PRINZIPIEN

DER

MECHANIK UND DES MASCHINENBAUES.

Von

F. Redtenbacher,
Professor.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Mannheim.
Verlag von *Friedrich Bassermann.*
1852.

Druck von *Malsch und Vogel* in Carlsruhe.

VORREDE.

Das vorliegende Werk behandelt die allgemeinen Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues im Wesentlichen in derjenigen Weise und in dem Umfang, wie sie der Verfasser als allgemein wissenschaftliche Einleitung in das spezielle Studium des Maschinenwesens an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe vorträgt.

Auswahl und Behandlungsweise der Gegenstände sind theils durch die Vorkenntnisse der Zuhörer, theils durch das zu erreichende praktische Ziel hervorgerufen worden.

Diese Zuhörer haben Alle schon einmal Vorträge über Statik und Mechanik, und theilweise selbst auch über Maschinenlehre angehört; aber fast jeder in anderer, und viele in solcher Weise, wie es für das Studium des Maschinenwesens nicht geeignet ist.

Die Ungleichartigkeit und oftmals nicht genügende Gründlichkeit der Vorkenntnisse machte es durchaus zur Nothwendigkeit, mit den Prinzipien der Mechanik von Neuem zu beginnen, und dabei insbesondere diejenigen Lehren hervorzuheben, deren gründliches Verständniss den Erfolg dieses Studiums allein zu sichern vermag.

Aber obgleich diese Arbeit zunächst nur durch lokale Verhältnisse veranlasst wurde, so dürfte dieselbe doch weiter verbreiteten Bedürfnissen entsprechen, denn das denkende Erfassen der Prinzipien einer Wissenschaft und insbesondere der Prinzipien der Mechanik erfordert eine mehrmalige Wiederholung und Anwendung derselben, und die lokalen Erscheinungen entspringen oftmals aus sehr allgemein wirkenden Ursachen.

Carlsruhe, im März 1852.

Der Verfasser.

INHALT.

Seite

Von den lebendigen Kräften.

Rotirende Bewegung eines starren Körpers.

Gesetze der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems

Die Reibung.

II. Theil.

Prinzipien des Maschinenbaues.

Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand.

Maschinen mit periodischem Beharrungszustand.

Maschinen mit unregelmässigem Beharrungszustand.

Seite

Die Effektverhältnisse.

Analytische Theorie der Maschinen.

Anordnung der Arbeitsmaschinen.

Anordnung der Transmission.

Maschinenzeichnungen.

I. Theil.

Prinzipien der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung als Erscheinung.
(Phoronomie.)

1) ***Ruhe und Bewegung.*** Ein Körper ist in Ruhe, wenn er seinen Ort im Raume nicht ändert, also an einem gewissen Ort verharret. Ein Körper ist in Bewegung, wenn er seinen Ort im Raum stetig ändert.

Wir betrachten zunächst dieses Beharren im Ort oder dieses Verändern des Ortes als Erscheinung, ohne an die Ursachen zu denken, durch welche Ruhe oder Bewegung hervorgebracht wird. Ruhe und Bewegung können absolut oder relativ gedacht werden. Ersteres ist der Fall, wenn der Zustand eines Körpers auf einen absolut ruhenden, letzteres wenn derselbe auf einen in Bewegung befindlichen Körper bezogen wird. Es gibt vielleicht keinen absolut ruhenden Körper. Alle Bewegungen sind in der Wirklichkeit absolute Bewegungen. Die relativen Bewegungen sind abstrakte Vorstellungen, aber gleichwohl sind die Bewegungen, welche man zu betrachten hat, der Mehrzahl nach relative Bewegungen.

2) ***Bewegung eines Punktes.*** Das, was sich in der Wirklichkeit bewegt, ist ein Körper oder eine Verbindung von Körpern. Die Bewegung des Ganzen kann nur dadurch mit vollkommener Genauigkeit und Schärfe bestimmt werden, wenn die Bewegung jedes einzelnen Punktes des Ganzen angegeben wird. Wir müssen daher zunächst die Bewegung eines isolirt gedachten Punktes ins Auge fassen, und dabei haben wir zu berücksichtigen: 1) die Bahn, welche der Punkt beschreibt, d. h. die Linie längs welcher sich der Punkt bewegt, indem derselbe seinen Ort im Raum mit Stetigkeit verändert. 2) Den Zustand, in welchem sich der Punkt in jedem Zeitaugenblick seiner Bewegung befindet. Ist demnach die Bahn und der Bewegungszustand für jeden Augenblick der Bewegung bekannt, so ist die Bewegung, als Erscheinung betrachtet, vollkommen bestimmt.

3) ***Die Bahn,*** welche ein Punkt beschreibt, kann geradlinig oder krummlinig sein. Diese Bahn kann ferner eine endlos fortlaufende oder in sich selbst zurückkehrende (geschlossene) sein. Die Bahn kann endlich von einem ganz isolirten körperlichen Punkt beschrieben werden, und dann ist ihre Gestalt eine Folge der Kräfte, welche während der

Bewegung thätig sind; oder sie kann von einem Punkt beschrieben werden, der mit gewissen Körpern in ganz bestimmtem geometrischem Zusammenhang steht, und dann ist die Gestalt der Bahn ganz unabhängig von den die Bewegung begleitenden Kräften, und richtet sich nur allein nach dem bestehenden geometrischen Zusammenhang. In ersterem Falle nennt man die Bewegung eine freie Bewegung, in letzterem eine gezwungene, oder besser erzwungene. Es liegt im Wesen der Maschinen, dass bei denselben in der Regel nur gezwungene Bewegungen vorkommen, und dass die Bahnen geschlossen sind. Eine Maschine darf nur eine gewisse Art von Bewegung machen können, weil sie nur für eine ganz bestimmte und eingeschränkte Thätigkeit bestimmt ist. Wegen der Bestimmtheit muss die Bewegung erzwungen, wegen der Beschränktheit müssen die Bahnen geschlossen sein. Die Bestimmung der Gestalt der Bahn ist daher bei den Maschinen in den meisten Fällen nur eine verhältnissmässig einfache geometrische Aufgabe.

4) ***Die Bewegung in der Bahn. Geschwindigkeit.*** Jede Bewegung erfolgt mit Stetigkeit im Raum und in der Zeit; d. h. die aufeinander folgenden Orte, nach welcher der Punkt in seiner Bewegung gelangt, bilden eine stetige Linie, und der Uebergang von einem Punkt der Bahn nach einem andern geschieht nicht in einem untheilbaren Zeitmoment, sondern in einer gewissen grössern oder kleinern Zeitintervalle. Wir erhalten eine Vorstellung von der Lebhaftigkeit oder Raschheit oder Geschwindigkeit der Bewegung, wenn wir den Weg, den der Punkt zurücklegt, mit der Zeit vergleichen, in welcher diese Erscheinung vor sich geht oder vor sich gehend gedacht wird; und je nachdem der Bewegungszustand ein sich stets gleichbleibender oder ein sich stets nach irgend einem Gesetz verändernder ist, nennen wir die Bewegung eine gleichförmige oder ungleichförmige.

5) ***Gleichförmige Bewegung.*** Wenn eine Bewegung gleichförmig erfolgt, d. h. wenn bei derselben die Bewegungszustände des Punktes in allen aufeinander folgenden Zeitmomenten ganz identisch sind, so müssen in allen gleich grossen Zeitintervallen gleich grosse Wege zurückgelegt werden, und die in zwei ungleichen Zeitintervallen zurückgelegten Wege müssen sich wie die Zeitintervalle verhalten. Nennt man **C** den Weg, der in jeder Sekunde und **S** den Weg, der in der Zeit von **T** Sekunden zurückgelegt wird, so geht aus dem Begriffe der gleichförmigen Bewegung hervor, dass:

$$\left.\begin{aligned} S &= C\,T \\ C &= \frac{S}{T} \\ T &= \frac{S}{C} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und der in jeder Sekunde zurückgelegte Weg C kann als das Maass der Geschwindigkeit genommen werden.

Man findet also die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, indem man den Weg misst, der in irgend einer Sekunde zurückgelegt wird, oder auch, indem man den Weg misst, der in irgend einer grössern oder kleinern Zeit zurückgelegt wird, und denselben durch diese Zeit dividirt. Man kann sich die Bewegungsgesetze durch graphische Darstellungen versinnlichen, indem man die Zeiten als Abscissen und die zugehörigen Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt; die gleichförmige Bewegung stellt sich dann als eine zur Abscissenaxe parallele Linie, a b c z, Tafel I. Fig. 1, dar, weil alle Geschwindigkeiten, und mithin auch alle Ordinaten Aa Bb Cc — gleich gross zu nehmen sind.

6) *Gleichförmig beschleunigte Bewegung.* Eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeitintervallen um gleich viel, oder proportionell mit der Zeit wächst, nennt man eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (gleichmässig anwachsende Bewegung). Graphisch dargestellt erscheint dieselbe als eine gegen die Abscissenaxe geneigte gerade Linie Az Fig 2. Nennt man g die Geschwindigkeitszunahme in jeder Sekunde, und C T S wie früher, so hat man zunächst:

$$C = g\,T \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Der Raum, welcher in der Zeit T zurückgelegt wird, ergibt sich, wie aus folgenden Betrachtungen erhellen wird, durch Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks A Z z.

Man kann nämlich die während eines unendlich kleinen Zeittheilchens M N erfolgende Bewegung als eine mit der Geschwindigkeit M m geschehende gleichförmige Bewegung betrachten, und dann findet man das im Zeitelement M N zurückgelegte Wegelement durch das Produkt $\overline{MN} \times \overline{Mm}$ oder durch den Flächeninhalt des Trapezes Mm Nn. Theilt man nun dies Dreieck durch unendlich viele Ordinaten in unendlich viele, unendlich schmale Streifen, so geben die Flächeninhalte derselben die Wegelemente, welche in den Zeitelementen beschrieben werden, und die Summe aller Flächeninhalte, d. h. der Flächeninhalt des ganzen Dreiecks gibt die Summe aller Wegelemente oder den ganzen Weg:

Ist also: $AZ = T$, $\overline{Zz} = g\,T$, so folgt:

$$S = \tfrac{1}{2}\,\overline{AZ} \times \overline{Zz} = \tfrac{1}{2}\,g\,T^2 \quad \dots \quad (3)$$

7) *Gleichförmig verzögerte Bewegung.* Dies ist eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um gleich viel abnimmt. Dieselbe wird durch eine gegen die Abscissenlinie niedergehende

gerade Linie dargestellt. Ist $C = \overline{Aa}$ Fig. 3 die Geschwindigkeit in irgend einem bestimmten Zeitaugenblick, g die Abnahme der Geschwindigkeit in jeder Sekunde. $V = \overline{Zz}$ die Geschwindigkeit nach Verlauf von $T = \overline{AZ}$ Sekunden, so hat man:

$$V = C - g\,T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Der in der Zeit T zurückgelegte Weg S wird hier wiederum durch den Flächeninhalt $\overline{Aa\,Zz}$ der Fig. 3 ausgedrückt. Man hat daher

$$S = \tfrac{1}{2}\,\overline{AZ}\,\{Aa + Zz\}$$

$$\text{oder:}\quad S = \tfrac{1}{2}\,T\,\{C + C - g\,T\}$$

$$\text{demnach:}\quad S = C\,T - \tfrac{1}{2}\,g\,T^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

8) *Ungleichförmig beschleunigte Bewegung.* Jede Bewegung, bei welcher die in gleichen Zeitintervallen eintretenden Geschwindigkeitsänderungen nicht gleich gross sind, wird eine ungleichförmig beschleunigte genannt, wenn die Geschwindigkeit zunimmt, und eine ungleichförmig verzögerte, wenn die Geschwindigkeit abnimmt. Graphisch dargestellt erscheint diese Bewegung als eine krumme Linie a z (Fig. 4 und 5). Fig. 4 repräsentirt eine beschleunigte Bewegung, weil die Ordinaten (die Geschwindigkeiten) von A an bis Z hin wachsen. Fig. 5 repräsentirt eine verzögerte (abnehmende) Bewegung, indem die Ordinaten immer kleiner und kleiner werden, je mehr die Abscissen (Zeiten) wachsen. Ist das Gesetz bekannt, nach welchem sich die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert, so kann die entsprechende Bewegungsfigur leicht dargestellt werden, und dann findet man durch Berechnung ihres Flächeninhaltes den Weg, welcher in einem bestimmten Zeitraum zurückgelegt wird. Denn während eines unendlich kleinen Zeitelements M N (Fig. 5) kann man die Bewegung als mit der Geschwindigkeit M m gleichförmig geschehend ansehen, und dann ist $\overline{Mm} \times \overline{MN}$, d. h. Flächeninhalt M N m n der im Zeittheilchen M N zurückgelegte Weg. Theilt man also die ganze Figur durch unendlich viele Ordinaten, so sind die Flächeninhalte der Streifen die Wege, welche in den aufeinander folgenden Zeittheilchen zurückgelegt werden, und die Summe dieser Flächeninhalte, d. h. der Flächeninhalt A a Z z der ganzen Figur, ist der Weg, der in der Zeit A Z zurückgelegt wird.

Um sich ohne Hilfe einer graphischen Darstellung die bei einer ungleichförmigen Bewegung in irgend einem Zeitaugenblick stattfindende Geschwindigkeit anschaulich zu machen, muss man sich vorstellen, dass der bewegliche Punkt während einer ganzen Secunde in dem Bewegungszustand verbleibe, der in dem gewissen Augenblick vorhanden ist, und dann bestimmt der in dieser Secunde mit unveränderlicher Geschwindigkeit zurückgelegte Weg die Geschwindigkeit des Bewegungszustandes, welcher am Anfang dieser Zeitsekunde vorhanden war.

9) *Periodisch schwingende Bewegung.* Es gibt unzählige Arten von ungleichförmigen Bewegungen. Von besonderem, sowohl von wissenschaftlichem als auch von praktischem Interesse sind die periodischen und schwingenden Bewegungen. Die Wellenbewegung des Wassers, die Bewegungen der Luft, welche in uns die Empfindung des Tones und Schalles hervorrufen; die Bewegungen des Aethers, auf welchen die Lichterscheinungen, und wahrscheinlich auch die Wärme und Elektrizitäts-Erscheinungen beruhen; die Bewegung der Planeten um die Sonne gehören in die Klasse der periodischen und schwingenden Bewegungen. Aber nicht nur allein die Bewegungen, welche der Physiker und der Astronom zu betrachten hat, sondern auch jene, welche bei den Maschinen vorkommen, sind der Mehrzahl nach entweder gleichförmige oder periodisch schwingende, denn es liegt im Wesen einer jeden Maschine, dass sie nur eine ganz bestimmte Function oder Arbeit zu verrichten bestimmt sein kann, ihr Bewegungszustand wird also während sie arbeitet entweder immer fort der gleiche bleiben, oder wiederkehrend veränderlich sein. Die folgenden, durch Figuren erläuterten Beispiele werden genügend sein, von den mannigfaltigen schwingenden Bewegungen eine klare Vorstellung hervorzurufen. In allen diesen Figuren sollen, wie bisher immer geschehen ist, die Abscissen die Zeiten und die Ordinaten die Geschwindigkeiten vorstellen.

Fig. 6 stellt eine periodisch wiederkehrende hin und her schwingende Bewegung dar. Die ganze Dauer der Periode ist **A Z**, und zerfällt in zwei gleiche Hälften: **A M** und **M Z**. Da die Geschwindigkeiten in der zweiten Hälfte negativ sind, so deutet dies darauf hin, dass die Bewegungsrichtung während der Zeit **M Z** jener, die in der Zeit **A M** statt findet, entgegengesetzt ist. Man wird leicht finden, dass diese Schwingung mit der eines Pendelpunktes übereinstimmt. **A M** entspricht einer Hin-, **M Z** der darauf folgenden Herschwingung. **A** entspricht dem Anfang der Schwingung, die Geschwindigkeit ist in diesem Augenblick = o. **B** entspricht dem Moment, wann der Pendelpunkt die grösste Geschwindigkeit erreicht hat u. s. w. Aehnlich der Pendelschwingung sind alle diejenigen Schwingungen, welche um eine Gleichgewichtsposition eines Punktes erfolgen. Bei derartigen Schwingungen ist der schwingende Punkt stets bemüht, in seine Gleichgewichtsposition zurückzukehren, ohne dass ihm sein Vorhaben dauernd gelingt.

Fig 7 stellt eine periodisch schwingende Bewegung dar, die als eine regelmässig gestörte gleichförmige Bewegung betrachtet werden kann. Man kann sich nämlich die Sache so vorstellen, als wenn der Punkt das Bestreben hätte, sich unausgesetzt mit der Geschwindigkeit A a gleichförmig fortzubewegen, und als würde er durch irgend eine regelmässig wirkende Ursache fort und fort von seinem Ziele abgelenkt, so dass es ihm nur in einzelnen Zeitmomenten bei a, m, z gelingt, diese normale Geschwindigkeit zu erreichen. Die gerade Linie a m z drückt so zu sagen eine ideale gleichförmige Bewegung aus, um welche der Punkt in seiner wirklichen Bewegung a b m c z herumschwingt.

Fig. 8 stellt eine schwingende Bewegung dar, die als eine gestörte gleichförmig beschleunigte Bewegung betrachtet werden kann. Die Bewegung hat das Ansehen, als wollte der Punkt die gleichförmig beschleunigte Bewegung machen, welche der geraden Linie A b e d entspricht, und als würde er in diesem Bestreben regelmässig gestört, so dass der wirkliche Bewegungszustand um den gleichförmig beschleunigten herumschwankt.

Fig. 9 ist eine gestörte gleichförmig verzögerte Bewegung Die wirkliche Bewegung des Punktes erfolgt nämlich abwechselnd schneller und langsamer als die gleichförmig verzögerte Bewegung, welche der geraden Linie a b c d entsprechen würde.

Fig. 10. Hier schwankt die wirkliche, durch die wellenförmige Linie dargestellte Bewegung um eine ungleichförmig beschleunigte durch die punktirte Linie a b c d dargestellte Bewegung herum

Fig. 11. Diese Bewegung hat Aehnlichkeit mit der vorhergehenden, unterscheidet sich aber von derselben dadurch, dass hier die Abweichungen oder Schwankungen ungleich gross sind. Diese Abweichungen wachsen nämlich anfangs bis zu einer gewissen Grenze, nehmen dann wiederum ab und verlieren sich zuletzt fast ganz, so dass also der wirkliche Bewegungszustand immer mehr und mehr den schwankenden Zustand verliert und in einen ungleichförmig beschleunigten übergeht.

10) *Drehende Bewegung eines festen Körpers.* Wenn ein fester Körper sich um eine mit demselben unveränderlich verbundene ihrer Lage nach unbewegliche Axe dreht, bleibt die Lage jedes Punktes des Körpers gegen die Drehungsaxe unverändert, und jeder Punkt des Körpers bewegt sich dabei in einem Kreis, dessen Halbmesser gleich ist seiner Entfernung von der Axe, dessen Mittelpunkt in der Drehungsaxe liegt und dessen Ebene auf der Axe senkrecht steht. Bei jeder Umdrehung der Axe beschreibt jeder Punkt einen vollständigen Kreis. Alle in gleicher Entfernung von der Axe befindlichen Punkte beschreiben gleich grosse Kreise, ihre Geschwindigkeiten sind demnach gleich gross. Die Geschwindigkeit zweier Punkte, welche sich in ungleicher Entfernung r und R von der Axe befinden, beschreiben Kreise von ungleicher Grösse, ihre Geschwindigkeiten werden daher nicht gleich gross sein, sondern werden

sich verhalten wie die Längen der Peripherien dieser Kreise, mithin wie die Halbmesser oder wie die Entfernungen r und R. Um nun sowohl die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung des ganzen Körpers, als auch die jedes einzelnen Punktes anzugeben, braucht man nur zu wissen, wie gross die Geschwindigkeit eines um die Längeneinheit von der Axe entfernten Punktes ist, d. h. man braucht nur den Weg zu kennen, den ein solcher Punkt in jeder Secunde zurücklegt, denn man findet dann die Geschwindigkeit eines in einer Entfernung r von der Axe befindlichen Punktes, wenn man jene, die in der Entfernung Eins statt findet r mal grösser nimmt. Man nennt die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein in der Entfernung Eins befindlicher Punkt bewegt, die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung. Bezeichnet man dieselbe mit w, so findet man die Geschwindigkeit für einen Punkt, dessen Entfernung von der Axe r ist durch

$$w\,r.$$

Durch die Winkelgeschwindigkeit wird zwar die drehende Bewegung vollkommen bestimmt, aber dennoch ist diese Messungsart für technische und überhaupt practische Zwecke nicht passend, indem dieselbe keine lebhafte Anschauung hervorruft. Wenn man z. B. sagt: die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ein Körper sich dreht sei 3 Metres, so wird gewiss Jedermann ziemlich lange zu thun haben, um eine sinnlich lebhafte Vorstellung von der Raschheit dieser drehenden Bewegung zu erhalten, und dies kommt daher, weil man fast nie in den Fall kommt, diese Winkelgeschwindigkeit verwirklicht vor Augen zu haben.

Tritt man vor eine in Bewegung befindliche, mit Axen und Rädern versehene Maschine, so erhält man zunächst von der Raschheit der drehenden Bewegungen eine sinnliche Vorstellung, und wenn man diese Geschwindigkeit so messen will, dass das Maass der Vorstellung, und dass die Vorstellung das Maass hervorzurufen im Stande sein soll, so denkt gewiss Niemand daran, dies durch die Winkelgeschwindigkeit erreichen zu wollen, sondern es ist klar, dass man angeben wird, wie oftmal eine jede Axe in einer bestimmten Zeit, z. B. in jeder Minute, sich umdreht. Das natürliche Gefühl leitet also dahin, die Schnelligkeit der drehenden Bewegung durch die Anzahl der in einer bestimmten Zeit erfolgenden Umdrehungen zu messen, und man darf sich daher nicht wundern, dass diese Messungsart in der technischen Praxis allgemein eingeführt worden ist; ja man hat sogar ohne alle Verabredung überall die gleiche Zeiteinheit gewählt, und zwar nicht der Sekunde, sondern der Minute, weil dieses Zeitenmaass den Vortheil gewährt, dass man es dann in den meisten und gewöhnlichen Fällen mit ganzen Zahlen zu thun hat, was fast nie der Fall wäre, wenn man sich der Sekunde bedienen würde. Wir werden also in der Folge die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung durch die Anzahl der Umdrehungen, die in einer Minute gemacht werden, messen. Nennt man diese Anzahl n, so lässt sich ganz leicht die Umdrehungszahl n durch die Winkelgeschwindigkeit und umgekehrt berechnen. Denkt man sich nämlich einen Punkt, dessen Entfernung von der Drehungsaxe $= 1$ ist, so wird dieser bei einer Umdrehung des Körpers einen Weg 2π, bei n Umdrehungen $2\pi n$ zurücklegen; dies ist also der Weg, der in einer Minute, also in 60 Sekunden zurückgelegt wird. Demnach ist der in einer Sekunde zurückgelegte Weg, d. h. die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi n}{60}$. Man hat daher

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{60} \cdot n. \\ n &= \frac{60}{2\pi} \cdot w. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Nennt man ferner v die wahre Geschwindigkeit eines in der Entfernung r befindlichen Punktes, so hat man: $v = r\,w$ demnach auch,

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi}{60} \cdot nr. = 0{\cdot}10472.\ nr \\ n &= \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{v}{r} = 9.548\,\frac{v}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

11) *Der mittlere Werth einer veränderlichen Grösse.* Der mittlere Werth einer veränderlichen Grösse ist ein gewisser constanter Werth, der in irgend einer Hinsicht das gleiche Resultat hervorbringt, wie die veränderliche Grösse. Beispiele werden diesen Begriff erklären.

Zwei Personen gehen gleichzeitig von einem gewissen Ort aus und verfolgen den gleichen Weg. Die eine Person **A** gehe ganz gleichförmig, die andere **B** hingegen sehr ungleichförmig fort, aber beide, nehmen wir an, erreichen das Ziel im gleichen Zeitmoment. Dann ist gewiss diese unveränderliche Geschwindigkeit von **A** von dem gleichen Werth, wie die veränderliche Geschwindigkeit von **B**, und desshalb ist die erstere der mittlere Werth der letztern. Stellen wir das so eben Ausgesprochene graphisch dar (Fig. 12), indem wir die Zeit durch die Abscissen und die Geschwindigkeiten durch die Ordinaten darstellen, so wird **Aa** $\mathfrak{Z}$**Z** die Bewegung der Person **B** und **A** $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{Z}$ **Z** die Bewegung von **A** darstellen können, und weil beide in einerlei Zeit den gleich grossen Weg zurückgelegt haben, so muss der Flächeninhalt des Rechtecks **A** $\mathfrak{A}$ **Z** $\mathfrak{Z}$ gleich sein dem Flächeninhalt der Figur **Aa zZ.**

Die mittlere Temperatur eines Ortes für einen gewissen Zeitraum, ist diejenige gleichförmige Temperatur, bei welcher in dem gleichen Zeitraum eine eben so grosse Wärme entwickelt würde, wie durch die wirklich statt findende veränderliche Temperatur Die Wärme, welche in einer gewissen Zeit producirt wird, ist aber offenbar der Intensität der Temperatur und der Zeitdauer ihrer Einwirkung proportional. Wenn wir nun die Sache wiederum graphisch durch die vorige Fig. 12 darstellen, so bedeuten die Ordinaten der Fig. Aa zZ die wirkliche veränderliche Temperatur, die in dem Zeitraum A Z statt findet, und dann ist der Flächeninhalt dieser Figur die totale Wärmemenge, die in der Zeit A Z entwickelt wird. Dagegen aber wird die Ordinate A 𝔄, oder die Höhe des Rechtecks 𝔄 A Z 𝔷, die mittlere Temperatur vorstellen, wenn der Flächeninhalt desselben jenem der Fig. A a Z z gleich ist

Die mittlere Erhebung eines Landes, einer Insel z. B. ist diejenige Höhe, welche über die ganze Ausdehnung der Insel eintreten würde, wenn man durch Abgrabung der Berge und Ausfüllung der Thäler, eine vollkommene Horizontalfläche herstellte.

Diese mittlere Höhe findet man leicht durch Rechnung, indem man das Volumen des ganzen über das Wasser hervorragenden Erdkörpers, welcher die Insel bildet, durch den Flächeninhalt der durch die Uferlinie gebildeten Figur (Flächeninhalt der Insel) dividirt. Denn nennt man $\mathfrak{V}$ das Volumen der Insel, S ihren Flächeninhalt, und $\mathfrak{H}$ die mittlere Höhe so ist klar dass man hat

$$\mathfrak{V} = \mathrm{S}\,\mathfrak{H}, \text{ mithin } \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathrm{S}}$$

Diese drei Beispiele werden einstweilen genügen, um einen deutlichen Begriff von dem mittleren Werth einer Grösse zu erhalten. Allgemein kann man nun zur Bestimmung des mittleren Werthes einer veränderlichen Grösse folgende Regel aufstellen:

Es sei y eine von x abhängige veränderliche Grösse. Diese Abhängigkeit kann graphisch durch eine krumme Linie dargestellt werden, indem man (Fig. 12) die Werthe von $x = AP$ als Abscissen und die entsprechenden Werthe von $y = MP$ als Ordinaten aufträgt. Wenn nun x alle zwischen o und $AZ = x$ liegenden Werthe annimmt, so erhält man den diesen sämmtlichen Annahmen entsprechenden mittleren Werth der Ordinaten, indem man den Flächeninhalt der Fig. A a Z z durch die Abscisse $AZ = x$ dividirt, oder mit andern Worten wenn man die Höhe eines Rechteks berechnet, dessen Flächeninhalt jenem der Fig. A a Z z gleich und dessen Länge gleich A Z ist.

Mit Hilfe der Differenzialrechnung und Integralrechnung findet man den mittleren Werth (y_m) durch folgenden Ausdruck:

$$y_m = \frac{\int\limits_{x=o}^{x=x} y\,dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch nur dann zur wirklichen Berechnung anwendbar, wenn die Abhängigkeit zwischen x und y durch eine analystische Formel gegeben ist, und wenn die Aenderungen von y innerhalb der Grenze x = o und x = x mit Stetigkeit erfolgen. In allen andern Fällen, und insbesondere dann, wenn y sprungweise veränderlich ist, muss man die Fig. A a Z z zuerst graphisch darstellen, und dann lässt sich ihr Flächeninhalt jederzeit leicht berechnen, indem man die ganze Figur in vertikale Streifen theilt, den Flächeninhalt derselben berechnet und ihre Summe bildet.

12) *Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.* Die wirkliche Bewegung eines Punktes oder Körpers entsteht oftmals durch das gleichzeitige Zusammenwirken zweier oder mehrerer Bewegungen, welchen der Körper zu folgen gezwungen ist. Die Auffindung der wahren Bewegung aus den Einzelbewegungen nennt man die Zusammensetzung der Bewegungen, und diese zusammengesetzte Bewegung selbst wird die „resultirende Bewegung“ genannt

Umgekehrt kann man jede wirkliche, durch was immer für Ursachen hervorgebrachte Bewegung, durch das gleichzeitige Auftreten von zweien oder mehreren Einzelbewegungen hervorbringen. Die Auffindung eines solchen Systems von gleichzeitig wirkenden Einzelbewegungen, die eine mit einer wirklich vorhandenen Bewegung vollkommen übereinstimmende Bewegung hervorzubringen vermögen, durch welche also die wirkliche Bewegung entstanden sein könnte, oder durch welche sie entstanden gedacht werden darf, nennt man: die Zerlegung einer Bewegung. Die folgenden Beispiele werden geeignet sein, diesen Gegenstand zu erläutern.

Eine Kugel (Fig. 13) sei an einen Stab A d gesteckt und werde auf demselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt, so zwar, dass dieselbe auf dem Stab in jeder Sekunde eine gleich grosse Wegstrecke A a = a b = b c = . — zurücklegt Gleichzeitig aber werde der Stab senkrecht auf seiner eigenen Richtung bewegt, und ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so z. B., dass er nach der 1., 2., 3. Sekunde nach 1, 2, 3, gelangt. Nun ist leicht einzusehen, dass diese Kugel in ihrer wahren Bewegung längs des Stabes hingleiten und gleichzeitig mit dem Stab nieder gehen wird. Ist nun der Stab nach der 1. Sekunde in 1 angekommen, so wird die Kugel gleichzeitig um ein Stück A a auf dem Stab fortgerückt sein; sie wird sich offenbar nach der 1. Sekunde in I d. h.

im Endpunkt der Diagonale des Rückecks A a I, befinden, dessen Seite die Geschwindigkeiten A a und A i sind. Am Ende der 2ten Sekunde befindet sich der Stab in 2 und die Kugel wird während dieser 2ten Sekunde auf dem Stab den Weg gleich a b zurückgelegt haben, sie befindet sich also am Ende der zweiten Sekunde im Punkt II, d. h. am Endpunkt der Diagonale, welche dem mit A b und A 2 beschriebenen Rechteck angehört u. s. f. Es ist also klar, dass die Richtung die wahre Bewegung der Kugel in der Linie A, I, II . . . IV. und mit einer Geschwindigkeit A I = I II = II III . . . . erfolgen wird, und man findet demnach die Richtung und Geschwindigkeit der wahren Bewegung, wenn man nach der Richtung des Stabs die Geschwindigkeit A a der Kugel auf dem Stab, nach der Bewegungsrichtung des Stabs die Geschwindigkeit A 1 aufträgt, dann das Rechteck A 1 a I verzeichnet und die Diagonale A I zieht.

Noch anschaulicher dürfte diese Bewegung vermittelst zweier Stäbe (Fig 14) hervorgebracht werden. Denkt man sich z. B. einen Körper nach zwei auf einander senkrechten Richtungen durchbohrt, aber so, dass die beiden Löcher sich nicht begegnen, dann durch jedes derselben einen Stab y y und x x gesteckt; den ersteren mit einer Geschwindigkeit A B nach horizontaler und letztern mit einer Geschwindigkeit A C nach vertikaler Richtung bewegt, so muss der Körper offenbar in der Richtung der Diagonale A Z des Rechtecks, welches aus A B und A C konstruirt werden kann, fortschreiten, und die Länge der Diagonale ist zugleich auch die wahre Geschwindigkeit. Die Bewegungen A B und B C längs der beiden Stäbe werden die componirende und die Bewegung nach der Diagonale die resultirende oder die zusammengesetzte Bewegung genannt. Man kann auch A B und A C die relativen Bewegungen des Körpers gegen die beiden Stäbe und A D die absolute Bewegung desselben nennen.

Ein Körper sei an zwei Stäbe (Fig. 1. Taf II) x x und y y gesteckt, deren Richtungen irgend einen beliebigen Winkel x A y bilden; der Stab x x werde parallel zu sich selbst in einer Sekunde um A B der Stab y y gleichzeitig parallel zu sich selbst um A C fortbewegt. Diese Bewegungen der beiden Stäbe werden den Körper zwingen, nach der Diagonale A D des Parallelogrammes A B C D und mit einer Geschwindigkeit A D fortzuschreiten.

Mannigfaltige und sehr anschauliche Beispiele von zusammengesetzten Bewegungen kommen bei den Maschinen, und insbesondere bei denjenigen vor, welche in den Maschinenwerkstätten angewendet werden. Bei den meisten Hobelmaschinen wird der Meisel in einen Support eingespannt, der nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen beweglich ist, wodurch es möglich wird, die Meiselspitze nach jeder beliebigen ebenen, krummen Linie fortzubewegen. Wenn es irgend ein praktischer Zweck erfordert, kann man auch ganz leicht eine Einrichtung treffen, bei welcher irgend ein Körper oder ein Punkt, z. B. eine Meiselspitze, nach irgend einer beliebigen Linie von doppelter Krümmung bewegt würde. Es ist dazu nur ein System von drei unter rechten Winkeln gegen einander beweglichen Schlitten nothwendig. Wenn man z. B. auf die Bahn einer Hobelmacshine oder Drehbank einen Schlitten stellt und eine Einrichtung trifft, um denselben auf der Bahn hin und her zu bewegen; wenn man dann auf diesem Schlitten einen zweiten Schlitten anbringt, und denselben mit einem Mechanismus versieht, durch welchen er leicht nach vertikaler Richtung auf und nieder bewegt werden kann; wenn man endlich auf diesen Schlitten noch einen dritten Schlitten anbringt, der nach horizontaler Richtung und senkrecht gegen die Bahn der Maschine beweglich ist, so wird ein mit diesem dritten Schlitten verbundener Meisel, wenn alle drei Schlitten gleichzeitig bewegt werden, nach jeder beliebigen krummen Linie im Raum fortgeführt werden können. Diese Supportbewegungen sind Beispiele über die Zusammensetzung von geradlinigen Bewegungen zu gerad- oder krummlinigen Bewegungen, und zeigen dann auch klar, dass aus geradlinigen Bewegungen jede beliebige krummlinige Bewegung zusammengesetzt werden könne, so wie auch, dass man jede beliebige krummlinige Bewegung, durch zwei oder durch drei geeignet angeordnete geradlinige Bewegungen hervorbringen kann. Die Drehbänke und Bohrmaschinen geben Beispiele über die Zusammensetzung von geradlinigen und drehenden Bewegungen. Bei den vollkommenen, selbstwirkenden Drekbänken wird der abzudrehende Gegenstand um eine Axe gedreht, und der Drehstahl wird parallel zu dieser Axe mit gleichförmiger, jedoch geringer Geschwindigkeit fortbewegt. Durch Zusammenwirken dieser beiden Bewegungen beschreibt die Spitze des Meisels relativ gegen den Körper eine Schraubenlinie, deren einzelne Umwindungen gewöhnlich so nah aufeinander folgen, dass sie nur bei aufmerksamer Besichtigung erkannt werden

Bei den Bohrmaschinen wird der Meisel in einen Körper eingespannt, der mit einer starken Drehungswelle (der Bohrspindel) so verbunden ist, dass er sich mit derselben herumdrehen muss, jedoch längs derselben verschoben werden kann So wie nun die Axe gedreht und der Körper gleichzeitig längs derselben fortgeschoben wird, so beschreibt die Spitze des Meisels in ihrer wahren Bewegung, die also aus einer drehenden und einer geradlinigen fortschreitenden Bewegung zusammengesetzt ist, eine Schraubenlinie, die je nach dem Verhältniss zwischen der drehenden und fortschreitenden Geschwindigkeit mehr oder weniger Steigung haben wird.

Wenn man eine runde Scheibe um eine Axe dreht, die durch ihren Mittelpunkt geht und auf ihrer Ebene senkrecht steht, so beschreibt irgend ein Punkt ihres Umfangs einen Kreis. Bewegt man diese Scheibe, während sie sich um ihre Axe dreht, noch nach einer geraden oder krummen Linie fort, so wird jener Punkt eine zusammengesetzte Bewegung machen, und er wird Linien beschreiben, die im Allgemeinen in die Klasse der cycloidischen Kurven gehören.

Diese Beispiele werden wohl genügen, um eine klare Anschauung zu erhalten, wie aus einfachen Bewegungen zusammengesetzte Bewegungen entstehen, und dass die Richtung und Geschwindigkeit derselben nun leicht durch Konstruktionen aufgefunden werden kann. Ist nämlich die Bewegung aus zwei einfachen Bewegungen **A** und **B** zusammengesetzt, so findet man die resultirende **R** durch die Diagonale des Parallelograms, welches aus der Geschwindigkeit von **A** und **B** construirt werden kann. Ist die Bewegung aus drei oder mehreren Bewegungen **A**, **B**, **C**, — zusammengesetzt, so sucht man zuerst die resultirende **R** aus **A** und **B**, dann die resultirende aus **R** und **C** und fährt so fort, bis alle einzelnen Bewegungen in der Construction an die Reihe gekommen sind. Die resultirende, welche zuletzt zum Vorschein kommt, ist dann das Resultat der vereinten Thätigkeit aller Bewegungen.

Es ist aber nun auch leicht einzusehen, dass man umgekehrt jede Bewegung eines Punktes auf unzählige verschiedene Arten durch das Zusammenwirken von einfachen Bewegungen sich entstanden denken kann, und dies nennt man eben das Zerlegen der Bewegung, d. h. das Ausfindigmachen von zwei oder mehreren einfachen Bewegungen, durch deren gleichzeitiges Auftreten eine vorhandene Bewegung hervorgebracht werden kann, oder als hervorgebracht gedacht werden darf.

13) *Zusammensetzung und Zerlegung der Drehbewegungen.* Drehende Bewegungen können auf ähnliche Weise wie fortschreitende zusammengesetzt und zerlegt werden.

Es sei Fig. 6 Taf. II. $O\ x\ y\ z$ ein mit dem Körper, dessen Drehung untersucht werden soll, unveränderlich verbundenes Axensystem. Dreht man den Körper um eine Axe OA, die mit den Axen Ox Oy Oz drei Winkel α β γ bildet, um einen Winkel w, so gelangt das Axensystem aus der Position $O\ x\ y\ z$ in die Position $O x_1\ y_1\ z_1$. In diese Position kann es aber auch durch drei aufeinander folgende Drehungen um die Axen Ox Oy Oz gebracht werden. Dreht man nämlich zuerst das System um einen Winkel r um die Axe Oz, so gelangt es in die Position $O x_2\ y_2\ z$. Dreht man es hierauf um einen Winkel q um die Axe $O y_2$, so gelangt es in die Position $O x_1\ y_2\ z_2$. Dreht man es endlich noch um einen Winkel p um die Axe $O x_1$, so kommt es in die Lage $O x_1\ y_1\ z_1$, und es ist klar, dass die drei Drehungswinkel p q r so gewählt werden können, dass $O x_1\ y_1\ z_1$ gegen $O\ x\ y\ z$ jede beliebige Lage haben kann.

Die Beziehungen, welche zwischen den Grössen w p q r $\alpha\,\beta\,\gamma$ stattfinden, ergeben sich vermittelst der Figur auf folgende Weise:

Verbindet man die Punkte $x x_1$, $y y_1$, $z z_1$ und den Punkt A mit $x x_1$ $y y_1$ $z z_1$ durch grösste Kreise (die in der Zeichnung weggelassen wurden, um dieselbe nicht durch zu viele Linien zu überladen), so ergeben sich dann drei rechtwinkliche Dreiecke $z z_1 z_2$, $x x_2 x_1$, $y y_1 y_2$ und die gleichschenklichen Dreiecke $z A z_1$ $y A y_1$ $x A x_1$, in welch letzteren ist:

$$\begin{aligned} \widehat{Az} &= \widehat{Az_1} = \gamma, & \widehat{zAz_1} &= \omega \\ \widehat{Ay} &= \widehat{Ay_1} = \beta, & \widehat{yAy_1} &= \omega \\ \widehat{Ax} &= \widehat{Ax_1} = \alpha, & \widehat{xAx_1} &= \omega \end{aligned}$$

Nimmt man nur unendlich kleine Drehungen p, q, r, ω vor, so darf man die Dreiecke $z z_1 z_2$, $x x_1 x_2$, $y y_1 y_2$ als geradlinige Dreiecke behandeln und dann findet man leicht

$$\left.\begin{aligned} p^2 + q^2 &= \omega^2 \sin.^2 \gamma \\ v^2 + p^2 &= \omega^2 \sin.^2 \beta \\ v^2 + q^2 &= \omega^2 \sin.^2 \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass

$\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta + \sin.^2\gamma = 3 - (\cos^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma)$ $= 2$ ist.

$$p^2 + q^2 + v^2 = \omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (1) folgt aber;

$$\left.\begin{aligned} p &= \omega \cos.\alpha \\ q &= \omega \cos.\beta \\ r &= \omega \cos.\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Weil p q r unendlich klein angenommen wurden, so gelten diese Gleichungen auch dann, wenn man p q r ω die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen bedeuten lässt.

Diese Beziehungen, welche die Gleichungen (3) ausdrücken, können sehr leicht geometrisch construirt werden.

Schneidet man nämlich auf den Axen O x, O y, O z drei Linien ab, die sich zu einander verhalten wie die Winkelgeschwindigkeiten p q r, construirt hierauf ein Parallelepiped und zieht die Diagonale, so bestimmt dieselbe durch ihre Richtung und durch ihre Länge die Winkelgeschwindigkeit ω. Auf diese Weise wird also für die aufeinanderfolgenden Drehungen um die drei Cordinatenaxen eine einzige äquivalente um eine mittlere Axe gefunden.

Umgekehrt kann man für jede Drehung um eine beliebige Axe O A drei äquivalente Drehungen p q r finden, wenn man die Winkelgeschwindigkeit ω als gerade Linie auf O A aufträgt, und sie dann auf die Axen O x O y O z projektirt.

Erfolgt die Drehung des Körpers um die Axe A O mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so sind auch p q r unveränderliche Grössen. Dreht sich das Axensystem ganz beliebig um den Punkt O, so werden die Winkelgeschwindigkeiten p q r und die Winkel α β γ wegen

$$\cos.\ \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\cos\ \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\cos.\ \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

in jedem Augenblick andere Werthe haben. Die Drehung um den Punkt O kann daher angesehen werden, wie wenn sich der Körper mit veränderlicher Geschwindigkeit um eine Axe dreht, die in jedem Augenblick ihre Lage gegen die Coordinatenaxe und folglich auch gegen den damit verbundenen Körper ändert.

14) ***Relative Bewegung.*** Wenn von der Bewegung eines Körpers die Rede ist, so denken wir uns zunächst immer eine wahre absolute Ortsveränderung, d. h. eine solche, die mit dem einfachsten Grundbegriff, den wir von Bewegung haben, vollkommen übereinstimmt. Wir denken also nur an Das, was sich bewegt, und wie es sich bewegt, und abstrahiren von allen Dingen, die im Raume das Bewegliche umgeben.

Oftmals werden wir aber veranlasst, nicht nur Das, was sich bewegt, sondern insbesondere auch die Umgebung des Bewegten ins Auge zu fassen, um zu erfahren, wie der Ort und die Lage desselben gegen die Umgebung sich ändert. Dabei abstrahiren wir also von dem, was mit dieser Umgebung an und für sich vorgeht, ob sich diese etwa bewegt, oder ob sie in Ruhe ist, und wir betrachten einzig und allein die Ortsveränderungen des Körpers gegen seine Umgebung, und dies nennt man die relative Bewegung des Körpers.

Wenn zwei Körper A und B ihre relative Lage gegen einander ändern, so kann man fragen: 1) wie ändert A seine Lage gegen B, und 2) wie ändert B seine Lage gegen A; oder mit andern Worten: welches ist die relative Bewegung von A gegen B, und welches ist die relative Bewegug von B gegen A.

Diese beiden relativen Bewegungen kann man bestimmen, wenn die absoluten Bewegungen der beiden Körper bekannt sind, wenn man berücksichtigt, dass diese relativen Bewegungen nicht verändert werden, wenn den beiden Körpern noch eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt wird, wodurch einer derselben in Ruhe kömmt. Es seien z. B. Fig. 2 Taf. II: a b und c d die Geschwindigkeiten der Körper A und B in irgend einem Zeitaugenblick. Ertheilt man nun den beiden Körpern eine gemeinschaftliche geradlinige Bewegung, deren Geschwindigkeit mit jener von B übereinstimmt, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzt ist, so kommt B in Ruhe und A besitzt dann zwei Geschwindigkeiten a b und a e = c d, aus welchen nach der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegung die resultirende Geschwindigkeit a d entspringt. Der Körper A bewegt sich also gegen B gerade so, wie wenn B ruhte, und A nach der Richtung a d mit der Geschwindigkeit a d sich bewegte, d. h. es ist a d der Richtung und Grösse nach die relative Bewegung von A gegen B.

Ertheilt man hingegen den beiden Körpern Fig. 3 Taf. II. eine gemeinschaftliche Bewegung, die der Richtung nach jener von A entgegengesetzt ist, deren Geschwindigkeit aber mit der von A übereinstimmt, so kommt A zur Ruhe, und B besitzt dann die zwei Geschwindigkeiten c d und $\overline{c\,f} = \overline{a\,b}$, woraus die zusammengesetzte Geschwindigkeit c g entspringt, welche gleich aber entgegengesetzt der Geschwindigkeit a d Fig. 2 ist. Die Linie $\overline{c\,g}$ bestimmt also die Richtung und Geschwindigkeit der relativen Bewegung von B gegen A.

Auf ähnliche Weise erhält man auch die relativen Bewegungen, wenn sich die beiden Körper in einer und derselben geraden Linie, oder wenn sie sich um eine gemeinschaftliche Axe drehen. Bewegen sich z. B. Fig. 4 Taf. II. die Körper A und B nach einerlei Richtung und in derselben geraden Linie fort, und denkt man sich, dass beiden Körpern noch eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt werde, die jener von B gleich und entgegengesetzt ist, so kommt B in Ruhe und A entfernt sich dann mit einer Geschwindigkeit $\overline{c\,d} - \overline{a\,b}$ von B; es ist also $\overline{c\,d} - \overline{a\,b}$ die relative Geschwindigkeit von A gegen B.

Denkt man sich dagegen, dass die beiden Körper eine gemeinschaftliche Bewegung enthalten, die jener von A gleich und entgegengesetzt ist, so kommt A in Ruhe, und B entfernt sich dann von A nach links mit einer Geschwindigkeit c d — a b, es ist also dies der Richtung und Grösse nach die relative Bewegung von B gegen A, und sie ist, wie man sieht, der relativen Bewegung von A gegen B gleich und entgegengesetzt.

Wenn sich zwei Körper A und B (Fig. 5 Taf. II.) mit ungleicher Geschwindigkeit aber nach einerlei Richtung um eine Axe x y drehen, und die Geschwindigkeit von A grösser als jene von B ist, so erfolgt die Bewegung von B gegen A gerade so, wie wenn A ruhte und B mit einer Geschwindigkeit B—A nach rechts sich drehte. Dagegen bewegt sich A gegen B so, wie wenn B ruhte und A mit einer Geschwindigkeit (B—A) nach links sich drehte.

Wären die Richtungen der absoluten Bewegung von A und B in den beiden letzten Fällen einander entgegen gesetzt, so wird die relative Bewegung der Körper gegeneinander mit der Summe der Geschwindigkeiten A + B erfolgen, und es stimmt dabei die Richtung der relativen Bewegung von B gegen A mit der von B, und die Richtung der relativen Bewegung von A gegen B mit jener von A überein.

15) *Die scheinbare Bewegung eines Körpers.* Eine scheinbare Bewegung ist eine relative Bewegung, welche auf einen Beobachter den Eindruck einer absoluten Bewegung macht. In der That, alle Bewegungen die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, machen auf uns den Eindruck, als wären es wahre oder absolute Bewegungen, und doch wissen wir, dass es nicht so ist und dass Alles, was die Sinne erkennen nicht Wahrheit, sondern nur Schein ist. Wir befinden uns gar nicht in der Lage, irgend eine absolute Bewegung mit unseren Sinnen wahrnehmen zu können, denn wir begleiten ja die Erde, wir drehen uns mit ihr um die Axe, wir folgen ihr in ihrem Lauf um die Sonne, und werden wahrscheinlich noch von dieser um andere uns ganz unbekannte grosse Centralsonnen herumgeführt. Auf einem so beweglichen Observatorium wie die Erde ist, müssen uns nothwendig alle Bewegungen anders erscheinen, als sie wirklich sind, denn zur Wahrnehmung einer wahren Bewegung gehört vor allem Andern, dass sich der Beobachter in absoluter Ruhe befinde. Wenn Wasser schnell unter einer Brücke strömt, und wir sehen von derselben längere Zeit starr auf einen bestimmten Punkt der Wasserfläche herab, so ist der Eindruck zunächst der, dass die Brücke ruht und dass das Wasser schnell durchströmt. Nach einiger Zeit ändert sich dieser Eindruck, das Wasser scheint unbeweglich, und wir mit der Brücke scheinen stromaufwärts zu eilen, obgleich wir uns ganz klar bewusst sind, dass dies nur Täuschung ist. Aber auch dieser Eindruck bleibt nicht immer fortdauernd und gleich, es treten meistens wieder Zeitintervallen ein, wo die Brücke wieder zu ruhen und das Wasser beweglich erscheint. Diese Thatsachen zeigen dann offenbar, dass die scheinbaren Bewegungen relative Bewegungen sind, die den Eindruck von wahren Bewegungen machen. Die relative Bewegung ist eine Gedanken-Abstraktion, wir abstrahiren im Gedanken von der Bewegung desjenigen Körpers A, gegen welchen wir die Bewegung eines zweiten Körpers B betrachten wollen. Die scheinbare Bewegung setzt einen sinnlichen Beobachter voraus, der die relative Aenderung der Lage der Körper gegen einander oder gegen

ihn selbst mit seinen Sinnen beobachtet. Die scheinbare Bewegung kann aus der wahren Bewegung gerade so bestimmt werden, wie die relative Bewegung. Ist z. B. Fig. 7, Taf. II. A ein Beobachter, der sich wissentlich oder unbewusst nach der Richtung A b und mit der Geschwindigkeit a b bewegt, B ein Körper, der sich nach c d mit der Geschwindigkeit c d bewegt, so ist c f die scheinbare Bewegung des Körpers B gegen den Beobachter. Dagegen ist Fig. 8 Taf. II. a g die scheinbare Bewegung des Beobachters gegen den Körper B. Das will sagen, der Beobachter A wird manchmal glauben, er ruhe und der Körper B nähere sich ihm nach der Richtung c f und mit der Geschwindigkeit c f; dann aber wird es ihm scheinen, als wenn der Körper B ruhe und als bewege er sich nach der Richtung a g gegen B hin. Die Ursache, dass man bald die eine, bald die andere dieser relativen Bewegungen zu sehen meint, muss in phisiologischen, nicht aber in mechanischen Principien gesucht werden.

16) *Gemeinschaftliche Bewegung.* Eine gemeinschaftliche Bewegung zweier oder mehrerer Körper ist eine solche Bewegung, bei der sie ihre relative Lage gegen einander nicht verändern. Wenn z. B. ein fester Körper von irgend einer Gestalt beliebig im Raum bewegt wird, so haben alle Theile des Körpers eine gemeinsame Bewegung. Getrennte Körper haben eine gemeinsame Bewegung, wenn sie sich so bewegen, wie wenn sie Theile eines einzigen festen Körpers wären. Ertheilt man einem in Bewegung befindlichen System von Körpern eine gemeinsame Bewegung, so wird dadurch die relative Bewegung der Körper im System nicht geändert. So z. B. ist die relative Bewegung der Planeten um die Sonne ganz unabhängig von der dem ganzen Planetensystem gemeinschaftlichen Fortbewegung im Raume. Eben so ist auch die Bewegung der Körper auf der Erde ganz unabhängig, sowohl von ihrer drehenden, als auch von ihrer fortschreitenden Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Die Dinamik oder die Lehre von der Bewegung der Massen.

Allgemeine Eigenschaften der Materie.

17) *Das Wesen der Materie.* Das Wesen der Materie ist uns nicht bekannt, wir wissen nicht, worin und wodurch sie besteht, ob sie zu irgend einer Zeit entstanden oder ob sie von jeher existirte. Wir wissen nur, dass sie ein im Raum existirendes auf unsere Sinne einzuwirken fähiges Reales ist, das sich in Ruhe oder in Bewegung befinden kann. Die Materie wird auch Stoff oder Substanz genannt, und eine bestimmte, räumlich begränzte Quantität derselben heisst ein physischer Körper.

Die Körper erscheinen uns entweder im Zustande des reinen Seins (wobei sie beharrlich in einem gewissen Zustand der Ruhe oder der Bewegung verbleiben) oder sie erscheinen uns in einem Zustand der Veränderung des Seins (wobei sie aus der Ruhe in Bewegung oder aus einer Bewegung in eine andere übergehen). Das erstere tritt immer ein, wenn die Körper ganz sich selbst überlassen sind; das letztere hingegen, wenn eine Wechselwirkung zweier Körper stattfindet.

Man kann also die Materie oder den Stoff gleichsam als ein Doppelwesen betrachten, das mit einem passiven und mit einem aktiven Prinzip begabt ist. Das passive Prinzip, das man das „Beharrungsvermögen", auch Trägheit genannt hat, besteht theils in der Fähigkeit der Materie, durch sich selbst und ohne alle äussere Einwirkung in einem Zustand des ruhigen oder des bewegten Seins verharren zu können, theils in der Unfähigkeit, durch sich selbst einen in ihr vorhandenen Zustand des ruhigen oder bewegten Seins zu verändern. Dies Beharrungsvermögen könnte man auch das Prinzip der Selbsterhaltung des ruhigen oder des bewegten Seins der Materie nennen. Das zweite, nämlich das aktive Prinzip, wird Kraft genannt. Es besteht in der Fähigkeit der Stoffe, auf einander wechselseitig einzuwirken, und dadurch die Zustände ihres Seins zu verändern. Dieses aktive Prinzip kann man auch das Prinzip der Wechselwirkungsfähigkeit der Stoffe nennen, wodurch das ruhige oder das bewegte Sein der Körper verändert wird.

Wenn die Stoffe nur allein mit dem ersteren dieser Prinzipe begabt wären, würde jeder Körper nur für sich selbst und in jeder Hinsicht unverändert fortbestehen. Körper, die einmal in Ruhe waren, würden ewig und unverändert an ihrem Platz verbleiben; die bewegten würden, unbekümmert um Alles, was neben ihnen besteht, zwecklos ihren Weg im Raum fortsetzen. Ganz anders gestalten sich die Erscheinungen, wenn wir uns die Stoffe auch mit dem Prinzip der Wechselwirkungsfähigkeit ausgerüstet denken. In diesem Falle besteht jeder Körper nicht nur für sich allein, sondern auch in Beziehung zu andern Körpern; sie nehmen von ihrer Existenz wechselseitig Notiz, leben so zu sagen in Gesellschaft, treten zu Gruppen zusammen, wodurch mannigfaltige Gebilde und Gestalten entstehen, die aber nicht unveränderlich sind, sondern durch später eintretende Wechselwirkungen wiederum aufgelöst werden. Kein Körper ist dann zu ewiger Ruhe oder zu unveränderlich einförmiger Bewegung verdammt, denn Alles wirkt wechselseitig auf einander ein, und so entsteht dann eine Welt des Zusammenseins, des Zusammenwirkens, des Gestaltens, der Ruhe und Bewegung, oder, mit einem Wort, eine wirkliche lebendige Welt. Man sieht hieraus, dass ohne das gleichzeitige Vorhandensein jener beiden Prinzipe weder die wirkliche, noch überhaupt eine Welt mit vernünftigen Zwecken denkbar ist.

Die Entdeckung dieser Grundeigenschaften der Materie ist ein Resultat der angestrengtesten Thätigkeit der tiefsten Denker, welche die Geschichte der Wissenschaft nennt. Keppler, nachdem er die bekannten Eigenschaften der Planetenbewegung aufgefunden hatte, wodurch diese Bewegung bestimmt, aber nicht erklärt wird, bemühte sich vergebens, die nähere Erklärung dieser Erscheinung ausfindig zu machen. Die Eigenschaft der Trägheit war zu seiner Zeit noch nicht entdeckt. Er glaubte, dass von der Sonne unsichtbare Arme ausgingen, welche die Planeten in ihrer Bahn erhalten, und sie in der Richtung ihrer Bahnen fortschieben, und meinte, dass die Planeten augenblicklich stille stehen würden, wenn diese Einwirkung der Sonne aufhörte. Erst Newton entdeckte das Gesetz der Trägheit, und erkannte dadurch, dass jeder Planet vermöge dieser Eigenschaft der Materie in jedem Augenblick nach der Richtung der Tangente seiner Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortbewegen will, und dass die in der Richtung des Radius Vektor und nicht in der Richtung der Tangente wirkende Sonnenkraft die Planeten stets von der geraden Bahn, welche sie vermöge der Trägheit beschreiten würden, ablenkt und gleichzeitig deren Geschwindigkeit verändert.

18) *Unmittelbare Aeusserung der Kräfte, Messung der Kräfte.* Das Wesen der Kräfte kann nicht erklärt werden. Die Existenz derselben erkennen wir an den mannigfaltigen Wirkungen, welche sie hervorbringen, und insbesondere durch das Gefühl und Bewusstsein unserer eigenen physischen Kraft. Dieses Gefühl haben wir durch einen besonderen Sinn, den man „Tastsinn" nennt, den man aber besser Kraftsinn nennen könnte. Ohne diesen Sinn würden wir von der Existenz der Kräfte durchaus keine Ahnung haben, die Welt mit ihren Erscheinungen würde uns als eine Phantasmagorie erscheinen; die Ursachen dieser Erscheinungen aufzusuchen, würde uns wohl schwerlich in den Sinn kommen, und wenn es auch der Fall wäre, so könnten wir sie doch niemals auffinden. Durch diesen Sinn fühlen wir wenn unsere Kräfte thätig sind, oder wenn von Aussen auf unsern Körper eingewirkt wird. Wir empfinden die Existenz unserer eigenen Kraft, wenn wir einen Zug oder Druck ausüben; wir wissen aus der Erfahrung, dass durch anhaltende Thätigkeit eines solchen Zuges oder Druckes Bewegungen und Bewegungsveränderungen hervorgebracht werden können, und wir schliessen nun daraus, dass die unmittelbare Aeusserung einer jeden Kraft in einem Druck oder Zug bestehe, und dass jede Bewegung oder Bewegungsveränderung nur in Folge einer Zug- oder Druckäusserung irgend einer Kraft entstanden sein könne.

Gegen die Richtigkeit dieses Schlusses scheint nun allerdings die Thatsache zu sprechen, dass oftmals Körper, die nicht in Berührung stehen, auf einander bewegend einwirken. Ein Stein fällt zur Erde nieder, ein Stück Eisen bewegt sich gegen einen Magnet, zwei elektrisirte Körper nähern oder entfernen sich. Es ist also die Frage, ob auch in diesem Falle die unmittelbare Kraftäusserung ein Zug oder Druck genannt werden kann, und ob diese Art von Kraftäusserung mit einem Druck, den wir mit der Hand ausüben, zu vergleichen ist. Hierüber gibt uns der Tastsinn ganz unzweideutig Aufschluss. Wenn wir versuchen, mit unserer Hand das Fallen eines Steins, die Annäherung eines Eisenstücks an einen Magnet, oder die Annäherung oder Entfernung zweier elektrisirter Körper zu verhindern, so fühlen wir deutlich, dass wir einen Druck oder Zug ausüben müssen; wir dürfen es demnach wohl als eine ausgemachte Sache betrachten, dass die unmittelbare Aeusserung einer jeden Kraft in einem Zug oder Druck bestehe. Einen Zug, welcher auf eine Entfernung ausgeübt wird, nennt man auch Anziehung oder Attraktion, und einen auf Entfernung wirkenden Druck Abstossung oder Repulsion.

Wie es nun möglich ist, dass zwei von einander entfernte Körper anziehend und abstossend auf einander einwirken können, ist uns allerdings ein ganz unerklärbares Räthsel; allein es ist nun einmal unläugbare

Thatsache, dass solche Anziehungen und Abstossungen wirklich stattfinden; wir müssen sie demnach als Thatsachen gelten lassen, und es der Zeit überlassen, ob es je möglich werden wird, sie zu begreifen.

Diese unmittelbaren Kraftäusserungen können nach ihrer Intensität bestimmt werden, und dies nennt man das Messen der Kräfte. Als Einheit der Kräfte kann man irgend einen Zug oder Druck annehmen, z. B. jenen, den ein Körper, dessen Gewicht gleich 1 Kilogramm beträgt, auf eine Unterlage ausübt. Die Intensität einer Kraftäusserung ist dann gleich 2, 3, 4 zu setzen, wenn sie auf einen Körper von 2, 3, 4 Kilogrammes Gewicht nach vertikaler Richtung aufwärts wirkend im Stande ist das Fallen desselben zu verhindern.

Diese Messung der Kräfte nach ihren unmittelbaren Aeusserungen wird in der Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte allgemein befolgt. In der Bewegungslehre aber werden die Kräfte von vielen Autoren durch das Resultat der Bewegung gemessen, welches sie in den Körpern hervorbringen. Nach dieser Art zu messen, erklärt man als Einheit der Kräfte diejenige Kraft, welche in der Zeiteinheit auf eine Masseneinheit einwirkend eine Endgeschwindigkeit gleich der Längeneinheit hervorbringt.

Man sagt ferner: wenn eine Masse in einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit erlangt, so ist die Kraft, welche dies bewirkt hat, der Masse und Geschwindigkeit direkt, der Dauer der Einwirkung aber verkehrt proportional zu nehmen. Dabei wird aber nun gar nicht gesagt, was man sich unter dem Wort „Kraft" vorzustellen habe, so dass man eigentlich gar nicht weiss, was man dann gemessen hat. Es wird aber in der That auf diese Weise der Druck bestimmt, welcher in einer Masse in einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit hervorbringt, und damit fällt nun zwar das Geheimnissvolle dieser Messungsart weg; aber zu empfehlen ist dieselbe doch nie, denn es ist doch viel klarer und einfacher, wenn wir die Kräfte unter allen Umständen direkt durch den Zug oder Druck messen, welchen sie hervorbringen, und sodann die Frage stellen, welche Geschwindigkeit eine Masse erlangt, wenn man auf dieselbe einen Druck von so und so viel Kilogrammes durch eine gewisse Zeit einwirken lässt? Wir werden diese Frage in der Folge beantworten.

19) *Begriff von Masse, und Bestimmung ihrer Quantität.* Es ist bereits gesagt worden, dass die Materie in sich selbst die Fähigkeit nicht besitzt, aus der Ruhe in Bewegung, oder aus einem vorhandenen Bewegungszustand in einen andern überzugehen, d. h. dass sie träge sei.

Die Masse eines Körpers ist die Menge des Trägen eines Körpers, d. h. die Menge dessen, was sich selbst nicht bewegen, sich selbst nicht treiben kann, was also bewegt oder getrieben werden muss, wenn ein

Körper aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung, oder aus einem gewissen Bewegungszustand in einen andern übergehen soll.

Die Masse eines Körpers ist absolut unveränderlich; sie ist die unvergänglich unvernichtbare Menge des Trägen. Man kann einen Körper ausdehnen oder zusammendrücken, man kann seine Form auf mannigfaltige Art verändern, man kann ihn nach verschiedenen Orten auf der Erde bringen, wo er bald ein grösseres, bald ein kleineres Gewicht zeigen wird. Man kann einen Körper mechanisch oder chemisch zertheilen u. s. w.: – was man aber auch immer mit dem Körper vornehmen mag, seine Gesammtmasse, und für den Fall einer Theilung die Summe der Massen aller Theile bleibt unveränderlich.

Um die Masse eines Körpers zu bestimmen (zu messen), kommt es vor allem darauf an, ein Mittel zu besitzen, wodurch die Gleichheit zweier Massen erkannt werden kann. Ein solches Mittel bietet uns der Begriff dar, den wir von Masse aufgestellt haben. Nach diesem Begriff müssen wir zwei Massen als gleich gross erklären, wenn sie, von gleich intensiven Kräften und auf gleiche Weise getrieben, ganz identische Bewegungen zeigen. Werden 2, 3 oder mehrere Körper, von welchen man erkannt hat, dass sie gleiche Massen haben, vereinigt, so erhält man eine Gesammtmasse, die 2 bis 3 mal so gross ist, als die Masse jedes einzelnen der vereinigten Körper, und wenn die Masse eines derselben als Einheit angenommen wird, so ist jene des durch Vereinigung entstandenen Körpers gleich 2, 3 zu setzen.

Obgleich diese Methode der Massenbestimmung grundsätzlich vollkommen richtig ist, so ist sie doch nicht leicht praktisch ausführbar. Für den Augenblick genügt es uns aber, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung einzusehen, und in der Folge werden wir durch das Gewicht der Körper in Verbindung mit dem freien Fall ein gleichfalls ganz richtiges, aber leicht ausführbares Verfahren zur Massenbestimmung kennen lernen.

Um den Begriff von Masse noch deutlicher zu machen, als es durch die bisherigen Erläuterungen geschehen ist, wird es gut sein, zwei sehr verbreitete, aber irrige Ansichten zu beseitigen.

Die Masse eines Körpers wird gewöhnlich als die Menge der Materie eines Körpers erklärt. Diese Definition ist nicht richtig, denn wenn von Masse die Rede ist, so handelt es sich um die Menge des Trägen und nicht um die Menge des Materiellen.

Zwei gleiche Quantitäten Materie müssen nicht nothwendig gleich grosse Massen haben; es ist ja denkbar, dass verschiedenartige Substanzen eine verschiedene spezifische Trägheit besitzen, und wenn dies der Fall wäre, so würde die Masse eines Körpers durch das Produkt aus der Menge seiner Materie in die spezifische Trägheit derselben auszudrücken sein. Gesetzt aber auch, dass alle Stoffe einen gleichen Grad von Trägheit besitzen, dass also die Masse eines Körpers durch die Menge seiner Materie gemessen werden dürfte, so müsste man doch zunächst ein Mittel haben, die Menge der Materie zu bestimmen, und dazu gibt es auch kein anderes, als dasjenige, welches wir zuerst zur Bestimmung der Menge des Trägen angegeben haben.

Ein anderer Irrthum besteht darin, dass oft Masse mit Gewicht verwechselt wird. Die Masse eines Körpers, d. h. die Menge des Trägen ist, wie schon gesagt wurde, etwas ganz Unveränderliches.

Das Gewicht eines Körpers dagegen, d. h. die Kraft, mit welcher die Erde einen Körper anzieht, ändert sich mit dem Ort, nach welchem ein Körper gebracht wird. Am Aequator ist das Gewicht eines Körpers grösser als am Pol, ausserhalb und innerhalb der Erde kleiner als an ihrer Oberfläche; im Mittelpunkt der Erde verschwindet das Gewicht gänzlich, und wenn wir uns denken wollen, dass ein Körper nach der Sonne gebracht würde, so wäre dort sein Gewicht gegen die Sonne Millionenmal grösser als auf der Erde gegen die Erde. Dies wird vorläufig genügen, um einzusehen, dass Masse und Gewicht zwei ganz verschiedene Dinge sind, und dass die erstere durch das letztere nicht wissenschaftlich richtig bestimmt werden kann.

20) *Hypothetische und chemische Atome.* Um irgend ein Ganzes zu begreifen, muss man wissen, aus welchen Theilen es besteht, und in welcher Beziehung diese Theile stehen, sowohl unter einander, als zum Ganzen.

Durch die Naturwissenschaften wollen wir das Sein und das Wirken der realen Welt als ein Ganzes begreifen lernen. In dieser Absicht suchen wir zunächst eine klare Uebersicht zu gewinnen über das, was ist. Wir betrachten desshalb die Körper nach ihren äusseren Merkmalen, vergleichen sie sodann unter einander, und ordnen sie zuletzt nach den Prinzipien der Aehnlichkeit und Gleichartigkeit. Das Resultat, das durch diese geistige Arbeit entsteht, ist die Naturgeschichte der drei Reiche.

Die Erkenntnisse, welche wir hierdurch erlangen, befriedigen uns aber noch nicht, weil wir durch dieselben über die innere Wesenheit der Stoffe keinen Aufschluss erhalten. Wir ahnen, dass wir mit unsern Sinnen und mit unserm Geiste in das Innere der Körper eindringen müssen, wenn wir die letzten Ursachen aller Erscheinungen, den Keim alles Seins und Wirkens entdecken wollen.

Zu dieser Reise in das Innere der uns unbekannten Stoffe versehen wir uns mit den mannigfaltigen Apparaten und Hilfsmitteln, welche die Physik und Chemie ausgedacht haben; wir zerlegen die Körper durch mechanische Theilung, wir betrachten sie unter dem Mikroskop, zerlegen sie endlich in ihre chemischen Bestandtheile.

Die mechanische Theilung hat bis jetzt über das Wesen der Stoffe wenig Aufschluss gegeben; sie hat sich nur als nützlich gezeigt, um grössere ungleichartige Theile eines zusammengesetzten Körpers, und insbesondere um die Organe der Pflanzen und Thiere von einander zu trennen. Eine mechanische Theilung der homogenen Körper war stets ohne Erfolg, denn man erhielt dabei immer nur kleinere Quantitäten von dem Stoff, aus welchem das Ganze bestund.

Ergiebiger ist schon die Ausbeute, welche das Mikroskop geliefert hat. Insbesondere haben wir durch dasselbe sehr viel über die Art und Weise, wie die zusammengesetzten organischen Gebilde aus einfachen zellenförmigen Gebilden sich aufbauen, kennen gelernt. Allein über den Stoff selbst, aus welchem diese Zellen bestehen, so wie auch über das Innere der homogenen unorganischen Stoffe sind wir auch durch dieses Mittel nicht mehr belehrt worden, als durch die mechanische Zertheilung.

Ueberraschend sind dagegen die Thatsachen der Chemie. Sie vermag es, Stoffe, die unter den besten und stärkst vergrössernden Mikroskopen betrachtet, noch immer als vollkommen homogen erscheinen, also durchaus keine Verschiedenheit in den einzelnen Theilen zeigen, in zwei oder mehrere Stoffe zu zerlegen, die weder unter sich noch mit dem Ganzen irgend eine Aehnlichkeit zeigen. Sie zerlegt den Zinober in Quecksilber und Schwefel, das Wasser in zwei, Wasserstoff und Sauerstoff genannte Luftarten. Die Stoffe, welche durch solche Zerlegungen erhalten werden, lassen sich zuweilen wiederum in zwei oder mehrere Stoffe trennen, die weder unter sich, noch mit jenen, aus welchen sie entstanden sind, irgend eine Aehnlichkeit haben. Indem man nun die mannigfaltigen Stoffe, so weit als es nur immer gelingen wollte, zerlegte, fand man zuletzt eine ziemlich zahlreiche Reihe von Stoffen, deren weitere Zerlegung bis jetzt nicht mehr gelang, und diese nannte man chemisch einfache Stoffe, chemische Elemente, chemisch elementare Stoffe.

Schon die bedeutende Zahl dieser Elemente — sie beträgt 56 — noch mehr aber die Aehnlichkeit, welche manche derselben, und insbesondere die metallischen, unter einander zeigen, lässt es gar nicht bezweifeln, dass es in der Folge gelingen wird, manche derselben noch weiter zu zerlegen, wodurch die Zahl der einfachen Stoffe immer kleiner und kleiner werden wird, bis man zuletzt auf einige wenige kommen wird, die in ihrem Wesen so homogen sind, dass eine weitere Zerlegung derselben gar nicht mehr möglich ist, die also dann der wahre Urstoff oder Grundstoff genannt werden müssen, woraus alle Körper zusammengesetzt sind.

Denken wir uns, dass die Chemie bis zu diesem Punkt ihrer Entwicklung vorgedrungen sei, so wird dann unser Forschungstrieb doch noch nicht befriedigt sein, denn dann entsteht erst wiederum die Frage, was denn das Wesen dieser Grundstoffe sei? und diese Frage kann dann die Scheidekunst nicht mehr beantworten, denn aus den einfachen Grundstoffen kann Nichts ausgeschieden werden, sondern wir müssen dann abermals zur mechanischen Zertheilung oder zum Mikroskop unsere Zuflucht nehmen. Was wir dabei möglicher Weise finden können, hängt davon ab, ob diese Grundstoffe bis ins Unendliche theilbar sind, oder ob diese Theilbarkeit nur bis zu einer gewissen Gränze geht. Im ersteren Falle wird die mechanische Zertheilung zu gar keinem belehrenden Resultat führen können, im letztern hingegen ist es wenigstens denkbar, dass man ungemein kleine, absolut untheilbare Körperchen, d. h. wahre Atome entdecken wird.

Welche von diesen beiden logischen Möglichkeiten mit der Wirklichkeit übereinstimmt, kann thatsächlich durch wirkliche Stofftheilung nicht entschieden, sondern nur auf indirektem Wege dadurch wahrscheinlich gemacht werden, indem man die eine und die andere Möglichkeit als Hypothese annimmt und die daraus hervorgehenden Folgerungen mit der Gesammtheit der Thatsachen vergleicht.

Mit einem an Gewissheit gränzenden Grad von Wahrscheinlichkeit darf man jedoch annehmen, dass die chemisch einfachen Stoffe aus kleinen Theilchen bestehen, die bis jetzt nicht zertheilt werden konnten. So lang sie also in der That nicht zerlegt werden, verhalten sich dieselben in allen ihren Wirkungen wie untheilbare Einheiten, d. h. wie Atome, und wir werden bei wissenschaftlichen Betrachtungen und Untersuchungen zu ganz richtigen Resultaten gelangen, wenn wir diese Atome so behandeln, wie wenn sie in der That untheilbar wären. Wir wollen daher in der Folge unter dem Wort Atome ein kleines Stofftheilchen verstehen, welches sich in allen seinen Wirkungen wie eine untheilbare Einheit verhält.

Die Wechselwirkung zweier Atome dieser Art wird nicht nur von den Kräften, mit welchen sie begabt sind, und von ihrer Entfernung, sondern auch von der Gestalt derselben abhängen. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass der Einfluss der Gestalt in dem Maasse kleiner sein wird, als die Entfernung der Atome im Vergleich zu den Abmessungen derselben grösser ist, und wenn diese Entfernung so gross ist, dass dagegen die Abmessungen verhältnissmässig unendlich klein ausfallen, so wird man sich erlauben dürfen, die Atome als physische Punkte zu behandeln, indem dann ihre Wirkung gerade so ist, wie wenn im Schwerpunkte der Atome ihre Masse und Kraft concentrirt wäre. Wir sehen hieraus, dass die Atome als physische Punkte betrachtet werden dürfen, oder als kleine Körper von bestimmter Gestalt behandelt werden müssen, je nachdem die Entfernung der auf einander wirkenden Atome im Vergleich zu ihren Abmessungen ungemein gross (streng genommen unendlich gross) ist oder nicht.

21) *Allgemeine Eigenschaften der Atome.* Um vermittelst der Atome die mannigfaltigen Erscheinungen der Körperwelt zu erklären, müssen wir uns dieselben mit gewissen Eigenschaften und Fähigkeiten ausgerüstet denken. Die im wesentlichen im Folgenden bestehen.

Alle Atome stimmen darüber überein, dass sie aus träger Materie bestehen, zugleich aber auch mit Kräften begabt sind, durch welche sie zwar nicht auf sich selbst, wohl aber auf andere Atome einzuwirken vermögen. Es kann sich also kein Atom durch die ihm innwohnende Kraft in Bewegung bringen, oder aus einem Bewegungszustand in einen andern Bewegungszustand versetzen, sie besitzen jedoch die Fähigkeit, in einem Zustand des ruhigen oder bewegten Seins zu verharren. Die verschiedenen Atome müssen theils nach den Kräften, mit welchen sie begabt sind, theils nach ihrem Massengehalt in zwei Klassen getheilt werden. Die Atome der einen Klasse nennen wir Körper-, die Atome der andern Klasse Aether-Atome. Die ersteren sind die Träger des attraktiven die letztern die Träger des repulsiven Prinzips.

Wir denken uns nämlich, dass die Körperatome (deren es so viele Arten gibt, als die Zahl der chemischen einfachen Stoffe beträgt) gegen ihres Gleichen und auch gegen die Aetheratome nur anziehend, dass dagegen die Aetheratome (von denen es nur eine Art gibt) auf ihres Gleichen abstossend, auf die Körperatome hingegen anziehend einwirken. Sodann nehmen wir auch noch an, dass der Massengehalt und auch das Volumen der Aetheratome vielmals kleiner sei, als der der Körperatome, so dass sich letzterer zu ersterem ungefähr verhält, wie der Erdkörper zu einem einzelnen Lufttheilchen der sie umgebenden Atmosphäre.

Hinsichtlich der Art und Weise, wie die Kräfte der Atome ihre Wirkungsfähigkeit äussern, nehmen wir Folgendes an.

1) Das attraktive oder repulsive Prinzip, mit welchem ein Atom **A** begabt ist, kann nicht auf seine eigene Masse, sondern immer nur auf die Masse eines andern Atoms **B** bewegend einwirken.
2) Die Wirkung der Atome ist wechselseitig. Wirken zwei Atome **A** und **B** wechselseitig auf einander ein, so geschieht dies dadurch, dass die Kraft von **A** auf die Masse von **B**, und dass gleichzeitig die Kraft von **B** auf die Masse von **A** einwirkt.
3) Diese unmittelbare Kraftäusserung besteht entweder in einem Zug, wodurch die Theilchen ein Bestreben haben, sich einander zu

nähern, oder in einer Abstossung, in Folge deren sie sich von einander zu entfernen suchen.

