s des in ε liegenden Stralbüschels von den zu ihnen senkrechten Geraden x der Fläche getroffen werden. Wir projiciren den Kegelschnitt, den Stralenbüschel und die Geraden x der Fläche auf eine zu k senkrechte Ebene η. Ist dann s_1 die Projection eines beliebigen Strales s, und x_1 die Projection der Geraden x, die auf diesem Stral s senkrecht steht, so stehen auch s_1 und x_1 auf einander senkrecht. Alle Stralen s_1 gehen durch die Projection E_1 des Punktes E, alle Geraden x_1 gehen durch den Schnittpunkt H_1 von k und η. Die Punkte $(s_1 x_1)$ bilden daher einen Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungslinie $H_1 E_1$ ist; und dieser Kreis ist die Projection des Kegelschnittes, welchen ε mit der Fläche gemein hat. Nun ist aber g vor den anderen Geraden der Fläche nicht ausgezeichnet; zudem ist jede Ebene, welche eine Gerade des Cylindroids enthält, eine Tangentialebene desselben; wir erhalten daher folgenden Satz:

Jede Tangentialebene des Cylindroids hat mit demselben ausser ihrer Berührungsgeraden eine Ellipse gemein. Die Projection derselben auf einer zur Doppelgeraden senkrechten Ebene ist ein Kreis, welcher durch einen Punkt der Doppelgeraden geht.

12. Wir haben bereits erwähnt, dass alle Stralen des Stralsystems, welche eine Gerade x des Cylindroids treffen, ein gleichseitiges Paraboloid bilden, d. h. dass jeder derselben auf x senkrecht steht. Jeder dieser Stralen ist aber Normale für die Bahnfläche desjenigen Punktes von x, welchen er

trifft; folglich ist x Tangente der Bahnfläche. Während also eine beliebige Gerade des Systems Σ nur die Bahnflächen zweier ihrer Punkte berührt, ist jede Gerade x Tangente der Bahnflächen aller ihrer Punkte. Da die Normalen aller Bahnflächen ein gleichseitiges Paraboloid bilden, so bilden die Tangentialebenen derselben einen Ebenenbüschel, der x zur Axe hat. Wir erhalten damit eine neue kinematische Eigenschaft des Cylindroids, nämlich:

Jede Gerade x des Cylindroids ist Tangente der Bahnflächen aller ihrer Punkte. Die Tangentialebenen aller Bahnflächen bilden einen Ebenenbüschel, der x zur Axe hat.

13. Sind für die Bewegung eines räumlichen Systems Σ nur drei Normalstralen gegeben, sind also für irgend eine Systemlage Σ_0 die Geraden l, m, n Normalstralen von drei Punkten L, M, N, so kann Σ von der Lage Σ_0 aus alle diejenigen Bewegungen ausführen, deren characteristischer Complex die Stralen l, m, n enthält. Enthält aber ein linearer Stralencomplex drei Geraden l, m, n, so sind alle Geraden der durch l, m, n bestimmten Regelschaar R^2 Complexstralen. Die Erzeugenden der Regelschaar R^2 sind daher Normalstralen für jede der zulässigen Bewegungen von Σ. Ist also Q irgend ein Punkt von R^2, so ist die durch Q gehende Erzeugende q von R^2 Normalstral für alle zulässigen Bewegungen; ist dagegen A ein beliebiger Punkt des Systems Σ, so können wir eine der zulässigen Bewegungen von Σ dadurch definiren, dass wir noch irgend zwei durch A gehende Geraden a und b als Complexstralen annehmen; dieselben bestimmen nämlich mit l, m, n zusammen einen linearen Stralencomplex, also auch eine bestimmte Bewegung von Σ. Die Ebene $[ab]$ ist Normalebene des Punktes A; und da a und b ganz willkürlich angenommen werden können, so kann jede durch A gehende Ebene als Normalebene von A gewählt werden. Der Punkt A kann sich daher nach allen Richtungen bewegen, und es folgt:

Sind drei Punkte L, M, N des Systems Σ genötigt, auf festen Flächen zu bleiben, und ist Σ_0 irgend eine Lage von Σ, so kann jeder andere Punkt des Systems sich von seiner momen-

tanen Lage aus im Allgemeinen nach jeder beliebigen Richtung bewegen. Ausgenommen davon sind die Punkte der durch die Normalen l, m, n der Punkte L, M, N bestimmten Regelschaar. Jeder derselben ist gezwungen auf einer Fläche zu bleiben; die Normale dieser Fläche ist die durch ihn gehende Erzeugende der Regelschaar.

Man sagt in diesem Fall, dass das räumliche System *Bewegungsfreiheit dritter Stufe* besitzt.

14. Sind g und h irgend zwei Geraden der zweiten Regelschaar des durch l, m, n, bestimmten Hyperboloids, und ist p irgend eine nicht auf dem Hyperboloid liegende Gerade, welche g und h trifft, so sind l, m, n, p Normalstralen für unendlich viele zulässigen Bewegungen von Σ. Die Geraden g und h sind daher conjugirte Geraden für alle diese Bewegungen. Demnach folgt:

Je zwei Geraden g und h der zweiten Regelschaar des durch l, m, n bestimmten Hyperboloids sind conjugirte Geraden für unendlich viele zulässigen Bewegungen, welche das räumliche System von der Lage Σ_0 aus beginnen kann. Bei allen diesen Bewegungen beschreibt jeder Punkt von Σ Bahnelemente, die auf je einer festen Fläche liegen.

15. Sind nur zwei Normalstralen l und m gegeben, so sagt man, das System besitze Freiheit vierter Stufe. In jeder Lage Σ_0 sind dem System dreifach unendlich viele Bewegungen gestattet. Alle Punkte der beiden Normalstralen sind gezwungen auf festen Flächen zu bleiben. Die Stralen l und m bestimmen ein Stralsystem, dessen Leitstralen sie sind. Je zwei Geraden g und h dieses Stralsystems können als conjugirte Geraden für unendlich viele Bewegungen des Systems gewählt werden.

Ist nur ein Normalstral l gegeben, so hat das System Freiheit fünfter Stufe; dasselbe kann von jeder Lage Σ_0 aus vierfach unendlich viele Bewegungen beginnen. Die Punkte von l bleiben jedoch bei allen diesen Bewegungen auf derselben Fläche. Je zwei Geraden, welche l treffen, sind conjugirte Geraden für unendlich viele Bewegungen von Σ. Ist endlich das System absolut frei beweglich, so sagt man auch, dasselbe besitze Freiheit sechster Stufe. Für diesen Fall erhalten wir schliesslich, indem wir die entsprechenden Erörterungen auch hier durchführen, die natürliche Folgerung, dass je zwei beliebige Geraden des Raumes zu conjugirten Geraden gewählt werden können, und dass mit ihnen als conjugirten Geraden wiederum unendlich viele Bewegungen des Systems möglich sind.

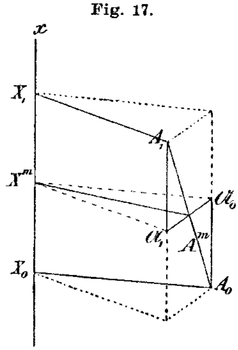
§ 11. **Metrische Relationen.**

1. Wir betrachten im Folgenden wieder zwei beliebig gewählte Systemlagen und die zu ihnen gehörige Schraubenbewegung.

Die ausgezeichnete Lage, welche die Axe derselben zu den beiden Systemen Σ_0 und Σ_1 hat, giebt Veranlassung zu einer Reihe von Formeln und metrischen Relationen, welche die entsprechenden Elemente beider Räume mit einander verbinden. Einige derselben sollen im Folgenden entwickelt werden; sie ergeben sich meist unmittelbar aus dem geometrischen Character der Schraubenbewegung.

Je zwei entsprechende Punkte A_0 und A_1 haben gleichen Abstand von der Schraubenaxe; die von A_0 und A_1 auf dieselbe gefällten Lote treffen sie in zwei entsprechenden Punkten X_0 und X_1, und die durch x und A_0, resp. A_1 gelegten Ebenen sind zwei entsprechende Ebenen α_0 und α_1. Der Winkel, welchen α_0 und α_1 mit einander bilden, giebt die Rotationscomponente der Schraubenbewegung, während die Strecke X_0X_1 gleich der Translationscomponente ist.

Fig. 17.



Das letzte Resultat lässt sich noch in die Form eines Satzes kleiden; wir erhalten nämlich:

Die Projectionen aller Sehnen auf der Axe der Schraubenbewegung sind constant, und zwar gleich der Gleitungscomponente.

Ist wieder A^m die Mitte der Sehne A_0A_1, so trifft die durch A^m gelegte Ebene α^v die Axe x im Punkte X^m, und A^mX^m steht senkrecht auf x. Wir bezeichnen den Abstand des Punktes A^m von x, d. h. die Strecke $A^m X^m$ durch r, den Rotationswinkel der Schraubenbewegung wieder durch 2Ω und die zugehörige Gleitung durch $2U$. Nun projiciren wir (Fig. 17) A_0 und A_1 auf die durch $A^m X^m$ gehende zu x senkrechte Ebene, und nennen die Projectionen dieser Punkte $\mathfrak{A}_0$ resp. $\mathfrak{A}_1$, so ist

$$\sphericalangle\, \mathfrak{A}_0 X^m \mathfrak{A}_1 = 2\Omega$$

und

$$A_0 \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 A_1 = U.$$

Daher erhalten wir aus dem Dreieck $A^m \mathfrak{A}_1 A_1$ die Gleichungen:

1) $$(\tfrac{1}{2}\overline{A_0 A_1})^2 = r^2 \operatorname{tg}^2 \Omega + U^2,$$

2) $$\operatorname{tg}(A_0 A_1,\, x) = r \operatorname{tg} \Omega : U.$$

2. Je zwei entsprechende Geraden g_0 und g_1 sind von der Axe der Schraubenbewegung gleichweit entfernt, und bilden gleiche Winkel mit derselben. Die beiden Punkte von x, welche von g_0 und g_1 den kürzesten Abstand besitzen, sind zwei entsprechende Punkte X_0 und X_1; ebenso sind die Punkte von g_0 und g_1, welche von x die kleinste Entfernung haben, zwei entsprechende Punkte G_0 und G_1 dieser Geraden. Die Strecke $X_0 X_1$ giebt wieder die Gleitungscomponente, während der von $X_0 G_0$ und $X_1 G_1$ gebildete Winkel die Rotationscomponente bestimmt.

Sei g^m wieder die Mittelgerade von g_0 und g_1, so ziehen wir durch irgend einen Punkt O von x drei Geraden $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}^m$ parallel resp. zu g_0, g_1, g^m. Da g_0, g_1, g^m drei Erzeugende eines Paraboloids sind, so liegen $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}^m$ in einer und derselben Ebene, und da g^m mit g_0 und g_1 gleiche Winkel bildet (§ 1, 4), so halbirt $\mathfrak{g}^m$ den Winkel $(\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_1)$. Ferner ist der Winkel, welchen die Ebenen $[x\mathfrak{g}_0]$ und $[x\mathfrak{g}_1]$ einschliessen, der Rotationswinkel 2Ω, also erhalten wir

$$\sin(\tfrac{1}{2}\, \mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_1) = \sin \Omega \sin(\mathfrak{g}_0 x)$$
$$\operatorname{tg}(\mathfrak{g}^m x) = \cos \Omega \operatorname{tg}(\mathfrak{g}_0 x)$$

und demnach auch

3) $$\sin(\tfrac{1}{2}\, g_0 g_1) = \sin \Omega \sin(g_0 x)$$

4) $$\operatorname{tg}(g^m x) = \cos \Omega \operatorname{tg}(g_0 x).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Winkel $(g_0 g_1)$ und $(g^m x)$ nur von Ω und dem Winkel $(g_0 x)$ abhängen; sie haben daher für alle einander parallelen Geraden von Σ denselben Wert.