4) Die Richtung der wechselseitigen Anziehung oder Abstossung erfolgt nach der geraden Verbindungslinie der beiden Atome.

5) Die Intensitäten der wechselseitigen Anziehungen oder Abstossungen sind gleich gross, richten sich nach der Entfernung der Atome und nach ihrer materiellen Beschaffenheit.

6) Die Intensität der Wechselwirkungen zweier Atome ist dem Produkt ihrer Massen proportional.

7) Die Intensitäten der Wechselwirkungen zweier Atome sind im bewegten Zustande eben so gross, wie im ruhigen Zustand.

22) *Die Kräfte der Atome.* Die mannigfaltigen Kräfte, deren Existenz die Physik und Chemie nachgewiesen haben, lassen sich, wenn man nur das Charakteristische ihrer Aeusserung ins Auge fasst, in folgende Klassen eintheilen.

1) Die allgemeine Schwere. Vermöge dieser Kraft ziehen sich die kleinsten Körpertheilchen wie auch die grössten planetarischen Massen mit einer Intensität an, die von der materiellen Beschaffenheit der Stoffe ganz unabhängig, dann aber dem Produkt der Massen der beiden sich anziehenden Körper direkt und dem Quadrat der Entfernung der Körper verkehrt proportional ist.

2) Die Cohäsion. Vermöge dieser Kraft ziehen sich homogene Körpertheilchen mit einer Intensität an, welche von der materiellen Beschaffenheit der Stoffe abhängt, die aber nur bei ganz unmerklich kleiner Entfernung der Theile eine wahrnehmbare Wirkung hervorbringt. Sie äussert sich vorzugsweise, wenn wir irgend einen Körper mechanisch zertheilen wollen. Die Cohäsionskraft in Verbindung mit dem repulsiven Prinzip, welches Wärme genannt wird, bringen die Aggregationsformen der Körper hervor.

3) Die chemische Anziehung, auch chemische Verwandtschaft genannt. Diese Kraft äussert sich zwischen heterogenen Substanzen, wenn sich ihre Theilchen in ganz unmerklich kleinen Entfernungen von einander befinden. Ihre Intensität hat unter übrigens gleichen Verhältnissen für je zwei Substanzen einen anderen Werth. Manche Substanzen üben gegen einander nur eine sehr schwache, andere dagegen eine sehr intensive Anziehung aus. Vielleicht gibt es auch solche Substanzen, die sich gar nicht anziehen.

4) Die allgemeine Repulsivkraft des Aethers. Mannigfaltige Erscheinungen, und insbesondere jene, welche die Wärme hervorbringt, indem sie die Körper ausdehnt und ihren Aggregationszustand verändert, weisen darauf hin, dass in der Natur wenigstens Eine Repulsivkraft vorhanden ist. Es wird gegenwärtig fast von allen Physikern angenommen, dass

dieselbe in einem materiellen Stoff, dem Aether, ihren Sitz habe, und dass sie gleichsam eine umgekehrte Schwere sei.

Nach diesen Thatsachen wird man es wohl nicht als eine willkürliche Erfindung der Phantasie erklären, wenn wir den Körper- und Aetheratomen die folgenden Kraftäusserungsfähigkeiten beilegen. Wir nehmen als wahrscheinlich an:

1) Identische Köperatome ziehen sich an, theils wegen der Schwere, theils wegen der Cohäsionskraft. Die erstere dieser Anziehungskraft ist von der materiellen Beschaffenheit der Atome ganz unabhängig, und ihre Intensität ist dem Produkt aus der Masse der Atome direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung verkehrt proportional. Die letztere dagegen hat für jeden Stoff einen besonderen Werth, und ist für einen bestimmten Stoff dem Produkt aus den Massen der Atome und einer gewissen unbekannten Funktion der Entfernung proportional. Ueber diese Funktion weiss man nur so viel, dass sie für kleine Entfernungen einen sehr namhaften Werth hat, aber mit dem Wachsen der Entfernung so rapid abnimmt, dass sie bei Entfernungen, die das Auge zu erkennen vermag, verschieden klein ist.

So lange diese Funktion der Cohäsionskraft nicht bekannt ist, kann man für die Gesammtanziehung zweier identischen Atome einen mathematischen Ausdruck nicht aufstellen. Versuchsweise, und um zu zeigen, dass man Funktionen, wie die eben beschriebenen, analytisch ausdrücken kann, mögen folgende zwei Formeln dienen:

$$M\,M_1 \left\{ \frac{\mathfrak{A}}{r^2} + \mathfrak{B}.\left(e^{k\,r^{-n}} - 1 \right) \right\}$$

$$\mathfrak{A}\,M\,M_1 \frac{e^{k\,r^{-n}}}{r^2}$$

In derselben bedeutet:

$M\,M_1$ die Massen der beiden Atome, r ihre Entfernung. $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ k n constante Zahlen, und zwar $\mathfrak{A}$ und n absolute, $\mathfrak{B}$ und k hingegen von der Beschaffenheit des Stoffes abhängige constante.

Jede dieser beiden Formeln hat im Wesentlichen die Eigenschaften, welche man von der zwischen zwei identischen Körperatomen bestehenden Anziehungskraft angenommen hat. Wenn nämlich r gross und die Constante $n > 1$ genommen wird, wird $e^{k\,r^{-n}}$ sehr nahe $= 1$ und dann geben alle beiden Formelm, für die Gesammtanziehung annähernd:

$$\frac{\mathfrak{A}\, M\, M_1}{r^2}$$

was so viel sagen will, als dass bei grösseren Entfernungen die Wirkung der Cohäsionskraft fast verschwindet und nur jene der Schwerkraft noch bemerkbar bleibt. Ist dagegen r sehr klein, so wird in beiden Formeln der Einfluss von $e^{k\,r^{-n}}$ auf den Gesammtwerth sehr bedeutend.

Zur bequemen Vergleichung der Kräfte, mit welchen die Atome auf einander wechselseitig einwirken, wollen wir uns erlauben, die Anziehung zwischen identischen Atomen durch die Formel

$$\mathfrak{A}\,\frac{M\, M_1}{r^2} + M\, M_1\, f(r)$$

auszudrücken, in welcher $f(r)$ die der Cohäsion entsprechende Funktion der Entfernung der Atome bezeichnet.

2) Heterogene Körperatome sind gegen einander schwer und können sich noch überdies chemisch anziehen, was bei gewissen Stoffen mit sehr grosser Energie geschieht. Den Gesammtbetrag dieser Anziehung kann man bildlich durch die Formel

$$\mathfrak{A}\,\frac{M\, M_1}{r^2} + M\, M_1\, F(r)$$

ausdrücken, wobei F(r) die der chemischen Anziehung entsprechende unbekannte Funktion der Entfernung der Atome bedeutet. Der Werth dieser Funktion, vielleicht sogar die Form derselben ändert sich mit der materiellen Beschaffenheit der Atome. Für zwei bestimmte chemischverwandte Stoffe muss der Betrag von F(r) in Vergleich zu $\frac{\mathfrak{A}}{r^2}$ verschwindend klein oder beträchtlich gross sein, je nachdem r einen merklichen oder einen verschwindend kleinen Werth hat.

Die Natur dieser Funktionen $f(r)$ und F(r) kann man sich am besten versinnlichen, wenn man Kurven verzeichnet, indem man die Entfernungen zweier Atome als Abscissen und die denselben entsprechenden Anziehungskräfte als Ordinaten aufträgt. Es sei z. B. Fig (9) Taf. II. $O\,p = r$, $\overline{n\,p} = \frac{\mathfrak{A}\, M\, M_1}{r^2}$ $\overline{m\,n} = M\, M_1\, F(r)$, so ist $\overline{m\,p} = \frac{\mathfrak{A}\, M\, M_1}{r^2} + M\, M_1\, F(r)$, es repräsentirt mithin die Kurve A B die Anziehung durch die Schwere, die Kurve A_1 B_1, die Totalanziehung und die Differenzen $\overline{m\ n}$ der Ordinaten beider entspricht der chemischen Anziehung. Da wir annehmen, dass die chemische Anziehung bei kleiner Entfernung äusserst intensiv, bei grosser Entfernung aber ganz verschwindend klein ist, so müssen die Kurven A B und A_1 B_1 in der Nähe von O weit auseinander laufen, in einiger Entfernung von O hingegen fast zusammentreffen. Bei einer gewissen Fntfernung $r = O\ p_1$ kann die Anziehung n_1 p_1 der Schwere gleich sein der chemischen Anziehung m_1 n_1, und dann wird für alle Entfernungen, die grösser als O p_1 sind, die Schwere, und für alle Entfernungen, die kleiner als O p_1 sind, die chemische Anziehung vorwalten, und zwar um so mehr, je weiter man sich diesseits oder jenseits von dem Punkt p_1 entfernt.

3) Die Körper- und die Aetheratome sind gegen einander nicht schwer, sondern sie ziehen sich nur allein mit einer Kraft an, die ein ähnliches Gesetz befolgt, wie die chemische Anziehung. Bezeichnet man durch G(r) eine mit F(r) ähnliche Funktion, und durch μ die Masse eines Aetheratoms, so kann die Anziehung, von der hier die Rede ist, durch $M\ \mu\ G(r)$ ausgedrückt werden.

4) Je zwei Aetheratome stossen sich ab mit einer Intensität, die von ihrer Entfernung auf eine ähnliche Weise abhängt, wie F(r) von r. Bezeichnet man durch μ μ_1 die Massen der beiden Aetheratome H(r) das Gesetz ihrer Abstossungskraft, so kann durch

$$\mu\ \mu_1\ H(r)$$

die Intensität der Abstossung zweier Aetheratome ausgedrückt werden.

Es wird wohl nicht befremden, dass wir die Intensität jeder Wechselwirkung zweier Atome dem Produkt ihrer Massen proportional genommen haben, denn es ist gar nicht anders denkbar, als dass sich die anziehende oder abstossende Wechselwirkung zweier Stoffe von jedem Theilchen des einen gegen jedes Theilchen des andern Stoffes äussern muss. Die Gesammtanziehung muss demnach sowohl der Masse des einen als auch der Masse des andern und folglich dem Produkt der Massen proportional gesetzt werden.

Nach der Form der Funktion $\frac{1}{r^2}$ F(r) G(r) H(r) könnte man vielleicht meinen, dass sich zwei Atome, wenn sie sich berühren, unendlich stark anziehen oder abstossen müssten, denn für $r = o$ geben diese Funktionen alle unendliche Werthe. Allein man muss bedenken, dass im Falle einer Berührung die Entfernung doch nur zwischen unendlich kleinen Massen wirklich Null sein kann; man sieht daraus, dass die Gesammtwirkung zweier sich berührenden Atome einen endlichen Werth haben werde.

23) *Nachweisung, dass die angenommenen Atomkräfte nothwendig sind.* Es ist bereits in Nr. 21 behauptet worden, dass diese Atomkräfte keine willkürliche Erfindung der Phantasie sind, sondern dass die Thatsachen der Wirklichkeit zu ihrer Annahme mit grosser Wahrscheinlichkeit berechtigen.

Nun kann man aber fragen, ob denn die Natur in der That diesen complizirten Apparat von Kräften nothwendig hat, um ihre mannigfaltigen Wirkungen hervor zu bringen, und ob es denn nicht denkbar wäre, dass der Zweck auch durch einfachere Mittel erreicht werden könnte. In dieser Hinsicht ist es sehr belehrend, wenn man sich die etwas unbescheidene Frage vorlegt, wie wir es wohl anfangen müssten, wenn wir uns eine unseren vernünftigen Zwecken angemessene Welt selbst errichten wollten.

Da erscheint es zunächst nothwendig, dass wir sowohl attraktiv und repulsiv wirkende Kräfte haben müssten; denn wenn alle Kräfte attraktiv wirkten, müsste sich aller Stoff in einem oder in mehreren Punkten concentriren; wenn dagegen alle Kräfte repulsiv wirkten, müsste sich aller Stoff ins Unendliche verflüchtigen. Die Annahme von repulsiv und von attraktiv wirkenden Kräften erscheint demnach als eine Nothwendigkeit.

Nun entsteht weiter die Frage, wohin wir diese Kräfte verlegen sollen, ob wir sie in einem und demselben, oder ob wir jede derselben in einem besonderen Stoff beherbergen sollen? Wir entscheiden uns für das letztere, weil wir den Bau, den wir in Gedanken aufführen wollen, viel leichter zu Stande bringen mit zweierlei Baumaterial, mit einem attraktiven und einem repulsiven, als mit einem einzigen Stoff, der je nach Umständen attraktiv oder repulsiv zu wirken im Stande wäre.

Damit nun aus diesem gesammten Material durch die demselben inwohnenden Kräfte eine Welt im Grossen und im Kleinen sich gestalten könne, müssen die verschiedenen Kräfte gewissen Bedingungen entsprechen.

Für den grossen planetarischen Bau ist eine weitausgreifende, fernhin und nicht wählerisch wirkende attraktive Kraft nothwendig. Sie muss weitausgreifend, fernhinwirkend sein, um den im weiten Raum zerstreuten Stoff zusammen zu fassen; sie darf nicht wählerisch sein, damit nicht einerlei Stoff, sondern im Gegentheil sehr mannigfaltige Substanzen zu einem Planeten zusammen kommen. Ein Planet, der blos aus Sauerstoff oder blos aus Wasserstoff oder blos aus Eisen bestünde, könnte in der That eine vernünftige Welt nicht genannt werden.

Dieser Anforderung entspricht aber die allgemeine Schwerkraft vollkommen. Sie wirkt auf alle Stoffe ohne Unterschied, reicht bis in unmessbare Fernen, und besitzt noch überdies die für die Dauer eines Planetensystems höchst wichtige Eigenschaft, dass durch sie die Planeten in geschlossenen Bahnen um grössere Centralkörper herumgeführt werden können. Es ist vielleicht keine Kraft denkbar, welche die Schwerkraft zu ersetzen im Stande wäre.

Zu dem Bau im Grossen ist aber auch nothwendig, dass zwischen den Planeten, wenn sie sich einmal gebildet haben, irgend eine Communikation, irgend eine Art Telegraphie hergestellt werde, damit die vernünftigen Bewohner der Planeten zur Kenntniss von der Existenz aller übrigen Planeten kommen können, um dadurch zu erfahren, dass sie einem unendlich grossen Ganzen angehören. Dies alles bewirkt aber der Aether, wenn er die Eigenschaften besitzt, die wir demselben zugeschrieben haben. Vermöge der nur auf unmerkbar kleine Entfernung energisch wirkenden Anziehungskraft zwischen den Körper- und Aetheratomen sammeln sich die letzteren um die ersteren, bilden um dieselben Atmosphären, und verhindern durch ihre Repulsivkraft, dass die Körperatome nicht bis zum Contakt zusammentreten können. Da wir ferner angenommen haben, dass der Aether von aller Schwerkraft befreit und mit Repulsivkraft gegen Atome seines Gleichen begabt ist, verbreitet sich derselbe fast gleichförmig in dem ganzen unendlichen Raum, und bringt durch die schwingenden Bewegungen, die er im Stande ist von einem Planeten bis zum andern mit grösster Schnelligkeit fortzupflanzen, eine Lichtkomunikation, eine Art Lichttelegraphie zwischen denselben hervor. Diese Rolle würde der Aether nicht spielen können, wenn er unter dem Einfluss der Schwerkraft stünde; denn wenn dies der Fall wäre, müsste er um jeden Planeten eine Atomsphäre bilden und die einzelnen Planeten wären dann durch absolut leere Räume von einander getrennt. Die Eigenschaften, mit welchen wir den Aether versehen haben, scheinen also durchaus nothwendig, aber auch für den Zweck genügend zu sein. Die Anziehungskraft zwischen den Aetheratomen und Körperatomen ist durchaus nothwendig, damit jedes Körperatom mit repulsivem Stoff umgeben wird. Mit Schwerkraft darf der Aether nicht begabt werden, denn für die Ansammlung um die Körperatome wäre dies unnöthig, und wegen der durchaus nothwendigen Verbreitung desselben durch den ganzen unendlichen Raum wäre sie zweckwidrig.

Nun müssen wir noch sehen, was für den Bau im Kleinen, für das Bilden und Gestalten im engsten Raum nothwendig ist. Dazu sind aber offenbar Kräfte nothwendig, die im engsten Raum mit so grosser Intensität wirken, dass sie alle äusseren Einflüsse ganz zu überwältigen im Stande sind, so zwar, dass das, was entsteht, einzig und allein nur das Werk ihrer Wirksamkeit ist. Es muss dieser Detailbau von allem geschützt werden, was von aussen und von fernher störend einwirken könnte, und diess kann nur durch Kräfte geschehen, die im engsten Raum mit einer alles beherrschenden Intensität auftreten. Daher haben wir angenommen, dass die Cohäsionskraft und die chemische Kraft in ganz unmerkbaren Entfernungen sehr intensiv, auf grosse Entfernungen aber gar nicht merklich zu wirken im Stande sein sollen.

Sodann sieht man aber auch leicht ein, dass für dieses Bilden und Gestalten im Kleinen auch der Aether unentbehrlich ist, denn ohne denselben würden ja die Körperatome zu ganz unveränderlichen untheilbaren Klümpchen zusammentreten, ein Wechsel der Formen und Gestalten wäre also dann gar nicht denkbar.

Durch diese Bemerkungen dürfte wohl die hypothetische Annahme von den Körper- und Aetheratomen, so wie auch von den Kräften, mit welchen wir sie uns begabt denken, gerechtfertigt erscheinen, und es wird sich in der Folge zeigen, dass diese atomistische Anschauungsweise für die mathematische Behandlung der Physik und der Chemie eben so geeignet ist, als sie die Phantasie zu befriedigen vermag.

24) *Die Aetherhülle des Atoms.* Vermöge seiner Repulsivkraft verbreitet sich der Aether in dem ganzen unendlichen Raum, vermöge der zwischen Körper und Aetheratomen herrschenden Anziehung sammeln sich die Aetheratome um die Körperatome und bilden um dieselben atmosphärenartige Umhüllungen. Jedes Körperatom ist demnach von einer Aethermasse atmosphärenartig umgeben. Die Aethermenge, welche sich um ein Körperatom ansammelt, richtet sich theils nach der Energie, mit welcher die Körperatome die Aetheratome anzuziehen vermögen, theils auch nach der Gesammtmasse des im Raum existirenden Aethers. Diese Quantität kann also von vornherein nicht bestimmt werden, sondern sie muss, wenn sie sich überhaupt bestimmen lässt, aus Thatsachen erschlossen werden. Denkbar ist es allerdings auch, dass jedes Körperatom nur von einem oder von einigen wenigen Aetheratomen begleitet wäre; allein es gibt Erscheinungen, welche zu Gunsten einer aus vielen Aetheratomen bestehenden Umhüllung sprechen.

Die Gestalt dieser Umhüllung wird sich nach der Gestalt des Körperatoms richten; wäre diese rund, so würde es ohne Zweifel auch die Umhüllung sein; wäre das Atom nach einem Axensystem gebildet, so würde dieses auch in der Form der Aetherhülle und in der Anordnung der Aetheratome zu erkennen sein.

Die Dichte des Aethers muss nothwendig von Innen nach Aussen abnehmen, weil die Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen mit der Entfernung derselben sehr rapid abnimmt. Alles, was so eben über die Aetherhülle gesagt wurde, lässt sich kurz und wissensshaftlich bestimmt so ausdrücken: Die Form der Aetherhülle und die Art der Nebeneinandergruppirung der Atome in derselben ist das Resultat eines Gleichgewichtszustandes zwischen den attraktiven und repulsiven Kräften der Atome.

25) *Das Molekul.* Das Molekul ist eine stabile Gleichgewichtsgruppe von zwei oder mehreren gleichartigen oder ungleichartigen Atomen. Um die Entstehung einer solchen Gruppe anschaulich zu machen, wollen wir uns klar zu machen suchen, was geschehen wird, wenn in einem engeren, aber doch bemerkbar grossen Raum zwei oder mehrere gleichartige oder ungleichartige mit Aetherhüllen umgebene Körperatome sich befinden.

Wenn wir erwägen, dass das Volumen eines Atomes und selbst das Volumen einer Aetherhülle so ausserordentlich klein ist, dass in einem dem bewaffneten Auge kaum bemerkbaren Raum unzählige Atome mit ihren Aetherhüllen enthalten sein können, ohne dass sich die letzten berühren; wenn wir ferner noch erwägen, dass die chemische Anziehung so wie auch die Repulsivkraft des Aethers erst dann von Bedeutung werden im Vergleich zur Anziehung durch die Schwere, wenn die Entfernung der Körperatome nicht gar vielmals grösser ist, als die grösste Dimension einer Aetherhülle, so müssen wir als höchst wahrscheinlich annehmen, dass die Atome, deren Schicksal wir in Gedanken verfolgen wollen, anfangs fast nur vermöge der Schwerkraft auf einander wechselseitig anziehend einwirken werden, indem ihre gegenseitigen Entfernungen noch viel zu gross sein werden, als dass die chemische Anziehung oder die Repulsivkraft des Aethers irgend eine bemerkbare Wirkung äussern könnten.

Beim Beginn der Bewegung wird sich daher die materielle Verschiedenheit der Atome auf keinerlei Weise bemerkbar machen, sondern nur allein die Massenverhältnisse werden durch die Geschwindigkeiten hervortreten, mit welcher die einzelnen Atome aus ihren ursprünglichen Positionen gegen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt sämmtlicher Massen hinzueilen beginnen, und dabei werden sich die Geschwindigkeiten zweier Atome (ungefähr) umgekehrt verhalten, wie ihre Massen.

Anders werden sich die Erscheinungen gestalten, wenn einmal die Atome einander so nahe gekommen sind, dass die chemische Anziehung zwischen den Körperatomen und der Repulsivkraft der Aetheratome mit überwiegender Macht aufzutreten beginnen. Dann werden sich die Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen der Atome theils nach den Massenverhältnissen, theils nach der Intensität der chemischen Anziehung und Repulsivkraft des Aethers richten. Jedes Atom wird dann nicht nur den gemeinsamen Mittelpunkt sämmtlicher Massen, sondern auch gleichzeitig diejenigen Atome zu erreichen suchen, von welchen aus es am intensivsten chemisch angezogen wird.

Dieses Streben nach wechselseitiger Vereinigung würde, wenn kein Aether vorhanden wäre, bis zum Zusammenstoss aller Atome fortdauern; weil aber die Atome mit Aether umgeben sind, so kann es nicht bis zum Zusammenstoss der Atome kommen, weil die Aetherhüllen, wenn sie einmal bis in eine gewisse Nähe gekommen sind, sich mit solcher Energie abstossen, dass dadurch den attraktiv wirkenden Kräften eine Grenze gesetzt wird.

Dieser Kampf der verschiedenen Kräfte wird zuletzt damit endigen müssen, dass alle Atome in einen gewissen gesetzmässigen Beharrungszustand der Bewegung gerathen müssen, in welchem die verschiedenen Körperatome im Wesentlichen eine gewisse Gegeneinandergruppirung beibehalten, aber gleichwohl innerhalb enger Grenzen periodisch wiederkehrende Schwingungen vollbringen. Und dies wird so lange fortdauern, bis sich eine Gelegenheit darbietet, dass die in sämmtlichen Massen enthaltene lebendige Kraft an der äussern Umgebung der Gruppe abgegeben werden kann. Ist dies geschehen, so wird allmählig ein ruhiger Zustand eintreten, und jedes Atom wird dann gegen alle übrigen so gruppirt sein, dass die auf dasselbe einwirkenden Kräfte vollkommen im Gleichgewicht sind, also den bekannten 6 Gleichungen genügen welche die Bedingung des Gleichgewichts eines festen Körpers ausdrücken. Das so gebildete Molekul ist demnach eine Gruppe von Atomen, in welcher die sämmtlichen Kräfte den Bedingungen eines stabilen Gleichgewichts entsprechen

26) *Isomere. Molekule.* Es ist wohl leicht einzusehen, dass es im Allgemeinen mehr als eine einzige Gegeneinanderlagerung der Atome geben kann, bei welcher die sämmtlichen Kräfte den Bedingungen eines stabilen Gleichgewichts entsprechen. Aus den gleichen Atomen können also mehrere Molekule entstehen, die sich aber nur durch die Art der Gegeneinanderlagerung der Atome von einander unterscheiden, und von solchen Molekulen sagen wir, dass sie isomere seien. Die Zahl der isomeren Molekule, welche aus den gleichen Atomen möglicher Weise entstehen können, ist gleich der Anzahl der möglichen stabilen Gleichgewichts-Gegeneinanderlagerungen der Atome. Die Lagerung eines Atoms wird aber durch zwei Elemente bestimmt, nämlich durch den Ort, welchen der Schwerpunkt des Atoms gegen den Schwerpunkt der übrigen Atome einnimmt, und durch Stellung des Atoms, welche durch die Richtung seiner Hauptabmessungen bestimmt wird. Die Verschiedenheit der Gegeneinanderlagerung der Atome zweier isomeren Molekule kann sich also auf den Ort beziehen, welchen die Schwerpunkte der Atome einnehmen, oder auf die Richtung der Hauptabmessungen der Atome oder endlich auf beides zu gleicher Zeit.

Die Anzahl der möglichen Gleichgewichtsgruppirungen richtet sich theils nach der Grundgestalt der Atome, theils nach ihrer Anzahl. Einaxige Grundgestalten werden nicht so viel Gleichgewichtspositionen zulassen, als zwei- oder dreiaxige Grundgestalten. Bei einer kleinen Anzahl von Atomen werden nicht so viele Gleichgewichtspositionen möglich sein, als bei einer grössern Anzahl.

Die Grundform des Molekuls oder der Atomgruppe richtet sich theils nach der Anzahl der Atome, theils nach der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte der Atome. Zwei Atome bilden ein stabförmiges Molekul, drei Atome bilden eine dreieckige Platte, vier Atome ein tedrardrisches Molekul. Wenn die Anzahl der Atome eines Molekuls sehr gross ist, so wird die Grundform des Molekuls eine abgerundete Form haben.

Die Stabilität des Gleichgewichtszustandes der Atome in einem Molekul richtet sich nach der Anzahl der Atome, nach der Grundgestalt derselben, nach der Intensität der chemischen Anziehung, nach der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte der Atome, endlich nach der Stellung der Hauptabmessungen der Atome. Im Allgemeinen darf man wohl sagen, dass die Stabilität des Gleichgewichts bei einer kleinen Anzahl von Atomen, die sich sehr energisch anziehen, sehr gross, bei einer sehr grossen Anzahl von Atomen, die sich nur schwach anziehen, sehr klein sein wird.

27) *Die zusammengesetzten Molekule.* So wie einzelne Atome zu einer Gleichgewichtsgruppe zusammentreten können, so können auch zwei oder mehrere gleichartige oder ungleichartige Molekule abermals zu einer Gleichgewichtsgruppe sich vereinigen, und daraus entsteht nun ein zusammengesetztes Molekul (B.). Dieser Prozess kann sich aber neuerdings wiederholen, so dass aus Molekulen von der Art (B) wiederum Molekule (C) von noch zusammengesetzterer Art entstehen.

Um diese verschiedenen Arten von Molekulen nach dem höheren oder niedrigern Grad ihrer Zusammensetzung zu unterscheiden, wollen wir sie Molekule der ersten, zweiten, dritten Ordnung nennen. Das Molekul der ersten Ordnung besteht also aus einer einzigen Atomen-Gruppe, und alle höheren Molekule sind aus nächst niedrigeren Molekulen ebenso zusammengesetzt, wie das Molekul der ersten Ordnung aus den Atomen.

Alles, was früher über das Molekul der ersten Ordnung, hinsichtlich der Isomere, hinsichtlich der Gestalt und Stabilität gesagt wurde, findet auch auf die zusammengesezten Molekule Anwendung. Eine Gruppe aus 3 Molekulen wird eine dreieckige Gestalt haben, eine Gruppe aus 4 Molekulen eine tedrarderähnliche; eine sehr grosse Anzahl von Molekulen zu einer Gruppe vereinigt, wird eine abgerundete Form hervorbringen.

Die Stabilität dieser zusammengesetzten Molekule wird im Allgemeinen kleiner sein, als jene der einfachen Molekule, weil bei diesen nur wenig, bei jenen im Allgemeinen sehr viele Atome zu einem Ganzen vereinigt sind; sodann kann auch die Anziehung zwischen den Molekulen um so energischer sein, als die Anziehung zwischen den Atomen eines Molekuls der ersten Ordnung. Zusammengesetzte Molekule lassen sich also leichter auflösen (zersetzen), als einfache.

Hinsichtlich der Isomere der zusammengesetzten Molekule ist zu bemerken, dass diese ausserordentlich mannigfaltig sein können, denn die Zahl aller möglichen Gleichgewichtsgruppen, die aus einer so grossen Anzahl von mannigfaltigen Atomen, wie sie in einem Molekul höherer Ordnung vorkommen, entstehen können, ist fast grenzenlos.

28) *Atomistischer Begriff des chemisch einfachen und des chemisch zusammengesetzten Stoffes.* Ein chemisch einfacher Stoff besteht nach der atomistischen Ansicht aus Atomen von einerlei Art. Die chemische Natur eines einfachen Stoffes betrifft einzig und allein nur die Gesammtheit der Eigenschaften, welche dem einzelnen Atom zukommen; die Art und Weise des Nebeneinanderseins der Atome im Stoff, also insbesondere der Aggregationszustand, und wenn der Stoff nicht flüssig ist, die mehr oder weniger stabile Gruppirungsart der Atome wird gewöhnlich in das Gebiet der Physik verwiesen.

Ein chemisch zusammengesetzter Stoff besteht nach der atomistischen Ansicht aus Gruppen von Atomen, d. h. aus Molekulen. Sind alle Molekule des Stoffes in jeder Hinsicht identisch, kommen also in jedem Molekul des Stoffes die gleichen Arten von Atomen vor, und von jeder Art die gleiche Anzahl, und ist überdiess die Gruppirungsart der Atome in allen Molekulen die gleiche: so nennen wir einen solchen Stoff einen homogen zusammengesetzten Stoff. Wenn jedes Molekul nur aus einer einzigen Atomgruppe besteht, also jedes Molekul des Stoffes ein Molekul der ersten Ordnung ist, so nennen wir den Stoff eine chemische Verbindung der ersten Ordnung. Wenn hingegen jedes Molekul aus mehreren Atomgruppen besteht, also ein Molekul der zweiten oder einer höheren Ordnung ist, so nennen wir die Stoffe eine chemische Verbindung der zweiten, dritten oder überhaupt einer höheren Ordnung.

Der Chemismus im engeren Sinne des Wortes spricht sich in der Entstehung der Molekule aus. Das Molekul ist das wahre chemische Gebilde, denn die Eigenschaft, welche ein zusammengesetzter Stoff zeigt, ist von der Gesammtmenge des Stoffes, von der Aggregationsform und überhaupt von der Art des Nebeneinanderseins der Molekule im Stoff ganz unabhängig und richtet sich wesentlich nur nach dem Inhalt der Molekule und nach der Art der Gruppirung der Atome in den Molekulen.

Die Chemie im engeren Sinn des Wortes betrachtet also nur die

Atome und die Atomgruppen, und überlässt es der Physik, die Gesetze des Molekularbaues der Körper zu entwickeln.

Eine scharfe wissenschaftliche Grenze zwischen Physik und Chemie gibt es nicht; es wäre denn, dass man sich dahin verständigte, alles, was das Gleichgewicht der Atome, Atomgruppen und Atomsysteme betrifft, in das Gebiet der Chemie, und alles, was die Bewegung betrifft, in das Gebiet der Physik zu rechnen. Unter diesen Voraussetzungen wäre die Chemie die Statik und die Physik die Dynamik der Atome und der in denselben thätigen Kräfte. Wenn wir uns aber an die Vorstellungen anschliessen wollen, welche gewöhnlich von Physik und Chemie üblich sind, so müssen wir in das Gebiet der Chemie vorzugsweise diejenigen Erscheinungen rechnen, welche durch die chemischen Kräfte, mit welchen die Atome begabt sind, hervorgebracht werden; in diesem engeren Sinn des Wortes gehören also vorzugsweise die Atome an und für sich, und die Atomgruppen oder Molekule in das Gebiet der Chemie.

Wir werden in der Folge die Wörter »Verbindung“ und „verbinden« in dem Sinn gebrauchen, dass sie mit Atomgruppirung, Molekulargruppirung oder überhaupt mit statischer Gruppirung der Molekule und Atome gleichbedeutend sind, denn nach unserer atomistischen Ansicht ist verbinden und gruppiren, Verbindung und Gruppirung einerlei.

Eine weitere Verfolgung der atomistischen Anschauungsweise würde uns zu weit von dem Weg ablenken, welchen wir zu verfolgen haben, um das beabsichtigte Ziel zu erreichen. Ich würde auch das Wenige, was im Vorhergehenden über die Atome gesagt wurde, ganz weggelassen haben, wenn es möglich wäre, ohne die Begriffe und die Vorstellung von Atomen die Grundbegriffe von den Kräften und ihrer Wirkungsweise mit der einer exakten Wissenschaft entsprechenden Schärfe festzustellen. Wenn man von den Kräften etwas verstehen will, muss man vor allem Andern wissen, wo sie ihren Sitz haben, von wo aus und nach wohin sie wirken. Diese Fragen dürfen nun einmal nicht umgangen werden, und so wie man sich dieselben stellt, ist man genöthigt, von den Atomen zu sprechen.

Bewegung der Massen.

29) *Bewegung einer Masse, die durch eine constante Kraft getrieben wird.* Wir haben den Satz aufgestellt, dass die Materie in sich selbst die Fähigkeit nicht besitzt, sich aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung zu versetzen, oder einen Zustand der Bewegung, in welchem sie sich bereits befindet, zu verändern, sondern, dass zu dem

Einen wie zu dem Andern die Einwirkung einer äussern treibenden Kraft nothwendig ist. Es ist nun die Frage zu beantworten, wie die Bewegung eines Körpers erfolgen wird, wenn auf denselben Kräfte irgend einer Art einwirken? Mann kann sich die Aufgabe stellen, diejenigen Bewegungsgesetze auszumitteln, welche von der speziellen Natur und Wirkungsart der Kräfte und von der materiellen Beschaffenheit der Substanzen, aus welchen die Körper bestehen, unabhängig sind. Die Ausmittlung dieser Gesetze ist das Geschäft der reinen Mechanik. Diese hat es also nur mit den allgemeinsten Beziehungen zu thun, welche zwischen dem aktiven Prinzip der Kräfte und dem passiven Prinzip der Materie stattfinden.

Es ist schon in früheren Nummern ausführlich erklärt worden, wie die Kräfte und die Massen gemessen werden können; wir können uns daher unmittelbar mit der Beantwortung der Frage beschäftigen, wie die Bewegung einer Masse erfolgen wird, wenn dieselbe durch gewisse Kräfte getrieben wird.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn eine Masse durch eine der Richtung und Intensität nach unveränderlich wirkende Kraft getrieben wird, und wenn alle Punkte der Masse parallele und gerade Linien beschreiben, deren Richtung mit jener der Kraft übereinstimmt.

Unter dieser Voraussetzung ist es klar, dass die Bewegung jedes einzelnen Massenatoms des ganzen Körpers so erfolgen wird, wie wenn die ganze Masse des Körpers in einem einzigen Punkt concentrirt wäre.

Denken wir uns also einen materiellen Punkt, in welchem M Masseneinheiten concentrirt wären, dessen Masse also $= M$ ist; denken wir uns ferner, dass auf diese Masse ohne Unterbrechung und mit unveränderlicher Intensität eine Kraft (ein Druck) K immer nach der gleichen Richtung einwirke, und fragen wir uns, wie die Bewegung erfolgen wird.

Die Kraft K mag noch so klein und die Masse mag noch so gross sein, so wird doch die Bewegung schon nach dem ersten Augenblick der Einwirkung der Kraft beginnen, d. h. es wird in der Masse M schon eine gewisse, aber allerdings nur sehr kleine Geschwindigkeit vorhanden sein, nachdem die Kraft während eines wenn auch noch so kleinen Zeittheilchens thätig war. Würde man nach diesem Zeittheilchen die Kraft ganz beseitigen, so müsste die Bewegung in dem Zustand, welcher am Ende dieses Zeittheilchens vorhanden wäre, fortdauern. Wenn aber die Kraft nicht beseitigt wird, sondern weiter fortwirkt, so muss sie fort und fort Geschwindigkeitsänderungen hervorbringen; es wird daher die Geschwindigkeit der Masse beständig wachsen. Die Geschwindigkeit, welche in irgend einem Zeitaugenblick vorhanden ist, kann durch den Raum gemessen werden, den die Masse in der auf diesen Zeitaugenblick folgenden Sekunde zurücklegen würde, wenn man von jenem Zeitaugenblick an die Einwirkung der Kraft ganz beseitigte, denn in diesem Falle würde die Masse vermöge ihrer Trägheit (d. h. vermöge ihrer passiven Natur) in dem Zustande verbleiben, in welchem sie sich befand, als man die Kraft beseitigte; die Bewegung muss also mit unveränderlicher Geschwindigkeit erfolgen, und das richtige Maass dieses Bewegungszustandes ist eben der Weg, der in einer Sekunde zurückgelegt wird. Nennen wir nun v diese Geschwindigkeit, die vorhanden ist, nachdem die Kraft K während einer Zeit t thätig war.

Die Bestimmung dieser Geschwindigkeit v ist streng genommen auf dem Wege des reinen Denkens und ohne Berücksichtigung der Erfahrung nicht möglich; es bleibt also nichts anderes übrig, als über die Beziehung, in welcher die Grössen v, t, K, M zu einander stehen, eine möglichst naturgemässe Hypothese zu machen, und sodann nachzusehen, ob die daraus sich ergebenden Folgerungen der Wirklichkeit entsprechen.

Denken wir uns zunächst, dass ein Druck von einem Kilogramm auf eine Masseneinheit während einer Zeiteinheit, z. B. während einer Sekunde, einwirke, so wird nach der ersten Sekunde eine gewisse Geschwindigkeit f vorhanden sein. Nun ist es aber doch natürlich, wenn wir annehmen, dass diese Triebkraft von einem Kilogramm in der Masseneinheit auch in jeder einzelnen der darauf folgenden Sekunden eine ebenso grosse Geschwindigkeitsänderung hervorbringt, wie während der ersten Sekunde.

Diese naturgemäss scheinende Annahme würde zur Gewissheit werden, wenn man beweisen könnte, dass die Geschwindigkeitsänderung, welche eine Kraft hervorbringt, von der Grösse einer bereits vorhandenen Geschwindigkeit gar nicht abhinge. Dies lässt sich aber nicht beweisen, daher dürfen wir es vorläufig nur als eine Hypothese betrachten, wenn wir sagen: in jeder Sekunde nehme die Geschwindigkeit um gleich viel zu. Diess vorläufig als richtig angenommen, sind die Geschwindigkeiten jener Masseneinheit nach der 1., 2., 3. Sekunde

$$1 f,\ 2 f,\ 3 f \ \ldots\ldots\ t f$$

Stellen wir uns nun vor, dass man auf jene Masseneinheit während 1., 2., 3. . . . t Sekunden eine Kraft von 1, 2, 3, 4 . . . . K Kilogrammen einwirken lasse, so scheint es wiederum naturgemäss zu sein, wenn wir annehmen, dass ein 2-, 3-, 4- . . . . K Mal grösserer Druck in jeder Sekunde eine 2-, 3-, 4 Mal grössere Geschwindigkeitsänderung hervorbringe, d. h. dass eine Kraft K während jeder Sekunde in einer Masseneinheit eine Geschwindigkeitsänderung K f erzeugt. Dann sind die Geschwindigkeiten nach der

1. 2. 3. . . . . . t Sekunde.

$$f\mathrm{K} \quad 2\,\mathrm{K}f \quad 3\,\mathrm{K}f \quad \ldots,\ \mathrm{t}\,\mathrm{K}f$$

Nun ist noch der Einfluss der Grösse der zu bewegenden Masse zu ermitteln.

Wenn die Kraft K auf die Masseneinheit einwirkt, entsteht in jeder Sekunde eine Geschwindigkeitsänderung K f. Wenn die Kraft K auf eine Masse wirkt, die gleich 2 Masseneinheiten ist, so kann man sich für die Masse 2 zwei Masseneinheiten, 1 und 1, und für die Kraft K zwei Kräfte $\frac{K}{2}$ und $\frac{K}{2}$ denken, so dass also jede der beiden Masseneinheiten durch eine Kraft $\frac{K}{2}$ getrieben wird. Dann ist aber die Geschwindigkeitsänderung, die in jeder Zeitsekunde in jeder Masseneinheit, und mithin auch in der ganzen Masse 2 hervorgebracht wird, $\frac{1}{2}$ K f und nach Verlauf der Zeit t: $\frac{1}{2}$ K f t.

Wenn die Masse gleich 3 Masseneinheiten ist, kann man sich dieselbe in 3 Masseneinheiten 1, 1, 1 und die Kraft K in drei Kräfte $\frac{K}{3}, \frac{K}{3}, \frac{K}{3}$, getheilt denken; man kann sich also die Sache so vorstellen, wie wenn auf jede Masseneinheit eine Kraft $\frac{1}{3}$ K wirkte. Dann aber wird in jeder Sekunde in jeder Masseneinheit eine Geschwindigkeitsänderung $f\frac{1}{3}$ K, und während der Zeit t eine Geschwindigkeitsänderung $\frac{1}{3} f$ K t entstehen.

Allgemein kann man, wenn die Masse gleich M ist, diese sich in M Masseneinheiten aufgelöst und die Kraft K in M Kräfte, von denen jede gleich $\frac{K}{M}$ ist, zerlegt denken, und dann wird die in jeder Sekunde entstehende Geschwindigkeitsänderung $\frac{Kf}{M}$ und die während t Sekunden hervorgebrachte Geschwindigkeitsänderung $= f\frac{K}{M}$ t sein.

Wir kommen also dahin, die Geschwindigkeit v, welche eine Masse M erlangt, welche durch eine constante Kraft K während t Sekunde getrieben wird, gleich $f\frac{K}{M}$ t zu setzen, und haben also:

$$v = f\frac{K}{M} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die constante f, d. h. die Geschwindigkeitsänderung, welche die Krafteinheit während einer Zeiteinheit auf eine Masseneinheit wirkend hervorbringt, kann als das Maass der spezifischen Trägheit der Materie angesehen werden. Von diesem spezifischen Maass der Trägheit hängt die Schnelligkeit ab, mit welcher alle Bewegungsprozesse vor sich gehen. Wenn die Kräfte und Massen bleiben, wie sie jetzt sind, und dagegen die Massen plötzlich beweglicher würden, so würden von diesem Augenblick an alle Bewegungen mit grösserer Geschwindigkeit erfolgen.

Wenn wir die Bedeutung der Gleichung (1) mit Worten ausdrücken wollen, so lauten diese dahin, dass eine constante Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringe, und dass die Geschwindigkeit der Bewegung der Intensität der Kraft und der Dauer der Einwirkung direkt, dagegen der Grösse der Masse verkehrt proportional sei.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$K = \frac{M\,v}{f\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

d. h. die treibende Kraft, welche im Stande ist, in einer Masse M während einer Zeit t eine Geschwindigkeit v hervorzubringen, ist der Grösse der Masse und der zu erzeugenden Geschwindigkeit direkt, aber der Dauer der Einwirkung verkehrt proportional.

Die Gleichung (1) gilt ganz allgemein, welche Einheiten man auch zur Messung von M K v t zu Grunde legen mag. Welche Einheiten zweckmässig sind, richtet sich nach der Natur des Gegenstandes, der einer Betrachtung unterworfen werden soll. Man kann z. B. für Probleme, welche die Astronomie betreffen, als Masseneinheit die Masse der Sonne annehmen, als Krafteinheit die Kraft, mit welcher zwei Massen Punkte, wenn in jedem derselben eine Sonnenmasse concentrirt wäre, in einer Entfernung gleich einer Meile gestellt, vermöge der allgemeinen Gravitation sich anziehen würde; als Zeiteinheit die Dauer eines Jahres und als Längeneinheit die Länge einer Meile. Dann wäre f der Weg in Meilen ausgedrückt, den die Sonnenmasse in der Zeit eines Jahres zurücklegen würde, wenn sie durch eine Kraft getrieben würde, welche so gross wäre, als die Anziehung, welche zwei in Punkte concentrirte und in eine Entfernung gleich einer Meile gestellte Sonnenmassen auf einander ausüben würden.

Für die Betrachtung der Bewegungen der Körper auf der Erde wäre eine solche Wahl der Einheiten sehr unpassend; es ist für diesen Zweck viel angemessener, solche Einheiten zu wählen, die sich bestimmen lassen, und von denen man sich leicht klare Vorstellungen machen kann.

Wir wählen daher folgende Einheiten:

1) Als Zeiteinheit die Sekunde.

2) Als Längeneinheit den Meter.

3) Als Geschwindigkeitseinheit den Meter pr. 1 Sekunde.

4) Als Krafteinheit einen Druck gleich einem Kilogramm.

In Betreff der Masseneinheit und des Werthes von f wird uns die folgende Betrachtung zum Ziele führen.

Wenn wir den Körper, dessen Masse M ist, an irgend einem Ort der Erde abwägen, so erhalten wir sein Gewicht für diesen Ort, d. h. wir erhalten die Kraft, mit welchen der Körper an dem Ort, wo er gewogen wurde, von der Erde angezogen wird. Es sei G dieses Gewicht. Wenn wir nun diesen Körper, da wo sein Gewicht G ist, frei fallen lassen, so muss diess mit gleichförmig beschleunigter Bewegung geschehen, wenn das Fallen innerhalb eines Raumes geschieht, innerhalb welchem das Gewicht als unveränderlich angesehen werden kann; denn wir haben gesehen, dass jede constante Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringt. Es sei nun g die Geschwindigkeit, welche der Körper, da wo sein Gewicht G ist, bei freiem Fall nach der ersten Sekunde erlangt, oder die Geschwindigkeitsänderung während jeder Sekunde.

Weil nun die Fallbewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so darf auf dieselbe die Gleichung (1) angewendet werden, d. h. dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wie man in dieselbe setzt:

$$t = 1, v = g, K = G$$

Dann findet man aber:

$$g = f\frac{G}{M} \text{ oder } \frac{M}{f} = \frac{G}{g} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Führt man diesen Werth in (1) ein, so ergibt sich:

$$v = g\frac{K}{G}t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Durch diese Gleichung können wir nun die Bewegung des Körpers bestimmen, ohne genöthigt zu sein, dessen Masse messen zu müssen, wenn wir nur das Gewicht G des Körpers und den correspondirenden Werth von g kennen. Es ist also nicht durchaus nothwendig, dass wir uns für eine bestimmte Masseneinheit erklären; indessen wollen wir es doch thun, weil für manche Betrachtungen gerade die Vorstellung von einer gewissen Massengrösse sehr wichtig ist.

Aus obiger Gleichung (3) folgt:

$$M = f\frac{G}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und hieraus sieht man, dass man die Masse eines Körpers durch irgend ein beliebiges Vielfaches des Quotienten $\frac{G}{g}$ messen kann. Die Richtigkeit dieser Art, die Masse eines Körpers zu messen, ist sehr einleuchtend. Es ist zunächst klar, dass an einem bestimmten Ort der Erde die Gewichte der Körper sich wie ihre Massen verhalten, weil die Erde jede Masseneinheit an einem bestimmten Ort mit gleicher Kraft anzieht. Allein da die Masse eines Körpers etwas absolut Unveränderliches, das Gewicht des Körpers hingegen mit dem Ort, wo er sich befindet, etwas Veränderliches ist, so kann die Masse eines Körpers durch das Gewicht allein nicht richtig gemessen werden. Nun ist aber die Geschwindigkeitszunahme g, welche ein Körper in jeder Sekunde beim freien Fall erlangt, vollkommen genau seinem Gewichte proportional (indem bei jeder gleichförmig beschleunigten Bewegung vermöge Gleichung (1) für $t = 1$ der Werth von f mit K proportional wächst), daher hat der Quotient $\frac{G}{g}$ die Eigenschaft, für einen und denselben Ort proportional mit dem Gewicht zu wachsen, dagegen aber für ein und denselben Körper an verschiedenen Orten wo er hingebracht wird, den gleichen Werth zu haben; man sieht also, dass dieser Quotient $\frac{G}{g}$ zum Messen der Masse eines Körpers gebraucht werden kann. Allein nicht nur $\frac{G}{g}$, sondern auch jedes Vielfache von diesem Quotienten kann zu dem gleichen Zweck dienen, weil auch diesem die oben erwähnte Eigenschaft zukommt.

Gewöhnlich wird zum Messen der Masse der einfache Quotient $\frac{G}{g}$ genommen, wir hingegen wollen $f = \frac{1}{2}$ und

$$M = \frac{G}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

nehmen, weil dann das höchst wichtige Gesetz über die Wirkungen der Kräfte, wovon in der Folge die Rede sein wird, sich am einfachsten ausdrücken lässt. Dieser Werth von M wird gleich der Einheit wenn $G = 2$ g. Wenn also die Masse durch (6) gemessen wird, nimmt man als Einheit der Massen die Masse eines Körpers an, dessen Gewicht zweimal so gross ist, als die Geschwindigkeitszunahme in der Sekunde beim freien Fall. Für eine geographische Breite von 40 bis 50° ist g in Metern ausgedrückt 9.808, demnach $2\,g = 19.616$. Wir nehmen mithin als Masseneinheit einen Körper an, der an einem Ort, wo die Beschleunigung durch die Schwere 9.808^{m} beträgt 19.616 Kilogramme wiegt.

Aus der Gleichung (6) folgt $G = 2\,g\,M$, und wenn man diesen Werth in (4) einführt, so kann man auch schreiben:

$$v = \frac{1}{2} \frac{K}{M} t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Ergebniss der bisherigen Betrachtungen ist also folgendes:

1. wenn beliebige Einheiten gewählt werden, hat man allgemein

$$v = f \frac{K}{M} t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wobei f die Beschleunigung ist, welche die Krafteinheit und Zeiteinheit in der Masseneinheit hervorbringt.

2) Wenn als Längeneinheit der Meter, als Zeiteinheit die Sekunde, als Krafteinheit ein Druck gleich 1 Kilogramm genommen wird, und wenn überdies die Massen des Körpers durch den Quotienten $\frac{G}{2\,g}$ gemessen wird.

$$M = \frac{G}{2\,g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$v = g\,\frac{K}{G}\,t, \text{ oder } v = \frac{1}{2}\,\frac{K}{M}\,t \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Der Weg, welcher während der Zeit t zurückgelegt wird, gleich s genannt, so ist derselbe nach Nr. (6)

$$s = \frac{1}{2}\,vt = \frac{1}{2}\,g\,\frac{K}{g}\,t^2 = \frac{1}{4}\,\frac{K}{M}\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Vermittelst dieser Gleichungen (9), (10), (11) kann man von den Grössen v, s, K, G, t, M, g je drei bestimmen, wenn die übrigen bekannt sind:

wenn gegeben ist: so findet man:

$$\left.\begin{array}{lllll}
g, K, G, t & \ldots & M = \frac{G}{2g} & . \; v = g\frac{K}{G}\,t, & s = \frac{1}{2} g \frac{K}{G}\,t^2 \\
g, K, G, v & \ldots & M = \frac{G}{2g} & . \; t = \frac{v\,G}{g\,K} & s = \frac{G}{2g}\,\frac{v^2}{K} \\
g, K, G, s & \ldots & M = \frac{G}{2g}, & v = \sqrt{2gs\frac{K}{G}} & t = \sqrt{\frac{2s}{g}\,\frac{G}{K}}
\end{array}\right\}(12)$$

Wenn der Körper in dem Augenblick, von welchem an man die Einwirkung der Kraft betrachtet, bereits eine gewisse Geschwindigkeit c besitzt, ist die Geschwindigkeit, nachdem die Einwirkung der Kraft durch t Sekunde gedauert hat:

$$v = c + g \frac{K}{G} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und der Weg s welcher während dieser Zeit t zurückgelegt wird:

$$s = ct + \frac{1}{2} g \frac{K}{G} t^2 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Wenn endlich einem Körper, der eine Geschwindigkeit c besitzt, eine Kraft K seiner Bewegung entgegen wirkt, so ist die Geschwindigkeitsverminderung, welche sie in einer gewissen Zeit t hervorbringt, eben so gross, als die Geschwindigkeitsvermehrung, welche sie hervorbringen würde, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der Bewegung übereinstimmte. Es ist daher in diesem Falle

1) die Geschwindigkeit, welche noch vorhanden ist, nachdem die Kraft K während t Sekunde der Bewegung entgegen gewirkt hat:

$$v = c - g \frac{K}{G} t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

2) der Weg, den der Körper während der Einwirkung der Kraft K zurücklegt:

$$s = ct - \frac{1}{2} g \frac{K}{G} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

30) *Geradlinige Bewegung einer Masse, welche durch eine veränderliche Kraft getrieben wird.* Wenn eine Kraft K mit veränderlicher Intensität auf eine Masse M einwirkt, und zwar nach der Richtung, nach welcher sie sich bewegt, so können die in gleichen Zeitintervallen entstehenden Geschwindigkeitsänderungen nicht gleich gross sein, und es kann daher in diesem Falle keine gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung entstehen. Es sei nun K die Intensität der Kraft nach Verlauf einer etwas grösseren Zeit $t + \triangle t$, v die wahre Geschwindigkeit zur Zeit t und $v + \triangle v$ die wahre Geschwindigkeit zur Zeit $t + \triangle t$. Nun ist klar, dass die wirkliche Geschwindigkeitsveränderung $\triangle v$ grösser ist, als jene, welche eintreten würde, wenn die Kraft während $\triangle t$ an Intensität nicht zugenommen hätte; man hat daher, wenn G das Gewicht des Körpers bedeutet:

$$\triangle v > g \frac{K}{G} \triangle t$$

Sodann aber ist auch klar, dass die wirkliche Geschwindigkeitsänderung $\triangle$ v kleiner sein wird, als jene, welche eintreten müsste, wenn die Kraft während des ganzen Zeitintervalles $\triangle$ t unveränderlich mit der Intensität K + $\triangle$ K, welche sie erst am Ende des Zeitintervalles $\triangle$ t erlangt, gewirkt hätte; man hat daher:

$$\triangle v < g \frac{K + \triangle K}{G} \triangle t$$

Diese Beziehungen gelten, wie klein man sich auch das Zeitintervall denken mag, wenn nur während desselben ein ununterbrochenes Zunehmen der Intensität der Kraft statt findet; sie gelten also auch noch dann, wenn das Zeitintervall verschwindend klein oder als ein Differenzial der Zeit gedacht wird. Innerhalb eines unendlich kleinen Zeitintervalles kann sich aber die Kraft, so wie auch die Geschwindigkeit nur unendlich wenig ändern, es ist demnach wenn $\triangle$ t unendlich klein gedacht wird, auch $\triangle$ K und $\triangle$ v unendlich klein. Es nähert sich demnach bei dem unendlichen Abnehmen von $\triangle$ t der Quotient $\frac{\triangle v}{\triangle t}$ ohne Ende dem Werth $g \frac{K}{G}$, d. h. man hat

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{K}{G} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Nennt man s den Weg, welchen die Masse während der Zeit t zurückgelegt hat, und d s die Zunahme dieses Weges während des Zeitelements d t so ist:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

und wenn man ein- für allemal annimmt, dass bei allen Untersuchungen über die Bewegung der Körper die auf einander folgenden Zeitintervallen, innerhalb welcher man die Bewegungsänderungen betrachtet, gleich gross angenommen werden, so ist d t als konstant, mithin $d^2 t = 0$ zu nehmen, und dann wird:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2_s}{dt^2}$$

Man hat daher auch

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2_s}{dt^2} = g \frac{K}{G} = \frac{1}{2} \frac{K}{M} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

wobei M die Masse des Körpers bedeutet, demnach

$$M = \frac{G}{2g}$$

ist.

Ist K als Funktion von s gegeben, so erhält man durch Integration der Gleichung

$$\frac{d_s^2}{dt^2} = g \frac{K}{G} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

den Weg s als Funktion von t, und wenn man nach geschehener Integration den Differenzial-Quotienten $\frac{d\,s}{d\,t}$ aufsucht, so hat man die Geschwindigkeit als Funktion von t.

Multiplizirt man die letzte Gleichung mit 2 d s und integrirt sie sodann, so findet man:

$$\int \frac{2\,d\,s\,d_s^2}{d\,t^2} = \frac{2\,g}{G} \int K\,ds$$

oder:

$$\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2 = \frac{2\,g}{G} \int K\,d\,s + \text{Constant}$$

oder auch:

$$\frac{G\,v^2}{2\,g} = \int K\,d\,s + \text{Constant} \quad \dots\dots \quad (5)$$

Durch diese Gleichung wird demnach die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit bestimmt.

Ist K nicht als Funktion von s, sondern als Funktion von v gegeben, so erhält man durch Integration der Gleichung

$$\frac{d\,v}{d\,t} = g \frac{K}{G} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

$$t = \frac{G}{g} \int \frac{d\,v}{K} + \text{Constant}$$

t als Funktion von v, und wenn man daraus v aufsucht, so erhält man v als Funktion von t, und dann findet man s durch

$$s = \int v\,d\,t + \text{Constant} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

Das Messen der Thätigkeiten oder der Wirkungen der Kräfte.

31) ***Thätigkeit der Kräfte im Allgemeinen.*** Es ist keine einzige Thatsache bekannt, welche uns zu dem Schlusse berechtigt, dass durch die Thätigkeit der Kräfte oder durch andere Ursachen Stoffe geschaffen oder vernichtet würden. Im Gegentheil weisen alle Erfahrungen darauf hin, dass zu dem bestehenden Stoff nicht ein neues Atom dazu kommt,

dass aber auch keines vergänglich ist. Alle Veränderungen, welche in der materiellen Natur vorkommen können daher nur auf Ortsveränderungen der kleinsten Theile der Körper beruhen. Hierdurch entstehen aber sehr mannigfaltige Erscheinungen und Wirkungen, von denen die folgenden die wichtigsten sind:

1) Fortbewegung eines Theilchens oder eines Körpers ohne Aenderung der Geschwindigkeit.

2) Uebergang aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung, und umgekehrt.

3) Fortbewegung eines einzelnen Theilchens oder eines Körpers mit Aenderung der Geschwindigkeit.

4) Fortschaffung der Körper von einem Ort nach einem andern.

5) Volumsänderung der Körper durch Ausdehnung oder Zusammenziehung.

6) Formänderung der Körper, z. B. Biegung oder Windung eines Stabes.

7) Zertheilung der Körper.

8) Aenderung der Gegeneinander-Gruppirung der Atome.

Die Bewegung ohne Aenderung der Geschwindigkeit erfolgt, wenn sie einmal eingeleitet ist, durch das passive Verhalten der Materie, also ohne alle Mitwirkung einer inneren oder äusseren Kraft. Alle übrigen der genannten Veränderungen entspringen aber nur durch die Thätigkeit der Kräfte.

Eine Kraft ist unthätig, wenn sie keine Veränderung hervorbringt, sie ist thätig, wenn sie eine jener Veränderungen vollbringt. Hierzu ist aber nothwendig, dass der Zug oder der Druck, die Attraktion oder die Repulsion, mit welcher die Kraft auf einen Körper einwirkt, oder mit andern Worten, dass der Angriffspunkt der Kräfte in Bezug auf die Richtung derselben vorwärts oder rückwärts schreitet. Da nämlich keine Veränderung ohne Bewegung geschehen kann, und da auch keine der genannten Veränderungen durch die Materie als solcher hervorgebracht wird, so muss immer eine Kraft da sein, welche die Bewegung begleitet.

Je nachdem der Angriffspunkt einer Kraft in Bezug auf ihre Richtung vorwärts oder rückwärts schreitet, entwickelt sie eine Thätigkeit, welche im ersteren Falle die erfolgte Bewegung zu begünstigan im letzteren dagegen zu hindern sucht. Wir wollen desshalb eine Thätigkeit, bei welcher der Angriffspunkt einer Kraft vorwärts schreitet, eine Wirkung, und eine Thätigkeit, bei welcher der Angriffspunkt einer Kraft zurückschreitet, eine Gegenwirkung nennen.

Die Thätigkeiten der Naturkräfte sind entweder freie oder es sind gezwungene Thätigkeiten. Unter den ersteren wollen wir solche verstehen, die ohne eine menschliche Veranlassung oder Einwirkung durch das freie Spiel der Naturkräfte entstehen, wenn eine Störung eines Gleichgewichts eintritt. Unter den letzteren dagegen solche, wobei eine Kraft durch geeignete Veranstaltungen genöthigt wird, mechanische Veränderungen hervorzubringen, die für unsere Zwecke in irgend einer Hinsicht von unmittelbarem Nutzen sind. Eine solche Thätigkeit wird auch Arbeit genannt, und von einer Kraft, durch welche sie vollbracht wird, sagt man, dass sie arbeite.

Die Grösse der Thätigkeit, welche eine Kraft entwickelt oder die Wirkung oder Gegenwirkung, welche sie hervorbringt, kann unter allen Umständen ganz genau gemessen werden, was in den folgenden Nummern gezeigt werden soll; vorläufig diene die allgemeine Bemerkung, dass die Wirkung, welche eine Kraft entwickelt, nicht nur nach der Intensität des Druckes, sondern auch nach der Länge des Weges, durch welchen sie thätig ist, beurtheilt werden muss, dass aber die Zeit, in welcher die Wirkung vollbracht wird, auf ihre Grösse gar keinen Einfluss hat. Wenn ein Körper auf eine gewisse Höhe gehoben werden soll, so ist dazu eine gewisse Thätigkeit oder Wirkung nothwendig, die von dem Gewicht und von der Hubhöhe abhängt; es mag nun die Erhebung in einer Sekunde, Minute oder Stunde erfolgen.

32) *Wirkung einer constanten Kraft, wenn der Angriffspunkt in Bezug auf die Richtung der Kraft vorwärts oder rückwärts schreitet.* Wirkt eine Kraft mit unveränderlicher Intensität und erfolgt die Bewegung ihres Angriffspunktes nach einer Richtung, die mit jener, nach welcher die Kraft wirkt, übereinstimmt, oder dieser gerade entgegengesetzt ist, so ist im ersteren Falle die Wirkung, im letzteren die Gegenwirkung nach dem Produkt aus der Intensität der Kraft in die Länge des wirklich zurückgelegten Weges zu beurtheilen. Nennt man K die Kraft, S den Weg, W die Wirkung, oder Gegenwirkung, so ist in diesem Fall

$$W = K\,S.$$

Zwei Kräfte, die hinsichtlich ihrer Intensität sehr verschieden sind, können also gleiche Wirkungen hervorbringen, wenn sich nur die Weglänge, durch welche sie thätig sind, verkehrt wie die Intensitäten verhalten. Wenn ein Druck von 100 Kilogramm durch einen Weg von 1 Metre wirkt, so wird eine eben so grosse Wirkung entwickelt, wie wenn ein Druck von 1 Kilogramm durch 100 Metre Weglänge thätig ist. Die Zeit, in der die Thätigkeit entwickelt wird, die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung vor sich geht, und die Art, wie die Bewegung erfolgt, ob nämlich mit gleichförmiger oder mit veränderlicher Geschwindigkeit, endlich die besondere Natur der Kraft, — diese Verhältnisse alle kommen nicht in Betrachtung, wenn die Grösse der Thätigkeit einer Kraft gemessen werden soll; sondern einzig und allein nur die Intensität der Kraft und die Weglänge, durch welche sie thätig ist.

33) Wirkungseinheit. Es ist grundsätzlich ganz gleichgültig, welche Einheiten man zur Messung der Wirkungen zu Grunde legt. Für die mannigfaltigen Anwendungen des Begriffs von Wirkungsgrösse ist jedoch die Wahl dieser Einheit nicht gleichgiltig, sondern es ist zweckmässig, sie so zu wählen, dass man mit den Zahlen, welche die Wirkungen ausdrücken, eine anschauliche Vorstellung verbinden kann.

In der Regel werden wir in der Folge als Einheit der Kräfte einen Druck von einem Kilogramm und als Einheit der Längen einen Metre annehmen. Die Einheit der Wirkung ist dann diejenige, welche entwickelt wird, wenn z. B. ein Druck von einem Kilogramm durch einen Weg von 1 Metre thätig ist. Damit aber gar nie ein Zweifel entstehen kann, welche Einheiten der Messung zu Grunde gelegt wurden, pflegt man der Zahl, welche die Wirkung ausdrückt, noch ein aus der Gewichtseinheit und Längeneinheit zusammengesetztes Wort hinzu zu fügen. Man sagt z. B. wenn ein Druck von 65 Kilogramm durch einen Weg von 4 Metre gewirkt hat, es sei eine Wirkung gleich $65 \times 4 = 260$ Kilogramm-Metres entwickelt worden.

Zur Messung mächtigerer Wirkungen hat Coriolis vorgeschlagen, eine Wirkung von 100 oder von 1000 Kilogrammen Metre als Einheit zu nehmen; allein dieser Vorschlag ist nicht zweckmässig, denn für wissenschaftliche Zwecke genügt in der Regel die Messung nach Kilogramm-Metres und für technische Zwecke ist eine Einheit gleich 1000 Kilg. Metres nicht passend, weil man sich von der Grösse der Thätigkeit von 1000 Kilog. Metre nicht leicht eine anschauliche Vorstellung machen kann.

In Frankreich hat man das Produkt aus Kraft und Weg Arbeitsgrösse genannt. Diese Benennung ist allerdings sehr bezeichnend, wenn man diejenigen Thätigkeiten messen will, welche eine Kraft entwickelt, wenn sie eine für unsere Zwecke unmittelbar nützliche Veränderung hervorbringt, d. h. wenn sie eine mechanische Arbeit verrichtet. Allein jenes Produkt hat nicht nur für technische Zwecke eine wichtige Bedeutung, sondern es ist auch für das gesammte Gebiet der erklärenden Naturwissenschaften von höchster Wichtigkeit, indem dadurch die Thätigkeiten der Naturkräfte überhaupt gemessen werden können, sei es nun, dass sie eine für unsere Zwecke nützliche Arbeit verrichten, oder sei es, dass sie ohne alle menschliche Veranlassung und ohne irgend eine Beziehung zum Menschen Veränderungen in der Körperwelt hervorbringen. Es scheint daher passender zu sein, das Produkt durch ein Wort zu bezeichnen, welches in der gesammten Thätigkeit der Kräfte angewendet werden kann, und das ist der Grund, wesshalb wir in Folgendem das Wort „Wirkung" und nicht das Wort »Arbeitsgrösse« gebrauchen wollen.

Die Benennung „Wirkung" wurde zuerst von Arzberger gebraucht;

sie stimmt im Wesentlichen überein mit Quantité d'action; eine Benennung, die Navier eingeführt hat.

34) *Der Effect einer constanten Kraft.* Wenn eine Kraft mit unveränderlicher Intensität und mit unveränderlicher Geschwindigkeit durch längere Zeit ununterbrochen thätig ist, bringt sie in allen gleichen Zeitintervallen, z. B. in jeder Sekunde, eine gleich grosse Wirkung hervor, und es genügt in diesem Falle, die Wirkung zu kennen, die in jeder Sekunde entwickelt wird, um auch die Wirkungen angeben zu können, welche unter diesen Umständen in irgend einer Zeit hervorgebracht werden. Diese Wirkung, welche eine Kraft in jeder Sekunde hervorbringt, wenn sie mit unveränderlicher Intensität und mit unveränderlicher Geschwindigkeit thätig ist, nennt man den mechanischen Effect der Kraft; und dieser wird gefunden, wenn man die Kraft K mit dem Weg, den ihr Angriffspunkt in jeder Sekunde zurücklegt, d. h. mit der Geschwindigkeit V multiplizirt. Nennt man E den Effect, so hat man also:

$$E = K V.$$

Wenn sehr mächtige Wirkungen, wie sie bei Maschinen vorkommen, zu messen sind, würden den Wirkungen, wenn man sie in Kilogramm-Metres ausdrückte, ungemein grosse Zahlen entsprechen, von deren Bedeutung man sich kaum eine anschauliche Vorstellung machen könnte. Es ist daher in solchen Fällen zweckmässiger, mit einer grösseren Wirkungseinheit zu messen, die noch überdies so gewählt werden kann, dass man sich dieselbe leicht vorstellen kann.

Für das Maschinenwesen ist man übereingekommen, zur Messung grösserer Wirkungen eine Wirkung gleich 75 Kilogrammen Metre als Einheit anzunehmen, und man nennt diese Einheit eine Pferdekraft, weil ein ziemlich starkes Pferd in jeder Sekunde eine Wirkung gleich 75 Kilogrammen Metre zu entwickeln, und dabei innerhalb 24 Stunden 8 bis 10 Stunden zu arbeiten vermag.

Nennt man E einen in Kilogramm-Metres ausgedrückten Effect, und N die Anzahl der Pferde, welche durch eine Sekunde thätig sein müssten, um den Effect E hervorzubringen, so hat man offenbar:

$$E = 75\ N \text{ und } N = \frac{E}{75}$$

Nennt man W irgend eine in Kilogramm-Metres ausgedrückte Wirkungsgrösse, t die Zahl der Sekunden während welcher N Pferde thätig sein müssten, um die Wirkung W hervorzubringen, so hat man:

$$W = 75\ N\ t$$

35) *Wirkung einer constanten Kraft, wenn die Richtung der Bewegung mit jener der Kraft einen Winkel bildet.* Wenn die

Richtung der Bewegung mit der Richtung der Kraft K einen Winkel φ bildet, kann man sich statt der Kraft K zwei Kräfte K Cos. φ und K sin. φ denken, von welcher der erstere nach der Linie wirkt, in der die Bewegung erfolgt, die letztere dagegen nach einer Richtung, die mit jener der Bewegung einen rechten Winkel bildet. Erfolgt die Bewegung in einer geraden Linie, und ändert die Kraft K, während sie der Bewegung folgt, ihre Richtung nicht, bleibt sie also stets zu sich selbst parallel, so ist klar, dass die Kraft K sin. φ keine Wirkung hervorbringen kann, indem sie nicht im Mindesten nach der Richtung treibt, nach der die Bewegung stattfindet. Die Wirkung, welche die Kraft K entwickelt, ist also genau so gross als die, welche durch K Cos. φ hervorgebracht wird. Diese letztere ist aber, wenn man den Weg, der vom Angriffspunkt wirklich zurückgelegt wird, mit S bezeichnet, K Cos. φ S. Nennt man also W die Wirkung der Kraft, so ist:

$$W = K \text{ Cos. } \varphi \text{ S}$$

Es ist aber auch S Cos. φ die Projektion des Weges S auf die Richtung der Kraft K. Heisst man diese Projektion p, setzt man also: S Cos. φ = p, so hat man auch

$$W = K \text{ p}$$

Die Wirkung oder Gegenwirkung einer Kraft wird demnach durch das Produkt aus der Intensität der Kraft in der Projektion des von ihrem Angriffspunkt beschriebenen Weges auf die Richtung der Kraft bestimmt.

Durch die Projektion p des wirklich zurückgelegten Weges S auf die Richtung der Kraft wird das Fortschreiten oder das Zurückschreiten des Angriffspunktes in Bezug auf die Richtung der Kraft gemessen. Man kann also auch sagen, dass die Wirkung, welche eine constante Kraft entwickelt, deren Richtung mit jener, nach der die Bewegung erfolgt, stets den gleichen Winkel bildet, gefunden wird, wenn man die Intensität der Kraft mit dem nach ihrer Richtung geschätzten Fortschreiten oder Zurückschreiten ihres Angriffspunktes multiplizirt.

36) *Wirkung einer veränderlichen Kraft.* Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Kraft mit unveränderlicher Intensität thätig sei. Es ist nun die Frage, wie die Wirkung einer veränderlichen Kraft gemessen werden kann? Nehmen wir an, der Angriffspunkt der Kraft schreite nach der Richtung der Kraft in gerader Linie vorwärts, und verzeichnen uns eine Linie, in welcher die Abscissen die Wege und die Ordinaten die Kräfte darstellen, so erhalten wir dadurch eine anschauliche Vorstellung von der Veränderung der Kraft und von der Art und Weise, wie sie in jedem Punkt des Weges thätig ist.

Es sei Fig. 10 Taf. II. $\mathfrak{A}$ der Punkt, von welchem aus die Bewegung und die Wirkung betrachtet wird, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ der anfängliche Werth der Kraft, $\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_1$ ihr Endwerth, nachdem der Weg $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}$ zurückgelegt wurde, $\overline{d\,d_1} = K$ die Intensität der Kraft, wenn der Angriffspunkt in d angekommen ist. Die Wirkung, welche entwickelt wird während der Angriffspunkt durch ein kleines Wegstückchen d e fortschreitet, wäre, wenn sich während dieser Bewegung die Kraft nicht änderte, gleich dem Produkt aus der Kraft in den Weg, also gleich $\overline{d\,d_1} \times \overline{d\,e}$, weil sich aber die Kraft von d bis e etwas ändert, so ist die Wirkung, welche in der That entwickelt wird, etwas grösser als $\overline{d\,d_1} \times \overline{d\,e}$, d. h. etwas grösser als der Flächeninhalt des Rechtecks $d\,d_1\,\varepsilon\,e$, und man sieht wohl, dass der wahre Werth der Wirkung, die die Kraft entwickelt, während ihr Angriffspunkt von d bis e fortschreitet, durch den wahren Flächeninhalt des oben durch die krumme Linie begränzten Vierecks $d\,d_1 \cdot e\,e_1$ gemessen wird. Weil aber alles, was von dem Wegstückchen d e gesagt wurde, von jedem andern ebenfalls gilt, so sieht man, dass die totale Wirkung, welche die Kraft entwickelt, während sie von $\mathfrak{A}$ bis E thätig ist, durch den Flächeninhalt der oben von der krummen Linie $\mathfrak{A}_1\;d_1\;E_1$ begränzten Figur $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_1$ gemessen wird. Verzeichnet man also diese Figur und berechnet sodann durch irgend eine Methode ihren Flächeninhalt, so drückt die Zahl, welche man so erhält, die zu berechnende Wirkung aus.

Wenn die Kraft stetig veränderlich ist, so kann man die Wirkung durch Integralrechnung finden, wenn das Gesetz der Veränderung der Kraft als Funktion des Weges gegeben ist:

Setzt man $\mathfrak{A}\,d = s$, $d\,e = ds$, $d\,d_1 = K$ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E} = l$, so ist, wenn die Wirkung mit W bezeichnet wird:

$$W = \int_{s=0}^{s=l} K\,ds$$

Ist die Kraft unregelmässig veränderlich, wie z. B. Fig. 11 Taf. II. zeigt, so kann das Integralverfahren nicht angewendet werden, sondern man muss den Flächeninhalt der Figur (11) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\;\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ nach irgend einer Annäherungsmethode berechnen. Die Zahl, welche den Flächeninhalt angibt, ist aber dem wahren Werth der Wirkungsgrösse vollkommen gleich

37) *Allgemeinster Fall der Wirkungsbestimmung einer Kraft.* Wenn der Angriffspunkt der Kraft eine krumme Linie beschreibt, wenn ferner die Intensität stetig oder unregelmässig veränderlich ist, wenn endlich die Richtung der Kraft mit der Richtung der Bahn einen veränderlichen Winkel bildet, findet man die Wirkung der Kraft auf folgende Art:

Man verzeichne die Kurve a, b, c, d (Fig. 12 Taf. II.), welche den Angriffspunkt der Kraft beschreibt, bemerke die Punkte c, f wo sich die Kraft plötzlich ändert, theile die Intervalle a c, c f, ... in sehr kleine Theile a b, b c, c d ..., verzeichne in den Punkten a, b, c die Richtungen der Kraft, suche die Projektion der Wegstückchen a b b c ... auf die Richtungen der Kraft, so ist dann die Wirkung, welche die Kraft entwickelt, wenn K_0 K_1 K_2 ... die Intensitäten derselben in den Punkten a, b, c bezeichnen:

$$W = K_0\, \overline{a\alpha} + K_1\, \overline{b\beta} + K_2\, \overline{c\gamma} + \ldots$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt daraus, dass vermöge der vorgenommenen Eintheilung der Bahn die Kraft innerhalb der Wegstückchen stetig veränderlich ist. Wenn also diese Wegstückchen ungemein klein sind, so kann man innerhalb derselben die Kraft und ihre Richtung als constant betrachten, und dann sind vermöge Nr. 35 $K_0 \times a\alpha$, $K_1 \times b\beta$, ... die Wirkungen, welche die Kraft entwickelt, während sie durch die einzelnen Wegelemente thätig ist.

Will man diese Wirkung graphisch durch einen Flächeninhalt darstellen, so kann dies auf zweifache Art geschehen. Man kann 1) die Projektion $\overline{a\alpha}$ $\overline{b\beta}$ ... als Abscissendifferenzen und die Kraft K_0 K_1 ... als Ordinaten auftragen, oder man kann 2) die wirklich zurückgelegten Wegstückchen $\overline{ab}$ $\overline{bc}$ ... als Abscissendifferenzen und die Kräfte R_0 Cos. φ_0, K_1 Cos φ_1 ... als Ordinaten auftragen.

Sind die Gesetze bekannt, nach welchen sich die Intensität der Kraft und ihre Richtung gegen die Bahn verändert, so kann man die Wirkung durch Integralrechnung bestimmen, vorausgesetzt, dass jene Gesetze von stetiger Art sind.

Setzt man allgemein $\widehat{ad} = s$, $\widehat{de} = ds$ und bezeichnet durch K und φ die Intensität der Kraft und den Winkel, welcher dem Punkt d entspricht, endlich $\widehat{ah} = l$, so ist:

$$W = \int_{s=0}^{s=l} K \operatorname{Cos} \varphi \; ds$$

38) *Der Effect einer periodisch veränderlichen Kraft.* Eine Kraft ist periodisch veränderlich, wenn ihre Bestimmungselemente (Intensität und Richtung) nach einer gewissen Zeitintervalle immer wiederum den gleichen Werth haben. Dieses Zeitintervalle, nach welchem die gleichen Zustände wiederkehren, ist die Dauer der Periode.

Fig. 1 Taf. III. stellt eine periodisch veränderliche Kraft vor. Die Wirkung, welche eine solche Kraft entwickelt, ist für jede Periode gleich

gleich gross, von welchem Zeitmomente an diese auch gerechnet werden mag. Kennt man also die Wirkung, welche einer Periode entspricht, so kann man leicht die Wirkung für die Zeit berechnen, die ein Vielfaches ist von der Dauer einer Periode.

Unter dem Effekt, welchen eine periodisch veränderliche Kraft entwickelt, versteht man die wahre mittlere Wirkung, welche in jeder Sekunde entwickelt wird. Nennt man W die Wirkung, welche die Kraft in jeder Periode entwickelt, t die Dauer der Periode, E die wahre mittlere Wirkung pr. Sekunde oder den Effect der Kraft, so ist klar, dass man hat:

$$E = \frac{W}{t}$$

39) *Der mittlere Werth einer veränderlichen Kraft.* Der mittlere Werth einer veränderlichen Kraft ist diejenige constante Kraft, die, wenn sie durch einen eben so langen Weg wirkt, als die veränderliche Kraft, eine eben so grosse Wirkung hervorbringt, als diese letztere. Berechnet man demnach die Wirkung W, welche eine Kraft entwickelt, wenn sie durch einen Weg l thätig ist, so findet man den wahren mittleren Werth der Kraft K_m durch den Quotienten:

$$K_m = \frac{W}{l}$$

Graphisch dargestellt erscheint dieser mittlere Werth als die Höhe $\mathfrak{A}\,\alpha$ eines Rechtecks, Fig. 2 Taf. III. $\mathfrak{A}\,\alpha\,\mathfrak{C}\,\gamma$, das eben so lang ist und einen eben so grossen Flächeninhalt hat, als die Figur $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\;\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}_1$, die der Wirkung der veränderlichen Kraft entspricht.

Diese Bestimmung des mittleren Werthes einer Kraft ist auch dann vollkommen richtig, wenn sich die Kraft sprungweise ändert. Ist die Kraft stetig veränderlich und kennt man das Gesetz, nach welchem diese Veränderung erfolgt, so kann man den mittleren Werth der Kraft durch Integralrechnung finden, denn man hat:

$$K_m = \frac{\int_{x=o}^{x=e} K \operatorname{Cos} \varphi \, ds}{l}$$

Wobei K, φ, d s die gleiche Bedeutung haben wie in Nr. 37.

Für eine periodisch veränderliche Kraft haben wir gefunden, dass der mittlere Effect ausgedrückt werden kann durch:

$$E = \frac{W}{t}$$

Nun ist aber die mittlere Kraft, welche einer Periode entspricht:

$$K_m = \frac{W}{l}$$

Aus diesen 2 Gleichungen folgt:

$$E = K_m \frac{l}{t}$$

Es ist aber l die Länge des Weges, welcher einer Periode entspricht, und t die Dauer einer Periode, mithin $\frac{l}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung, bezeichnet man diese mit V_m, so findet man:

$$E = K_m \times V_m$$

d. h. man findet den Effect, den im Mittel eine periodisch veränderliche Kraft in jeder Sekunde entwickelt, durch das Produkt aus dem mittleren Werth der Kraft in dem mittleren Werth der Geschwindigkeit der Bewegung. Bei einer Expensions-Dampfmaschine z. B. findet man den Effect, wenn man den mittleren Druck, mit welchem der Kolben fortgeschoben wird, mit der mittleren Geschwindigkeit desselben multiplizirt.

Wenn die Kraft in der Art periodisch veränderlich wirkt, dass sie in der zweiten Hälfte der Periode eine Gegenwirkung hervorbringt, die eben so gross ist, als die Wirkung, welche in der ersten Hälfte entwickelt wird, so ist die Gesammtwirkung für eine ganze Periode gleich Null. Es ist aber auch in diesem Fall der mittlere Werth K_m des Druckes gleich Null. Die Fig. 3 Taf. III. zeigt eine in dieser Weise periodisch veränderliche Kraft.

Berechnung verschiedener Wirkungsgrössen.

40) *Erhebung eines Körpers.* Wenn ein Körper so gehoben wird, dass alle Punkte desselben gerade vertikale Linien von einerlei Länge beschreiben, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die einer solchen Erhebung entsprechende Wirkungsgrösse W gleich zu setzen ist dem Gewicht G des Körpers, multiplizirt mit der Erhebungshöhe H. Man hat demnach in diesem Fall:

$$W = G\,H$$

Erfolgt die Erhebung eines Körpers in solcher Weise, dass alle seine Punkte parallele und congruente krumme Linien beschreiben, so muss man, um die Wirkung zu berechnen, welche der Erhebung des ganzen Körpers entspricht, zunächst jene berechnen, die einem einzelnen Gewichtspunkte entspricht. Es sei Fig. 4 Taf. III. A Z die Bahn, welche ein einzelner Punkt, in welchem ein Gewicht g concentrirt ist, während der Erhebung beschreibt. Theilt man A Z in unendlich viele, unendlich kleine Bögen, zieht durch die Theilungspunkte Vertikallinien, und projektirt auf dieselben die wirklich beschriebenen Wegstückchen, so ist die ganze Wirkung, welche der Erhebung des Punktes von A bis Z entspricht:

$$g\,\overline{A\alpha} + g\,\overline{a\beta} + g\,\overline{b\gamma}\,\ldots = g\,(\overline{A\alpha} + \overline{a\beta} + \overline{b\gamma}\,\ldots)$$

Die in der Klammer enthaltene Summe ist aber gleich dem Vertikalabstand des Punktes Z über A oder gleich der Erhebungshöhe H. Es ist demnach die Wirkung, welche der Erhebung eines einzelnen Gewichtspunktes auf eine Höhe H entspricht, gleich dem Produkte g H, wie auch die Bahn, welche während der Erhebung beschrieben wurde, gestaltet sein mag. Theilt man nun den ganzen Körper in kleine Theilchen, deren Gewichte $g\,g_1\,g_2$ sind, so ist, wenn die Bahnen, welche die Punkte während der Erhebung beschreiben, congruent sind, die Erhebungshöhe für jeden Punkt gleich gross; es ist demnach die Wirkung, welche der Erhebung des ganzen Körpers entspricht,

$$W = g\,H + g_1\,H + g_2\,H\,\ldots = H\,(g + g_1 + g_2 +)$$

oder:

$$W = G\,H$$

wenn durch G das ganze Gewicht des Körpers bezeichnet wird.

Wenn die Punkte eines Körpers während seiner Erhebung verschiedene von einander abweichende Kurven beschreiben, wird bei der Erhebung des ganzen Körpers nicht jeder Punkt um gleich viel gehoben. Bezeichnen wir die Lage der einzelnen Punkte des Körpers am Anfang und am Ende der Erhebung gegen eine unveränderliche horizontale Ebene. Es seien die Höhen der einzelnen Punkte des Körpers über diese Ebene bei Beginn der Erhebung $z_1\,z_2\,z_3\,\ldots$, am Ende der Erhebung Z, Z_1, Z_2 $g_1\,g_2\,g_2\,\ldots$ die Gewichte der einzelnen Punkte, so sind: $g_1\,(Z_1 - z_1)$, $g_2\,(Z_2 - z_2)$, $g_3\,(Z_3 - z_3)\,\ldots$ die Wirkungen, welche den Erhebungen der einzelnen Punkte entsprechen, demnach ist die Wirkung W für die Erhebung des ganzen Körpers

$$W = g_1\,(Z_1 - z_1) + g_2\,(Z_2 - z_2) + g_3\,(Z_3 - z_3)\,\ldots$$

oder:

$$W = (gZ_1 + g_2\,Z_2 + g_3\,Z_3) - (g_1\,z_1 + g_2\,z_2 + \ldots)$$

Nennt man G das Gewicht des ganzen Körpers H_1 und h_1 die Höhen des Schwerpunktes des Körpers über die Ebene am Ende und am Anfang der Erhebung, so ist bekanntlich:

$$G H_1 = g_1 Z_1 + g_2 Z_2 + g_3 Z_3$$
$$G h_1 = g_1 z_1 + g_2 z_2 + g_3 z_3$$

demnach findet man:

$$W = G (H_1 - h_1)$$

oder wenn man die Erhebung $H_1 - h_1$ des Schwerpunktes, oder den Vertikalabstand des Schwerpunktes nach der Erhebung über den Schwerpunkt am Anfang der Erhebung mit H bezeichnet, so findet man

$$W = G H.$$

Es ist also ganz allgemein die Erhebungswirkung für einen schweren Körper gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Körpers und der Erhebungshöhe seines Schwerpunktes, und diese Regel ist richtig, wie auch das Erheben erfolgen mag, und welche Veränderungen mit dem Körper während der Erhebung vor sich gehen mögen. Der Körper kann z. B. während der Erhebung ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, oder die Theile der Körper können ihre Lage gegen einander verändern, und man wird dessen ungeachtet die wahre Wirkung finden, wenn man nur für H die wahren Vertikalabstände der Schwerpunktspositionen am Ende und am Anfang der Erhebung in Rechnung bringt. Auch ist klar, dass diese Regel nicht nur für die Erhebung eines einzelnen Körpers, sondern auch für ein System von Körpern gilt, die während der Erhebung ihr Volumen, ihre Eorm und ihre relative Lage gegen einander ändern. Das Produkt G H drückt jedoch immer nur diejenige Wirkung aus, welche der Erhebung des Gewichts entspricht, und die Wirkungen, welche einer Volumsänderung oder Formänderung der Körper entsprechen, sind nicht mit inbegriffen.

41) *Horizontal-Transport von Lasten auf Schleifen und Wagen.* Wenn eine Schleife oder ein Schlitten, auf welchen eine Last gelegt ist, auf einer horizontalen Bahn fortgezogen werden soll, äussert sich ein Widerstand, welcher von der Reibung der Schleife auf der Bahn herrührt, und dieser Widerstand richtet sich theils nach der Beschaffenheit der Bahn, theils nach der Kraft, mit welcher die Bahn durch den belasteten Schlitten gedrückt wird. Für eine Bahn von bsetimmter Beschaffenheit ist jener Widerstand dem Druck gegen die Bahn proportional, ist also um so grösser, je grösser der Druck ist. Nennt man nun S das Gewicht des Schlittens, L das Gewicht der darauf gelegten Last und f den Widerstand, welcher durch die Einheit des Druckes verursacht wird, so ist f (L + S) der Widerstand, den der belastete Schlitten hervorbringt. Um nun den Schlitten durch eine Wegstrecke s fortzuziehen, ist eine Wirkungsgrösse W erforderlich und man hat

$$W = f (L + S) . s.$$

Die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um eine Last L vermittelst eines Wagens auf einer horizontalen Bahn fortzuschaffen, kann auf ähnliche Weise berechnet werden. Auch bei einem Wagen ist der gesammte Widerstand wenigstens nahe dem Druck gegen die Bahn proportional, nur sind die Ursachen dieses Widerstandes von anderer Art, als bei dem Schlitten. Bei der Fortbewegung eines Wagens ist nämlich der sogenannte Wälzungswiderstand und die Reibung an den Axen der Räder zu überwältigen. Der erstere dieser Widerstände entsteht durch das Einsinken der Räder in die Bahn, was zur Folge hat, dass das Material der Bahn durch die Räder niedergedrückt werden muss. Wenn nun die Bahn nicht elastisch ist, so erhebt sie sich nicht wiederum, wenn sie einmal niedergedrückt worden ist, und dadurch entsteht ein Widerstand, der für eine Bahn von bestimmter Beschaffenheit und für einen Wagen von bestimmter Bauart dem Druck der Räder gegen die Bahn proportional ist. Heisst man nun f_1 den Widerstand, der durch die Einheit des Druckes verursacht wird, W das Gewicht des Wagens, L das Gewicht der darauf gelegten Last, so ist der Wälzungswiderstand:

$$f_1 \, (L + W)$$

Der Reibungswiderstand an den Axen der Räder richtet sich nach dem Gewicht, das auf die Axen drückt. Nennt man R das Gewicht der Räder, so ist für einen gewöhnlichen Wagen, bei welchem sich die Räder auf den Axen drehen, W — R + L das Gewicht, das auf die Axen drückt. Nennt man f_2 die Zugkraft, welche am Wagen ziehen muss, um die Reibung zu überwinden, welche durch die Einheit des Druckes gegen die Axen verursacht wird, so muss man, um die ganze Axenreibung zu überwinden, mit einer Kraft f_2 (W — R + L) an dem Wagen anziehen. Der Totalwiderstand, welcher der Fortbewegung des Wagens entgegenwirkt, ist nun:

$$f_1 \, (L + W) + f_2 \, (W - R + L)$$

und wenn die Bewegung durch eine Wegstrecke von der Länge s erfolgen soll, so ist hierzu eine Wirkung W nothwendig, die durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$W = s \, \{f_1 \, (L + W) + f_2 (W - R + L)\}$$

Die Gewichte als solche erfordern zu ihrer Fortbewegung keine Wirkung, weil bei der Bewegung auf einer horizontalen Bahn die Richtung der Bewegung jedes Punktes horizontal, demnach senkrecht ist auf die vertikale Richtung der Gewichte.

42) *Verdichtung eines Gases ohne Aenderung der Temperatur.* Wenn ein Gas langsam und nicht zu stark verdichtet wird, reagirt es während dieses Vorganges mit einer Kraft, die durch das bekannte

Mariott'sche Gesetz wenigstens sehr annähernd bestimmt werden kann. Es sei A B C C Fig. (5) Tafel (III.) ein cylindrisches Gefäss, in welchem sich irgend eine Gasart befindet, und das mit einem genau passenden Kolben K versehen ist.

Nennt man l die anfängliche Entfernung des Kolbens vom Boden des Gefässes, Ω dessen Querschnitt, $\mathfrak{A}$ den äusseren Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit und auch den anfänglichen Druck des Gases auf die Flächeneinheit, y den Druck des Gases auf die Flächeneinheit, nachdem der Kolben um x gegen den Boden des Gefässes hin bewegt worden ist, so hat man, da nach dem Mariott'schen Gesetze die inneren Pressungen $\mathfrak{A}$ und y sich verhalten wie die Dichten

$$\mathfrak{A} : y = \Omega\,(l - x) : \Omega\, l = l - x : l$$

demnach:

$$y = \mathfrak{A}\,\frac{l}{l - x}$$

Der Druck des Gases auf die Kolbenfläche ist demnach:

$$\Omega\, y = \Omega\, \mathfrak{A}\, \frac{l}{l - x}$$

Da nun der äussere atmosphärische Druck auf den Kolben bereits einen Druck $\mathfrak{A}\,\Omega$ ausübt, so ist, um dem inneren Drucke y das Gleichgewicht zu halten, nur noch eine auf den Kolben wirkende Kraft $\Omega\, y - \Omega\, \mathfrak{A}$ $= \Omega\,(y - \mathfrak{A}) = \Omega \left(\mathfrak{A}\,\frac{l}{l - x} - \mathfrak{A}\right) = \Omega\,\mathfrak{A} \left(\frac{l}{l - x} - 1\right)$ nothwendig. Dies ist also der Druck, der, während die Zusammenpressung erfolgt, auf den Kolben wirken muss, wenn derselbe einen Weg x zurückgelegt hat. Da dieser Druck veränderlich ist, so muss man, um die Wirkung zu berechnen, welche der Zusammenpressung entspricht, eine der Methoden anwenden, die in Nr. (36) angegeben wurden. Wir wollen zunächst die am schnellsten zum Ziele führende Methode der Integralrechnung anwenden. Wenn der Kolben, nachdem er bereits einen Weg x zurückgelegt hat, noch um d x fortschreitet, entwickelt der auf den Kolben wirkende Druck $\Omega\,\mathfrak{A} \left(\frac{l}{l - x} - 1\right)$ eine Wirkung gleich $\Omega\,\mathfrak{A} \left(\frac{l}{l - x} - 1\right) d\,x$; die ganze Wirkung W, welche erforderlich ist, um das Gas so stark zusammen zu pressen, dass zuletzt der Kolben nunmehr noch um $l - l_1$ vom Boden des Gefässes entfernt ist, ist demnach

$$W = \int_{x = 0}^{x = l - l_1} \Omega\,\mathfrak{A} \left(\frac{l}{l - x} - 1\right) d\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und hieraus findet man

$$W = \Omega\,\mathfrak{A}\,l \left\{ \text{lognat.}\ \frac{l}{l_1} - 1 + \frac{l_1}{l} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es ist aber Ω l das ursprüngliche Volumen des Gases. Bezeichnet man dasselbe mit V, setzt also

$$V = \Omega\,l$$

so wird:

$$W = \mathfrak{A}\,V \left\{ \text{lognat.}\ \frac{l}{l_1} - 1 + \frac{l_1}{l} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Wirkung, welche die Verdichtung eines Gases erfordert, ist demnach dem ursprünglichen Volumen des Gases proportional, und richtet sich natürlich noch nach dem Grad $\frac{l}{l_1}$ der Verdichtung.

Wäre hinter dem Kolben ein leerer Raum, so müsste die den Kolben treibende Kraft gleich Ω y sein, nachdem dieselbe den Weg x zurückgelegt hat, und man findet dann für die Wirkung folgenden Werth:

$$W = \mathfrak{A}\ V\ \text{lognat.}\ \frac{l}{l_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn die anfängliche Pressung des Gases dem atmosphärischen Drucke nicht gleich ist, sondern einen andern Werth, z. B. $\mathfrak{B}$ hat, findet man:

a) wenn hinter dem Kolben der atmosphärische Druck wirkt

$$W = V \left\{ \mathfrak{B}\ \text{lognat.}\ \frac{l}{l_1} - \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) \mathfrak{A} \right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

b) wenn hinter dem Kolben ein leerer Raum ist:

$$W = \mathfrak{B}\ V\ \text{lognat.}\ \frac{l}{l_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dehnt sich das Gas, nachdem es comprimirt wurde, wiederum aus, bis es in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, so entwickelt es dabei eine Wirkungsgrösse, welche genau so gross ist, als die, welche zum Zusammenpressen verwendet wurde. Wenn daher eine in einem Gefäss eingeschlossene Gasmenge einer periodisch wiederkehrenden Verdichtung und Verdünnung unterworfen ist, so wird dabei im Ganzen genommen keine Wirkung erschöpft, weil während der Ausdehnung wieder gerade so viel an Wirkung gewonnen wird, als während der Zusammenpressung aufgewendet werden musste.

Wenn es irgend ein Zweck verlangt, dass in jeder Sekunde ein gewisses Gasvolumen V comprimirt werde, so wäre hierzu in jeder Sekunde ein Effekt E erforderlich, gleich dem oben gefundenen Werthe von W.

43) *Ausdehnung eines stabförmigen Körpers.* Die Kraft, welche an einem Stab ziehen muss, um denselben mehr und mehr auszudehnen, ist, der Erfahrung gemäss, dem Querschnitt des Stabes und der Längenänderung direkt und der ursprünglichen Länge des Stabes verkehrt proportional; sodann aber richtet sich diese Kraft auch nach der Natur des Materials. Dieses Erfahrungsresultat ist jedoch nicht als ein allgemein giltiges Gesetz zu betrachten, denn es stimmt mit den Thatsachen nur bei schwachen Ausdehnungen überein. Vorläufig wollen wir es aber gelten lassen und unter dieser Voraussetzung die Wirkung berechnen, welche erforderlich ist, um einen Stab bis zu einem gewissen Grad auszudehnen.

Es sei Fig. 6 Tafel III.

l die ursprüngliche Länge des Stabes,

a der Querschnitt desselben,

$\varkappa$ die Aenderung, welche in seiner Länge eintritt, wenn an demselben ein Zug P ausgeübt wird,

ε ein von der Natur des Materials abhängiger Coeffizient.

Dies vorausgesetzt, hat man nach der oben angeführten Erfahrung

$$P = \varepsilon \frac{a\,\varkappa}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Aus diesem Ausdruck ersieht man, dass ε die Kraft ist, welche an einem Stab, dessen Querschnitt $a = 1$ ist, ziehen müsste, um ihn um so viel auszudehnen, als seine ursprüngliche Länge beträgt, vorausgesetzt, dass dieses Ausdehnungsgesetz auf so starke Ausdehnungen anwendbar wäre. Es ist nämlich für $a = 1$, $\varkappa = l$, $P = \varepsilon$.

Ist A B Fig. (6) die ursprüngliche Länge des Stabs und wird derselbe von B bis C ausgedehnt, so wächst dabei die ausdehnende Kraft proportional mit der Ausdehnung. Trägt man die jeder Ausdehnung entsprechende Kraft als Ordinate auf, macht also für $BD = \varkappa$, $ED = P = \frac{a\,\varkappa}{l}$, so bilden die Endpunkte sämmtlicher Ordinaten eine gerade Linie B E F und der Flächeninhalt des Dreiecks B F C bestimmt die Wirkungsgrösse, welche einer Ausdehnung $=$ B C entspricht. Setzt man nun die ganze Ausdehnung $BC = \lambda$ und die entsprechende Kraft $FC = K$, so ist die Wirkung $W = \frac{1}{2} \lambda K$, es ist aber $K = \varepsilon \frac{a\,\lambda}{l}$ demnach findet man

$$W = \frac{1}{2}\, \varepsilon\, \frac{a\lambda^2}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

oder auch, wenn man λ statt K eliminirt:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{K}{a}\right)^2}{\varepsilon} l a.$$

Es ist aber l a das ursprüngliche Volumen des Stabes, setzt man dieses $= V$, so hat man auch:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{K}{a}\right)^2}{\varepsilon} V. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Quotient $\left(\frac{K}{a}\right)$ ist die Kraft, mit welcher jede Quadrateinheit des Querschnitts gespannt wird; heisst man diese p so ist auch

$$W = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\varepsilon} V. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Es ist demnach die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen Stab so weit auszudehnen, bis die Spannung in der Flächeneinheit des Querschnitts $= p$ wird, dem Quadrat dieser Spannung und dem ursprünglichen Volumen des Stabes direkt, dagegen dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional.

Wird ein Stab so stark ausgedehnt, bis er abreisst, so ist p für den Augenblick des Abreissens gleich der absoluten Festigkeit des Materials, und wenn man sich erlaubt, das durch die Gleichung (1) ausgesprochene Ausdehnungsgesetz bis zu dem Moment des Reissens gelten zu lassen, so gibt die Gleichung (4), wenn man in dieselbe für p die absolute Festigkeit des Materials substituirt, die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen Stab so weit auszudehnen, bis er abreisst. Diese Wirkung ist nun dem Quadrat der absoluten Festigkeit und dem Volumen des Stabes direkt aber dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional.

Zwei aus dem gleichen Material bestehende Stäbe erfordern demnach zum Abreissen einerlei Wirkung, wenn ihr Volumen gleich gross sind.

Der Quotient $\frac{p^2}{\varepsilon}$ ist für solche Stoffe am grössten, welche eine grosse Festigkeit besitzen und gleichzeitig sehr dehnbar sind. Dieser Quotient ist, wenn man alle Dimensionen in Centimetern und die Kraft in Kilogrammen, mithin die Wirkung in Kilogramm-Centimetern ausdrückt, für

Holz (Eichen)	4·3
Gusseisen	1·7
Schmiedeisen	7·2
bester Stahl	40
Kanonen-Metall	10
Leder	100.

Hieraus sieht man, dass sich die Stoffe hinsichtlich der Wirkungen die erforderlich sind, um sie bis zum Abreissen auszudehnen, ganz anders verhalten, als wenn man sie nach ihrer absoluten Festigkeit beurtheilt. Von den hier angeführten Stoffen leistet Gusseisen am wenigsten, Kanonenmetall mehr als Schmiedeisen, am meisten aber leistet das Leder, nämlich $2\frac{1}{2}$ Mal so viel als Stahl. Das Sprichwort „eine gute Haut" ist mithin gerettet.

44) ***Biegung eines Stabes.*** Das eine Ende eines Stabes sei befestigt, auf das andere Ende wirke ein Druck und bringe eine Biegung hervor.

Es sei Fig. 7 Tafel III. $x = CB$ die Senkung, welche am freien Ende des Stabes eintritt, wenn daselbst ein Druck K ausgeübt wird, der mit den inneren Spannungen und Pressungen ins Gleichgewicht tritt, $l = AB$ die ursprüngliche Länge des Stabes, ε der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht, $\mathfrak{B}\,E$ die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, welche in dem Querschnitt bei A vorkommen, bezogen auf den Schwerpunkt dieses Querschnittes. Dabei bedeutet $\mathfrak{B}$ die auf die Einheit des Querschnittes bezogene Spannung, welche in dem Punkte a stattfindet, und E eine gewisse Funktion von den Querschnittsabmessungen des Stabes. Die Werthe von E für die verschiedenen Querschnittsformen findet man auf Tafel V. in meinen Resultaten zusammen gestellt. Endlich sei $z = Aa$ die Tiefe des Schwerpunktes A, des Querschnittes ab, unten der Punkt a.

Dies vorausgesetzt findet man nach bekannten statischen Gesetzen, wenn man auch hier das in vorhergehender Nummer ausgesprochene empirische Ausdehnungsgesetz gelten lässt:

$$K\,l = \mathfrak{B}\,E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{3}\,\frac{K\,l^3}{\varepsilon\,E\,z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da hier wiederum x proportional mit K wächst, so findet man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu biegen, bis sich das freie Ende um x gesenkt hat, durch:

$$W = \frac{1}{2}\,x\,K$$

vorausgesetzt, dass die Biegung so langsam vor sich geht, dass in jedem Augenblick die biegende Kraft mit den inneren Spannungen und Pressungen ins Gleichgewicht treten kann. Eliminirt man x, so findet man

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{K^2}{\varepsilon}\,\frac{l^3}{E\,z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und wenn man auch noch K eliminirt:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ganz den gleichen Ausdruck findet man auch in dem Fall, wenn der Stab mit den Enden auf Unterstützungen liegt, und wenn die biegende Kraft in irgend einem Punkt zwischen den Unterstützungen wirkt.

Für einen parallelepipedischen Stab, dessen Höhe h und Breite b ist, findet man: $E = \frac{1}{6}\, l\, h^2$ und $z = \frac{1}{2}\, h$ und dann wird:

$$W = \frac{1}{18} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei V das Volumen des Stabes bezeichnet.

Für einen runden oder einen elyptischen Stab ist $E = \frac{\pi}{32}\, b\, h^2$, $z = \frac{1}{2}\, h$, wenn h die Höhe und b die Breite der Elypse bedeutet, und dann findet man:

$$W = \frac{1}{24} \frac{\mathfrak{B}^2}{E} V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Für einen Stab, dessen Querschnitt ein Dreieck ist, findet man:

$$W = \frac{1}{12} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hieraus sieht man also, dass die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck, eine Elypse oder ein Dreieck ist, so stark zu biegen, bis die auf ein Quadratmeter bezogene stärkste Spannung der Fasern gleich $\mathfrak{B}$ wird, dem Quadrat dieser Spannung und dem Volumen des Stabs direkt und dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional ist. Also auch hier, wie bei der Ausdehnung eines Stabes richtet sich die Wirkungsgrösse nicht nach einzelnen Dimensionen des Stabes, sondern nur nach dem Volumen desselben und ferner noch nach dem Quotienten $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$.

Wird ein Stab so stark gebogen, bis er bricht, und nimmt man an, dass das früher aufgefundene Biegungsgesetz bis zum Augenblick des Bruches angewendet werden kann, so gebe der Ausdruck für **W**, wenn man in denselben für $\mathfrak{B}$ den Brechungscoeffizienten setzt, die Wirkungsgrössen, welche dem Abbrechen eines Stabes entsprechen.

Drückt man alle Dimensionen in Centimetern, die Kräfte in Kilogrammen, die Wirkungsgrösse in Kilogramm-Centimetern aus, so sind die Werthe von $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$

für Eichenholz	4
„ Gusseisen	9
„ Schmiedeisen (bestes) . . .	20
„ Messing	8

Aehnliche Resultate findet man auch für das Verwinden von cylindrischen oder quadratischen Stäben. (Resultate für den Maschinenbau, Seite 32 bis 35.)

45) *Wirkung zweier Atome bei Aenderung ihrer Entfernung.* Wenn durch was immer für Ursachen die relative Lage und Entfernung der Atome geändert wird, entwickeln die Attraktiv- und Repulsivkräfte, mit welchen die Atome begabt sind, gewisse Wirkungen und Gegenwirkungen, deren Kenntniss sowohl für rein wissenschaftliche, als auch für praktitche Zwecke von bedeutender Wichtigkeit ist.

Wir wollen nun die Wirkung, die entwickelt wird, wenn die Entfernung zweier mit Repulsivkraft begabter Atome wächst, in folgenden drei Fällen berechnen:

a) Wenn eines der beiden Atome seinen Ort nicht ändert, das andere dagegen in der geraden Verbindungslinie ihrer ursprünglichen Position fortschreitet.

b) Wenn sich beide Atome in der geraden Linie ihrer anfänglichen Positionen bewegen.

c) Wenn die beiden Atome ihre Orte wie immer ändern.

Es seien für alle drei dieser Fälle r_0, r, r_1 die Entfernungen der Atome am Anfange in irgend einem Augenblick während der Bewegung und am Ende der Einwirkung, R die Intensität der Repulsivkraft, wenn die Entfernung gleich r ist.

Für den Fall (a) sei Fig. 8 Taf. III. A das unbewegliche Atom, B die Anfangs- und B_1 die Endposition des beweglichen Atoms, also $B\,B_1$ der Weg, durch welchen die Repulsivkraft mit veränderlicher Intensität thätig ist, b und b_1 die Positionen des beweglichen Atoms nach Verlauf der Zeiten t und $t + dt$. $\overline{AB} = r_0$, $A\,b = r$, $\overline{b\,b_1} = dr$, $A\,B_1 = r_1$. Während die Bewegung durch den unendlich kleinen Weg $b\,b_1 = dr$ stattfindet, darf man die Intensität R der Repulsivkraft als constant betrachten; dann aber ist die Wirkung, welche während dieses Wegelements entwickelt wird: $R\,dr$ und folglich ist die totale Wirkung W, die der Bewegung von B bis B_1 entspricht:

$$W = \int_{r=r_0}^{r=r_1} R\,dr$$

In dem zweiten der genannten Fälle, wenn nämlich beide Atome nach gerader Linie fortschreiten, seien Fig. 9 Taf. III. die Positionen der beiden Atome: am Anfang der Bewegung A und B, am Ende der Einwirkung A_1 und B_1, nach Verlauf einer Zeit a und b, endlich nach Verlauf einer Zeit $t + dt$, a_1 und b_1. Hier ist $\overline{A\,B} = r_0$ $\overline{A_1\,B_1} = r_1$, $\overline{a\,b} = r$ $\overline{a\,a_1} + \overline{b\,b_1} = dr$.

Während des unendlich kleinen Zeitelements d t darf man die Intensität R der Repulsivkraft als constant annehmen, dann sind offenbar $R\,\overline{a\,a_1}$ und $R\,\overline{b\,b_1}$ die Wirkungen, welche entwickelt werden, während die Atome im Zeitelement d t durch $\overline{a\,a_1}$ und $\overline{b\,b_1}$ getrieben werden. Die Summe dieser beiden Wirkungen ist demnach $R\,\overline{a\,a_1} + R\,\overline{b\,b_1} = R\,(\overline{a\,a_1} + \overline{b\,b_1}) = R\,d\,r$ und die totale Wirkung, welche entwickelt wird, während die Atome aus der Position A und B in die Position A_1 B_1 getrieben werden, ist demnach:

$$W = \int_{r=r_0}^{r=r_1} R\,d\,r$$

Betrachten wir endlich den dritten Fall, wenn die Atome, während sie sich entfernen, beliebige Wege verfolgen. Fig. (10) Tafel III.

Es seien wiederum die Positionen der Atome: am Anfang die Einwirkung A und B; am Ende die Einwirkung A_1, B_1; nach Verlauf einer Zeit t, a und b; nach Verlauf einer Zeit t + d t, a_1 und b_1. $AB = r_0$ $A_1 B_1 = r_1$, $a\,b = r$, $\overline{a_1\,b_1} - \overline{a\,b} = d\,r$.

Fällt man von a_1 und b_1 die Perpentikel $a_1\,\alpha$ und $b_1\,\beta$ auf die Richtung der Kraft R, so sind $a\,\alpha$ und $b\,\beta$ die Projektionen der von dem Atom im Zeitelement d t wirklich beschriebenen Wege auf der Richtung der Kraft R. Die Repulsivkraft R, mit welcher b auf a einwirkt, schreitet demnach im Zeitelement d t um $\overline{a\,\alpha}$, und die Repulsivkraft, mit welcher a auf b einwirkt, schreitet in dem gleichen Zeitelement um $\overline{b\,\beta}$ vorwärts. Die Wirkungsgrössen, welche dabei entwickelt werden, sind demnach $R\,\overline{a\,\alpha}$ und $R\,\overline{b\,\beta}$ und die Summe beider wird: $R\,\overline{a\,\alpha} + R\,\overline{b\,\beta} = R\,(\overline{a\,\alpha} + \overline{b\,\beta})$. Nun ist aber $\overline{a\,\alpha} + \overline{b\,\beta} = a_1\,b_1 - a\,b = d\,r$. Die totale Wirkung, welche im Zeitelement d t entwickelt wird, ist demnach R d r und die totale Wirkung, welche der Positionsänderung aus A B in A_1 B_1 entspricht

$$W = \int_{r=r_0}^{r=r_1} R\,d\,r$$

Wir wollen nun den allgemeinen Fall betrachten, wenn R innerhalb der Bewegungsgrenzen fortwährend anziehend oder fortwährend abstossend oder endlich abwechselnd anziehend und abstossend wirkt, und wenn ferner die Entfernung der Atome während der Bewegung immer fort wächst oder immer fort abnimmt oder endlich abwechselnd zu- und abnimmt.

Nimmt man R positiv, wenn die Atome sich abstossen, und negativ, wenn sie sich anziehen; nimmt man ferner d r positiv, wenn in irgend einem Zeitaugenblick eine Zunahme, dagegen negativ, wenn eine Abnahme der Entfernung der Atome eintritt: so ist R d r positiv, wenn die relative Bewegung der Atome nach der Richtung der Kraft R statt findet, dagegen negativ, wenn die relative Bewegung nach einer Richtung erfolgt, welche jener von R entgegengesetzt ist. Im erstern Fall (wenn R d r positiv ausfällt) entsteht aber eine Wirkung und im zweiten Fall, wenn R d r negativ ausfällt, eine Gegenwirkung. Die Zeichen stimmen daher mit der Natur der Sache überein Um nun die wahre Wirkung, welche durch die Thätigkeit der Kräfte entsteht, mit welcher die Atome auf einander wirken, unter allen Umständen richtig zu berechnen, muss man zunäcst das Integral

$$\int R\,d\,r$$

berechnen, und dann kommt es nur darauf an, dass es in den richtigen Grenzen genommen wird. Nennt man r_1 die grössere, r_0 die kleinere der beiden Entfernungen, in welchen sich die Atome am Anfang und am Ende der Einwirkung befinden, so dass also $r_1 - r_0$ den numerischen Werth der Länge angibt, um welche sich die Atome genähert oder entfernt haben, so ist r_1 die obere und r_0 die untere Gränze des Integrals, und man hat unter diesen Voraussetzungen ganz allgemein

$$W = \int_{r_0}^{r_1} R\,d\,r$$

Wir können nun über die Wirkungen zweier Atome, wenn sie ihre Entfernung ändern, die folgenden, sehr wichtigen Sätze aussprechen:

1) Diese Wirkung ist gänzlich unabhängig von der Länge der Wege, welche die Atome zurücklegen, und von den Gestalten der Bahnen, welche sie beschreiben, und richtet sich nur allein nach der Intensität ihrer Anziehung oder Abstossung, und nach der Aenderung $r_1 - r_0$ ihrer Entfernung, die während der Einwirkung der Kraft eingetreten ist.

2) Die Wirkung, welche einer beliebigen Ortsveränderung zweier Atome entspricht, ist eben so gross, wie in dem Fall, wenn das eine der beiden Atome seinen Ort nicht ändert, und das andere Atom dagegen seine Entfernung von dem erstern um so viel ändert, wie in dem Fall einer wirklichen Ortsveränderung beider Atome.

3) Die Wirkung, welche bei einer beliebigen Ortsveränderung zweier Atome entsteht, ist ferner eben so gross, als in dem Fall, wenn die beiden Atome in der geraden Linie, welche ihre ursprünglichen Orte verbindet, sich um so viel genähert oder entfernt hätten, als bei der beliebigen Ortsveränderung beider Atome geschehen ist.

4) Die Wirkung, welche einer Ortsveränderung zweier Atome entspricht, ist gleich Null: a) wenn die Atome, während sie sich wie immer bewegen, ihre

Entfernung in keinem Augenblick verändern: b) wenn die Entfernung der Atome am Ende der Wirkung eben so gross ist, als am Anfang derselben; c) wenn jedes der beiden Atome am Ende der Wirkung wiederum an den Ort zurückkehrt, an welchem es sich am Aufang der Einwirkung befand.

5) Wenn also ein aus Atomen bestehender Körper in Bewegung ist, und wenn dabei die Atome ihre relative Lage gegeneinander gar nicht ändern, so ist die Gesammtwirkung, welche dabei die Attraktiv- und Repulsivkräfte entwickeln, absolut gleich Null.

6) Wird ein Körper verdichtet, und erfolgt hierauf wiederum eine Ausdehnung, durch welche alle Atome wiederum in die Lage zurückkehren, in welcher sie sich am Anfang der Verdichtung befanden, so ist die totale Wirkung, welche diesem ganzen Prozess entspricht, gleich Null.

7) Wenn die Atome eines Körpers ihre relative Lage gegen einander wie immer verändern, sodann aber wiederum in ihre ursprünglich relative Lage zurückkehren, so ist die totale Wirkung, welche diesem Prozess entsprisht, gleich Null.

Die Wahrheit dieser Sätze ist leicht zu begreifen, wenn man bedenkt, dass nur allein bei Entfernungsänderungen Wirkungen oder Gegenwirkungen entwickelt werden, und dass, wenn zwei Atome ihre Entfernungen ändern, dann aber wiederum in ihre ursprüngliche Entfernungen zurückkehren, Wirkungen und Gegenwirkungen von gleicher Grösse entwickelt werden. Entfernt sich z. B. das Atom und wird dabei eine Wirkung entwickelt, so ensteht während des Zurückkehrens eine eben so grosse Gegenwirkung.

Von den lebendigen Kräften.

46) *Wirkungsgrösse zur Erzeugung einer Geschwindigkeit in einer Masse.* Wenn eine Masse aus dem ruhenden Zustande in einen bewegten Zustand versetzt werden soll, muss auf dieselbe eine Kraft durch längere Zeit, und mithin auch durch einen gewissen Weg treibend einwirken; es ist demnach zur Hervorbringung einer gewissen Geschwindigkeit in einer Masse eine gewisse Wirkungsgrösse nothwendig, welche wir nun bestimmen wollen.

Betrachten wir zunächst den Fall, wenn eine Kraft mit unveränderlicher Intensität und stets nach der Richtung wirkt, in der die Bewegung erfolgt. Nennt man K die Kraft, M die Masse des Körpers, G das Gewicht desselben an einem Orte, für welchen die Geschwindigkeitsänderung in jeder Sekunde beim freien Fall g beträgt, V die Geschwindigkeit, welche nach Verlauf einer Zeit T eintritt, endlich S den Weg, der während der Zeit T zurückgelegt wird, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} V = g\,\dfrac{K}{G}\,T \\ S = \frac{1}{2}\,V\,T, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

aus welchen durch Elimination von T

$$K\,S = \frac{G}{2g} V^2$$

folgt. Es ist aber $\frac{G}{2g} = M$, und folglich hat man

$$K\,S = M\,V^2$$

Nun ist aber offenbar K S (das Produkt aus dem constanten Druck in den Weg, durch welchen derselbe thätig war) die Wirkungsgrösse, welche die Kraft entwickelte, bis die Geschwindigkeit V eintrat. Diese Wirkungsgrösse ist demnach für eine constante Kraft gleich dem Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Geschwindigkeit, die am Ende der Einwirkung der Kraft vorhanden ist. Dieses Produkt nennt man aus einem Grunde, der später erklärt werden soll, die lebendige Kraft. Wenn wir diese Benennung beibehalten, so können wir sagen, dass die Wirkungsgrösse, welche eine constante Kraft entwickeln muss, um in einer Masse M eine gewisse Geschwindigkeit hervorzubringen, durch die lebendige Kraft $M\,V^2$ gemessen werden kann.

Zu diesem Resultat kommt man auch durch folgende Schlüsse. Es ist klar, dass die Wirkungsgrösse, welche eine constante Kraft entwickeln muss, um in einer Masse M eine Geschwindigkeit V hervorzubringen, eben so gross ist, als die Wirkungsgrösse, welche die Schwere entwickelt, wenn eine Masse M frei herabfällt, bis sie eine Geschwindigkeit V erlangt. Nun ist aber das Gewicht eines Körpers, dessen Masse M gleich 2g M und die Höhe, durch welche ein Körper fallen muss, um eine Geschwindigkeit V zu erlangen, gleich $\frac{V^2}{2g}$, folglich muss die Kraft 2g M, mit welcher die Erde den Körper anzieht, durch einen Weg $\frac{V^2}{2g}$ wirken, um in demselben die Geschwindigkeit V hervorzubringen. Die Wirkungsgrösse, welche dieser Thätigkeit entspricht, ist demnach:

$$2g\,M \times \frac{V^2}{2g} = M\,V^2$$

was zu beweisen wäre.

Betrachten wir nun ferner den Fall, wenn die Kraft K veränderlich ist; dann haben wir statt der Gleichungen (1) die Beziehungen:

$$d\,V = g\,\frac{K}{G}\,dt$$

$$d\,S = V\,dt$$

und wenn man aus denselben dt eliminirt:

$$K\,d\,S = \frac{G}{g}\,V\,d\,V$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt:

$$\int K\,d\,S = \frac{G}{2\,g}\,V^2$$

oder weil $\frac{G}{2g} = M$ ist:

$$\int K\,d\,S = M\,V^2$$

Nun ist aber $\int K\,d\,S$ die Wirkungsgrösse, welche der Thätigkeit der veränderlichen Kraft entspricht; es wird demnach auch die Wirkungsgrösse, welche eine veränderliche Kraft entwickeln muss, um einer Masse M eine gewisse Geschwindigkeit V zu ertheilen, durch die lebendige Kraft $M\,V^2$ gemessen, welche der Geschwindigkeit entspricht.

47) *Wirkungsfähigkeit einer in Bewegung befindlichen Masse.* Wenn auf eine Masse, die eine gewisse Geschwindigkeit besitzt, von einem gewissen Zeitaugenblick an ein Widerstand oder eine constante Kraft ihrer Bewegung entgegen wirkt, so entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung, die so lange fortdauert, bis die Geschwindigkeit der Masse ganz erschöpft ist. Dabei wird eine gewisse Wirkung entwickelt, indem die Gegenkraft oder der Widerstand durch einen gewissen Weg überwältigt wird, und diese Wirkungsgrösse wollen wir nun berechnen. Nennt man M die Masse und G das Gewicht des Körpers, V die Geschwindigkeit, welche am Anfange der Einwirkung der Kraft vorhanden war, S den Weg, durch welchen der Widerstand K überwunden wird, bis die Geschwindigkeit V erschöpft ist, endlich T die Zeit, binnen welcher dies geschieht. Da in jeder Sekunde eine Geschwindigkeitsabnahme gleich $g\,\frac{K}{G}$ eintritt, so ist die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit T nur noch $V - g\,\frac{K}{G}\,T$. Da aber nach Verlauf der Zeit T die Geschwindigkeit ganz aufhört, so hat man:

$$o = V - g\,\frac{K}{G}\,T$$

Nun ist aber noch: $S = \frac{1}{2} V T$; eliminirt man T, so findet man:

$$K S = \frac{G}{2g} V^2 = M V^2$$

d. h. die Wirkungsgrösse, welche eine Masse M entwickelt, wenn sie auf einen Widerstand so lange einwirkt, bis ihre Geschwindigkeit erschöpft ist, wird durch die lebendige Kraft $M V^2$ gemessen, welche am Anfang in ihr enthalten war. Es ist demnach die lebendige Kraft, welche eine Masse besitzt, das Maass der Wirkungsfähigkeit, welche sie zu entwickeln vermag, wenn sie auf einen Widerstand so lange einwirkt, bis ihre Geschwindigkeit aufhört. Zu dem gleichen Resultat kommt man auch, wenn der Widerstand oder die Gegenkraft mit veränderlicher Intensität wirkt.

48) *Wirkungsgrössen für Geschwindigkeitsänderungen.* Die Wirkungsgrösse, welche eine Kraft entwickeln muss, um einer Masse M eine Geschwindigkeit v zu ertheilen, ist $M v^2$; jene, welche erforderlich ist, um eine Geschwindigkeit V hervorzubringen, ist $M V^2$. Die Wirkungsgrösse, welche eine Kraft entwickeln muss, um in einer Masse M eine Geschwindigkeitsänderung $V - v$ hervorzubringen, ist demnach offenbar:

$$M V^2 - M v^2$$

Dies gilt sowohl für eine Zunahme, als auch für eine Abnahme der Geschwindigkeit, jedoch mit dem Unterschied, dass die Masse im erstern Falle eine Wirkungsgrösse $M V^2 - M v^2$ empfängt, im letztern Falle aber abgibt.

Der Aenderung einer Geschwindigkeit entspricht also unter allen Umständen eine Wirkungsgrösse, welche gleich ist dem Unterschiede zwischen der lebendigen Kraft, welche der grössern und der lebendigen Kraft, welche der kleinern von den beiden Geschwindigkeiten zukommt.

48) *Wichtigkeit des Begriffes von lebendiger Kraft.* Wenn eine Kraft auf eine Masse vorwärts treibend oder zurück drängend einwirkt, so ist der äussere Erfolg im erstern Falle eine Geschwindigkeitszunahme, im letztern Fall eine Geschwindigkeitsabnahme der Masse; der innere Erfolg besteht aber darin, dass die Masse Wirkungen im erstern Falle aufnimmt, im letztern Falle abgibt. Die Masse verhält sich also zu den Kräften gleichsam wie ein Gefäss zu einer Flüssigkeit. So wie das Gefäss Flüssigkeiten in sich aufnimmt und demselben dann seine eigene Form mittheilt, eben so nimmt eine Masse Wirkungen in sich auf und sie erscheinen dann in der Form von lebendiger Kraft; und gleich wie ein Gefäss nicht mehr Flüssigkeit abgeben kann, als es empfangen hat, eben so kann auch eine Masse keine grössere Wirkung abgeben, als sie in sich aufgenommen hat. Hierdurch spricht sich die reine passive Natur

der Masse ganz deutlich aus, indem sie aus sich selbst keine Thätigkeit zu erzeugen, dagegen aber Thätigkeiten, welche Kräfte entwickeln, in sich aufzunehmen und auch wiederum abzugeben vermag. Wird eine Masse durch eine Kraft getrieben, so nimmt sie die Wirkungen, welche dieselbe entwickelt, in sich auf; wird sodann die Kraft beseitigt und die Masse sich selbst, d. h. ihrer eigenen passiven Natur überlassen, so bewegt sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, conservirt oder erhält also in sich die empfangene Wirkung so lange, bis sie ihr durch irgend eine Gegenkraft entzogen wird, wodurch sie dann in den ruhigen Zustand zurückkehrt. Wenn man sich erlaubt, die Worte lebendig und todt in der weiteren Bedeutung zu gebrauchen, dass man Alles, was die Fähigkeit zu wirken, d. h. was eine Wirkungsfähigkeit in sich besitzt, lebendig und Alles, was eine solche Fähigkeit nicht besitzt, todt nennen darf, so kann man einen ruhenden Körper einen todten, einen in Bewegung befindlichen Körper einen lebendigen Körper nennen. Und da die Lebenskraft oder die lebendige Kraft eines belebten Körpers nach der Thätigkeit zu beurtheilen ist, die derselbe zu entwickeln vermag, so erscheint es sehr bezeichnend, dass man das Produkt aus einer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit, wodurch, wie wir gesehen haben, die in der Masse enthaltene Wirkungsfähigkeit gemessen wird, lebendige Kraft genannt hat.

Abgesehen von allen bildlichen Vorstellungen bedeutet die lebendige Kraft einer Masse einerseits die Wirkungsgrösse, welche erforderlich war, um sie in einen gewissen Bewegungszustand zu versetzen oder die Wirkungsgrösse, welche die Masse in sich aufgesammelt hat, während sie aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt wurde; andererseits wird durch die lebendige Kraft die Wirkungsfähigkeit ausgedrückt, welche eine Masse in sich besitzt, wenn sie sich in einem gewissen Bewegungszustand befindet.

Die Begriffe von lebendiger Kraft und von Wirkung einer Kraft sind nicht nur für die technische Mechanik von bedeutender Wichtigkeit, sondern sie sind es auch für das ganze Gebiet der erklärenden Naturwissenschaften. Einzig und allein durch diese Begriffe sind wahre, das innere Wesen der Erscheinungen berührende Erklärungen der Thatsachen möglich, indem alle Erscheinungen auf Wechselthätigkeiten der Körper und ihrer Theile beruhen, deren Grösse nur allein vermittelst der Begriffe von Wirkung und von lebendiger Kraft verstanden werden kann. Es scheint sogar, dass durch diese Begriffe die Mechanik mit der Physiologie in einen engeren Zusammenhang gebracht werden kann, denn es ist Thatsache, dass alle Einwirkungen auf unser Nervensystem nach lebendigen Kräften zu beurtheilen sind.

Die Intensität aller Empfindungen richtet sich theils nach der spezifischen »Reizbarkeit“ des Nervensystems eines Individuums, theils nach der lebendigen Kraft, mit welcher auf die Nervensubstanz eingewirkt wird. Für ein bestimmtes Individuum ist die Intensität der Empfindung des Schalles der lebendigen Kraft des schwingenden Lufttheilchens, die Intensität der Wärme und Lichtempfindung der lebendigen Kraft des schwingenden Aetheratoms proportional, und diese Thatsachen scheinen sich auch sehr natürlich zu erklären, weil diese lebendigen Kräfte die Wirkungen ausdrücken, durch welche die Nervensubstanz „gereizt« wird.

Vorläufig mögen diese Bemerkungen über die Bedeutung der lebendigen Kraft und über die Wichtigkeit dieses Begriffs genügen; in der Folge, wenn von dem allgemeinen Prinzip der Thätigkeit der Kräfte die Rede sein wird, wird der ganze innere Prozess, auf welchem die Erscheinungen in der materiellen Natur beruhen, noch deutlicher hervortreten.

Die folgenden Beispiele über die Berechnung der lebendigen Kräfte der Massen werden geeignet sein, um sich mit der Bedeutung und mit dem Begriff vertraut zu machen.

Uebungen in der Anwendung der Begriffe: Wirkung und lebendige Kraft.

50) *Körpererhebung mit Geschwindigkeit.* Wenn ein Körper mit unendlich kleiner Geschwindigkeit oder in der Weise erhoben wird, dass er zwar während der Erhebung beliebige Geschwindigkeitszustände durchläuft, jedoch am Ende der Erhebung ohne Geschwindigkeit ankommt, so entspricht diesen Ortsveränderungen eine Wirkungsgrösse, welche durch das Produkt aus dem Gewicht des Körpers in die Erhebungshöhe zu messen ist. Anders verhält es sich, wenn ein Körper in dem Moment, in welchem er durch Erhebung eine gewisse Höhe erreicht hat, eine gewisse Geschwindigkeit besitzt. In diesem Fall ist die ganze Wirkung, welche die erhebende Kraft entwickelt, gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Körpers in die Erhebungshöhe, mehr der Wirkungsgrösse, welche erforderlich war, um der Masse des Körpers die Geschwindigkeit zu ertheilen, welche sie besitzt.

Nennt man G das Gewicht des Körpers, H die Höhe, bis zu welcher die Kraft auf den Körper gewirkt hat, V die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in der Höhe H ankommt, so ist die Wirkung W, um deren Bestimmung es sich handelt:

$$W = G\,H + \frac{G}{2g} V^2$$

Setzt man $\frac{V^2}{2g} = H_1$, so bedeutet H_1 die Höhe, welche der Geschwindigkeit V entspricht, und dann wird:

$$W = G(H + H_1)$$

Diese Wirkung ist also eben so gross, wie wenn die Kraft den Körper auf die Höhe $H + H_1$ gehoben hätte, ohne demselben Geschwindigkeit zu ertheilen.

Bei manchen Erhebungen ist H_1 sehr klein gegen H, so dass man dann annähernd $W = GH$ setzen darf. Dies ist z. B der Fall, wenn Baumaterialien vermittelst einer Winde auf ein hohes Baugerüst gehoben werden. Die Höhe des Gerüstes beträgt z. B. 20 Meter; die Geschwindigkeit der Erhebung ist dabei ungefähr 1 Meter daher $H_1 = \frac{1^2}{2 \times 9{\cdot}81} = 0{\cdot}05$ Meter oder ungefähr 5 Centimeter, was gegen 20 Meter sehr klein ist.

In anderen Fällen dagegen ist H sehr klein gegen H_1, so dass man annähernd nehmen darf $W = G H_1$. Bei dem Austreiben des Wassers aus einer Feuerlöschspritze ist H_1 die Höhe der Mündung des Gussrohrs über dem Spiegel des Wassers im Spritzenkasten ungefähr gleich 1 Meter, hingegen V 24 bis 30 Meter; demnach $H_1 = \frac{V^2}{2g}$ 30 bis 45 Meter beträgt.

Der mittlere Druck, welcher gegen den Körper, wenn er in vertikaler Richtung gehoben würde, ausgeübt werden müsste, um auf der Höhe H mit einer Geschwindigkeit V anzukommen, ist: gleich $\frac{W}{H}$, d. h. gleich $G\frac{H + H_1}{H} = G\left(1 + \frac{H_1}{H}\right)$ und so gross ist auch der constante Druck, mit welchem man durch die vertikale Höhe H auf den Körper aufwärts drücken müsste, wenn derselbe die Höhe H mit einer Geschwindigkeit V erreichen soll. Dieser mittlere oder constante Druck ist also um $G\frac{H_1}{H}$ grösser, als das Gewicht des Körpers.

51) *Bewegungen auf Eisenbahnen.* Die Kraft, mit welcher man auf einer gerade fortlaufenden und horizontal liegenden Eisenbahn an dem vordersten Wagen einer Reihe aneinanderhängender Wagen anziehen müsste, um die verschiedenen Widerstände zu überwinden, welche durch mannigfaltige Ursachen, und insbesondere durch den Wälzungswiderstand und durch die Axenreibung entstehen, ist annähernd dem totalen Gewicht des ganzen Trains mit Einschluss der auf den Wägen befindlichen Lasten proportional, und beträgt gewöhnlich $\frac{1}{200}$ von die-

sem totalen Gewicht. Wenn man es mit G bezeichnet, so kann man also die zur Ueberwindung aller Widerstände erforderliche Zugkraft durch $\frac{G}{m}$ ausdrücken, wobei m als eine constante Zahl zu betrachten ist, deren Werth für die Mehrzahl der Eisenbahnen gleich 200 gesetzt werden kann.

Ohne die Einrichtung der Lokomotive genauer zu kennen, wird man wohl leicht einsehen, dass der Dampf gegen die Kolben mit einer gewissen Kraft pressen muss, wenn der Widerstand $\frac{G}{m}$ überwunden werden soll. Diesen Druck des Dampfes gegen die Kolben wollen wir P nennen.

Nun ist klar, dass eine Bewegung des Wagenzugs nicht beginnen kann, so lange der Druck des Dampfes gegen die Kolben kleiner oder höchstens gleich, sondern erst dann, wenn dieser Druck grösser als P und z. B. $P + p$ geworden ist; denn wenn die Bewegung beginnen soll, so muss nicht nur den Widerständen das Gleichgewicht gehalten werden, sondern es muss auch zum Antreiben der Massen Kraft vorhanden sein. Nehmen wir nun an, dass durch allmählige Ansammlung von Dampf ein Ueberfluss p von Kraft eintrete, und durch längere Zeit vorhanden bleibe, so werden die Massen des Wagenzuges aus dem Zustande der Ruhe in einen Zustand der Bewegung mit wachsender Geschwindigkeit übergehen, und die Geschwindigkeit wird so lange fort und fort zunehmen müssen, als eine freie Kraft p vorhanden ist, die keinen Widerstand zu überwinden hat, denn die Bewegung muss dann offenbar so erfolgen, wie wenn weder die Kraft P, noch der Widerstand $\frac{G}{m}$, sondern einzig und allein nur eine träge Masse $\frac{G}{2g}$ und eine Kraft p vorhanden wäre.

Wenn ein Ueberschuss p an Kraft durch längere Zeit, die wir mit t bezeeichnen wollen, gewirkt hat, wird die ganze Masse $\frac{G}{2g}$ des Wagenzuges eine gewisse Geschwindigkeit V, mithin auch eine gewisse lebendige Kraft $\frac{G}{2g} V^2$ besitzen, die so gross ist, als die Wirkungsgrösse, die die Kraft p in der Zeit t entwickelt hat. Während der Zeit t wird ein gewisser Weg S zurückgelegt; es ist also der Widerstand $\frac{G}{m}$ während der Zeit t durch diesen Weg S überwunden worden, und dazu ist eine Wirkungsgrösse $\frac{G}{m} S$ erforderlich, die durch den Druck P des Dampfes gegen den Kolben produzirt werden muss.

Die totale Wirkung des Dampfes während der Zeit t ist demnach gleich der Wirkung, welche der Ueberwindung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ durch den Weg S entspricht, + der Wirkung, die erforderlich ist, um der Masse $\frac{G}{2g}$ des Wagenzuges die Geschwindigkeit V zu ertheilen. Diese totale Wirkung ist demnach:

$$\frac{G}{m} S + \frac{G}{2g} V^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nehmen wir nun ferner an, dass am Ende der Zeit t, aus was immer für einem Grunde, der Ueberschuss p des Druckes ganz aufhört, dass also der Dampfdruck mit dem Widerstand in's Gleichgewicht tritt, so ist weiter kein Grund zu einer Geschwindigkeitsänderung vorhanden; der Wagenzug wird daher mit der Geschwindigkeit V, die am Ende der Zeit t eintrat, fortlaufen, während gleichzeitig der Widerstand $\frac{G}{m}$ durch den Dampfdruck überwältigt wird. Dauert dieser Zustand während einer gewissen Zeit t_1 fort, und legt dabei der Wagenzug einen Weg S_1 zurück, so entwickelt der Dampf eine Wirkungsgrösse, die der Ueberwindung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ durch den Weg S_1 entspricht, die demnach gleich $\frac{G}{m} S_1$ ist.

Nehmen wir nun endlich an, dass nach Verlauf der Zeit t_1 die Kommunikation zwischen dem Kessel und den Dampfcylindern ganz aufgehoben werde. Von diesem Augenblick an werden die Massen durch keine Kraft vorwärts getrieben, dagegen aber wirkt der Widerstand $\frac{G}{m}$ so lange der Bewegung entgegen, bis allmählig die Geschwindigkeit und die lebendige Kraft verschwindet; dies wird nach Verlauf einer gewissen Zeit t_2 geschehen, während welcher der Wagenzug einen Weg S_2 zurücklegt, und es ist offenbar die Wirkungsgrösse $\frac{G}{m} S_2$, welche der Ueberwindung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ durch den Weg S_2 entspricht, gleich der lebendigen Kraft $\frac{G}{2g} V^2$, welche am Anfang der Zeit t_2 in den Massen enthalten war; man hat demnach:

$$\frac{G}{m} S_2 = \frac{G}{2g} V^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hieraus ergibt sich zunächst der Weg S_2, den der Wagenzug noch zurücklegt, wenn einmal die Maschinen ausser Thätigkeit gesetzt worden sind. Dieser Weg ist

$$S_2 = m \frac{V^2}{2g}$$

also m Mal so gross, als die Geschwindigkeitshöhe, welche der Geschwindigkeit V entspricht, die im Moment der Abstellung der Maschine vorhanden war. Ist z. B. $V = 10^m$ und $m = 200$, so wird $S_2 = 200 \frac{\overline{10}^2}{2 \times 9 \cdot 81}$ oder auch gleich 1000 Meter.

Die Summe der Wirkungen, welche der Dampf während der ganzen Fahrt, also während der Zeit $t + t_1 + t_2$ entwickelt hat, ist:

$$\frac{G}{m} S + \frac{G}{2g} V^2 + \frac{G}{m} S_1 + 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Summe der Wirkungen, welche während der gleichen Zeit die Ueberwältigung des Widerstandes $\frac{G}{m}$ erfordert, ist:

$$\frac{G}{m} S + \frac{G}{m} S_1 + \frac{G}{m} S_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Berücksichtigt man die Gleichung (2) so sieht man, dass diese Summen (3) und (4) gleiche Werthe haben. Es ist also die Wirkung des Dampfes während der ganzen Fahrt genau so gross, als die Gegenwirkung des Widerstandes, d. h. es wird durch die Massen eine Wirkung weder produzirt noch consumirt.

Der mittlere Werth der Kraft, mit welcher der Wagenzug während der Zeit t getrieben wurde, ist:

$$\frac{\frac{G}{m} S + \frac{G}{2g} V^2}{S} = \frac{G}{m} + G \frac{\frac{V^2}{2g}}{S}$$

und die Zeit T, durch welche diese mittlere Kraft wirken müsste, bis die Geschwindigkeit V eintritt, ist

$$T = \frac{2S}{V}.$$

52) ***Wirkung des Pulvergases auf die Kugel und auf das Geschütz.*** Wenn man die Bewegung einer Kugel, welche durch entzündetes Pulver aus einem Kanonenrohr getrieben wird, und die gleichzeitig stattfindende Rückbewegung des Geschützes, mit Berücksichtigung aller Umstände, die dabei Einfluss haben, bestimmen will, so hat man es mit einer sehr schwierigen Aufgabe zu thun. Erlaubt man sich aber, einige Nebenumstände zu vernachlässigen, und dann noch mehrere allerdings nur annähernd richtige Annahmen zu machen, so kann man mit Hilfe der

allgemeinen Prinzipien der Mechanik ohne Schwierigkeitt mehrere Resultate finden, die über die Wirkung des Pulvers auf die Kugel und auf das Geschütz Aufschluss geben. Vernachlässigt man nämlich 1) den Luftwiderstand, 2) die Reibung der Kugel an der inneren Fläche des Rohres, 3) die Trägheit der Pulvermasse, 4) die Vibrationen, welche in der Kugel und im Geschütz entstehen, und nimmt man an, 1) dass die Pressung im Innern des Rohres in jedem einzelnen Augenblick nach allen Richtungen einerlei Intensität habe, 2) dass der Rückbewegung des Geschützes kein Hinderniss entgegen wirke, so ist man zu folgender Schlussweise berechtiget.

Wie auch das Gesetz beschaffen sein mag, nach welchem sich die Pressung im Innern des Rohres mit der Zeit ändert, so ist sie doch, der Voraussetzung gemäss, in einem bestimmten Zeitmoment nach allen Richtungen gleich gross, es werden demnach in jedem einzelnen Zeitmoment gegen die Kugel nach vorwärts und gegen das Geschütz nach rückwärts gleich grosse Pressungen ausgeübt. Nennt man nun M die Masse der Kugel, M_1 die Masse des Geschützes (Rohr sammt Gestelle), K die unbekannte Kraft, mit welcher in irgend einem Zeitmoment die Kugel nach vorwärts und das Geschütz zurückgedrückt wird, v v_1 die Geschwindigkeitsänderungen, welche die Kraft K in den Massen M und M_1 in einem sehr kleinen oder wenn man will unendlich kleinen Zeittheilchen t hervorbringt, so hat man nach dem Fundamentalgesetz der beschleunigten Bewegung

$$v = \frac{K}{2M} t$$

$$v_1 = \frac{K}{2 M_1} t.$$

Hieraus folgt, wenn man K t eliminirt:

$$M v = M_1 \ v_1$$

oder

$$V : v_1 = M_1 : M$$

das heisst die Geschwindigkeitsänderungen, welche in irgend einem unendlich kleinen Zeittheilchen eintreten, sind den Massen verkehrt proportional. Weil aber dieses Verhältniss für jedes Zeittheilchen gilt, so folgt daraus, dass sich auch die Geschwindigkeiten V und V_1, welche die Kugel und das Geschütz in dem Moment besitzen, wenn die Kugel das Rohr verlässt, verkehrt verhalten müssen, wie die Massen; man hat demnach auch

$$M V = M_1 V_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Es ist demnach die Geschwindigkeit, mit der das Geschütz zurückspringt, in dem Maase kleiner als die Geschwindigkeit der Kugel, als die Masse des Geschützes grösser ist, als jene der Kugel. Diese Massen verhalten sich in der Regel wie 1 : 300 und dann erhält die Kugel eine 300 Mal grössere Geschwindigkeit als das Geschütz.

Die Wirkung, welche die Kugel empfängt, ist $M V^2$, jene welche dem Geschütz mitgetheilt wird $M_1 V_1^2$; diese Wirkungen verhalten sich demnach wie $\frac{M V^2}{M_1 V_1^2}$, oder wenn man für V_1 aus (1) seinen Werth setzt, wie:

$$\frac{M V^2}{M_1 V_1^2} = \frac{M V^2}{M_1 V^2 \frac{M^2}{M_1^2}} = \frac{M_1}{M}$$

Die Wirkung, welche der Kugel mitgetheilt wird, ist demnach um so viel Mal grösser, als jene, welche das Geschütz empfängt, als die Masse des letzteren grösser ist als jene der Kugel.

Die Totalwirkung W, welche den beiden Massen M und M_1 mitgetheilt wird, ist:

$$W = M V^2 + M_1 V_1^2$$

oder auch wegen $V_1 = V \frac{M}{M_1}$

$$W = M V^2 \left(1 + \frac{M}{M_1}\right)$$

Für einen Vierundzwanzigpfünder ist das Gewicht der Kugel 12 Kilogramm, das Gewicht des Geschützes (Rohr sammt Gestelle) $12 \times 300 = 3600$ Kilogramm, die normale Pulverladung 4 Kilogramm, und die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel das Rohr verlässt, 500 Meter. Es ist demnach:

$$M = \frac{12}{2 \times 9{\cdot}81},\ V = 500,\ M_1 = \frac{12 \times 300}{2 \times 9{\cdot}81}$$

und es folgt nun:

1) die Wirkungsgrösse, welche der Kugel mitgetheilt wird oder die lebendige Kraft der Kugel $= \frac{12}{2 \times 9{\cdot}81}\, \overline{500}^2 = 152905$ Kilogramm-Meter;

2) die Geschwindigkeit, mit welcher das Geschütz zurück springt, $V_1 = V \frac{M}{M_1} = \frac{500}{300} = 1{\cdot}66$ Meter;

3) die lebendige Kraft, welche der Geschützmasse mitgetheilt wird: $M V^2 \frac{M}{M_1} = \frac{152905}{300} = 510$ Kilogramm-Meter;

4) die Totalwirkung, mit welcher das Pulver auf die Masse der Kugel und des Geschützes wirkt $152905 + 510 = 153415$ Kilogramm-Meter.

Die Kugel befindet sich bei einer Vierundzwanzigpfünder-Kanone ungefähr 2·75 Meter tief im Rohr, so lang ist also auch ungefähr der Weg, durch welchen das Pulvergas auf die Masse der Kugel einwirkt, bis dieselbe eine Geschwindigkeit V = 500 Meter erlangt; der mittlere Werth des Druckes, den das Pulvergas gegen die Kugel ausübt, ist demnach: $\frac{152905}{2 \cdot 75} = 55787$ Kilogramm, und da der Querschnitt des Rohres 176 Quadrat-Centimeter beträgt, ferner der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadrat-Centimeter 1·033 Kilogramm ist, so folgt daraus, dass die mittlere Spannkraft des Pulvergases $\frac{55787}{176 \times 1 \cdot 033} = 307$ Atmosphären geschätzt werden kann.

Die Zeit, welche die Kugel brauchte, um den Weg von 2·75 Meter zurückzulegen, wenn stets der mittlere Druck wirkte, folgt aus der Gleichung

$$V = g \frac{K}{G} t$$

wenn man in dieselbe setzt: $V = 500$, $g = 9 \cdot 81$ $G = 12.$ $K = 55787$ Man findet

$$t = \frac{V G}{g K} = \frac{500 \times 12}{9 \cdot 81 \times 55787} = \frac{1}{91}''$$

Die zerstörende Wirkung, welche man mit einem Vierundzwanzigpfünder-Geschütz hervorbringen könnte, wenn die Schüsse schnell auf einander folgten, würde ausserordentlich gross sein. Allein der Erfahrung zufolge erfordert die Reinigung, Ladung und Stellung des Geschützes bei gewandter Behandlung desselben für jeden Schuss einen Zeitaufwand von 5 Minuten oder von 300 Sekunden. Der mittlere Effekt oder die Wirkung, welche in jeder Sekunde hervorgebracht wird, ist demnach in Pferdekräften ausgedrückt nur $\frac{152905}{300 \times 75} = 6 \cdot 8$ Pferdekraft, also keineswegs so gross, als man für den ersten Augenblick glauben möchte.

(53) *Die Wasserkräfte.* Bekanntlich werden zum Betriebe der Maschinen sehr häufig die Wasserkräfte benützt, welche die Bäche und Flüsse in ihrem natürlichen Laufe darbieten.

Denkt man sich an einer bestimmten Stelle eines Baches oder Flusses einen Querschnitt senkrecht auf die Bewegungsrichtung des Wassers geführt, so wird durch denselben in jeder Sekunde eine gewisse Wassermenge mit einer gewissen Geschwindigkeit durchfliessen, und die in derselben enthaltene Wirkungsfähigkeit wird durch geeignete Einrichtungen zum Betrieb einer Maschine gebraucht werden können. Nennt man Q die Wassermenge, welche p 1'' durch jenen Querschnitt fliesst, V die

Geschwindigkeit des Wassers, so ist $\frac{1000\ Q}{2\ g}$ die Masse und $\frac{1000\ Q}{2\ g}\ V^2$ die lebendige Kraft oder die Wirkungsfähigkeit dieser Wassermasse. Ist z. B. $Q = 2{\cdot}5$ Kubikmeter und $V = 3$ Meter, so beträgt dieselbe $\frac{1000 \times 2{\cdot}5}{2 \times 9{\cdot}81}\ 3^2 = 1147$ Kilogramm-Meter oder $\frac{1147}{75} = 15{\cdot}3$ Pferdekraft. Gelingt es also auf irgend eine Weise, dem Wasser seine lebendige Kraft vollständig zu entziehen, so gewinnt man dadurch eine Thätigkeit, die jener von 15 Pferden ungefähr gleich kommt.

Wenn an einem Orte ein natürlicher Wasserfall von einer Höhe H vorhanden ist, so kann daselbst die Erde auf jedes Wassertheilchen durch die Höhe H anziehend wirken, d. h. die Anziehung der Erde kann an diesem Ort auf jedes Wassertheilchen eine Wirkung ausüben, die durch das Produkt aus dem Gewicht des Theilchens in der Sturzhöhe H zu messen ist. Wenn also in jeder Sekunde eine Wassermenge von Q Kubik-Metern niederstürzt, so wirkt in jeder Sekunde eine Kraft 1000 Q Kilogramm durch einen Weg H. Die Wirkung des Wassersturzes per 1'' oder der Effekt dieser Wasserkraft ist demnach 1000 Q H Kilogramm-Meter. Ist z. B. $H = 4$, $Q = 3{\cdot}4$ Kubik-Meter, so wird $1000\ Q\ H = 13600$ Kilogramm-Meter oder $\frac{13600}{75} = 181{\cdot}3$ Pferdekräfte.

54) *Bewegung zweier Massen durch wechselseitige Abstossung.* Werden zwei Körper, die sich mit einer Kraft abstossen, welche dem Produkt ihrer Massen und einer Funktion ihrer Entfernung proportional ist, in eine gewisse Entfernung von einander gestellt und dann sich selbst überlassen, so entfernen sie sich immer mehr und mehr von einander und die Bewegungen erfolgen in den Verlängerungen der geraden Linie, welche ihre anfänglichen Positionen verbindet.

Es seien M und M_1 die Massen der beiden Körper, r_0 ihre anfängliche und r ihre Entfernung, nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat, $M\ M_1\ f(r)$ die Repulsivkraft, mit welcher sich die Massen abstossen, wenn ihre Entfernung gleich r ist, V V_1 die absoluten Geschwindigkeiten der Massen und u ihre relative Geschwindigkeit zur Zeit t. Da die Kräfte, welche in einem bestimmten Zeitmoment auf beide Massen einwirken, gleich gross, nämlich gleich $M\ M_1\ f(r)$ sind, so müssen sich die Geschwindigkeitsänderungen, welche in einem bestimmten Zeitelement in den beiden Massen eintreten, umgekehrt wie die Massen verhalten, und da dies von jedem Zeitelement der Bewegung giltig ist, so müssen nothwendig auch die endlichen Geschwindigkeitsänderungen V und V_1, das heisst die Summe der sämmtlichen Geschwindigkeitsänderungen, die in der Zeit t vorkommen, den Massen verkehrt proportional sein; man hat daher

$$V : V_1 = M_1 : M$$

oder

$$M\,V = M_1\,V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Während der Zeit t entwickelt die Repulsivkraft $M\,M_1\,f(r)$ eine Gesammtwirkung, die nach Nr. (36) durch $\int M\,M_1\,f(r)\,dr = M\,M_1 \int f(r)\,dr$ ausgedrückt wird, und diese Wirkung wird während der Zeit t durch beide Massen aufgesammelt, indem dieselben die lebendigen Kräfte $M\,V^2$ und $M_1\,V_1{}^2$ erlangen; man hat daher

$$M\,M_1 \int f(r)\,dr = M\,V^2 + M_1\,V_1{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen (1) und (2) findet man leicht, wenn man dieselben in Bezug auf V und V_1 auflöst, folgende Ausdrucke:

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= \frac{M_1{}^2}{M+M_1}\int f(r)\,dr \\ V_1{}^2 &= \frac{M^2}{M+M_1}\int f(r)\,dr \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und hiermit sind also die absoluten Geschwindigkeiten der beiden Massen nach Verlauf der Zeit t bestimmt. Zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie sich zur Zeit t von einander entfernen, hat man:

$$u = V + V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder weil wegen (1) $\quad V_1 = V\,\frac{M}{M_1}$ ist.

$$u = V\left(1 + \frac{M}{M_1}\right) = V\,\frac{M + M_1}{M_1}$$

demnach $\quad u^2 = V^2\left(\frac{M + M_1}{M_1}\right)^2$

oder endlich, wenn man für V^2 den Werth einführt, welchen die erste der Gleichungen (3) darbietet,

$$u^2 = \left(M + M_1\right)\int f(r)\,dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wechselwirkung der Körper durch Stoss.

55) *Allgemeine Bemerkungen.* Begegnen sich zwei Körper und stimmen die Geschwindigkeiten und Richtungen ihrer Bewegungen nicht überein, so entsteht dadurch eine Erscheinung, welche man Stoss zu nennen pflegt und die im Wesentlichen darin besteht, dass die Bewegungszustände der Körper in einer oder in jeder Hinsicht fast plötzlich verändert werden.

Durch den Stoss zweier Körper kann bewirkt werden: 1) Geschwindigkeitsänderung der Massen; 2) Richtungsänderung ihrer Bewegung, 3) Vibration der Körpertheile gegen einander; 4) Ueberwindung ausserordentlich grosser Widerstände; 5) bleibende oder vergängliche Formänderungen der Körper; 6) Zerstörung eines Zusammenhanges von Körpern; 7) Zertheilung der Körper. In den meisten Fällen treten zwei oder mehrere dieser Wirkungen gleichzeitig auf.

Der Erfolg des Stosses zweier Körper hängt ab 1) von den Massen der Körper; 2) von der relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie zusammentreffen, und überhaupt von den gesammten Bewegungszuständen, in welchen sich die beiden Körper im Moment des Zusammentreffens befinden; 3) von der Form der Körper; 4) von ihrer relativen Lage gegen einander im Moment des Zusammentreffens; 5) von dem inneren Molekularbau der Körper, und insbesondere von der Elastizitätsbeschaffenheit der Körper.

Das Problem des Stosses genau und allgemein gefasst, so besteht es darin, für irgend einen beliebigen Zeitmoment nach erfolgtem Zusammentreffen der Körper den Ort und die Geschwindigheit eines jeden Atoms der Körper zu bestimmen, vorausgesetzt, dass diese beiden Elemente für jedes Atom vor dem Stoss bekannt sind. In dieser Allgemeinheit ist aber die Lösung dieses Problems mit Schwierigkeiten verbunden, die selbst mit den raffinirtesten Mitteln der Analysis nicht bewältigt werden können. Da es sich hier nur darum handelt, die wesentlichsten Grundlehren der Dynamik durch geeignete Anwendungen zur Anschauung zu bringen, so ist zu diesem Behufe die folgende, allerdings nur sehr rohe Behandlung des Stosses zweier Körper viel geeigneter, als eine genaue, bei welcher auf die Vibrationen, die durch den Stoss entstehen, Rücksicht genommen werden müsste.

56) *Gerader Stoss zweier Cylinder. Geschwindigkeiten nach dem Stosse.* Wir betrachten zwei cylindrische Körper, die sich in gerader Linie nach der Richtung ihrer Axen bewegen. Um uns die Sache zu erleichtern, wollen wir statt der wirklichen Körper, die so zu sagen aus einem innigen Gemenge von trägen und gleichzeitig elastischen Theilchen

bestehen, zwei ideale Körper denken, bei welchen die Trägheit von der Elastizität gesondert ist.

Es seien (Fig. 11 Taf. III.) A und B zwei träge cylindrische und unzusammendrückbare Massen, a b zwei massenlose elastische, also zusammendrückbare Federn, von denen die erstere mit dem stossenden Ende des Körpers A und die andere mit dem gestossenen Ende des Körpers B verbunden ist. Diese Federn, nehmen wir ferner an, sollen einer Zusammendrückung oder Ausdehnung genau so stark widerstehen, wie die wirklichen Körper, für welche wir diese idealen Körper substituiren.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass der Stoss bei diesen idealen Körpern ungefähr auf die gleiche Weise geschehen wird, wie bei den wirklichen Körpern, dass also die Resultate, welche sich aus der Behandlung des Stosses der ersteren ergeben werden, wenigstens annähernd auch für die letztern gelten werden. Der Unterschied zwischen dem Stoss der wahren und dem Stoss der idealen Körper besteht jedoch darin, dass bei jenen Vibrationen eintreten, bei diesen aber nicht.