3. Der kürzeste Abstand k von g^m und g^ν hat (§ 5, 4) die Eigenschaft, dass er die Axe x schneidet und auf ihr senkrecht steht. Er trifft g^m in demjenigen Punkte G^m, welcher G_0 und G_1 entspricht, und x im Punkte X^m. Sei G^ν sein Schnittpunkt mit g^ν; ferner möge die Strecke $G^m X^m$ durch r, und $G^\nu X^m$ durch ϱ bezeichnet werden.

Die Punkte G^m und G^ν können sowohl auf derselben Seite, wie auf verschiedenen Seiten von X^m liegen. So lange es sich, wie hier, nur um ein Paar conjugirter Geraden handelt, ist es gestattet, die Strecke r stets als positiv zu betrachten. Wir wollen aber festsetzen, dass die positiven Richtungen von r und ϱ entgegengesetzt sein sollen; d. h. ϱ ist als positiv zu betrachten, wenn G^m und G^ν auf verschiedenen Seiten von X^m liegen, und als negativ, wenn auf derselben Seite. Bei dieser Bestimmung ergiebt sich als Wert der Strecke $G^m G^\nu$ stets $r + \varrho$.

Auch das Vorzeichen der Winkel, welche g^m und g^ν mit x bilden, ist noch zu fixiren. Wir dürfen den Winkel, welchen g^m mit x bildet, wieder in jedem Fall als positiv betrachten. Ziehen wir nun durch irgend einen Punkt von x Parallelen $\mathfrak{g}^m$ und $\mathfrak{g}^\nu$ zu g^m resp. g^ν, so soll der Winkel, welchen g^ν mit x bildet, dann als positiv gerechnet werden, wenn x zwischen $\mathfrak{g}^m$ und $\mathfrak{g}^\nu$ liegt, dagegen negativ, wenn dies nicht der Fall ist. Bei dieser Festsetzung ist der Winkel $(g^m g^\nu)$ stets die Summe der Winkel, welche g^m und g^ν mit x einschliessen.

4. Da k ein Stral des linearen Complexes ist, welcher dem von Σ^m und Σ^ν gebildeten Nullsystem angehört, so ist k senkrecht zur Sehne $G_0 G_1$ des Punktes G^m. Ziehen wir daher durch X^m Parallelen zu g^ν und zur Sehne $G_0 G_1$, so liegen dieselben mit x in einer Ebene, und es folgt, dass die Winkel, welche die Sehne und g^ν mit x bilden, Complementwinkel sind. Wenden wir nun die Gleichung 2) auf den Punkt G^m an, so folgt, da

$$\operatorname{tg}(G_0 G_1,\ x) = \operatorname{ctg}(g^v x)$$

ist,

5) $$r \operatorname{tg}(g^v x) = U : \operatorname{tg} \Omega.$$

Nun sind aber g^m und g^v conjugirte Geraden des Nullsystems; d. h. g^m ist auch Schnittlinie der Normalebenen aller Punkte von g^v, wenn wir g^v als Gerade h^m von Σ^m betrachten; folglich ist auch

$$\varrho \operatorname{tg}(g^m x) = U : \operatorname{tg} \Omega,$$

und daraus folgt

6) $$r : \varrho = \operatorname{tg}(g^m x) : \operatorname{tg}(g^v x).$$

Die letzten Gleichungen lassen sich auch auf die Geraden g_0 und g_1 selbst übertragen. Bezeichnen wir nämlich den Abstand von g_0 und x, d. h. die Strecke $G_0 X_0$ durch r_0, so ist

$$r = r_0 \cos \Omega.$$

Aus Gleichung 4) und 5) ergiebt sich demgemäss

7) $$r_0 \operatorname{tg}(g^v x) = \varrho \operatorname{tg}(g_0 x) = U : \sin \Omega,$$

d. h.

8) $$r_0 : \varrho = \operatorname{tg}(g_0 x) : \operatorname{tg}(g^v x),$$

so dass wir schliesslich aus 6) und 8) die folgende Formel erhalten:

9) $$r_0 : r : \varrho = \operatorname{tg}(g_0 x) : \operatorname{tg}(g^m x) : \operatorname{tg}(g^v x).$$

Also folgt:

Die Abstände einer beliebigen Geraden des räumlichen Systems, ihrer Mittelgeraden g^m und der conjugirten Geraden g^v von der Axe der Schraubenbewegung verhalten sich wie die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche diese Geraden mit der Axe bilden.

Es ist früher (§ 1, 4) bewiesen worden, dass die Projectionen aller Sehnen der Geraden g auf g^m constante Länge besitzen. Um den Wert derselben zu berechnen, haben wir deshalb nur die Sehne eines beliebigen Punktes von g zu betrachten; wir wählen dazu die Sehne $G_0 G_1$ des Punktes G^m.

Wir denken uns für die Sehne $G_0 G_1$ dieselbe Figur gezeichnet, welche wir oben für die Sehne $A_0 A_1$ gezeichnet haben, und nennen die zu $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ analogen Punkte jetzt $\mathfrak{G}_0$ und

$\mathfrak{G}_1$. Nun ist die Projection der halben Sehne $G^m G_1$ gleich der Projection des Linienzuges $G^m \mathfrak{G}_1 G_1$. Da aber g^m in der Ebene $G^m \mathfrak{G}_1 G_1$ liegt, so hat die Projection von $G^m \mathfrak{G}_1$ auf g^m den Wert

$$G^m \mathfrak{G}_1 \cdot \sin(g^m x)$$

und die von $\mathfrak{G}_1 G_1$ ist

$$\mathfrak{G}_1 G_1 \cdot \cos(g^m x),$$

folglich erhalten wir für die Projection der halben Sehne des Punktes G^m auf g^m den Ausdruck

$$10)\qquad r \operatorname{tg} \Omega \sin(g^m x) + U \cos(g^m x).$$

Dies ist demnach der Wert für die Projectionen der halben Sehnen *aller* Punkte von g auf g^m.

5. Je zwei entsprechende Ebenen ε_0 und ε_1 bilden gleiche Winkel mit der Axe der Schraubenbewegung, und die Punkte, in denen sie von ihr geschnitten werden, sind zwei entsprechende Punkte X_0 und X_1. Die Projectionen von x auf ε_0 und ε_1 sind zwei entsprechende Geraden p_0 und p_1 beider Ebenen. Die Strecke $X_0 X_1$ giebt wieder die Gleitungscomponente, während die Ebenen $[xp_0]$ und $[xp_1]$ den Rotationswinkel bestimmen.

Denken wir uns nun irgend eine Gerade g_0, die auf ε_0 senkrecht steht, z. B. diejenige, welche durch X_0 geht, so steht auch die entsprechende Gerade g_1 von Σ_1 auf ε_1 senkrecht und geht überdies durch den Punkt X_1. Nun gilt für g_0 und g_1 die Gleichung 3). Es ist aber

$$\sphericalangle(g_0 g_1) = \sphericalangle(\varepsilon_0 \varepsilon_1)$$

und

$$\sin(g_0 x) = \cos(\varepsilon_0 x),$$

also folgt

$$11)\qquad \sin(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_1) = \sin \Omega \cos(\varepsilon_0 x).$$

Der Winkel zweier entsprechenden Ebenen von Σ_0 und Σ_1 ist daher am grössten, wenn die Ebenen durch die Axe der Schraubenbewegung hindurchgehen.

6. Der Punkt, in welchem die Mittelebene ε^m von x geschnitten wird, ist der Punkt X^m. Ferner ist leicht zu sehen,

dass die Projection von x auf ε^m die Mittelgerade p^m von p_0 und p_1 ist.

Betrachten wir nämlich zuerst die Geraden l_0 und l_1 von ε_0 resp. ε_1, welche durch X_0 resp. X_1 gehen und senkrecht zur Schraubenaxe sind, so ist auch die durch X^m gehende Gerade l^m zu x senkrecht. Nun sind die Ebenen

$$[x l_0], \; [x l_1], \; [x l^m]$$

entsprechende Ebenen von Σ_0, Σ_1, Σ^m; ferner ist derjenige Ebenenbüschel von Σ^m, welcher x zur Axe hat, den entsprechenden Ebenenbüscheln von Σ_0 und Σ_1 congruent, also sind auch die zu $[x l_0]$, $[x l_1]$, $[x l^m]$ senkrechten Ebenen dieser drei Büschel entsprechende Ebenen der drei räumlichen Systeme. Daraus folgt aber, dass auch p_0, p_1, $p_0{}^m$ entsprechende Geraden sein müssen, denn sie sind Schnittlinien dieser drei Ebenen mit den entsprechenden Ebenen ε_0, ε_1, ε^m.

Die Gleichung 4) gilt daher auch für p_0 und p^m. Nun sind die Winkel, welche diese Geraden mit der Axe der Schraubenbewegung bilden, gleichzeitig die Neigungswinkel der Axe gegen ε_0 und ε^m, folglich erhalten wir

$$12) \qquad \operatorname{tg}(\varepsilon^m x) = \cos\Omega \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon_0 x).$$

Der Winkel, welchen ε^m mit x bildet, ist daher stets kleiner, als derjenige Winkel, welchen ε_0 mit x bildet. Ausgenommen ist nur der Fall, dass ε durch x hindurchgeht, resp. zu x normal ist; denn alsdann gilt das nämliche auch von ε^m.

7. Wir schliessen hier die Lösung der Aufgabe an, die Axe der Schraubenbewegung zu construiren, wenn zwei beliebige Systemlagen Σ_0 und Σ_1 gegeben sind.

Die Lage des räumlichen Systems Σ ist bestimmt, sobald die Lage von drei Punkten desselben bekannt ist, welche nicht auf derselben Geraden liegen. Sind daher

$$A_0, \; A_1, \; B_0, \; B_1, \; C_0, \; C_1$$

die entsprechenden Lagen der drei Punkte A, B, C von Σ, so muss es möglich sein, aus ihnen die Axe der zugehörigen Schraubenbewegung zu finden. Die Construction, welche dies leistet, ist von Chasles gegeben worden und lautet, wie folgt:

Durch einen beliebigen Punkt O des Raumes ziehen wir die Geraden OA', OB', OC' gleich und parallel den Strecken A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1. Alsdann ist die Ebene $A'B'C'$ senkrecht zur Axe der Schraubenbewegung, denn die Projectionen von OA', OB', OC' auf jede zur Ebene $A'B'C'$ normale Gerade sind einander gleich. Nun bilden die Ebenen $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ mit der Axe x gleiche Winkel und schneiden sie in zwei entsprechenden Punkten X_0 und X_1; projiciren wir daher die Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ auf die Ebene $A'B'C'$, so bestimmen sie zwei congruente ebene Systeme, und im Doppelpunkt X' derselben fällt die Projection von X_0 mit der Projection von X_1 zusammen, d. h. dieser Doppelpunkt ist ein Punkt der gesuchten Axe der Schraubenbewegung.