Die Aufeinanderwirkung der Körper beginnt, so wie die Federn zusammentreffen. Von diesem Augenblick an werden sie comprimirt, indem der vorauseilende Körper B nicht so schnell ausweicht, als der andere A nachdringt. Der Elastizitätsgrad der Federn mag nun wie immer beschaffen sein, so wird die in irgend einem Augenblick zwischen denselben bestehende wechselseitige Pressung eben so stark vorwärts als zurückwirken, die beiden Massen A und B werden daher in jedem einzelnen Augenblick mit gleicher Kraft getrieben; es müssen demnach die Geschwindigkeitsänderungen, welche in irgend einem kleinen Zeittheilchen in den beiden Massen eintreten, den Massen verkehrt proportional sein, und folglich müssen sich auch die Geschwindigkeitsänderungen, welche während einer bestimmten endlichen Zeit in den Körpern hervorgebracht werden, verkehrt wie ihre Massen verhalten. Nennt man also v und v_1 die endlichen Geschwindigkeitsänderungen, welche während einer endlichen Zeit t in den Massen hervorgebracht werden, so muss sein:

$$v : v_1 = M_1 : M \quad \text{oder}.$$
$$v\,M = v_1\,M_1$$

Da die Geschwindigkeit von B stets zu- und jene von A stets abnimmt und anfänglich $V > V_1$ war, so muss nothwendig ein Moment eintreten, in welchem die Geschwindigkeit beider Massen gleich gross und z. B. C wird. Bis zu diesem Augenblick hin hat aber die Geschwindigkeit von B um $C - V_1$ zu- und die Geschwindigkeit von A um $V - C$ abgenommen, und weil auch auf diese Geschwindigkeitsänderungen das obige Gesetz (1) angewendet werden darf, so hat man:

$$M(V-C) = M_1(C-V_1)$$

und daraus folgt:

$$C = \frac{MV + M_1 V_1}{M + M_1}$$

In dem Augenblick, da die Geschwindigkeit der Körper gleich gross geworden ist, haben sie nur eine gemeinsame, aber keine relative Geschwindigkeit gegen einander. Die Massen können daher in diesem Augenblick kein Bestreben äussern, die Federn zu comprimiren, was also nun weiter geschehen wird, hängt von der Beschaffenheit der Federn ab, und in dieser Beziehung wollen wir zwei Fälle betrachten. Wir nehmen nämlich zuerst an, dass auch die Federn von dem Augenblick an, wo die Geschwindigkeit der Körper gleich gross geworden ist, gar kein Bestreben mehr äussern, in ihren ursprünglichen Zustand zurück zu kehren; sodann betrachten wir den Fall, wenn die Federn, nachdem die Geschwindigkeit der Körper gleich gross geworden ist, mit ungeschwächter Kraft in ihren ursprünglichen Zustand zurück zu kehren streben.

Im ersteren Fall, welcher annähernd dem Stoss unelastischer Körper entspricht, ist gar kein Grund zu einer weiteren Geschwindigkeitsänderung der Körper vorhanden, wenn einmal die Geschwindigkeit eines jeden derselben gleich C geworden ist. Der Stoss dauert demnach bei unelastischen Körpern so lange fort, bis sie beide eine gemeinsame Geschwindigkeit

$$C = \frac{MV + M_1 V_1}{M + M_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

erlangen, und mit dieser Geschwindigkeit bewegen sie sich dann nach dem Stosse gemeinschaftlich fort.

Wenn dagegen die Federn mit ungeschwächter Kraft in ihren ursprünglichen Zustand zurück zu kehren streben, wie es ungefähr bei vollkommen elastischen Körpern der Fall ist, so werden dieselben während der Wiederherstellung ihrer Formen neuerdings und mit den gleichen Intensitäten gegen die Massen drücken, wie während der Periode, in der sie zusammengedrückt wurden; es müssen demnach während der zweiten Periode eben so grosse Geschwindigkeitsänderungen eintreten, wie während der ersten.

Die Geschwindigkeit des Körpers B muss daher neuerdings um $C-V_1$ zu- und die des Körpers A um $V-C$ abnehmen. Ist aber dies geschehen, sind also die Federn wiederum in ihren ursprünglichen Zustand zurückgekehrt, so ist der ganze Prozess der Aufeinanderwirkung der Körper geschlossen; denn die Federn wirken nicht mehr, weil sie sich in ihrem natürlichen Zustande befinden, und die Massen können nun nicht mehr auf die Federn wirken, weil die Geschwindigkeit des voraus befindlichen Körpers B grösser ist, als jene des nachfolgenden; es muss demnach eine Trennung der Körper eintreten. Nennen wir nun W und W_1 die Geschwindigkeiten, welche die Körper nach erfolgtem Stoss besitzen, so ist offenbar:

$$W = V - 2\,(V - C)$$
$$W_1 = V_1 + 2\,(C - V_1)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} W &= 2\,C - V \\ W_1 &= 2\,C - V_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder wenn man den Werth von C aus (1) einführt und die geeigneten Reduktionen vornimmt:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{M\,V + M_1\,(2\,V_1 - V)}{M + M_1} \\ W_1 &= \frac{M_1\,V_1 + M\,(2\,V - V_1)}{M + M_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wir erlauben uns nun, die Gleichung (1) für unelastische und die Gleichungen (2) für elastische Körper gelten zu lassen, und wollen zunächst einige spezielle Fälle betrachten.

1) Ist die Masse M_1 des gestossenen Körpers ungemein, oder wenn man will, unendlich gross, so ist in der Gleichung (1) und (2) $M_1 = \infty$ zu setzen, und dann findet man:

a) für unelastische Körper $C = V_1$

b) für elastische Körper $\begin{cases} W = 2\,V_1 - V \\ W_1 = V_1 \end{cases}$

Wenn die grosse Masse M_1 vor dem Stoss in Ruhe war, so ist:

c) für unelastische Körper $C = 0$

d) für elastische Körper $\begin{cases} W = -\,V \\ W_1 = 0 \end{cases}$

Die Geschwindigkeit der grössern Masse M_1 ändert sich demnach in allen vier Fällen gar nicht. Die Geschwindigkeit der stossenden Masse wird im Falle (b): gleich o wenn $2\,V_1 = V$ und negativ, wenn $V > 2\,V_1$. Im Falle (d) wird diese Geschwindigkeit ebenfalls negativ.

2) Wenn die Massen M und M_1 gleich gross sind, findet man:

e) für unelastische Körper $C = \frac{V + V_1}{2}$

f) für elastische Körper $\begin{cases} W = V_1 \\ W_1 = V \end{cases}$

Sind also die Massen gleich gross, so ist die Geschwindigkeit nach dem Stoss (e), wenn die Körper unelastisch sind, gleich dem arithmetischen Mittel aus den Geschwindigkeiten vor dem Stoss, und wenn (f) die Körper elastisch sind, so tauschen sie die Geschwindigkeit, die sie vor dem Stosse hatten, während des Stosses aus, so dass jeder die Geschwindigkeit des andern annimmt.

3) Wenn der gestossene Körper vor dem Stoss in Ruhe war, ist zu setzen: $V_1 = o$ und dann wird:

g) für unelastische Körper $C = \frac{M}{M + M_1} V$

h) für elastische Körper $\begin{cases} W = V \frac{M - M_1}{M + M_1} \\ W_1 = V \frac{2 M}{M + M_1} \end{cases}$

4) Wenn die Bewegungsrichtungen der Körper vor dem Stoss einander entgegengesetzt sind, hat man in den Formeln eine oder die andere der Geschwindigkeiten V und V_1 negativ zu setzen. Nehmen wir die Richtung, nach der sich A bewegt, für die positive, so ist V_1 negativ zu setzen, und dann wird:

h) für unelastische Körper $C = \frac{M V - M_1 V_1}{M + M_1}$

i) für elastische Körper $\begin{cases} W = \frac{M V - M_1 (2 V_1 + V)}{M + M_1} \\ W_1 = \frac{M_1 V_1 + M (2 V + V_1)}{M + M_1} \end{cases}$

Vergleichen wir nun die lebendigen Kräfte, welche vor und nach dem Stosse in den Massen vorhanden sind. Es ist klar, dass die Summe der lebendigen Kräfte, die man nach dem Stosse in den lebendigen Massen antreffen wird, kleiner oder gleich jener sein wird, die vor dem Stosse vorhanden war; kleiner, wenn die Körper unelastisch, gleich, wenn sie elastisch sind. Denn die Federn, welche in beiden Fällen comprimirt werden, verbleiben im erstern Falle in diesem comprimirten Zustand, dehnen sich dagegen im letztern Falle wiederum aus. Die Wirkung, welche die Comprimirung der Federn erfordert, geht also verloren, wenn die Körper unelastisch sind, wird aber wiederum ersetzt, wenn jeder derselben elastisch ist. Das folgt auch aus den Gleichungen (1) und (2). Nennt man nämlich $\mathfrak{B}$ die Differenz zwischen der Summe der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoss, so hat man:

a) Wenn die Körper unelastisch sind:

$$\mathfrak{B} = M V^2 + M_1 V_1^2 - \{ M C^2 + M_1 C^2 \}$$

und wenn man für C seinen Werth aus (1) substituirt, und dann die geeigneten Reduktionen vornimmt:

$$\mathfrak{B} = \frac{M M_1}{M + M} (V_1 - V)^2$$

Dagegen findet man:

b) Wenn die Körper elastisch sind:

$$\mathfrak{B} = M V^2 + M_1 V_1^2 - M W^2 - M_1 W_1^2$$

Setzt man für W und W_1 die Werthe, welche die Gleichungen (2) darbieten, und reduzirt sodann in ganz gewöhnlicher Weise, so heben sich die einzelnen Glieder wechselseitig, und man findet in der That:

$$\mathfrak{B} = 0$$

Es ist aber klar, dass bei einem wirklichen Körper, wenn auch das Material, aus dem er besteht, noch so vollkommen elastisch ist, $\mathfrak{B}$ nicht gleich Null werden kann; denn während die Körper auf einander wirken, werden alle Atome erschüttert, es entstehen dadurch Vibrationen, und die Wirkungsgrösse, durch welche sie hervorgebracht werden, bleibt in den Körpern zurück, ist daher für die fortschreitende Bewegung der Masse verloren.

Ist die Masse M_1 des gestossenen Körpers sehr gross, und sind die Körper unelastisch, so ist der Verlust an lebendiger Kraft, der durch den Stoss entsteht:

$$\mathfrak{B} = M (V_1 - V)^2$$

d. h. es geht dann diejenige lebendige Kraft verloren, welche der Masse des stossenden Körpers und seiner relativen Geschwindigkeit gegen den stossenden Körper entspricht.

57) *Dauer des Stosses.* Alle Resultate, welche wir in Betreff des Stosses unelastischer und elastischer Körper gefunden haben, sind vom Elastizitätsmodulus der Federn, durch welche ihre Zusammendrückbarkeit gemessen wird, ganz unabhängig. Diese Resultate betreffen jedoch nur die Geschwindigkeiten und die lebendige Kraft nach dem Stosse, aber nicht die Dauer des Stosses und die Intensität der Pressung, welche während des Stosses zwischen den Körpern statt finden. Diese beiden Elemente hängen allerdings von dem Modulus der Elastizität ab. Sind die Federn sehr leicht zusammendrückbar, so verlängert dies die Dauer des Stosses, und verändert die mittlere Intensität der Pressung während des Stosses.

Um dies in einem Beispiel nachzuweisen, wollen wir annehmen, dass die Federn nach demselben Gesetz zusammendrückbar seien, welches wir in Nr (43) für Stäbe aufgestellt haben.

Nach Verlauf der Zeit t, die vom Augenblick des Zusammentreffens an gerechnet wird, seien x und x_1 die Zusammenpressungen der Federn a und b, K die zwischen den Federn herrschende Pressung, so dürfen wir, dem Erfahrungssatz zufolge, dass die zusammenpressende Kraft der Zusammenpressung proportional ist, setzen:

$$K = \lambda\, x = \lambda_1\, x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei λ und λ_1 die Kräfte bezeichnen, welche erforderlich sind, um die Federn um eine Längeneinheit zusammen zu pressen. Da wir annehmen, dass die Federn massenlos sind, so sind die Differenzialgleichungen der Bewegung der Massen A und B

$$\frac{d\,u}{d\,t} = -2\frac{K}{M},\ \frac{d\,u_1}{d\,t} = +2\frac{K}{M_1} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wobei $d\,u$ und $d\,u_1$ die Geschwindigkeitsänderungen bezeichnen, welche in dem auf t folgenden Zeitelement $d\,t$ in den beiden Massen eintreten.

Die Bedingung, dass sich die Federn während des Stosses mit ihren Enden stets berühren, ist, wie man sich leicht überzeugt

$$u_1 = u - \frac{d\,x}{d\,t} - \frac{d\,x_1}{d\,t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt nun die Lösung der Aufgabe. Setzt man in (2) für K seinen Werth $\lambda\,x$ und nimmt sodann die Differenz, so findet man:

$$\frac{d\,u_1}{d\,t} - \frac{d\,u}{d\,t} = 2\,\lambda\,x\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Aus (1) folgt $\lambda\,\frac{d\,x}{d\,t} = \lambda_1\,\frac{d\,x_1}{d\,t}$ und wenn man den hieraus folgenden Werth von $\frac{d\,x_1}{d\,t} = \frac{\lambda}{\lambda_1}\,\frac{d\,x}{d\,t}$ in (3) einführt:

$$u_1 - u = -\frac{d\,x}{d\,t}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$$

Differenzirt man diese Gleichungen nach t, so wird

$$\frac{d\,u_1}{d\,t} - \frac{d\,u}{d\,t} = -\frac{d\,x^2}{d\,t^2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und nun folgt aus 1 und 5

$$\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 2\,\lambda\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right)x = 0.$$

Setzt man der Körper wegen

$$\frac{2\,\lambda\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right)}{1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}} = 2\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{M\,M_1}\,\frac{M + M_1}{\lambda + \lambda_1} = m^2 \quad \ldots \quad (6)$$

so wird diese Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + m^2 x = o.$$

Das Integral derselben ist:

$$x = \mathfrak{A} \sin. m t + \mathfrak{B} \cos. m t$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Constanten der Integration bezeichnen, die nun auf folgende Art bestimmt werden. Für $t = o$ ist $x = o$, demnach $\mathfrak{B} = o$, also:

$$x = \mathfrak{A} \sin. m t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und weil wegen (1) $x_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1} x$ ist:

$$x_1 = \mathfrak{A} \frac{\lambda}{\lambda_1} \sin. m t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Differenziation nach t und nachherige Addition:

$$\frac{d x}{d t} + \frac{d x_1}{d t} = \mathfrak{A} m \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathrm{Cos.}\, m t$$

und wenn man diese Summe in (3) einführt, erhält man:

$$u_1 - u = - \mathfrak{A} m \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathrm{Cos.}\, m t.$$

Nun ist aber für $t = o$, $u = V$, $u_1 = V_1$, demnach

$$V_1 - V = - \mathfrak{A} m \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$$

folglich ergibt sich für die Constante $\mathfrak{A}$ der Werth:

$$\mathfrak{A} = \frac{V - V_1}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}$$

Die Werthe von x und x_1 werden nun:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{V - V_1}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \sin. m t \\ x_1 &= \frac{\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(V - V_1\right)}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \sin. m t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Führt man diesen Werth in die Gleichungen

$$\frac{d u}{d t} = - 2 \frac{\lambda}{M} x, \quad \frac{d u_1}{d t} = + \frac{2 \lambda}{M_1} x$$

ein, so findet man:

$$\frac{du}{dt} = -2\frac{\lambda}{M}\frac{V - V_{\prime}}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} \sin. m t$$

$$\frac{du_{\prime}}{dt} = + 2\frac{\lambda}{M_{\prime}}\frac{V - V_{\prime}}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} \sin. m t$$

und hieraus folgt durch Integration

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2\lambda}{M}\frac{V - V_{\prime}}{m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} \cos. m t + \text{Constant} \\ u_{\prime} &= -\frac{2\lambda}{M_{\prime}}\frac{V - V_{\prime}}{m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} \cos. m t + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (10)$$

Es ist aber für $t = o$, $u = V$, $u_{\prime} = V_{\prime}$
demnach:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{2\lambda}{M}\frac{V - V_{\prime}}{m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} + \text{Const.} \\ V_{\prime} &= -\frac{2\lambda}{M_{\prime}}\frac{V - V_{\prime}}{m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (11)$$

aus 10 und 11 folgt durch Subtraktion:

$$V - u = \frac{2\lambda}{M}\frac{V - V_{\prime}}{m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} (1 - \cos. m t).$$

$$u_{\prime} - V_{\prime} = \frac{2\lambda}{M_{\prime}}\frac{V - V_{\prime}}{m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right)} (1 - \cos. m t).$$

Nun ist aber wegen (6) $m^2\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_{\prime}}\right) = 2\lambda\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_{\prime}}\right)$
und somit findet man endlich:

$$\left.\begin{aligned} V - u &= \frac{M_{\prime}}{M + M_{\prime}}(V - V_{\prime})\left\{1 - \cos. m t\right\} \\ u_{\prime} - V_{\prime} &= \frac{M}{M + M_{\prime}}(V - V_{\prime})\left\{1 - \cos. m t\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

Die Compressionen x und $x_{\prime}$ der Federn erreichen ein Maximum, wenn zuerst sin. m t seinen grössten Werth erhält. Nennt man die Zeit, nach welcher dies eintritt $\triangle$, so muss sein: $m \triangle = \frac{\pi}{2}$ man hat demnach:

$$\triangle = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda \lambda_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

für $t = \triangle = \frac{\pi}{2} \frac{1}{m}$ wird aber $\cos. m t = o$. Setzt man in (12) $\cos. m t = o$, so findet man für u und u_1 gleiche Werthe, nämlich den Werth von C, den wir früher gefunden haben.

$$u = u_1 = C = \frac{M V + M V_1}{M + M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese grössten Zusammenpressungen sind, vermöge (9):

$$\left.\begin{array}{l} \text{für den Körper A) } \xi = \dfrac{V - V_1}{m\left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \\[2ex] \text{für den Körper B) } \xi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda_1} \dfrac{V - V_1}{m\left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Wenn sich die Federn wiederum ausdehnen können, so verschwinden die Zusammenpressungen, wenn $\sin. m t = o$, d. h. wenn $m t = \pi$ oder $t = \frac{\pi}{m} = 2 \triangle$ wird, und dann ist der Stoss zu Ende, weil wir annehmen, dass die Federenden nicht verbunden sind. Wir erhalten demnach für die Dauer des Stosses den Werth

$$\pi \sqrt{\frac{1}{2} \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda \lambda_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und wenn wir wiederum, wie es früher geschehen ist, durch W und W_1 die Geschwindigkeiten der Massen M und M_1 nach dem Stoss bezeichnen, so folgen diese Werthe von W und W_1, wenn in den Gleichungen (12) $m t = \pi$, mithin $\cos. m t = -1$ gesetzt wird. Man findet:

$$\left.\begin{array}{l} W = V - \dfrac{M_1}{M + M_1} (V - V_1) \\[2ex] W_1 = V_1 + \dfrac{M}{M + M_1} (V - V_1) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und diese Werthe stimmen vollkommen mit den früher gefundenen überein.

Der mittlere Werth des Druckes zwischen den Federn während des Stosses ist:

$$\frac{\int_0^\xi K\, d x}{\xi} = \frac{\int_0^\xi \lambda\, x\, d x}{\xi} = \frac{1}{2} \lambda \xi \quad .$$

oder wenn man für ξ aus (15) seinen Werth setzt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda (V - V_1)}{m\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)}$$

und wenn man auch für m seinen Werth aus (5_1) substituirt:

$$\frac{(V - V_1)}{2\sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}\right)}} \quad . \quad . \quad (18)$$

Aus (16) ersieht man, dass die Dauer des Stosses dann klein ist, wenn die Massen klein und die Federn schwer zusammendrückbar sind. Aus (18) folgt, dass die mittlere Pressung zwischen den Federn klein ausfällt, wenn die Massen klein und wenn die Federn leicht zusammendrückbar sind. Die Dauer des Stosses ist ferner unabhängig von der initialen Geschwindigkeit, wo hingegen die mittlere Pressung der Differenz der initialen Geschwindigkeit, oder allgemein ausgedrückt, der relativen Geschwindigkeit der Massen vor dem Stoss proportional ist.

58) *Nützliche und schädliche Wirkungen des Stosses.* Nützlich und schädlich bezieht sich auf Zwecke, die wir zu erzielen beabsichtigen. Eine Sache ist nützlich oder schädlich, je nachdem sie die Erreichung eines Zweckes befördert oder der Erreichung eines Zweckes hinderlich ist. Der Stoss ist in vielen Fällen sehr nützlich, in andern schädlich. Er ist nützlich, wenn es sich darum handelt, einen sehr bedeutenden Widerstand durch einen sehr kleinen Weg zu überwinden, oder wenn eine Körpertheilung hervorgebracht werden soll; der Stoss ist dagegen schädlich, wenn eine Wirkungsgrösse von einem Ort nach einem andern durch eine Körpergliederung übertragen werden soll, und zwar ohne merkliche Schwächung des ursprünglichen Werthes.

Wenn ein eiserner Nagel in ein Brett, oder wenn ein hölzerner Pfahl in die Erde eingetrieben werden soll, bedient man sich bekanntlich immer des Stosses. Wollte man einen Nagel in ein Brett hineindrücken, so wären hierzu nicht unbedeutende Vorkehrungen nothwendig, denn der Widerstand, welcher dabei überwunden werden muss, ist, bei einem etwas starken Nagel, schon so gross, dass ihn die unbewaffnete Hand nicht überwältigen kann. Einige mit der Hand geführte Hammerschläge führen dagegen ganz leicht zum Ziele, weil der Druck, welcher mit einem solchen Hammerschlag, wenn auch nur durch einen geringen Weg, hervorgebracht werden kann, sehr bedeutend ist. Das Eintreiben eines Pfahles in die Erde ohne Anwendung von Schlägen ist so zu sagen eine praktische Unmöglichkeit, denn der Widerstand, welcher dabei überwunden werden muss, ist ganz ausserordentlich gross. Wollte man einen Pfahl auf irgend eine Weise in die Erde hineindrücken, so würden dazu ganz riesenmässige Vorkehrungen und Veranstaltungen nothwendig werden; man müsste entweder auf den Pfahl eine Last legen, die ungefähr dem Gewicht eines Hausbaues gleich käme, oder man müsste, wenn man das Eintreiben vermittelst einer Presse bewerkstelligen wollte, diese Presse mit dem Erdboden zuerst so stark befestigen, wie es der Pfahl ist, wenn er einmal in der Erde steckt, dabei setzt man also voraus, dass das, was erst entstehen soll, bereits vorhanden sei. Die Wirkung aller Angriffswaffen, des Degens, des Säbels, der Gewehre und der grossen Geschütze beruhen sämmtlich auf dem Stoss. Der Stoss einer mit 500 Meter Geschwindigkeit einschlagenden Vierundzwanzigpfünder-Kanonenkugel hat eine ausserordentlich mächtige Wirkung.

Beispiele mannigfaltiger Art von der Nützlichkeit des Stosses finden sich bei der Bearbeitung starrer und fester Materialien, und insbesondere bei der Bearbeitung des Eisens; das Schmieden, Meisseln, Feilen etc. geschieht durch wiederholte Stösse, die gegen das Metall geführt werden. Das Billardspiel beruht ganz auf den Wirkungen des Stosses elastischer Körper. Die Ballbewegungen, welche ein gewandter Spieler auf einem genauen Billard hervorzubringen weiss, sind äusserst mannigfaltig und oft überraschend, insbesondere durch die Reinheit und Zierlichkeit, mit welcher sie erfolgen. Die Gesetze des Stosses elastischer Körper treten dabei mit einer Genauigkeit und Bestimmtheit hervor, dass dieses Spiel in der That für das richtige Verständniss der mannigfaltigen Massenwirkungen sehr belehrend ist

Vortreffliche Dienste leistet der Stoss, wenn ein starrer Körper getheilt werden soll. Das Zersprengen eines Steinblockes vermittelst mehrerer Eisenkeile, die in eine in den Stein gemeisselte, geradlinige Furche gesetzt, und dann mit mässig starken Schlägen angetrieben werden, erfordert eine ungemein kleine Wirkungsgrösse, wenn man sie mit jener vergleicht, die erforderlich wäre, um den Stein durch eine nur durch Druck wirkende Belastung zu zerbrechen. Dies erklärt sich dadurch, dass beim Zersprengen mit Keilen nur allein die Körpertheilchen, welche in der Sprungfläche liegen, erschüttert zu werden brauchen, um eine Trennung derselben zu bewirken, während die ganze übrige Masse des Steinblocks unverändert bleiben kann, wo hingegen, wenn ein Zerbrechen durch Belastung hervorgebracht werden soll, in allen Theilen der Steinmasse Ausdehnungen oder Zusammenpressungen hervorgebracht werden müssen, von denen nur diejenigen, welche in der Nähe der Brechungsebene stattfinden, zweckdienlich sind. Der Vortheil des Zersprengens beruht also darauf, dass eine gewisse lebendige Kraft gerade nur auf diejenigen Körpertheile wirksam gemacht wird, die von einander getrennt werden sollen, wo hingegen beim Zerbrechen durch Druck der ganze Körper unnöthiger Weise deformirt wird.

Um eine Trennung der Körpertheile durch Stoss zu bewirken, kommt es nicht allein auf die Grösse der lebendigen Kraft an, die in dem stossenden Körper im Moment des Stosses enthalten ist, sondern auch auf seine Geschwindigkeit. Es kommt nämlich Alles darauf an, dass eine gewisse lebendige Kraft mit solcher Schnelligkeit nach der Ebene, in der der Bruch erfolgen soll, durch den Körper gejagt werde, dass daselbst schon eine Trennung der Theile bewirkt wird, bevor in den übrigen Theilen des Körpers eine Veränderung eintreten kann, und dies kann nur durch einen Schnellschlag bewirkt werden, denn bei einem langsamen Massenschlag entsteht immer nur eine allgemeine Erschütterung in allen Theilen des Körpers, ohne irgend wo eine Heftigkeit zu erreichen, wie es die Trennung der Körpertheilchen erfordert. Wenn also die lebendigen Kräfte zweier Massen gleich gross sind, so folgt daraus noch nicht, dass sie unter allen Umständen gleich vortheilhafte Wirkungen hervorbringen werden, weil der Erfolg nicht blos von der Grösse der Wirkungen, sondern auch davon abhängt, dass sie an dem Ort thätig sei, wo es dem Zwecke entspricht. Zwei gleich schwere und gleich schnelle Kanonenkugeln vermögen wohl gleich viel zu leisten; wenn aber die eine derselben ihr Ziel trifft, die andere dagegen ihr Ziel verfehlt, so besteht in dem Erfolg ein wesentlicher Unterschied.

So wie der Stoss überall nützlich ist, wo es sich um Formänderungen oder Zertheilung und Zerstörung handelt, so ist derselbe im Gegentheil immer schädlich, wenn etwas erhalten werden soll. Der Stoss wirkt jederzeit zerstörend, nie erhaltend. Wir haben gesehen, dass bei dem Stosse der elastischen Körper die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stosse kleiner ist, als vor dem Stosse, wenn also eine aus unelastischen oder aus unvollkommen elastischen Körpern zusammengesetzte Masse eine Wirkung stossweise fortpflanzt, so geht immer ein Theil dieser Wirkung für die Fortbewegung der Masse verloren, und dadurch entsteht in zweifacher Hinsicht ein Verlust, indem die verlorne Wirkung ausserdem, dass sie für den Zweck nicht thätig sein kann, noch überdies auf Abnutzung und Zerstörung der Massen hinwirkt.

Wenn eine Maschine ohne Stoss thätig ist, erhält sich in derselben die lebendige Kraft der Masse, und es ist zu ihrem Fortgange nur diejenige Wirkung aufzuwenden, welche der Ueberwindung der Widerstände entspricht. Wirkt dagegen eine Maschine mit Stoss, so wird dadurch die lebendige Kraft der Massen fortwährend geschwächt, und die Massen müssen dann fort und fort angetrieben werden, wenn die Thätigkeit der Maschine gleichmässig fortdauern soll. Hieraus sieht man, wie wichtig es für die Verwendung der Betriebskräfte und auch für die Dauerhaftigkeit einer Maschine ist, dass ihre Bewegungen sanft und weich und ohne Stoss vor sich gehen.

59) *Schutzmittel gegen die Wirkungen des Stosses.* Es gibt im Allgemeinen zwei Mittel, durch welche man sich gegen die schädlichen Wirkungen des Stosses schützen kann, nämlich Massen und Elastizität. Versieht man einen Körper A, der mit andern Körpern B, C, D . . . zusammenhängt, mit einer grossen Masse M, so schützt diese den Körper B, C, D . . . gegen die Wirkungen der Stösse, welche auf den Körper A ausgeübt werden, denn die Masse M fängt dann so zu sagen die Wirkung des Stosses auf, und theilt die empfangene Wirkung nur mit geringer Geschwindigkeit den Körpern B, C, D . . . mit. Dieses Mittels bedienen sich unter andern die Schuhmacher, wenn sie während der Arbeit das Leder dicht klopfen wollen; sie legen einen schweren Stein auf das Knie und das Leder darauf. Sehr wichtig ist aber dieses Mittel für die Erhaltung der Maschinen, die durch Stoss wirken müssen, und man hat da in der Regel gerade den Theil, gegen welchen der Stoss erfolgt, massenhaft zu machen, um so andere Bestandtheile zu schützen. Das zweite, sehr wirksame Mittel, um sich gegen die schädlichen Wirkungen des Stosses zu schützen, besteht in der Anwendung von elastischen Körpern; denn wir haben gesehen, dass bei dem Stosse von elastischen Körpern keine lebendige Kraft verloren geht, und dass die während des Stosses zwischen den Körpern eintretende Pressung (Gleichung 18) verändert wird, wenn einer oder der andere oder wenn beide Körper nachgiebig elastisch sind. Dieses Mittel wird vorzugsweise mit Vortheil bei der Aufstellung und Fundamentirung der zur Bearbeitung des Eisens dienenden massenhaften Maschinen, und namentlich bei grossen Hammer- und Walzwerken angewendet. Bei den schweren Dampfhämmern, welche gegenwärtig in den grossen Eisenschmieden und Maschinenwerkstätten angewendet werden, wird ein Ambos, der ungefähr so schwer ist, als der Schlagblock, mit einem Grundwerk verbunden, das aus 5 bis 6 Schichten von übereinander gelegten starken eichenen Balken besteht, und das auf Quaderblöcken aufgeschichtet wird, die in den Fundamentgrund gelegt werden. Die Masse des Ambosblockes einerseits und die Elastizität dieser Holzmasse andererseits, verleihen dieser Aufstellung eine Solidität und Sicherheit, welche durch andere Mittel wohl nicht zu erreichen wäre.

Eine andere Anwendung der Elastizität als Schutzmittel gegen die Wirkungen der Stösse findet sich bei den Strassen- und Eisenbahnwägen. Der grösste Theil der Last eines Wagens, mit Einschluss der Nutzlast, um deren Fortschaffung es sich handelt, liegt bekanntlich auf Stahlfedern, und dadurch werden die Erschütterungen, die sonst eintreten müssten, bedeutend gemildert, und grösstentheils in Oscillationen umgewandelt. Die Vortheile, welche hier die Federn gewähren, sind von mannigfaltiger Art. 1) Zunächst wird der fortzuschaffende Gegenstand gegen Erschütterungen geschützt, die für Personen ganz unausstehlich wären, wenn sie nicht durch Federn so sehr gemildert würden. 2) Sodann können alle Theile der Wagen, und insbesondere die Räder und ihre Axen leicht gebaut werden. 3) Der Bau der Wagen und jener der Bahn wird dadurch bedeutend geschont. 4) Es wird dadurch auch die Zugkraft vermindert, weil sich vermittelst der Federn die lebendige Kraft der ganz enormen Masse eines Wagenzuges ziemlich gut erhält, so dass also, wenn einmal die Bewegung eingeleitet ist, während der Fahrt grösstentheils nur noch die Reibungswiderstände zu überwinden sind, wo hingegen, wenn keine Federn vorhanden wären, ein fortwährender Nachtrieb nothwendig wäre, um die lebendigen Kräfte, die in jedem Augenblick geschwächt würden, wiederum zu restauriren.

60) *Das Einrammen der Pfähle.* Das Einrammen der Pfähle geschieht bekanntlich durch schwere Blöcke von Eisen, die man von einer gewissen Höhe auf die Pfahlköpfe herabfallen lässt. Betrachtet man den Pfahl als einen unelastischen, aber zusammendrückbaren Körper, und vernachlässigt die Vibrationen, welche durch den Schlag sowohl im Block, als im Pfahl entstehen, so kann man die Wirkungen eines einzelnen Schlages auf folgende Weise berechnen.

Der Block besitzt in dem Moment, wenn er den Pfahl erreicht, eine gewisse lebendige Kraft, diese wird aber zunächst durch den Stoss geschwächt. Mit der noch übrig bleibenden lebendigen Kraft wirkt nun der Block auf den Pfahl, und comprimirt denselben so lange, bis die Pressung zwischen Pfahl und Block so gross geworden ist, als der Widerstand, den das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegensetzt. Ist dieser Moment eingetreten, so sinkt der Pfahl sammt dem Block in die Erde so lange ein, bis alle lebendige Kraft erschöpft ist, und während dies geschieht, findet weder eine Ausdehnung, noch eine Zusammenpressung des Pfahls statt. Während der Pfahl zusammengedrückt wird, so wie auch während er in die Erde einsinkt, entwickelt das Gewicht des Blockes eine gewisse Wirkung, welche in Verbindung mit der lebendigen Kraft, die nach dem Aufschlagen des Blockes noch vorhanden ist, theils das Compriniren, theils das Eindringen des Pfahls in die Erde hervorbringt.

Nennt man

Q das Gewicht des Rammblockes,

q das Gewicht des Pfahles,

h die Fallhöhe des Blockes,

a den Querschnitt des Pfahles,

ε den Modulus der Elastizität des Holzes, aus welchem der Pfahl besteht,

l die Länge des Pfahls,

s das Eindringen des Pfahls in die Erde durch den Schlag,

a R den Widerstand, den das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegen setzt,

so lassen sich die verschiedenen Wirkungen, welche bei einem Schlag vorkommen, auf folgende Weise berechnen:

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Block den Pfahl erreicht, ist $\sqrt{2\,g\,h}$, und dessen lebendige Kraft $\frac{Q}{2\,g}\left(\sqrt{2\,g\,h}\right)^2 = Q\,h$. Durch den Schlag geht eine lebendige Kraft verloren, welche nach Nr. 56 gleich $\frac{1}{2\,g}\;\frac{Q\,q}{Q+q}\left(\sqrt{2\,g\,h}\right)^2 = Q\,h\;\frac{q}{Q+q}$ ist. Nach dem Schlag ist also nur noch eine lebendige Kraft $Q\,h - Q\,h\frac{q}{Q+q} = Q\,h\,\frac{Q}{Q+g}$ vorhanden. Die Zusammendrückung, welche der Pfahl erleidet, ist nach dem Gesetz für die Zusammendrückung von Stäben $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ und die Wirkungsgrösse, welche diesem Vorgang entspricht, $\frac{1}{2}\;\frac{l\,R}{\varepsilon}\;a\,R = \frac{1}{2}\;\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}$. Man hat also nun:

1) Lebendige Kraft, welche in der Masse nach dem Schlag noch vorhanden ist . . . . $Q\,h\,\frac{Q}{Q+q}$

2) Wirkung, welche das Gewicht des Blockes entwickelt, während derselbe durch $\frac{l\,R}{\varepsilon} + s$ niedersinkt . . . . $Q\left(\frac{l\,R}{\varepsilon} + s\right)$

3) Wirkung, welche durch die Senkung des Schwerpunktes des Pfahles entsteht . . . . $\frac{1}{2}\;\frac{l\,R}{\varepsilon}\;q + s\,q$

4) Wirkung, welche durch die Zusammendrückung des Pfahles erschöpft wird . . . . $\frac{1}{2}\;\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}$

5) Wirkung, welche durch das Eindringen des Pfahles in das Erdreich erschöpft wird . . . . $a\,R\,s$

Da nun die drei ersten Wirkungen den zwei letzten gleich sein müssen, so hat man:

$$Q\,h\,\frac{Q}{Q+q} + Q\left(\frac{l\,R}{\varepsilon} + s\right) + \frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon}\,q + s\,q = \frac{1}{2}\,\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon} + a\,R\,s$$

und daraus folgt:

$$a\,R = a\left\{-\frac{s\,\varepsilon}{l} + \left(Q + \frac{1}{2}\,q\right)\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{2\,\varepsilon}{a\,l}\left[\frac{Q^2}{Q+q}h + (Q+q)\,s\right] + \left[\frac{s\,\varepsilon}{l} - \left(Q + \frac{1}{2}\,q\right)\frac{1}{a}\right]^2}\right\} \quad (1)$$

oder auch:

$$s = \frac{Q\,h\,\frac{Q}{Q+q} + Q\,\frac{l\,R}{\varepsilon} + q\,\frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\,\frac{a\,l}{\varepsilon}\,R^2}{a\,R - Q - q}$$

oder

$$s = \frac{Q\,h\,\frac{Q}{Q+q} + \frac{l\,R}{\varepsilon}\left(Q + \frac{1}{2}\,q - \frac{1}{2}\,a\,R\right)}{a\,R - Q - q} \quad (2)$$

Hat man beobachtet, um wie viel ein Pfahl durch einen Schlag in die Erde eindringt, so kann man vermittelst des Ausdruckes (1) den gesammten Widerstand berechnen, mit welchem das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegen wirkt, und dieser Werth von a R ist zugleich auch das Tragungsvermögen des Pfahles, d. h. es ist die grösste Last, welche der Pfahl, ohne in die Erde einzusinken, tragen kann.

Diese Gleichungen (1) und (2) haben jedoch nur dann Giltigkeit, wenn der Pfahl in der That eindringt, so wie auch noch in dem Falle, wenn zwar ein Eindringen nicht erfolgt, wenn jedoch der Pfahl so stark zusammengepresst wird, dass gerade in dem Moment, wenn die lebendige Kraft des Blockes erschöpft ist, die Zusammendrückung $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ beträgt. Wenn dagegen die lebendige Kraft des Blockes bereits erschöpft wird, nachdem die Zusammendrückung um eine Länge x, die kleiner als $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ ist, stattgefunden hat, so hat man für die Wirkungsgrösse, welche dieser Zusammendrückung entspricht: $\frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,x^2$, und dann ist zu setzen:

$$Q\,h\,\frac{Q}{Q+q} + Q\,(x+s) + q\left(\frac{1}{2}\,x + s\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,x^2$$

woraus folgt:

$$x = + \frac{1}{a\,\varepsilon}\left(Q + \frac{1}{2}q\right) +$$
$$\sqrt{Q\,h\frac{Q}{Q+g} + s\,(Q+q) + \left[\frac{1}{a\,\varepsilon}(Q + \frac{1}{2}q)\right]^2} \quad . (3)$$

Damit der Pfahl wirklich eindringt, muss die Gleichung (2) für s einen positiven Werth geben; es ist also die Bedingung, dass in der That ein Eindringen des Pfahls statt findet:

$$Q\,h.\frac{Q}{Q+q} + \frac{l\,R}{\varepsilon}\left(Q + \frac{1}{2}\,q\right) > \frac{1}{2}\,\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}$$

oder:

$$Q^2\left\{h + \frac{l\,R}{\varepsilon}\right\} - Q\left\{a\,R - 3\,q\right\}\frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon} > \frac{1}{2}\,\frac{l\,R}{\varepsilon}\,p\,\left[a\,R - q\right]$$

Wir werden keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in diesem Ausdruck $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ gegen h, und q so wie 3 q gegen a R vernachlässigen, denn $\frac{l\,R}{\varepsilon}$ ist die Zusammendrückung des Pfahls, die wenigstens in allen praktischen Fälllen gegen die Fallhöhe sehr klein sein wird, und das Gewicht q des Pfahles, ja selbst das dreifache Gewicht desselben, ist auch sehr klein gegen den Widerstand a R, den das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegegensetzt. Unter dieser Voraussetzung folgt aber aus dem letzten Ausdruck:

$$h\,Q > \frac{1}{4}\,\frac{a\,l\,R^2}{\varepsilon}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{8\,\varepsilon\,h\,q}{a\,l\,R^2}}\right\}$$

Nennt man γ das Gewicht der Kubikeinheit des Pfahlholzes, so ist $q = a\,l\,\gamma$, und dann wird:

$$h\,Q > \frac{R^2}{4\,\varepsilon\,\gamma}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{8\,\varepsilon\,h\,\gamma}{R^2}}\right\}q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn also ein Eindringen des Pfahles stattfinden soll, so muss die lebendige Kraft Q h des Blockes im Moment, wenn er auf den Pfahl schlägt, grösser sein, als der Werth, welchen der Ausdruck rechter Hand des Zeichens $>$ gibt.

Nach dem Schlag dehnt sich der Pfahl wiederum aus und wirft den Block zurück. Dies geschieht durch diejenige Wirkungsgrösse, welche auf die Compression des Pfahles verwendet wurde. Es erfolgt nun noch eine Reihe von Schlägen, die aber immer schwächer und schwächer, und zuletzt ganz verschwindend klein werden müssen, indem bei jedem einzelnen dieser Schläge etwas an lebendiger Kraft verloren geht.

Ist z. B. W die Wirkungsgrösse, welche beim ersten Hauptschlag auf Compression des Pfahles verwendet wurde, so wird der Block nach dem ersten Schlag auf eine Höhe $\frac{W}{Q}$ emporgeworfen, fällt dann wiederum nieder, und verliert bei dem zweiten Schlag eine lebendige Kraft $\frac{1}{2g}\frac{Q\,q}{Q+q}\left(\sqrt{2\,g\,\frac{W}{Q}}\right)^2 = W\frac{q}{Q+q}$, besitzt also nach dem Schlag nur noch eine lebendige Kraft: $W - W\frac{q}{Q+q} = W\cdot\frac{Q}{Q+q}$ so dass also allgemein die lebendige Kraft, welche in dem Block nach dem n^{ten} Schlag noch vorhanden ist, durch

$$W\cdot\left(\frac{Q}{Q+q}\right)^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ausgedrückt werden kann. Es ist klar, dass bei keinem dieser auf den Hauptschlag folgenden schwächeren Schläge ein Eindringen des Pfahles in die Erde statt finden kann. Wenn der Pfahl auch beim ersten Hauptschlag nicht eindrang, ist $W = Q\,h\,\frac{Q}{Q+q}$ zu setzen, und dann ist die Wirkung, welche in dem Block nach dem n^{ten} Schlag (den Hauptschlag als den ersten gerechnet) noch enthalten ist:

$$Q\,h\left(\frac{Q}{q+Q}\right)^{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Aus (4) ersieht man, dass die Intensität $Q\,h$ des Schlages, welche erforderlich ist, damit ein Pfahl in die Erde eindringt, dem Gewicht desselben proportional ist, und überdies noch von dem Widerstand R des Erdreiches und von der Elastizitätsbeschaffenheit des Pfahlmaterials abhängt. Um also grosse schwere Pfähle in sehr festen dichten Boden einzutreiben, muss man mächtige Schläge anwenden; dagegen können kleine Pfähle in nachgiebigem Boden mit leichten Schlägen eingetrieben werden.

Rotirende Bewegung eines starren Körpers.

61) *Lebendige Kraft eines rotirenden Körpers.* Die lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers ist unter allen Umständen gleich der Summe der lebendigen Kraft aller Theile, aus welchen der Körper besteht. Haben alle Theile eines Körpers gleiche Geschwindigkeiten, wie dies bei einer fortschreitenden Bewegung der Fall ist, so

findet man die lebendige Kraft des ganzen Körpers, d. h. die Summe der lebendigen Kräfte aller Theile, einfach durch das Produkt aus der Masse in das Quadrat der allen Punkten gemeinschaftlichen Geschwindigkeit. Dreht sich dagegen ein Körper um eine Axe, so haben die in verschiedenen Entfernungen von der Axe befindlichen Atome verschiedene Geschwindigkeiten; die Berechnung der totalen lebendigen Kraft eines solchen Körpers kann daher nicht nach der Regel geschehen, die für einen fortschreitenden Körper gilt, sondern muss durch ein besonderes Verfahren bewerkstelligt werden, mit dessen Herleitung wir uns nun beschäftigen wollen.

Es seien m_1 m_2 m_3 .... die Massen der Atome des Körpers r_1 r_2 r_3 ... ihre Entfernungen von der Drehungsaxe ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Drehung des Körpers in einem gewissen Zeitaugenblick der Bewegung vor sich geht. Dies vorausgesetzt, so sind $r_1 \omega$, $r_1 \omega$, $r_2 \omega$, $r_3 \omega$ ... die absoluten Geschwindigkeiten und $m_1 r_1^2 \omega^2$, $m_2 r_2^2 \omega^2$, $m_2 r_2^2 \omega^2$, $m_3 r_3^2 \omega^2$ ... die lebendigen Kräfte der Atome. Die lebendige Kraft L des ganzen Körpers ist demnach:

$$L = m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega^2 + m_3 r_3^2 \omega^2 +$$

oder

$$L = \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_4^2 + \ldots)$$

oder endlich
$$L = \omega^2 \Sigma m r^2,$$

wobei Σ das übliche Summenzeichen bedeutet.

Die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers wird also gefunden, wenn man das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit mit der Summe der Produkte aller Atommassen in die Quadrate ihrer Entfernung von der Drehungsaxe multiplizirt. Diese Produktensumme nennt man das Trägheitsmoment des Körpers.

Mit Beibehaltung dieser Benennung können wir den Satz aussprechen, dass die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers durch das Produkt aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des Körpers gefunden wird.

Die Bedeutung dieses Momentes ergibt sich aus Folgendem:

Denkt man sich, dass in einem Raumpunkt, der von der Drehungsaxe um die Längeneinheit entfernt ist, oder dass in einem Kreis, dessen Mittelpunkt mit einem Punkt der Drehungsaxe zusammenfällt, dessen Ebene auf der Axe senkrecht steht, und dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist; oder endlich, dass in der Oberfläche eines Kreiscylinders, dessen geometrische Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt, und dessen Halbmesser gleich der Längeneinheit ist, eine Masse μ von der Grösse $\Sigma m r^2$ concentrirt werden könnte, so hätten alle Punkte dieser

Masse eine Geschwindigkeit ω, die lebendige Kraft dieser Masse μ wäre demnach $\mu\ \omega^2$, oder (weil der Voraussetzung gemäss $\mu = \Sigma\, m r^2$ sein soll) $\omega^2\ \Sigma\, m r^2$. Das Trägheitsmoment eines Körpers kann also als eine ideale Masse angesehen werden, die, wenn sie statt der wirklichen Masse des rotirenden Körpers in eine Entfernung gleich der Längeneinheit von der Axe concentrirt würde, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit eine eben so grosse lebendige Kraft in sich enthielte, wie der wirkliche Körper.

Man kann sich noch die Frage stellen, wie gross eine Masse M sein müsste, damit sie in einer Entfernung R von der Drehungsaxe in einem Punkt, in einem Kreis oder in einer Cylinderfläche concentrirt, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit eine eben so grosse lebendige Kraft in sich enthielte, wie der wirkliche Körper? Dies wird offenbar der Fall sein, wenn das Trägheitsmoment $M\, R^2$ der idealen Masse so gross ist, als das Trägheitsmoment $\Sigma\, m\, r^2$ der realen Masse, d. h. wenn ist:

$$M\, R^2 = \Sigma\, m\, r^2$$

oder:

$$M = \frac{\Sigma\, m^2\, r^2}{R^2}$$

Dieses Verfahren der Auffindung von idealen Massen, welche in gewissen Entfernungen von der Axe angebracht werden müssten, um die wirklichen Massen bei drehenden Bewegungen ersetzen zu können, nennt man die Reduktion der Massen, und diese Masse M nennt man diesem gemäss die auf die Entfernung R reduzirte Masse des wirklichen Körpers.

Es ist klar, dass der Einfluss, den das Beharrungsvermögen einer rotirenden Masse auf die Bewegung ausübt, nicht nach der Grösse der Massen, sondern nach ihrem Trägheitsmoment beurtheilt werden muss. Zwei Massen von sehr verschiedener Grösse werden, wenn denselben gleich grossen Trägheitsmomente entsprechen, ganz identische Wirkungen hervorzubringen im Stande sein. Es werden z. B. zwei Schwungräder, denen gleich grosse Trägheitsmomente entsprechen, vollkommen gleiche Dienste leisten. Es werden gleich grosse Wirkungsgrössen nothwendig sein, um diesen Schwungrädern gleiche Winkelgeschwindigkeiten mitzutheilen, und sie werden auch, wenn ihnen die gleichen Geschwindigkeiten durch Einwirkung von Gegenkräften oder von Widerständen entzogen werden, gleich grosse Wirkungsgrössen entwickeln.

Die wirkliche Berechnung der Trägheitsmomente verschiedener Körperformen ist in vielen wissenschaftlichen und praktischen Fragen sehr nützlich; wir werden uns daher auch in den folgenden Nummern mit derlei Berechnungen beschäftigen; für rein praktische Zwecke ist es aber insbesondere sehr wichtig, dass man, ohne weitläufige Rechnungen, unmittelbar aus der Natur der Sache zu beurtheilen im Stande sei, ob und unter welchen Umständen das Trägheitsmoment eines Körpers gross oder klein ausfällt, und hierzu werden die nachstehenden Bemerkungen dienen können.

Das Trägheitsmoment eines Körpers ist eine Grösse, die von den Kräften und von dem Bewegungszustand nicht abhängt. Es richtet sich dagegen 1) nach der Grösse der Masse, 2) nach der Form der Körper, 3) nach der Entfernung seines Schwerpunkts von der Drehungsaxe, 4) nach der Lage des Körpers gegen die Drehungsaxe.

Nicht alle Theile des Körpers haben einen gleich grossen Einfluss auf den Werth des Trägheitsmoments, sondern der Einfluss eines Theilchens auf das Trägheitsmoment wächst im quadratischen Verhältniss seiner Entfernung von der Drehungsaxe. Einer schweren eisernen Welle wird daher ein kleines, einem mit leichten aber langen Armen versehenen Schwungrad wird dagegen ein grosses Trägheitsmoment entsprechen. Bei einem solchen Rade reduzirt sich das ganze Trägheitsmoment fast ganz auf jenes des Schwungringes, und da die Entfernungen aller Punkte eines solchen Schwungringes von der Axe beinahe gleich gross sind, so wird man, wenigstens annähernd, das Trägheitsmoment eines solchen Schwungrades finden, wenn man das Gewicht des Schwungringes mit dem Quadrat seines äussern Halbmessers multiplizirt. Ein leichtes, aber grosses Schwungrad von 1000 Kilogrammen Gewicht und 2 Meter Halbmesser wird daher ein kleines, aber schweres von 4000 Kilogrammen Gewicht und 1 Meter Halbmesser vollkommen zu ersetzen im Stande sein.

Berechnung der Trägheitsmomente verschiedener Körperformen.

62) *Trägheitsmoment eines Parallelepipedes* in Bezug auf eine Drehungsaxe, die durch den Schwerpunkt geht, und mit einer seiner Seitenkanten parallel ist. Es sei (Fig. 12 Taf. III.) O der Mittelpunkt des Körpers, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ die durch O gehende mit der Kante h parallele Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment berechnet werden soll, b h l die drei Dimensionen des Parallelepipedes, γ das Gewicht der Kubikeinheit des Materials, aus welchem der Körper besteht, $g = 9{\cdot}808$ die Beschleunigung durch die Schwere beim freien Fall der Körper, so ist zunächst, wenn der Körper homogen ist, $\frac{\gamma}{2\,g}$ die in der Kubikeinheit enthaltene Masse.

Beziehen wir die Lage der Punkte gegen O auf ein Coordinatensystem, das in O seinen Ursprung hat, und dessen Axen O x, O y, O z mit l, b, h parallel sind, so ist $\frac{\gamma}{2g}$ d x d y d z die Masse eines Körpertheilchens, dessen Entfernung von der Drehungsaxe 𝔄 𝔅 gleich $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Das Trägheitsmoment dieses Theilchens ist demnach:

$$\frac{\gamma}{2g}\, dx\, dy\, dz\, (x^2 + y^2)$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers findet man nun durch Integration dieses Ausdruckes, und dabei sind die Grenzen

$$\begin{aligned} &\text{für } x, -\frac{1}{2} l \text{ bis } + \frac{1}{2} l \\ &\;\;\text{"}\;\; y, -\frac{1}{2} b \;\;\text{"}\;\; + \frac{1}{2} b \\ &\;\;\text{"}\;\; z, -\frac{1}{2} h \;\;\text{"}\;\; + \frac{1}{2} h \end{aligned}$$

Das Resultat dieser Integration ist:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{2g}\, b,\, h,\, l\, .\, .\, (b^2 + l^2)$$

oder wenn man die Masse des Körpers bezeichnet:

$$\frac{1}{12}\, M\, (b^2 + l^2)$$

63) ***Trägheitsmoment eines massiven Cylinders*** in Bezug auf eine Axe, die mit seiner geometrischen Axe zusammenfällt.

Es sei Fig. 13 Taf. III. l die Länge, r der Halbmesser des Cylinders. Legt man durch die Axe zwei Ebenen, die einen Winkel $d\varphi$ einschliessen, und schneidet ferner den Körper durch zwei concentrische Cylinder, deren Halbmesser gleich x und $x + dx$ sind, so durchschneiden sich jene Ebenen und diese Cylinderflächen in Form eines unendlich dünnen Stabes, dessen Querschnitt $x\, d\varphi\, dx$, dessen dessen Länge $= l$, und dessen Entfernung von der Drehungsaxe x ist. Das Trägheitsmoment dieses Stabes ist demnach:

$$\frac{\gamma}{2g}\, x\, d\varphi\, dx \cdot x^2 = \frac{\gamma}{2g}\, x^3\, d\varphi \cdot dx$$

Durch Integration dieses Ausdruckes innerhalb der Grenzen $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ und $x = o$ bis $x = r$ findet man für das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\, M\, r^2$$

64) *Trägheitsmoment eines hohlen Cylinders* in Bezug auf dessen geometrische Axe.

Nennt man l die Länge, r_0 und r_1 den innern und den äussern Halbmesser des Cylinders, M dessen Masse, so ist hier wiederum wie im vorhergehenden Fall das Trägheitsmoment eines stabförmigen Elementes $\frac{\gamma}{2g} x^3 \, dx \, d\varphi$. Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ergibt sich durch Integration dieses Ausdruckes innerhalb der Grenzen $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ und $x = r_0$ bis r_1. Berücksichtiget man, dass $\frac{\gamma}{2g}(r_1^2 - r_0^2)$ die Massen des Stabes bestimmt, so findet man für das zu suchende Moment folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2} M (r_1^2 + r_0^2)$$

65) *Das Trägheitsmoment eines hohlen oder massiven Cylinders* in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Cylinders geht, aber auf der geometrischen Axe des Körpers senkrecht steht (Fig. 14, Fig. 15 Taf. III.).

Man scheide den Körper durch folgende Flächen: 1) durch zwei Ebenen, die auf der geometrischen Axe des Körpers senkrecht stehen, und von der Axe A Z um x und $x + dx$ entfernt sind; 2) durch zwei concentrische Cylinder, deren Halbmesser y und $y + dy$ sind, wobei $r_0 < y < r_1$; 3) durch zwei Ebenen, die durch die geometrische Axe des Körpers gelegt und gegen einander um einen Winkel $d\varphi$ geneigt sind. Diese 6 Flächen bestimmen ein Körpervolumen von der Grösse

$$dx \, dy \, y \, d\varphi$$

dessen Abstand von der Axe A Z gleich

$$\sqrt{x^2 + y^2 \cos.^2 \varphi}$$

Das Trägheitsmoment der in diesem Körpervolumen enthaltenen Masse ist demnach:

$$\frac{\gamma}{2g} dx, \, dy, \, y \, d\varphi \; \{ x^2 + y^2 \cos.^2 \varphi \}$$

Durch Integration dieses Ausdruckes findet man das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Dabei sind die Integrationsgrenzen in Bezug auf x für den massiven, wie für den hohlen Körper $x = -\frac{1}{2} l$ bis $x = +\frac{1}{2} l$ in Bezug auf φ für beide Körger $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ in Bezug auf y aber für die massiven Körper $y = o$ bis $y = r$, dagegen für die hohlen $y = r_0$ bis $y = r_1$. Man findet für das Trägheitsmoment des massiven Cylinders:

$$\frac{M}{12} \{ l^2 + 3 r^2 \}$$

und für das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

$$\frac{M}{12} \{ l^2 + 3 (r_1^2 + r_0^2) \}$$

wobei M die Masse des Körpers bezeichnet.

66) *Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten* in Bezug auf zwei zu einander parallelen Axen.

Es sei Fig. 16 Taf. III. O der Schwerpunkt eines Körpers, a z eine durch denselben gehende Axe, A Z eine andere zu a z parallele Axe, μ und M die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Axen a z und A Z, O P = e die Distanz der Axen. Bezieht man die Lage eines Punktes m auf ein durch O als Anfangspunkt gewähltes rechtwinkliges Coordinatensystem, indem man die Verlängerung von O P als Axe der x, O z als Axe die z und eine darauf senkrecht stehende Linie O y als Axe der y nimmt, so sind die Entfernungen des Theilchens m von den Axen a z und A Z. $\sqrt{x^2 + y^2}$ und $\sqrt{(e + x)^2 + y^2}$, es ist demnach:

$$\mu = \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$M = \Sigma m ([e + x]^2 + y^2)$$

Dieser letztere Ausdruck wird durch Entwicklung

$$M = e^2 \Sigma m + \Sigma m (x^2 + y^2) + 2 e \Sigma m x$$

Allein da der Annahme gemäss O der Schwerpunkt des Körpers ist, so hat man $\Sigma m x = o$ und dann wird, weil $\Sigma m = M$ gleich der Masse des Körpers und $\Sigma m (x^2 + y^2) = \mu$ ist:

$$M = \mu + M e^2$$

d. h. man findet das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe A Z, die zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe a x parallel ist, wenn man zum Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe das Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Distanz der Axen addirt.

Vermittelst dieser Regel kann man leicht die Trägheitsmomente der Körper in Bezug auf beliebige Axen berechnen, wenn jene in Bezug auf parallele durch den Schwerpunkt gehende Axen bekannt sind.

Wenn man in den Formeln für die Trägheitsmomente statt der Massen die Gewichte oder die Volumen substituirt, so erhält man die Trägheitsmomente durch Gewicht oder Volumen ausgedrückt.

Das als Gewicht oder als Volumen ausgedrückte Trägheitsmoment bestimmt das Gewicht oder das Volumen einer Masse, die in einer Entfernung gleich der Längeneinheit von der Axe angebracht, der wirklichen Masse äquivalent ist.

67) *Wirkung einer Kraft, die einen Körper um eine Axe dreht.* Nehmen wir an, ein Körper werde um eine Axe gedreht durch eine Kraft, deren Intensität unveränderlich ist und deren Richtung auf der Drehungsaxe des Körpers senkrecht steht, dieselbe aber nicht durchschneidet; auch soll die Kraft ihren Angriffspunkt und ihre Richtung gegen den Körper, während die Bewegung erfolgt, nicht ändern. Es sei Fig. 17, Taf. III, C die Drehungsaxe, A der Angriffspunkt der Kraft K. Erfolgt die Drehung um einen unendlich kleinen Winkel $A\,C\,A_1 = d\varphi$, so beschreibt der Angriffspunkt A den Bogen $\widehat{A\,A_1} = C\,A\,d\varphi$ und die Projection dieses Weges auf die Richtung der Kraft ist $\overline{A\,a} = \overline{A\,A_1}\cos.\,\alpha = \overline{C\,A}\cos\,\alpha\,d\,\varphi$ Fällt man von C aus auf die Richtung der Kraft den Perpendikel $\overline{C\,B} = p$, so ist $\angle\,B\,C\,A = \alpha$ und $\overline{C\,B} = p = \overline{C\,A}\cos.\,\alpha$ Man hat demnach

$$\overline{Aa} = .\,p\,d\,\varphi.$$

Die Wirkungsgrösse, welche K entwickelt, während sie den Körper um den Winkel $d\,\varphi$ dreht, ist demnach:

$$K\,\overline{Aa} = K\,p\,d\,\varphi.$$

Nennt man $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3 \ldots.$ die unendlich kleinen Winkel, um welchen der Körper in den aufeinanderfolgenden Zeitelementen gedreht wird, so sind, weil der Voraussetzung gemäss K und p unveränderliche Werthe haben:

$$K\,p\,d\,\varphi_1 \quad K\,p\,d\,\varphi_1 \quad K\,p\,d\,\varphi_3 \ldots.$$

die dabei durch die Kräfte entwickelten Wirkungsgrössen. Die totale Wirkungsgrösse ist demnach:

$$K\,p\,d\,\varphi_1 + K\,p\,d\,\varphi_2 + K\,p\,d\,\varphi_3 + \ldots =$$
$$K\,p\,(d\,\varphi_1 + d\,\varphi_2 + d\,\varphi_3 \ldots.)$$

oder wenn man den ganzen Winkel, um welchen sich der Körper gedreht hat, mit φ bezeichnet, also

$$d\,\varphi_1 + d\,\varphi_2 + \ldots. = \varphi$$

setzt, so erhält man für die zu berechnende Wirkungsgrösse den Werth

$$K\,p\,.\,\varphi.$$

Man nennt das Produkt $K\,p$ einer auf Drehung wirkenden Kraft K in den Perpendikel $B\,C = p$, welcher vom Drehungspunkt auf der Richtung der Kraft gefällt werden kann: das statische Moment der Kraft. Wenn wir diese Benennung beibehalten, so können wir nach obigem Resultat sagen, dass die Wirkung, welche eine Kraft entwickelt, wenn sie einen Körper um einen gewissen Winkel um seine Axe dreht, durch das Produkt aus dem statischen Moment $K\,p$ in den Drehungswinkel φ bestimmt wird.

Wird ein Körper nicht durch eine Kraft, sondern durch mehrere

Kräfte K_1 K_2 K_3 .... um einen Winkel φ um eine Axe gedreht, so sind die Wirkungsgrössen, welche dabei die Kräfte entwickeln: $K_1 p_1 \varphi$, $K_2 p_2 \varphi$, $K_3 p_3 \varphi$ .... und ist die Summe der Wirkungsgrösse sämmtlicher Kräfte:

$$K_1 p_1 \varphi + K_2 p_2 \varphi + K_3 p_3 \varphi \ldots\ldots =$$
$$\varphi (K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3 \ldots\ldots) =$$
$$\varphi \Sigma K p$$

d. h. es ist diese totale Wirkung gleich dem Produkt aus dem Drehungswinkel in der Summe der statischen Momente aller Kräfte.

68) ***Beschleunigte rotirende Bewegung eines starren Körpers um eine Axe.*** Nachdem wir nun die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers, so wie auch die Wirkungsgrösse bestimmt haben, welche ein auf Drehung wirkendes System von Kräften entwickelt, unterliegt es nunmehr keiner weiteren Schwierigkeit, die Bewegung zu bestimmen, welche in einem um eine Axe drehbaren Körper eintreten wird, wenn derselbe von verschiedenen Kräften getrieben wird.

Nennen wir:

$\Sigma k p$ die Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche die Drehung des Körpers bewirken, $\Sigma m r^2$ das Trägheitsmoment der Masse des Körpers in Beziehung auf die Axe, um welche die Drehung erfolgt, ω die Winkelgeschwindigkeit, welche in der Masse eintritt, nachdem die Drehung durch einen Winkel φ erfolgt ist. Dies vorausgesetzt ist $\varphi \Sigma K p$ die Wirkungsgrösse, welche die Kräfte während der Drehung durch den Winkel φ entwickeln und $\omega^2 \Sigma m r^2$ die lebendige Kraft oder die Wirkungsgrösse, welche in der Masse enthalten ist, nachdem der Körper um den Winkel φ gedreht worden ist, und est ist klar, dass diese beiden Wirkungen gleich gross sind.

Man hat daher

$$\varphi \Sigma K p = \omega^2 \Sigma m r^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \omega^2 \dfrac{\Sigma m r^2}{\Sigma K p.} \\ \text{und} \quad \omega^2 = \varphi \dfrac{\Sigma K p}{\Sigma m r^2.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Der erstere dieser Ausdrücke bestimmt den Winkel, durch welchen die Kräfte drehend wirken müssen, damit eine Winkelgeschwindigkeit ω eintritt, der letztere dagegen gibt die Winkelgeschwindigkeit, welche in der Masse eintreten wird, nachdem die Kräfte durch einen Winkel φ gewirkt haben. Jeder dieser Ausdrücke bestimmt also die Bewegung.

Allein es ist klar, dass obige Gleichungen nur dann richtig sind, wenn die Summe der statischen Momente der Kräfte während der Drehung einen unveränderlichen Werth hat.

Für den Fall, dass die Kräfte veränderlich wären, hätten wir statt der Gleichung (1) die Beziehung:

$$\omega^2 \Sigma m r^2 = \Sigma \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \varphi} K p \, d\varphi.$$

69) ***Freie Bewegung eines Atoms in einem Kreise.*** Wenn ein frei bewegliches Atom mit Geschwindigkeitsänderung eine kreisförmige Bahn durchlaufen soll, müssen auf dasselbe zwei Kräfte einwirken, nämlich eine Tangential-Kraft, welche die Geschwindigkeitsänderung des Atoms bewirkt, und eine radial einwärts wirkende Kraft, welche das Theilchen in jedem Augenblick von der geraden tangentialen Richtung, die es vermöge seines Beharrungsvermögens verfolgen will, nach dem Kreis herein ablenkt. Wir wollen die erstere, nach tangentialer Richtung wirkende Kraft, die Beschleunigungskraft, und die letztere, nach radialer Richtung wirkende Kraft, die Ablenkungskraft nennen. Diese beiden Kräfte können auf folgende Weise bestimmt werden.

Es sei, Fig. 18. Taf. III., V die Geschwindigkeit des Atoms im Punkt A der Bahn. G das Gewicht des Atoms an einem Ort, wo die Beschleunigung durch den freien Fall g beträgt. T die Beschleunigungskraft, N die Ablenkungskraft. In einem unendlich kleinen Zeittheilchen t würde das Atom vermöge seines Beharrungsvermögens nach tangentialer Richtung einen Weg $A B = V t$ und vermöge der Beschleunigungskraft T einen Weg $B C = \frac{1}{2} g \frac{T}{G} t^2$ zurücklegen. Durch die vereinte Wirkung beider Ursachen würde es also einen Weg $\overline{AC} = V t + \frac{1}{2} g \frac{T}{G} t^2$ beschreiben. Allein die Ablenkungskraft N bewirkt, dass das Atom nicht nach C, sondern dass es nach einem Punkte D kommt, für welchen $\widehat{AD} = \overline{AC}$, und offenbar ist $\overline{CD}$ so lang als der Weg, durch welchen das Atom durch die Kraft N im Zeittheilchen getrieben wird. Man hat daher $\overline{CD} = \frac{1}{2} g \frac{N}{G} t^2$. Fällt man den Perpendikel $\overline{DE}$, so ist, weil t unendlich klein angenommen wurde, $\overline{AE}$ gleich $\overline{DC}$ und $\overline{DE} = \widehat{AD} = \widehat{AC}$. Man darf daher auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AE} &= \frac{1}{2} g \frac{N}{G} t^2 \\ \overline{DE} &= V t + \frac{1}{2} g \frac{T}{G} t^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Nennt man r den Halbmesser des Kreises, so ist bekanntlich:

$$\overline{DE}^{\,2} = \overline{AE}\,(2r - \overline{AE})$$

oder weil $\overline{AE}$ gegen 2r vernachlässigt werden darf:

$$\overline{DE}^{\,2} = 2\,r\,\overline{AE}.$$

Führt man in diese Gleichung den obigen Werth (1) ein, so ergibt sich:

$$\left\{ V\,t + \frac{1}{2}\,g\,\frac{T}{G}\,t^2 \right\}^2 = 2\,r\,\frac{1}{2}\,g\,\frac{N}{G}\,t^2.$$

Allein wenn t unendlich klein ist, darf man $\frac{1}{2}\,g\,\frac{T}{G}\,t^2$ gegen V t vernachlässigen, und dann folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$V^2 = r\,g\,\frac{N}{G}$$

oder
$$N = \frac{G\,V^2}{g\,r}$$

wodurch die Ablenkungskraft bestimmt ist

Diese ist also dem Gewicht des Atoms und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit direkt, aber dem Halbmesser der Bahn verkehrt proportional, jedoch von der Beschleunigungskraft ganz unabhängig.

Nennt man v die Geschwindigkeitszunahme des Atoms in seiner Bahn im Zeitelement t, so ist:

$$v = g\,.\,\frac{T}{G}\,t.$$

oder
$$T = \frac{G}{g}\,\frac{v}{t}\,.$$

Erfolgt die Bewegung eines Atoms nicht in einem Kreise, sondern in irgend einer krummen Linie, so gelten auch für diese Bewegung die für N und T aufgefundenen Werthe, wenn man statt des Halbmessers r den Krümmungshalbmesser des Kurvenstückchens substituirt, welches das Atom im Zeitelemente t zurücklegt, für welches die Werthe von N und T zu bestimmen sind. Da bei einer krummen Linie der Krümmungshalbmesser veränderlich ist, so ist bei derselben die Ablenkungskraft nicht constant, sondern ändert sich von einem Punkte der krummen Linie zum andern.

70) *Gezwungene Bewegung eines Atoms.* Ein Atom kann auf mannigfaltige Weise gezwungen werden, eine vorgeschriebene Bahn zu durchlaufen. So ist z. B. jedes Atom, welches dem beweglichen Bestandtheile einer Maschine angehört, gezwungen, eine Bahn zu beschreiben, deren Form von der Art der Verbindung der Theile unter einander abhängt. Dreht sich ein Körper um eine Axe, so ist jedes Atom desselben gezwungen, die Axe zu umkreisen. Aber auch ein einzelnes iso-

lirtes Atom kann durch Fäden, krummlinige glatte Röhren etc. gezwungen werden, eine vorgeschriebene Bahn zu durchlaufen. Die zwingenden Ursachen mögen wie immer beschaffen sein, so kann ihre Einwirkung auf ein Atom nur darin bestehen, dass es durch dieselbe mit einer Beschleunigungs- und mit einer Ablenkungskraft getrieben wird, die genau so gross sind, als diejenige Beschleunigungs- und Ablenkungskraft, welche das Atom, wenn es frei bewegbar wäre, die Bahn beschreiben machen würde, welche es in seiner gezwungenen Bewegung durchläuft. Diese Kräfte sind daher, wie die in vorhergehender Nr. 69 aufgefundenen, nämlich:

$$T = \frac{G}{g}\frac{v}{t}$$

$$N = \frac{G}{g}\frac{V^2}{r}$$

Bewegt sich das Atom, ohne von einer äussern Kraft getrieben zu sein, in einem glatten Kanal, so ist N der Druck, mit welchem die Wände des Kanals auf das Atom nach normaler Richtung einwärts pressen, und eben so gross ist auch der Druck, mit welchem die Wände durch das Atom nach auswärts gepresst werden. Gehört das Atom zu einem um eine Axe rotirenden Körper, so ist N die Gesammtanziehung, mit welcher das Atom von allen übrigen Atomen des Körpers nach radialer Richtung einwärts gezogen wird, und eben so gross ist auch die Kraft, mit welcher das Atom selbst alle übrigen Atome des Körpers nach radialer Richtung auswärts zieht.

71) *Druck auf die Axe eines rotirenden Körpers.* Befindet sich ein Körper, auf welchen keine äusseren Kräfte einwirken, in Ruhe, so müssen die Molekularkräfte, durch welche jedes Atom von allen übrigen Atomen des Körpers affizirt wird, im Gleichgewicht sein Befindet sich ein Körper in einer rotirenden Bewegung, so muss jedes Atom des Körpers durch alle übrigen Atome desselben mit einer radial einwärts gerichteten Kraft gezogen werden, die gleich ist der Ablenkungskraft $\frac{G}{g}\frac{V^2}{r}$, welche der Bewegung eines Atoms im Kreise entspricht. Wird also ein Körper aus dem Zustand der Ruhe in eine rotirende Bewegung um eine Axe versetzt, so muss zunächst im ganzen Körper eine Aenderung in der Gruppirung der Atome eintreten, die so lange fortdauert, bis eine Gruppirungsweise entsteht, bei welcher jedes Atom durch alle übrigen Atome mit einer Kraft $\frac{G}{g}\frac{V^2}{r}$ einwärts gezogen wird. In diesem Zustand ist die Totalität, d. h. die Resultirende der Wechselwirkungen je zweier Atome des Körpers äquivalent der Gesammtheit aller nach der Axe hin ziehenden Ablenkungskräfte, d. h. gleich dem Resultirenden aus allen Ablenkungskräften.

Ist dieses Resultirende gleich Null, das will sagen: heben sich die Ablenkungskräfte wechselseitig auf, so dreht sich der Körper um seine Axe, ohne dass dieselbe durch eine Kraft gehalten werden muss. Hat aber jene Resultirende einen Werth, so muss die Axe, wenn dieselbe ihre Lage nicht verändern und die Drehung um dieselbe erfolgen soll, durch eine Kraft, die sowohl hinsichtlich ihrer Richtung, als auch hinsichtlich ihrer Intensität mit jenem Resultirenden übereinstimmt, gehalten werden.

Eine Axe, die nicht gehalten werden muss, damit sich ein Körper um dieselbe drehen kann, d. h. eine Axe, in Beziehung auf welche sich sämmtliche Ablenkungskräfte das Gleichgewicht halten, nennt man eine freie Axe der Drehung. Eine freie Axe ist z. B. die geometrische Axe eines Rotationskörpers. Durch analytische Mittel kann man beweisen, dass es für jeden Körper von beliebiger Form wenigstens drei freie Axen gibt. Dieselben gehen durch den Schwerpunkt des Körpers und stehen auf einander senkrecht. Dreht sich ein Körper um eine unfreie Axe, so findet man die Kräfte, die dieselbe halten müssen, damit sie nicht verrückt wird, auf folgende Weise:

Es seien U und O die Punkte, an welchen die Axe gehalten wird, x, y, z die Coordinaten eines Atoms des Körpers in Beziehung auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, das in U seinen Ursprung hat, und dessen Axe der z mit der Drehungsaxe zusammenfällt, m die Masse, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand des Atoms von der Axe, ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist: $2 m \omega^2 . r$ die Ablenkungskraft des Atoms. Zerlegt man diese Kraft nach x und y so ist erstere $2 m \omega^2 . r . \frac{x}{y} = 2 m \omega^2 x$ und letztere $2 m \omega^2 . r . \frac{x}{y} = 2 m \omega^2 y$.
Nennt man U_x, U_y, O_x, O_y die Kräfte, welche nach den Richtungen der x und y die Punkte U und O der Axe halten müssen, l die Distanz der Punkte U und O, so ist:

$$U_x l. = \omega^2 S.z.2 m x = \omega^2 2 S m x z.$$

$$U_y l = \omega^2 S.z 2 m y = 2 \omega^2 S m y z$$

$$O_x l - . = \omega^2 S (l-z) 2 m x = 2 l \omega^2 S m x - 2 \omega^2 S m x z.$$

$$O_y l = \omega^2 S (l-z) 2 m y = 2 \omega^2 l S m y - 2 \omega S m y z.$$

Ferner ist noch die Summe der Pressung auf U und O nach der Richtung von x und y:

$$U_x + O_x = 2\,\omega^2\,S\,m\,x.$$

$$U_y + O_y = 2\,\omega^2\,S\,m\,y.$$

Nennt man ξ und v die Coordinaten des Schwerpunkts, M die Masse des Körpers, so ist bekanntlich:

$$S\,m\,x = M\,\xi$$
$$S\,m\,y = M\,v$$

demnach auch

$$U_x + O_x = 2\,\omega^2\,M\,\xi.$$

$$U_y + O_y = 2\,\omega^2\,M\,v$$

Für eine freie Axe müssten die Kräfte O_x, O_y, U_x, U_y verschwinden, was nur dann möglich ist, wenn:

$$S\,m\,x = o \qquad \Sigma\,m\,y = o$$
$$S\,m\,x\,z = o \qquad \Sigma\,m\,y\,z = o.$$

72) *Centripetal- und Centrifugal-Kraft.* Mit diesen beiden Worten werden in allen Werken der Physik und Mechanik zwei Kräfte benannt, welche bei rotirenden Bewegungen die Atome affiziren. Die Centripetalkraft ist gleichbedeutend mit derjenigen Kraft, welche wir Ablenkungskraft genannt haben, d. h. es ist die Kraft, welche auf ein Theilchen nach normaler Richtung einwärts wirken muss, damit es nicht nach tangentialer Richtung fortgeht. Die Centrifugalkraft, sagt man, sei eine der Centripetalkraft gleiche, aber radial auswärts wirkende Kraft, mit welcher sich das Atom von der Drehungsaxe zu entfernen strebt. Dies ist aber ganz irrig, denn eine solche Kraft gibt es gar nicht. Ein um eine Axe rotirendes Atom hat vermöge seines Beharrungsvermögens nur ein Bestreben, nach tangentialer Richtung fortzugehen, nicht aber ein Bestreben, sich von der Axe zu entfernen. Wenn diese angebliche Centrifugalkraft wirklich existirte, so würde sie gerade von der Centripetalkraft aufgehoben, und der Erfolg bestünde darin, dass das Atom vermöge des Beharrungsvermögens nach tangentialer Richtung fortgehen würde, was aber nicht geschieht. Die Benennung Centrifugalkraft sollte man daher gänzlich verbannen, will man sie aber dennoch beibehalten, so muss man darunter das Resultirende derjenigen Kräfte verstehen, mit welcher ein Atom auf alle andern Atome, welche die Centripetal- oder Ablenkungskraft hervorbringen, zurückwirkt. Diese Resultirende ist aber gleich der Kraft, mit welcher das in der Axe befindliche Atom nach der Richtung der Ablenkungskraft gehalten werden muss, wenn es seinen Ort nicht verändern soll, während das andere Atom die Axe umkreist.

73) *Dynamik der zusammengesetzten Bewegung eines Atoms.* Im ersten Abschnitt Nr. 12 wurde gezeigt, wie aus einem Verein von einzelnen Bewegungen eine zusammengesetzte Bewegung entsteht und aufgefunden werden kann, und umgekehrt, wie jede wirkliche Bewegung auch durch die Vereinigung von gleichzeitig auftretenden Einzelnbewegungen hervorgebracht werden kann.