Sollte der Fall eintreten, dass die Sehnen A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 derselben Ebene parallel sind, so liegen auch OA', OB', OC' in einer Ebene, und die eben gegebene Construction wird unausführbar. In diesem Fall schneiden sich aber die in A^m, B^m, C^m auf den Sehnen errichteten Normalebenen in einem unendlich fernen Punkt, also ist die Ebene $\varepsilon^m = [A^mB^mC^m]$ die Normalebene eines unendlich fernen Punktes, und daher parallel zur Axe der Schraubenbewegung. Demnach sind auch die Ebenen $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ zu ihr parallel, und die Schnittlinie dieser beiden Ebenen giebt die Richtung von x.

Eine zweite Construction gewinnen wir durch Benutzung der Eigenschaften des von Σ^m und Σ^v gebildeten Nullsystems. Setzen wir nämlich

$$(BC) = a, \ (CA) = b, \ (AB) = c,$$

so schneiden sich die in B^m und C^m auf den Sehnen B_0B_1 resp. C_0C_1 construirten Normalebenen in der zu a^m conjugirten Geraden a^v; und die Gerade k_a, welche die Punkte kürzesten Abstandes von a^m und a^v mit einander verbindet, trifft die Axe der Schraubenbewegung und steht senkrecht auf ihr. Dasselbe gilt für die Geraden b^m und b^v und ihr gemeinsames Lot k_b und für c^m und c^v und das Lot k_c. Die Axe x ist daher senkrecht zu k_a, k_b, k_c und kann construirt werden, indem wir diejenige Gerade bestimmen, welche auf zweien dieser Lote gleichzeitig senkrecht steht.

Auch diese Construction ist von Chasles gegeben worden.[29])

8. Uebertragen wir die vorstehenden Resultate jetzt auf die momentane Schraubenbewegung eines beliebig bewegten räumlichen Systems, so werden zwar die Rotationscomponente und die Translationscomponente unendlich klein, wir haben aber bereits oben gesehen, dass der Quotient

$$U : \Omega$$

in jedem Augenblick einen ganz bestimmten Grenzwert annimmt, welcher den Parameter der momentanen Schraubenbewegung darstellt. Derselbe wird im Allgemeinen endlich und von Null verschieden sein. Wir wollen denselben durch p bezeichnen.

Die Grössen r und ϱ beziehen sich jetzt wieder auf das von Σ und Σ^v gebildete Nullsystem und bedeuten die Abstände zweier conjugirten Geraden g und g^v von der Axe der momentanen Schraubenbewegung. Die Ebene ε^m fällt in der Grenzlage mit ε selbst zusammen, und die Sehne $A_0 A_1$ geht in die Bahntangente des Punktes A über. Bezeichnen wir dieselbe durch t, so erhalten wir aus Gleichung 2) sofort

$$13) \qquad \operatorname{tg}(tx) = r : p.$$

Durch sie ist die Lage der Bahntangente eines jeden Punktes bestimmt, wenn die Axe und der Parameter der momentanen Schraubenbewegung bekannt sind. Die Gleichung zeigt, dass der Winkel (tx) mit dem Abstand des beschreibenden Punktes von der Axe zunimmt.

Ferner ergiebt sich aus Gleichung 5) und 6)

$$14) \qquad r \operatorname{tg}(g^v x) = \varrho \operatorname{tg}(gx) = p$$

und

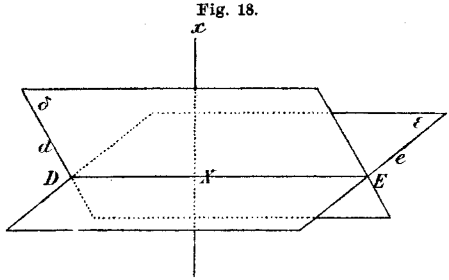
$$15) \qquad r : \varrho = \operatorname{tg}(gx) : \operatorname{tg}(g^v x),$$

d. h. *die Abstände zweier conjugirten Geraden von der Axe der momentanen Schraubenbewegung verhalten sich, wie die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche diese Geraden mit der Axe einschliessen.*

9. Sind die beiden conjugirten Geraden im besonderen senkrecht zu einander, ist also jede derselben Bahntangente

eines Punktes, resp. Characteristik einer Ebene, so ergeben sich noch einfachere Relationen. Wie oben (§ 6), bezeichnen wir zwei conjugirte Geraden dieser Art durch d und e (Fig. 18), nennen die Ebenen, deren Characteristiken sie sind, δ und ε, die Punkte, welche sie zu Bahntangenten haben, D und E, und endlich den Punkt, in welchem DE die Axe der momentanen Schraubenbewegung trifft, X. Nun ist

Fig. 18.



$$\operatorname{tg}(dx) \cdot \operatorname{tg}(ex) = 1,$$

mithin geht Gleichung 14) über in

$$16) \qquad DX \cdot \operatorname{ctg}(dx) = EX \cdot \operatorname{ctg}(ex) = p,$$

d. h. *für jede Gerade von Σ, welche momentane Bahntangente eines Punktes ist, hat das Product, gebildet aus ihrem Abstand von der Momentanaxe und der trigonometrischen Cotangente des Winkels, welchen sie mit der Axe bildet, einen constanten Wert. Derselbe ist gleich dem Parameter der momentanen Schraubenbewegung.*

Der Punkt D ist der Nullpunkt von ε, und E ist der Nullpunkt von δ, ferner steht d auf ε und e auf δ senkrecht; also ist

$$\operatorname{ctg}(dx) = \operatorname{tg}(\varepsilon x) \text{ und } \operatorname{ctg}(ex) = \operatorname{tg}(\delta x),$$

und wir erhalten

$$17) \qquad DX \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon x) = EX \cdot \operatorname{tg}(\delta x) = p;$$

d. h. *ist ε eine beliebige Ebene von Σ, so ist in jedem Augenblick das Product aus dem Abstand ihres Nullpunktes von der Momentanaxe und der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Ebene mit der Axe bildet, eine Constante, nämlich gleich dem Parameter der momentanen Schraubenbewegung.*

Endlich führen wir noch die Gleichung

18) $$DX \cdot EX = p^2$$

an, die sich aus den anderen sofort ergiebt. In derselben besitzen DX und EX eine doppelte Bedeutung für die Ebenen δ und ε. Sie können nämlich sowohl die Abstände ihrer Nullpunkte von der Momentanaxe, wie auch die Entfernungen ihrer Characteristiken von derselben sein. Beachten wir, dass die Lage des Nullpunktes und der Characteristik einer Ebene einzig und allein von dem Winkel abhängt, welchen die Ebene mit x bildet, so erhalten wir noch folgenden Satz:

Wenn zwei Ebenen von Σ mit der Momentanaxe Winkel bilden, die sich zu einem Rechten ergänzen, so ist das Product der Abstände ihrer Nullpunkte von der Axe gleich dem Product der Abstände ihrer Characteristiken. Dies Product hat für alle derartigen Ebenenpaare einen constanten Wert und ist gleich dem Quadrat des Parameters der momentanen Schraubenbewegung.

10. Mit Hilfe der vorstehenden Sätze sind wir im Stande, uns ein deutliches Bild von der Lage des Nullpunktes und der Characteristik einer Ebene, sowie von der Verteilung der conjugirten Geraden im Raume zu verschaffen. Ehe wir jedoch darauf eingehen, bedarf es noch einer Bestimmung darüber, wann für eine beliebige Gerade g von Σ ihr Abstand von der Momentanaxe, sowie der Winkel (gx), welchen sie mit derselben bildet, als positiv resp. als negativ zu rechnen sind.

Diese Bestimmung kann folgendermassen getroffen werden. Ist A irgend ein Punkt von Σ und l das von A auf x gefällte Lot, so legen wir durch A eine zu l normale Ebene, und betrachten denjenigen Stralenbüschel derselben, dessen Mittelpunkt A ist. Der Abstand des Punktes A von x ist gleichzeitig der Abstand aller Geraden g des Büschels von x; er kann *stets* als positiv betrachtet werden. Nun giebt es unter diesen Geraden eine, welche zu x parallel ist, und eine, welche die Bahntangente t des Punktes A ist; wir setzen fest, dass der Winkel dieser beiden Geraden *stets* als spitz und positiv betrachtet werden soll. Damit ist der Winkel, welchen eine beliebige Gerade des Büschels mit x bildet, vollständig bestimmt. Nach den früher getroffenen Festsetzungen sind nun auch die Abstände ϱ und die Winkel $(g^v x)$ für die zu den Geraden g des Büschels conjugirten Geraden g^v vollständig definirt.

Die Geraden g gehen sämmtlich durch einen Punkt A und liegen gleichzeitig in einer zu x parallelen Ebene; daher gehen die Geraden g^v durch den unendlich fernen Nullpunkt dieser Ebene und liegen gleichzeitig in der Normalebene α^v von A. Sie bilden demnach einen Büschel paralleler Stralen, welche sämmtlich auf l senkrecht stehen und mit x denselben Winkel bilden, nämlich das Complement des Winkels, unter welchem die Bahntangente von A gegen x geneigt ist. Nunmehr lässt sich sofort angeben, auf welcher Seite der Stral l von den verschiedenen Geraden g^v geschnitten wird.

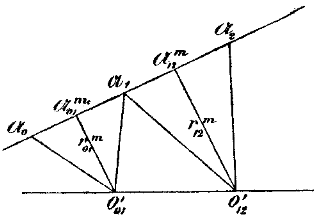
Nämlich der zu x parallele Durchmesser u des Büschels A besitzt eine unendlich ferne conjugirte Gerade, und die conjugirte der zu x senkrechten Geraden trifft x selbst. Ist daher g eine Gerade, welche mit u in dem oben definirten Sinne einen stumpfen Winkel bildet, so liegt sie mit ihrer conjugirten Geraden auf derselben Seite von x; und bildet g mit u einen spitzen Winkel, so liegen g und g^v auf verschiedenen Seiten der Momentanaxe. Um also für eine beliebige Gerade g die Lage von g^v zu bestimmen, suchen wir zunächst den Punkt A von g, welcher von x den kürzesten Abstand hat. Alsdann ist die Richtung von g^v senkrecht zur Bahntangente dieses Punktes. Je nachdem nun g mit x einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet, liegen g und g^v auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Momentanaxe.

11. Um eine Anwendung der in diesem Paragraphen abgeleiteten Formeln zu geben, wollen wir mit ihrer Hilfe die Lage der Wendegeraden bestimmen, auf welche (§ 8, 5) sich für parallele Schraubenaxen die Wendecurve reducirt. Dies kann in folgender Weise geschehen. Wir betrachten zunächst alle Punkte A von Σ, für welche A_0, A_1, A_2 in eine zu x_{01} parallele Ebene fallen. Diese Punkte genügen sämmtlich der Bedingung, dass die Projectionen der Sehnen $A_0 A_1$ und $A_1 A_2$ auf einer zu x_{01} senkrechten Ebene eine gerade Linie bilden.