Hier ist nun der Ort zu zeigen, welche Bewegung durch ein gleichzeitiges Vorhandensein von verschiedenen Geschwindigkeiten und Kräften hervorgebracht wird, und wie umgekehrt ein System von Geschwindigkeiten und Kräften aufgefunden werden kann, welches eine Bewegung hervorbringt, die mit einer wirklich vorhandenen Bewegung übereinstimmt.

Um diese Fragen zu beantworten, muss man vor allem Andern wissen, wie bei einem gleichzeitigen Zusammenwirken von Kräften die Thätigkeit jeder einzelnen erfolgt, und dies kann, wie Alles was die innere Wesenheit der Materie und der Kräfte betrifft, nur durch die Erfahrung erkannt werden.

Dieser gemäss erfolgt bei einem gleichzeitigen Einwirken mehrerer Kräfte die Thätigkeit jeder einzelnen genau in der Weise, als ob alle anderen Kräfte nicht vorhanden wären.

Nach diesem Gesetze des wechselseitig unabhängigen Wirkens der Kräfte kann nun jede aus einzelnen Bewegungen zusammengesetzte Bewegung hervorgebracht werden durch das vereinte Auftreten aller Geschwindigkeiten und Kräfte, welche den einzelnen Bewegungen entsprechen würden, wenn jede derselben allein, die anderen aber nicht vorhanden wären. Ist also für eine dieser einzelnen Bewegungen V die Geschwindigkeit des Atoms in einem gewissen Augenblick, v die Geschwindigkeitsänderung des Atoms in dem nächstfolgenden Zeittheilchen t, ϱ der Krümmungshalbmesser des Kurvenstückchens, welches das Atom im Zeitelement t in seiner Bahn durchläuft; q das Gewicht des Atoms; so kann diese einzelne Bewegung hervorgebracht werden durch das gleichzeitige Vorhandensein 1) der Geschwindigkeit V nach der Richtung der Tangente an die Bahn, 2) der tangentialen Beschleunigungskraft $\frac{q}{g} \frac{v}{t}$, 3) der normalen Ablenkungskraft, $\frac{q}{g} \cdot \frac{V^2}{\varrho}$. Lässt man nun die allen einzelnen Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten und Kräfte gleichzeitig vorhanden sein, so bringen sie die zusammengesetzte Bewegung wirklich hervor.

Nach jenem Erfahrungssatz findet man umgekehrt ein System von Geschwindigkeiten und Kräften, welche eine wirklich vorhandene Bewegung hervorzubringen vermögen, wenn man diese wirkliche Bewegung in einzelne Bewegungen zerlegt, und dann die Geschwindigkeiten und Kräfte aufsucht, welche im Stande wären, diese einzelnen Bewegungen zu veranlassen

74) ***Gleichzeitiges und nach einander folgendes Wirken der Kräfte.*** Aus dem Gesetz des wechselseitig unabhängigen Wirkens der Kräfte folgt auch, dass durch ein nach einander folgendes Wirken der einzelnen Kräfte einer Gesammtheit von Kräften die gleichen Ortsveränderungen hervorgebracht werden, wie durch die gleichzeitige Thätigkeit der Kräfte.

Wenn also auf ein frei bewegliches und in Bewegung befindliches Atom von einem gewissen Augenblick an, in welchem es sich in einem Punkt A befindet, während einer gewissen Zeit t eine Gesammtheit von Kräften einwirkt, so gelangt dasselbe nach einem Punkt B, den es auch erreicht, wenn man das Atom zunächst während der Zeit t der Trägheit überlässt, es hierauf in Ruhe versetzt, und dann die Kräfte nicht gleichzeitig, sondern eine nach der andern, und jede durch die Zeit t einwirken lässt, dabei aber das Atom am Ende der Einwirkung jeder Kraft in Ruhe versetzt.

Dieser Ort B, nach welchem das Atom gelangt, kann durch die Aneinanderreihung von Linien gefunden werden, deren Richtungen mit der anfänglichen Bewegungsrichtung und mit den Richtungen der Kräfte parallel und die so lang sind, als die Wege, welche das Atom vermöge der anfänglichen Geschwindigkeit und vermöge jeder einzelnen Kraft in in der Zeit t zurücklegen würde. Der Endpunkt der letzten Linie dieses Liniensystems ist dann der gesuchte Punkt B.

75) ***Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.*** Unter der Zusammensetzung von Kräften versteht man die Auffindung einer einzigen Kraft, deren Thätigkeit der vereinten Thätigkeit einer Gesammtheit von Kräften äquivalent ist. Unter Zerlegung der Kräfte versteht man die Auffindung eines Systems von Kräften, deren Wirksamkeit mit der einer einzelnen Kraft übereinstimmt. Eine einzelne Kraft, welche eine Gesammtheit von Kräften zu ersetzen vermag, nennt man auch die resultirende Kraft, und ihre Auffindung unterliegt nach den in den vorigen Nummern gegebenen Erläuterungen keiner Schwierigkeit.

Nennt man, um die Sache ohne Verzeichnung einer Figur zu erklären, A . a . b . c . . . . B . die Endpunkte des Liniensystems, von welchem in voriger Nummer die Rede war, so ist die Seite A a der Weg, den das Atom vermöge der in A vorhandenen Geschwindigkeit in der Zeit t vermöge der Trägheit zurücklegt. Verbindet man den Punkt a direkt mit B durch eine gerade Linie, so stellt diese, sowohl der Richtung wie Grösse nach, den Weg vor, welcher der resultirenden Kraft entspricht, denn eine Kraft, die mit a B parallel wirkt, und die das

Atom in der Zeit t durch eine Weglänge gleich a B zu bewegen vermag, wird offenbar in Verbindung mit der anfänglichen Geschwindigkeit des Atoms die Ortsveränderung von A und B hervorbringen.

Wenn das Zeitintervall t unendlich klein gedacht wird, können die Intensitäten der Kräfte als unveränderlich angenommen werden, und dann sind die einzelnen Wege $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ $\overline{cd}$ $\overline{aB}$ den Intensitäten der Kräfte proportional. Verzeichnet man daher ein Liniensystem: a_1 b_1 c_1 d_1 . . . B_1, dessen Seiten mit a . b . c . . . . B parallel sind, deren Längen aber die wirklichen Intensitäten der Kräfte darstellen, so wird die Schlusslinie a_1 B_1 dieses Systems der Richtung und Grösse nach die Resultirende der übrigen Kräfte darstellen.

Umgekehrt findet man ein System von Kräften, welchem eine einzige Kraft R äquivalent ist, wenn man die Endpunkte a_1 und B_1 der Linie, welche die Kraft R darstellt, durch ein beliebiges System a_1 b_1 c_1 . . . B von geraden Linien verbindet. Die Seiten dieses Liniensystems stellen dann der Richtung und Grösse nach das der Kraft R äquivalente Kräftesystem dar.

Dynamik der relativen Bewegung eines Atoms.

76) *Kräfte der relativen oder scheinbaren Bewegung.* Wir haben bereits im ersten Abschnitt die Beziehungen kennen gelernt, welche zwischen den absoluten Bewegungen zweier Körper und ihrer relativen Bewegung stattfinden, und haben gesehen, dass immer eine von diesen drei Bewegungen gefunden werden kann, wenn die beiden andern gegeben sind, und wie insbesondere die relative Bewegung eines Körpers gegen einen andern zu bestimmen ist, wenn die absoluten Bewegungen beider Körper bekannt sind.

Allein diese absoluten Bewegungen sind nicht immer von vorneherein bekannt, sondern in den meisten Fragen, welche die relative Bewegung betreffen, kennt man die absolute Bewegung eines Körpers und kennt man ferner die Kräfte und Geschwindigkeiten, welche die absolute Bewegung eines zweiten Körpers B veranlassen, und will vermittelst dieser Daten die relative Bewegung des Körpers B gegen den Körper A ausfindig machen. Dies ist z. B. der Fall bei manchen physikalischen Fragen, wenn es sich darum handelt, die Bewegung eines von gewissen Kräften affizirten Körpers gegen die in Bewegung befindliche Erde kennen zu lernen.

Diese relative Bewegung kann wie eine absolute Bewegung behandelt werden, wenn man diejenigen Kräfte und Geschwindigkeiten bestimmt, welche eine absolute Bewegung veranlassen würden, die mit der relativen Bewegung identisch wäre.

Diese Kräfte sind von Coriolis, welcher zuerst die dynamischen Gesetze der relativen Bewegung aufgefunden hat, die Kräfte der relativen oder scheinbaren Bewegung genannt worden, weil die relative Bewegung eines Körpers B gegen einen Körper A auf einen Beobachter, der unbewusst der Bewegung von A folgt, den Eindruck machen muss, als sei sie eine durch jene Kräfte veranlasste absolute Bewegung.

Wir werden im Folgenden zeigen, wie diese Kräfte der relativen oder scheinbaren Bewegung gefunden werden können, wenn die absolute Bewegung von A und die Elemente der absoluten Bewegung (Geschwindigkeiten und Kräfte) des Körpers B gegeben sind, werden aber dabei nicht den von Coriolis gewählten allgemein analytischen Weg einschlagen, sondern ziehen es vor, die Sache durch Betrachtung einer Reihe von speziellen Fällen vermittelst der Zerlegung der Bewegung zu behandeln.

77) *Relative Bewegung eines Atoms in einer Ebene gegen eine Linie.* Wir nehmen zunächst an, in einer Ebene bewege sich ein Atom und eine gerade Linie $\mathfrak{L}$, und legen uns die Frage vor, welche Geschwindigkeit das Atom in jedem Augenblick besitzen muss, und welche Kräfte auf dasselbe in jedem Augenblick unter folgenden Umständen einwirken müssen.

1) Wenn sich die Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O der Ebene dreht, und das Atom seinen Ort gegen die Linie $\mathfrak{L}$ nicht ändert.

2) Wenn sich die Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O der Ebene dreht, und sich das Atom gegen die Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach einer Richtung $\mathfrak{L}_1$ bewegt, die mit $\mathfrak{L}$ einen Winkel α bildet.

3) Wenn sich die gerade Linie $\mathfrak{L}$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O der Ebene dreht, und das Atom gegen die gerade Linie $\mathfrak{L}$ eine krumme Linie mit ungleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt.

4) Wenn sich die gerade Linie $\mathfrak{L}$ mit ungleichförmiger Geschwindigkeit um einen in ihr liegenden Punkt O dreht, der gleichzeitig in einer krummen Bahn mit ungleichförmiger Geschwindigkeit, aber in der Ebene fortschreitet, und wenn sich gleichzeitig das Atom gegen die Linie $\mathfrak{L}$ in einer krummen Bahn mit ungleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Zerlegt man in jedem einzelnen dieser Fälle die wirkliche absolute Bewegung des Atoms in ein passendes System von einzelnen Bewegungen, durch deren gleichzeitiges Auftreten die wirklich stattfindende Bewegung hervorgebracht werden könnte, und sucht sodann die Geschwindigkeiten und Kräfte, welche im Stande wären, jede dieser einzelnen Bewegungen hervorzubringen, wenn alle übrigen nicht vorhanden wären, so erhält man offenbar die Geschwindigkeiten und Kräfte, welche durch ihr vereintes Auftreten die wirkliche Bewegung des Atoms hervorbringen müssten, und die Resultirenden aus allen einzelnen Geschwindigkeiten und aus allen einzelnen Kräften müssen dann offenbar gleich sein der absoluten Geschwindigkeit des Atoms und der absoluten Kraft, welche auf dasselbe einwirkt. Wir wollen nun diese Kräfte und Geschwindigkeiten in den oben bezeichneten vier Fällen zu bestimmen suchen.

Erster Fall. Nennt man W die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Linie $\mathfrak{L}$ dreht, R die constante Entfernung des Atoms von dem Drehungspunkt O, q das Gewicht des Atoms, g die Beschleunigung durch die Schwere, so ist R W die absolute Geschwindigkeit, mit der sich das Atom in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser gleich R ist, bewegt, und damit diess geschehen kann, muss auf das Atom eine nach radialer Richtung gegen den Drehungspunkt O einwärts zielende constante Ablenkungskraft $\mathfrak{C}$ einwirken, deren Intensität gleich ist der Centripetalkraft, welche einer solchen Kreisbewegung entspricht. Man hat daher $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$.

Zweiter Fall. In diesem Falle besitzt das Atom in einem Augenblick, in welchem seine Entfernung von dem Drehungspunkt O gleich R ist, nicht nur längs der Linie $\mathfrak{L}_1$ eine Geschwindigkeit V, sondern auch nach einer auf R senkrechten Richtung eine Geschwindigkeit R W; seine absolute Geschwindigkeit ist daher in diesem Augenblick die resultirende aus V und aus R W.

Durch diese Geschwindigkeiten wird aber die wirklich vorhandene Bewegung noch nicht hervorgebracht, sondern es müssen noch zwei Ablenkungskräfte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ einwirken, von denen die erstere $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$ nach radialer Richtung einwärts zielend das Atom in der Entfernung R zu erhalten strebt, während die andere $\mathfrak{D}$ senkrecht auf die relative Geschwindigkeit V und im Sinne der Drehung wirken muss. Während sich nämlich die relative Bahn $\mathfrak{L}_1$ in einem Zeitelement t um einen Winkel W t wendet, bewegt sich das Atom nicht nur in seiner Bahn, sondern auch mit der Bahn; durch die Bewegung in der Bahn legt es in der Zeit t längs derselben einen Weg V t zurück; durch seine Bewegung mit der Bahn beschreibt es in der Zeit t einen Kreisbogen, welchem ein Halbmesser V t und ein Centriwinkel W t entspricht, dessen Länge also gleich $V t \times W t = V W t^2$ ist; und um diesen Weg in der Zeit t zurückzulegen, muss senkrecht auf die Richtung von V eine Kraft $\mathfrak{D}$ wirken, die so gross ist, als überhaupt eine Kraft sein muss, damit eine Masse $\frac{q}{2g}$ in einer Zeit t durch einen Weg V W t^2 bewegt wird. Man hat daher zur Bestimmung dieser Kraft $\mathfrak{D}$ die Gleichung

$$V\ W\ t^2 = \frac{1}{2}\ g\ \frac{\mathfrak{D}}{q}\ t^2$$

daher

$$\mathfrak{D} = 2\ \frac{q}{g}\ V\ W$$

Es ist also in diesem zweiten Falle:

a) die absolute Geschwindigkeit des Atoms in einem gewissen Zeitaugenblick die Resultirende aus der relativen Geschwindigkeit V und aus der Drehungsgeschwindigkeit R W und dann ist ferner:

b) die Kraft, welche der absoluten Bewegung entspricht, die Resultirende aus den Ablenkungskräften $\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\ W^2\ R$ und $\mathfrak{D} = 2\ \frac{q}{g}\ V\ W$, von denen die erstere nach radialer Richtung gegen den Drehungspunkt einwärts wirkt, während die zweite nach einer auf V senkrechten Richtung und im Sinne der Drehung thätig ist.

Dritter Fall. Diese Bewegung kann man veranlassen, wenn man zu den Geschwindigkeiten und Kräften, welche dem zweiten Fall entsprechen, noch die Kräfte der relativen Bewegung, d. h. diejenigen Kräfte hinzufügt, welche der Geschwindigkeitsänderung und Richtungsänderung entsprechen, die in der relativen krummlinigen Bewegung wirklich eintreten.

Nennt man v die Aenderung der relativen Geschwindigkeit des Atoms gegen die Linie $\mathfrak{L}$ im Zeitelement t, ϱ den Krümmungshalbmesser des Kurvenelementes der relativen Bahn, welches das Atom im Zeitelement t durchläuft, so sind $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\ \frac{v}{t}$ und $\mathfrak{R}_\varrho = \frac{q}{g}\ \frac{V^2}{\varrho}$ diese Kräfte der relativen Bewegung, von denen die erstere in der Richtung von V, und die leztere in der Richtung von ϱ gegen den Krümmungsmittelpunkt hinzielend wirken muss. Wir wollen die Resultirende aus $\mathfrak{R}_t$ und $\mathfrak{R}_\varrho$ mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

In diesem dritten Falle ist also, wie man sieht:

a) die absolute Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitaugenblick die Resultirende aus der relativen Geschwindigkeit V und aus der Drehungsgeschwindigkeit R W, und es ist ferner:

b) die Kraft der absoluten Bewegung die Resultirende α) aus der Ablenkungskraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g}\ R\ W^2$, welche nach radialer Richtung gegen den

Drehungspunkt hinzielt; β) aus der Ablenkungskraft $\mathfrak{D} = 2 \frac{q}{g} V W$, welche auf V senkrecht steht und im Sinne der Drehung wirkt; γ) aus der Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung, welche zerlegt werden kann in eine tangentiale Beschleunigungskraft $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g} \frac{v}{t}$ und in eine normale Ablenkungskraft $\mathfrak{R}_\varrho = \frac{q}{g} \frac{V^2}{\varrho}$

Vierter Fall. Diese Bewegung würde offenbar eintreten, wenn man zu den Geschwindigkeiten und Kräften, die dem dritten Fall entsprachen, noch die Geschwindigkeit und Kraft hinzufügt, welche der absoluten Bewegung des Punktes O und der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Linie $\mathfrak{L}$ entsprechen. Nennt man C die absolute Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt O in dem Augenblick bewegt, in dem die Grössen R V W ϱ ihre Geltung haben; c die Geschwindigkeitsänderung des Punktes O im nächstfolgenden Zeitelement t, r den Krümmungshalbmesser des vom Punkt O im Zeitelement t durchlaufenen Bahnelementes, w die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Linie $\mathfrak{L}$: so sind $\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g} \frac{c}{t}$ und $\mathfrak{F}_r = \frac{q}{g} \frac{C^2}{r}$ die Kräfte, welche parallel mit C und mit r wirkend in Verbindung mit der Geschwindigkeit C in dem Atom eine Bewegung veranlassen würden, welche mit der des Punktes O im Zeitelement t vollkommen übereinstimmen müsste. Dann aber muss noch in dem vorliegenden Fall senkrecht auf die Richtung von R eine Kraft $\frac{q}{g} \frac{R w}{t} = \mathfrak{T}$ wirken, welche der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung von $\mathfrak{L}$ entspricht.

Die Resultirende aus $\mathfrak{F}_t$ und $\mathfrak{F}_r$ wollen wir mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen.

Für diesen vierten Fall ist also

a) die absolute Geschwindigkeit des Atoms die Resultirende α) aus der relativen Geschwindigkeit V des Atoms gegen die Linie $\mathfrak{L}$, β) aus der Drehungsgeschwindigkeit R W und γ) aus der absoluten Geschwindigdeit C des Punktes O, und es ist ferner:

b) die Kraft der absoluten Bewegung die Resultirende α) aus der nach R zielenden Ablenkungskraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$, β) aus der senkrecht auf R wirkenden Beshleunigungskraft, $\mathfrak{T} = \frac{q}{g} \frac{Rw}{t}$, γ) aus der im Sinne der Drehung und senkrecht auf V wirkenden Ablenkungskraft $\mathfrak{D} = 2 \frac{q}{g} V W$, δ) aus den Kräften $\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g} \frac{c}{t}$ und $\mathfrak{F}_r = \frac{q}{g} \frac{C^2}{r}$, welche der Fortschrittsbewegung des Punktes O entspreben, ε) aus den Kräften $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\frac{\mathfrak{D}}{t}$, $\mathfrak{R}_\varrho = \frac{q}{g}\frac{V^2}{\varrho}$, welche der relativen Bewegung entsprechen.

78) ***Kräfte der relativen Bewegung. Fortsetzung.*** Wir haben uns in den so eben besprochenen vier Fällen so benommen, als wenn die absolute Bewegung der Linie $\mathfrak{L}$ und die relative Bewegung des Atoms gegen $\mathfrak{L}$ gegeben wäre, und die absolute Geschwindigkeit des Atoms und die Kräfte der absoluten Bewegung gesucht werden sollten

Es unterliegt aber nun keiner weiteren Schwierigkeit, die relative Geschwindigkeit des Atoms und die Kräfte der relativen Bewegung ausfindig zu machen, wenn die absoluten Geschwindigkeiten des Atoms und der Linie und wenn ferner noch die absoluten auf das Atom wirklich einwirkenden Kräfte gegeben sind.

Es ist nämlich in diesem Falle:

a) die relative Geschwindigkeit des Atoms gleich und entgegengesetzt der Resultirenden aus den Geschwindigkeiten R W und C und aus der nach entgegengesetzter Richtung genommenen absoluten Geschwindigkeit des Atoms; und dann ist ferner;

b) die Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung (die Resultirende aus $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g}\frac{v}{t}$ und $R_\varrho = \frac{q}{g}\frac{V^2}{\varrho}$) gleich und entgegengesetzt der Resultirenden aus den Kräften $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$, $\mathfrak{T} = \frac{q}{g}\frac{wR}{t}$, $\mathfrak{D} = 2\,\frac{q}{g} V\,W$, $\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g}\frac{c}{t}$, $\mathfrak{F}_r = \frac{q}{g}\frac{C^2}{r}$ und aus den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen absoluten Kräften, welche auf das Atom wirklich einwirken.

Ist das Atom gezwungen, sich längs einer mit der Linie $\mathfrak{L}$ unveränderlich verbundenen krummen Linie zu bewegen, so kann man diese gezwungene Bewegung doch wie eine freie Bewegung behandeln, wenn man den Druck $\mathfrak{P}$ der Bahn wegen das Atom als eine von den äusseren auf das Atom wirklich einwirkenden Kräfte in Rechnung bringt.

79) ***Lebendige Kraft des Atoms in seiner relativen Bewegung. Bewegung in der Ebene.*** Die relative Bewegung eines Atoms erfolgt, wie wir gesehen haben, wie eine absolulte Bewegung, die durch Kräfte veranlasst würde, welche den Kräften der relativen Bewegung gleich wären. Nennen wir nun L und l die lebendigen Kräfte, welche den relativen Geschwindigkeiten des Atoms in zwei Zeitmomenten entsprechen, so muss die Aenderung L — l gleich sein der Wirkungsgrösse, welche die Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung während des Zeitintervalles entwickelt hat, in dem jene Aenderung L — l eingetreten ist. Da aber die

Kraft $\mathfrak{R}$ der relativen Bewegung gleich und entgegengesetzt ist der Resultirenden aus den Kräften $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ und aus den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen absoluten äusseren Kräften, so ist jene Wirkungsgrösse auch gleich der Summe der Wirkungsgrössen aller äusseren Kräfte, mehr noch der Summe der Wirkungsgrössen, welche den nach entgegengesetzten Richtungen genommenen Kräften $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ entsprechen.

Die Berechnung dieser Wirkungsgrössen ist auf ähnliche Weise zu bewerkstelligen, wie schon früher ausführlich gezeigt wurde; nur darf man dabei nicht die von dem Atom wirklich beschriebenen, sondern man muss die Wegelemente der relativen Bewegung in Rechnung bringen, d. h. man muss, um das Element der Wirkung einer dieser Kräfte zu finden, die Kraft multipliziren mit der Projektion des relativen Wegelementes auf die Richtung der Kraft.

Von diesen, in solcher Weise zu berechnenden Wirkungen ist unter allen Umständen diejenige gleich Null, welche der Ablenkungskraft $\mathfrak{D}$ entspricht, und ist ferner noch in dem Falle, wenn sich das Atom längs einer steifen krummen Bahn bewegen muss, die dem Druck $\mathfrak{P}$ der Bahn gegen das Atom entsprechende Wirkung von keinem Werth, denn die Richtungen dieser beiden Kräfte sind senkrecht gegen die Bahn, die Projektion eines Wegelementes auf jene Richtungen sind daher gleich Null.

Es ist mithin die Aenderung $L - l$ der lebendigen Kraft des Atoms in seiner relativen Bewegung gleich der Summe von folgenden Wirkungen: a) der Wirkung der Resultirenden $\mathfrak{A}$ aus allen äusseren Kräften, welche nebst dem Druck der Bahn gegen das Atom auf dasselbe wirklich einwirken; b) einer Kraft $-\mathfrak{F}$, deren Intensität gleich, deren Richtung aber entgegengesetzt ist derjenigen Kraft, die auf das Atom einwirken müsste, wenn es eine mit der Bewegung des Punktes O übereinstimmende Bewegung zu machen hätte; c) einer Kraft $-\mathfrak{C}$, deren Intensität gleich deren Richtung, aber der Centripetalkraft, welche der Drehung entspricht, entgegengesetzt ist; d) einer Kraft $-\mathfrak{T}$, deren Intensität gleich deren Richtung, aber entgegengesetzt ist derjenigen Kraft, welche der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit entspricht. Bezeichnen wir die Wirkungen der Kraft $\mathfrak{A}, -\mathfrak{F}, -\mathfrak{C}, -\mathfrak{T}$ mit $W_{\mathfrak{A}}$ $W_{\mathfrak{F}}$ $W_{\mathfrak{C}}$ $W_{\mathfrak{T}}$, so hat man, wenn dieselben positiv ausfallen, also in dem Sinne wirken, dass durch sie eine Zunahme der relativen Geschwindigkeit eintritt.

$$L - l = W_{\mathfrak{A}} + W_{\mathfrak{F}} + W_{\mathfrak{C}} + W_{\mathfrak{T}},$$

Die Wirkungen $W_{\mathfrak{A}}$ $W_{\mathfrak{F}}$ $W_{\mathfrak{T}}$ müssen in jedem speziellen Falle besonders berechnet werden; die Wirkung $\underset{\mathfrak{G}}{W}$ hingegen kann für alle Fälle allgemein ermittelt werden.

Nennt man nämlich für denjenigen Augenblick der Bewegung, in welchem die Entfernung des Atoms von dem Punkt O gleich R ist, φ den Winkel, den die Richtungen von R und V bilden und s das unendlich kleine, im Zeitelement t vom Atom in seiner relativen Bahn durchlaufene Wegelement, so ist $\frac{q}{g} W^2 R s \operatorname{Cos.} \varphi$ das Element der Wirkung der Kraft $\mathfrak{C}$. Es ist aber $s \operatorname{Cos.} \varphi$ die Aenderung der Entfernung des Atoms im Zeitelement t vom Punkt O, mithin $s \operatorname{Cos.} \varphi = d R$. Das der Centrifugalkraft entsprechende Element der Wirkung ist demnach

$\frac{q}{g} W^2 R d R$, man hat daher $\underset{\mathfrak{G}}{W} = \int_{R=R_1}^{R=R_2} \frac{q}{g} W^2 R d R.$

wobei R_1 und R_2 die Entfernungen des Atoms von dem Punkt O am Anfang und am Ende des Zeitraums sind, in welchem die lebendige Kraft von dem Werth l in den Werth L übergegangen ist.

Erfolgt die Drehung der Linie $\mathfrak{L}$ mit unveränderlicher Geschwindigkeit, so ist W constant und dann wird

$$\underset{\mathfrak{G}}{W} = \frac{q}{2g} W^2 \left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)$$

Erfolgt überdiess die Bewegung des Punktes O mit gleichförmiger Geschwindigkeit oder bleibt derselbe ruhend, an einem gewissen Ort, so ist $\underset{\mathfrak{F}}{W} = 0$.

80) ***Druck des Atoms gegen die Bahn bei einer erzwungenen relativen Bewegung in einer Ebene.*** Ist ein Atom gezwungen, sich längs einer in Bewegung befindlichen Bahn von unveränderlicher Form zu bewegen, so übt es gegen dieselbe in jedem Augenblick einen Druck $\mathfrak{P}$ aus, welcher sich vermittelst der in dem Vorhergehenden gewonnenen Resultaten leicht bestimmen lässt.

Wir haben nämlich gesehen, dass die Resultirende aller äusseren auf das Atom einwirkenden Kräfte der Richtung und Grösse nach übereinstimmt mit der Resultirenden aus den Kräften $\mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{T}$. Zerlegt man nun jede dieser Kräfte in eine tangentiale und in eine normale Kraft, so muss die Summe aller aus $\mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{T}$ entspringenden Normalkräfte gleich sein der Summe der Normalkräfte aus sämmtlichen äusseren Kräften, zu welchen auch der Druck der Bahn gegen das Atom gehört.

Man hat daher, wenn man den Druck der Bahn gegen das Atom mit $\mathfrak{P}$, die Resultirende aller übrigen äusseren Kräfte mit $\mathfrak{A}$ und die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{T}$ mit der Richtung von $\mathfrak{D}$ bilden, mit ($\mathfrak{F}$), (E), ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{T}$) bezeichnet, folgende Gleichung

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{R}\ \mathrm{Cos.}\,(\mathfrak{R}) + \mathfrak{F}\ \mathrm{Cos.}\,(\mathfrak{F}) + \mathfrak{E}\ \mathrm{Cos.}\,(\mathfrak{E}) + \mathfrak{T}\ \mathrm{Cos}\,(\mathfrak{T}) = \mathfrak{A}\ \mathrm{Cos.}\,(\mathfrak{A}) + \mathfrak{P}$$

Je nachdem der aus dieser Gleichung sich ergebende Werth von $\mathfrak{P}$ positiv oder negativ ausfällt, erfolgt der Druk der Bahn gegen das Atom in der Richtung von $\mathfrak{D}$ oder in entgegengesetzter Richtung.

81) ***Relative Bewegung eines Atoms im Raume gegen ein in Bewegung befindliches Axensystem.*** Betrachten wir nun den allgemeinsten Fall der relativen Bewegung eines Atoms im Raume, nämlich die relative krummlinige Bewegung eines Atoms gegen ein rechtwinkliches Axensystem, das sich auf beliebige Weise im Raum bewegt, dessen Anfangspunkt O also in einer beliebigen krummen Linie mit beschleunigter Geschwindigkeit im Raume fortschreitet, während gleichzeitig die Axen O x, O y, O z des Systems ihren Ort und ihre Lage beliebig ändern.

In irgend einem bestimmten Zeitmoment wird sich das Atom relativ gegen das Axensystem an einem gewissen Ort befinden, und wird sich gegen die Axen nach einer gewissen Richtung mit einer gewissen relativen Geschwindigkeit V bewegen. Gleichzeitig wird sich das Axensystem um eine gewisse Momentanaxe drehen und wird der Anfangspunkt nach einer gewissen Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit im Raume fortschreiten. In dem auf jenen Zeitmoment folgenden unendlich kleinen Zeittheilchen t werden sich aber diese verschiedenen Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen um unendlich wenig ändern.

Die absolute Bewegung des Atoms während dieses Zeittheilchens kann nun in folgende Bewegungen zerlegt werden:

1) In eine beschleunigte drehende Bewegung des Atoms um die Momentanaxe, d. h. in diejenige Bewegung, welche das Atom machen müsste, wenn es seinen relativen Ort gegen das Axensystem nicht änderte, und der Anfangspunkt O keine Bewegung hätte.

2) In eine fortschreitende Bewegung des Atoms nach einer Richtung, die zugleich senkrecht steht auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit des Atoms und auf der Richtung der Momentanaxe. Denkt man sich nämlich durch das Atom eine Linie parallel mit der Momentanaxe gezogen und durch diese Linie und durch die Richtung der relativen Bewegung eine Ebene E gelegt, so ist dies die Ebene, in welcher sich das Atom während der Zeit t in seiner relativen Bewegung fortbewegt; allein diese Ebene selbst dreht sich um die Momentanaxe; das Atom hat also nicht nur eine Bewegung in der Ebene, sondern auch eine Bewegung mit derselben, also eine Bewegung nach einer auf diese Ebene senkrechten Richtung.

3) In eine Fortschrittsbewegung, die mit jener des Anfangspunktes O des Axensystems übereinstimmt.

4) In die relative Bewegung des Atoms gegen das Axensystem.

Bestimmt man nun die idealen Kräfte, welche im Stande wären, diese Einzelbewegungen zu veranlassen, so muss die Resultirende aus denselben gleich und gleich gerichtet sein der Resultirenden aller äusseren auf das Atom einwirkenden Kräfte, zu welchen äussern Kräften in dem Falle, wenn das Atom gezwungen wäre, sich auf einer starren Fläche oder Linie zu bewegen, der Druck gerechnet werden muss, mit welchem die Fläche oder Linie gegen das Atom wirkt.

Die Kräfte, welche diesen Einzelbewegungen entsprechen, sind nun folgende:

1) Der drehenden Bewegung des Atoms um die Momentanaxe entsprechen: a) eine Centripetalkraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$, wobei W die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Momentanaxe und R die Entfernung des Atoms von der Momentanaxe bezeichnet; b) eine auf R und auf die Richtung der Momentanaxe senkrecht gerichtete Kraft $\mathfrak{T} = \frac{q}{g} \frac{R w}{t}$, welche der Beschleunigung der Drehbewegung entspricht. In diesem Ausdruck bezeichnet w die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit im Zeitelement t.

2) Der fortschreitenden Bewegung des Atoms nach einer Richtung, die zugleich senkrecht steht auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit und auf der Richtung der Momentanaxe entspricht eine Kraft $\mathfrak{D} = 2 \cdot \frac{q}{g} V W \sin. \delta$, wobei V die relative Geschwindigkeit des Atoms und δ den Winkel bezeichnet, unter welchem die Richtung der relativen Geschwindigkeit gegen die Richtung der Momentanaxe geneigt ist.

Denkt man sich nämlich durch das Atom eine zur Momentanaxe parallele Linie gezogen, so entfernt sich das Atom von dieser Linie im Zeitelement t um $V t \sin. \delta$. Da sich aber gleichzeitig die Ebene E um einen Winkel $W t$ wendet, so legt das Atom nach einer auf E senkrechten Richtung einen Weg zurück, der gleich ist der Länge eines Kreisbogens, welchem ein Halbmesser $V t \sin. \delta$ und einem Centriwinkel $W t$ entspricht, dessen Länge also gleich $V t \sin. \delta \times W t = V W \sin. \delta t^2$ ist. Zur Bestimmung der Kraft $\mathfrak{D}$, welche diese Bewegung hervorzubringen vermöchte, hat man also die Gleichung

$$V W \sin. \delta t^2 = \frac{1}{2} g \frac{\mathfrak{D}}{q} t^2$$

demnach wird

$$\mathfrak{D} = 2 \frac{q}{g} V W \sin. \delta$$

Was die Richtung dieser Kraft betrifft, so ist zu bemerken, dass sie im Sinne der Drehung wirkend gedacht werden muss.

3) Der Fortschrittsbewegung des Anfangspunktes O der Coordination entsprechen zwei Kräfte $\mathfrak{F}_t$ und $\mathfrak{F}_r$. Nennt man: C die Geschwindigkeit des Punktes O am Anfange des Zeitelements t, c die Geschwindigkeitsänderung desselben im Zeitelement t, r den Krümmungshalbmesser des vom Punkt O im Zeitelement t beschriebenen Bahnelementes, so sind die numerischen Werthe jener Kräfte:

$$\mathfrak{F}_t = \frac{q}{g} \frac{c}{t}, \quad \mathfrak{F}_r = \frac{q}{g} \frac{C^2}{r}$$

Die Richtung der ersteren stimmt mit jener von C überein oder ist ihr entgegengesetzt, je nachdem c eine Geschwindigkeitszunahme oder eine Geschwindigkeitsabnahme bedeutet.

Die Richtung der zweiten Kraft zielt parallel mit der Richtung, die von O nach dem Krümmungsmittelpunkt geht.

4) Die Kräfte, welche der relativen Bewegung entsprechen, bestehen wiederum aus einer tangentialen Beschleunigungskraft $\mathfrak{R}_t = \frac{q}{g} \frac{v}{t}$ und aus einer normalen Ablenkungskraft $R_\varrho = \frac{q}{g} \frac{V^2}{\varrho}$. Die Richtung der ersteren stimmt mit jener von V überein oder ist ihr entgegengesetzt, je nachdem v eine Geschwindigkeitszunahme oder eine Geschwindigkeitsabnahme bedeutet. Die Richtung der zweiten Kraft zielt von dem Atom aus nach dem Krümmungsmittelpunkt hin.

Um die Gleichungen der relativen Bewegung des Atoms aufzustellen, muss man eine freie Bewegung des Atoms von einer erzwungenen unterscheiden.

Im ersteren Falle erhält man zur Bestimmung der relativen Bewegung drei Gleichungen, die sich ergeben, indem man die Resultirende aller unter 1, 2, 3 und 4 bestimmten Kräfte gleich setzt der Resultirenden aller wirklich auf das Atom einwirkenden Kräfte.

Im letztern Falle müssen nicht nur die Beziehungen zwischen den Resultirenden der idealen und wirklichen äusseren Kräften, sondern auch noch die Gleichungen der Bahn oder der Fläche, welcher das Atom zu folgen gezwungen ist, berücksichtigt werden.

82) *Bestimmung der lebendigen Kraft, welche der relativen Bewegung eines Massensystems gegen ein Axensystem entspricht.* Alles, was in Nr. 79 über die relative Bewegung eines isolirten Atoms

gegen ein in Bewegung befindliches Axensystem gesagt wurde, gilt auch von jedem Atom eines Atomsystems, das sich unter der Einwirkung von inneren und äusseren Kräften gegen ein in Bewegung befindliches Axensystem bewegt. Es muss nämlich die Resultirende aller idealen Kräfte, welche der Bewegung eines einzelnen Atoms des Systems entsprechen, gleich und gleich gerichtet sein der Resultirenden aller äusseren und inneren Kräfte, welche in der That auf dieses Atom einwirken, und es muss ferner die der relativen Bewegung des Atoms entsprechende in einer gewissen endlichen Zeit eintretende Aenderung der lebendigen Kraft gleich sein der Summe der relativen Wirkungen der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kräfte $\mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \mathfrak{F}$ und der nach ihrer wirklichen Richtung genommenen Resultirenden $\mathfrak{A}$ aller äusseren und inneren Kräfte, welche in der That auf das Atom einwirken.

Nennt man also $\mathfrak{W}_{\mathfrak{C}}, \mathfrak{W}_{\mathfrak{T}}, \mathfrak{W}_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$ die relativen Wirkungen, welche diese Kräfte entwickeln, während die lebendige Kraft des Atoms von l in L übergeht, so hat man:

$$L - l = \mathfrak{W}_{\mathfrak{C}} + \mathfrak{W}_{\mathfrak{T}} + \mathfrak{W}_{\mathfrak{F}} + \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$$

Werden die allen Atomen des Systems entsprechenden ähnlichen Gleichungen addirt, so erhält man:

$$\Sigma L - \Sigma l = \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{C}} + \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{T}} + \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{F}} + \Sigma \mathfrak{W}_{\mathfrak{A}}$$

wodurch die Aenderung der totalen lebendigen Kraft bestimmt ist.

Betrachtet man die Bedeutung der Kräfte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{F}$, so überzeugt man sich leicht, dass es diejenigen Kräfte sind, welche auf jedes Atom des Atomsystems einwirken müssten, wenn es seine relative Lage gegen das Axensystem nicht änderte.

Anwendungen der Gesetze der relativen Bewegung.

83) *Erste Aufgabe.* Eine Röhre, welche eine Kugel enthält, werde in einer horizontalen Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen Punkt O ihrer Axe gedreht; man soll die Bewegung der Kugel in der Röhre und ihren Druck gegen die Röhre bestimmen.

In diesem Falle wird die Kugel nur allein durch die Centrifugalkraft $\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R$ längs der Röhre beschleunigt; man hat daher, wenn man die Geschwindigkeitszunahme der Kugel in einem Zeitelement dt mit dV bezeichnet zur Bestimmung von V die Gleichung:

$$\frac{q}{g} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{q}{g} W^2 R$$

oder:

$$\frac{dV}{dt} = W^2 R$$

Es ist aber auch $V = \frac{dR}{dt}$, daher

$$V\,dV = W^2\ R\,dR.$$

Ist V_0 die relative Geschwindigkeit der Kugel in einem Zeitmoment, in welchem ihre Entfernung vom Drehungspunkt O gleich R_0, so findet man durch Integration dieser Gleichung:

$$V = \sqrt{V_0^2 + W^2 (R^2 - R_0^2)}$$

Der Druck $\mathfrak{P}$ der Röhre gegen die Kugel ist gleich der Ablenkungskraft $\mathfrak{D}$. Man hat daher

$$\mathfrak{P} = 2\ \frac{q}{g}\ V\ W$$

oder wenn man für V seinen Werth setzt:

$$\mathfrak{P} = 2\ \frac{q}{g} W\ \sqrt{V_0^2 + W^2 (R^2 - R_0^2)}$$

Zweite Aufgabe. Eine gerade Röhre, welche eine Kugel enthält, werde durch ein constantes Drehungsmoment $\mathfrak{M}$ in einer horizontalen Ebene um einen in ihrer Axe liegenden Punkt O gedreht; man soll die Bewegung der Kugel in der Röhre und die Bewegung der Röhre bestimmen.

In diesem Fall hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q}{g}\frac{dV}{dt} &= \frac{q}{g}\ W^2\ R \\ V &= \frac{dR}{dt} \\ \mathfrak{M} = \mathfrak{P}\ R &= 2\ \frac{q}{g}\ V\ W\ R \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (a)$$

Die Werthe von dt und von W, welche sich aus der zweiten und dritten Gleichung ergeben, in die erste eingeführt, so erhält man:

$$V^3\,dV = \left(\frac{\mathfrak{M}\,g}{2q}\right)^2 \frac{dR}{R}$$

Hieraus folgt durch Integrationen:

$$V = \sqrt[4]{V_0^4 + 4\left(\frac{\mathfrak{M}\,g}{2q}\right)^2 \text{lognat.} \left(\frac{R}{R_0}\right)}$$

wobei V_0 die relative Geschwindigkeit der Kugel gegen die Röhre in dem Augenblick bezeichnet, in welchem ihre Entfernung von O gleich R_0 ist.

Durch Einführung dieses Werthes von V in die dritte der Gleichungen (a) findet man:

$$W = \frac{\frac{\mathfrak{M}\, g}{2\, q}}{R \sqrt[4]{V_0^4 + 4\left(\frac{\mathfrak{M}\, g}{2\, q}\right)^2 \text{lognat.}\left(\frac{R}{R_0}\right)}}$$

Dritte Aufgabe. Eine gerade Röhre, in welcher sich eine Kugel befindet, werde in einer horizontalen Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen Punkt O gedreht, dessen Abstand von der Axe der Röhre gleich e ist: zu bestimmen die Bewegung der Kugel in der Röhre und den wechselseitigen Druck derselben.

Hier kommen wiederum nur allein die Kräfte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in Betrachtung. Zerlegt man $\mathfrak{C}$ in zwei Kräfte, von denen die eine längs der Röhre, die andere senkrecht auf dieselbe gerichtet ist, so ist erstere die Beschleunigungskraft der relativen Bewegung, und bestimmt letztere in Verbindung mit $\mathfrak{D}$ den Druck der Kugel gegen die Röhre. Man hat daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{q}{g}\frac{dV}{dt} &= \mathfrak{C} \cos \varphi \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{D} + \mathfrak{C} \sin. \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, den die Axe der Röhre mit R bildet.

Bezeichnet man durch x die auf der Axe der Röhre gemessene Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von dem Fusspunkt des von O auf die Axe gefällten Perpendikels, so ist

$$\sin. \varphi = \frac{e}{R}$$

$$\cos. \varphi = \frac{x}{R}$$

$$V = \frac{dx}{dt}$$

und da man ferner auch noch hat:

$$\mathfrak{C} = \frac{q}{g} W^2 R, \quad \mathfrak{D} = 2 \frac{q}{g} V W$$

so verwandeln sich die Gleichungen (a) in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= W^2 x \\ \mathfrak{P} &= \frac{q}{g} \{ 2 V W + W^2 e \} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Aus der ersteren dieser Gleichungen folgt wegen:

$$V\,dt = dx$$
$$V\,dV = W^2\,x\,dx$$

demnach durch Integration:

$$V = \sqrt{V_0^2 + W^2\,(x^2 - x_0^2)}$$

wobei V_0 die relative Geschwindigkeit bezeichnet, welche in dem Moment vorhanden ist, in dem x gleich x_0.

Setzt man diesen Werth von V in die zweite der Gleichungen (b), so erhält man:

$$\mathfrak{P} = \frac{q}{g} W \left\{ 2\sqrt{V_0^2 + W^2\,(x^2 - x_0^2)} + W\,e \right\}$$

Vierte Aufgabe. Eine ebene aber krumme Röhre, welche eine Kugel enthält, werde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen Punkt O gedreht, der in der Ebene der Röhre liegt: die Bewegung der Kugel in der Röhre und den wechselseitigen Druck zwischen Kugel und Röhre zu bestimmen.

Nennt man α den Winkel, den die Richtungen von R und V bilden, und zerlegt die Centrifugalkraft $\mathfrak{C}$ in eine tangentiale und in eine normale Kraft, so bestimmt erstere die Beschleunigungskraft der relativen Bewegung und letztere in Verbindung mit $\mathfrak{D}$ und mit dem Druck $\mathfrak{P}$ der Röhre gegen die Kugel die normale Ablenkungskraft der relativen Bewegung. Man hat daher:

$$\frac{q}{g}\,\frac{dV}{dt} = \frac{q}{g}\,W^2\,R\cos.\alpha$$

$$\frac{q}{g}\,\frac{V^2}{\varrho} = 2\,\frac{q}{g}\,W\,V - \frac{q}{g}\,W^2\,R\sin.\alpha + \mathfrak{P}$$

Multiplizirt man die erstere dieser Gleichungen mit V dt und lässt den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{q}{g}$ weg, so ergibt sich:

$$V\,dV = W^2\,R\,V\cos.\alpha\,dt$$

allein es ist V dt das Wegelement, das der Mittelpunkt der Kugel in seiner relativen Bewegung im Zeitelement dt zurücklegt, demnach V cos. α dt die Projektion dieses Wegelements auf der Richtung von R, daher V cos. α dt = dR und

$$V\,dV = W^2\,R\,dR$$

Durch Integration dieser Gleichung findet man auch hier wiederum:

$$V = \sqrt{V_0^2 + W^2\,(R^2 - R_0^2)}$$

Der Werth von $\mathfrak{P}$ wird:

$$\mathfrak{P} = \frac{q}{g}\left\{W^2\,R\sin.\alpha + \frac{V^2}{\varrho} - 2\,W\,V\right\}$$

Allgemeine Bewegungsgesetze.

84) ***Mittlere Werthe eines Massensystems.*** In jedem Massensystem entspricht in jedem bestimmten Augenblick seines ruhigen oder bewegten Seins jedem einzelnen Massenpunkt in irgend einer Hinsicht ein gewisser Werth. Jeder Massenpunkt befindet sich z. B. in einem gewissen Zeitmoment in einer gewissen Entfernung von einem beliebig gewählten fixen oder beweglichen Punkt, oder jeder Massenpunkt befindet sich in einer gewissen Entfernung von einer willkührlich angenommenen Ebene, oder jeder Massenpunkt hat eine gewisse Geschwindigkeit oder eine gewisse lebendige Kraft.

Der mittlere Werth, welcher dem Massensystem in irgend einer Hinsicht zukommt, ist nun derjenige constante Werth, den jede Masse besitzen müsste, damit der totale Werth des Massensystems dem wirklich vorhandenen Werth gleich käme.

Nennt man m, m_1 m_2 ... die einzelnen Massentheilchen des Systems, y, y_1, y_2 ... die Werthe (Entfernungen, Geschwindigkeiten etc.), welche den Massenpunkten in irgend einem Zeitmoment entsprechen, Y den mittleren Werth, aller y für das ganze System, so hat man:

$$Y(m + m_1 + m_2 + \dots) = y m + y_1 m_1 + y_2 m_2 \dots$$

oder

$$Y = \frac{y m + y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots}{m + m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$$

Man kann sich die Sache auch graphisch anschaulich machen.

Scheidet man auf eine gerade Linie einzelne Längen ab, von denen jede einzelne so viele Längeneinheiten misst, als die einzelnen Massen Masseeinheiten enthalten; errichtet in den Abschnittspunkten Perpendikel und trägt auf dieselben die den einzelnen Massenpunkten zukommenden Werthe von y y_1 auf, so ist die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke gleich

$$m y + m_1 y_1 + m_2 y_2 \dots$$

und der mittlere Werth von y ist nun, dem Begriff vom mittleren Werth einer Grösse gemäss, nichts anderes, als die Höhe Y eines Rechtecks, das einen eben so grossen Flächeninhalt darbietet, als alle einzelnen Rechtecke zusammen. Es ist also:

$$Y(m + m_1 + m_2 + -) = m y + m_1 y_1 + \dots$$

demnach:

$$Y = \frac{m y + m_1 y_1 + \dots}{m + m_1 + -} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$$

Wir wollen von diesem Satz einige Anwendungen machen.

85) ***Der Mittelpunkt eines Massensystems.*** Der Ort jedes Punktes

eines Massensystems kann durch seine Coordinaten in Bezug auf drei unter rechtem Winkel sich schneidende fixe Ebenen bestimmt werden. Nennt man $m \; m_1 \; m_2 \; \ldots$ die Massen der einzelnen Punkte des Systems $x, y, z \; x_1 \; y_1 \; z_1 \ldots$ die Coordinaten dieser Massenpunkte in Bezug auf die drei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen, X, Y, Z die Coordinaten des mittleren Ortes des Massensystems, welchen Ort wir den Mittelpunkt des Massensystems nennen wollen, so hat man zur Bestimmung desselben die Gleichungen:

$$X = \frac{\Sigma\, m\, x}{\Sigma\, m}, \quad Y = \frac{\Sigma\, m\, y}{\Sigma\, m}, \quad Z = \frac{\Sigma\, m\, z}{\Sigma\, m}$$

86) *Mittlere fortschreitende Bewegung eines Massensystems.* Nennt man $u, v, w \; u_1 \; v_1 \; w_1 \; \ldots$ die Geschwindigkeiten, mit welchen die Massen $m \; m_1 \; m_2 \ldots$ eines in Bewegung befindlichen Systems nach drei auf einander senkrechten Richtungen fortschreiten, U, V, W die mittlere Fortschrittsgeschwindigkeit des Systems nach den gleichen Richtungen, so ist:

$$U = \frac{\Sigma\, m\, u}{\Sigma\, m}, \quad V = \frac{\Sigma\, m\, v}{\Sigma\, m}, \quad W = \frac{\Sigma\, m\, w}{\Sigma\, m}$$

und diese Werthe von U, V, W sind nichts anderes, als die Geschwindigkeit, mit welcher während der Bewegung aller einzelnen Massen des Systems der denselben in jedem Augenblick entsprechende Mittelpunkt nach jenen drei Richtungen sich bewegt.

87) *Innere und äussere Kräfte eines Massensystems.* Die Bewegungen, welche die Dynamik betrachtet, betreffen entweder einen einzelnen grösseren oder kleineren Körper, oder eine Gesammtheit von Körpern, die in einer gewissen Beziehung zu einander stehen, und in diesem Falle ein System von Körpern genannt werden, oder endlich: sie betreffen die Gesammtheit aller Körper, also das Weltall. Streng genommen ist nur das Atom als ein einfacher Körper anzusehen; einzelne starre, elastische, weiche oder flüssige Massen sind bereits als Massensysteme zu betrachten. Um so viel mehr werden Zusammensetzungen aus solchen Körpern, wodurch die Maschinen entstehen, Massensysteme genannt werden müssen. Eben so bilden Theile der ganzen Erde oder die Erde selbst, so wie die Gesammtheit der Planeten mit der Sonne, Massensysteme.

Um die Bewegung eines Massensystems kennen zu lernen, muss man die Gesammtheit der Kräfte in Betrachtung ziehen, welche auf alle einzelnen Theile oder Punkte desselben einwirken, und die Gesammtheit dieser Kräfte kann in zwei Klassen getheilt werden.

Die Kräfte der ersten Art nennt man *innere* Kräfte, und begreift darunter die Anziehungen oder Abstossungen der Atome unter einander, aus welchen das Massensystem besteht.

Jede innere Kraft hat also ihren Sitz in einem Atom, das dem System angehört, und wirkt anziehend oder abstossend auf ein anderes ebenfalls dem System angehöriges Atom.

Die Kräfte der zweiten Art nennt man äussere Kräfte des Systems, und begreift darunter die Anziehungen oder Abstossungen, welche Körper, die dem System nicht angehören, gegen die Massen des Systems ausüben. Jede äussere Kraft hat also ihren Sitz in einem Atom, das nicht zum Massensystem gehört, wirkt dagegen auf die Atome des Massenystems.

Aus dem Gesetz der Wechselwirkung zweier Atome auf einander folgt, dass die inneren Kräfte immer paarweise, die äusseren Kräfte dagegen nur einzelweise vorhanden sind. Denn wenn ein Atom A, das dem System angehört, auf ein anderes Atom B des Systems anziehend oder abstossend einwirkt, so wirkt auch B auf A mit gleicher Energie anziehend oder abstossend zurück, und beide Kräfte haben auf die Bewegung des Systems Einfluss. Wenn dagegen ein Atom C, das einem Körper angehört, der nicht als zum System gehörig gerechnet wird, auf ein Atom D des Systems anziehend oder abstossend wirkt, so findet zwar auch eine Rückwirkung von D auf C statt; diese kommt aber nicht in Betrachtung, wenn die Bewegung des Systems, welchem A, B und D angehört, aufgefunden werden soll.

Dieses paarweise Auftreten der inneren und einzelnweise Vorhandensein der äusseren Kräfte, begründet einen wesentlichen Unterschied in den dynamischen Erfolgen, welche sie hervor bringen, und dies ist der Grund ihrer Sonderung.

Zur Erläuterung dieses Gegenstandes werden nachstehende Beispiele geeignet sein.

Auf einen in die Luft geworfenen Stein wirken ein a) die anziehenden und abstossenden Kräfte der Atome des Steins gegen einander. b) Die Anziehung der Erde. c) Die Anziehung aller im Weltraum befindlichen Massen. d) Der Luftwiderstand, und es sind die ersteren unter a) angeführten Kräfte die inneren, alle übrigen zusammen die äusseren auf den Stein einwirkenden Kräfte.

Bei einem fliegenden Vogel sind die Muskelkräfte, durch welche die Theile seines Körpers gegen einander bewegt werden, so wie überhaupt alle Kräfte, womit die Theile des Körpers gegen einander anziehend oder abstossend einwirken, die inneren Kräfte; der Luftwiderstand und die Anziehung der Erde sind dagegen die äusseren Kräfte.

Wenn ein Wagenzug durch eine Lokomotive auf einer Eisenbahn fortbewegt wird, sind die auf den ganzen Train einwirkenden inneren Kräfte a) die Repulsivkraft des Dampfes; b) die sämmtlichen Molekularkräfte, durch welche die Theile des Körpersystems gegen einander wirken; c) die wechselseitige Pressung aller in Berührung stehenden

Körper mit Ausnahme der Pressung der Räder gegen die Bahn; d) die Reibungen aller Theile, welche in Berührung stehen und gegen einander gepresst werden, mit Ausnahme der Reibung der Räder auf der Bahn. Die äusseren Kräfte sind dagegen: a) die Wirkungen der Bahn gegen die Räder; b) die Anziehung der Erde gegen alle Theile des Wagenzuges; c) der Luftwiderstand etc.

Wenn eine Mahlmühle, die mit einem Wasserrad versehen ist, durch Wasser getrieben wird, sind zu den äusseren Kräften zu zählen: a) der Druck des Wassers gegen die Schaufeln oder Zellen des Rades; b) die Gewichte aller Theile des Mühlenbaues; zu den inneren Kräften dagegen gehören: a) die wechselseitigen Pressungen der in Berührung stehenden Maschinentheile; b) die aus diesen Pressungen entspringenden Reibungen etc.

88) *Bewegung eines trägen Systems.* Befindet sich eine einzelne starre Masse oder ein System von Massen in Bewegung, und ist es dabei ganz und gar seiner eigenen Trägheit überlassen, also weder von treibenden noch von hemmenden Kräften gestört, so ist kein Grund zu einer Aenderung der in dem ganzen System in irgend einem Zeitmoment enthaltenen lebendigen Kraft vorhanden; diese Bewegung muss also in der Art vor sich gehen, dass die lebendige Kraft des ganzen Systems, d. h. dass die Summe der lebendigen Kraft aller einzelnen Massenpunkte für jeden Zeitmoment den gleichen Werth hat. Dieses Gesetz hat man das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kraft eines Systems von trägen Massen genannt. In manchen Fällen wird demselben Genüge gethan, wenn jeder Massenpunkt seine lebendige Kraft unveränderlich beibehält, und dann erfolgt die Bewegung jedes Punktes mit Gleichförmigkeit. In andern Fällen kann, vermöge des zwischen den Massen des Systems bestehenden Zusammenhanges, eine solche Gleichförmigkeit des Beharrungszustandes nicht eintreten, und dann erfolgt die Bewegung in der Regel so, dass sich die lebendige Kraft und die Geschwindigkeit jedes Massenpunktes periodisch ändert, ohne dass eine Aenderung in der totalen Summe der lebendigen Kräfte sämmtlicher Massenpunkte eintritt. Wird eine einzelne starre Masse oder ein System von Axen, das durch runde Zahnräder oder durch Rollen und Riemen im Zusammenhang steht, sich selbst überlassen, so erfolgt die Bewegung jedes Punktes mit Gleichförmigkeit. Wird dagegen ein System von Axen, die durch unrunde, z. B. durch elyptisch gestaltete Zahnräder in Verbindung stehen, oder ein System von Massen, von denen einzelne sich um Axen drehen, während andere gezwungen sind, eine geradlinig oder bogenförmig hin- und hergehende Bewegung zu machen, sich selbst überlassen, so erfolgt die Bewegung nicht mit Gleichförmigkeit, sondern mit Periodizität. Der Massenzusammenhang des Kolbens, der Kolbenstange, der Schubstange

oder Kurbel und des Schwungrades einer Dampfmaschine bedingt z. B. einen periodischen Beharrungszustand. Um den Gewichtseinfluss dieser Körper auf die Bewegung zu beseitigen, braucht man nur die Axe des Cylinders horizontal und die Axe des Schwungrades vertikal anzunehmen; oder man kann sich die ganze Maschine nach dem Mittelpunkt der Erde versetzt denken, wobei die Gewichte ganz verschwinden, während die Massen bleiben. Ist der Kolben in der Mitte seines Schubes, so ist in den hin- und hergehenden Massen eine gewisse lebendige Kraft enthalten; befindet sich dagegen der Kolben am Anfange oder am Ende eines Schubes, so haben diese Massen keine Geschwindigkeit, also auch keine lebendige Kraft; dafür muss aber nun die lebendige Kraft des Schwungrades grösser sein, als da wo der Kolben auf halbem Schub war. Da die Massen, welche hin- und hergehen am Anfang und am Ende eines jeden Schubes keine Geschwindigkeit besitzen, so müssen sie während der ersten Hälfte des Schubes von dem Schwungrad nachgeschleppt werden, wo sie hingegen während der zweiten Hälfte des Schubes auf das Schwungrad treibend wirken. Die Geschwindigkeit des letzteren nimmt also in der ersten Hälfte des Schubes fortwährend ab, in der zweiten Hälfte dagegen fortwährend zu. Bei halbem Schub ist seine Geschwindigkeit ein Minimum; am Anfang und Ende jedes Schubes ein Maximum.

Denkt man sich zwei Drehungsaxen, die einen Winkel bilden und sich scheiden, durch einen Hook'schen Schlüssel (Universalgelenk) verbunden und jede derselben mit einem Schwungrad versehen, so hat man ebenfalls ein System von Massen, das, wenn es in Bewegung versetzt und sich dann überlassen wird, einen periodischen Beharrungszustand annimmt. Durch dieses Universalgelenk werden nämlich die Axen in der Art verbunden, dass das Verhältniss ihrer Winkelgeschwindigkeit nicht constant, sondern eine gewisse Funktion des, von irgend einer Position des Gelenkes an gerechneten, Wendungswinkels einer dieser Axen ist. Nennt man z. B. M M_1 die Trägheitsmomente der Schwungräder sammt den Axen, mit welchen sie verbunden sind, $f(\varphi)$ jene Funktion des Wendungswinkels, W die Winkelgeschwindigkeit von M in irgend einem Zeitmoment, so ist $W f(\varphi)$ die Winkelgeschwindigkeit von M_1 in dem gleichen Zeitmoment. Die Bewegung muss nun so erfolgen, dass

$$M W^2 + M_1 W^2 \overset{2}{f}(\varphi) = \text{const.}$$

d. h. es ist:

$$W^2 = \frac{\text{const.}}{M + M_1 f^2(\varphi)}$$

Bewegung eines Massensystems unter der Einwirkung von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten.

89) *Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit.* Wenn ein in Bewegung befindliches System von starren Massen von Kräften begleitet wird, die sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten, so muss die Bewegung so erfolgen, wie wenn diese Kräfte gar nicht vorhanden und das ganze Massensystem nur seiner Trägheit überlassen wäre. Die Bewegung erfolgt demnach in der Art, dass die totale lebendige Kraft des Massensystems in jedem Augenblick während der Bewegung den gleichen Werth hat.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Begriff des Gleichgewichtes. Kräfte halten sich an einem ruhenden System von Körpern das Gleichgewicht, wenn sie keine Bewegung hervor bringen, und an einem bewegten System, wenn ihre Anwesenheit auf die Bewegung keinen Einfluss hat.

Die Bedingungen, bei deren Erfüllung ein System von Kräften im Gleichgewicht ist, können vermittelst des Begriffes von Wirkungsgrösse leicht aufgefunden werden. Ist das System im Zustand der Bewegung, so werden die Angriffspunkte der Kräfte gewisse Wege zurück legen, es werden daher in jedem Zeitelement gewisse Wirkungen produzirt und consumirt; wenn aber dennoch die Bewegung so erfolgt, wie wenn die Kräfte gar nicht vorhanden wären, so muss nothwendig die Summe der Wirkungen, welche in einem Zeitelement produzirt werden, eben so gross sein, als die Summe der consumirten Wirkungen.

Nennt man also K_1, K_2, K_3 .... die Kräfte, welche die Bewegung begünstigen, deren Angriffspunkte also während eines gewissen Zeitelements t vorwärts schreiten; H_1, H_2, H_3 .... die Kräfte, welche die Bewegung zu hindern suchen, deren Angriffspunkte demnach zurück weichen; k_1, k_2, k_3 .... h_1, h_2, h_3 .... die Projektionen der Wege, welche die Angriffspunkte im Zeitelemente t zurück legen, auf die Richtungen der Kräfte, so sind $K_1 k_1$, $K_2 k_2$, $K_3 k_3$ .... die produzirten, $H_1 h_1$, $H_2 h_2$, $H_3 h_3$ .... die consumirten Wirkungrn, und die Bedingung des Gleichgewichts ist demnach:

$$K_1 h_1 + K_2 k_2 + K_3 k_3 \ldots . = H_1 h_1 + H_2 h_2 + \ldots .$$

oder:

$$\Sigma K k = \Sigma H h. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Halten sich die Kräfte fortdauernd das Gleichgewicht, so muss dieser Bedingungsgleichung in jedem Zeitelement entsprochen werden. Halten sie sich nur in einem einzelnen Zeitmoment das Gleichgewicht, so ist diese Gleichung nur für den Gleichgewichtsmoment richtig. Wird das System in irgend einem Augenblick seiner Bewegung angehalten, so dass es in Ruhe kommt, dann aber wiederum frei gelassen, so werden die Kräfte K, K_1 ... H_1, H_2 ... der Bedingungsgleichung (1) entsprechen und keine Bewegung hervor bringen. Verschiebt man aber nun das ganze System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition, so werden dabei die Kräfte abermals gewisse Wirkungen theils produziren, theils consumiren; es ist aber klar, dass dabei die Summe der produzirten Wirkungen gleich der Summe der consumirten sein muss.

Diese Grundbedingung des Gleichgewichts der Kräfte hat man das »Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit« genannt, und es kann nun vermittelst des einmal festgesetzten Begriffes von Wirkung ganz einfach ausgedrückt werden, wie folgt:

1) Wenn Kräfte an einem ruhenden System von Körpern im Gleichgewichte sind, so ist, wenn man das ganze System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition verschiebt, die Summe der Wirkungen, welche dabei die Kräfte entwickeln, deren Angriffspunkte in Folge der Verschiebung vorwärts schreiten, eben so gross, als die Summe der Gegenwirkungen, welche den Kräften entspricht, deren Angriffspunkte zurückweichen.

2) Wenn Kräfte an einem bewegten System im Gleichgewichte sind, so ist die Summe der Wirkungen, welche während jedes einzelnen Zeitelementes von denjenigen Kräften entwickelt werden, deren Angriffspunkte vorwärts schreiten, eben so gross, als die Summe der Gegenwirkungen der Kräfte, deren Angriffspunkte bei der Bewegung zurückweichen.

Dieses Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit drückt nichts anderes aus, als die Bedingungen des Unthätigseins der Kräfte; man könnte es daher füglich das Gesetz des Unthätigseins der Kräfte nennen. Maupertuis nennt es das Gesetz der Ruhe; eine Benennung, die desshalb nicht zweckmässig ist, weil, wie wir gesehen haben, ein Gleichgewichtsverhältniss der Kräfte auch bei einem bewegten System statt finden kann.

Eine Vergleichung der speziellen Gesetze des Gleichgewichtes der Kräfte an den sogenannten einfachen Maschinen hat zur Entdeckung dieses Gesetzes zu einer Zeit geführt, in der die Begriffe von der Wirkung einer Kraft noch nicht bekannt waren.

Es wird noch jetzt oftmals als eine empirische Thatsache von intelligenten Arbeitern, die beständig mit Maschinen umzugehen haben, aufgefunden. Jeder Mechaniker weiss aus Erfahrung, dass man vermittelst einer Maschine mit einem mässigen Druck eine sehr grosse Last heben, oder einen sehr intensiven Widerstand überwinden kann, wenn dieselbe so eingerichtet ist, dass der Angriffspunkt des Widerstandes bedeutend langsamer geht, als der Angriffspunkt der Kraft, dass man aber an Geschwindigkeit genau so viel verliert, als man an Kraft (Druck) gewinnt. Diess ist aber nichts anderes, als das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit in seiner Anwendung auf das Gleichgewicht zweier Kräfte, die an einer Maschine wirken.

Bei allen Maschinen, welche in einen gleichförmigen Beharrungszustand gerathen, halten sich die Kräfte und die Widerstände in jedem Zeitmoment dieses beharrenden Bewegungszustandes das Gleichgewicht, so dass diese Maschinen so fortlaufen, wie wenn gar keine Kräfte auf sie einwirkten.

Diess ist z. B. der Fall bei einer Mahlmühle, die durch ein Wasserrad oder durch eine Turbine getrieben wird, vorausgesetzt, dass der Wasserzufluss einerseits und die Getreidezuleitung andererseits vollkommen gleichförmig statt findet. Auch bei einem Wagenzug, der durch eine Lokomotive auf einer Eisenbahn fortbewegt wird, erfolgt die Bewegung, wenn einmal die Periode der Massenbeschleunigung vorüber ist, so, wie wenn weder Kräfte noch Widerstände, sondern nur träge Massen vorhanden wären. In diesem Beharrungszustand der Bewegung erfüllen also die Kräfte und Widerstände vollkommen die Bedingung, welche das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit für das Gleichgewichtsverhältniss der Kräfte vorschreibt.

90) *Erläuterungen über den Gebrauch des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit.* Um vermittelst des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit die Bedingungen aufzufinden, unter welchen sich Kräfte an einem ruhenden System von Körpern das Gleichgewicht halten, muss man die Wirkungen und Gegenwirkungen berechnen, welche die Kräfte entwickeln und die Widerstände consumiren, wenn das ganze System um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition verschoben wird, ohne den Zusammenhang zu stören, der zwischen den einzelnen Bestandtheilen des Systems besteht. Die Summe der Wirkungen der Summe der Gegenwirkungen gleich gesetzt, so erhält man dann die Bedingung, bei deren Erfüllung die Kräfte gerade diejenige Bewegung nicht hervorbringen werden, welche bei der wirklich vorgenommenen Verschiebung in der That zum Vorschein gekommen sind.

Wenn der Gleichgewichtszustand eines Systems von starren Körpern zu bestimmen ist, so findet man die nach den Richtungen der Kräfte geschätzten Wege, welche die Angriffspunkte in Folge der vorgenommenen Verschiebung zurücklegen, durch rein geometrische Betrachtungen aus den Bestimmungselementen des geometrischen Zusammenhanges, und dadurch ist die Lösung der Gleichgewichtsprobleme, welche starre Körper betreffen, in das Gebiet der Geometrie zurückgeführt.

Gestattet der Zusammenhang nur eine einzige Verschiebung oder gestattet er zwei derselben, von denen eine der andern genau entgegengesetzt ist, so ist zum Bestehen des Gleichgewichts auch nur eine einzige Bedingung nothwendig, die man erhält, wenn man das Prinzip auf eine dieser erlaubten Verschiebungen anwendet. Ist hingegen der Zusammenhang von der Art, dass verschiedene Verschiebungen möglich sind, so erfordert das Bestehen des Gleichgewichts die Erfüllung mehrerer Bedingungen, die sich auf zweierlei Art auffinden lassen; nämlich entweder dadurch, dass man die allgemeinste von allen zulässigen Verschiebungen vornimmt, und darauf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anwendet, oder aber dadurch, dass man mehrere und zwar so viele spezielle Verschiebungen vornimmt, als die Anzahl der unbekannten Grössen beträgt, die für das Bestehen des Gleichgewichts bestimmte Werthe haben müssen, und dann auf jede dieser Verschiebungen das Prinzip anwendet. Im erstern Fall erhält man zunächst nur eine einzige allgemeine Bedingungsgleichung, die aber nothwendig so viele willkührliche Grössen enthalten, und daher in so viele spezielle Gleichungen zerfallen muss, als die Anzahl der Bedingungen beträgt, die erfüllt werden müssen, damit das Gleichgewicht bestehen kann.

Im letzteren Falle liefert jede von den speziellen Verschiebungen unmittelbar eine Bedingungsgleichung des Gleichgewichts. Wenn z. B. die Bedingungen aufgefunden werden sollen, unter welchen Kräfte an einen starren aber vollkommen frei beweglichen Körper sich das Gleichgewicht halten, so kann man diesen Körper auf ganz beliebige Weise um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtsposition verschieben. Eine solche Verschiebung hängt von sechs willkührlichen Grössen ab, von denen drei derselben die Veränderung des Orts und drei andere die Veränderung der Lage des Körpers bestimmen. Wendet man nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit auf diese allgemeine Verschiebung an, so ergibt sich zunächst eine einzige Gleichung, deren Bestandtheile sich so gruppiren lassen, dass sie aus sechs Gliedern besteht, von denen jedes mit einer der sechs willkührlichen Grössen multiplizirt erscheint. Dieser Gleichung kann aber nur entsprochen werden, wenn jeder von den Faktoren, mit welchen die willkührlichen Grössen multiplizirt sind, für sich gleich Null gesetzt wird, und dadurch ergeben sich die bekannten sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der Kräfte an einem starren Körper.

Zu diesen Gleichungen gelangt man aber auch durch sechs spezielle Verschiebungen, indem man mit dem Körper drei Fortschreitungen nach drei auf einander senkrechten Richtungen, und drei Drehungen um drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende Axen vornimmt, und dann auf jede dieser speziellen Verschiebungen das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anwendet.

Die speziellen Verschiebungen führen in den meisten Fällen schneller zum Ziele, veranlassen in der Regel nur wenige und einfache analytische Operationen, und sind den allgemeinen Verschiebungen insbesondere in dem Fall vorzuziehen, wenn es sich für irgend einen wissenschaftlichen oder praktischen Zweck nur darum handelt, den Gleichgewichtswerth eines einzelnen Elementes, z. B. einer gewissen Kraft, oder eines gewissen Winkels kennen zu lernen. Die Methode der allgemeinen Verschiebungen verdient dagegen den Vorzug, wenn allgemeinere Gleichgewichtsprobleme zur Lösung gebracht werden sollen, und wenn nicht nur einzelne, sondern wenn sämmtliche Bedingungen aufgefunden werden sollen, von deren Erfüllung das Bestehen des Gleichgewichts abhängt; sie erfordert aber in der Regel zu ihrer Durchführung einen sehr complizirten analytischen Apparat, und kann desshalb nur von Denjenigen mit Erfolg gehandhabt werden, die sich mit Selbstständigkeit im Gebiete der Analysis zu bewegen wissen.

Will man die Bedingungen kennen lernen, unter welchen Kräfte an einem frei beweglichen aber nachgiebigen Körper im Gleichgewicht sind, so kann man zunächst solche Verschiebung vornehmen, bei welcher alle Punkte des Körpers ihre relative Lage, die sie gegen einander im Gleichgewichtszustand annehmen, nicht ändern, und dann erhält man die bekannten sechs Bedingungsgleichungen, welche dem Gleichgewicht eines starren Körpers entsprechen. Will man aber auch über den innern Molekularzustand Aufschluss erhalten, so muss man auch Verschiebungen eintreten lassen, wobei die Punkte ihre relative Lage gegen einander ändern, so dass also auch die innern Molekularkräfte in Thätigkeit kommen.

Will man die Pressungen kennen lernen, welche im Gleichgewichtszustand eines Systems von starren oder von nachgiebigen Körpern gegen unbewegliche Stützpunkte, die etwa im System vorkommen, ausgeübt werden, so wie auch jene Pressungen, mit welchen die einzelnen Körper des Systems, da, wo sie in Berührung stehen, gegen einander wirken; so muss man zunächst ein solches System aus seinem gezwungenen Verhältnisse, in dem es sich befindet, befreien, indem man in Gedanken das ganze System in alle seine Theile zerlegt und die Stützpunkte beseitigt, dafür aber Kräfte anbringt, welche jenen Pressungen gleich und entgegen gesetzt sind. Wenn man dann auf jeden einzelnen, der auf diese Weise unabhängig gewordenen Körper das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit anwendet, und dabei Verschiebungen vornimmt, durch welche die Angriffspunkte jener unbekannten Pressungen gewisse Wege zurücklegen, so ergeben sich dieselben, und die Aufgabe ist dann gelöst.

Uebungen im Gebrauch des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit.

91) *Das Parallelogramm der Kräfte.* Wenn zwei Kräfte X und Y nach aufeinander senkrechten Richtungen auf einen frei beweglichen Punkt wirken, so kann kein Gleichgewicht bestehen, sondern es wird dieser Punkt nach einer gewissen Richtung mit einer gewissen Intensität R getrieben, und diese Kraft R nennt man die Resultirende der Kraft X und Y. Bringt man an den Punkt eine Kraft an, die der Resultirenden der Intensität nach gleich und der Richtung nach ihr entgegengesetzt ist, so werden sich diese drei Kräfte X Y R das Gleichgewicht halten, und die Bedingungen dieses Gleichgewichts können nun mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit leicht gefunden werden.

Nehmen wir zuerst eine allgemeine Verschiebung vor, wobei der allen Kräften gemeinschaftliche Angriffspunkt O (Fig. 1 Taf. IV.) von O nach O_1 geschoben wird und setzen wir $O\,O_1 = \varrho$, $\widehat{O_1\,O\,X} = \varphi$, so sind ϱ und φ zwei ganz willkührliche Grössen, weil wegen der ganz freien Beweglichkeit des Punktes O jede beliebige Verschiebung vorgenommen werden darf, nur muss ϱ als eine unendlich kleine Grösse betrachtet werden. Fällt man nun von O_1 aus auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel $O_1\,x$, $O_1\,y$, $O_1\,r$, so sind offenbar $O\,x$, $O\,y$, $O\,r$ die Projektionen des Weges, die der allen Kräften gemeinschaftliche Angriffspunkt zurückgelegt hat, und da O in Bezug auf X und Y vorwärts, in Bezug auf R aber zurückgetreten ist, so hat man zu setzen:

$$R\,\overline{O\,r} = X\,\overline{O\,x} + Y\,\overline{O\,y}.$$

Es ist aber: $\overline{O\,x} = \varrho \cos.\,\varphi$, $\overline{O\,y} = \varrho \sin.\,\varphi$, $\overline{O\,r} = \varrho \cos.\,(\varphi - \alpha)$. Demnach:

$$\varrho\,R \cos.\,(\varphi - \alpha) = \varrho\,X \cos.\,\varphi + \varrho\,Y \sin.\,\varphi \quad . \quad . \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$(\varrho \cos.\,\varphi) \left\{ R \cos\,\alpha - X \right\} + (\varrho \sin.\,\varphi) \left\{ R \sin\,\alpha - Y \right\} = o.$$

Da diese Gleichung für alle Werthe der willkührlichen Grössen ϱ und φ richtig sein muss, so wird man gezwungen, die in den grösseren Klammern enthaltenen Ausdruck gleich Null zu setzen; man erhält demnach als Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte X, Y, R,

$$\left.\begin{aligned} X &= R \cos.\,\alpha \\ Y &= R \sin.\,\alpha. \end{aligned}\right\}$$

die bekanntlich ganz richtig sind.

Verschiebt man den Punkt O statt nach O_1 nach der Richtung von X, so findet man:

$$R \cos. \alpha = X.$$

Verschiebt man den Punkt in der Richtung von Y, so ergibt sich:

$$R \sin. \alpha = Y.$$

Verschiebt man den Punkt nach der Richtung von R, so folgt:

$$R = X \cos. \alpha + Y \sin. \alpha.$$

Hieraus sieht man, dass auch jede spezielle Verschiebung zu einem wahren Resultat führt, und dass die allgemeinen Bedingungen sowohl durch eine allgemeine, als auch durch mehrere spezielle Verschiebungen erhalten werden können.

92) *Gleichgewicht der Kräfte am Hebel.* Es seien an dem zweiarmigen Hebel $\overline{A\,C\,B}$ (Fig. 2 Taf. IV.) die Kräfte P und Q im Gleichgewicht. Verschiebt man den Hebel in die Position $A_1\ C\ B_1$, und fällt aus A_1 und B_1 die Perpendikel $A_1\,a$ und $B_1\,b$, so sind $\overline{A\,a}$ und $\overline{B\,b}$ die Projektionen der Wege, welche die Angriffspunkte der Kräfte P und O zurückgelegt haben, und da der Angriffspunkt von P vorwärts, jener von O zurückgetreten ist, so hat man:

$$P\,\overline{A\,a} = O\,\overline{B\,b} \text{ oder}$$

$$\frac{P}{O} = \frac{\overline{B\,b}}{\overline{A\,a}}$$

Es ist aber, wie man leicht sieht: $\dfrac{\overline{B\,b}}{\overline{A\,b}} = \dfrac{\overline{B_1\,C}}{\overline{A_1\,C}} = \dfrac{\overline{B\,C}}{\overline{A\,C}}$

demnach:

$$\frac{P}{O} = \frac{\overline{B\,C}}{\overline{A\,C}}$$

und dies ist das bekannte Gesetz des Hebels.