Seien (Fig. 19) $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ die Projectionen dieser Punkte,

$\mathfrak{A}_{01}{}^m$, $\mathfrak{A}_{12}{}^m$ die der Sehnenmittelpunkte $A_{01}{}^m$, $A_{12}{}^m$, und $O_{01}{}'$ resp. $O_{12}{}'$ die Schnittpunkte der Ebene mit $x_{01}{}'$ resp. $x_{12}{}'$. Wir bezeichnen den Abstand des Punktes $\mathfrak{A}_{01}{}^m$ von $O_{01}{}'$ durch $r_{01}{}^m$ und den von $\mathfrak{A}_{12}{}^m$ und $O_{12}{}'$ durch $r_{12}{}^m$, nennen die Entfernung der Axen $x_{01}{}'$ und $x_{12}{}'$ a, die Rotationscomponenten unserer beiden Schraubenbewegungen $2\,\Omega_{01}$ resp. $2\,\Omega_{12}$ und endlich den Winkel, welchen $r_{01}{}^m$ und $r_{12}{}^m$ mit einer Normalebene der Ebene $[x_{01}{}'x_{12}{}']$ bilden, α, so bestehen die beiden Gleichungen

Fig. 19.



$$1)\qquad r_{12}{}^m \operatorname{tg} \Omega_{12} + r_{01}{}^m \operatorname{tg} \Omega_{01} = a \cos \alpha\,,$$

$$2)\qquad r_{12}{}^m - r_{01}{}^m = a \sin \alpha.$$

Alle Punkte A von Σ, welche diesen beiden Gleichungen genügen, haben die Eigenschaft, dass die Ebene $[A_0 A_1 A_2]$ zur Axe der Schraubenbewegung parallel ist. Die Punkte der gesuchten Geraden sind aber noch dadurch ausgezeichnet, dass die Sehnen $A_0 A_1$ und $A_1 A_2$ dieselbe Neigung gegen die Axen $x_{01}{}'$ resp. $x_{12}{}'$ haben; bezeichnen wir daher die Geitungscomponenten beider Schraubenbewegungen durch $2\,U_{01}$ resp. $2\,U_{12}$, so besteht die Gleichung

$$3)\qquad \frac{U_{01}}{r_{01}{}^m \operatorname{tg} \Omega_{01}} = \frac{U_{12}}{r_{12}{}^m \operatorname{tg} \Omega_{12}}\,.$$

Wir führen noch die Parameter der beiden Schraubenbewegungen ein und setzen

$$\frac{U_{01}}{\operatorname{tg} \Omega_{01}} = p_{01}\,,\ \frac{U_{12}}{\operatorname{tg} \Omega_{12}} = p_{12}\,.$$

Die erste Gleichung geht, wenn wir sie durch $r_{01} \operatorname{tg} \Omega_{12}$ dividiren und die Gleichung 3) beachten, in

$$\frac{U_{01} + U_{12}}{U_{01}} = \frac{a \cos \alpha}{r_{01}{}^m \operatorname{tg} \Omega_{01}}$$

über; die zweite Gleichung wird, wenn wir durch $r_{01}{}^m$ dividiren und gleichfalls Gleichung 3) beachten, zu

$$\frac{p_{12} - p_{01}}{p_{01}} = \frac{a \sin\alpha}{r_{01}{}^m}.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\frac{a}{\operatorname{tg}\Omega_{01}} \cdot \frac{U_{01}}{U_{01} + U_{12}} = d$$

und

$$a \cdot \frac{p_{01}}{p_{12} - p_{01}} = d_1,$$

so erhalten wir schliesslich

$$r_{01}{}^m = d \cos\alpha,$$

$$r_{01}{}^m = d_1 \sin\alpha,$$

und diese Gleichungen zeigen, dass die Gerade $g_{01}{}^m$ die Schnittlinie zweier Kreiscylinder ist, von denen der eine d zum Durchmesser hat und die Ebene $[x_{01}' x_{12}']$ der beiden Schraubenaxen berührt, während der andere d_1 zum Durchmesser und die Ebene $[x_{01}' x_{12}']$ zur Durchmesserebene hat. Hierdurch ist die Lage der Geraden g selbst ebenfalls bestimmt. Es folgt noch, dass beide Cylinder sich rechtwinklig schneiden.

Rücken die Systemlagen Σ_0, Σ_1, Σ_2 unendlich nahe an einander, so berührt der erste der beiden Cylinder die momentane Tangentialebene der Polflächen und schneidet den zweiten Cylinder in der Geraden g und in der Axe der momentanen Schraubenbewegung rechtwinklig. Der erste Cylinder hat genau die nämliche Lage zur Tangentialebene der Polflächen, wie in der Ebene der Wendekreis zur Tangente der Polcurven.

§ 12. Conjugirte Rotationen.

1. Wir haben in der Schraubenbewegung die einfachste Bewegungsart erkannt, durch welche jede Ortsveränderung eines räumlichen Systems vermittelt werden kann. Es ist augenscheinlich, dass es ausserdem noch unendlich viele Bewegungen giebt, welche dasselbe leisten. Wir könnten z. B. Σ zunächst in eine ganz beliebige Lage Σ_2 und dann erst in die Endlage Σ_1 bringen, u. s. w.

Unter allen diesen möglichen Bewegungsformen kann keine zweite Schraubenbewegung existiren, denn x ist die einzige im Endlichen liegende Gerade, welche Σ_0 und Σ_1 entsprechend gemein haben. Es giebt jedoch noch eine ganze Gruppe anderer Bewegungen einfacher Natur, welche den Uebergang des Systems von Σ_0 nach Σ_1 herbeizuführen im Stande sind. Mit ihnen werden wir uns in diesem Capitel beschäftigen.

Ist g eine beliebige Gerade von Σ und g^v die zugehörige Gerade von Σ^v, so gelangt g durch Drehung um g^v von g_0 nach g_1. Erteilen wir also dem System Σ eine Rotation um g^v, bis g_0 und g_1, d. h. bis je zwei entsprechende Punkte beider Geraden auf einander fallen, so bedarf es nur noch einer Drehung um g_1, damit Σ in die Endlage Σ_1 übergeht. Da nun g und g^v ein beliebiges Paar entsprechender Geraden von Σ und Σ^v bilden, so folgt:

Sind g und g^v irgend zwei entsprechende Geraden der reciproken Systeme Σ und Σ^v, so kann Σ mittelst zweier Rotationen, von denen die erste um g^v, die zweite um g stattfindet, aus der Lage Σ_0 in die Lage Σ_1 übergeführt werden. Die eine der beiden Rotationsaxen kann beliebig gewählt werden.

Zwei solche Geraden sollen *conjugirte Rotationsaxen* genannt werden. Die Gerade g^v ist wieder als feste Gerade des Raumes Σ', dagegen g als bestimmte Gerade des Systems Σ zu betrachten. Die zweite Drehungsaxe, als Gerade von Σ', ist die Endlage g_1 der Geraden g.

2. Fällt eine der Geraden g und g^v ins Unendliche, so reducirt sich die um sie stattfindende Rotation auf eine Translation. Liegt z. B. g, also auch g^m im Unendlichen, so ist g^v ein Durchmesser des von Σ^m und Σ^v gebildeten Nullsystems; ebenso ist, wenn g^v eine unendlich ferne Gerade ist, g^m ein Durchmesser, also sind auch g_0 und g_1 zur Axe der Schraubenbewegung parallel; d. h.

Jede Ortsveränderung eines räumlichen Systems kann auf unendlich viele Weisen durch eine Rotation in Verbindung mit einer Translation ausgeführt werden. Die Axen der Rotationen sind sämmtlich zu einander und zur Axe der Schraubenbewegung parallel.

3. Die Reihenfolge der beiden um g und g^v stattfinden-

den Rotationen ist im Allgemeinen nicht vertauschbar. In der That, findet die erste Rotation um g, d. h. um die Gerade g_0 des festen Raumes statt, und bezeichnen wir g^v als Gerade von Σ durch h_0, so mufs h_0 nicht allein durch Rotation um g_1, sondern auch durch Rotation um g_0 in die Lage h_1 gelangen, und ebenso muss g nicht allein durch Drehung um $g^v = h_0$, sondern auch durch Drehung um h_1 von g_0 nach g_1 gebracht werden können. Es muss also

$$\sphericalangle (g_0 h_0) = \sphericalangle (g_0 h_1) = \sphericalangle (g_1 h_0) = \sphericalangle (g_1 h_1)$$

sein. Dies braucht jedoch im Allgemeinen nicht der Fall zu sein. Wir können nämlich die Systeme Σ_0 und Σ_1 direct dadurch bestimmen, dass wir die Lagen g_0, h_0 und g_1, h_1 der Geraden g und h geben, und da dieselben beliebig gewählt werden können, so ist die obige Gleichung im Allgemeinen nicht erfüllt.

Wir werden jedoch sofort die Existenz einer ganzen Schaar von Paaren conjugirter Geraden nachweisen, für welche die Reihenfolge der Rotationen in der That vertauschbar ist. Wenn nämlich jeder Punkt A einer Ebene ε von Σ an die ihm vorgeschriebene Stelle A_1 gelangt ist, so muss auch Σ selbst in die Endlage gekommen sein. Nun haben wir bereits gesehen, dass jede Ortsveränderung einer Ebene ε mittelst zweier Rotationen ausgeführt werden kann, die in beliebiger Reihenfolge um die beiden zu einander senkrechten Geraden e und e^v vor sich gehen. Die Gerade e war aber dadurch ausgezeichnet, dass die entsprechenden Lagen e_0 und e_1 sich schneiden, und dasselbe lässt sich für die Gerade e^v beweisen, wenn wir sie als eine Gerade d von Σ betrachten. In der That drehen wir Σ zunächst um $e^v = d_0$, bis e_0 mit e_1 zusammenfällt, und lassen dann die Rotation um e_1 eintreten, so bleibt $e^v = d$ während derselben in einer zu e_1 senkrechten Ebene, d. h. d_0 und d_1 schneiden sich. Wir erhalten daher folgendes Resultat:

Die Reihenfolge der Rotationen ist vertauschbar, wenn sich die beiden conjugirten Geraden unter rechtem Winkel kreuzen. Ist e eine dieser Geraden, so hat sie stets die Eigenschaft, dass die beiden entsprechenden Lagen e_0 und e_1 sich schneiden.

Jede dieser Geraden e hat die Eigenschaft, dass ihre Mittelgerade e^m Characteristik einer Ebene ε^m von Σ^m ist.

4. Jede Gerade des Raumes kann als eine Gerade g^ν von Σ^ν betrachtet werden. Alsdann existirt stets eine Gerade g, so dass, wenn Σ um g^ν um einen bestimmten Winkel rotirt, g_0 mit g_1 zusammenfällt. Zu jeder Geraden des Raumes gehört somit ein bestimmter Rotationswinkel. Die Grösse desselben lässt sich wie folgt bestimmen.