93) *Gleichgewicht bei der schiefen Ebene.* Ein Körper, dessen Gewicht $= Q$ ist, liege auf einer schiefen Ebene, und werde auf derselben durch eine Kraft P erhalten, deren Richtung mit jener der schiefen Ebene parallel ist (Fig. 3 Taf. IV.).

Verschiebt man den Körper längs der schiefen Ebene, so dass z. B. sein Schwerpunkt von A nach A_1 kommt, und fällt das Perpendikel $\overline{A_1\,a}$, so sind offenbar $\overline{A\,A_1}$ und $\overline{A\,a}$ so lang als die Wege, welche die Angriffspunkte der Kräfte P und Q, nach ihren Richtungen geschätzt, zurücklegen. Nimmt man nun an, dass keine Reibung stattfinde, so hat man nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit

$$P\,\overline{AA_1} = Q\,\overline{Aa} \text{ oder } \frac{P}{Q} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{AA_1}}$$

Nun ist aber dieses letztere Verhältniss auch gleich $\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$, daher hat man als Bedingung des Gleichgewichts dieser Kräfte das bekannte Gesetz:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = \sin.\ \widehat{CBD}.$$

94) ***Gleichgewichtsverhältniss zwischen Kraft und Last bei einer aus Räderwerken bestehenden Winde.*** Fig. 4 Taf. IV. stellt in Grund- und Aufriss eine mit Räderwerk versehene Winde dar. Sie hat vier Drehungsaxen a, b, c, d. Es sind verbunden: mit der Axe a eine Welle w und ein grosses Zahnrad R, mit der Axe b ein grosses Rad R_1 und ein kleines Getrieb r, mit der Axe c ein grosses Rad R_2 und ein Getrieb r_1, mit der Axe d ein Getrieb r_2 und eine Kurbel K.

Die Zähne von R und r, von R_1 und r_1, von R_2 und r_2 greifen in einander ein. Wird nun die Kurbel nach der Richtung, welche der Pfeil andeutet, gedreht, so wird dadurch die Last Q, welche an einem Seil hängt, das am Umfang der Welle w befestigt ist, gehoben. Um nun die Kraft P zu bestimmen, welche senkrecht auf den Kurbelgriff wirken muss, um die Last Q zu heben, muss man berechnen, um wie viel Q gehoben wird, wenn der Kurbelgriff etwas bewegt wird. Bezeichnet man durch w, R, R_1, R_2, r, r_1, r_2 K die Halbmesser der Welle der Räder und der Kurbel, und nennt man s den Weg, um welchen man den Kurbelgriff fortbewegt, so ist der Weg den gleichzeitig zurückgelegt:

ein Punkt am Umfang von r_2 und R_2 . . . $s\,\frac{r_2}{K}$

„ „ „ „ „ r_1 „ R_1 . . . $s\,\frac{r_2}{K}\,\frac{r_1}{R_2}$

„ „ „ „ „ r „ R . . . $s\,\frac{r_2}{K}\,\frac{r_1}{R_2}\,\frac{r}{R_1}$

„ „ „ „ „ w . . . . . $s\,\frac{r_2}{K}\,\frac{r_1}{R_2}\,\frac{r}{R_1}\,\frac{w}{R}$

und so gross wie dieser letztere Werth, ist auch der Weg, den die Last zurücklegt.

Wenn man nun von den verschiedenen Reibungen ganz absieht, so ist für das Bestehen des Gleichgewichts zwischen P und Q erforderlich, dass sei:

$$P\,s = Q\,s\,\frac{r}{R}\,\frac{r_1}{R_1}\,\frac{r_2}{R_2}\,\frac{w}{K}$$

oder wenn man die willkührliche Verschiebung s weg lässt:

$$P = Q \frac{r}{R} \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \frac{W}{K}$$

und

$$Q = P \frac{R}{r} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \frac{K}{W}.$$

Die Verhältnisse $\frac{R}{r} \frac{R_1}{r_1} \dots \frac{K}{W}$ nennt man Uebersetzungszahlen. Man kann daher sagen, das Verhältniss zwischen Last und Kraft ist bei einer Winde mit Räderwerken gleich dem Produkt aus sämmtlichen Uebersetzungszahlen, vorausgesetzt jedoch, dass man die verschiedenen Zahnreibungen, Axenreibungen und sonstigen kleineren Hindernisse der Bewegung nicht in Anschlag bringt.

Das Gesetz der Thätigkeit der Kräfte.

95) *Entwicklung dieses Gesetzes.* Der dynamische Zustand eines in Bewegung befindlichen Massensystems, auf welches mannigfaltige äussere und innere Kräfte einwirken, wird sich im Allgemeinen in jedem Zeittheilchen während der Einwirkung der Kräfte verändern. In einem gewissen Zeitmoment wird jedes Atom des Systems einen gewissen Ort einnehmen und eine gewisse Geschwindigkeit und lebendige Kraft besitzen. Auch werden die Kräfte nach bestimmten Richtungen mit gewissen Intensitäten zur Bewegung anregen. Nach Verlauf einer gewissen Zeit wird der Gesammtzustand ein anderer sein. Die Atome werden andere Orte einnehmen, andere Geschwindigkeiten und lebendige Kräfte besitzen, und auch die Richtungen und Intensitäten der Kräfte werden anders sein. Wir wollen diese beiden Zustände, um von denselben bequem sprechen zu können, den ersteren A den letzteren Z nennen.

Während das System aus dem Zustand A in den Zustand Z übergeht, legen die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte gewisse Wege zurück, jede einzelne dieser Kräfte wird daher eine gewisse Wirkung produziren oder consumiren, je nachdem ihr Angriffspunkt nach der Richtung der Kraft geschätzt vorwärts gedrungen ist oder rückwärts gedrängt wurde.

Die Gesammtheit der Kräfte, deren Angriffspunkte vorwärts geschritten sind, wird daher eine gewisse Gesammtsumme von Wirkungen produziren, und die Gesammtheit der Kräfte, deren Angriffspunkte zurückgedrängt wurden, wird dagegen eine gewisse Gesammtsumme von Wirkungen consumiren. Nehmen wir an, dass die Summe der produzirten Wirkungen grösser sei, als die Summe der consumirten, so ist wohl klar, dass der Ueberschuss der ersteren über die letzteren als eine freie Thätigkeit zu betrachten ist, die von den Massen des Systems aufgenommen werden muss, wodurch die totale lebendige Kraft um so viel zunehmen muss, als jener Ueberschuss an produzirten Wirkungen beträgt.

Man kann daher den Satz aussprechen, dass sich die lebendige Kraft eines Massensystems während einer gewissen Zeit um so viel ändern wird, als der Unterschied zwischen den in derselben Zeit produzirten und consumirten Wirkungen beträgt.

Nennt man l die lebendige Kraft, die das System im Zustand A, L die lebendige Kraft, die es im Zustand Z besitzt, W w die Summe der Wirkungen, welche die Kräfte bei dem Uebergange aus A in Z produziren und consumiren, so ist:

$$L - l = W - w.$$

Nennt man ferner W_a w_a die Wirkungen welche die äusseren, W_i w_i die Wirkungen welche die inneren Kräfte produziren und consumiren, so hat man:

$$W = W_a + W_i$$

$$w = w_a + w_i$$

und es wird:

$$\left(W_a + W_i\right) - \left(w_a + w_i\right) = L - l$$

oder:

$$\left(W_a - w_a\right) + \left(W_i - w_i\right) = L - l.$$

Dieses ganz allgemeine und höchst einfache Gesetz, dass die Differenz zwischen den in einer gewissen Zeit produzirten und consumirten Wirkungen von den Massen des Systems aufgenommen wird, und dass hierdurch die lebendige Kraft des ganzen Systems um so viel zunimmt, als jene Differenz beträgt, nenne ich das Gesetz der Thätigkeit der Kräfte.

Für das genaue Verständniss und eine richtige Anwendung desselben ist vor allem andern nothwendig, dass man die Wirkungsgrössen und die lebendigen Kräfte richtig zu berechnen wisse; es wird daher gut sein, wenn hierüber einige Erläuterungen gegeben werden.

96) ***Bestimmung des Massensystems.*** Zunächst muss man sich, um dieses Gesetz auf einen vorliegenden Fall richtig anzuwenden, mit aller Bestimmtheit erklären, welche Massenpunkte als zum System gehörend angesehen werden sollen. In dieser Hinsicht halte man sich an die Regel,

dass alle Massenpunkte zum Systeme gehören, die irgend wie ein Ganzes bilden, und deren Bewegungszustände man kennen lernen will.

Will man z. B. die Bewegungen einer auf einem Schiffe befindlichen Dampfmaschine kennen lernen, die Bewegung des Schiffes und jene des Wassers, in dem es fährt, aber nicht, so gehören zum Massensystem nur allein alle Theile, aus welchen die Maschine besteht. Will man nebst der Bewegung der Maschine auch jene des Schiffes betrachten, so gehören zu dem Massensystem nicht nur die Massen der Maschine, sondern auch die Massen des Schiffbaues. Will man endlich die gleichzeitige Bewegung der Maschine, des Schiffes und des Wassers, in dem es fährt, untersuchen, so sind die Massen der Maschine, des Schiffes und des Wassers in das System aufzunehmen.

Oft ist es der Fall, dass man zwar nur die Bewegung einer ganz speziellen Masse kennen lernen will, dass jedoch die Bewegung dieser Masse mit den Bewegungen anderer Massen zusammen hängt. Dann ist es angemessen, alle Massen, die auf die zu bestimmende Bewegung Einfluss haben, ebenfalls in das System aufzunehmen. Will man z. B. die wahre Bewegung des Erdkörpers um die Sonne ganz genau bestimmen, so muss auch der Einfluss aller Planeten auf den Erdkörper berücksichtigt werden, und dies ist nicht anders möglich, als dadurch, dass man überhaupt die Bewegungen aller Planeten um die Sonne bestimmt. Man muss also die Massen aller Planeten in das System aufnehmen.

97) *Innere und äussere Kräfte des Systems.* Nachdem man sich über die Grenzen des Systems erklärt hat, muss man die Gesammtheit der Kräfte ausfindig zu machen suchen, welche auf das System einwirken, und sie in innere und äussere Kräfte eintheilen. Hierbei muss man die Begriffe festhalten, dass eine äussere eine solche ist, die ihren Sitz in einem Atom hat, der nicht zum System gehört, aber auf ein Atom des Systems einwirkt. Dass dagegen eine innere Kraft eine solche ist, die ihren Sitz in einem Atom des Systems hat, und auf ein Atom des Systems einwirkt. Aeussere Kräfte sind demnach:

a) Die Kräfte, mit welchen äussere Körper auf die Massen des Systems anziehend oder abstossend einwirken. Handelt es sich um die Bewegung einer Maschine, so sind die Gewichte der Theile äussere Kräfte, denn es sind Kräfte, welche in einem nicht zur Maschine gehörigen Körper — der Erde — ihren Sitz haben und auf die Massen des Systems anziehend einwirken.

b) Pressungen, welche äussere Körper gegen Körper des Systems, mit welchen sie in Berührung stehen, ausüben.

c) Die Reibungen zwischen äusseren und inneren Körpern des Systems. Die Reibung zwischen zwei Körpern ist wechselseitig, ist für beide

Körper gleich gross, und die Richtungen, nach welchen sie auf beide Körper einwirkt, sind einander gerade entgegengesetzt. Daher kommt es, dass die Reibungen zwischen inneren Körpern des Systems auf die Bewegung seines Schwerpunktes keinen Einfluss haben.

Die inneren Kräfte eines Systems sind: a) Anziehungen oder Abstossungen zwischen Atomen, die dem System angehören; b) Pressungen zwischen den in Berührung befindlichen Körpern des Systems gegen einander; c) die Reibungen zwischen den in Berührung befindlichen Körpern des Systems.

98) ***Berechnung der Wirkungen welche produzirt und consumirt werden.*** Es ist schon früher ausführlich erklärt und durch Beispiele erläutert worden, wie die Wirkungen der Kräfte zu berechnen sind. Dieser Gegenstand kann also als erledigt angesehen werden, und ich beschränke mich hier darauf, die Umstände aufzuführen, unter welchen eine einzelne oder eine Gesammtheit von Kräften weder eine Wirkung produzirt noch eine solche consumirt. In dieser Hinsicht gelten nun folgende Sätze:

1) Wenn der Angriffspunkt einer Kraft seinen Ort nicht verändert, oder sich nach einer auf die Richtung der Kraft senkrechten Richtung bewegt, so wird weder eine Wirkung produzirt noch eine Wirkung consumirt.

2) Die Gewichte eines Massensystems bringen bei dem Uebergang desselben aus einem Zustand A in einen Zustand Z keine Wirkungen hervor und consumiren auch keine Wirkung, wenn der Schwerpunkt des Massensystems seinen Ort nicht ändert, oder eine Linie beschreibt, die in einer horizontalen Ebene liegt.

3) Wenn der Schwerpunkt eines Massensystems bei dem Uebergang desselben aus einem Zustand A in einen Zustand Z eine beliebige Bahn beschreibt, zuletzt aber einen Ort erreicht, der mit jenem, in welchem sich der Schwerpunkt im Zustand A befand, auf gleicher Höhe liegt; so ist die Wirkung, welche die Gewichte während dieses Vorgangs entwickeln, eben so gross, als die Wirkung, welche sie consumiren; die totale Wirkung der Gewichte ist also gleich Null.

4) Wenn in einem System Körper vorkommen, die sich berühren und sich wechselseitig pressen, wie dies z. B. zwischen den Bestandtheilen einer Maschine der Fall ist, so entspringt hieraus keine Totalwirkung, denn die Pressungen sind von gleicher Grösse, wirken einander gerade entgegengesetzt und ihre Angriffspunkte legen in jedem Zeittheilchen gleich grosse Wege zurück; es wird daher die Wirkung, welche eine der beiden Pressungen entwickelt, durch die Wirkung der anderen Pressung consumirt.

5) Die anziehenden und abstossenden Kräfte der Atome eines Systems

entwickeln keine Wirkung und consumiren auch keine, wenn sich bei dem Uebergang des Systems aus einem Zustand A in einen Zustand Z die gegenseitigen Entfernungen der Atome nicht ändern.

6) Die relative Lage der Atome eines Systems gegen einander mag sich bei dem Uebergange eines Systems aus einem Zustand A in einen Zustand Z wie immer verändern, so entspringt daraus doch aus der Gesammtthätigkeit der inneren Atomkräfte keine Totalwirkung, wenn die Atomgruppirungen in beiden Zuständen vollkommen übereinstimmen.

Berechnung der lebendigen Kraft eines Massensystems.

99) *Lebendige Kraft eines Systems von Punkten, deren Geschwindigkeiten gleich gross sind.* Die lebendige Kraft eines Systems von Punkten ist die Summe der Produkte aus allen Massentheilchen in die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche sie in einem gewissen Zeitmoment besitzen. Sind nun die Geschwindigkeiten aller Punkte in einem gewissen Zeitmoment gleich gross, so ist jene Summe gleich dem Produkte aus dem Quadrat der gemeinsamen Geschwindigkeit in die Summe aller Massen oder in die totale Masse des Systems. Dieser Satz findet seine Anwendung auf einen starren Körper, welcher sich so fortbewegt, dass alle Punkte identische Bahnen beschreiben.

100) *Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich um eine fixe Axe dreht, mit welcher er verbunden ist.* Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, r, r_1, r_2 . . . die senkrechten Entfernungen der Massenpunkte m, m_1, m_2 . . . . von der Axe, so sind $r\,\omega$, $r_1\,\omega_1$, $r_2\,\omega$ . . die Geschwindigkeiten der Punkte, mithin $m\,r^2\,\omega^2$, $m_1\,r_1^2\,\omega^2$, $m^2\,r_2^2\,\omega^2$ . . . die lebendigen Kräfte, demnach

$$m\,r^2\,\omega^2 + m_1\,r_1^2\,\omega^2 + m_2\,r_2^2\,\omega_2^2 \ldots = \omega^2 \sum m\,r^2$$

Die lebendige Kraft des Körpers wird also gefunden, wenn man das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung multiplizirt.

101) *Lebendige Kraft eines starren Körpers, der sich wie immer im Raume bewegt.* Es seien m, m_1, m_2 . . . die Massenpunkte des Körpers, U, V, W die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes des Körpers, nach drei auf einander senkrechten Richtungen $u\ v\ w$, $u_1\ v_1\ w_1$ . . . . die relativen Geschwindigkeiten der Massenpunkte gegen den Schwerpunkt nach den gleichen Richtungen geschätzt, nach welchen U, V, W

genommen wurden. Dann sind $U + u$, $V + v$, $W + w$, $U + u_1$, $V + v_1$, $W + w_1$ . . . die absoluten Geschwindigkeiten der Massenpunkte nach den drei auf einander senkrechten Richtungen, und es ist demnach:

$$L = \Sigma m [(U + u)^2 + (V + v)^2 + (W + w)^2]$$

die totale lebendige Kraft des Körpers. Entwickelt man den Ausdruck in den Klammern, so findet man auch

$$\begin{aligned} L = \Sigma m (U^2 + V^2 + W^2) + \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2) &+ 2 U \Sigma m u \\ &+ 2 V \Sigma m v \\ &+ 2 W \Sigma m w \end{aligned}$$

Allein, wenn der Punkt, dessen Geschwindigkeiten U V W sind, der Schwerpunkt ist, so hat man

$$\Sigma m u = o, \quad \Sigma m v = o, \quad \Sigma m w = o$$

d. h. man findet die lebendige Kraft eines starren Körpers, der irgend eine Bewegung hat, durch die Summe aus der lebendigen Kraft $(U^2 + V^2 + W^2) \Sigma m$ die dem Körper entsprechen würde, wenn alle Punkte die Geschwindigkeit des Schwerpunktes hätten, und der lebendigen Kraft, die der relativen Bewegung der Punkte gegen den Schwerpunkt entspricht.

Da bei einem starren Körper die relative Bewegung aller Punkte gegen den Schwerpunkt nichts anderes ist, als eine drehende Bewegung des Körpers um eine durch den Schwerpunkt gehende und mit demselben fortschreitende Axe, die jedoch im Allgemeinen in jedem Augenblick ihre Lage verändert, so ist die lebendige Kraft $\Sigma m (u^2 + v^2 + w^2)$ auch gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe, um welche er sich in einem gewissen Augenblick dreht, in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, mit der die Drehung in diesem Augenblick statt findet.

Heisst man also M die Masse des Körpers, G die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in einem gewissen Zeitaugenblick, μ das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe, um welche er sich in diesem Zeitmoment dreht, endlich K die Winkelgeschwindigkeit, die der Drehung entspricht, so ist demnach:

$$L = M G^2 + \mu K^2.$$

Das Carnot'sche Prinzip.

102) Der Satz, dass die Differenz zwischen den von den Kräften in einer gewissen Zeit produzirten und von den in derselben Zeit von den Gegenkräften oder Widerständen consumirten Wirkungen gleich ist der totalen Aenderung der lebendigen Kraft, ist unter allen Umständen vollkommen

richtig, wenn alle Wirkungen und lebendigen Kräfte in Rechnung gebracht werden.

Dies ist aber in dem Falle, wenn Stösse vorkommen, die Formänderungen und Vibrationen veranlassen, mit beinahe unüberwindbaren Schwierigkeiten verbunden, weil das dabei eintretende Spiel der Molekularkräfte mit mathematischer Genauigkeit verfolgt werden müsste.

Diesen mit einer mathematischen strengen Behandlung des Stosses unvermeidlich verbundenen Schwierigkeiten kann man entgehen, wenn man sich mit einer Annäherung an die Wahrheit begnügt, indem man sich erlaubt, wie in Nr. 56 geschehen ist, statt der wirklichen mit Masse und Molekularkräften begabten stossenden Körper ideale starre Massen anzunehmen, die in den Stosspunkten mit zusammendrückbaren Federn versehen sind, welche, wenn sie zusammengedrückt worden sind, in ihren ursprünglichen Zustand zurückzukehren streben oder nicht, je nachdem die wirklichen Körper, für welche diese idealen Körper gesetzt werden, elastisch oder unelastisch sind.

Für ein solches System von idealen Körpern ist die Differenz der lebendigen Kräfte, welche in dem Massensystem in zwei Zeitmomenten vorhanden ist, innerhalb welchen ein stossweises Gegeneinanderwirken statt gefunden hat, gleich der Differenz der Wirkungen, welche in diesem Zeitintervall die äusseren Kräfte entwickelt und die äusseren Widerstände und Gegenkräfte consumirt haben, weniger der Summe der Wirkungsgrössen, welche der Zusammendrückung der Federn entspricht.

In dem Fall, wenn die Federn, nachdem sie während des Stosses zusammengedrückt worden sind, ein Bestreben haben, in ihren natürlichen Zustand zurückzukehren, so ist, wenn diese Wiederherstellung des ursprünglichen Zustandes in der That erfolgt, die Summe der Wirkungen, welche dem Spiele der Federn entspricht, gleich Null, und dann ist die Differenz der lebendigen Kräfte, welche im Massensystem in zwei Zeitmomenten vorhanden sind, innerhalb welchen ein stossweises Gegeneinanderwirken der Massen statt gefunden hat, gleich der Differenz der Wirkungen, welche in diesem Zeitintervall die äusseren Kräfte entwickelt und die äusseren Gegenkräfte consumirt haben.

Wenn wir dagegen annehmen, dass die Federn der idealen Körper kein Bestreben haben, in ihren natürlichen Zustand zurückzukehren, so wird die Differenz $L - l$ der lebendigen Kräfte gleich zu setzen sein der Differenz $W - w$ zwischen den produzirten und consumirten Wirkungen, weniger der Wirkung $\mathfrak{W}$, welche der Zusammendrückung sämmtlicher Federn entspricht. Man hat daher in diesem Fall:

$$L - l = W - w - \mathfrak{W}$$

oder

$$W - w = L - l + \mathfrak{W}.$$

Das stossweise Wechselwirken der Körper erfolgt immer mit so grosser Geschwindigkeit, dass während dieses Vorganges die auf das Massensystem einwirkenden äusseren Kräfte und Gegenkräfte keine merkliche Wirkung hervorbringen können; die Zusammendrückung der Federn kann daher nur auf Kosten der in dem Massensystem enthaltenen lebendigen Kraft geschehen. Jener Wirkungsverlust $\mathfrak{V}$ ist daher auch gleich der durch den Stoss beinahe plötzlich eintretenden Schwächung der lebendigen Kraft.

Durch Rechnungen, deren Durchführung wegen ihrer Weitläufigkeit hier nicht am Platz wäre, findet man, dass dieser Verlust $\mathfrak{V}$ an lebendiger Kraft gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte, welche den relativen Geschwindigkeiten der Massen vor dem Stosse gegen die Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stosse entsprechen.

Nennt man demnach v und n die Geschwindigkeiten einer Masse oder eines Massentheilchens m vor und nach dem Stoss, α den Winkel, unter welchen die Richtungen von v und n gegen einander geneigt sind, so ist:

$$\sqrt{v^2 + n^2 - 2\, v\, n \cos. \alpha}$$

die relative Geschwindigkeit der absoluten Geschwindigkeiten, welche die Masse vor und nach dem Stosse besitzt, demnach ist:

$$m\,(v^2 + n^2 - 2\, n\, v \cos. \alpha).$$

Der Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoss in der Masse m eintritt, und

$$\mathfrak{V} = \Sigma\, m\,(v^2 + n^2 - 2\, V\, n \cos. \alpha).$$

der totale Verlust an lebendiger Kraft des ganzen Massensystems, wobei das Zeichen Σ andeutet, dass die Summe der Verluste für sämmtliche Massen genommen werden soll.

Oftmals sind die stossenden Massen im Vergleich zu den gestossenen ungemein klein, so zwar, dass diese letzteren durch den Stoss in ihrer Bewegung nicht merklich alterirt werden, daher auch keine beachtenswerthe Aenderung der lebendigen Kraft erleiden. In diesem Falle ist der totale Verlust an lebendiger Kraft des Systems gleich der Summe der Verluste, welche in den stossenden Massen eintreten. Das Summezeichen Σ ist demnach in diesem Falle nur auf die stossenden Massen auszudehnen.

Gesetze der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems.

103) *Zerlegung der totalen Bewegung eines Massensystems.* Die Bewegung eines Massensystems ist nur dann vollständig bestimmt, wenn die Bewegung jedes einzelnen zum Massensystem gehörenden Punktes bestimmt ist, d h. wenn man den Ort jedes einzelnen Punktes in jedem Augenblick anzugeben vermag.

Diese Ortsbestimmung sämmtlicher Punkte eines Massensystems geschieht in der Regel am leichtesten und für das Vorstellungsvermögen am anschaulichsten, wenn für jeden Augenblick der Ort angegeben wird, in welchem sich der Schwerpunkt befindet, welcher der in diesem Augenblick stattfindenden Massengruppirung entspricht, und wenn ferner noch für diesen Augenblick die relative Position jeder einzelnen Masse des Systems gegen den Schwerpunkt angegeben wird.

Dadurch wird die totale Bewegung des Massensystems als eine Bewegung betrachtet, die zusammengesetzt ist aus der absoluten Bewegung des Schwerpunktes, und aus der relativen Bewegung der einzelnen Massen des Systems gegen den Schwerpunkt, und wir werden uns nun mit der Entwicklung der äusserst merkwürdigen Gesetze beschäftigen, nach welchen die Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems erfolgt.

104) *Bewegung des Schwerpunktes, wenn nur eine Masse des Systems ihren Ort verändert.* Wir gehen zunächst von dem ganz speziellen Fall aus, wenn nur eine einzelne Masse des Systems ihren Ort verändert, alle übrigen Massen dagegen in Ruhe verbleiben. Es sei in irgend einem Zeitmoment B (Fig. 5 Taf. IV.) der Schwerpunkt des ganzen Massensystems, M die Summe aller Massen, C der Schwerpunkt einer einzelnen Masse m, A der Schwerpunkt, der dem Massensystem entsprechen würde, wenn die Masse m nicht existirte. Dies vorausgesetzt, so folgt aus dem Begriff vom Schwerpunkt:

1) dass die Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen müssen.

2) dass sich die Entfernungen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ verkehrt wie die Massen $M - m$ und m verhalten müssen.

Es ist daher $$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{M-m}$$

so wie auch: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{m}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn sich nun die Masse m durch was immer für eine Ursache von C nach C_1 bewegt, alle übrigen Massen aber ruhig an ihrem Ort verbleiben, so ändert der Schwerpunkt von $M - m$ seinen Ort nicht, bleibt also in A; der Schwerpunkt des totalen Massensystems ändert dagegen seinen Ort und gelangt nach einem Punkt B_1, der in der geraden Linie $A C_1$ liegt, und dessen Entfernung von A so gross ist, dass man hat:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{m}{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Aus (1) und (2) folgt aber, dass die Dreiecke ABB_1 und ACC_1 ähnlich sind, dass demnach $\overline{BB_1}$ zu $\overline{CC_1}$ parallel lauft, und dass der Weg BB_1, den der Schwerpunkt B beschreibt, wenn die Masse m von C nach C_1 rückt, im Verhältniss $\frac{m}{M}$ kleiner ist, als $\overline{CC_1}$.

Hieraus folgt aber nun, dass die Bahn, die der Schwerpunkt beschreibt, wenn sich eine einzelne Masse m bewegt, alle übrigen Massen aber in Ruhe verbleiben, geometrisch ähnlich ist, mit der Bahn, welche die Masse m beschrieben hat. Der Schwerpunkt des totalen Massensystems kopirt also gleichsam in einem kleineren Maassstabe, nämlich im Verhältniss $\frac{m}{M}$ die von der Masse beschriebene Bahn.

Hieraus folgt aber ferner auch, dass sich auch die Geschwindigkeiten der Massen m und M, so wie die Geschwindigkeitsänderungen, die in denselben in irgend einem kleinen Zeittheilchen eintreten, verhalten müssen, wie $\frac{m}{M}$.

Nennt man $\left(\begin{matrix}C\\m\end{matrix}\right)$ und $\left(\begin{matrix}C\\M\end{matrix}\right)$ diese Geschwindigkeitsänderungen der Punkte C und B in irgend einem kleinen Zeittheilchen t, so ist:

$$\frac{\left(\begin{matrix}C\\m\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}C\\M\end{matrix}\right)} = \frac{M}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Fragen wir nun nach den Kräften $\left(\begin{matrix}K\\m\end{matrix}\right)$ und $\left(\begin{matrix}K\\M\end{matrix}\right)$, welche in diesem Zeittheilchen nach den Richtungen CC_1 und BB_1 auf die Massen einwirken mussten, um die erwähnten Geschwindigkeitsänderungen hervorzubringen, so erhalten wir zu deren Bestimmung nach den Gesetzen der beschleunigten Bewegung:

$$\left(\begin{matrix}C\\m\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\begin{matrix}K\\m\end{matrix}\right)t}{m}$$

$$\left(\begin{matrix}C\\M\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\begin{matrix}K\\M\end{matrix}\right)t}{M}$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{\left(\begin{matrix}C\\m\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}C\\M\end{matrix}\right)}=\frac{\left(\begin{matrix}K\\m\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}K\\M\end{matrix}\right)}\;\frac{M}{m}\;\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

und aus dieser und der Gleichung (3) ergibt sich:

$$\frac{\left(\begin{matrix}K\\m\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}K\\M\end{matrix}\right)}=1 \text{ oder } \left(\begin{matrix}K\\m\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}K\\M\end{matrix}\right)$$

Die Kräfte $\left(\begin{matrix}K\\m\end{matrix}\right)$ und $\left(\begin{matrix}K\\M\end{matrix}\right)$ stimmen also nicht nur hinsichtlich ihrer Richtung überein, sondern haben auch gleiche Intensitäten; ein Resultat, das auch ohne alle Rechnung leicht eingesehen werden kann, wenn man bedenkt, dass die Bewegung von M so oftmal kleiner sein soll als die Bewegung von m, so oftmal M selbst grösser ist, als m.

Durch die Bewegung einer einzelnen Masse m des Systems ändert sich demnach der Ort des Schwerpunktes des totalen Systems gerade so, als ob in dem Schwerpunkt die ganze Masse M des Systems wirklich vereinigt wäre, und auf diese vereinigte Masse eine Kraft einwirkte, die mit jener, welche die Bewegung von m hervorgebracht hat, sowohl hinsichtlich der Richtung, als auch hinsichtlich der Intensität vollkommen übereinstimmt.

105) ***Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems, wenn alle Massen ihren Ort verändern.*** Nun ist es nicht mehr schwierig zu sagen, wie die Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems erfolgen wird, wenn jede einzelne Masse des Systems durch Kräfte getrieben wird, und jede ihren Ort verändert. Denn wenn durch die Bewegung einer einzelnen Masse m der Schwerpunkt des ganzen Systems seinen Ort in der Weise verändert, als ob die ganze Masse M in ihm vereinigt wäre, und durch eine Kraft getrieben würde, die mit jener, welche die Bewegung von m hervorgebracht, der Richtung und Intensität nach übereinstimmt, so muss wohl, wenn sämmtliche Massen durch Kräfte getrieben werden, und gleichzeitig ihren Ort verändern, die Bewegung des Schwerpunktes gerade so erfolgen, als ob in ihm die Masse des ganzen Systems vereinigt wäre, und nach demselben jede Kraft des Systems parallel zu ihrer wirklichen Richtung versetzt würde.

106) ***Unabhängigkeit der Bewegung des Schwerpunktes von der Wirkung der inneren Kräfte.*** Wir haben schon in Nr. 87 erklärt, dass die inneren Kräfte eines Systems immer paarweise vorhanden sind,

indem die Einwirkungen je zweier Atome auf einander immer wechselseitig und mit gleicher Energie erfolgen. Werden nun diese inneren Kräfte ihren Richtungen nach parallel in den Schwerpunkt versetzt, so heben sie sich daselbst wechselseitig auf, können daher auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss ausüben. Die Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems erfolgt demnach so, wie wenn in demselben die ganze Masse des Systems vereinigt wäre, und sämmtliche äussere Kräfte ihren Richtungen parallel auf diese vereinigte Masse einwirkten. Um also die Bewegung des Schwerpunktes einer starren, weichen, elastischen oder flüssigen Masse zu bestimmen, hat man die innern Molekularkräfte gar nicht zu berücksichtigen, sondern nur allein die äussern Kräfte, denn diese Bewegung des Schwerpunktes ist ganz unabhängig von dem Spiel der innern Kräfte.

107) ***Bewegung eines Massensystems, auf welches keine äusseren Kräfte einwirken.*** Wenn auf ein Massensystem gar keine äusseren Kräfte einwirken, so muss die Bewegung des Schwerpunktes erfolgen, wie die Bewegung eines Massenpunktes, auf welchen gar keine oder solche Kräfte einwirken, die sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten. Der Schwerpunkt wird demnach in diesem Fall in einem unveränderlichen Zustand des Seins verharren, also entweder in Ruhe verbleiben oder nach einer geraden Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit fortschreiten. Ob das eine oder das andere eintritt, hängt von dem Zustand ab, in welchem sich der Schwerpunkt in dem Augenblick befand, von welchem an das System der Einwirkung der inneren Kräfte überlassen wurde. War er damals in Ruhe, so verlässt er seinen Ort nie mehr, so lange nur innere Kräfte auf ihn einwirken; hatte er damals nach einer gewissen Richtung eine gewisse Geschwindigkeit, so ist dies auch die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung während der ganzen Dauer der Einwirkung der inneren Kräfte.

Diese Eigenschaft der Bewegung des Schwerpunktes, welche man das Prinzip der Selbsterhaltung der Bewegung des Schwerpunktes genannt hat, gewährt eine sehr anschauliche Vorstellung über die Art und Weise, wie die Bewegungen eines Massensystems unter mannigfaltigen Umständen erfolgen, und es spricht sich in dieser Eigenschaft die passive Natur der Materie einerseits, und das Prinzip der Wechselwirkung der Atome andererseits sehr deutlich aus. Die Bewegung des Schwerpunktes steht nicht unter der Herrschaft der inneren Kräfte, sondern nur die relative Bewegung der einzelnen Massen gegen den Schwerpunkt wird theilweise durch die Thätigkeit der inneren Kräfte bedingt.

Anwendungen der entwickelten Gesetze auf spezielle Fälle.

108) *Bewegung des Schwerpunktes eines starren Körpers.* Der Schwerpunkt einer starren Masse hat gegen sämmtliche Punkte derselben eine unveränderliche Lage. Seine Bewegung erfolgt so, als ob alle äusseren Kräfte, die auf die verschiedenen Massentheilchen des ganzen Körpers einwirken, an ihm thätig wären, und als ob er mit einer trägen Masse begabt wäre, die so gross ist, als die Gesammtmasse des Körpers. Wenn z. B. ein starrer Körper in der Luft gegen die Erde fällt, wird jeder Punkt des Körpers von jedem Punkt der Erdmasse angezogen; überdies aber übt die den fallenden Körper umgebende Luft in jedem Augenblick der Bewegung und auf jeden Punkt seiner Oberfläche nach normaler Richtung einen gewissen Druck aus. Denkt man sich alle Anziehungskräfte nach paralleler Richtung in den Schwerpunkt des Körpers versetzt, und die Resultirende aus allen diesen Kräften gesucht; denkt man sich ferner auch sämmtliche Luftpressungen nach dem Schwerpunkt gebracht und auch die denselben entsprechende Resultirende bestimmt, so wird die Bewegung des Schwerpunktes gerade so erfolgen, wie wenn derselbe ein einziger aber wirklicher Massenpunkt wäre, dessen Masse so gross wie die des ganzen Körpers, und als ob auf dieselbe die beiden resultirenden Kräfte unmittelbar einwirkten. Fallen die Richtungen dieser Resultirenden in jedem Augenblick in eine und dieselbe Linie, was z. B. der Fall sein wird, wenn der Körper eine Kugel ist, und ist ferner dem Körper am Anfang seiner Bewegung nach keiner Richtung irgend eine Geschwindigkeit ertheilt worden, so fällt der Körper nach vertikaler Richtung nieder, und wird dabei in jedem Augenblick mit einer Kraft getrieben, die gleich ist der Differenz der genannten resultirenden Kräfte. Weicht dagegen die Richtung der Resultirenden aus den Luftpressungen von der vertikalen Richtung, d. h. von der Richtung der Resultirenden aller Erdanziehungen ab, so erfolgt die Bewegung des Schwerpunktes nach einer krummen Linie, die in vielen Fällen ein äusserst zusammengesetztes Bildungsgesetz haben kann. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man z. B. ein Kartenblatt von einem hohen Thurme herabfallen lässt.

Sind die Intensitäten und Richtungen der äusseren Kräfte ganz unabhängig von der Lage des Körpers, so ist die Bewegung des Schwerpunktes ebenfalls unabhängig von den Veränderungen, welche in der Lage des Körpers während der Bewegung eintreten. Die Bewegung des Schwerpunktes eines in luftleerem Raum geworfenen Steines erfolgt demnach in dem Falle, wenn dem Stein anfänglich nicht nur eine fortschreitende, sondern auch eine drehende Bewegung mitgetheilt wurde, gerade auf die gleiche Weise, wie in dem Fall, wenn dem Körper nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung mitgetheilt wird.

109) *Bewegung eines Körpers von veränderlicher Form.* Wenn die Form eines Körpers durch was immer für Ursachen mit der Zeit veränderlich ist, so ändert sich auch der Ort des Schwerpunktes gegen die einzelnen Massenpunkte des Körpers. Die Aufeinanderfolge der Orte, in welchen sich während der Bewegung eines solchen Körpers die Schwerpunkte befinden, die den in allen Zeitmomenten stattfindenden Gruppirungen der Massentheilchen des Körpers entsprechen, nennt man die Bahn des Schwerpunktes eines solchen Körpers, und die Art und Weise, wie alle diese Schwerpunktspositionen im Raume fortschreiten, die Bewegung des Schwerpunktes.

Sind die äusseren auf einen solchen Körper einwirkenden Kräfte oder ist die in dem Schwerpunkt construirt gedachte Resultirende aller äussern Kräfte unabhängig von der Form des Körpers, was z. B. bei einem im luftleeren Raum geworfenen vibrirenden Körper der Fall ist, so erfolgt die Bewegung des Schwerpunktes gerade so, wie wenn der Körper ganz starr wäre.

Ist dagegen die Richtung oder Intensität der Resultirenden aller äusseren Kräfte abhängig von der Gestalt des Körpers, wie dies z. B. der Fall ist bei einem in lufterfülltem Raume fallenden Körper, so veranlasst allerdings die Formveränderung des Körpers eine Aenderung in der Bewegung seines Schwerpunktes.

110) *Stoss der Körper.* Wenn zwei oder mehrere Körper gewaltsam zusammenstossen, und dabei ihre Bewegungsrichtungen oder ihre Geschwindigkeiten, so wie auch ihre Formen plötzlich ändern, oder sich wechselseitig zertrümmern, so geschehen alle diese Vorgänge durch innere repulsirende Kräfte; die Bewegung des dem Massensystem gemeinsamen Schwerpunktes kann daher durch alle genannten Veränderungen und Wechselwirkungen nicht im Geringsten verändert werden, sondern sie erfolgt auch während und nach dem Stosse gerade so, wie wenn die Körper ohne Störung ihrer Bewegungen durcheinander gegangen wären.

111) *Explodirende Körper.* Wenn ein Körper durch innere Kräfte, etwa durch explodirende Substanzen, mit welchen er versehen ist, zertrümmert oder heftig erschüttert wird, bewegt sich während und nach diesem Vorgang der Schwerpunkt des Ganzen so fort, als ob gar nichts geschehen wäre; denn seine Bewegung ist absolut unempfindlich gegen alle Wirkungen, die von innern Kräften herrühren.

112) *Bewegung der Erde um die Sonne.* Die Bewegung des Schwerpunktes der Erde um die Sonne kann durch die Wechselwirkung der irdischen Körper gegen einander nicht im Mindesten gestört werden. Das ganze innere Leben des Erdkörpers und alle Veränderungen, welche in demselben durch die Thätigkeiten der unorganischen und organischen Kräfte eintreten, z. B. Erdbeben, vulkanische Ausbrüche, Wasserfluthen, Bergstürze etc. vermögen nichts über die Bewegung des Schwerpunktes. Dieser bewegt sich, was auch auf und im Innern der Erde vorgehen mag, ungestört in seiner elyptischen Bahn um die Sonne herum, und die Umlaufszeit der Erde oder die Dauer des Jahres bleibt, trotz aller Wirkungen der Erde auf sich selbst, stets von gleicher Grösse. Dies ist aber für den Bestand und für die Entwicklung alles organischen und geistigen Lebens von höchster Wichtigkeit; denn wenn die Erde durch ihre Einwirkungen auf sich selbst die Bewegung ihres Schwerpunktes und mithin auch die Dauer des Jahres ändern könnte, so würden immer nach einer Reihenfolge von Jahren Verhältnisse eintreten können, bei welchen ein organisches und geistiges Leben ganz unmöglich wäre. Eine bedeutende Abnahme der Dauer des Jahres würde z. B. zur Folge haben, dass die Früchte während eines Sommers nicht zur Reife kämen, und in dem darauf folgenden Winter durch die Kälte zu Grunde gingen. Eine bedeutende Zunahme der Dauer des Jahres würde zur Folge haben, dass in dem ersten langen Winter alles organische Leben von Grund aus zerstört würde, so dass die Sonne in dem darauf folgenden langen Sommer ihre wärmenden Strahlen vergeblich auf den verödeten Planeten niedersenden würde.

Wir haben gesagt, dass sich der Schwerpunkt der Erde in einer Elypse um die Sonne bewege. Dies ist aber nicht genau richtig. Sie würde sich allerdings in dieser Weise bewegen, wenn nur allein die Sonne nach dem Gravitationsgesetz auf sie einwirkte, allein dieses Gravitationsgesetz besteht, wie wir schon wissen, zwischen allen Körpern; die Erde wird daher nicht blos von der Sonne, sondern auch von allen Planeten des Planetensystems angezogen; ihr Schwerpunkt bewegt sich daher in jedem Augenblick entsprechend der Resultirenden aus allen Anziehungen, welche die Sonne und die Planeten auf sie ausüben, und so kömmt es denn, dass ihre Bahn nicht genau eine Elypse sein kann, sondern in der That eine äussert zusammengesetzte krumme Linie ist. Man hat durch Anwendung der raffinirtesten Mittel, welche die Analysis darbietet, diese wirkliche Bahn zu bestimmen gesucht, und diese Untersuchungen haben zu dem äusserst merkwürdigen Resultat geführt, dass die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, so wie auch die Umlaufszeit aller übrigen Planeten ungeachtet ihrer Wechselwirkung auf einander dennoch unveränderlich ist.

Das Planetensystem ist demnach so eingerichtet, dass sein Fortbestand weder durch die nach dem Gravitationsgesetz erfolgenden Wechselwirkungen der Planeten und der Sonne, noch durch die Wirkungen der Planeten auf sich selbst im mindesten gefährdet ist.

113) ***Der Schwerpunkt des Weltalls.*** Die Gesammtheit aller existirenden Körper, d. h. das Weltall, ist in dynamischer Hinsicht als ein Massensystem zu betrachten, das nur allein von inneren Kräften affizirt wird. Der Schwerpunkt des ganzen Weltalls muss daher entweder absolut ruhen, oder mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer geraden Linie ins Grenzenlose fortschreiten. Zu dieser Folgerung wird man genöthigt, wenn man von der durch die Gesammtheit der physikalischen und chemischen Thatsachen hervorgerufenen Ansicht ausgeht, dass alle in der Natur existirenden, auf die Massen einwirkenden Kräfte in den Massen selbst ihren Sitz haben. Sollte es in der Natur Kräfte geben, die gar keines materiellen Wohnsitzes bedürften, so würden diese als äussere die Bewegung des Schwerpunktes beherrschende Kräfte zu betrachten sein.

114) ***Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive.*** Sehr deutlich kommen auch bei den Maschinen die Gesetze der Bewegungen des Schwerpunktes zum Vorschein. Wenn man eine Lokomotive an Ketten aufhängt, so dass sie frei in der Luft schwebt, und sich wie ein Pendel hin und her bewegen kann, hierauf den Kessel heizt und den Dampf auf die Maschine wirken lässt, so gerathen nicht nur die Kolben in eine hin- und hergehende und die Triebräder in eine drehende Bewegung, sondern es entsteht auch in dem ganzen Wagenbau mit dem damit verbundenen Kessel eine Bewegung, die aus einem Vor- und Rückwärtsschreiten und aus einem Hin- und Herdrehen zusammengesetzt ist. Die drehenden Bewegungen der Triebaxe und des Wagenbaues erfolgen nach gewissen Gesetzen, die wir hier nicht berühren wollen. Die Vor- und Rückwärtsbewegung der Massen erfolgt aber getreu nach den Gesetzen, die wir für die Bewegung des Schwerpunktes aufgefunden haben. Eine auf die beschriebene Weise aufgehängte Lokomotive ist, wenn sie durch ihre eigene Dampfkraft bewegt wird, als ein Massensystem anzusehen, das nur allein durch innere Kräfte bewegt wird, es muss daher der Schwerpunkt der sämmtlichen Massen, aus welchen die Lokomotive besteht, unveränderlich in dem Ort verbleiben, in welchem er sich befand, bevor die Maschine ihre Bewegung anfing. Dies ist aber, da die Kolben so wie auch die Kurbelkörper gegen das Wagengestell vor- und rückwärts laufen, nicht anders möglich, als dadurch, dass die Masse des Wagenbaues gleichzeitig entgegengesetzte Bewegungen macht, und es ist auch ohne Rechnung nicht schwierig,

diese Bewegungen des Wagenbaues ausfindig zu machen. Schreiten beide Kolben vorwärts, so weicht der Wagenbau zurück. Bewegen sich beide Kolben rückwärts, so geht der Wagenbau vorwärts. Gehen die Kolben mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung, so ändert sich in einem solchen Augenblick die Lage des den beiden Kolben entsprechenden gemeinsamen Schwerpunktes gegen den Wagenbau nicht; der Wagenbau kann daher in diesem Augenblick seinen Ort nicht verändern, d. h. er ruht. Gehen beide Kolben nach entgegengesetzter Richtung, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, z. B. der vorwärtseilende schneller als der zurückweichende, so muss der Wagenbau gleichzeitig im Zurückweichen begriffen sein. Man sieht also, dass der ganze Wagenbau während jeder vollen Umdrehung der Triebaxe eine ganze Hin- und Herschwingung machen muss, und dass ferner alle einzelnen Schwingungen von gleicher Grösse sind.

Wenn die Kurbeln der beiden Maschinen parallel gestellt werden, stimmen die Bewegungen der beiden Kolben in jedem Augenblick hinsichtlich der Richtung und Geschwindigkeit überein, und dann wird die Bewegung des Wagenbaues in jedem Augenblick jener der Kolben entgegengesetzt sein und mit einer Geschwindigkeit erfolgen, die um so viel Mal kleiner ist, als jene der Kolben, so viel Mal die Masse des Wagenbaues grösser ist, als die Massen der beiden Kolben und Schubstangen.

Stellt man die Kurbeln so, dass sie einander entgegengesetzt sind, so haben die beiden Kolben gegen den Wagenbau in jedem Augenblick gleich grosse Geschwindigkeiten nach entgegengesetzter Richtung, ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt kann daher seine Lage gegen den Wagenbau nicht ändern, was zur Folge hat, dass dieser letztere weder vor- noch rückwärts schreitet, sondern nur allein eine drehende Schwingung um den Schwerpunkt annimmt.

115) *Winkelbewegung eines Massensystems um irgend eine fixe Axe.* Man denke sich irgend ein in Bewegung befindliches Massensystem, ferner irgend eine gerade aber unbewegliche Linie A, und durch dieselbe nach den Massenpunkten des Systems Ebenen gelegt, die den Massenpunkten in ihrer Bewegung folgen. Diese Ebenen $e\ e_1$ . . werden sich während der Bewegung des Systems nach gewissen Gesetzen um die Linie A als Axe drehen, und wir wollen uns nun mit der Auffindung der drehenden Bewegung dieser Ebenen beschäftigen.

Schneidet man diese beweglichen Ebenen $e\ e_1$ . . durch eine auf die Axe A senkrechte Ebene B, so entsteht ein System von radialen Linien, deren gegenseitige Neigungen die wahren Maase der Winkel sind, welche die Ebenen gegen einander bilden. Beschreibt man in der Ebene B mit einem Halbmesser gleich der Längeneinheit einen Kreis C, so wird derselbe von dem System der radialen Linien in verschiedenen Punkten geschnitten und die Bewegung dieser Punkte in der Peripherie des Kreises C kann als das wahre Maas der Winkelbewegung aller Massenpunkte um die als Axe angenommene Linie A angesehen werden.

Es sei nun (Fig. 6 Taf. IV.) m irgend ein Massenpunkt des Systems. Zerlegt man die Resultirende aller auf diesen Punkt einwirkenden Kräfte, in drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende Kräfte H I K, von welchen H parallel mit A, I senkrecht auf A und K senkrecht auf I und H wirkt, so kommt bei der vorgelegten Untersuchung nur allein die letztere dieser Kräfte in Betrachtung, denn diese Kraft K ist es, welche die Winkelbewegung des Massenpunktes um A verändert.

Nun ist bereits bei der Bewegung eines Körpers um eine fixe Axe in Nr. 61 gezeigt worden, dass die Winkelbewegung eines Massenpunktes m, der sich in einer Entfernung r von der Drehungsaxe befindet und auf welchen direkt eine auf r senkrecht stehende Kraft K einwirkt, genau übereinstimmt mit der Winkelbewegung einer Masse, die so gross ist, als das Trägheitsmoment $m r^2$ der Masse m, wenn man dieselbe in einer Entfernung gleich der Einheit von der Axe anbringt und auf dieselbe eine Kraft von der Grösse des statischen Momentes $K r$ senkrecht auf die Richtung, welche ihre kürzeste Entfernung von der Axe misst, einwirken lässt.

Bringt man also in dem Durchschnittspunkt a, der durch m und durch die Axe A gelegten Ebene mit dem Kreis C eine Masse $m r^2$ an, und lässt auf dieselbe eine Kraft $K r$ einwirken, deren Richtung in der Ebene des Kreises C liegt, und auf den Radius O a senkrecht steht, so erfolgt die Winkelbewegung derselben genau so, wie jene der Masse m.

Wiederholt man dieses Verfahren mit allen Massenpunkten des Systems, so erhält man in der Peripherie des Kreises C ein System von Massenpunkten, dessen Winkelbewegungen mit jenen des wirklichen Massensystems genau übereinstimmt.

Gelingt es also, das Gesetz der Winkelbewegung dieses idealen Massensystems ausfindig zu machen, so hat man auch das Gesetz der Winkelbewegung des wirklichen Massensystems.

Nun ist klar, dass die Wege, welche die idealen Massen $m r^2$, $m_1 r_1^2$ .. auf der Peripherie des Kreises C zurücklegen, so gross sind, als sie in dem Falle wären, wenn alle Massen $m r^2$, $m_1 r_1^2$ .. in eine gerade Linie gestellt und längs derselben durch die Kräfte $K r$, $K r_1$ .. getrieben würden. Dann aber würde sich der allen Massen gemeinsame Schwerpunkt so bewegen, wie wenn in demselben sämmtliche Massen und Kräfte conzentrirt wären.

Wir wollen denjenigen Punkt der Peripherie des Kreises, dessen Bogenentfernungen von allen Massenpunkten so gross sind, als die Entfernung des wahren Schwerpunktes von allen Massenpunkten wäre, wenn dieselben in eine gerade Linie gestellt würden, den Mittelpunkt der Trägheitsmomente des Massensystems nennen, und können nun den Satz aussprechen, dass sich der Mittelpunkt der Trägheitsmomente so bewegt, wie wenn in demselben in jedem Augenblick der Bewegung eine Masse vereinigt wäre, die so gross ist, als das totale Trägheitsmoment, welches in demselben Augenblick der Massengruppirung entspricht, und auf diese vereinigte Masse nach tangentialer Richtung eine Kraft wirkte, deren Intensität so gross ist, als die Summe der statischen Momente sämmtlicher auf das Massensystem in diesem Augenblick einwirkenden Kräfte.

Hierdurch ist die Winkelbewegung des Massensystems auf die Bewegung eines einzelnen Punktes zurückgeführt, ähnlich wie die fortschreitende Bewegung auf jene des Schwerpunktes.

Diese Winkelbewegung eines Massensystems ist von der Thätigkeit der inneren Kräfte ganz unabhängig, denn die Summe der statischen Momente der anziehenden oder abstossenden Kräfte, mit welchen zwei Massenpunkte des Systems auf einander wirken, ist gleich Null, und wenn diese Kräfte nach dem Mittelpunkt der Trägheitsmomente versetzt werden, heben sie sich daselbst auf, können daher auf die Bewegung der idealen Masse keinen Einfluss ausüben.

Besonders merkwürdig ist die Winkelbewegung eines Massensystems in dem Falle, wenn auf dasselbe nur innere oder solche Kräfte einwirken, deren Richtungen nach der als Drehungsaxe angenommenen Linie A hinzielen, denn dann heben sich alle nach dem Mittelpunkt der Trägheitsmomente versetzten Kräfte auf. Der Mittelpunkt der Trägheitsmomente müsste sich daher, wenn die in demselben vereinigte Masse $\Sigma m r^2$ constant wäre, mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen; da aber die Masse $\Sigma m r^2$ im Allgemeinen veränderlich ist, so muss sich der Mittelpunkt der Trägheitsmomente so bewegen, wie eine sich selbst überlassene Masse $\Sigma m r^2$ von veränderlicher Grösse. Es kann daher nicht die Geschwindigkeit der Masse, sondern es muss das Produkt aus der Geschwindigkeit in der Masse constant sein.

Nennt man also W die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheitsmomente, so ist

$$W \Sigma m r^2 = \text{const.}$$

oder

$$W = \frac{\text{const.}}{\Sigma m r^2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheitsmomente oder der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Massensystems, das nur von inneren oder von solchen Kräften affizirt wird, deren Richtungen nach der als Drehungsaxe angenommenen Linie A zielen, hängt also nur allein von dem totalen Trägheitsmoment ab, und ist demselben verkehrt proportional.

Dieses Gesetz gilt auch in dem Fall, wenn die Körper des Systems durch Stösse gegen einander oder durch Explosionen von gewissen Substanzen, die Theile des Massensystems sind, erschüttert oder zertrümmert werden; nur wird nach dem oben ausgesprochenen Gesetz die mittlere Geschwindigkeit der Winkelbewegung nach einem solchen Ereigniss grösser oder kleiner sein, als vor demselben, je nachdem das totale Trägheitsmoment ab- oder zugenommen hat.

Die Bedeutung der constanten Grösse ergibt sich durch den Begriff von dem mittleren Werth der Winkelgeschwindigkeit. Es ist nämlich allgemein:

$$W = \frac{\Sigma\, m\, r^2\, w}{\Sigma\, m\, r^2}$$

wenn w die Winkelgeschwindigkeit eines einzelnen Massenpunktes des Systems bedeutet. Man hat daher in dem Falle, wenn keine äusseren Kräfte thätig sind:

$$\Sigma\, m\, r^2\, w = \text{const.}$$

d. h. man findet die constante Grösse durch die Summe der Produkte der Trägheitsmomente aller Massen in ihren Winkelgeschwindigkeiten, und diese Summe muss für alle Momente der Bewegung den gleichen Werth liefern.

Noch in anderer Weise kann das Gesetz der Winkelbewegung ausgedrückt werden. Nennt man nämlich $s\, s_1\, s_2 \ldots$ die Bogenlängen, welche die Massen $m\, r^2$, $m_1\, r_1^{\,2}$ . . in einem bestimmten aber sehr kleinen Zeittheilchen zurücklegen, so ist:

$$w = \frac{s}{t},\ w_1 = \frac{s_1}{t},\ w_2 = \frac{s_2}{t} \ldots$$

und wenn man diese Werthe in den Ausdruck

$$\Sigma\, m\, r^2\, w = \text{const.}$$

einführt, so findet man

$$\Sigma\, m\, r^2\, s = \text{const.} \times t.$$

Aber es ist in dem Falle, wenn s mit t unendlich klein sind $r^2 s \ldots r^2 s_1 \ldots$ das Doppelte der Dreiecksflächen, welche die Radien $r\, r_1$ . . während des Zeittheilchens t beschreiben. Bezeichnet man diese Flächenräume mit $f\, f_1\, f_2$ . . so hat man demnach

$$\Sigma\, m\, f = \text{const.} \times t.$$

Es ist also die Summe der Produkte der Massen des Systems in die Flächenräume, welchen die Radienvektoren während eines kleinen Zeitintervalles beschreiben, der Dauer dieses Zeitintervalles proportional.

Nun kann aber für alle auf einander folgenden Zeitintervallen ganz das Gleiche gesagt werden, folglich darf man auch den Satz aussprechen, dass die Summe der Produkte aus allen Massentheilchen in die Flächenräume, welchen die den Massentheilchen entsprechenden Radienvektoren während einer endlichen Zeit beschreiben, der Dauer dieser Zeit proportional ist.

Diesen Satz nennt man »den Grundsatz der Erhaltung der Flächenräume.“ Für die quantitativen Bestimmungen ist jede Ausdrucksweise dieses Gesetzes gleichwerthig, für das Vorstellungsvermögen verdient jedoch die früher erklärte Ausdrucksweise den Vorzug.

Das Gesetz der mittleren Winkelbewegung eines Massensystems, das nur von inneren Kräften affizirt wird, gilt nicht nur in Bezug auf eine beliebig angenommene fixe Axe, sondern es ist auch richtig in Bezug auf eine Axe, die durch den nach gerader Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit fortschreitenden Schwerpunkt des Massensystems gelegt wird. Von dieser Wahrheit wird man sich durch folgende Betrachtung überzeugen.

Denkt man sich ein Massensystem, dessen Schwerpunkt ruht, so ist klar, dass der in Rede stehende Satz für jede Axe gilt, die man durch den ruhenden Shwerpunkt legen mag. Denkt man sich aber ferner, dass allen Massenpunkten gleich grosse Geschwindigkeiten nach paralleler Richtung mitgetheilt werden, so wird dies zur Folge haben, dass der gemeinsame Schwerpunkt nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit gleichförmig fortschreitet. Allein bei diesem Vorgang werden die inneren Kräfte der relativen Geschwindigkeiten die Massentheile gerade eben so verändern, wie sie früher, als der Schwerpunkt ruhte, die absoluten Geschwindigkeiten verändert haben. Man sieht also, dass das Gesetz der durch den Schwerpunkt gelegten und mit demselben gleichmässig fortschreitenden Axe richtig ist, d. h. es ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Massensystems in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gelegte und mit demselben gleichmässig fortschreitende Axe dem Trägheitsmoment des ganzen Massensystems in jedem Augenblick verkehrt proportional.

Die Reibung.

116) *Erfahrungsgesetze.* Bekanntlich wird der Widerstand, welcher sich äussert, wenn Körper, die gegen einander gedrückt sind, auf einander hingleiten, Reibungswiderstand genannt. Die Gesetze, nach welchen sich dieser Widerstand richtet, sind zuerst von Colomb und in neuerer Zeit von Morin auf experimentalem Wege aufgesucht worden; sie lauten:

1) Der Reibungswiderstand befolgt nur dann ein einfacheres bestimmbares Gesetz, wenn die Berührungsflächen der sich an einander reibenden Körper einen gewissen Grad von Ebenheit und Glätte besitzen, und wenn durch die Reibung weder eine merkliche Erwärmung der Körper noch eine auffallende Abnützung an ihren Berührungsflächen eintritt.

2) Der Reibungswiderstand richtet sich nach der materiellen Natur der Körper und nach der Beschaffenheit und dem Zustand ihrer Berührungsflächen. Holz reibt sich auf Holz minder, wenn sich die Fasern durchkreuzen, als wenn sie parallel laufen. Feuchtigkeit und Oel vermehrt, Talg, Seife und Gravit vermindert die Reibung der Hölzer. Oele und Schweinfett vermindern die Reibung der metallischen Körper.

3) Der Reibungswiderstand ist beim Beginn einer Bewegung, die nach einem Ruhezustand, der längere Zeit dauert, eintritt, grösser, als einige Zeit nach dem Anfang der Bewegung.

4) Der Reibungswiderstand ist bei rund umlaufenden Körpern, z. B. bei Zapfen und Wellen geringer, als bei Körpern, die eine fortschreitende Bewegung haben.

5) Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche, vorausgesetzt, dass diese letztere hinreichend gross ist, so dass weder eine merkliche Erwärmung noch eine merkliche Abnützung eintrittt.

6) Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die Körper auf einander gleiten, vorausgesetzt, dass diese Geschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreitet, bei welcher eine merkliche Erwärmung und Abnützung der Körper eintritt.

7) Der Reibungswiderstand ist innerhalb der in den vorhergehenden Nummern bezeichneten Grenzen dem Druck proportional, mit welchem die Körper gegen einander gedrückt sind.

Nennt man demnach für zwei bestimmte Körper f den Reibungswiderstand, welcher durch einen Druck von 1 Kilogramm, F jenen der durch einen Druck von P Kilogramm verursacht wird, und v die Geschwindigkeit, mit welcher die Körper auf einander gleiten, E den in

Kilogramm-Meter ausgedrückten Effekt, welcher der Ueberwindung des Reibungswiderstandes entspricht, so ist:

$$F = P f$$

$$E = P f v.$$

Die Grösse f nennt man den Reibungscoeffizienten. Die Werthe desselben sind für die verschiedenartigsten Substanzen und für mannigfaltige Zustände der Berührungsflächen von Colomb und Morin durch Versuche aufgefunden worden, und sind in den „Resultaten für den Maschinenbau" Seite 85 bis 87 zu finden. Vermittelst derselben unterliegt es keiner Schwierigkeit, nach den bekannten Gesetzen der Statik den Reibungswiderstand und dessen Einfluss auf das Gleichgewicht und auf die Bewegung der Körper zu berechnen.

117) *Ursache des Reibungswiderstandes und Erklärung der obigen Erfahrungssätze.* Die Ursache des Reibungswiderstandes liegt wohl hauptsächlich darin, dass die Körper nie vollkommen glatte Flächen haben, sondern an ihrer Oberfläche immer mit Unebenheiten versehen sind, deren Grösse jedoch bei glatten metallischen Flächen so unmerklich sind, dass sie sowohl für den Tastsinn, als auch für das unbewaffnete Auge ganz verschwinden. Befinden sich nun zwei solche Körper nicht nur in einer geometrischen Berührung, sondern sind sie auch durch irgend eine Kraft gegen einander gepresst, so müssen die Unebenheiten der Körper ähnlich wie verzahnte Räder in einannder eingreifen, und wenn ein Aufeinandergleiten eintreten soll, so kann dies nur dadurch geschehen, wenn die Erhöhungen umgebogen oder weggebrochen werden, wozu dann natürlich ein grösserer Kraftaufwand nothwendig ist.

Die Wirkung des Netzens und Oelens der Berührungsflächen erklärt sich auf folgende Weise: werden die Flächen mit Substanzen versehen, gegen welche die Körper keine hyproskopische einsaugende Wirkung ausüben, so füllen diese Substanzen die Zwischenräume (Poren), die Unebenheiten aus, diese letztern können daher nicht so tief in einander eingreifen, und daher ist leicht einzusehen, dass unter diesen Umständen der Reibungswiderstand vermindert wird. Werden dagegen die Körper mit Substanzen versehen, gegen welche die Körper hyproskopisch einsaugend wirken, so dringen die Substanzen tiefer ins Innere der Körper ein, es findet keine Ausfüllung der Poren statt, und die Körper werden, in Folge der Molekularatraktion, welche zwischen den in die Körper eindringenden Substanzen vorhanden ist, gegen einander gezogen, so dass dadurch die Unebenheiten tiefer in einander eindringen und den Widerstand vermehren. Sind die Berührungsflächen sehr glatt und mit einer dünnen fettigen oder flüssigen Substanz belegt, so kann es geschehen, dass am Umfang der Berührungsfläche ein luftdichter Verschluss entsteht, und dann werden die Körper durch den äusseren atmosphärischen Druck gegen einander gepresst, wodurch die Reibung vermehrt wird.

Die Thatsache, dass der Reibungswiderstand bei rundumlaufenden Zapfen kleiner ist, als bei Körpern, welche sich in ebenen Flächen berühren, und eine geradlinige fortschreitende Bewegung haben, scheint durch zweierlei Ursachen erklärt werden zu müssen. Eine dieser Ursachen liegt in dem Umstande, dass bei einem fortschreitenden Aufeinandergleiten der Körper nicht nur die Reibung, sondern auch der Widerstand zu überwälligen ist, der aus dem Eindringen des kleineren der beiden Körper in den grösseren ausgedehnteren entsteht, indem dabei fort und fort das Material des letzteren unmittelbar von dem ersteren zusammengedrückt werden muss. Ist noch überdies der kleine Körper an der vordern Grenze seiner Berührungsfläche etwas scharfkantig, so wirkt derselbe hobelartig auf den andern Körper ein, wodurch der Widerstand noch mehr vergrössert wird. Ein zweiter Grund des Unterschiedes zwischen fortschreitender und drehender Reibung liegt in dem Umstande, dass die Zapfen, wenn sie gut geölt sind und unter einem nicht zu starken Druck längere Zeit, z. B. ein Jahr lang, laufen, einen Zustand von Glätte annehmen, welcher durch die gewöhnlichen Mittel zur Bearbeitung der Metallflächen kaum hervorgebracht werden kann; denn es fällt wohl Niemanden ein, eine Mettallfläche ein Jahr lang zu schleifen, um sie recht glatt zu machen. Hierdurch erklärt es sich auch, wesshalb alle Maschinen nicht in ganz neuem Zustande, sondern erst dann, wenn sie sich einige Zeit „eingelaufen“ haben, den geringsten Widerstand verursachen, und es unterliegt keinem Zweifel, dass dieser Widerstand fort und fort bis zu einer gewissen Grenze hin abnehmen muss, wenn nicht mit der Zeit durch das wechselseitige Abnützen der Theile das genaue Zusammenpassen aller Organe aufhören würde.

Dass der Reibungswiderstand von der Grösse der Berührungsfläche unabhängig ist, so lange keine Erwärmung der Körper eintritt, ist leicht zu begreifen. Denn ist die Berührungsfläche klein, so ist zwar die Intensität der Reibung an jedem einzelnen Punkt der Fläche gross, dafür sind aber dann um so viel weniger Punkte vorhanden, an welchen Reibung statt findet. Ist dagegen die Berührungsfläche gross, so gibt es zwar viele reibende Punkte, die Intensität ist aber dann an jedem einzelnen Punkt gering.

Dass der Reibungswiderstand von der Geschwindigkeit der Bewegung nicht abhängt, ist höchst wahrscheinlich nur annähernd richtig. Der Reibungswiderstand ist gleich der Kraft, welche erforderlich ist, um die Unebenheiten umzulegen oder wegzubrechen, mehr der Kraft, die es braucht, um der umgebogenen oder weggerissenen Masse Geschwindigkeit zu ertheilen; so lange aber die Geschwindigkeit der Bewegung nicht extravagant ist, kann der Betrag der letzteren dieser beiden Kräfte nicht sehr gross ausfallen, und gegen die erstere vernachlässigt werden, woraus sich ergibt, dass der Reibungswiderstand bei mässiger Geschwindigkeit von dieser letztern fast unabhängig ist.

Dass der Reibungswiderstand mit dem Druck der Körper gegen einander wächst, ist für sich klar; es dürfte jedoch schwer halten, zu beweisen, dass die Reibung genau in dem Verhältniss wächst, in welchem der Druck zunimmt.

118) *Abnützung und Erwärmung durch Reibung.* Die Kenntniss der Gesetze, nach welchen sich der Wirkungswiderstand richtet, hat durchaus kein selbstständiges wissenschaftliches Interesse, sondern ist einzig und allein nur für das Maschinenwesen von praktischer Wichtigkeit. Diese Wichtigkeit ist aber bis jetzt in den verschiedenen Werken, welche über Mechanik und Maschinenbau handeln, nur theilweise und einseitig aufgefasst und dargestellt worden, indem man die Reibung immer nur in so fern betrachtet, als sie als Hinderniss der Bewegung auftritt, und ganz und gar ausser Acht liess, dass durch dieselbe die Maschinenorgane an ihren heikelsten Stellen abgenützt und deformirt werden, wodurch zweckwidrige, stossende und vibrirende Bewegungen veranlasst werden, welche den geordneten Zusammenhang aller Theile wesentlich stören, den zum Betrieb der Maschinen erforderlichen Kraftaufwand vermehren, und was das allernachtheiligste und misslichste ist: häufige kostspielige Reparaturen veranlassen. Man würde sich in den meisten und wichtigsten Fällen den Kraftverlust, der durch die Reibung entsteht, gerne gefallen lassen, wenn nur das Warmlaufen und Abnützen nicht wäre. Bei Wasserrädern, Turbinen, Dampfmaschinen, und selbst bei den Lokomotiven ist der Reibungswiderstand hinsichtlich des Kraftaufwandes, den seine Bewältigung erfordert, bei weitem nicht so nachtheilig, als die Empfindlichkeit der Wasserräder und Turbinenzapfen, und als die rasche Abnützung der Dampfmaschinen und Lokomotive. Indem man nun die Reibung ganz einseitig und nur in so fern, als dieselbe einen Widerstand verursacht, betrachtete, dagegen ihre schädlichste Wirkung, die Abnützung, ganz ausser Acht liess, hatte die bisherige Theorie der Reibung dem praktischen Maschinenbau nur selten genützt, sondern im Gegentheil oftmals geschadet, indem diese Lehre sich damit begnügt, die Berechnung des Reibungswiderstandes mit einem grossen Aufwande von weitläufigen Formeln zu lehren, statt die Mittel anzugeben, durch welche man sich gegen den schädlichen Einfluss derselben in jeder Hinsicht zu schützen im Stande ist.

119) *Ursache der Erwärmung und Abnützung.* Es scheint, dass Körper, wenn sie an einander gerieben werden, sich nur dann an ihren

Berührungsflächen angreifen und aufreiben, wenn eine Erwärmung derselben eintritt, , d. h. wenn der in den beiden Körpern enthaltene Aether in heftige vibrirende Bewegung versetzt wird. Allein wenn zwei Körper sich an einander reiben, gibt es keine andere Quelle der Wärmeerregung, als die Vibrationen der Körpermolekule; man kann daher mit grosser Wahrscheinlichkeit sagen, dass durch die Reibung ein wechselseitiges Angreifen der Körper nur dann eintritt, wenn heftige Vibrationen zunächst in den Körpermolekulen und hierauf in den Aethertheilchen hervorgerufen werden. Es ist also die Frage, durch welche Umstände diese Vibrationen hervorgebracht werden und deren gibt es nun mehrere.

Zunächst ist klar, dass Vibrationen entstehen müssen, wenn die zahnartigen Erhöhungen an den Oberflächen der Körper in einander eingreifen und sich wechselseitig umlegen oder gar losreissen. Auch ist leicht einzusehen, dass die Erschütterungen um so heftiger sein werden, je tiefer die Zähne in einander eingreifen und je rascher die Körper über einander hingleiten. Die Tiefe des Eingriffs ist aber nach der Intensität des Druckes zu beurtheilen, mit welchem die Körper gegen einander gepresst sind, d. h. nach dem Druck auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche, welcher gefunden wird, wenn man den totalen Druck, der die Körper gegen einander presst, durch den Flächeninhalt der Berührungsflächen dividirt. Die Grösse der Berührungsfläche, oder wie man sich auch auszudrücken pflegt, die Reibungsfläche, die auf den Reibungswiderstand keinen Einfluss hat, ist demnach hinsichtlich der Erwärmung und der hieraus entstehenden Aufreibung der Fläche ein höchst wichtiges Constructionselement, und es ist klar, dass man sich gegen die abnützende Wirkung der Reibung, bei bedeutenden Geschwindigkeiten, nur durch hinreichende Grösse der Reibungsflächen schützen kann. Auch ist dieses Schutzmittel um so mehr zu empfehlen, als durch die Anwendung desselben weder der Reibungswiderstand vermehrt, noch auch sonstige nachtheilige Wirkungen hervorgebracht werden.

Die Vibrationen, welche durch das Aneinanderreiben der Körper entstehen, können noch bedeutend gesteigert werden, wenn in dem ganzen Bau einer Maschine heftige Molekularerschütterungen vorkommen, die sich durch die Organe einer Maschine als Vibrationen fortpflanzen, und theilweise in die Luft übergehen, theilweise aber durch die sich aneinander reibenden Bestandtheile aus der Maschine entweichen und in den Erdboden übergehen. Dies ist insbesondere bei den Zapfen der Fall. Ein Wasserrad steht z. B. nur durch die Zapfen seiner Welle mit dem Erdboden in Berührung. Die Vibrationen, welche in dem ganzen Bau eines solchen Rades durch den stossweisen Eintritt des Wassers, und durch die nie ganz starre Verbindung seiner Theile unter einander entstehen, haben keinen Ausweg, als die Oberflächen der Zapfen. Dieselben sind daher den heftigsten Erschütterungen ausgesetzt, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man sich in die Nähe der Zapfenlager hinstellt oder dieselben mit der Hand berührt. Wegen dieser Erschüttungen ist es auch durchaus nothwendig, die Lagerplatten dieser Zapfenlager auf einen soliden Quaderbau zu legen, und sie mit demselben durch starke eiserne Stangen zu befestigen.

Aehnlich verhält es sich auch bei den Transmissionen. Das ganze System von Körpern, welches eine Transmission bildet, nämlich die Wellen, Räder, Rollen und Kupplungen, steht durch mehrere Zapfen und Hälse theils mit dem Erdboden, theils mit den Mauern und Decken eines Gebäudes in Berührung; und alle Erschütterungen, die theils durch den unvollkommenen Eingriff in die Zahnräder, theils durch andere Ursachen entstehen, müssen durch diese Zapfen und Hälse aus der Transmission entweichen. Diese Theile sind daher heftigen Erschütterungen unterworfen, und müssen äusserst sorgfältig ausgeführt und befestigt werden, um den zerstörenden Einwirkungen zu widerstehen.

Am auffallendsten tritt diese Wirkung der Erschütterungen bei den Turbinenzapfen hervor. Eine Turbine entwickelt, wenn sie zweckmässig angeordnet und sorgfältig ausgeführt und fehlerfrei aufgestellt ist, einen Nutzeffekt von 75 %. Nehmen wir beispielsweise an, der absolute Effekt der Wasserkraft betrage 100 Pferdekraft, so werden davon 75 Pferdekraft gewonnen und 25 gehen verloren. Nun ist die Frage, wo diese 25 Pferdekräfte hinkommen? Sie müssen sich irgend wo wieder finden, denn absolut vernichtet wird keine Wirkung. Es sind nun dreierlei Körper vorhanden, in welchen sich diese 25 Pferdekräfte, so zu sagen, verbergen können, und zwar: a) Das Wasser, welches vom Turbinenrad wegfliesst; b) die Masse des Turbinenrades; c) die Masse des das Turbinenrad umgebenden Mantels. In dem vom Turbinenrad wegfliessenden Wasser ist allerdings jederzeit eine bedeutende lebendige Kraft enthalten, die nicht nur nach der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung dieses Wassers, sondern nach dem mittleren Werth der absoluten Geschwindigkeit zu berechnen ist, welche die Wassertheilchen in ihrer durcheinander wirbelnden Bewegung besitzen. Nehmen wir beispielsweise an, diese lebendige Kraft betrage 15 Pferdekräfte, so bleibt noch immer ein Verlust von 10 Pferden zu erklären übrig. Nehmen wir weiter an, dass hiervon die Hälfte, also 5 Pferde, durch Erschütterungen, welche durch den Stoss des Wassers gegen die Schaufeln entstehen, in die Masse des Turbinenrades übergehen, so nimmt diese in jeder Sekunde eine Wirkungsgrösse von $5 \times 75 = 275$ Kilogrammes-Meter in sich auf, pflanzt dieselbe nach der Turbinenaxe vorwärts fort, und findet daselbst keinen andern Ausweg, als den Zapfen. Dieser wird also ebenfalls in jeder Sekunde durch 275 Kilogrammes-Meter erschüttert. Bedenkt man nun, wie klein die Masse und die Oberfläche eines solchen Zapfens ist, so wird man leicht begreiflich finden, dass in demselben äusserst heftige Molekularerschütterungen eintreten müssen, und wenn nun diese Zapfen, wie es häufig der Fall ist, mit ansehnlicher Geschwindigkeit sich drehen, und mit bedeutender Kraft gegen die Grundfläche der Pfanne, so wie auch gegen deren Umfassungsfläche gepresst sind, so wird man sich wohl nicht wundern, wenn unter solchen Umständen ein heftiges Erhitzen und Aufreiben der Berührungsflächen eintritt.

Die Erhitzung des Zapfens bringt auf zweifache Weise die Zerstörung desselben hervor. So wie die Erwärmung eine gewisse Grenze überschreitet, trocknet das Oel ein und bildet sich eine klebrige Masse, welche die Zu- und Ableitungsröhren verstopft. Ist dieser Zustand eingetreten, so lauft der Zapfen trocken in der Pfanne; die eigentliche, von dem Druck herrührende Reibung wird dann ausserordentlich gross, man vernimmt dann gewöhnlich ein durchdringendes Knarren oder Schreien, und gleichzeitig steigert sich die Erhitzung oft in so hohem Grade, dass schmiedeiserne Theile zusammenschweissen, und Theile aus Kanonenmetall, Gusseisen oder Stahl bis zum Schmelzen gebracht werden.

Fassen wir nun alle Einzelnheiten übersichtlich zusammen, so ergeben sich als Schutzmittel gegen das Warmlaufen, Erhitzen und gegen die hieraus entstehende Abnutzung der sich reibenden Körper folgende Regeln:

1) Möglichste Verminderung des Druckes der sich reibenden Körper.

2) Möglichst gleichförmige Vertheilung dieses Druckes auf die ganze Ausdehnung der Berührungsfläche zwischen den Körpern.

3) Hinreichend grosser Flächeninhalt der Berührungsflächen, damit die Intensität des Druckes, auf die Flächeneinheit bezogen, gemässigt wird.

4) Möglichste Vermeidung grosser Geschwindigkeiten.