Seien G^m und G^ν wieder diejenigen Punkte von g^m und g^ν, welche den kürzesten Abstand von einander haben, und r und ϱ die Entfernungen dieser Punkte von der Axe der Schraubenbewegung. Wir bezeichnen den Winkel, welchen die Sehne G_0G_1 des Punktes G^m mit x bildet, durch λ, die Componenten der Schraubenbewegung wieder durch 2Ω resp. $2U$, und den zu g^ν gehörigen Rotationswinkel, d. h. den Winkel $G_0G^\nu G_1$ durch $2\omega^\nu$, so besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg}\omega^\nu = \frac{\frac{1}{2}G_0G_1}{G^mG^\nu}.$$

Nun hat die Projection der Sehne G_0G_1 auf x den Wert $2U$, folglich ist

$$\tfrac{1}{2}G_0G_1 = U : \cos\lambda,$$

und da die Sehne G_0G_1 und die Rotationsaxe g^ν mit x Complementwinkel bilden, so ist

$$\cos\lambda = \sin(g^\nu x),$$

also ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}G_0G_1 = U : \sin(g^\nu x).$$

Ferner ist (§ 11, Gl. 5)

$$G^mG^\nu = r + \varrho = \frac{U}{\operatorname{tg}\Omega}\left(\operatorname{ctg}(g^mx) + \operatorname{ctg}(g^\nu x)\right)$$

$$= \frac{U}{\operatorname{tg}\Omega}\cdot\frac{\sin(g^mg^\nu)}{\sin(g^mx)\cdot\sin(g^\nu x)},$$

also folgt

$$1)\qquad \frac{\operatorname{tg}\omega^\nu}{\operatorname{tg}\Omega} = \frac{\sin(g^mx)}{\sin(g^mg^\nu)}.$$

Da g^m und g^ν conjugirte Geraden des von Σ^m und Σ^ν gebildeten Nullsystems sind, also wechselseitige geometrische Bedeutung haben, so ergiebt sich in derselben Weise für die zu g^m gehörige Rotation $2\,\omega^m$

$$2)\qquad \frac{\operatorname{tg}\omega^m}{\operatorname{tg}\Omega}\cdot\frac{\sin(g^v x)}{\sin(g^m g^v)},$$

und zwar ist zu beachten, dass g^m hier als eine Gerade h^v von Σ^v aufzufassen ist, d. h. als Rotationsaxe für die Geraden h_0 und h_1 von Σ_0 und Σ_1. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$3)\qquad \frac{\operatorname{tg}\omega^m}{\sin(g^v x)}=\frac{\operatorname{tg}\omega^v}{\sin(g^m x)}=\frac{\operatorname{tg}\Omega}{\sin(g^m g^v)},$$

und diese Formel führt sofort zu folgendem Satz:

Zieht man durch irgend einen Punkt des Raumes drei Geraden, parallel zu zwei conjugirten Geraden g^m und g^v und zur Axe x der Schraubenbewegung, und trägt man auf ihnen Strecken ab, die resp. zu $\operatorname{tg}\omega^m$, $\operatorname{tg}\omega^v$, $\operatorname{tg}\Omega$ *proportional sind, so bilden diese drei Strecken Seiten und Diagonale eines Parallelogramms.*

5. Die Gleichung 1) bestimmt den Wert von ω^v mit Hilfe der zu g^v conjugirten Geraden g^m. Wir wollen denselben nun so umformen, dass in ihm nur die Gerade g^v auftritt. Es war

$$\frac{\operatorname{tg}\omega^v}{\operatorname{tg}\Omega}=\frac{\frac{1}{2}\,G_0G_1}{(r+\varrho)\operatorname{tg}\Omega}=\frac{U:\sin(g^v x)}{U(\operatorname{ctg}(g^m x)+\operatorname{ctg}(g^v x))}.$$

Nun ist aber

$$U\operatorname{ctg}(g^m x)=\varrho\operatorname{tg}\Omega,$$

folglich ergiebt sich

$$\frac{\operatorname{tg}\omega^v}{\operatorname{tg}\Omega}=\frac{U}{\varrho\operatorname{tg}\Omega\sin(g^v x)+U\cos(g^v x)},$$

und dieser Ausdruck von $\operatorname{tg}\omega^v$ hängt in der That nur von der Geraden g^v ab.

Der auf der rechten Seite stehende Nenner hat eine einfache geometrische Bedeutung. Derselbe ist nämlich (§ 11, Gl. 10) gleich der Projection der halben Sehnen von g^v auf

g^v, vorausgesetzt, dass wir g^v als eine Mittelgerade h^m von Σ^m betrachten. Bezeichnen wir den Wert dieser Projection noch durch p^v, so ergiebt sich

4) $$p^v \cdot \operatorname{tg} \omega^v = U \cdot \operatorname{tg} \Omega,$$

d. h.

Für alle Geraden g^v hat das Product p^v tg ω^v einen constanten Wert.

Die Grösse $U \operatorname{tg} \Omega$ stellt denjenigen Wert dar, welchen das Product für die Axe der Schraubenbewegung annimmt. Wählen wir aber irgend eine zu ihr parallele Gerade zur Geraden g^v, so hat für sie p^v ebenfalls den Wert U, also ist der zu ihr gehörige Rotationswinkel auch $2\,\Omega$; d. h.

Für alle zur Axe der Schraubenbewegung parallelen Geraden ist der zugehörige Rotationswinkel constant und zwar gleich der Rotationscomponente der Schraubenbewegung.

Ersetzen wir also die Schraubenbewegung durch eine Rotation und eine Translation, so ist nicht nur die Richtung der Rotationsaxen, sondern auch die Grösse der um sie stattfindenden Rotation constant.

6. Bezeichnen wir die Gerade g^v, wenn wir sie als Gerade von Σ^m betrachten, wieder durch h^m und den Punkt G^v durch H^m, so ist p^v die Projection von $\frac{1}{2} H_0 H_1$ auf g^v. Nun ist aber

$$\tfrac{1}{2} H_0 H_1 = (r + \varrho) \operatorname{tg} \omega^m,$$

und da die Sehne $H_0 H_1$ in einer zu g^m senkrechten Ebene liegt, so bilden $H_0 H_1$ und g^m Complementwinkel mit g^v, und es folgt

$$p^v = (r + \varrho) \operatorname{tg} \omega^m \sin (g^m g^v),$$

und die Gleichung 4) verwandelt sich daher in

5) $$(r + \varrho) \operatorname{tg} \omega^m \cdot \operatorname{tg} \omega^v \cdot \sin (g^m g^v) = U \cdot \operatorname{tg} \Omega$$

d. h. das auf der linken Seite stehende Product hat für je zwei conjugirte Geraden g^m und g^v einen constanten Wert.

Dies Product lässt eine einfache geometrische Deutung zu. Tragen wir nämlich auf den beiden Geraden g^m und g^v Strecken auf, die zu tg ω^m resp. tg ω^v proportional sind, so bilden die vier Endpunkte dieser Strecken die Ecken eines

Tetraeders, welches die Strecken zu Gegenkanten hat. Nun ist der sechsfache Inhalt eines jeden Tetraeders bekanntlich gleich dem Product aus zwei Gegenkanten, ihrem kürzesten Abstand und dem sinus des von ihnen gebildeten Winkels; wir sehen daher, dass die linke Seite unserer Gleichung direct den sechsfachen Inhalt des eben construirten Tetraeders vorstellt. Hierbei bleibt ganz gleichgiltig, wie die beiden auf g^m und g^v aufgetragenen Strecken zu einander liegen; d. h.

Trägt man auf zwei conjugirten Geraden g^m *und* g^v *irgend zwei Strecken auf, welche nach irgend einem festen Verhältniss zu* $\operatorname{tg} \omega^m$ *und* $\operatorname{tg} \omega^v$ *proportional sind, so hat das durch sie bestimmte Tetraeder für alle Paare conjugirter Geraden constantes Volumen.*

Die im vorstehenden abgeleiteten Sätze gelten auch für unendlich nahe Systemlagen. Sie können also in jedem Augenblick von einem beliebig bewegten räumlichen System ausgesagt werden. Statt der Grössen $\operatorname{tg} \omega^m$ und $\operatorname{tg} \omega^v$ treten in diesem Fall die unendlich kleinen Rotationen ω und ω^v auf, welche zu irgend zwei conjugirten momentanen Rotationsaxen g und g^v gehören.

§ 13. **Beispiele.**

1. Zum Schluss sollen einige Probleme behandelt werden, welche specielle Bewegungen von räumlichen Systemen betreffen. Ein erstes Beispiel sei das folgende.

Eine aus drei zu einander senkrechten Ebenen gebildete Ecke möge sich so bewegen, dass der Scheitelpunkt S derselben eine gegebene Curve c' durchläuft, während die Seiten α, β, γ der Ecke stets Schmiegungsebene, Normalebene und rectificirende Ebene der Curve c' bleiben.

Hierdurch ist die Bewegung der Ecke und des mit ihr verbundenen räumlichen Systems Σ vollständig bestimmt. Betrachten wir nämlich eine willkürlich gewählte Lage der beweglichen Ecke, und ist T irgend ein Punkt von α, welcher auf der Tangente t der Curve c' liegt, ferner K irgend ein Punkt von β, welcher gerade auf der Krümmungsaxe k von c' liegt, und endlich H irgend ein Punkt von γ, welcher gerade auf der rectificirenden Geraden h von c' liegt, so können wir den betrachteten Bewegungsmoment auch folgendermassen definiren. Die Bewegung geht in ihm in der Weise vor sich, dass der Punkt S von Σ auf c' läuft, während die Punkte T, K, H des Systems gezwungen sind, in je einer Ebene, nämlich in der Schmiegungsebene, Normalebene und rectificirenden Ebene von c' zu bleiben. Wir sehen also, dass in der That in jedem Augenblick das momentane Nullsystem, d. h. die Bewegung von Σ vollständig bestimmt ist.

Die Ebene β hat die Krümmungsaxe k der Curve zur Characteristik und den Punkt S zum Nullpunkt; daher sind k und t zwei sich rechtwinklig kreuzende conjugirte Geraden. Folglich ist t die Characteristik und der Krümmungsmittelpunkt C der Nullpunkt von α. Die Axe x der momentanen Schraubenbewegung schneidet die Gerade $|\alpha\beta|$, d. h. die Hauptnormale von c' rechtwinklig. Die Ebene γ ist daher parallel zur Axe der momentanen Schraubenbewegung und da die rectificirende Gerade h die Characteristik von γ ist, so ist h zur Momentanaxe parallel. Die zu h conjugirte Gerade h^v liegt daher unendlich fern, und da h durch S, d. h. den Nullpunkt von β geht, so liegt h^v in β, d. h. h^v ist die unendlich ferne Gerade der Normalebene β. Die Schnittlinie a von β und γ ist, da sie durch den Nullpunkt S von β geht, ein Complexstral, sie geht daher auch durch den Nullpunkt von γ; d. h. der Nullpunkt von γ ist der unendlich ferne Punkt von a.

Um die Momentanaxe zu construiren, bedürfen wir zweier Paare conjugirter Geraden. Das eine derselben kennen wir bereits. Ist nun g irgend eine Gerade, welche die Tangente t und die Krümmungsaxe k schneidet, und sind wieder T und K die bezüglichen Schnittpunkte, so geht die Normalebene von T durch den Nullpunkt C von α und ist senkrecht zu α, und die Normalebene von K geht durch S und steht auf β senkrecht; beide Normalebenen sind daher construirbar, also auch ihre Schnittlinie, d. h. die zu g conjugirte Gerade g^v.

Sei X der Punkt, in welchem die Momentanaxe die Hauptnormale n trifft, und bezeichnen wir den Winkel, welchen die Momentanaxe, also auch die rectificirende Gerade h mit t

bildet, durch φ, so ist (§ 11, Gl. 16)

$$AX \cdot \operatorname{ctg} \varphi = CX \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

d. h.

$$AX = CX \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad CX = AX \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Hieraus folgt

$$AX + CX = CX (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi),$$

$$CX + AX = AX (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi),$$

und schliesslich

$$AX = AC \cos^2 \varphi,$$

$$CX = AC \sin^2 \varphi.$$

Diese Gleichungen bestimmen den Punkt X, in welchem die Hauptnormale von x geschnitten wird.*)

2. Das orthogonale Hyperboloid wird durch zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugt, deren entsprechende Ebenen senkrecht auf einander stehen. (§ 7, 4.) Wenn daher zwei zu einander rechtwinklige Ebenen α und β sich so bewegen, dass jede derselben durch eine feste Gerade geht, so beschreibt die Schnittlinie beider Ebenen ein orthogonales Hyperboloid.

Seien a' und b' die beiden festen Geraden und h die Schnittlinie der Ebenen α und β.

Die Bewegung ist durch vier Bedingungen bestimmt. Jede auf α in irgend einem Punkt von a' errichtete Gerade ist ein Normalstral, ebenso jede Gerade, die auf β in einem Punkt von b' senkrecht steht. Seien γ und δ die Ebenen dieser auf α resp. β errichteten Normalen, so ist ihre Schnittlinie g die eine der beiden Geraden, welche von allen Normalen getroffen werden, die andere ist die auf h senkrechte unendlich ferne Gerade. Diese beiden Geraden sind daher die Leitstralen des von den Normalen gebildeten Stralsystems; zugleich diejenigen Geraden, welche für alle momentan zulässigen Bewegungen einander conjugirt sind.

*) Die Momentanaxe ist in diesem Fall die Axe der sogenannten Schmiegungsschraubenlinie von c'. Vgl. Schell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung. Cap. IX, § 3 und 5.

Die Characteristik von α ist a' und diejenige von β ist b'. Die Ebene γ, welche durch a' geht und auf α senkrecht steht, enthält daher alle Geraden, welche den zu α normalen Ebenen adjungirt sind (§ 6, 3), und ebenso enthält die Ebene δ, welche durch b' geht und zu β senkrecht ist, alle Geraden, welche den zu β normalen Ebenen adjungirt sind. Daher ist die Schnittlinie g von γ und δ den zur Geraden g senkrechten Ebenen adjungirt. Sie liegt demnach (§ 6, 4) auf dem Paraboloid der Normalen von g.

Hieraus ergiebt sich eine Construction der Normale des orthogonalen Hyperboloids. Wir errichten nämlich im Punkte A von h dasjenige Lot auf h, welches g trifft, so ist dies die Normale.

Für jedes Nullsystem, welches einer dieser Bewegungen entspricht, ist g ein Durchmesser; daher sind sämmtliche Momentanaxen einander parallel. Das von denselben gebildete Cylindroid reducirt sich auf einen Büschel paralleler Stralen. Der kürzeste Abstand zweier Geraden g und g^{ν} trifft nämlich auch die Durchmesser, welche den zu g resp. g^{ν} senkrechten Ebenen adjungirt sind; daher haben wir den kürzesten Abstand k von g und h gleichzeitig als kürzesten Abstand von g und der unendlich fernen Geraden $g_{\infty}{}^{\nu}$ zu betrachten. Wir erhalten nun das Cylindroid, indem wir (§ 10, 9) das Stralsystem durch irgend eine Ebene ε, die $g_{\infty}{}^{\nu}$ enthält, schneiden und alle Geraden bestimmen, welche gleichzeitig auf k und einem der in ε liegenden Stralen senkrecht stehen. Es ist aber ε parallel zu k, folglich bilden die Lote in der That einen Büschel paralleler Stralen.

Die Bahntangente eines jeden Punktes A von g ist parallel zu h, denn sie ist Normale einer Ebene, welche durch zwei zu h senkrechte Stralen geht. Für jede zulässige Bewegung besteht daher die Gleichung (§ 11, 13)

$$\operatorname{tg}(hg) = r : p,$$

wo r den Abstand des Punktes von der bezüglichen Momentanaxe und p den Parameter der zugehörigen Schraubenbewegung darstellt.

3. Die Fusspunktenflächen geben ein Beispiel für diejenige Bewegung eines Systems, welches nur drei Bedingungen unterworfen ist, also Freiheit dritter Stufe besitzt.

Sei Φ' eine beliebige Fläche und A' ein fester Punkt des Raumes. Fällen wir von A' auf die sämmtlichen Tangentenebenen τ der Fläche Φ' die Lote $A'P$, so ist der Ort der Punkte P die Fusspunktenfläche von Φ'. Dieselbe lässt sich dadurch erzeugt denken, dass die Ebene τ und das im Punkte P derselben auf ihr errichtete Lot a sich so bewegen, dass τ stets die Fläche Φ' berührt, während a stets durch den festen Punkt A' geht. In jedem Augenblick sind daher drei Normalstralen gegeben, nämlich die Normale l des Berührungspunktes von τ mit Φ', und die Normalebene von A', welche zwei Normalen vertritt. Bei der umgekehrten Bewegung bewegt sich nämlich A' auf a, und die Normalebenen stimmen für directe und umgekehrte Bewegung überein.

Seien nun m und n irgend zwei durch A' gehende Stralen der Normalebene, so ist die Bewegung in jeder Systemlage durch l, m, n definirt. Bestimmen wir das Hyperboloid, dessen Punkte gerade gezwungen sind, auf Flächen zu bleiben. Da m und n sich schneiden, so zerfällt es in zwei Stralenbüschel. In der That, jeder durch A' gehende Stral der Ebene $[mn]$ ist Normalstral. Ist andrerseits L der Schnittpunkt von l mit dieser Ebene, und bezeichnen wir denjenigen ihrer Normalstralen, welcher durch L geht, durch p, so ist auch jede durch L gehende Gerade der Ebene $[lp]$ ein Normalstral. Nun enthält die Ebene $[lp]$ stets die Gerade a, also geht auch stets ein Normalstral dieser Ebene durch P hindurch, und daraus folgt, dass P während der ganzen Bewegung des durch τ und a definirten Systems auf einer Fläche bleibt.

Hiermit ist auch bereits die Normale der von P beschriebenen Fusspunktenfläche bestimmt. Die Normale ist nämlich der durch P gehende Normalstral, und das ist in diesem Fall die Gerade PL. Ist T der Berührungspunkt von τ und Φ', so bilden die vier Punkte P, T, L, A' ein Rechteck, dessen Diagonale PL ist.

4. Eine dreiseitige rechtwinklige Ecke bewege sich so,

dass ihre Ebenen α, β, γ stets ein festes Ellipsoid Φ' berühren. S sei der Scheitelpunkt der Ecke und $a = |\beta\gamma|$, $b = |\gamma\alpha|$ und $c = |\alpha\beta|$ die Kanten derselben. In irgend einer Lage seien L, M, N die Berührungspunkte der Ebenen α, β, γ mit dem Ellipsoid. Die Normalen dieser Punkte bezeichnen wir wieder durch l, m, n, so sind alle Punkte des durch l, m, n bestimmten Hyperboloids gezwungen, für alle momentan zulässigen Bewegungen der Ecke auf Flächen zu bleiben.

Von diesem Hyperboloid lässt sich zeigen, dass es durch S geht.

Nennen wir nämlich den Punkt des festen Raumes, in den S fällt, O', so gehen von O' drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen an das Ellipsoid Φ'. Der Tangentenkegel von Φ', dessen Spitze S ist, enthält daher unendlich viele Tripel solcher Ebenen. Die Ecke kann also unendlich viele Lagen annehmen, so dass ihr Scheitel in O' fällt und α, β, γ das Ellipsoid berühren, d. h. wir können die drei zu einander rechtwinkligen Ebenen so um den festen Punkt O' sich bewegen lassen, dass jede derselben Tangentialebene von Φ' resp. des Tangentenkegels bleibt. Bewegt sich aber ein Stralenbündel um einen festen Punkt, so schneiden sich die Normalebenen, welche man auf den Ebenen desselben in ihren momentanen Berührungsstralen errichten kann, sämmtlich in einer Geraden, nämlich in der momentanen Drehungsaxe. Errichten wir daher auf α, β, γ in denjenigen Stralen, in welchen diese Ebenen den Tangentenkegel berühren, Normalebenen, so schneiden sich dieselben stets in einer durch O' gehenden Geraden. Diese Gerade trifft daher auch die drei Normalen l, m, n; d. h.

Ist S ein Punkt, von dem sich drei rechtwinklige Tangentenebenen an ein Ellipsoid legen lassen, und errichtet man in den Berührungspunkten die Normalen des Ellipsoids, so liegt S stets auf dem durch die drei Normalen bestimmten Hyperboloid.

Dies gilt für jede Systemlage, also beschreibt S eine Fläche. Die Normale derselben ist die durch S gehende Gerade der durch l, m, n, bestimmten Regelschaar.

Die von S beschriebene Fläche ist eine Kugel. Ist nämlich ε' eine beliebige Ebene des festen Raumes, so denken wir uns alle Lagen der Ecke, für welche α mit ε' zusammenfällt, d. h. wir denken uns die Ecke so bewegt, dass α in ε' fällt, während β und γ das Ellipsoid berühren. Dabei umhüllt jede dieser beiden Ebenen einen elliptischen Cylinder. Gleichzeitig bewegt sich der von den Kanten b und c gebildete rechte Winkel in der Ebene $\alpha = \varepsilon'$ so, dass b und c Tangenten eines Kegelschnittes bleiben, und zwar desjenigen, in welchem der elliptische Cylinder die Ebene ε' schneidet. Dabei beschreibt aber der Scheitel S dieses Winkels einen Kreis, und es folgt, dass alle der Ebene ε' angehörigen Punkte S auf einem Kreise liegen. Dieser Kreis hat überdies den Mittelpunkt des Kegelschnitts zum Centrum, folglich geht die Normalebene des von S in ε' beschriebenen Kreises stets durch den Mittelpunkt des Ellipsoids. Dies gilt für jede beliebige Ebene ε', also folgt in der That, dass der Punkt S eine Kugel beschreibt, welche den Mittelpunkt des Ellipsoides zum Centrum hat; d. h.

*Bewegt sich eine dreiseitige rechtwinklige Ecke so, dass ihre Ebenen ein festes Ellipsoid berühren, so beschreibt ihr Scheitelpunkt eine Kugel, welche das Centrum des Ellipsoides zum Mittelpunkt hat.**)

Beiläufig ergiebt sich noch, dass diejenige Erzeugende der durch die Normalen l, m, n bestimmten Regelschaar, welche durch S geht, die Verbindungslinie von S mit dem Centrum des Ellipsoides ist.

5. Die Bewegung einer Geraden besteht, wie im Eingang dieses Capitels gezeigt worden ist, in jedem Augenblick in

*) Der oben gegebene Beweis, dass der Ort aller Punkte von S, die in einer Ebene liegen, ein Kreis ist, ist bisher auch als ausreichender Beweis dafür betrachtet worden, dass S eine Fläche beschreibt. Dies ist jedoch nicht gestattet. Denn die obige Deduction zeigt nur, dass für *gewisse* Lagen der Ecke, nämlich wenn α mit ε' zusammenfällt, die Punkte S einen Kreis bilden. *Es giebt aber noch unendlich viele andere Lagen der Ecke, für welche S in die Ebene ε' fällt, und es ist gerade zu zeigen, dass S für diese Lagen auch auf dem Kreise liegt.* Dies ist im Text dadurch geschehen, dass wir bewiesen haben, S liegt auf dem Hyperboloid der Flächenpunkte.

einer momentanen Rotation um eine Gerade g^v. Da die Normalebenen aller Punkte von g durch g^v hindurchgehen, so bilden die Normalstralen aller Punkte ein Stralsystem, welches g und g^v zu Leitstralen hat. Dasselbe ist durch vier Normalen bestimmt. Sind daher die Normalstralen von vier Punkten von g bekannt, so ist damit auch g^v gegeben. Also folgt:

Wenn vier Punkte einer Geraden g der Bedingung unterworfen werden, auf festen Flächen zu bleiben, so ist die Bewegung der Geraden vollständig bestimmt. Jeder ihrer Punkte beschreibt eine Curve und g selbst eine geradlinige Fläche.