5) Reichliche und continuirliche Oelung, so dass die Flächen stets mit reinem Oel versehen und nicht nur fortwährend eingefettet, sondern auch fort und fort mit Oel, so zu sagen, gewaschen werden, damit alle Körpertheile, welche losreissen, auch sogleich entfernt werden. Dies kann ökonomisch geschehen, wenn man einen Oelstrom zwischen die Berührungsflächen leitet, und dann das abfliessende Oel wiederum auffängt, um es in der Folge abermals zu minder heikeln Oelungen zu benutzen.

6) Möglichste Vermeidung von Erschütterungen und Vibrationen, und Ableitung derselben durch solche Maschinentheile, die nicht so leicht dem Warmlaufen ausgesetzt sind.

7) Zweckmässige Wahl des Materials für die sich reibenden Theile. Die Gussmetalle (Kanonenmetall und Gusseisen) scheinen vor den schweissbaren Metallen (Schmiedeeisen und Stahl) den Vorzug zu verdienen.

Zur Erläuterung dieser Regeln folgen nun einige Anwendungen derselben auf die Construction der Zapfenlager.

Construction der Zapfenlager für schnelllaufende Wellen.

A. *Liegende Zapfen und Wellen.* In den gewöhnlichen Fällen werden die Zapfen und Wellen ohne Rücksicht auf das Warmlaufen und Abnützen so bestimmt, dass sie den Anforderungen einer hinreichenden Festigkeit entsprechen. Der Durchmesser der eigentlichen Zapfen, die nur allein auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen sind, werden diesem gemäss der Quadratwurzel aus dem Druck, welchen sie auszuhalten haben, proportional gemacht, und ihre Länge wird gewöhnlich um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ grösser genommen, als der Durchmesser.

Die Durchmesser der Wellen, welche einen gewissen Effekt durch Torsion zu übertragen haben, werden nach der Formel $d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ Centimeter (wobei N den Effekt in Pferdekräften und n die Anzahl der Umdrehungen der Welle per 1 Minute bezeichnet) berechnet, wodurch sie alle eine gleiche Torsionsfestigkeit erhalten.

Die Länge der Hälse, welche in die Lager gelegt werden, macht man wie die Zapfen um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ länger als die Durchmesser. Die Lager für diese Zapfen und Hälse erhalten im Innern und Aeussern abgedrehte Schalen aus Messing oder Rothgussmetall, so zwar, dass sich die Wellen nur allein um ihre geometrischen Axen drehen können, gegen jede andere Bewegung aber gehindert sind.

Diese Einrichtung ist zwar für die gewöhnlichen Fälle, und namentlich wenn die Geschwindigkeit nicht zu gross ist, und nicht mehr als 200 Umdrehungen in 1 Minute beträgt, genügend; sie ist aber unter allen Umständen mangelhaft, und wird für grosse Geschwindigkeiten unzureichend. Dies wird aus folgender Beurtheilung erhellen:

1) Die gewöhnliche Länge der Zapfen ($\frac{5}{4}$ d bis $\frac{4}{3}$ d) ist für grössere Geschwindigkeiten zu klein, weil die Intensität des Druckes wegen des geringen Flächeninhaltes der Reibungsfläche zu gross ausfällt. Man sollte nun meinen, dass diesem Uebelstande leicht abgeholfen werden könnte, wenn man die Zapfen und Hälse, und eben so auch die innere Fläche der Schalen länger machte; allein dies geht nicht an, denn

es würde dann der geringste Fehler in der Aufstellung der Lager sogleich zur Folge haben, dass die Hälse und Zapfen nicht mehr der ganzen Länge nach in den Schalen aufliegen, sondern nur an den Enden, und daselbst würde dann die Intensität des Druckes so gross ausfallen, dass ein Warmlaufen und Aufreiben eintreten müsste.

2) Eine gleichförmige Vertheilung des Druckes auf die ganze Länge der Zapfen und Hälse ist bei diesen Lagern mit unbeweglichen cylindrisch abgedrehten Schalen nur durch eine mathematisch vollkommene, also praktisch nie erreichbare Aufstellung der Lager möglich.

3) Selbst eine annähernd richtige Aufstellung dieser Lager ist jederzeit und insbesondere bei längeren Wellen, die durch mehr als zwei Lager getragen werden, sehr schwierig; und wenn sie auch anfänglich gelingt, so wird doch der fehlerfreie Zustand sehr leicht gestört, wenn die Stützpunkte für die Lager etwas weichen, was fast immer eintritt, wenn die Lager gegen Steinfundamente, Mauern oder Balken geschraubt werden. Eine unveränderliche Stellung der Lager ist nur dann zu erwarten, wenn sie auf einen starren Gusseisenkörper befestigt werden können.

4) Wenn überhaupt eine absolut starre Gegeneinanderbefestigung der Lager gar nicht möglich ist, wie z. B. bei Dampfschiffen, so kann der Bedingung einer ganz gleichmässigen Vertheilung des Druckes gar nicht dauernd entsprochen werden.

5) Zuweilen erfordert es der Zweck, dass eine Welle ihre Lage verändern könne, wie dies z. B. bei den Axen der Holländertrommeln der Fall ist, und dann können diese starren unbeweglichen Lager gar nicht gebraucht werden.

Allen diesen Uebelständen kann gründlichst abgeholfen werden, wenn man die Lagerschalen innen cylindrisch lässt, aussen aber kugelförmig abdreht und die Lagerkörper entsprechend ebenfalls kugelförmig ausbohrt, so dass die beiden Schalenhälften zusammen einen Körper bilden, der in den Lagern um einen Punkt (dem Mittelpunkt der Kugel) frei drehbar ist, so dass die in den Schalen liegende Welle innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Richtung annehmen kann, und dabei doch immer die Zapfen und Hälse ihrer ganzen Länge nach in den Schalen aufliegen, wie lang sie auch sein mögen. Diese Lager mit kugelförmigen Schalen werden bereits schon längere Zeit von Bodmer in England mit bestem Erfolg angewendet und verdienen in der That allgemein im Maschinenbau eingeführt zu werden, denn sie schützen vortrefflich gegen das Warmlaufen und Aufreiben, und sind noch überdies weit leichter zu montiren, als die Lager mit cylindrischen Schalen, weil bei jenen nur der Bedingung zu entsprechen ist, dass die Mittelpunkte der Schalen aller Lager, die eine gerade Welle zu tragen haben, in einer geraden

Linie liegen, wo hingegen die Lager mit cylindrischen Schalen so zu montiren wären, dass die geometrischen Axen aller Lagerhöhlungen in eine und dieselbe gerade Linie, und zwar in die geometrische Drehungsaxe der Welle fallen. Gegen diese Lager mit Kugelschalen hat man mehrere Einwendungen gemacht, die aber gar nicht begründet sind und leicht beseitigt werden können. Zunächst hat man eingewendet, dass ihre Anfertigung mit Schwierigkeiten verbunden sei, aber man braucht ja nur ein Support zu construiren, vermittelst welchem man auf einer Drehbank das kugelförmige Abdrehen der Schalen und Ausbohren der Lagerkörper bewerkstelligen kann, und dies ist mit keiner grossen Schwierigkeit verbunden, indem eine so ausserordentlich grosse Genauigkeit bei der Herstellung dieser Kugelform gar nicht nöthig ist, weil die Schalen keine Bewegung machen sondern nur der Welle gestatten sollen, ihre Richtung ohne Zwang ändern zu können. Diese Lager mit Kugelschalen werden dann auch oft unrichtig beurtheilt, weil man sie wegen ihrer runden Form mit den Kugelzapfen verwechselt, die sich überall, wo man sie angewendet hat, nicht gut bewährt haben. Diese Verwechslung beruht aber auf einer sehr oberflächlichen Betrachtung der Sache; sieht man dieselbe genauer an, so findet man, dass zwischen den kugelförmigen Schalen und den kugelförmigen Zapfen ein wesentlicher Unterschied besteht, und dass die letzteren eine fehlerhafte Construktion genannt werden müssen; denn

1) ist bei dem Kugelzapfen die Berührungsfläche zwischen Zapfen und Pfanne noch kleiner als bei den gewöhnlichen cylindrischen Zapfen.

2) Ist bei den Kugelzapfen der Druck keineswegs auf die ganze Berührungsfläche gleichförmig vertheilt, sondern im Gegentheil fast nur in einem Punkt conzentrirt.

3) Ist es ungemein schwierig, die Kugelzapfen so genau abzudrehen, und die Schalen entsprechend kugelförmig auszudrehen, wie es für eine grössere Bewegungsgeschwindigkeit durchaus nothwendig ist, wo hingegen, wie schon oben bemerkt wurde, die kugelförmigen Theile bei der Anordnung mit Kugelschalen gar nicht mit besonderer Sorgfalt hergestellt zu werden brauchen, indem die äusseren Flächen der Kugelschalen keine Bewegung machen. Man sieht also, dass es sich mit den Kugelschalen ganz anders verhält, als mit den Kugelzapfen.

B *Zapfen und Lager für aufrecht stehende Wellen.* Die gewöhnliche Einrichtung der Zapfenbüchse für aufrecht stehende Wellen ist Fig. 4 Taf XI. der Resultate für den Maschinenbau, 2. Auflage, dargestellt. Die Zapfenbüchse hat die Form eines cylindrischen Topfes mit ebenem Boden und ist in der Regel von Rothgussmetall. Dieselbe wird ganz genau in einen cylindrischen gusseisernen Topf eingepasst, welcher auf irgend eine passende Weise in der Lage erhalten wird, die der geometrischen

Axe der Welle entspricht. Bei aufrechten Transmissionswellen geschieht diese Befestigung des Pfannentopfes in der Weise, wie Fig. 4 zeigt. Ist das Ganze einmal aufgestellt und befestigt, so steht die Pfanne unbeweglich fest und gestattet dem Zapfen keine andere Bewegung, als die Drehung um seine geometrische Axe. Diese Einrichtung ist wiederum für die gewöhnlichen Fälle genügend, bei ungünstigen Umständen, und namentlich bei schnell laufenden und grosse Betriebskräfte entwickelnden Turbinen aber nicht. Sie setzt eigentlich voraus, 1) dass die untere Ebene des Zapfens vollkommen senkrecht sei auf der geometrischen Axe der Welle; 2) dass die Bodenfläche der Pfanne vollkommen senkrecht sei auf der geometrischen Axe der Pfanne; 3) dass die ganze Einrichtung so aufgestellt werde, dass die geometrischen Axen der Pfanne und des Zapfens zusammen fallen; 4) dass die Wellen während ihrer Drehung kein Bestreben haben, die richtige und normale Stellung ihrer geometrischen Axe zu verändern. Eine gleichzeitige und dauernde Erfüllung dieser Bedingungen ist aber in der That mit der gewöhnlichen Einrichtung unerreichbar; so wie aber eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht sehr leicht bei einiger Geschwindigkeit der drehenden Bewegung entweder ein Angreifen der Umfangsflächen oder ein Aufreiben der Bodenfläche.

Auch diesen Uebelständen kann man abhelfen, wenn man die Einrichtung trifft, dass die Grundfläche dez Zapfens und die Bodenfläche der Pfanne unter allen Umständen nach ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig intensiv gedrückt werden, und dass die ganze Pfanne absolut nachgiebig wird, so dass sie jeder Richtungsveränderung, welche die Axe annehmen will, leicht folgen kann. Auf Tafel XIII., Figur 5 der Resultate für den Maschinenbau, 2. Auflage, ist eine solche Anordnung dargestellt. Die Pfanne besteht aus zwei Theilen, von denen der eine den Zapfen umfasst, der andere hingegen die Bodenplatte bildet. Beide befinden sich in einem gusseisernen unten kugelförmig gerundeten Topf, der auf einer entsprechend ausgehöhlten Platte steht, und dessen Axe mithin innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Richtung annehmen kann. Die Bodenplatte ist ebenfalls halbkugelförmig gebildet. Man sieht, dass bei dieser Einrichtung die untere Fläche des Zapfens stets ihrer ganzen Ausdehnung nach gleichförmig gegen die Bodenplatte der Pfanne drücken muss, weil diese letztere nach jeder Richtung beweglich, also nur dann im Gleichgewicht ist, wenn sie gleichmässig gedrückt wird; dass ferner, wenn auch die Welle ihre Stellung verändern sollte, dennoch ein Angreifen am Umfang des Zapfens nicht eintreten kann, weil der ganze Pfannentopf ohne Schwierigkeit jeder Richtungsveränderung der Welle folgen kann. Auch ist hier für eine sehr sorgfältige Oelung gesorgt. Das Oel wird nämlich aus einem Topf, der sich in angemessener

Höhe über dem Zapfen befindet, und von Zeit zu Zeit mit Oel gefüllt wird, durch ein Rohr und durch den obern Rand des Topfes geleitet, gelangt von da durch eine Wanddurchbohrung in einen Ringkanal, sodann durch einige Oeffnungen in Längenfurchen, und bestreicht somit zunächst die Umfangsfläche des Zapfens. Hierauf begibt es sich durch die in der Bodenplatte angebrachten Furchen nach dem Zentrum derselben, wobei es die Berührungsflächen zwichen Zapfen und Bodenplatte einfettet, und fliesst zuletzt durch Kanäle, von denen einer nach einem Gefäss führt, in welchem sich das Oel zu sammeln hat, aus der Maschine ab. Das so aufgesammelte Oel kann dann zu minder delikaten Oelungen noch einmal gebraucht werden. Die Raschheit des Oeldurchzugs kann noch durch einen Hahn, den man in dem Zuflussrohr anbringt, nach Erforderniss regulirt werden.

Es erübrigt noch zu bemerken, dass der in das untere Ende der Welle eingeschraubte Zapfenkörper und die beiden Pfannenköper aus Gussmetall sein sollen.

120) *Zapfen, die nicht rund umlaufen.* Oefters kommen Zapfen vor, die nicht rund umlaufen, sondern sich nur hin- und herdrehen. Dies ist z. B bei den verschiedenen Zapfen der Fall, mit welchen die Balanciers der Dampfmaschinen versehen sind. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Drehung erfolgt, ist meistens so gering, dass ein Warmlaufen dieser Zapfen nicht leicht eintreten kann, dagegen ist der Umstand sehr misslich, dass sie sich nicht rund herum gleichmässig abnützen, sondern nur an einzelnen Stellen, was dann zur Folge hat, dass sie unrund werden und stockende Bewegungen veranlassen. Man kann diesem Uebelstande dadurch begegnen, dass man diese Zapfen in Zeitintervallen, innerhalb welchen keine merkliche Abnützung eintreten kann, um einen gewissen Winkel von ungefähr 30° verwendet in den Körpern befestigt.

121) *Oelung bei Hin- und Herbewegungen.* Wenn auf einer ruhenden Fläche A ein Körper B hin- und hergleitet, kann die Oelung in der Regel am vollkommensten bewerkstelligt werden, wenn man in oder mit dem beweglichen Körper B ein Oelmagazin in Verbindung bringt, von diesem aus einen Kanal nach der Reibungsfläche führt, und dann in dieser Fläche eine Furche anbringt, deren Richtung mit jener der Bewegung einen rechten Winkel bildet Auf diese Weise werden die beiden sich an einander reibenden Flächen continuirlich geölt, wo hingegen das Oel, wenn es auf die Bahn gebracht wird, von dem Körper B bei jeder Hin- und Herbewegung weggeschoben wird, so dass es sich an den Enden des Bewegungsraumes zwecklos ansammelt. Diese Regel hat jedoch ihre Ausnahme; oftmals kann eine gleichmässige Oelung auf

einfachere Weise erzielt werden. So z. B. bei dem Kolben und der Kolbenstange vertikalstehender Dampfcylinder, wo es genügt, wenn das Oel auf die obere Fläche des Kolbens und in den Becher der Stopfbüchse gethan wird, indem es dann bei jedem Niedergang des Kolbens an der Cylinderwand und bei jeder Aufwärtsbewegung desselben an der Kolbenstange hängen bleibt. Bei horizontal liegenden Cylindern ist eine sorgfältige Oelung des Kolbens und der Kolbenstange nicht leicht zu erreichen.

II. Theil.

Prinzipien des Maschinenbaues.

Prinzipien des Maschinenbaues.

1) *Das freie und das erzwungene Wirken der Naturkräfte.* Der reale Stoff, aus welchem die materielle Welt besteht, ist durch die demselben innwohnenden mannigfaltigen Kräfte beständigen Umwandlungen unterworfen. Ein Beharren des Stoffes in irgend einem Zustande des ruhigen oder bewegten Seins findet nur bei einem Gleichgewichtsverhältniss aller auf denselben einwirkenden Kräfte statt. Da aber ein solches Verhältniss in der Regel immer nur in einzelnen Zeitmomenten, nie aber dauernd vorhanden ist, so muss man sich die ganze materielle Welt und jeden einzelnen ihrer Bestandtheile als etwas sich stets Veränderndes und sich stets Umbildendes vorstellen. Dabei wird aber kein neuer Stoff geschaffen, noch der einmal vorhandene existirende Stoff vernichtet, sondern die Kräfte schaffen nur aus dem in gewissen Formen und Gebilden vorhandenen Stoffe neue Gebilde. Der Stoff gehorcht dabei den Kräften; wo sie ihn hinschieben, geht er hin; wie sie ihn gruppiren, verbleibt er; er ist das Geistlose, die Kräfte sind das Geistige, Belebende, Verändernde, Gestaltende. Das Gehorchen des Stoffes besteht darin, dass er einer Anziehung folgt, einer Abstossung weicht, und dass sich dies nur nach der Intensität richtet. Ist die Kraft, welche auf den Stoff einwirkt, so beschaffen, dass sie nur auf eine ganz bestimmte unveränderliche Weise wirken kann, so wird an dem daraus entstehenden Gebilde keine Freiheit, sondern nur Zwang und Nothwendigkeit zu erkennen sein. Ist dagegen die Kraft so beschaffen, dass sie mit vollkommener Freiheit, durch freie Selbstbestimmung ihre Einwirkung auf den Stoff in aller und jeder Hinsicht abändern kann, so wird das aus einer solchen Thätigkeit hervorgehende Gebilde auch das Gepräge dieser Freiheit an sich tragen, obgleich der Stoff, aus dem es besteht, das Gegentheil von Freiheit, nämlich ein rein passives Ding ist.

Das einfachste, geistloseste Verhalten eines Stoffes ist ein Zustand absoluter Ruhe, ein Zustand des absoluten Nichtsthuns und Nichtsleidens. Eine Stufe höher steht schon das Verharren in einem bewegten Zustande nach den rein passiven Eigenschaften der Trägheit, wobei sich nur allein der Ort des Seins ändert, alles Uebrige aber gleich bleibt.

Wiederum eine Stufe höher ist zu stellen eine Bewegung mit Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen; hier ist ein Anfang von Leben zu erkennen, weil eine Veränderung des Seins statt findet. Diese drei Zustände, in welchen sich die Körper und die Materie befinden, sind rein dinamischer Art; die Körper bleiben dabei unverändert, und nur allein ihre Stellung, gegen das was sie umgibt, verändert sich.

Die einfachsten Veränderungen, welche nicht nur die Körper als Ganzes, sondern auch den Zusammenhang betreffen, in welchem ihre Theile zu einander stehen, sind: Dichtigkeitsveränderung, Formveränderung, Theilung. Bei diesen Veränderungen ist der Vorgang, durch welchen sie geschehen, mit Bewegungen verbunden, das Resultat der Veränderung ist dagegen ein neuer Gleichgewichtszustand des Ganzen oder der Theile.

Die wichtigsten Veränderungen, welche in der unorganischen Natur vorkommen, sind jene, die durch das Spiel der Molekularkräfte hervorgebracht werden. Es beruhen hierauf die Mehrzahl der physikalischen und chemischen Erscheinungen. Sehr viele physikalische Erscheinungen beruhen auf schwingenden Bewegungen der kleinsten Körpertheilchen um eine gewisse Gleichgewichtsposition. Die chemischen Erscheinungen dagegen treten auf, wenn durch das wechselseitige Einwirken der Molekularkräfte zweier oder mehrerer Substanzen Aenderungen in der Gruppirung der Molekule und Atome entstehen. Hier treten bereits Gebilde auf, bei deren Entstehung die Kräfte gleichsam nach einer Idee gearbeitet haben, d. h. in der Art thätig waren, als wollten sie etwas sich von vorneherein Gedachtes und Vorgestelltes realisiren. Bei genauer Betrachtung des Vorganges ist aber zu erkennen, dass hier durchaus keine Freiheit waltet, sondern dass Alles nothwendig so vor sish geht, wie es die Verhältnisse und Umstände bedingen. Es ist ein Molekularbau nach statischen Gesetzen, und es kann nur das entstehen, was nach den Kräften und nach der Form der Molekule und Atome nach statischen Gesetzen ins Gleichgewicht gerathen kann.

So wie der Bau der unorganischen Körper durch Gleichgewichtsgruppirungen der Atome und Molekule hervorgeht, so beruht der Bau der Pflanzen auf Bildung von Zellen und Gruppirung derselben zu Gebilden. Die erste primitive Zelle im Samenkorn zieht von Aussen ungestalteten Elementarstoff an, nimmt denselben auf, gestaltet daraus, jene Primitivzelle als Vorbild benutzend, neue Zellen und gruppirt dieselben auf mannigfaltige Weise neben einander. Jede Pflanze spinnt so gleichsam Fäden, und webt daraus ihre besonderen Desseins, die aber als eine nothwendige Folge des primitiven Zellenbaues zu betrachten sind. Dieser

Zellenbau erscheint als etwas Begreifliches, aber die Entstehung der Primitivzelle ist eine Erscheinung, die wenigstens gegenwärtig jeder Erklärung sich entzieht. Wir müssen es daher einstweilen als Thatsache hinnehmen, dass jede Pflanze durch unzähligemaliges Wiederholen der Primitivzellen entsteht, und es der Zukunft überlassen, ob eine wahre Erklärung dieses Vorganges jemals aufgefunden werden kann.

Die Pflanze besteht aus Zellen, die im Wesentlichen unter einander keine Verschiedenheit zeigen. Jede einzelne Zelle ist gleichsam ein Individuum, das für sich selbst besteht, und ohne Mitwirkung der übrigen Zellen aus dem gestaltlosen Elementarstoffe ihresgleichen hervorbringt. Das Thier stimmt mit der Pflanze darin überein, dass es ebenfalls aus einem Zellenbau besteht, weicht aber darin ab, dass bei demselben Zellen verschiedener Art vorkommen, die nicht selbstständig bestehen und entstehen, sondern nur durch das Vorhandensein des ganzen mannigfaltigen Zellenbaues, welcher den Leib des Thieres bildet, aus dem Elementarstoff erzeugt werden. In der Pflanze scheint das leibliche Leben der alleinige Zweck zu sein; die Blüthe und der aus ihr sich entwickelnde Same ist der Gipfelpunkt ihres thätigen Seins. Anders ist es bei den Thieren, insbesondere bei den höher organisirten und bei dem Menschen. Hier scheint das leibliche Leben nicht der Zweck, sondern nur das Mittel für das Seelenleben zu sein.

Alle Thätigkeiten, Veränderungen, Umbildungen und Neubildungen, welche die Natur ohne Einwirkung des Menschen hervorbringt, scheinen zunächst ohne allen Zweck zu geschehen; es bildet sich, entsteht und vergeht, was vermöge der vorhandenen Umstände und Kräfte möglich ist. Die Erde dreht sich um ihre Axe und um die Sonne, unbekümmert, ob dies zu irgend einem Zweck dient. Das Wasser befindet sich beständig in einem Kreislauf, steigt als Dunst in die Höhe, fällt als Regen oder Schnee auf die Erde, und fliesst in Bächen und Flüssen dem Meere zu. Auch die Kräfte im Innern der Erde schaffen, bilden, verändern und zerstören ohne Unterlass und ohne Rücksicht. Die Pflanzen gedeihen, so wie dem Samen Feuchtigkeit, Wärme und etwas Erde geboten ist. Die zahllosen Thiere, welche die Luft, das feste Land und die Wasser beleben, sie alle entstehen und vergehen scheinbar zwecklos. Jedes dieser Dinge scheint nur zu existiren, nicht um irgend einen Zweck zu erfüllen, sondern es existirt, weil überhaupt die Stoffe und Kräfte da sind, durch deren Thätigkeit Alles entsteht und vergeht.

Inmitten dieser stets thätigen, aber scheinbar zwecklos thätigen Welt steht nun der Mensch mit seinem Leib und seiner Seele, theilweise vielleicht sogar ein Produkt dieses ganzen Thätigkeitsprozesses. Auf einer tieferen Stufe der Kultur stehend, sucht er zunächt sich zu erhalten und die Triebe seiner Seele zu befriedigen. Hat er eine höhere Stufe erreicht, so erwachen in seiner Seele Bestrebungen höherer Art; es ist ihm nicht mehr genug, überhaupt zu existiren, und den augenblicklich und vorübergehend wirkenden Trieben seiner Seele zu folgen, sondern er ahnt, dass er mit seinen Seelenkräften nach einem gewissen Ziele hinstreben soll, und dass dies nur durch ein zweckvolles Sein und Wirken möglich ist. Angekommen auf dieser Stufe, sieht er sich um in der ihn umgebenden Welt, und findet nur theilweise die Mittel, welche zu seiner leiblichen Existenz und zur Verfolgung seiner geistigen Zwecke nothwendig sind. Er wendet nun seine geistigen Kräfte an, um sich diese Mittel in reicherem Maase, als sie die Natur darbietet, und auch in einem für seine Zwecke passenderen Zustand zu verschaffen. Hier macht er aber die Erfahrung, dass er mit seinem Geiste weder einen Stoff schaffen, noch die vorhandenen Stoffe vermehren oder vernichten kann; er besitzt keine Zauberkraft. Ja noch mehr, er macht sogar die Erfahrung, dass er den vorhandenen Naturkräften nicht gebieten kann, dass diese, ganz rücksichtslos und unbekümmert um seine Zwecke, ihre Thätigkeiten und Bildungen vollbringen. Die Naturkräfte scheinen ihm feindlich gegenüber zu stehen, aber dieser Schein dauert nur so lange, bis er sich mit dem Spiel dieser Kräfte genauer vertraut gemacht hat; ist dies geschehen, so entdeckt er in seinem Geist die Mittel, wodurch die Kräfte veranlasst werden können, dass sie, der ihrem Wesen ureigenen Natur folgend, dennoch solche Veränderungen an den vorhandenen Stoffen hervorbringen, wodurch dieselben für seine Zwecke brauchbar und nützlich werden.

Hier nun erscheint die Technik in ihrer vollen Wichtigkeit und Bedeutung, denn ihre Aufgabe ist es, die Naturkräfte so zu lenken und zu beherrschen, dass sie die Mittel zur Erreichung der vielfachen menschlichen Zwecke in grösserer Menge, an den geeignetsten Orten und in der tauglichsten und besten Beschaffenheit liefern, ohne desshalb ihrer inneren Natur ungetreu zu werden.

Kein menschliches Wort vermag ein Samenkorn zu schaffen, aber indem der Mensch die Natur in ihrem Wirken belauscht, erkennt er, wie sie es anfängt, um aus einem Samenkorn eine grosse Zahl der gleichen Art hervorzubringen; und so entsteht der Feldbau, durch welchen der Mensch in der Nähe seines Wohnortes aus einigen eingesammelten oder erkauften Samenkörnern seinen Lebensunterhalt sich verschafft.

Keines Menschen Wort ist so mächtig, den Produktenreichthum, welchen die Natur in entfernteren Ländern hervorbringt, herbeizuzaubern. Sein Geist in Verbindung mit seiner physischen Kraft leisten aber auch hier mit einigem Aufwand von Zeit und Mühe, was das Wort nicht vermag. Er baut sich grosse und kleine Schiffe mit Masten und Segel, beobachtet den Stand und Lauf der Gestirne, erfindet die Magnetnadel, und findet so die Bahn durch das Meer nach dem fernen Strand, um, mit den gewünschten Schätzen bereichert, zurückzukehren; so entsteht Handel und Schiffahrt.

Zahllose Dinge, welche die Natur freiwillig hervorbringt, sind in dem Zustande, wie sie aus der Thätigkeit der Naturkräfte hervorgehen, für menschliche Zwecke nicht brauchbar. Sie müssen erst, um als Nahrung und zur Kleidung oder zu anderen Zwecken zu dienen, umgestaltet und verändert werden, und dazu sind oftmals Kraftäusserungen nothwendig, die der Mensch selbst nicht zu entwickeln vermag. Der Geist weiss sich aber auch hier zu helfen; er erkennt zunächst das Vorhandensein der mächtigen Gewalten, die in den Wasserströmungen und im Dampf des Wassers verborgen sind; und weiss dann die Mittel ausfindig zu machen, wodurch er diese Mächte zwingen kann, dass sie, ohne ihrer innern Natur ungetreu zu werden, dennoch gerade die gewünschten Veränderungen an den Naturprodukten hervorbringen. Das Wasser eines Baches wird gezwungen, aus Getreide Mehl zu machen, wenn man es auf ein Wasserrad leitet, das mit einer Mühle in Verbindung steht. So entsteht die mechanische Technik.

Diese Leitung, Bewältigung und Beherrschung der Naturkräfte, wodurch sie veranlasst werden, für unsere Zwecke thätig zu sein, für uns zu arbeiten, ist vorzugsweise erst in unserer Zeit von Bedeutung geworden. Man hat es darin in kurzer Zeit zu einer grossen Virtuosität gebracht, und die Geschichte wird einstens nicht verkennen, was in dieser Hinsicht in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts geleistet worden ist. Leider ist über dieses technische Treiben gar Vieles vernachlässigt worden oder ganz unterblieben, was durchaus gepflegt und fortgebildet werden muss, um zu einem erfreulichen Dasein zu gelangen, und so ist es denn gekommen, dass die Früchte dieser angestrengten Thätigkeiten theilweise sehr zu beklagen sind.

Die Erfahrung, und zwar eine bittere, wird aber auch hier dahin leiten, von dieser Meisterschaft des technischen Wirkens einen vernünftigen und weisen Gebrauch zu machen, und dann darf man wohl mit Zuversicht hoffen, dass die ausgebildete Technik zum Heil und zum Segen, aber nicht zum Fluch der Menschen wirken wird.

2) *Der mechanische Prozess und die Maschine.* Jeder mechanische Prozess, derselbe mag durch das freie Spiel der Naturkräfte oder durch eine erzwungene Thätigkeit derselben hervorgebracht werden, ist entweder eine Ortsveränderung oder eine Formveränderung eines Körpers. Die Körper widerstehen aber entweder durch ihre inneren Molekularkräfte oder durch ihren Zusammenhang mit den sie umgebenden Köpern jeder Aenderung ihres Zustandes; es muss also, wenn eine mechanische Veränderung eines Körpers geschehen soll, immer eine

äussere Kraft vorhanden sein, die im Stande ist, die Widerstände zu bewältigen, die der Veränderung entgegen wirken; und da die Kräfte nie isolirt erscheinen, sondern immer in gewissen Substanzen ihren Sitz haben, so ist klar, dass jede Veränderung nur durch die Wechselwirkung zweier Körper geschehen kann.

Körper, welche mit Kräften begabt sind, durch die sie auf andere Körper verändernd einzuwirken vermögen, werden „motorische Körper" oder Motoren genannt, und jeder mechanische Prozess besteht also in einer dauernden Einwirkung eines motorischen Körpers auf einen zu verändernden Körper.

Die Einwirkung des Motors kann unmittelbar oder mittelbar statt finden. Bei den mechanischen Prozessen, welche in der Natur durch das freie Spiel der Kräfte ohne Mitwirkung des Menschen vorkommen, wirkt immer der Motor unmittelbar auf den zu verändernden Körper ein, das Resultat ist daher von mancherlei Zufälligkeiten abhängig, daher nur selten für unsere Zwecke brauchbar und nützlich. Auch bei den mechanischen Prozessen, die durch Menschenkraft ohne Zuhilfenahme eines Werkzeuges oder einer Maschine durchgeführt werden, findet eine unmittelbare Einwirkung des Motors statt; allein das Resultat ist in diesem Falle, wegen der Intelligenz des Motors, keinen Zufälligkeiten unterworfen, und daher entsteht aus einer solchen Thätigkeit in den meisten Fällen ein nützliches Resultat. Bedient sich aber der Mensch zur Verrichtung einer Arbeit eines Werkzeuges, so erfolgt die Einwirkung des Motors auf den zu verändernden Körper nicht mehr unmittelbar. Wenn eine mechanische Arbeit durch einen der verstandeslosen Motoren, nämlich durch Wasser- oder Dampfkraft etc., verrichtet werden soll, kann eine unmittelbare Einwirkung des Motors niemals zum gewünschten Ziele führen, sondern es ist in diesem Fall ein vermittelnder Körper, oder ein System von vermittelnden Körpern, eine Maschine, nothwendig, deren Einrichtung so beschaffen sein muss, dass wenn gewisse Bestandtheile derselben durch den Motor in Bewegung gesetzt werden, andere Theile die zu verändernden Stoffe ergreifen, und mit denselben solche Bewegungen vornehmen, wie es der Zweck erfordert. Bei einem durch Vermittlung einer Maschine erfolgenden mechanischen Prozess kommen also dreierlei Körper in Betrachtung, nämlich: 1) der Motor, welcher das aktive Prinzip in sich enthält; 2) der zu verändernde Körper, welcher sich gleichsam vertheidigend verhält; 3) die vermittelnde Maschine, welche einerseits mit dem Motor, andererseits mit dem zu verändernden Körper in Verbindung sein muss.

Diese wenigen Andeutungen über den Zweck einer Maschine lassen erkennen, dass dieselbe in dem mechanischen Prozess nicht als selbstständiges aktives Prinzip wirkt, sondern dass sie nur die Wirkungen, welche der Motor entwickelt, in sich aufnimmt, und auf passende und geschickte Weise auf die zu verändernden Körper überträgt. Wie die Maschine beschaffen sein muss, um diesem Zweck zu entsprechen, wird in der folgenden Nummer im Allgemeinen näher erklärt werden.

3) *Die wesentlichen Bestandtheile jeder Maschine.* In jeder Maschine muss wenigstens Ein Bestandtheil vorkommen, der mit dem Motor in unmittelbare Berührung kommt und von demselben zunächst getrieben wird. Diesen Bestandtheil oder, wenn deren mehrere vorhanden sind, ihre Gesammtheit nennt man den Receptor (Empfänger, Kraftaufsammler). Er ist an jeder Maschine leicht zu erkennen. Bei den Maschinen, die durch Menschen getrieben werden, besteht der Receptor aus einem Tritt oder Griff, Handhabe etc.; bei den Wasserrädern und Turbinen sind es die Schaufelflächen und Zellenwände, bei den Dampfmaschinen ist es der Kolben.

Der ganze Kraftaufsammlungsapparat, d. h. der Inbegriff aller Theile, welche vorhanden sein müssen, damit die Receptoren ihre Funktionen zweckmässig verrichten können, nennt man die Betriebsmaschine, auch Kraftmaschine. Betriebsmaschinen sind demnach: Wasserräder, Turbinen, Dampfmaschinen, Pferdegöpel.

In jeder vollständigen Maschine muss ferner wenigstens Ein Bestandtheil vorhanden sein, welcher mit dem zu verändernden Körper in unmittelbare Berührung tritt, und auf denselben in der Art und Weise einwirkt, wie es die zu vollbringende Arbeit erfordert. Diesen Bestandtheil nennt man das Werkzeug. Gewöhnlich sind die zur Bewegung des Werkzeuges erforderlichen Bestandtheile in der Art angeordnet und verbunden, dass sie in Verbindung mit den Werkzeugen ein selbstständiges Ganzes bilden. Den Inbegriff dieser Theile nennt man eine Werkzeugmaschine.

Oftmals ist der mechanische Prozess, welcher vermittelst der Maschine durchgeführt werden soll, so zusammengesetzt, dass er in eine Reihe von einfacheren Prozessen, von denen jeder ein besonderes Werkzeug oder eine besondere Werkzeugmaschine erfordert, aufgelöst werden muss. In diesem Falle erfordert die Durchführung des mechanischen Prozesses ein ganzes System von Werkzeugen, oder von Werkzeugmaschinen. Als Beispiel zur Erläuterung kann eine Mahlmühle dienen. Die Steine, welche das Getreide zerreiben, sind die Werkzeuge. Die Steine mit allem Zubehör und mit dem Mühlgerüste, kurz alle Theile zusammen, die da sein müssen, damit das Getreide zerrieben werden kann, also der sogenannte Mahlgang bilden die Werkzeugmaschinen. Ist es eine Mühle von neuerer Einrichtung, so kommen in derselben, nebst der eigentlichen Mühle, noch eine grössere Anzahl von Hilfsmaschinen vor, von denen jede eine besondere Arbeit verrichtet. Diese Maschinen zusammen bilden ein System von Arbeitsmaschinen.

Zuweilen ist es zweckmässig, die Arbeitsmaschinen eines solchen Maschinensystems so an einander zu reihen und in Verbindung zu setzen, dass gleichsam eine einzige grosse Maschine entsteht, in den meisten Fällen ist jedoch eine Trennung der einzelnen Maschinen des ganzen Systems vorzuziehen. Das erstere ist der Fall bei der Maschine zur Verfertigung des endlosen Papiers, das letztere bei den Spinnmaschinen.

Bei jeder vollständigen Maschine müssen endlich gewisse Bestandtheile vorhanden sein, welche den Receptor mit dem Werkzeug oder die Kraftmaschinen mit den Arbeitsmaschinen verbinden. Bei grösseren und complizirten Prozessen, die ein ganzes System von Arbeitsmaschinen und manchmal auch mehrere Kraftmaschinen erfordern, befinden sich diese verschiedenen Maschinen in grossen geräumigen Lokalitäten und in beträchtlicher Entfernung von einander aufgestellt, müssen aber dennoch in einen solchen Zusammenhang gebracht werden, dass alle Werkzeuge ihre Funktionen regelmässig verrichten, wenn die Kraftmaschine durch den Motor getrieben wird.

Den Inbegriff aller Theile, welche den Zusammenhang zwischen der Kraftmaschine und den Werkzeugmaschinen herstellen, nennt man gewöhnlich die Transmission (Kraftleitung), auch Triebwerk.

Aus dieser Erklärung geht hervor, dass ein vollständiges Maschinenwerk aus folgenden wesentlichen Bestandtheilen besteht:

1) Für einen einfachen Arbeitsprozess: aus Kraftmaschine, Transmission und Werkzeug.

2) Für einen complizirten Arbeitsprozess: aus Kraftmaschine, Transmission und Werkzeugmaschine.

3) Für ein System von Arbeitsprozessen: aus Kraftmaschine, Transmission und einem System von Arbeitsmaschinen.

Die Grenze zwischen Kraftmaschine und Transmission und jene zwischen Transmission und Arbeitsmaschine kann nicht immer scharf angegeben werden, und gewöhnlich enthalten die Kraftmaschinen und die Arbeitsmaschinen einen Theil der gesammten Transmission.

4) *Der geometrische Zusammenhang.* Aus der Bestimmung der Maschine geht hervor, dass in derselben keine Freiheit walten könne, sondern dass alle in ihr vorkommenden Bewegungen nothwendiger Weise unfreie Zwangsbewegungen sein müssen. Man will ja den Motor zwingen, auf den zu verändernden Körper vermittelst der Maschine in der Art einzuwirken, dass derselbe ganz bestimmte Orts- oder Formveränderungen erleide; dies kann aber nur geschehen, wenn der Receptor mit den Werkzeugen durch eine Gliederung von Körpern so in Verbin-

dung gesetzt wird, dass durch die Einwirkung des Motors auf die Maschine in allen Theilen derselben keine andern Bewegungen entstehen können, als jene, welche der Zweck erfordert. Zunächst muss der Receptor durch die Einwirkung des Motors diejenige Bewegung und Geschwindigkeit annehmen, welche für die Kraftaufsammlung die geeignetste ist, und dann müssen gleichzeitig sämmtliche Werkzeuge in solche Bewegungen und in solche Geschwindigkeiten gerathen, wie es durch die zu verrichtende Arbeit vorgeschrieben wird. Diese Verbindung der Maschinentheile, wodurch dieselben gezwungen werden, ganz bestimmte Bewegungen zu machen, nennt man die geometrische Gliederung oder den geometrischen Zusammenhang.

Dieser Zusammenhang ist nothwendig von der Art, dass die Gestalt der Bahn, welche irgend einen Punkt eines Maschinentheiles beschreibt einzig und allein von diesem Zusammenhang abhängt, demnach von der treibenden Kraft, von der Geschwindigkeit des Ganges der Maschine, so wie auch von den Massen derselben ganz unabhängig ist. In der Regel sind diese Bahnen geschlossene, in sich selbst zurückkehrende oder gerade Linien.

Durch den geometrischen Zusammenhang wird ferner auch das Geschwindigkeitsverhältniss irgend zweier Punkte der Maschine vollständig bestimmt, und auch dieses ist, wie die Getalt der Bahn von den Kräften und Massen und auch von der absoluten Geschwindigkeit der Bewegung ganz unabhängig.

Da die complizirten Arbeitsprozesse jederzeit in einfachere Prozesse aufgelöst werden, von denen jeder durch eine besondere Maschine verrichtet wird, so sind die bei den Maschinen vorkommenden Bewegungsarten in der Regel nicht sehr mannigfaltig. Sehr oft, ja sogar in den meisten Fällen, bewegen sich alle Bestandtheile einer Maschine mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Kreise um gewisse Axen herum, in welchem Falle die Maschine in jedem Augenblick den gleichen Bewegungszustand darbietet. In andern Fällen durchlaufen die Werkzeuge und andere Bestandtheile einen Cyclus von Bewegungszuständen, den sie dann fort und fort wiederholen. Die Bewegungszustände sind daher in der Regel entweder ganz gleichförmig oder periodisch wiederkehrend.

Man kann sich das so eben über den geometrischen Zusammenhang Gesagte theils durch eine Mahlmühle, theils durch eine Sägmühle anschaulich machen. Bei einer durch ein Wasserrad oder durch eine Turbine getriebenen Mahlmühle kommen, mit Ausnahme der Schüttelbewegung, nur drehende Bewegungen um freie Schwerpunktsaxen vor. Der geometrische Zusammenhang ist hier von der Art, dass sich jeder Punkt der Maschine in einem ganz bestimmten Kreise bewegt, und dass die Geschwindigkeit jedes Punktes unveränderlich die gleiche bleibt, so wie dies bei irgend einem bestimmten Punkt der Maschine der Fall ist. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten von irgend zwei Punkten des ganzen Werkes wird einzig und allein durch die unveränderlichen Abmessungen der Räderhalbmesser bestimmt.

Bei einer Brettsäge von ganz gewöhnlicher Einrichtung kommen schon viel mannigfaltigere Bewegungen vor. Angenommen, sie werde durch ein Wasserrad bewegt, so machen das Wasserrad, die Zahnräder und die Kurbel drehende Bewegungen um unveränderliche Axen. Die Säge und der Rahmen, in welchen sie eingespannt ist, machen geradlinige auf- und niedergehende Bewegungen mit ungleichförmiger Geschwindigkeit. Die Kurbelstange, vermittelst welcher der Sägrahmen mit der Kurbel in Verbindung steht, hat eine ziemlich complizirte Bewegung, indem der oberste Punkt derselben mit der Säge geradlinig auf und niedergeht, während der unterste Punkt mit der Kurbel im Kreis herum geht. Nebst diesen Bewegungen kommt dann noch die nach jedem Niedergang der Säge plötzlich eintretende Fortschiebung des Blockwagens vor.

Bei der Mühle ist die Bewegung, wenn sie einmal in den Normalzustand ihrer Thätigkeit gerathen ist, in jedem Augenblick die gleiche. Bei der Säge dagegen ist der Bewegungszustand ein periodisch wiederkehrender. Es erfolgt ein Schnitt wie der andere, aber der Bewegungszustand wechselt in der Zeit von einem Schnitt bis zum nächst folgenden.

Dieser unfreie gezwungene Zustand, in dem sich alle Theile einer Maschine befinden, und sich nothwendig befinden müssen, unterscheidet ihre Bewegungen und Wirkungen wesentlich von den freien Thätigkeiten, wie sie in der Natur vorkommen. In der Natur gibt es keinen derartigen Zwang; Alles bewegt, gruppirt, gestaltet und bildet sich wie es vermöge der vorhandenen Kräfte möglich und nothwendig ist; sie hat desshalb in allen ihren Thätigkeiten innerhalb gewisser Grenzen einen freien Spielraum, der einen Wechsel von Bildungen zulässt. Bei den freien Bewegungen ist die Gestalt der Bahn, welche einen Punkt des bewegten Körpers beschreibt, im Wesentlichen durch die Kräfte bedingt, welche auf denselben einwirken. Die Bahnen der Planeten sind nur desshalb Elypsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, weil die allgemeine Gravitation herrschend ist; bei jeder andern Anziehungskraft würde auch die Bahn eine andere Gestalt haben. Bei einer Maschine verhält es sich nun ganz anders, ihre Bewegung und Thätigkeit ist von der speziellen Natur der treibenden Kraft ganz unabhängig, wenn nur der geometrische Zusammenhang zweckmässig gewählt ist, kann mit jeder Art von Kraft das gleiche Resultat erzielt werden. Es gibt Wasser-, Dampf-, Luft- und Rossmühlen. Der geometrische Zusammenhang beherrscht alles, unterwirft sich alles, hebt jede Freiheit auf, lässt keine Willkühr zu. Die Maschine als solche ist etwas absolut Lebloses, sie enthält in sich kein thätiges Prinzip, lebendig, bewegt, thätig wird sie nur durch den Motor, der nicht ein Theil der Maschine ist. Sie nimmt die Thätigkeit des Motors in sich auf, pflanzt die empfangene Wirkung durch alle ihre Glieder weiter fort, consumirt dabei einen Theil, und gibt den Rest an den zu verändernden Körper ab.

5) *Von den Motoren.* Motoren (Triebkräfte) werden diejenigen Körper oder Stoffe genannt, welche die Fähigkeit besitzen, auf sich selbst oder auf andere Körper andauernd mit einer namhaften Intensität bewegend oder verändernd einzuwirken. Wenn man will, kann man jeden Körper Motor nennen, denn jeder ist mit Molekularkräften begabt, die zwar nicht immer, aber doch unter gewissen Umständen Wirkungen hervorzubringen vermögen. In technischer Hinsicht kann man jedoch nur solche Körper, die sich in grosser Menge in der Natur vorfinden und bedeutende Wirkungen hervorzubringen vermögen, Motore nennen.

Die vorzüglichsten technischen Motoren sind: 1) die Kraft der Menschen und Thiere; 2) das Wasser; 3) der Wind; 4) der Wasserdampf; 5) das Schiesspulver und andere explodirende Substanzen. Ausser diesen Körpern werden auch noch ausnahmsweise 6) elastische Federn, 7) gehobene Gewichte, 8) der Elektromagnetismus als Motoren angewendet.

Es ist hier nicht der geeignete Ort, die besondere Beschaffenheit jedes einzelnen dieser Motoren genauer zu untersuchen; es wird dies erst dann geschehen, wenn die einzelnen Motoren und die zu ihrer Benutzung geeigneten Kraftmaschinen behandelt werden Hier soll von den Motoren nur das denselben Gemeinsame in so weit besprochen werden, als es für das Verständniss der Bewegungs- und Wirkungsgesetze der Maschine nothwendig ist.

Zuvörderst einige Bemerkungen über den Sitz des aktiven Prinzips in den oben genannten Motoren.

Der Mensch und die Thiere verdanken ihre motorische Wirkungsfähigkeit der von ihrem Willen abhängigen Zusammenziehbarkeit ihrer Muskeln.

Das Wasser ist, an und für sich als Substanz betrachtet, kein Motor, es wird nur Motor, wenn es sich in einem bewegten Zustand befindet, durch die seiner Masse innwohnende lebendige Kraft, oder wenn es sich an einem Ort befindet, von welchem aus es unter der Einwirkung der Erdschwere nach einem tiefer gelegenen Ort niederfliessen kann.

Auch der Wind, d. h. die in Bewegung befindliche atmosphärische Luft ist nur durch einen bewegten Zustand durch die lebendige Kraft seiner Masse motorisch. Die atmosphärische Luft und alle Gasarten können aber auch, wenn sie sich in einem comprimirten Zustand in einem Gefäss befinden, motorische Wirkungen hervorbringen, wenn denselben Gelegenheit zur Ausdehnung geboten wird.

Der Wasserdampf verdankt seine grosse motorische Wirkungsfähigkeit der Repulsivkraft der in ihm thätigen Wärme; er ist streng genommen kein primitiver, sondern nur ein sekundärer Motor, denn das primitiv Bewegende ist die Repulsivkraft der Wärme, die durch Verbrennung der Brennstoffe entwickelt wird.

Das Schiesspulver gehört in die Klasse der explodirenden Substanzen; durch Entzündung desselben entwickelt sich zunächst eine höchst comprimirte Gasmasse, die sich mit enormer Energie auszudehnen strebt, und die, wenn die Ausdehnung wirklich erfolgt, eine höchst bedeutende Wirkung hervorzubringen vermag.

Stahlfedern und andere elastische Körper vermögen nur dann Wirkungen zu entwickeln, wenn sie durch irgend eine äussere Kraft aus ihrem natürlichen Gleichgewichtszustand gebracht, und sodann wiederum in ihren natürlichen Zustand zurückzukehren streben.

Gehobene Gewichte wirken als Motoren, wenn sie unter der Einwirkung der Schwere nieder sinken.

Die allgemeinsten Eigenschaften der Motoren oder das allen Motoren Gemeinsame besteht nun in Folgendem:

1) Jeder individuelle Motor oder jede bestimmte Quantität einer motorischen Substanz besitzt nur eine beschränkte und bestimmte Wirkungsfähigkeit in sich. Ohne Nachtheil für die Gesundheit kann ein Mensch von mittlerer Stärke in jeder Sekunde eine Wirkung von 6 bis 7 Kilogramm-Meter, ein Pferd eine Wirkung von 60 bis 70 Kiogramm-Meter entwickeln. Eine bestimmte Wassermenge, z. B. 1 Kubik-Meter, die sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit von 5 Meter bewegt, enthält eine Wirkungsfähigkeit in sich, die durch ihre lebendige Kraft bestimmt wird, demnach $1000 \frac{5^2}{2 \times 9.81} = 1270$ Kilogramm-Meter beträgt.

Eine Wassermenge von 1000 Kilogramm Gewicht, die von einer Höhe von 2^m niederfliessen kann, vermag dabei eine Wirkungsgrösse $= 2 \times 1000 = 2000$ Kilogramm-Meter zu entwickeln. Eine bestimmte Quantität Dampf, z. B. 1 Kilogramm, von einer bestimmten Spannkraft, z. B. 5 Atmosphären, enthält ebenfalls nur eine ganz bestimmte Wirkungsfähigkeit, die bei vollständiger Ausdehnung derselben entwickelt wird. Eine bestimmte Quantität Schiesspulver von gewisser chemischer Zusammensetzung und Güte enthält eine ganz bestimmte Wirkungsfähigkeit in sich, die entwickelt wird, wenn es sich im entzündeten Zustand vollständig ausdehnen kann. Aehnlich verhält es sichmit allen übrigen Motoren.

2) Die totale Wirkung, welche ein Motor im thätigen Zustande entwickelt, ist gleich derjenigen Wirkung, die zur Bewegung und Beschleunigung seiner eigenen Masse nothwendig ist, mehr der Wirkung, mit der er einen äusseren Widerstand überwältiget. Wenn ein Arbeiter

irgend eine mechanische Arbeit verrichtet, muss der Organismus nicht nur diejenige Thätigkeit entwickeln, welche die Ueberwindung des äusseren Widerstandes erfordert, sondern er muss auch noch die mannigfaltigen Contraktionen der Muskeln und Beschleunigungen ihrer Massen hervorbringen. Da nun die totale Wirkung, welche der Organismus eines Individuums zu entwickeln vermag, als eine constante Grössse zu betrachten ist, so ist klar, dass bei einem gewissen Grad von körperlicher Anstrengung die äussere Arbeitswirkung dann gross sein wird, wenn die innere klein ist, und umgekehrt darf man keine bedeutende Arbeitswirkung erwarten, wenn die Thätigkeit von der Art ist, dass sie eine heftige Bewegung der Gliedmassen erfordert.

3) Der Druck eines Motors gegen einen Receptor ist stets von der Geschwindigkeit des letzteren abhängig. Eine Zunahme der Geschwindigkeit hat stets eine Verminderung, ein Abnehmen der Geschwindigkeit dagegen eine Steigerung jenes Druckes zur Folge. Von der Wahrheit dieses Ausspruches überzeugt man sich am leichtesten durch spezielle Fälle. Wenn ein Arbeiter (Motor) vermittelst einer Kurbel (Receptor) eine Maschine bewegt, vermag er, bei einem gewissen Grad von körperlicher Anstrengung, einen ziemlich starken Druck auszuüben, so lange dieselbe ruht oder nur mit mässiger Geschwindigkeit im Kreise herumgeht; so wie aber diese Geschwindigkeit mehr und mehr wächst, muss der Körper, damit die Hand der Kurbel folgen kann, fort und fort schneller hin und her, auf und nieder bewegt werden, und dabei nimmt der Druck der Hand gegen die Kurbel fortwährend ab, und hört sogar ganz auf, wenn einmal die Geschwindigkeit so gross geworden ist, dass die volle Kraft des Organismus nothwendig ist, um den Körper so schnell zu bewegen, dass die Hand dem Kurbelgriff folgen kann. Aehnlich ist es auch mit dem Zug der Pferde; bei geringer Geschwindigkeit ist die Zugkraft gross, bei grosser Geschwindigkeit ist sie klein. Wenn Wasser gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Rades hinströmt, übt es gegen dieselben, so lange sie ruhen oder mit geringer Geschwindigkeit fortschreiten, einen ansehnlichen Druck aus, dieser nimmt aber mit der Zunahme der Geschwindigkeit der Schaufeln fortwährend ab, und hört sogar ganz auf, wenn die Geschwindigkeit der Schaufeln mit jener des zuströmenden Wassers übereinstimmt. Aehnlich verhält es sich auch bei oberschlächtigen Rädern, Turbinen, bei den Flügeln einer Windmühle. Bei den thierischen Motoren, so wie auch beim Wasser, liegt der Grund der Abnahme des Druckes zwischen Motor und Receptor, wenn die Geschwindigkeit des letztern zunimmt, in dem Umstande, dass die Bewegung der Masse des Motors eine bedeutende Wirkung erfordert; beim Dampf liegt der Grund der gleichen Erscheinung in einer andern Ursache. Die Kenntniss der gewöhnlichen Einrichtung einer Dampfmaschine vor-

ausgesetzt, denke man sich, dass in dem Kessel durch gleichmässige Feuerung gleichmässig Dampf gebildet werde, und dass die Maschine entweder durch die Wirkung des Dampfes oder durch andere äussere Kräfte aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt, und hierauf mit wachsender Geschwindigkeit bewegt werde. Nehmen wir an, die Spannung des Dampfes betrage im Moment, wenn die Bewegung beginnt, 5 Atmosphären und im Kessel werde in jeder Sekunde 1 Kilogramm Dampf gebildet, also 1 Kilogramm Wasser verdampft, so ist klar, dass die Spannung des Dampfes nach einiger Zeit, wenn einmal die Geschwindigkeit des Kolbens so gross geworden ist, dass in jeder Sekunde mehr als 1 Kilogramm Dampf aus dem Kessel in die Maschine strömt, abnehmen muss, denn wenn aus dem Kessel in einer gewissen Zeit mehr Dampf heraus kömmt, als in der gleichen Zeit produzirt wird, muss wohl die Spannung im Kessel abnehmen. So wie aber die Spannung abnimmt, ist dies auch mit dem Druck des Dampfes (Motor) gegen den Kolben (Receptor) der Fall, denn die Spannung des Dampfes im Cylinder muss, damit der Dampf aus dem Kessel in den Cylinder übertreten kann, kleiner sein, als jene, welche im Kessel herrscht. Man sieht also, dass eine fortdauernde Geschwindigkeitszunahme des Kolbens zunächst eine Abnahme der Spannkraft des Dampfes im Kessel, und sodann eine Verminderung des Dampfdruckes gegen den Kolben zur Folge haben muss. Diese Eigenschaften der Wirkung der Motore sind für die Erklärung des sogenannten Beharrungszustandes der Bewegung der Maschinen von besonderer Wichtigkeit.

6) *Der Anlauf, Fortlauf und Endlauf der Maschine.* Wir übergehen einstweilen alles, was die Erfindung, den Entwurf, die Ausführung und Aufstellung einer Maschine betrifft; wir nehmen an, eine Maschine existire bereits, sei mit dem Körper, auf welchen sie einzuwirken bestimmt ist, in Verbindung gesetzt, und legen uns nun die Frage zur Beantwortung vor, wie ihre Bewegung erfolgen wird, wenn wir den Motor durch längere Zeit auf dieselbe einwirken lassen, dann aber diese Einwirkung wiederum aufheben. Vorausgesetzt, dass der Motor mit hinreichender Energie zu wirken vermag, wird die Maschine in einem gewissen Augenblick in Bewegung gerathen, hierauf eine gewisse Folge von Bewegungszuständen durchlaufen, und zuletzt, einige Zeit nachdem die Einwirkung des Motors aufgehört hat, wiederum in den Ruhezustand zurückkehren.

In dieser ganzen Bewegungsdauer lassen sich drei wesentlich verschiedene charakteristische Zeitabschnitte unterscheiden. Während des ersten Zeitabschnittes, der mit der Bewegung der Maschine beginnt, findet eine allmählige Entwicklung des Bewegungszustandes statt, wobei die Geschwindigkeit im Allgemeinen fort und fort zunimmt, und die

Geschwindigkeitsänderungen entweder fort und fort kleiner oder geregelter werden, so zwar, dass nach Verlauf einer gewissen Zeit ein Beharren in einem gewissen Zustand eintritt. Diesen ersten Zeitabschnitt nennen wir den Anlauf der Maschine, und die Thätigkeit, welche dabei der Motor entwickelt, den Antrieb desselben.

In dem zweiten Zeitabschnitt setzt die Maschine ihre Bewegungen und Funktionen unabänderlich in dem Zustande fort, welchen sie am Ende des ersten Zeitabschnittes erreicht hat, und verrichtet darin ihre regelmässige Arbeit. Dieser Zeitabschnitt umfasst also die regelmässige Arbeitsdauer der Maschine; den Bewegungszustand, in welchem sie sich dabei befindet, nennt man den Fortlauf oder Beharrungszustand, und die Art der Thätigkeit des Motors den Forttrieb.

In dem dritten Zeitabschnitt, welcher in dem Augenblick beginnt, wenn die Einwirkung des Motors beseitigt wird, nimmt die Raschheit der Bewegung allmählig ab, bis die Maschine zuletzt ganz in Ruhe gelangt. Diesen dritten Zeitabschnitt nennen wir den Endlauf oder Auslauf.

Bevor wir zur Erklärung der Gesetze schreiten, nach welchen die Bewegungen während des An-, Fort- und Endlaufes erfolgen, wollen wir vorerst nachzuweisen suchen, dass überhaupt ein Beharrungszustand der Bewegung eintreten muss, und die Beschaffenheit desselben unter verschiedenen Umständen zu erklären suchen.

Dass innerhalb der Bewegungsdauer einer Maschine ein Beharrungszustand eintreten muss, ist bis jetzt in den Werken, welche die Bewegungslehre der Maschinen behandeln, noch niemals nachgewiesen worden, obgleich dies für das Verständniss der Wirkungsweise der Maschinen von grosser Wichtigkeit ist. Die Ursache dieser Erscheinung liegt theils in der Beschaffenheit des geometrischen Zusammenhanges, insbesondere aber in dem Umstande, dass der Druck des Motors gegen den Receptor bei zunehmender Geschwindigkeit des letzteren fortwährend abnimmt. Hieraus folgt nämlich, dass die Geschwindigkeit einer Maschine nie über eine gewisse Grenze anwachsen kann, denn ein fortwährendes Wachsen der Geschwindigkeit setzt voraus, dass der Druck des Motors gegen den Receptor fortwährend stärker wirkt, als zur Ueberwindung sämmtlicher der Bewegung der Maschine entgegenwirkenden Widerstände nothwendig ist; da aber dieser Druck bei zunehmender Geschwindigkeit fort und fort abnimmt, so muss nothwendig ein Zeitmoment eintreten, von welchem an Kraft und Widerstände ins Gleichgewicht treten, und dann ist kein Grund zu fernerer Geschwindigkeitsänderung vorhanden; der Bewegungszustand muss sich daher allmählig einer gewissen Grenze nähern, d. h. es muss ein Beharrungszustand eintreten.

Die Zeit, welche verfliesst, bis dieser Zustand eintritt, kann streng genommen nicht bestimmt werden. Will man die Sache mit mathematischer Schärfe nehmen, so muss man sagen, dass der Beharrungszustand gar nie wirklich eintritt, sondern dass derselbe nur die Grenze, nur das Ziel ist, welchem sich der wirkliche Bewegungszustand ohne Ende nähert, ohne es je vollkommen zu erreichen. Allein bei allen Maschinen ist der Bewegungszustand kurze Zeit nachdem die Bewegung begonnen hat, schon so wenig verschieden von dem Grenzzustand, dem sich die wirkliche Bewegung ohne Ende nähert, dass man in allen praktischen Fragen diese Verschiedenheit ganz vernachlässigen, sich demnach so benehmen darf, wie wenn die Grenze des Bewegungszustandes in der That schon nach einigen Sekunden oder Minuten wirklich vorhanden wäre. Es verhält sich mit der genauen Bestimmung der Dauer des Anlaufes ähnlich wie mit der Bestimmung der Zeit, in der sich ein Gefäss, das keine Nachfüllung erhält, durch eine Bodenöffnung gänzlich entleert. Auch da findet man, dass eine vollständige Entleerung niemals eintritt; fragt man jedoch, in welcher Zeit die Entleerung so weit fortschreitet, bis der Wasserstand im Gefäss nur noch einen Millimeter beträgt, so findet man, dass dies sehr bald, nach einigen Sekunden oder Minuten eintritt.

Damit überhaupt irgend ein Beharrungszustand eintritt, ist weiter nichts nothwendig, als dass die Maschine durch die Einwirkung des Motors in Gang komme; ist dies der Fall, so macht sich schon ein Beharrungszustand von selbst, wie auch die Einrichtung der Maschine beschaffen sein mag. Allein für die Thätigkeit einer Maschine ist es nicht genug, dass überhaupt irgend ein beliebiger Beharrungszustand eintritt, sondern es muss derjenige eintreten, welcher für die Benutzung der Betriebskraft einerseits und für die Thätigkeit der Werkzeuge andererseits der vortheilhafteste ist, und damit dies bei einer neu erbauten Maschine wirklich geschieht, muss dieselbe allerdings in ihrer Construktion gewissen Bedingungen entsprechen, welche wir in der Folge werden kennen lernen.

Der Beharrungszustand kann gleichförmig oder periodisch veränderlich, oder unregelmässig veränderlich sein. Er ist gleichförmig, wenn sich jeder Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, wie dies bei einer im regelmässigen Gang befindlichen Mahlmühle der Fall ist. Die Bedingungen seines Eintretens sind: 1) dass in der Maschine keine anderen Bewegungen vorkommen, als drehende um beliebige Vertikalaxen, oder um horizontale Schwerpunktsaxen; 2) dass der Motor mit unveränderlicher Intensität auf die Maschine einwirke; 3) dass auch die Widerstände, welche der Bewegung entgegenwirken, unveränderlich seien. Diesen Bedingungen ist eben bei einer Mahlmühle, die durch ein Wasserrad oder durch eine Turbine getrieben wird, entsprochen.

Der Beharrungszustand ist periodisch veränderlich, wenn die Maschine, nachdem sie einen gewissen Cyklus von Bewegungszuständen durchlaufen hat, wiederum in denjenigen Zustand zurückkehrt, welcher am Anfang des Cyklus vorhanden war, um dann von neuem einen ganz identischen Cyklus von Bewegungszuständen zu beginnen. Ein derartiger Bewegungszustand tritt jederzeit ein: 1) wenn die Kraft periodisch veränderlich wirkt; 2) wenn die Widerstände periodisch veränderlich sind; 3) wenn der Schwerpunkt des ganzen Maschinenwerkes abwechselnd steigt und fällt; 4) wenn in der Maschine Massen vorkommen, die eine periodische hin- und hergehende Bewegung machen; 5) wenn periodisch wiederkehrende Massenstösse vorkommen; endlich tritt dieser Bewegungszustand auch dann ein, wenn zwei oder mehrere der so eben angeführten Umstände gleichzeilig vorhanden sind, wie dies bei einer Brettsäge, die durch eine Dampfmaschine getrieben wird, der Fall ist.

Der Beharrungszustand ist endlich unregelmässig veränderlich, wenn die Bewegung unregelmässig ab- und zunimmt, vielleicht sogar zeitweise ganz aufhört. Ein solcher Zustand tritt ein, wenn die Umstände, welche auf die Bewegung Einfluss haben, nämlich Kraft, Widerstand, Masse und Gewicht etc. ohne irgend ein Gesetz zu befolgen, sich verändern, am häufigsten jedoch, wenn die Widerstände bald sehr gross, bald wiederum sehr klein sind, wie dies z. B. bei den Eisenwalzwerken der Fall ist.

Die allgemeinen Gesetze, nach welchen die Bewegungen und Wirkungen der Maschine erfolgen, können am leichtesten durch Betrachtung einer Reihe von einzelnen besonderen Fällen eingesehen und begriffen werden. Hat man sich einmal klar gemacht, wie der Gang einer Mahlmühle unter verschiedenen Umständen erfolgt, so erkennt man leicht die allgemeinen Gesetze, nach welchen überhaupt die Bewegungen und Wirkungen derjenigen Maschinen erfolgen, die in einen gleichförmigen Behaarungszustand gerathen. Ebenso kommt man auch leicht zur Einsicht über die periodisch und unregelmässig wirkenden Maschinen durch Betrachtung einer Säge und eines Eisenwalzwerkes. Wir werden daher in den folgenden Nummern durch Betrachtung von speziellen Fällen die allgemeinen Bewegungsgesetze der Maschinen zu erklären suchen.

7) *Bewegung der Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand.* Wir betrachten zur Erklärung der Maschine, die in einen gleichförmigen Beharrungszustand gerathen, eine Mahlmühle mit einem Mahlgang, die durch Wasser vermittelst eines unterschlächtigen Rades getrieben wird. Die Einrichtung und Anordnung einer solchen Maschine können wir als bekannt voraussetzen, so weit dies für die folgenden Betrachtungen erforderlich ist.

Die Widerstände, welche der Bewegung entgegen wirken, entspringen theils aus den Zapfen- und Zahnreibungen, vorzugsweise aber durch die

Getreidekörner, welche zwischen den Steinen zu Mehl und Gries zerrieben werden sollen.

Die Berechnung dieser Widerstände übergehen wir, und nehmen an, dass wenn die Steine regelmässig mit Getreidekörner gespeisst werden, am Umfange des Wasserrades ein Druck von 200 Kilogramm erforderlich sei, um jene Widerstände sämmtlich zu bewältigen. Die Mühle kann daher nicht eher in Gang kommen, als bis der Druck des Wassers gegen die Umfangsschaufeln des Rades 200 Kilogramme beträgt. Auch ist klar, dass die Mühle, wenn sie einmal in Gang gekommen ist, in irgend einem Augenblick ihre Geschwindigkeit nicht verändern wird, wenn in diesem Augenblick der Druck des Wassers gegen die Schaufeln genau 200 Kilogramme beträgt, dass dagegen ihre Geschwindigkeit zu- oder abnehmen wird, wenn jener Druck, beziehungsweise, grösser oder kleiner als 200 Kilogramme ist. Ist nämlich der Druck gleich 200 Kilogramme, so ist er gerade hinreichend, um den Widerständen das Gleichgewicht zu halten; es ist also kein Grund zu einer Aenderung der lebendigen Kraft der Massen der Maschine vorhanden, und folglich kann auch, weil bei der Mühle nur drehende Bewegungen vorkommen, keine Geschwindigkeitsänderung eintreten. Ist dagegen der Druck des Wassers gegen die Schaufeln in irgend einem Augenblick grösser, als 200 Kilogromme und z. B. 210 Kilogramme, so wirkt die Kraft um 10 Kilogramme stärker, als zur Bewältigung der Widerstände erfordert wird, und dieser Ueberschuss von 10 Kilogrammen muss nothwendig auf Massenbeschleunigung wirken. Ist endlich jener Druck kleiner als 200 Kilogramme, z. B. 190 Kilogramme, so reicht er nicht hin, die Widerstände zu überwinden. Die der Bewegung entgegenwirkenden Kräfte sind um 10 Kilogramme grösser, als die vorwärts treibende Kraft; es muss daher eine Geschwindigkeitsabnahme eintreten.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, wollen wir nun sehen, wie die Bewegung der Mühle unter verschiedenen Umständen erfolgen wird. Wir denken uns zu diesem Behufe, dass mit der Mühle eine Reihe von Bewegungsversuchen angestellt werden, um auf diese Weise den Einfluss jedes einzelnen Momentes kennen zu lernen.

8) *Erster Versuch.* Indem wir nun diese Versuche beginnen, wollen wir zunächst nur eine sehr kleine Wassermenge dem Rade zuströmen lassen, dann wird der Druck gegen die Schaufeln, der von dem Augenblick an beginnt, in welchem das erste Wassertheilchen anschlägt, und sodann allmählig grösser wird, noch nicht den Werth von 200 Kilogrammen erreichen; die Mühle kann also gar nicht in Gang kommen. Eben so verhielte es sich auch, wenn überhaupt die ganze Wassermasse, die zur Zuleitung vorhanden ist, nicht hinreichte, um einen Druck von mehr als 200 Kilogrammen hervorzubringen.

9) *Zweiter Versuch. Erscheinungen während des An-, Fort- und Endlaufes.* Wir wollen nun annehmen, dass eine bedeutende Wassermasse aus dem Zuflusskanal vermittelst des Schützen dem Rade zugeleitet werde. Dann wird der Druck des Wassers gegen die Schaufeln von Null an sehr rasch zunehmen und in kurzer Zeit den Werth von 200 Kilogrammen erreichen. Ist dieser Moment eingetreten, so ist in demselben Kraft und Widerstand im Gleichgewicht. Die Mühle ist aber noch immer nicht in Bewegung, sondern diese beginnt erst dann, wenn durch das weitere Zuströmen des Wassers jener Druck grösser als 200 Kilogramme zu werden beginnt, und die Geschwindigkeit der Bewegung muss fort und fort, so lange die Kraft stärker wirkt, als die Ueberwindung der Widerstände erfordert, zunehmen. Diese Beschleunigung kann aber nicht immer fortdauern, denn wenn einmal die Geschwindigkeit der Schaufeln eine gewisse Grenze erreicht hat, weichen sie vor dem nachströmenden Wasser so schnell aus, dass der Druck auf die Schaufeln, von einem gewissen Augenblick an, in welchem er einen grössten Werth erreicht hat, wiederum abnehmen, und zuletzt abermals bis auf 200 Kilogramme herabsinken muss. Von nun an ist aber kein Grund zu einer Geschwindigkeitsänderung vorhanden, denn wenn Kraft und Widerstand im Gleichgewicht sind, kann sich die Geschwindigkeit nicht ändern, und wenn diese ihren Werth nicht ändert, so ist auch kein Grund zu einer weiteren Aenderung des Druckes vorhanden. Man sieht also, dass die Bewegung beginnt, wenn zum ersten Mal Kraft und Widerstand in's Gleichgewicht kommen, dass dagegen der Beharrungszustand eintritt, wenn jenes Gleichgewicht zum zweiten Mal zum Vorschein kommt. In diesem Beharrungszustand verbleibt nun die Maschine so lange, als der Wasserzufluss einerseits, und die Getreidezuleitung andererseits nicht geändert wird. Wird aber der Wasserzufluss nach einiger Zeit aufgehoben, während die Getreidezuleitung fortdauert, so wird von diesem Augenblick an die Geschwindigkeit der Maschine allmählig abnehmen und die Bewegung wird nur noch so lange fortdauern, bis die Wirkungsgrösse, welche in sämmtlichen Massen in dem Moment, als der Wasserzufluss aufgehoben wurde, als lebendige Kraft enthalten war, durch die Widerstände der Maschine erschöpft ist.

Man kann sich den ganzen Verlauf der Erscheinungen, die in dieser Bewegungsdauer der Maschine vorkommen, durch eine graphische Darstellung am besten versinnlichen. Wenn man nämlich den Weg, den irgend ein Punkt des Radumfanges zurücklegt, als Abscisse, und die in jedem einzelnen Zeitaugenblick entsprechenden Werthe der Kraft, des Widerstandes und der lebendigen Kraft sämmtlicher Massen als Ordinaten aufträgt, so erhält man drei Kurven, an welchen die Bewegungserscheinungen sehr bequem verfolgt werden können. Fig. (1) Taf. V. zeigt eine solche graphische Darstellung.

$\overline{AC}$ ist der Weg, den ein Punkt des Radumfanges zurücklegt, bis der Beharrungszustand eintritt. $\overline{AC}$ entspricht daher der Zeit des Anlaufes. $\overline{CD}$ ist der Weg, den der gleiche Punkt während der Dauer des Beharrungszustandes beschreibt, $\overline{DZ}$ endlich der Weg des Endlaufes $\overline{Aa} = \overline{Cc} = \overline{Dd} = \overline{Zz}$ der fortwährend gleiche Widerstand von 200 Kilogrammen, welcher in der ganzen Bewegungsdauer der Bewegung entgegen wirkt. Die Linie a b c d D Z, welche aus dem wellenförmigen Theil a b c, und den geraden Stücken c d und D z zusammengesetzt ist, stellt durch ihre Ordinaten den Druck des Wassers gegen die Schaufeln dar. Die krumme Linie A c_1 d_1 Z endlich gibt durch ihre Ordinaten die lebendige Kraft, welche in sämmtlichen Massen während der ganzen Bewegungsdauer enthalten ist.

Während des Anlaufes ist fortwährend ein Ueberschuss an Kraft vorhanden. Dieser Ueberschuss wächst von A bis B, erreicht bei B ein Maximum $= \beta$ b, nimmt dann wiederum ab und verschwindet bei c. Der Flächeninhalt des Rechteckes A a C c ist die Wirkungsgrösse, welche während des Anlaufes durch die Widerstände consumirt wird. Der Flächeninhalt der oben krummlinig begrenzten Figur A a b c C bestimmt die Wirkungsgrösse, welche dem Wasserrad durch den Motor während des Anlaufes mitgetheilt wird. Der Flächeninhalt von a b c β ist demnach der Unterschied der Wirkungen, die während des Anlaufes produzirt und consumirt werden, und muss demnach, in Zahlen ausgedrückt, gleich sein der lebendigen Kraft C c sämmtlicher Massen der Maschine am Ende des Anlaufes.

Das allmählige Ansteigen der Kurve A c_1 zeigt, dass die lebendige Kraft der Massen während des Anlaufes fortwährend wächst, von C bis D unverändert bleibt, und während des Endlaufes D Z wiederum allmählig abnimmt. Während des Beharrungswiderstandes fällt die Kraftkurve mit der Widerstandskurve zusammen, weil in dieser Zeit der Druck des Motors gegen den Receptor so gross ist, als der auf den letzteren reduzirte Widerstand der Maschine. Der Flächeninhalt des Rechteckes C c D d ist demnach sowohl die während des Beharrungszustandes produzirte, als auch die während dieser Zeit consumirte Wirkung. Während des Endlaufes wird durch den Widerstand eine Wirkungsgrösse D d Z z consumirt, die, in Zahlen ausgedrückt, gleich sein muss der lebendigen Kraft D d_1 = C c_1, und ferner noch gleich ist dem Unterschied a b c β der Wirkungen, die während des Anlaufes produzirt und consumirt werden. Die totalen Wirkungen, welche während der ganzen Bewegungsdauer produzirt und consumirt werden, sind demnach gleich gross oder es ist: Flächeninhalt des Rechteckes A a Z z = Flächeninhalt: A a b c d D.

10) *Dritter Versuch. Einfluss des Wasserzuflusses.* Diesen Versuch wollen wir in der Absicht anstellen, um den Einfluss des Wasserzuflusses auf die Bewegung kennen zu lernen. Nehmen wir an, das Wasserrad sei so geräumig, dass es eine noch einmal so grosse Wassermenge fassen kann, als jene, die beim zweiten Versuch wirkte. Beim zweiten Versuch sei die Wassermenge 1 Kubik-Meter gewesen, und nun wollen wir den Schützen so weit aufziehen, dass in jeder Sekunde 2 Kubik-Meter gegen das Rad strömen. Es werden sich nun folgende Erscheinungen zeigen.

Die Bewegung beginnt auch jetzt erst dann, wenn der Druck des Wassers gegen die Schaufeln 200 Kilogramm geworden ist. Dieser Druck wird aber wegen der grossen Masse des zufliessenden Wassers sehr rasch und bedeutend über 200 Kilogramm anwachsen; es wird daher sehr bald eine sehr lebhafte Beschleunigung der Massen der Maschine also ein sehr rascher Gang der Mühle eintreten. Doch aber kann auch hier der Druck des Wassers gegen die Schaufeln nicht unausgesetzt wachsen, sondern er wird, wie es beim zweiten Versuche der Fall war, nur ein gewisses Maximum erreichen und dann wiederum so lange fort abnehmen, bis er auf den Werth von 200 Kilogrammen herabsinkt. Bis zu diesem Moment wird die Geschwindigkeit der Maschine fortwährend zugenommen haben, ist aber dieser Moment eingetreten, so ist wegen des vorhandenen Gleichgewichtszustandes zwischen Druck und Widerstand kein Grund zu einer weiteren Geschwindigkeitsänderung vorhanden; die Maschine befindet sich demnach in einem gleichförmigen Beharrungszustande, der sich von jenem des zweiten Versuches durch eine viel grössere Geschwindigkeit unterscheidet; denn da nun durch einen Wasserzufluss von 2 Kubik-Meter doch nur ein Druck von 200 Kilogramm ausgeübt wird, so kann dies offenbar nur bei einer viel grösseren Geschwindigkeit eintreten, als wenn der gleiche Druck durch einen Wasserzufluss von 1 Kubik-Meter hervorgebracht wird. Die Dauer des Anlaufes wird hier ungefähr so gross sein, wie beim zweiten Versuch, denn es ist zwar die Geschwindigkeit am Ende des Anlaufes, dafür aber auch der Wasserzufluss weit grösser, als beim zweiten Versuch. Die Dauer des Endlaufes muss aber nun grösser ausfallen, indem durch den gleich gebliebenen Widerstand von 200 Kilogramm eine weit grössere lebendige Kraft zu konsumiren ist.