Dies lässt sich noch von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachten. Die Lage eines räumlichen Systems Σ ist nämlich bekannt, wenn wir die Lage von dreien seiner Punkte kennen, die eine Ebene bestimmen. Durch die Lage einer Geraden g ist daher die Lage von Σ noch nicht bestimmt; ebensowenig wird die Bewegung von Σ bestimmt sein, wenn die Bewegung der Geraden g gegeben ist. Vielmehr kann, wenn g eine vorgeschriebene Bewegung ausführt, Σ noch unendlich viele Bewegungen annehmen. Wir erhalten irgend eine derselben, indem wir einen fünften, nicht auf g liegenden Punkt zwingen, ebenfalls auf einer festen Fläche zu bleiben.

Zu jeder dieser Bewegungen gehört in jedem Augenblick ein sie characterisirendes Nullsystem; für alle diese Nullsysteme sind g und g^v zwei conjugirte Geraden. Die früher bewiesenen Sätze und Constructionen bleiben daher für alle diejenigen Elemente des Nullsystems, resp. des räumlichen Systems Σ, welche g betreffen, auch dann in Giltigkeit, wenn wir die Bewegung einer Geraden für sich allein betrachten. Wir erhalten z. B. die Normale der von g erzeugten Fläche im Punkte A von g, wenn wir in A dasjenige Lot errichten, welches g^v trifft, u. s. w.

6. Sei die Bewegung von g dadurch definirt, dass vier Punkte A, B, C, D auf den Ebenen α', β', γ', δ' laufen. Wir betrachten g als Bestandteil eines räumlichen Systems Σ, dessen Bewegung wir noch so bestimmen, dass irgend ein Punkt E desselben auf einer Fläche Φ_ε' bleibt. Nun giebt es in jedem Augenblick eine Fläche dritter Ordnung F^3 von Σ,

deren Punkte (§ 9, 5) stationäre Schmiegungsebenen besitzen, und jede Gerade von Σ liegt auf dieser Fläche, wenn sie mehr als drei solche Punkte enthält. Dies trifft aber für die Gerade g zu, folglich hat jeder Punkt von g die Eigenschaft, dass vier auf einander folgende Lagen desselben sich in derselben Ebene befinden, und da dies für jeden Augenblick gilt, so folgt:

Wenn sich vier Punkte einer Geraden g in festen Ebenen bewegen, so gilt dies von jedem Punkt; d. h. jeder Punkt der Geraden beschreibt eine ebene Curve.

Seien nun g_0, g_1, g_2 drei beliebige Lagen, welche g während der Bewegung annimmt, so ist

$$\alpha' = [A_0 A_1 A_2],$$
$$\beta' = [B_0 B_1 B_2],$$
$$\gamma' = [C_0 C_1 C_2],$$

u. s. w.; d. h. die sämmtlichen Ebenen α', β', γ' .... bilden das Erzeugniss der drei congruenten Punktreihen, also einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Der von g_0, g_1, g_2 erzeugte Ebenenbüschel enthält die unendlich ferne Ebene, denn die unendlich fernen Punkte von g_0, g_1, g_2 sind entsprechende Punkte. Betrachten wir das mit ihm verbundene Stralsystem, so folgt in derselben Weise, wie im § 7, dass wir dasselbe auf einen Stralenbündel O' so abbilden können, dass jedem Stral des Bündels der ihm parallele Stral des Stralsystems entspricht, also z. B. den Geraden g_0, g_1, g_2 die drei Geraden g_0', g_1', g_2' des Bündels O'. Sei jetzt x' die Axe desjenigen Rotationskegels, welche durch g_0', g_1', g_2' hindurchgeht, d. h. derjenige Stral von O', welcher mit g_0', g_1', g_2' gleiche Winkel bildet, so ist auch der entsprechende Stral x des Stralsystems gegen g_0, g_1, g_2 gleich geneigt.

Ist ε eine beliebige Ebene des Büschels, s ein beliebiger Stral des Stralsystems und E_s der Schnittpunkt von ε und s, so können wir die Punktreihe A_s, B_s, C_s ..... von s congruent auf die Punktreihe A_s', B_s', C_s' ..... von s' beziehen, so dass dem Punkt E_s von s der Punkt O' von s' entspricht. Alsdann lässt sich wieder beweisen, dass alle Punkte A_s', welche den Punkten A_s der Ebene α entsprechen, auf einer Ebene α' liegen. Dies geschieht auf folgendem Wege. Sei g_ε eine beliebige Gerade von ε, so bilden diejenigen Stralen s, welche g_ε treffen, im Allgemeinen die Regelschaar eines Paraboloids. Die entsprechenden Stralen s' von O' bilden einen ebenen Stralenbüschel, dessen Ebene der Richtungsebene der Regelschaar parallel ist. Das Paraboloid schneidet jede Ebene α in der Geraden g_α, welche g_ε entspricht. Wir projiciren nun die Stralen s des Paraboloids aus dem unendlich fernen Punkt von g_ε auf irgend eine Ebene, welche ihrer Richtungsebene parallel ist, so erhalten wir einen Büschel von Stralen s'', welcher dem Büschel der Stralen s' projectivisch gleich ist. Die projicirenden Ebenen sind sämmtlich unter einander parallel, und für jeden Stral s ist die auf ihm liegende Punktreihe ihrer Projection, d. h. der Punktreihe von s'' congruent. Diese Projection ist daher auch der Punktreihe des Strales s' congruent, und es folgt, dass der Büschel der Stralen s'' und die auf ihnen liegenden Punktreihen dem Büschel der Stralen s' und den zugehörigen Punktreihen congruent sind; überdies ist die Ebene der Stralen s'' der Ebene der Stralen s' parallel.

Bei dieser Projection entsprechen allen Punkten einer Geraden g_α des Paraboloids die Punkte einer Geraden g_α'', also in O' die Punkte einer Geraden g_α'. Alle diese Geraden g_α'', $g_\beta''\ldots$ sind einander parallel; dasselbe gilt daher auch von den entsprechenden Geraden g_α', $g_\beta'\ldots$ des Bündels O'. Es gehört demnach nicht allein zu jedem Punkt A_s der Ebene α ein ganz bestimmter Punkt A_s' im Stralenbündel O', sondern es entsprechen auch allen Punkten von g_α die Punkte einer Geraden g_α'; d. h. den Punkten der Ebene α entsprechen die Punkte einer Ebene α', und da jedem unendlich fernen Punkt von α ein unendlich ferner Punkt von α' entspricht, so sind α und α' zwei affine ebene Systeme.

Da alle Geraden g_α', $g_\beta'\ldots$ parallel zu einander sind, so folgt weiter, dass auch die Ebenen α', $\beta'\ldots$ sämmtlich parallel sind.

Die Ebenen α', β', $\gamma'\ldots$ stehen auf dem Stral x' des

Bündels senkrecht. Sind nämlich E_0, E_1, E_2 die Punkte von g_0, g_1, g_2, welche in ε liegen, so ist

$$E_0 A_0 = E_1 A_1 = E_2 A_2,$$

also auch

$$O' A_0' = O' A_1' = O' A_2',$$

also steht in der That die Ebene $\alpha' = [A_0' A_1' A_2']$ auf x' senkrecht.

Endlich ergiebt sich nun, dass den sämmtlichen Lagen, welche die Gerade g im Verlauf der Bewegung einnimmt, in O' die Stralen des durch g_0', g_1', g_2' bestimmten Rotationskegels entsprechen. Denn ist g_i die Lage der Geraden g in einem beliebigen Moment, so ist g_i Verbindungslinie der Punkte E_i und A_i; mithin ist g_i' Verbindungslinie von O' und A_i', und da

$$O' A_i' = O' A_0' = O' A_1' = O' A_2'$$

ist und A_i' in der Ebene α' liegt, so ist $O' A_i' = g_i'$ eine Kante des Rotationskegels.

Wir können nunmehr dieselben Folgerungen ziehen, welche wir im § 7 für das Stralsystem gezogen haben, und erhalten daher folgenden Satz:

Wenn eine Gerade g sich so bewegt, dass vier Punkte derselben in festen Ebenen laufen, so bewegt sich jeder Punkt in einer Ebene und beschreibt in derselben eine Ellipse. Alle diese Ebenen bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, nämlich die sämmtlichen Schmiegungsebenen einer cubischen Parabel. Die Mittelpunkte aller Ellipsen liegen auf einer Geraden; dieselbe ist senkrecht zu jeder Ebene, welche die Asymptote der cubischen Parabel enthält. Die Gerade g selbst beschreibt eine geradlinige Fläche vierter Ordnung, alle Erzeugenden der Fläche bilden gleiche Winkel mit der Axe, auf welcher die Mittelpunkte der Ellipsen liegen.[30])

Die Mittelpunkte der Ellipsen sind diejenigen homologen Punkte der affinen Ebenen des Büschels, welche den kürzesten Abstand von einander haben.

7. Wenn die Gerade g der Bedingung unterworfen wird, dass drei ihrer Punkte A, B, C in festen Ebenen α, β, γ

laufen, so beschreibt jeder andere Punkt D derselben ein Ellipsoid. Denn aus den vorstehenden Sätzen folgt sofort, dass alle Lagen, welche der Punkt D in einer beliebigen Ebene δ des Raumes annehmen kann, eine Ellipse bilden.

Betrachten wir g als Bestandteil eines räumlichen Systems Σ und bestimmen die Bewegung noch so, dass ein vierter Punkt E von Σ auf irgend einer Fläche bleibt, so beschreibt stets D das Ellipsoid. Aber da jetzt g eine Gerade von Σ ist, so bilden seine Normalen der Flächen aller Punkte von g ein Hyperboloid; d. h. die Normalen von A, B, C, D haben hyperboloidische Lage.

Betrachten wir irgend eine Lage von g, für welche der Punkt D in eine der Ebenen α, β, γ, z. B. in die Ebene α fällt. Da A stets in α liegt, so liegt g ganz in α, daher muss B ein Punkt der Geraden $|\alpha\beta|$ und C ein Punkt von $|\alpha\gamma|$ sein. Wir erhalten daher alle Lagen von g, für welche D in α liegt, wenn wir g so bewegen, dass B auf $|\alpha\beta|$ und C auf $|\alpha\gamma|$ läuft. Dabei beschreibt aber D eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Schnittpunkt der drei Ebenen α, β, γ liegt. Dasselbe ergiebt sich für die Ebenen β und γ, also folgt, dass der Scheitel der von α, β, γ gebildeten Ecke der Mittelpunkt des Ellipsoids ist; d. h.

Wenn sich eine Gerade so bewegt, dass drei Punkte derselben in drei festen Ebenen laufen, so beschreibt jeder andere Punkt der Geraden ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der festen Ebenen ist. Die Normalen aller Ellipsoide bilden in jedem Augenblick ein Hyperboloid.[31])

Stehen im besonderen je zwei der Ebenen α, β, γ senkrecht auf einander, so sind sie die Hauptebenen eines jeden Ellipsoids. Denn dann hat die in irgend einer der drei Ebenen liegende Ellipse die Schnittlinie mit den beiden anderen Ebenen zu Hauptaxen, und zwar sind DA, DB, DC die Längen der Hauptaxen.

8. Wir betrachten wieder drei beliebige Ebenen α, β, γ. Der Ort von D ist in jeder durch D gehenden Ebene die Ellipse, in welcher die Ebene das Ellipsoid schneidet. Nun existirt unter diesen Ebenen eine, δ, welche das Ellipsoid be-

rührt; bestimmen wir daher die Bewegung von g so, dass die vier Punkte A, B, C, D in resp. α, β, γ, δ bleiben, so ist die Bewegung der Geraden unmöglich. In diesem Falle bilden die auf α, β, γ, δ in A, B, C, D errichteten Normalen ein Hyperboloid, während sie in allen anderen Fällen dies nicht thun und ein Stralsystem bestimmen; es folgt demnach:

Sollen vier Punkte A, B, C, D einer Geraden sich in vier festen Ebenen α, β, γ, δ bewegen, so ist, wenn die Normalen der Ebenen in den Punkten A, B, C, D hyperboloidische Lage haben, die Bewegung unmöglich.[32])

Die Gerade g muss in diesem Fall derjenige Stral des eben behandelten Stralsystems dritter Ordnung sein, welcher die Ebenen des zugehörigen Ebenenbüschels in den Punkten kürzesten Abstandes trifft.

Literaturangaben und Bemerkungen.

1) S. 2. Dieser Satz ist zuerst von Chasles ausgesprochen worden, Bull. des sciences math. p. Férussac. Bd. 14, S. 321; 1830. Die dort erwähnte ausführliche Abhandlung publicirte Chasles erst im Jahre 1878 unter dem Titel: Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques, Bull. de la soc. math. de France, Bd. 6. S. 208.

2) S. 5. Das momentane Drehungscentrum für die allgemeine Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene hat Bernouilli entdeckt; vgl. De centro spontaneo rotationis, Opera, Bd. 4. S. 265; 1742. Descartes hatte bereits über 100 Jahre vorher den Satz ausgesprochen, dass, wenn eine Curve c von einer Curve c' abrollt, die Normalen der Bahnen aller Punkte von c durch den momentanen Berührungspunkt gehen. Vgl. Oeuvres de Descartes, herausgegeben von Cousin, Bd. 7, S. 88. (1638.)

3) S. 8. Diesen Satz gab Cauchy 1827, Exercises de math. Bd. 2, S. 75. Zwei Jahre später fand ihn auch Chasles, vgl. das oben erwähnte Mémoire. S. 236.

4) S. 9. Die Idee, neben der ursprünglichen gleichzeitig die umgekehrte Bewegung zu untersuchen, stammt von Chasles. Allerdings kam es Chasles zunächst nur darauf an, auf einen gewissen „Dualismus" bei der mechanischen Erzeugung der Curven aufmerksam zu machen. Wenn nämlich ein Punkt A von σ in σ' eine Curve a' beschreibt, so geht bei der umgekehrten Bewegung a' durch A. Denken wir uns also im Punkte A einen beschreibenden Stift, so zeichnet derselbe die Curve a' in σ' auch dann, wenn wir σ festhalten und σ' gegen σ bewegen. Vgl. Aperçu historique, S. 409. Den theoretischen Nutzen, welchen die Betrachtung der umgekehrten Bewegung gewährt, erkannte zuerst Aronhold; vgl. die „Grundzüge der kinematischen Geometrie" in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses, 51. Jahrgang, S. 129.

5) S. 19. Der Wendekreis wurde von Bresse entdeckt. Er definirt ihn als Ort der Punkte, für welche die in die Bahnnormale fallende Beschleunigungscomponente momentan gleich Null ist. Journ. de l'école polyt. Heft 35, S. 89.

6) S. 19. Dass die Wendekreise mit den Rückkehrpunkten der Enveloppen zusammenhängen, erkannte zuerst Aronhold. Vgl. die unter 4) erwähnten „Grundzüge", S. 153.

7) S. 20. Auf die Undulationspunkte hat Ball aufmerksam gemacht, Notes on applied mechanics, Proceedings of the R. Irish Acad., Ser. II, Bd. I, S. 243. (1871.) Everett zeigte, dass die Enveloppe der Wendekreise in zwei Curven von verschiedener geometrischer Bedeutung zerfällt; vgl. on the kinematics of a rigid body, Quarterly journal, Bd. 13, S. 61.

8) S. 28. Vgl. Aronhold's unter 4) genannte Grundzüge, S. 139.

9) S. 30. Vgl. E. E. Bobillier, cours de géométrie, 12me édition, S. 232.

10) S. 32. Diese Construction stammt von Grübler; Schlömilch's Zeitschrift für Math. Bd. 29, S. 310.

11) S. 37. Die Existenz der Curven k_{03} und k_{03}' hat Burmester nachgewiesen, Civilingenieur, Bd. 23, S. 241. Ueber die besonderen Eigenschaften dieser Curven dritter Ordnung, welche die unendlich fernen imaginären Kreispunkte enthalten, vergleiche man z. B. Schröter, Math. Ann. Bd. 5, S. 50 und Bd. 6, S. 85, oder Durège, Math. Ann. Band 5, S. 83.

12) S. 38. Vgl. hierzu Burmester, Civilingenieur, Bd. 23, S. 319.

13) S. 43. Diese Gleichung ist von Savary in den an der école polytechnique gehaltenen Vorlesungen zuerst entwickelt worden. Vgl. hierüber Chasles, Journal de math. von Liouville, Bd. 10, S. 204.

14) S. 49. Diesen Satz gab Euler in den Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae Bd. 20, S. 202; 1776. Er wurde erst 25 Jahre später gefunden, als der entsprechende Satz für unendlich kleine Bewegungen. Diesen entdeckte d'Alembert bereits 1749, Recherches sur la précession des équinoxes, Paris 1749, S. 83, und bald darauf auch Euler selbst; vgl. découverte d'un nouveau principe de mécanique, Mém. de l'Ac. de Berl. 1750. S. 185.

15) S. 51. Diese Bezeichnung stammt von Schroeter. Ueber ein Hyperboloid von besonderer Art, Journ. f. Math., Bd. 85, S. 41 und 79. Dass die hier auftretenden Kegel orthogonal sind, erkannte zuerst Turazza, Memorie del Reale Istit. Veneto, Bd. 15, S. 474.

16) S. 54. Die Polkegel sind von Poinsot gefunden worden, Liouville's Journal de Math. Bd. 16. S. 26.

17) S. 57. Aronhold hat in den Vorlesungen über kinematische Geometrie, die er am Berliner Polytechnikum gehalten, zuerst gezeigt, wie man die den Bündel betreffenden Constructionen auf ebene Constructionen zurückführen kann. Seine Methode ist von Buka dargestellt worden. Dieselbe enthält bereits die Anfänge der im Text gegebenen Abbildung. Vgl. Buka, das sphärische Kurbelgetriebe, Inauguraldissertation, Göttingen 1876.

18) S. 70. Der Kegel K^3 wird bereits von Schell kurz erwähnt, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. 1. S. 497.

19) S. 86. Das Nullsystem wurde ziemlich gleichzeitig von Chasles

(vgl. die erste der im Vorwort genannten Abhandlungen) und von Möbius entdeckt; Lehrbuch der Statik, § 74 ff. Die Bezeichnung stammt von Möbius; a. a. O. § 84.

20) S. 88. Diese Bezeichnung wurde von Mannheim eingeführt; vgl. die in der Vorrede citirte Abhandlung 1. S. 68.

21) u. 22) S. 91 u. 92. Der Satz ist auf Giulio Mozzi (1765) zurückzuführen. Vgl. darüber Giorgini, Memorie di mat. della soc. ital. delle scienze, Modena 1836. S. 47. Derselbe Satz wurde 1830 von Chasles neu gefunden; vgl. Bull. des scienc. math. de Férussac. Bd. 14, S. 324. Für unendlich kleine Bewegungen hat ihn auch Cauchy in den Exercises de math. Bd. 2, S. 87, 1827, abgeleitet.

23) S. 96. Die Existenz dieser Flächen wurde von Cauchy an der unter 21) citirten Stelle ausgesprochen. Ihre Eigenschaften entwickelte Bour, Journ. de l'école pol. Heft 39, S. 36.

24) S. 112. Ueber das orthogonale Hyperboloid vgl. die unter 15) genannten Abhandlungen.

25) S. 137. Die Wendecurve i^3 wurde zuerst von Everett richtig erkannt, vgl. kinematics of a rigid body, Quart. journ. Bd. 13, S. 39. Unabhängig davon wurde sie auch von Mehmke gefunden, Civilingenieur, Bd. 29, S. 581.

26) S. 139. Die cubische Verwandtschaft ist ausführlich von Nöther und Cremona behandelt worden, Math. Ann. Bd. 3, S. 552 und Annali di Mat. Serie 2, Bd. 5, S. 131. Siehe auch Sturm, Math. Ann. Bd. 22, S. 480.

27) S. 150. Die ersten Untersuchungen über Bewegungsfreiheit stammen von Schönemann, Monatsber. der Berliner Acad. 1855, sowie Journ. f. Math. Bd. 90, S. 44. Die Schönemann'schen Sätze wurden von Mannheim in der Abhandlung 1, S. 77 ff. neu gefunden. Die erste ausführliche Untersuchung der sechs Grade der Bewegungsfreiheit gab Ball, Transactions of the R. Irish Acad. Bd. 25, S. 183. Vgl. auch Halphen, sur le déplacement d'un solide invariable, Bull. de la soc. math. de France, Bd. 2.

28) S. 158. Die kinematische Bedeutung des Cylindroids erkannte Ball, Transactions of the R. Irish Acad. Bd. 25, S. 161. Der Name stammt nach Ball's Angabe von Cayley.

29) S. 168. Vgl. Comptes rend. de l'Ac. des sciences de Paris, Bd. 52, S. 487.

30) S. 189. Vgl. Mannheim, sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace, Comptes rend. de l'Ac. des sc. de Paris, Bd. 76, S. 635. Die Abbildung auf den Stralenbündel lehrte Halphen, Bull. de la soc. math. de France, Bd. 1, S. 114.

31) S. 190. Diesen Satz gab zuerst Dupin, Journ. de l'école pol. Heft 14, S. 60.

32) S. 191. Vgl. Halphen, Bull. de la soc. math. de France, Bd. 8. S. 18.

Berichtigungen.

S. 2, Z. 11 v. u. lies c^ν statt C^ν.

S. 13 ist hinter Z. 13 einzuschalten:

Zwei einander so zugeordnete ebene Systeme heissen *quadratisch verwandt* und die Punkte O_{12}, O_{20}, O_{01} resp. O_{12}', O_{20}', O_{01}' ihre *Hauptpunkte*.

S. 59, Z. 12 v. u. lies im statt ein.

Die Figuren 7, S. 16 und 9, S. 27 sind durch folgende Figuren zu ersetzen:

Fig. 7.

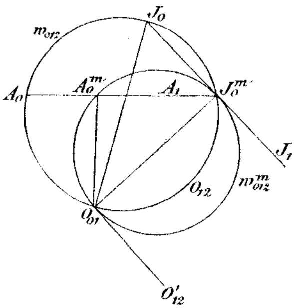


Fig. 9.