Durch die Vermehrung des Wasserzuflusses ist demnach 1) die Dauer des Anlaufes nur wenig oder gar nicht verändert; 2) die Geschwindigkeit der Bewegung im Beharrungszustand vergrössert; 3) die Dauer des Endlaufes bedeutend vermehrt worden. Der Druck, den der Motor gegen den Receptor im Beharrungszustand ausübt, ist aber ganz unverändert geblieben.

11) *Vierter Versuch. Einfluss des Widerstandes.* Um den Einfluss des Widerstandes auf dem Verlauf der ganzen Bewegung kennen zu lernen, wollen wir nun einen weiteren Versuch machen, indem wir wie beim zweiten Versuch 1 Kubik-Meter Wasser zuströmen lassen, dagegen die Getreidezuleitung so weit vermindern, dass zur Ueberwindung sämmtlicher Widerstände am Umfange des Rades nur noch ein Druck von 100 Kilogramm nothwendig ist.

Die Bewegung der Maschine wird schon beginnen, wenn das Wasser auf die Schaufeln einen Druck von 100 Kilogramm ausübt, und ihre Geschwindigkeit wird wegen des im Verhältniss zum Widerstand starken Wasserzuflusses schnell wachsen, aber eben desshalb werden die Radschaufeln vor dem nachströmenden Wasser bald so schnell ausweichen, dass der Druck gegen dieselben in kurzer Zeit ein Maximum erreicht, und dann wiederum bis zu 100 Kilogramm herabsinken wird, und von diesem Augenblick an ist der Beharrungszustand vorhanden. Die Geschwindigkeit der Maschine muss aber in diesem Zustande offenbar weit grösser sein, als beim zweiten Versuch, denn der Wasserzufluss ist der Voraussetzung gemäss in beiden Versuchen gleich gross, und dennoch ist der Druck gegen die Schaufeln beim vierten Versuch 100 Kilogramm, also halb so gross, als beim zweiten, und dies ist offenbar nur möglich, wenn die Geschwindigkeit der Radschaufeln sehr gross ist. Was die Dauer des Endlaufs betrifft, so wird dieser hier viel länger dauern, als im zweiten Versuche, denn es ist die zu erschöpfende lebendige Kraft sehr gross, und der während des Endlaufs wirkende Widerstand nur 100 Kilogramm.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass die Grösse des Widerstandes zur Folge hat: 1) dass die Anlaufzeit der Grösse des Widerstandes ungefähr proportional ist; 2) dass die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes durch eine Verminderung des Widerstandes wächst, durch eine Vermehrung des Widerstandes abnimmt; 3) dass die Dauer des Endlaufes und der Widerstand in einem umgekehrten Verhältniss stehen; ein geringer Widerstand hat einen langdauernden, ein starker Widerstand dagegen einen kurzdauernden Endlauf zur Folge.

12) *Fünfter Versuch. Einfluss der Massen.* Um den Einfluss der Massen kennen zu lernen, wollen wir mit einer der Drehungsaxen der Maschine ein Schwungrad verbinden, in jeder anderen Hinsicht aber Alles lassen, wie beim zweiten Versuch. Wir nehmen also an: einen Wasserzufluss von 1 Kubik-Meter und ein Widerstand von 200 Kilogramm.

Es ist klar, dass der Beharrungszustand eintreten wird, wenn der Druck des Wassers gegen die Schaufeln zum zweiten Male 200 Kilogramm geworden ist. Nun gibt es aber offenbar nur Eine Geschwindigkeit, bei welcher ein Wasserzufluss von 1 Kubik-Meter einen Druck von 200 Kilogramm hervorbringt, es muss demnach die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes nun so gross sein, als beim zweiten Versuch, woraus zu ersehen ist, dass die Grösse der Massen auf diese Geschwindigkeit des Beharrungszustandes keinen Einfluss haben kann. Weil aber nun die Maschine mit dem Schwungrad eben so schnell geht als ohne Schwungrad, so ist in ihr um so viel mehr lebendige Kraft enthalten, als die lebendige Kraft des Schwungrades ausmacht, und daraus folgt, dass sowohl die Dauer des Anlaufes, als auch jene des Endlaufes durch das Vorhandensein des Schwungrades vergrössert wird.

Die Massen der Maschine haben also, wie man sieht, keinen Einfluss auf die Bewegung im Beharrungszustand, sondern nur allein auf die Dauer des An- und Endlaufes. Sodann ist aber auch klar, dass die totale Wirkungsgrösse, welche während der ganzen Bewegungsdauer dem Receptor mitgetheilt wird, genau so gross ist, als die Wirkungsgrösse, welche in derselben Zeit durch sämmtliche Widerstände consumirt wird; es ist also klar, dass die Massen auch die Effektverhältnisse ganz ungeändert lassen.

13) *Sechster Versuch. Einfluss des geometrischen Zusammenhangs.* Wir wollen endlich noch einen Versuch machen, um den Einfluss des geometrischen Zusammenhanges kennen zu lernen. Wir nehmen aus der Mühle zwei Räder heraus und setzen dafür zwei andere ein. Angenommen, die zwei herausgenommenen Räder seien zwei in einandergreifende von gleicher Grösse, und von den zwei dafür eingesetzten sei das eine (das treibende) noch einmal so klein, als das andere (das getriebene). Dann ist der geometrische Zusammenhang in der Art verändert, dass bei ungeänderter Geschwindigkeit des Wasserrades die Mühlsteine nur halb so schnell gehen, oder dass das Wasserrad noch einmal so schnell gehen muss, als früher, wenn die Geschwindigkeit der Mühlsteine die gleiche bleiben soll. Dann ist aber auch die Kraft, welche am Umfange des Wasserrades wirken muss, um sämmtliche Widerstände zu überwinden, nicht mehr 200, sondern nur 100 Kilogramm. So gross wird also auch der Druck des Wassers gegen die Schaufeln sein, wenn einmal der Beharrungszustand eingetreten ist, und die Geschwindigkeit der Bewegung des Rades in demselben wird genau so gross sein, als beim vierten Versuch, wo durch Verminderung der Getreidezuleitung der Widerstand bis zu 100 Kilogramm abgenommen hat. Wenn nun die Geschwindigkeit des Rades genau zwei Mal so gross wäre als beim zweiten Versuch, so würden die Mühlsteine genau so

schnell laufen als beim zweiten Versuch. Ist dagegen die Geschwindigkeit des Rades mehr oder weniger als zwei Mal so gross, so würden die Mühlsteine im ersteren Falle schneller, im letzteren langsamer laufen als beim zweiten Versuch. Nach der Geschwindigkeit der Mühlsteine ist aber die Leistung der Mühle zu beurtheilen. Gehen die Mühlsteine bei unverändertem Widerstand schnell, so vermahlen sie viel, gehen die Steine langsamer, so vermahlen sie wenig.

Hieraus sieht man, dass eine Veränderung des Räderwerkes, oder allgemein gesprochen, des geometrischen Zusammenhangs der Maschine, nicht nur eine Veränderung der Bewegungserscheinungen, sondern auch eine Veränderung der Leistungen der Maschine zur Folge haben kann.

Wenn wir nun die Resultate zusammenfassen, welche sich durch Betrachtung der sechs Versuche ergeben haben, so erhalten wir für die Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand folgende Regeln oder wenn man will, Gesetze, ihrer Bewegungen und Wirkungen.

14) *Gesetze des Anlaufes, Fortlaufes und Auslaufes.*

In Betreff des Anlaufes gelten folgende Sätze:

1) Der Anlauf beginnt in dem Augenblick, wenn der Druck des Motors gegen den Receptor zum ersten Mal mit den sämmtlichen Widerständen in's Gleichgewicht tritt, also so gross ist, als der auf den Receptor reduzirte Gesammtwiderstand der Maschine.

2) Während der ganzen Dauer des Anlaufes ist der Druck des Motors gegen den Receptor grösser, als der auf den Receptor reduzirte Widerstand; nur im ersten und letzten Moment des Anlaufes findet Gleichgewicht statt. Vermöge dieses fortwährend vorhandenen Ueberschusses an Kraft nimmt die Geschwindigkeit ohne Unterbrechung zu, erreicht aber am Ende des Anlaufes eine gewisse Grenze, welche während des Beharrungszustandes unveränderlich vorhanden bleibt.

3) Die während des Anlaufes von dem Motor entwickelte und dem Receptor mitgetheilte Wirkungsgrösse ist grösser als jene, welche durch den Widerstand der Maschine in der gleichen Zeit consumirt wird. Die Differenz dieser Wirkungsgrössen wird von den Massen der Maschine aufgenommen und erscheint durch den bewegten Zustand als lebendige Kraft.

4) Die Dauer des Anlaufes richtet sich überhaupt nach allen Umständen, die auf die Bewegung Einfluss haben; vorzugsweise aber wird sie bedingt durch den Wasserzufluss und durch die Massen der Maschine. Sind die Massen klein und ist der Wasserzufluss gross, so tritt der Beharrungszustand bald ein; sind dagegen die Massen gross und ist der Wasserzufluss klein, so dauert es lang, bis der Anlauf vorüber ist.

Ist der Beharrungszustand eingetreten, so findet folgendes statt:

1) Die Geschwindigkeit jedes Punktes der Maschine ist unveränderlich gleichförmig und die lebendige Kraft sämmtlicher Massen der Maschine hat während der ganzen Dauer des Beharrungszustandes den gleichen Werth.

2) Wenn die Maschine durch einen flüssigen Motor bewegt wird, also durch Wasser, Dampf oder Wind, ist der Zufluss, so wie auch der Abfluss desselben vollkommen gleichmässig und die zu- und abfliessenden Quantitäten sind in jedem einzelnen Augenblick von gleicher Grösse.

3) Der Druck des Motors gegen den Receptor ist im Beharrungszustand der Bewegung ganz unabhängig von der Quantität der auf die Maschine wirkenden motorischen Substanz und von den Massen der Maschine; dieser Druck richtet sich einzig und allein nur nach dem Betrag des auf den Receptor reduzirten Widerstandes. Kraft und Widerstand sind während der ganzen Dauer des Beharrungszustandes im Gleichgewicht. In jedem Zeittheilchen und auch in jeder endlichen Zeitintervalle sind die von dem Motor produzirten und von den Widerständen consumirten Wirkungsgrössen gleich gross; folglich ist auch der in einer Sekunde produzirte Effekt gleich dem in einer Sekunde consumirten Effekt.

4) Die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes ist von den Massen der Maschine gänzlich unabhängig, und richtet sich vorzugsweise theils nach dem Betrag des auf den Receptor reduzirten Widerstandes, dann aber auch, wenn ein flüssiger Motor wirkt, nach der Quantität der motorischen Substanz, die pr. 1 Sekunde auf die Maschine wirkt.

In Betreff des Endlaufes ist zu bemerken:

1) Die Bewegung der Maschine ist während des Endlaufes eine gleichförmig verzögerte, vorausgesetzt, dass der Widerstand constant und von der Geschwindigkeit unabhängig ist.

2) Die Dauer des Endlaufes ist der Beharrungsgeschwindigkeit und den auf den Receptor reduzirten Massen direkt, und dem auf den Receptor reduzirten Widerstand verkehrt proportional.

3) Während des Endlaufes wird durch die Widerstände die in den Massen enthaltene lebendige Kraft consumirt; die Massen geben also die Wirkungsgrösse, welche sie während des Anlaufes in sich aufgenommen haben, wiederum ab.

Im Allgemeinen ist noch folgendes zu bemerken:

1) Die Wirkungsgrösse, welche während der ganzen Bewegungsdauer, also während des An-, Fort- und Endlaufes der Motor dem Receptor mittheilt, ist gleich der Wirkungsgrösse, die in derselben Zeit von sämmtlichen Widerständen consumirt wird; denn während des Beharrungszustandes ist in jeder Zeitintervalle die produzirte Wirkung so

gross, als die consumirte, und der Ueberschuss an Wirkung, der während des Anlaufes produzirt wird, wird während des Endlaufes consumirt. Die Maschine selbst produzirt also keine Wirkung, sie nimmt nur die Wirkungen, welche der Motor entwickelt, in sich auf, und gibt sie dann wiederum ab, und so viel sie empfangen hat, gibt sie auch wiederum ab. Eine Maschine kann mit einer Wasserleitung verglichen werden aus der auch gerade so viel Wasser ausfliesst, als in sie hineingeleitet wurde, und so wie aus einer Röhrenleitung durch die Ausmündungen immer etwas weniger Wasser ausfliesst, als in sie eingetreten ist, weil an den verschiedenen Verbindungsstellen wegen unvollkommener Dichtung immer etwas Wasser entweicht, eben so ist auch die Gesammtwirkung, die bei einer Maschine auf die Werkzeuge übertragen wird, immer kleiner als jene, die der Motor dem Receptor mitgetheilt hat, weil von dieser letzteren immer ein Theil durch die verschiedenen Reibungen und Nebenhindernisse consumirt wird. Man darf im Allgemeinen eine Maschine hinsichtlich der Kraftübertragung gut construirt nennen, wenn sie drei Viertheile von der empfangenen Wirkung auf die Werkzeuge überträgt.

2) Die Massen der Maschine haben nur allein Einfluss auf die Dauer des An- und Endlaufes; die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes und das Verhältniss zwischen Kraft und Widerstand in denselben sind aber von den Massen der Maschine ganz unabhängig; sie sind demnach bei Maschinen, die in einen gleichförmigen Beharrungszustand gerathen, von keiner besondern Wichtigkeit. Da jedoch die Bedingungen eines solchen Bewegungszustandes in der Wirklichkeit niemals dauernd vollkommen genau erfüllt sind, so sind die Massen auch bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand nicht ganz gleichgültig. Wenn sich nämlich Kraft und Widerstand von Zeit zu Zeit etwas und in der Art ändern, dass sie nicht in jedem Augenblick während des Beharrungszustandes im Gleichgewicht sind, so wird die Bewegung nicht vollkommen gleichförmig erfolgen, sondern sie wird, wenn die Kraft überwiegend ist, etwas beschleunigt, und wenn die Widerstände überwiegend sind, etwas verzögert; allein diese Geschwindigkeitsänderungen bleiben immer unbedeutend, wenn die Massen gross sind; sie bewirken also, weil sie grössere Geschwindigkeitsänderungen nicht aufkommen lassen, eine Regulirung der Bewegung. Die Anbringung eines Schwungrades ist aber bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand nie nothwendig, denn die Dimensionen, welche die Bestandtheile einer solchen Maschine erhalten müssen, um hinreichende Festigkeit zu gewähren, bringen bereits so viel Masse hervor, dass aus den zufälligen Aenderungen in der Wirkung der Kraft und den Widerständen eine merkliche Unregelmässigkeit der Bewegung nicht mehr entspringen kann.

15) *Analytische Berechnung der Bewegung einer Mahlmühle.* Die in voriger Nummer ohne Zuhilfenahme einer Rechnung aufgefundenen Bewegungsgesetze einer Mahlmühle lassen sich weit kürzer und mit grösserer Bestimmtheit auf analytischem Wege ausfindig machen.

Nennt man:

Q das Gewicht der Wassermenge, welche per 1 Secunde dem unterschlächtigen Rade zufliesst,

V die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser gegen die Schaufeln des Rades hinströmt,

v die Geschwindigkeit der Schaufeln, nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat,

dv die Geschwindigkeitsänderung der Schaufeln in dem nächstfolgenden Zeitelement d t,

R den auf den Umfang des Rades reduzirten Gesammtwiderstand oder den Druck, mit welchem auf die Schaufeln des Rades gewirkt werden muss, um den Widerständen das Gleichgewicht zu halten,

μ die auf den Umfang des Rades reduzirte Masse der Maschine. Es ist also μ eine ideale Masse, welche, wenn sie eine Geschwindigkeit v besitzt, eine eben so grosse lebendige Kraft enthält, wie die gesammte lebendige Kraft aller Massen der Mühle, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades gleich v ist.

Dies vorausgesetzt, ist nach der Lehre vom Stosse des Wassers $\frac{Q}{g}(V - v)$ der Druck, welchen das zufliessende Wasser nach Verlauf der Zeit t gegen die Schaufeln ausübt, und $\frac{Q}{g}(V - v) - R$ der Ueberschuss des Druckes über den Widerstand oder die Kraft, welche die sämmtlichen Massen beschleuniget; es ist demnach die Gleichung der Bewegung

$$d v = \frac{1}{2} \frac{\frac{Q}{g}(V - v) - R}{\mu} d t.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d v}{Q(V - v) - R g} = \frac{d t}{2 g \mu}$$

und man findet durch Integration:

$$-\frac{1}{Q} \text{lognat.} [Q(V - v) - R g] + \text{const.} = \frac{t}{2 g \mu}$$

Für den Anfang der Bewegung, d. h. für t = o ist aber v = o demnach:

$$-\frac{1}{Q} \text{lognat.} [Q V - R g] + \text{const.} = o.$$

Durch Subtraktion dieser zwei letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{1}{Q} \text{ lognat.} \left[\frac{Q\,V - R\,g}{Q\,(V-v) - R\,g}\right] = \frac{t}{2\,g\,\mu}$$

und hieraus findet man leicht:

$$v = \left[V - \frac{R\,g}{Q}\right]\left[1 - e^{-\frac{Q}{2\,g\,\mu}\,t}\right] \quad \ldots \quad (a)$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz der Bewegung der Mühle bis zum Beginn des Endlaufes.

Da der Werth der Exponentialgrösse $e^{-\frac{Q}{g\,\mu}\,t}$ mit dem Wachsen der Zeit t fortwährend abnimmt, so sieht man, dass die Geschwindigkeit der Bewegung sich immer mehr und mehr der Grenze $V - \frac{R\,g}{Q}$ nähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Streng genommen tritt also ein gleichförmiger Beharrungszustand niemals ein, sondern dieser ist nur ein idealer Grenzzustand, welchem sich der wirkliche Bewegungszustand fort und fort nähert. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeitsgrenze mit u, setzen demnach:

$$u = V - \frac{R\,g}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

so kann man statt der Gleichnng (a) auch leicht folgende auffinden:

$$\frac{u - v}{u} = e^{-\frac{Q}{2\,g\,\mu}\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Nun ist aber $\frac{u - v}{u}$ das Verhältniss, das den Grad der Annäherung des wirklichen Bewegungszustandes an den idealen Beharrungszustand ausdrückt, denn es gibt an, um den wievielten Theil der Grenzgeschwindigkeit sich die wirkliche Geschwindigkeit noch ändern muss, bis die Grenzgeschwindigkeit erreicht wird. Man kann also für praktische Beurtheilungen den Beharrungszustand als wirklich eingetreten ansehen, so wie der Werth von $\frac{u - v}{u}$ nur noch einen gewissen Betrag hat, z. B. $= {}^1\!/_{10}$ oder ${}^1\!/_{20}$ geworden ist. Setzt man also:

$$\frac{u - v}{u} = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (d)$$

so folgt aus (c)

$$t = -\frac{2\,g\,\mu}{Q} \text{ lognat. } p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

und diese Gleichung gibt die Zeit an, nach Verlauf von welcher sich der wirkliche Bewegungszustand dem mathematischen wahren Beharrungszustand bis auf das Maas, das durch p ausgedrückt wird, angenähert hat, oder mit andern Worten, es gibt dieser Werth von t die Dauer des Anlaufes. Diese ist mithin der reduzirten Masse μ direkt, und dem Wasserzufluss Q verkehrt proportional.

Aus dem Werth von u, den die Gleichung (b) darbietet, ersieht man auch, dass die Geschwindigkeit des Beharrungszustandes von der Masse μ der Maschine ganz unabhängig ist, und dass der Unterschied $V - u$ zwischen der Geschwindigkeit des Wassers und jener der Schaufeln im Beharrungszustand dem Widerstand R direkt und dem Wasserzufluss Q verkehrt proportional ist.

Da während des Endlaufes keine treibende Kraft; sondern nur der constante Widerstand R thätig ist, so muss diese Bewegung mit gleichförmig verzögerter Geschwindigkeit erfolgen, und man hat für diese Bewegung:

$$w = u - \frac{R}{2\mu} t.$$

wobei w die Geschwindigkeit ausdrückt, mit der sich der Umfang des Rades noch bewegt, nachdem der Widerstand R durch t Sekunden gewirkt hat. Für das Ende des Endlaufes ist $w = o$ und man findet demnach für die Dauer des Endlaufes

$$t = \frac{2\mu u}{R}.$$

Diese Dauer ist demnach der Beharrungsgeschwindigkeit u und der reduzirten Masse μ direkt, dagegen dem reduzirten Widerstand R verkehrt proportional.

16) *Bewegung und Wirkung der Maschinen mit periodischem Beharrungszustand.* Es ist schon früher gesagt worden, unter welchen Umständen bei einer Maschine ein periodisch wiederkehrender Beharrungszustand eintritt. Um die Bewegungen und Wirkungen der Maschinen dieser Art genauer kennen zu lernen, ist es wiederum am zweckmässigsten, einen speziellen Fall ins Auge zu fassen und denselben bis in alle Einzelnheiten zu verfolgen. Wir wählen zu diesem Behufe eine Mahlmühle, die durch eine Dampfmaschine getrieben wird. Die Einrichtung eines solchen Maschinenwerkes können wir als bekannt voraussetzen.

Wir nehmen an: 1) dass die Verdampfung des Wassers im Dampfkessel durch gleichförmige Feuerung ganz gleichförmig erfolge; 2) dass die Maschine mit einem geradlinig hin- und hergehenden Kolben, ferner mit Schubstange, Kurbel und Schwungrad versehen sei; 3) dass der Dampf, nachdem er den Kolben durch einen Schub fortbewegt hat, aus dem Cylinder in die freie Luft entweiche; 4) dass den Mühlsteinen gleichförmig Getreide zugeleitet werde.

Unter diesen Umständen entspringt die Periodizität der Bewegung des Beharrungszustandes nur allein durch den geometrischen Zusammenhang des Kolbens mit der Schwungradswelle vermittelst der Kurbel.

Um die Bewegungserscheinungen der Grösse nach angeben zu können, wollen wir noch folgende Bestimmungen festsetzen: 1) es werde in jeder Sekunde $\frac{1}{10}$ Kilogramm Wasser in Dampf verwandelt; 2) die Mühle habe vier Paar Mühlsteine oder vier Mahlgänge; 3) der Querschnitt des Dampfcylinders sei $\frac{1}{10}$ Quadrat-Meter und der Kolbenschub betrage $\frac{1}{2 \cdot 4} = 0 \cdot 4166$ Meter; 4) das Räderwerk der Transmission sei so angeordnet, dass ein Druck von 2000 Kilogramm auf den Kurbelzapfen und senkrecht auf den Kurbelhalbmesser wirken muss, um die Widerstände, welche der Bewegung entgegen wirken, zu überwältigen; 5) dass anfänglich der Kolben auf halbem Schub stehe, so dass Kurbel und Schubstange einen rechten Winkel bilden. Es kann demnach die Bewegung der Maschine beginnen, wenn der Kolben mit einer Kraft von 2000 Kilogramm getrieben wird; endlich wollen wir annehmen, dass 6) die Communikation zwischen Kessel und Cylinder erst dann hergestellt wird, wenn die Spannung des Dampfes im Kessel 5 Atmosphären beträgt.

Um den Druck zu finden, welchen der Kolben in irgend einem Augenblick gegen den Kurbelzapfen ausübt; muss man, nebst dem Druck des Dampfes auf den Kolben auch noch den atmosphärischen Gegendruck und den Reibungswiderstand der Maschine in Rechnung bringen. Der Raum vor dem Kolben cummunizirt nämlich der Voraussetzung zur Folge stets mit der freien Luft, es wirkt desshalb der Bewegung des Kolbens immer der Druck der Atmosphäre auf die vordere Fläche des Kolbens entgegen, und dieser Gegendruck beträgt auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche nahe 1 Kilogramm. Zur Ueberwindung der Reibungswiderstände der Dampfmaschine ist ferner auch eine gewisse Kraft erforderlich, und man darf annehmen, dass auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche ein Druck von 0·6 Kilogramm ausgeübt werden muss, damit dieser Reibungswiderstand bewältigt wird. Man muss also von dem Druck des Dampfes auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche $1 + 0 \cdot 6 = 1 \cdot 6$ Kilogramm abziehen, um die Kraft zu finden, mit welcher der Kolben wirklich fortgetrieben wird.

In dem Moment, wenn die Communikation zwischen Kessel und Cylinder hergestellt wird, beträgt die Spannung des Dampfes der Voraussetzung gemäss, 5 Atmosphären, demnach der Druck per 1 Quadrat-Centimeter nahe 5 Kilogramm; es wird folglich jeder Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche mit einem Druck von $5 - 1 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ Kilogramm getrieben. Die Mühle verursacht dagegen per 1 Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche nur einen Widerstand von 2 Kilogramm. Jeder Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche wird demnach mit 3·4 — 2 = 1·4 Kilogramm stärker getrieben, als zur Ueberwindung sämmtlicher Widerstände mit Einschluss des atmosphärischen Gegendruckes nothwendig ist; es muss demnach die Bewegung sogleich beginnen, so wie die Communikation zwischen Kessel und Cylinder hergestellt wird.

Die Bewegungsveränderungen, welche Anfangs eintreten, sind so complizirt, dass sie selbst mit raffinirten analytischen Hilfsmitteln kaum verfolgt werden können; wir müssen daher auf eine Erklärung der Erscheinungen während des Anlaufes verzichten und uns damit begnügen, den Beharrungszustand genauer kennen zu lernen.

Es ist klar, dass die Bewegung vom Anfange an mit wachsender Geschwindigkeit erfolgen wird. Die Geschwindigkeitszunahme kann jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze steigen, denn mit jedem Kolbenschub wird ein Cylinder voll Dampf aus dem Kessel, so zu sagen, herausgepumpt; wenn die Kolbengeschwindigkeit einmal eine gewisse Grenze erreicht hat, wird daher während eines Schubes eben so viel Dampf aus dem Kessel entfernt, als in der gleichen Zeit durch die Verdampfung des Wassers entsteht, und so wie dieser Zeitmoment eingetreten ist, kann sich auch die Spannung des Dampfes im Kessel nicht mehr ändern. Man sieht also zunächst, dass die Geschwindigkeit der Bewegung so lange zunehmen wird, bis die Dampfconsumtion eben so gross geworden ist, als die Dampfproduktion, und dass sodann, im Mittel genommen, eine gleichförmige Bewegung, d. h. ein Beharrungszustand eintreten wird. Allein die Unveränderlichkeit der Dampfspannung ist nur möglich, wenn, im Mittel genommen, der Druck des Dampfes gegen den Kolben mit sämmtlichen Widerständen im Gleichgewicht ist. Wenn also der Beharrungszustand eingetreten ist, zeigen sich folgende Erscheinungen.

1) Es geschehen alle einzelnen Kolbenschube in gleichen Zeiten, und die der Reihe nach vorkommenden Bewegungszustände der Maschine sind bei einem Kolbenschub wie bei jedem andern. 2) Dampferzeugung und Dampfverbrauch sind während eines Kolbenschubes gleich gross. 3) Die Spannung des Dampfes ist unveränderlich und so gross, dass der Druck auf dem Kolben im Mittel genommen den sämmtlichen Widerständen das Gleichgewicht hält.

Diese Dampfspannung, welche im Beharrungszustand eintritt, kann auf folgende Art bestimmt werden. Da am Anfange und am Ende eines Kolbenschubes die Bewegungszustände der Maschine vollkommen übereinstimmen, so muss die Wirkungsgrösse, welche der hinter dem Kolben wirkende Dampfdruck während eines Schubes entwickelt, eben so gross sein, als die Wirkungsgrösse, die durch sämmtliche Widerstände während eines Schubes consumirt wird. Nennt man nun x den unbekannten Druck des Dampfes auf einen Quadrat-Centimeter, so ist der Druck auf die ganze Kolbenfläche von $\frac{1}{10}$ Quadrat-Meter oder 1000 Quadrat-Centimeter Oberfläche 1000 x Kilogramm; hievon sind aber wegen des Luft- und Reibungswiderstandes $1 \cdot 6 \times 1000$ Kilogramm abzuziehen; es ist demnach die Kraft, mit welcher auf den Kurbelzapfen gewirkt wirkt: $1000\,x - 1 \cdot 6 \times 1000 = 1000\,(x - 1 \cdot 6)$ Kilogramm, und da diese Kraft während eines Schubes um die Länge desselben fortschreitet, so beträgt die Wirkungsgrösse für einen Schub $1000\,(x - 1 \cdot 6)\,l$ Kilogramm-Meter, wobei l die Länge des Schubes bezeichnet. Nun ist aber der auf den Kugelzapfen reduzirte Widerstand der Mühle 2000 Kilogramm und dieser Widerstand wird während eines Schubes durch die halbe Periphericlänge des Kurbelkreises, also durch einen Weg $\frac{1}{2}\,l\,\pi$ überwunden; die Wirkungsgrösse, welche der Ueberwindung der Widerstände der Mühle entspricht, ist demnach $\frac{1}{2}\,l\,\pi\,2000 = 1000\,l\,\pi$; es besteht demnach folgende Gleichheit: $1000\,(x - 1 \cdot 6)\,l = 1000\,l\,\pi$ und hieraus folgt: $x = \pi + 1 \cdot 6 = 3 \cdot 142 + 1 \cdot 6 = 4 \cdot 742$ Kilogramm. Dies ist demnach der Druck, welchen der Dampf auf jeden Quadrat-Centimeter der Kolbenfläche ausübt, wenn einmal der Beharrungszustand der Bewegung eingetreten ist. Von diesem Dampf wiegt 1 Kubik-Meter 2·4 Kilogramm; die Dampfmenge von $\frac{1}{10}$ Kilogramm, welche per 1 Secunde produzirt und consumirt wird, nimmt demnach ein Volumen ein gleich $\frac{0 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{24}$ Kubik-Meter, und so gross ist auch das Volumen, welches der Kolben in jeder Sekunde beschreibt. Nun ist aber, der Voraussetzung gemäss, der Querschnitt des Cylinders $\frac{1}{10}$ Quadrat-Meter und der Kolbenschub $0 \cdot 41\dot{6}\dot{6} = \frac{1}{2 \cdot 4}$ Meter; folglich das Volumen, das der Kolben bei einem Schub beschreibt $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{24}$ Kubik-Meter, also genau so gross, als das Volumen, das der Kolben in einer Sekunde beschreiben muss. Somit ergibt sich, dass bei den angenommenen Verhältnissen der Kolben in jeder Sekunde genau einen ganzen Schub machen wird, oder dass die Schwungradswelle in jeder Minute 30 Mal umgehen wird. Auf ähnliche Weise, wie so eben verfahren wurde, kann man jederzeit die Spannung des Dampfes und die Geschwindigkeit des Ganges der Maschine bestimmen.

Obgleich ein Kolbenschub wie jeder andere erfolgt, so ist doch die Geschwindigkeit der Maschine während eines Kolbenschubes nicht unveränderlich, es bleibt uns daher noch zu untersuchen übrig, wie sich die Geschwindigkeit des Schwungrades während jedes Kolbenschubes verändert.

Zur Erleichterung dieser Untersuchung wollen wir annehmen, dass die Schubstange im Verhältniss zur Kurbel ausserordentlich lang sei, so dass wir annehmen dürfen, ihre Richtung E D (Fig. 7, Taf. IV.) bleibe zum Durchmesser A B des Kurbelkreises stets parallel.

Wir haben gefunden, dass im Beharrungszustand der in der Schubstange wirkende Druck $1000 (x - 1{\cdot}6) = 1000\,\pi = 3142$ Kilogramm beträgt. Bezeichnen wir diesen Druck mit P und zerlegen denselben in zwei Kräfte $P \sin. \varphi = \overline{HD}$ und $P \cos. \varphi = \overline{FD}$, von denen die erstern nach der Richtung der Tangente, und die letztern nach der Richtung des Radius wirkt, so ist klar, dass $P \cos. \varphi$ keinen Einfluss auf die Bewegung ausüben kann. Nennen wir ferner $Q = 2000$ Kilogramm den auf den Kurbelzapfen reduzirten Widerstand der Mühle, so ist klar, dass die Bewegung derselben so erfolgen wird, wie wenn nach der Richtung H D der Tangente in jedem Augenblick eine Kraft $P \sin. \varphi - Q$ treibend wirkte. Nun ist aber diese Differenz mit dem Winkel φ veränderlich, und somit ist klar, dass die Bewegung nicht gleichförmig erfolgen kann. Um die Bewegungsveränderungen der Maschine anschaulich zu machen, wollen wir eine graphische Darstellung derselben zu Hilfe nehmen, indem wir die Bogenlänge A D als Abscissen, und die jeder Bogenlänge entsprechenden Werthe von $P \sin. \varphi$, von Q und von der lebendigen Kraft der Massen der Maschine als Ordinaten auftragen. Auf diese Weise erhalten wir die Figur 2 Tafel V und es bedeutet in derselben A Z die halbe Peripherie des Kurbelkreises, $A a = B b = D d_2 = C c = Z z = Q = 2000$ Kilogramm den auf den Umfang des Kurbelkreises reduzirten unveränderlichen Widerstand der Mühle. Die Ordinaten der Linie A b d c z sind die Werthe der veränderlichen Kraft $P \sin. \varphi$, welche für $\varphi = 90^0$ ihren grössten Werth $D d = 3142$ Kilogramm erreicht, und in den Punkten b und c dem Widerstand Q gleich ist. Die Ordinaten der Kurve $a_1\ b_1\ d_1\ c_1\ z_1$ sind die lebendigen Kräfte sämmtlicher Massen der Maschine in den auf einander folgenden Zeitmomenten der Bewegung. Von A bis B ist der Widerstand Q fortwährend grösser, als die Kraft $P \sin. \varphi$, es muss also die lebendige Kraft vom Beginne des Schubes an abnehmen, bis der Weg A B zurückgelegt ist. Von B bis C ist dagegen die Kraft fortwährend grösser, als der Widerstand, die lebendigen Kräfte der Massen der Maschine müssen daher von B bis C ohne Unterbrechung wachsen. Von C bis Z wirkt wiederum der Widerstand stärker, als die Kraft; die lebendige Kraft nimmt daher ab, bis sie zuletzt so gross wird, als sie anfangs war. Da nun die lebendige Kraft von A bis B abnimmt, von B bis C wächst, und zuletzt von C bis Z wiederum abnimmt, so muss sie bei B ein Minimum und bei C ein Maximum erreichen. Weil in B und C Kraft und Widerstand gleich gross sind, so hat man zur Bestimmung dieser Punkte $P \sin. \varphi = Q$ und da $P = 3142$ und $Q = 2000$ ist, so findet man: $\sin. \varphi = \frac{2000}{3142} = \frac{2}{\pi}$. Diesem Werth von $\sin. \varphi$ entsprechen die zwei Winkel $39^\circ + 32'$ und $180^\circ - (39^\circ + 32')$. Der erstere derselben bestimmt die Stellung der Kurbel, welche dem Punkt B, also dem Minimum der lebendigen Kraft entspricht; der zweite Winkel dagegen den Punkt C, wo das Maximum der lebendigen Kraft eintritt. Die Aenderung der lebendigen Kraft ist in den Punkten A, D und Z, in welchen die Differenz zwischen Kraft und Widerstand die grössten Werthe hat, am grössten.

Die Bewegung erfolgt also in der Weise, dass die lebendige Kraft vom Beginn des Kurbelkreises an abnimmt, bis die Kurbel einen Winkel von $39^\circ + 32'$ zurückgelegt hat, dass sie daselbst ein Minimum erreicht und hierauf wiederum fortwährend wächst, bis sie, wenn die Kurbel den Winkel $180 - (39^\circ + 32')$ beschrieben hat, ein Maximum erreicht, und endlich von da an wiederum bis zu ihrem anfänglichen Werth abnimmt. Die Flächeninhalte des Rechteckes A a Z z und der krummlinigen Figur A b d c Z drücken die Wirkungsgrössen aus, welche während eines ganzen Schubes von den Widerständen der Mühle consumirt und von der Kraft P produzirt werden. Diese beiden Flächeninhalte sind demnach gleich gross. Werden alle Längen und Flächeninhalte in Zahlen ausgedrückt, so ist ferner 1) der Flächeninhalt des Dreiecks A a b gleich dem Unterschied der Ordinaten $A a_1$ und $B b_1$; 2) der Flächeninhalt der Figur b d c d_2 b gleich dem Unterschied der Ordinaten $C c_1$ und $B b_1$; endlich 3) der Flächeninhalt des Dreiecks c Z z gleich dem Unterschied der Ordinaten $C c_1$ und $Z z_1$, denn diese Flächeninhalte sind die Differenzen zwischen den von A bis B, von B bis C und von C bis Z produzirten und consumirten Wirkungsgrössen, müssen also den Aenderungen der lebendigen Kraft gleich sein. So viel die Massen an lebendiger Kraft von A bis B und von C bis Z verlieren, eben so viel gewinnen sie von B bis D und von D bis C. Von A bis B und von C bis Z helfen die Massen mit treiben, von B bis C, wo ihre Geschwindigkeit zunimmt, werden sie getrieben.

Um den Einfluss kennen zu lernen, den die Grösse des Dampfcylinders, die Verdampfung die Widerstände und die Massen der Maschine auf die Bewegung haben, müssen wir auf ähnliche Weise, wie es früher bei der durch ein Wasserrad getriebenen Mahlmühle der Fall war, eine Reihe von Versuchen vornehmen, indem wir bei jedem derselben eines der genannten Elemente verändern.

17) *Zweiter Versuch. Einfluss der Verdampfung.* Wir wollen die Einrichtung und die Massen der Maschine und ferner noch den auf die Kurbel reduzirten Widerstand ungeändert lassen, dagegen eine noch einmal so grosse Dampfproduktion annehmen, nehmen also an, dass in jeder Sekunde $^2/_{10}$ Kilogramm Wasser in Dampf verwandelt werden, und dass die Communikation zwischen Kessel und Cylinder erst dann hergestellt werde, wenn im Kessel eine Spannung von 5 Atmosphären eingetreten ist.

Wir übergehen zunächst die Erscheinungen des Anlaufes und betrachten nur die Bewegungen, wenn einmal der Beharrungszustand eingetreten ist, was dann der Fall sein wird, wenn 1) alle Kolbenspiele auf identische Weise erfolgen; 2) Kraft und Widerstände in's Gleichgewicht gekommen sind, und wenn 3) Dampfverbrauch und Dampfentwicklung gleich gross geworden sind.

Da der auf den Kurbelkreis reduzirte Widerstand nicht geändert wurde, so muss im Beharrungszustand die Dampfspannung eben so gross sein als beim ersten Versuch, bei welchem der Druck per 1 Quadrat-Centimeter 4·724 Kilogramme betrug. Weil nun die Dichte des Dampfes ungeändert geblieben ist, die Dampfproduktion aber der Voraussetzung zur Folge verdoppelt wurde, so muss nun der Kolben der Maschine offenbar noch einmal so schnell gehen, als beim ersten Versuch. Man sieht also, dass die Geschwindigkeit der Maschine, wenn alles Uebrige ungeändert bleibt, der Dampfproduktion genau proportional ist.

Will man auch diese Erscheinungen des Beharrungszustandes durch eine graphische Darstellung anschaulich machen, so erhält man eine Figur, die von Fig. 2 Taf. V. einzig und allein nur darin abweicht, dass die Linie $a_1\ b_1\ d_1\ c_1\ z_1$, welche der lebendigen Kraft entspricht, weiter hinaufgerückt erscheinen wird. In der Figur, welche die Erscheinungen des Beharrungszustandes im zweiten Versuch darstellt, müssen nämlich, weil die mittlere Geschwindigkit der Bewegung noch einmal so gross ist, als beim ersten Versuch, die Ordinaten $A\,a_1$, $D\,d_1$, $Z\,z_1$ viermal so lang sein als in Fig. 2. Die Gestalt der Linie $a_1\ b_1\ d_1\ c_1\ z_1$ erleidet aber nicht die geringste Aenderung, indem die Linie, welche Kraft und Widerstand darstellen, ungeändert geblieben sind.

Weil aber die Differenzen der lebendigen Kräfte (die nach den Quadraten der Geschwindigkeit zu messen sind) in beiden Versuchen gleich gross, die Geschwindigkeiten aber beim zweiten Versuch grösser sind, als beim ersten, so folgt daraus, dass die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit, und dass insbesondere auch das Verhältniss zwischen dieser Differenz und der mittleren Geschwindigkeit, wornach der Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung zu beurtheilen ist, bei dem zweiten Versuch (beim schnellen Gang der Maschine) kleiner sein wird, als beim ersten Versuch. Denn eine Differenz V—v ist bei einerlei Werth von $V^2 - v^2$ um so kleiner, um je grösser V und v ist. Man sieht also, dass der durch die vermehrte Dampfproduktion verursachte schnellere Gang der Maschine eine grösssere Gleichförmigkeit der Bewegung zur Folge hat.

Was nun den Anlauf und Endlauf der Maschine betrifft, so wird beim zweiten Versuch die Dauer des ersteren ungefähr so gross sein, als beim ersten Versuch, die Dauer des letzten dagegen wird grösser sein, denn während des Anlaufes wirkt zwar die Kraft wegen der raschen Verdampfung mit grösserer Intensität, allein es ist auch während des Anlaufes eine grössere Geschwindigkeit hervorzubringen. Wenn also einerseits ein Grund vorhanden ist, der eine Abnahme der Anlaufszeit zur Folge haben könnte, so ist andererseits wiederum ein Grund vorhanden, der die Dauer des Anlaufes vergrössert.

Dass die Dauer des Endlaufes beim zweiten Versuch grösser sein wird, als beim ersten, erhellet daraus, dass bei Beginn des Endlaufes beim zweiten Versuch eine grössere lebendige Kraft in den Massen enthalten ist, während der zu überwindende Widerstand in beiden Fällen gleich gross ist.

Wenn wir nun die Erscheinungen des zweiten Versuches zusammenfassen, so können wir folgende Sätze aussprechen:

1) Die Verdampfung hat auf die Dauer des Anlaufes keinen wesentlichen Einfluss. 2) Die Beharrungsgeschwindigkeit ist der Verdampfung genau proportional. 3) Der durch die vermehrte Dampfproduktion verursachte schnellere Gang der Maschine erfolgt mit grösserer Gleichförmigkeit. 4) Die Spannung des Dampfes im Beharrungszustand ist von der Verdampfung ganz unabhängig, und richtet sich nach dem auf den Kurbelkreis reduzirten Widerstand. 5) Die Dauer des Endlaufes ist der Geschwindigkeit des Beharrungszustandes und mithin der Verdampfung proportional.

18) *Dritter Versuch. Einfluss des Widerstandes.* Es ist bereits im Vorhergehenden mehrmals besonders hervorgehoben worden, dass im Beharrungszustand Kraft und Widerstände, im Mittel genommen, sich das Gleichgewicht halten. Wenn wir also den auf den Kurbelkreis reduzirten Widerstand noch einmal so gross machen, als er beim ersten Versuch war, und dann die Maschine in Gang setzen, so wird, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, der Druck gegen den Kurbelzapfen nothwendig doppelt so gross sein müssen, als beim ersten Versuch.

Die Spannkraft und Dichte des Dampfes wird demnach vergrössert, und die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung, d. h. die Zahl der Kolbenspiele, die in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Minute, geschehen, muss abnehmen, vorausgesetzt, dass sich die Dampfproduktion nicht geändert hat. Nebstdem, dass die Spannkraft und Dichte des

Dampfes vergrössert und die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung verändert wird, treten auch noch grössere Geschwindigkeitsdifferenzen ein, d. h. die Bewegung wird ungleichförmiger, als sie es beim ersten Versuch war. Endlich hat eine Vergrösserung des Widerstandes auch noch zur Folge, dass die Dauer des Anlaufes sowohl, als auch jene des Endlaufes abnimmt. Man sieht, dass durch eine Aenderung des Widerstandes alle übrigen Verhältnisse, und namentlich die Spannung und Dichte des Dampfes, die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung, der Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung, so wie auch die Dauer des An- und Endlaufes verändert werden.

19) *Vierter Versuch. Einfluss des Cylinderquerschnittes.* Wenn der Querschnitt des Cylinders vergrössert, alles Uebrige aber so gelassen wird, wie es beim ersten Versuch war, so wird dies zunächst zur Folge haben, dass im Beharrungszustand die Spannung und demnach auch die Dichte des Dampfes kleiner ausfällt, als beim ersten Versuch. Dadurch wird aber das Verhältniss zwischen dem nützlichen, hinter dem Kolben wirkenden Dampfdruck, und dem schädlichen vor dem Kolben wirkenden atmosphärischen Gegendruck ungünstiger, und dies muss zur Folge haben, dass die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung kleiner ausfällt, als beim ersten Versuch. In jeder andern Hinsicht aber treten keine wesentlichen Aenderungen ein.

20) *Fünfter Versuch. Einfluss der Massen der Maschine.* Um den Einfluss der Massen der Maschine kennen zu lernen, wollen wir das Schwungrad, mit welchem wir uns die Maschine bei allen vorhergehenden Versuchen versehen dachten, durch ein anderes noch einmal so schweres, aber von einem eben so grossen Durchmesser ersetzen, alle übrigen Verhältnisse aber genau so lassen, wie sie beim ersten Versuch waren.

Berücksichtiget man, dass im Beharrungszustand Kraft und Widerstände im Mittel genommen, im Gleichgewicht sein müssen, und dass die Damfmenge, welche während jedes Schubes aus dem Kessel entfernt wird, eben so gross sein muss, als jene, die in der Zeit eines Schubes produzirt wird, so ist wohl leicht einzusehen, dass beim fünften Versuch, wenn einmal der Beharrungszustand eingetreten ist, sowohl die Spannkraft und Dichte des Dampfes, als auch die Anzahl der Kolbenspiele, die in einer Minute geschehen, genau so gross sein wird, wie beim ersten Versuch. Stellt man die Bewegungserscheinungen graphisch dar, so erhält man eine Figur, die mit jener, die dem ersten Versuch entspricht, ganz congruent ist. Aber dessen ungeachtet erfolgt die Bewegung bei der Maschine mit dem schwereren Schwungrad dennoch anders, als bei jener mit dem leichten, denn bei ersterer sind die Geschwindigkeitsänderungen, die während eines Schubes eintreten, kleiner, d. h. es ist die Gleichförmigkeit ihrer Bewegung grösser, als bei der Maschine mit dem leichten Rad. Der Grund hievon liegt in dem Umstande, dass bei der Maschine mit dem schwereren Schwungrade die Geschwindigkeit sich um nicht so viel zu ändern braucht, als bei der Maschine mit dem leichten Schwungrade, damit, wie es die Natur der Sache verlangt, die Aenderungen der lebendigen Kräfte in beiden Fällen gleich gross ausfallen.

Ausserdem, dass eine Vergrösserung der Schwungmasse einen höheren Grad von Gleichförmigkeit der Bewegung während des Beharrungszustandes hervorbringt, wird dadurch auch noch die Dauer des Anlaufes und jene des Endlaufes vergrössert, was jedoch eine in praktischer Hinsicht ganz gleichgültige Sache ist.

In Betreff der Massen der Maschine mit periodischem Gang können wir nun folgende Sätze aussprechen:

1) Die Massen der Maschine haben keinen Einfluss auf den Druck, welchen der Motor im Beharrungszustand der Bewegung auf den Receptor ausübt.

2) Die Massen der Maschine haben keinen Einfluss auf die mittlere Geschwindigkeit (Anzahl der Kolbenspiele pr. 1 Minute) des Beharrungszustandes.

3) Die Massen der Maschinen haben keinen Einfluss auf die im Verlauf jeder Periode eintretenden Aenderungen der lebendigen Kraft.

4) Die Massen der Maschine haben einen wesentlichen Einfluss auf die während jeder Periode eintretenden Geschwindigkeitsänderungen; die Massen reguliren demnach die Bewegung, und zwar um so mehr, je grösser sie sind.

5) Die Massen der Maschinen haben Einfluss auf die Dauer des Anlaufes und auf jene des Endlaufes. Die erstere wächst, nach einem im Allgemeinen nicht bestimmbaren Gesetz, mit der Grösse der Masse, die letztere ist der Grösse der Masse genau proportional.

6) Die Nützlichkeit der Masse besteht bei den Maschinen mit periodischem Gang lediglich darin, dass sie die in allen praktischen Fällen nachtheiligen Ungleichförmigkeiten der Bewegung vermindern.

21) ***Analytische Theorie der Bewegung einer Mahlmühle, die durch eine Dampfmaschine getrieben wird.*** Wenn man sich erlaubt, sämmtliche Massen, die eine geradlinige hin- und hergehende Bewegung haben, im Vergleich zu den rotirenden Massen, zu vernachlässigen, und die Länge der Schubstange im Vergleich zur Länge der Kurbel unendlich gross anzunehmen, in welchem Falle die Richtung der Schubstange zu sich selbst parallel bleibt, so unterliegt es keiner Schwierigkeit, die periodische Bewegung der Maschine analytisch zu behandeln.

Nennt man unter diesen Voraussetzungen:

P die constante Kraft, mit welcher die Dampfmaschine auf den Kurbelzapfen einwirkt, wenn der Beharrungszustand der Bewegung eingetreten ist;

Q den auf den Kurbelkreis reduzirten Widerstand, d. h. die Kraft, mit welcher in jedem Augenblick senkrecht auf die Kurbel, auf deren Zapfen gewirkt werden müsste, um den sämmtlichen Widerständen der Mühle das Gleichgewicht zu halten;

μ die nach der Lehre vom Trägheitsmoment auf den Kurbelkreis reduzirten rotirenden Massen der Maschine, mit Einschluss der Masse des Schwungrades, so dass also μ eine ideale Masse bedeutet, die, in der Peripherie des Kurbelkreises angebracht, bei einer gewissen Geschwindigkeit der Maschine eine eben so grosse lebendige Kraft darbieten würde, wie die wirklich vorhandenen rotirenden Massen bei der gleichen Geschwindigkeit;

w, W das Minimum und das Maximum der Geschwindigkeit des Kurbelzapfens während eines Kolbenschubes;

α und $\pi - \alpha$ die Winkel, welche den Stellungen der Kurbel entsprechen, in denen das Minimum und das Maximum der Geschwindigkeit eintritt, so dass also α und $\pi - \alpha$ die Winkel bezeichnen, welche die Kurbel vom Beginn des Schubes an bis zu den Augenblicken zurücklegt, in denen das Minimum und das Maximum der Bewegung eintritt;

r den Halbmesser der Kurbel, mithin 2r die Länge l des Kolbenschubes;

$c = \frac{W + w}{2}$ die wahre mittlere Geschwindigkeit der Kurbel, d. h. die ideale constante Geschwindigkeit, mit der sich der Kurbelzapfen bewegen müsste, um in derselben Zeit einen Umkreis zu beschreiben, in der er denselben in seiner ungleichförmigen Bewegung wirklich beschreibt;

$i = \frac{W - w}{c}$ das Verhältniss aus der Differenz zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit und der mittleren Geschwindigkeit. Durch diese Grösse i wird der Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung im Beharrungszustand gemessen;

φ den Winkel, um welchen sich die Kurbel vom Beginn des Schubes an bis zu irgend einem beliebigen Zeitmoment hin bewegt hat.

Wenn einmal der Beharrungszustand eingetreten ist, hat die lebendige Kraft der Massen am Anfang und am Ende eines jeden Schubes den gleichen Werth; es muss daher die Wirkungsgrösse P l, welche durch die Kraft P während eines Schubes entwickelt wird, gleich sein der Wirkungsgrösse $Q\, l \frac{\pi}{2}$, die während eines Schubes durch den Widerstand Q consumirt wird; man hat daher $P\,l = Q\,l\,\frac{\pi}{2}$, und daraus folgt:

$$P = \frac{\pi}{2}\,Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Hierdurch ist also die Kraft bestimmt, mit welcher der Kolben im Beharrungszustand hin- und hergeschoben wird. Man sieht, dass diese Kraft P einzig und allein nur von dem Widerstand Q abhängt, und dass weder die Verdampfung, noch die Beharrungsgeschwindigkeit, weder die Ungleichförmigkeiten der Bewegung, noch die Massen der Maschine einen Einfluss haben auf die Kraft, mit welcher der Kolben im Beharrungszustand getrieben wird. Während des Anlaufes wird sich demnach die Dampfspannung so lange verändern, bis sie zuletzt einen Werth annimmt, bei welchem die Differenz zwischen dem Druck des Dampfes auf den Kolben und dem atmosphärischen Gegendruck den Werth $\frac{\pi}{2}\,Q$ erreicht hat.

Das durch die Gleichung (a) ausgedrückte Verhältniss zwischen P und Q kann auch gefunden werden, indem man den mittleren Werth der in jedem Augenblick senkrecht auf den Kurbelhalbmesser wirkenden Kraft $P \sin.\varphi$ berechnet und denselben gleich Q setzt. Da nämlich Kraft und Widerstand, im Mittel genommen, während eines Schubes im Gleichgewicht sein müssen, damit am Ende des Schubes wiederum die lebendige Kraft zum Vorschein kommt, so muss der mittlere Werth von $P \sin.\varphi$ dem Werth von Q gleich sein. Man hat daher

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P \sin.\varphi \, d\varphi = Q$$

und daraus findet man in der That wie oben $P = \frac{\pi}{2}\,Q$.

Die Stellungen der Kurbel, in welchen das Maximum und das Minimum der Geschwindigkeit eintritt, sind, wie schon früher vermittelst der Fig. 2 Taf. V. erklärt wurde, so beschaffen, dass in denselben die tangentiale Kraft $P \sin.\varphi$ dem Werth des Widerstandes Q gleich ist. Man hat daher zur Bestimmung dieser Kurbelstellungen die Gleichung

$$P \sin.\varphi = Q \text{ oder } \sin.\varphi = \frac{Q}{P}$$

oder weil vermöge (a) $\frac{Q}{P} = \frac{2}{\pi}$ ist, so folgt:

$$\sin.\varphi = \frac{2}{\pi}$$

Die Winkel, in welchen das Minimum und das Maximum der Geschwindigkeit eintritt, sind demnach so beschaffen, dass für dieselben der Sinus gleich $\frac{2}{\pi} = 0{\cdot}6366198$ ist, und dies ist der Fall für:

$$\varphi = \alpha = 39^\circ + 32' + 25'' \text{ und für:}$$

$$\varphi = \pi - \alpha = 180^\circ - [39^\circ + 32' + 25'']$$

Es geht aus der Natur der Sache hervor, dass der erstere dieser Winkel dem Minimum und der letztere dem Maximum der Geschwindigkeit entspricht.

Um den Werth von i zu bestimmen, welcher die Gleichförmigkeit der Bewegung angibt, braucht man nur auszudrücken, dass die Differenz der Wirkungen, welche die Kraft P produzirt, und der Widerstand Q consumirt, während die Bewegung aus der kleinsten Geschwindigkeit in die grösste übergeht, gleich sein muss der Aenderung der lebendigen Kraft, die dieser Geschwindigkeitsänderung entspricht.

In dieser Zeit legt aber die Kraft $P = \frac{\pi}{2}$ Q den Weg $2\,r \cos.\alpha$ und der Widerstand Q einen Weg $2\,r\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r\,(\pi - 2\,\alpha)$ zurück; die Differenz jener Wirkungsgrössen ist demnach:

$$\frac{\pi}{2}\,Q\,2\,r\cos.\alpha - r\,(\pi - 2\,\alpha)\,Q$$

$$\text{oder } Q\,r\,\{\pi\cos.\alpha - (\pi - 2\,\alpha)\}$$

Die Aenderung der lebendigen Kraft ist dagegen:

$$\mu\,(W^2 - w^2) = \mu\,(W + w)\,(W - w) = \mu \times 2\,c \times i\,c = 2\,\mu\,i\,c^2$$

man hat demnach die Gleichheit:

$$Q\,r\,\{\pi\cos.\alpha - \pi + 2\,\alpha\} = 2\,\mu\,i\,c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Nun ist aber, wenn man für α den oben gefundenen Werth substituirt:

$$\pi\cos.\alpha - \pi + 2\,\alpha = \pi\left\{\cos.\alpha - 1 + \frac{2\,\alpha}{\pi}\right\} = 0{\cdot}66143$$

und dann ist ferner, wenn man den in Pferdekräften ausgedrückten Nutzeffekt, welchen die Maschine entwickelt, mit N und die Anzahl der Umdrehungen der Kurbelwelle pr. 1 Minute mit n bezeichnet; endlich das Gewicht, welches der Masse μ entspricht, gleich G setzt:

$$Q\,c = 75\,N$$

$$c = \frac{2\,r\,\pi\,n}{60}$$

$$\mu = \frac{G}{2\,g}$$

Mit Berücksichtigung dieser Resultate verwandelt sich obige Gleichung (b) in folgende:

$$\frac{1}{i} = \frac{G\,c^2}{4647}\,\frac{n}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

und somit ist nun der Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung im Beharrungszustand bestimmt. Dieser (nämlich der Werth von $\frac{1}{i}$, d. h. die Zahl, welche ausdrückt, um wie vielmal die mittlere Geschwindigkeit grösser ist, als die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit) ist nach dieser Gleichung (c) der lebendigen Kraft aller rotirenden Masse, und der Anzahl der Umdrehungen der Kurbelwelle direkt, sodann aber dem Nutzeffekt der Maschine verkehrt proportional.

Wenn man in der Gleichung (b) nur allein den Werth von $\pi \cos. \alpha - \pi + 2\,\alpha = 0{\cdot}66143$ einführt, und alle andern in derselben erscheinenden Grössen ungeändert lässt, so findet man auch aus derselben:

$$\frac{1}{i} = 3{\cdot}023\,\frac{\mu\,c^2}{Q\,r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Man kann demnach auch den Satz aussprechen: dass der Gleichförmigkeitsgrad $\frac{1}{i}$ der lebendigen Kraft der Massen direkt, und dem statischen Moment $Q\,r$ des Widerstandes verkehrt proportional sei.

Wir haben nun noch, um die Bewegung des Beharrungszustandes vollständig kennen zu lernen, die mittlere Geschwindigkeit c der Bewegung zu bestimmen.

Nennen wir:

p den Druck des Dampfes auf einen Quadratmeter der Kolbenfläche.

O den Querschnitt des Dampfcylinders in Quadratmeter.

𝔭 den Druck, welcher auf einen Quadratmeter der Kolbenfläche wirken muss, um den atmosphärischen Gegendruck und die Reibungen der Dampfmaschine zu überwinden.

S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde produzirt wird.

$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0{\cdot}1427\\ \beta = 0{\cdot}00004729\end{array}\right\}$ zwei constante Coeffizienten, vermittelst welchen das Gewicht von einem Kubik-Meter Dampf, der auf einen Quadratmeter einen Druck p ausübt, gemessen werden kann. Es ist nämlich annähernd das Gewicht von einem Kubik-Meter Dampf, dessen Druck pr. 1 Quadratmeter p beträgt, gleich $\alpha + \beta$ p.

Dies vorausgesetzt, erhalten wir zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit eine Gleichung, wenn wir ausdrücken, dass in jeder Sekunde eben so viel Dampf consumirt als produzirt wird.

Wenn wir von den Dampfverlusten absehen, die durch unvollkommene Dichtungen, durch Abkühlung und durch andere Nebenumstände entstehen können, wird durch die Maschine aus dem Kessel bei jedem

Kolbenschub ein Dampfvolumen entfernt, das so gross ist, als das Volumen $2 r O$, das der Kolben bei jedem Schub beschreibt, und da dieser Dampf im Cylinder auf jeden Quadratmeter einen Druck p ausübt, so ist das Gewicht des Dampfes der bei einem Schub aus dem Kessel entfernt wird, $2 r O (\alpha + \beta p)$. Nun ist aber die Zeit eines Schubes $\frac{r \pi}{c}$, es wird demnach im Mittel genommen in jeder Sekunde eine Dampfmenge von $\frac{2 r O (\alpha + \beta p)}{\frac{r \pi}{c}}$ consumirt. Demnach hat man wegen Gleichheit zwischen Produktion und Consumtion:

$$S = \frac{2 r O (\alpha + \beta p)}{\frac{r \pi}{c}} = \frac{2 O (\alpha + \beta p) c}{\pi}$$

Nun ist aber wegen $P = O (p - \mathfrak{p}) = \frac{\pi}{2} Q$

$$p = \mathfrak{p} + \frac{\pi}{2} \frac{Q}{O} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

und folglich erhält man durch Einführung dieses Werthes von p in den obigen Ausdruck für S

$$S = \frac{2 O \left[\alpha + \beta (\mathfrak{p} + \frac{\pi}{2} \frac{Q}{O})\right] c}{\pi}$$

oder

$$c = \frac{\pi S}{2 O (\alpha + \beta \mathfrak{p}) + \pi \beta Q} \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

Zur Beantwortung aller Fragen, welche den Beharrungszustand betreffen, haben wir nun die Gleichungen (d), (e), (f) nämlich:

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathfrak{p} + \frac{\pi}{2} \frac{Q}{O} \\ c &= \frac{\pi S}{2 O (\alpha + \beta \mathfrak{p}) + \pi \beta Q} \\ \frac{1}{i} &= 3{\cdot}023 \frac{\mu c^2}{Q r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (A)$$

von welchen die erste die Dampfspannung, die zweite die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung, und die dritte den Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung bestimmt.

Da in diesen drei Gleichungen acht Grössen, nämlich $\mathfrak{p}$, Q, O, c, S, μ, r, i vorkommen, deren Werthe sich ändern können, so können jederzeit, wenn fünf von diesen acht Grössen bekannt sind, die drei übrigen bestimmt werden. Es sind demnach nach combinatorischen Gesetzen $\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56$ verschiedene den Beharrungszustand betreffende Fragen möglich, die alle vermittelst der drei Gleichungen (A) beantwortet werden können.

Vermöge der Gleichungen A kann man folgende Sätze aussprechen:

1) Die Spannung des Dampfes im Beharrungszustand richtet sich einzig und allein nach dem auf den Kurbelkreis und auf die Einheit der Kolbenfläche reduzirten Widerstand $\frac{Q}{O}$ der Maschine, und ist von allen andern Grössen, namentlich von der Geschwindigkeit des Beharrungszustandes, von den Massen der Maschine und von dem Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung ganz unabhängig.

2) Die mittlere Geschwindigkeit ist der Dampfproduktion genau direkt, und dem auf den Kurbelkreis reduzirten Widerstand Q nahe verkehrt proportional. Es ist nämlich meistens $2\ O\ (\alpha + \beta\ p)$ gegen $\pi\ \beta\ Q$ eine kleine Grösse.

3) Der Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung ist der lebendigen Kraft aller rotirenden Massen direkt, und dem statischen Moment Q r des Widerstandes verkehrt proportional.

22) *Maschinen mit unregelmässigem Beharrungszustande.* Zur Erklärung der Maschinen mit unregelmässigem Beharrungszustande wollen wir ein Stabeisenwalzwerk betrachten, das durch ein Wasserrad getrieben wird. Ein solches Walzwerk besteht bekanntlich aus zwei oder mehreren über einander liegenden, an ihrem Umfange canelirten Walzen, die durch eiserne rahmenartige Gestelle in paralleler Lage gegen einander gehalten und vermittelst Wellen und Zahnrädern vom Wasserrad getrieben werden. Eine von den Transmissionswellen ist immer mit einem schweren Schwungrade versehen.

Das Strecken der Eisenbarren geschieht auf folgende Weise. Während die Eisenbarren in einem Schweissofen gehitzt werden, wird das Betriebswasser auf das Rad gelassen, wodurch es und alle übrigen beweglichen Theile des Walzwerks in kurzer Zeit eine ansehnliche Geschwindigkeit erhält, indem dabei nur allein die verhältnissmässig unbedeutenden Reibungswiderstände der leer laufenden Maschine zu überwältigen sind. Die Wirkungsgrösse, welche in dieser Zeit das Wasser entwickelt, wird durch die Massen der Maschine und insbesondere durch jene des Schwungrades aufgesammelt, so dass von nun an nicht nur der Motor, sondern auch die in den Massen enthaltene colossale lebendige Kraft das Strecken der Barren bewirkt.

Diese lebendige Kraft ist gleichsam als ein künstlicher Motor zu betrachten, welcher die Thätigkeit des natürlichen Motors kräftigst unterstützt. Nun wird eine glühende Eisenbarre in die erste, weiteste Walzenkanelirung gesteckt, durchgelassen und wiederum zurück gebracht, sodann wird sie in die zweite nächst engere Kanelirung gesteckt, abermals durchgelassen und wiederum zurückgegeben, und so wird fortgefahren, bis das Eisen, nachdem es zwei, drei, vier Mal durchgelassen wurde, zuletzt den Querschnitt erhält, der hervorgebracht werden soll. Ist das Strecken eines Stabes beendigt, so wird derselbe zur Seite gelegt und der Wasserzufluss ausgehoben, so dass die Maschine nach einiger Zeit in Ruhe kommt und erst wiederum in Bewegung gesetzt wird, wenn die nächstfolgende Barre beinahe schweissglühend erhitzt ist.

Der ganze Verlauf der Erscheinungen lässt sich am leichtesten vermittelst der graphischen Darstellungen Fig. 3 und 4, Taf. V übersehen. Auf den Linien A L und A_1 L_1 sind die Wege, welche ein Punkt des Radumfanges vom Beginn der Bewegung an zurücklegt, als Abscissen aufgetragen. Die Ordinaten der Linie K stellen die Kraft dar, mit welcher das Wasser auf den Umfang des Rades einwirkt. Die Ordinaten der Linie W bedeuten den auf den Umfang des Wasserrades reduzirten Widerstand, welcher der Bewegung entgegenwirkt; diese Ordinaten geben also den Druck an, welcher in den auf einander folgenden Zeitaugenblicken am Umfange des Rades wirken müsste, um den in diesen Zeitaugenblicken in der Maschine vorhandenen Widerständen das Gleichgewicht zu halten. Die Ordinaten der Linie L stellen die lebendige Kraft dar, die in den auf einander folgenden Zeitmomenten in sämmtlichen Massen der Maschine enthalten ist. Endlich die Ordinaten von G die Umfangsgeschwindigkeiten des Wasserrades.

Der Weg A B entspricht dem Anlauf der Maschine. Es ist also A B der Weg, den ein Punkt des Radumfanges von dem Augenblick an, in welchem die Bewegung beginnt, bis zu dem Augenblick hin, in welchem die glühende Barre in die Kanelirung gebracht wird, zurücklegt. B C, D E, F G, H I sind die Wege des Radumfanges, während die Streckung in den auf einander folgenden Kanelirungen erfolgt. C D, E F, G H, I K die Wege, die der Radumfang zurücklegt, während die Barre zurück gebracht wird, die Maschine also leer läuft. I K entspricht der Zeitintervalle, in welcher nach dem letztmaligen Strecken der Wasserzufluss noch fortdauert. K ist der Punkt, in welchem der Wasserzufluss aufgehoben wird. Endlich K L der Weg des Endlaufes, der so lange fortdauert, bis die im Punkt K in den Massen enthaltene lebendige Kraft durch den Reibungswiderstand der Maschine (dessen Betrag, auf den Umfang des Rades bezogen, gleich $A a = B b = C c$ ist) gänzlich consumirt worden ist.

Der Widerstand ist innerhalb der Wege A B, C D, E F, G H, I L nur die eigene Reibung der leer laufenden Maschine, beträgt demnach A a = B b = C c. Während die Streckung in der ersten, zweiten, dritten Kanelirung erfolgt, ist dagegen dieser Widerstand beziehungsweise gleich $B b_1$, $D d_1$, $F f_1$, $H h_1$. Der Widerstand ändert sich also sprungweise, und ist, wegen der Abnahme des Querschnittes der Barre, in jeder folgenden Kanelirung kleiner als in der vorhergehenden.

Einen gleichförmigen Wasserzufluss vorausgesetzt, richtet sich die Kraft, mit welcher das Wasser auf den Umfang des Rades einwirkt, nach der in jedem Augenblick im Rade enthaltenen Wassermenge, d. h. nach der Füllung des Rades. Diese Kraft ist gross, wenn in dem Rade viel Wasser enthalten ist, sie ist klein, wenn das Rad wenig Wasser enthält. Diese Wassermenge wächst zunächst vom Beginne des Wasserzuflusses an, bis das Rad ungefähr eine halbe Umdrehung gemacht hat, und ändert sich sodann mit der Geschwindigkeit des Rades in der Weise, dass eine Zunahme der Geschwindigkeit eine Verminderung, eine Abnahme der Geschwindigkeit eine Vermehrung dieser Wassermenge zur Folge hat. Daher kommt es nun, dass die Linie K zuerst von A bis M steigt, sodann von M bis B wegen zunehmender Geschwindigkeit des Rades wiederum fällt; dass sie ferner zwischen BC, DE, FG, HI, wo gestreckt wird, wegen der dabei eintretenden Abnahme der Geschwindigkeit steigt, dagegen zwischen CD, EF, GH, IK, wo die Maschine leer läuft, und ihre Geschwindigkeit zunimmt, abermals fällt.

Durch das so eben Gesagte ist auch der Lauf der Kurven L und G im Allgemeinen angegeben. Innerhalb AB, CD, EF, GH, IK ist die Kraft überwiegend, innerhalb BC, DE, FG, HI der Widerstand; die Linien müssen daher in den ersten dieser Intervallen steigen, und innerhalb der letzteren fallen. Der Lauf der Kurven L und G ist demnach im Allgemeinen jener von K entgegengesetzt. Die Kurven L und G sind zwischen B und I zackig, weil sich sowohl die lebendige Kraft, als auch die Geschwindigkeit durch die während der Streckung eintretenden heftigen Stösse und Vibrationen immerfort plötzlich ändern.

Da sich die Ordinaten der Kurve G verhalten müssen, wie die Quadratwurzeln aus den Ordinaten der Kurve L, so ist klar, dass die erstere dieser Kurven so zu sagen höhere Wellen zeigen muss, als die letztere.

Die lebendige Kraft, welche in irgend einem Zeitmoment der Bewegung in sämmtlichen Massen enthalten ist, ist nicht gleich dem Unterschied, der bis zu diesem Augenblick hin produzirten und consumirten Wirkungen, sondern um so viel kleiner, als die Wirkungsgrösse beträgt, die durch Stösse bis zu diesem Zeitmoment hin verloren gegangen ist. Es muss also, wenn die Zeichnung richtig gemacht ist, und alle Grössen in Zahlen ausgedrückt werden, die Zahl, welche z. B. der Ordinate $D_1 d_2$ entspricht, kleiner sein, als die Zahl, welche den Unterschied der Flächenräume $A\,a\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,D$ und $A\,a\,b\,b_1\,c_1\,c\,d\,D$ angibt, und zwar um so viel, als der durch Stösse von A bis D verursachte Verlust an lebendiger Kraft beträgt. Es muss daher auch der Flächeninhalt, welcher der ganzen Figur der Linie K von A bis L entspricht, grösser sein, als jener der ganzen Figur von W von A bis L, und der Unterschied dieser Flächeninhalte bestimmt den Verlust an Wirkung durch Stösse während der ganzen Bewegungsdauer.

Von grosser Wichtigkeit ist bei Eisenwalzwerken und überhaupt bei allen Maschinen, die äusserst heftige und plötzlich wachsende Widersände zu überwältigen haben, die Wirkung der Massen. Dieselben machen es möglich, dass mit einem verhältnissmässig nicht sehr mächtigen Motor die während des Streckens oft eintretenden kolossalen Widerstände nicht nur überhaupt überwältigt, sondern sogar mit grosser Geschwindigkeit überwältigt werden können; verhindern ferner, dass während der Operation keine zu grossen Geschwindigkeitsänderungen eintreten, und bewirken dadurch, dass der Receptor während des ganzen Vorganges sich nicht weit von derjenigen Geschwindigkeit entfernen kann, welche für die Kraftaufsammlung die vortheilhafteste ist.

Um sich diese Wirkungen der Massen klar zu machen, vergleiche man zwei Walzwerke mit einander, von denen das eine mit einem schweren Schwungrad versehen ist, das andere aber mit keinem, die aber in jeder andern Hinsicht ganz identisch eingerichtet und construirt sind.

Um das Eisen mit dem Streckwerk ohne Schwungrad zu bearbeiten, müsste der kolossale Widerstand, der vorzugsweise anfangs, wo die Stäbe noch starke Dimensionen und unregelmässige Formen haben vorhanden ist, nur allein durch den auf den Umfang des Wasserrades wirkenden Druck überwältigt werden. Hierzu wäre aber eine ausserordentlich grosse Wassermenge, und um dieselbe fassen zu können, ein sehr grosses geräumiges Rad erforderlich. Angenommen, es gelänge das erstmalige Ausstrecken, so würden dann neuerdings bedeutende Schwierigkeiten eintreten, denn man müsste, damit ungeachtet des höchst ungleichförmigen Widerstandes dennoch keine zu bedeutenden Ungleichförmigheiten in der Bewegung eintreten könnten, den Wasserzufluss in solcher Weise zu reguliren im Stande sein, dass in jedem Augenblick der Druck des Wassers auf den Umfang des Rades dem wechselnden Widerstand ungefähr das Gleichgewicht hielte.

Viel leichter kann die Operation mit einem Walzwerk, das mit einem schweren Schwungrade versehen ist, selbst durch einen verhältnissmässig schwachen Motor bewerkstelligt werden. Wenn man nämlich zuerst, bevor das Eisen zwischen die Walzen gebracht wird, den Motor durch längere Zeit auf die Maschine einwirken lässt, können die Massen der Maschine, und kann insbesondere das Schwungrad, wenn es schwer genug ist, eine ausserordentlich grosse Wirkungsgrösse in sich aufnehmen, ohne dass die Geschwindigkeit der Bewegung unverhältnissmässig gross zu werden braucht, und wenn dann das Eisen zwischen die Walzen gebracht wird, erfolgt die Ueberwindung des Widerstandes nicht nur durch den Druck des Wassers auf den Umfang des Rades, sondern insbesondere auch durch die in den Massen enthaltene kolossale lebendige Kraft, und wenn auch der Widerstand in einzelnen Momenten noch so gross ist, wird er dennoch überwunden, es wäre denn, was öfters geschieht, dass einer oder der andere Maschinenbestandtheil bricht, also der geometrische Zusammenhang aufgehoben wird. Auch ist klar, dass während der Operation keine beträchtlichen Geschwindigkeitsänderungen eintreten können, wenn vor dem Beginn derselben in das Schwungrad eine hinreichend grosse lebendige Kraft hineingearbeitet wird. Ist z. B. diese lebendige Kraft so gross als die Wirkungsgrösse, die sämmtliche Widerstände während der ganzen Dauer der Operation consumiren, so wird am Ende der Operation in den Massen doch noch eine lebendige Kraft enthalten sein, die gleich ist der während der Operation von dem Motor entwickelten Wirkungsgrösse. Diese Gleichförmigkeit der Bewegung ist aber nicht nur für den Arbeitsprozess, sondern auch für die Kraftaufsammlung des Rades sehr wesentlich, indem die Wirkungsgrösse, welche das Rad vom Wasser empfängt, nicht nur von dem Wasserzufluss, vom Gefälle und von der Construktion des Rades, sondern auch von seiner Geschwindigkeit abhängt, und nur bei einer gewissen Geschwindigkeit ihren grössten Werth erreicht. Nun ist es aber immer möglich, diese für die Kraftaufsammlung vortheilhafteste Geschwindigkeit herbeizuführen, wenn das Schwungrad hinreichend schwer gemacht und passende Verhältnisse in den Abmessungen der Transmissionsräder gewählt werden; man sieht also, dass ein Schwungrad auch hinsichtlich der vortheilhaftesten Benützung der Motoren von grosser Wichtigkeit ist.

Ueber die Wirkung der Massen und insbesondere der Schwungräder bei Maschinen mit unregelmässigem Bewegungszustand gelten also folgende Sätze:

1) Es ist vermittelst eines Schwungrades möglich, auch durch einen Motor von mässiger Energie die heftigsten und ungleichförmigsten Widerstände zu überwältigen.

2) Es wird durch Schwungräder von angemessener Grösse bewirkt, dass die Geschwindigkeitsänderungen der Bewegung innerhalb gewisser Grenzen bleiben.

3) Ist es vermittelst der Schwungräder möglich, dass sich der Receptor ungefähr mit der für die Kraftaufsammlung vortheilhaftesten Geschwindigkeit bewegt.

Die Effektverhältnisse.

23) ***Benennung der verschiedenen Effekte.*** Wenn es eine Maschine gäbe, die in Bezug auf die Aufnahme und Uebertragung des Effektes absolut vollkommen wäre, so müsste in derselben sowohl der dem Receptor mitgetheilte als auch der auf die Werkzeuge übertragene Effekt dem absoluten Effekt des Motors genau gleich sein, und es wäre in diesem Falle die Kenntniss dieses letzteren hinreichend, um den in irgend einem Punkt der Maschine vorhandenen Effekt angeben zu können. Weil aber alle Maschinen in der oben angegebenen Hinsicht unvollkommen sind, so ist zunächst der dem Receptor mitgetheilte Effekt immer kleiner als der absolute Effekt des Motors, und ist auch ferner der Effekt, den irgend ein Maschinenglied an das nächstfolgende abgibt, immer kleiner, als jener, den es empfangen hat, so dass zuletzt immer nur ein Theil des absoluten oder des dem Receptor mitgetheilten Effektes auf die Werkzeuge übertragen wird. Die richtige Beurtheilung einer Maschine in Hinsicht auf die Aufnahme und Uebertragung des Effektes erfordert daher vorzugsweise die Kenntniss folgender Effekte:

1) Der im Motor selbst enthaltene absolute Effekt.

2) Die Effektverluste, welche während der Einwirkung des Motors auf den Receptor und in den einzelnen Gliedern der Kraftmaschine eintreten.

3) Der Nutzeffekt der Kraftmaschine, welcher in dem letzten Gliede derselben, das mit der Transmission im Zusammenhange steht, vorhanden ist.

4) Die Effektverluste während der Uebertragung durch die Transmission.

5) Der Arbeitseffekt, welcher den Werkzeugen oder der Arbeitsmaschine mitgetheilt wird, durch dessen Thätigkeit also ein für unsere Zwecke nützliches Resultat hervorgeht.

24) *Wichtigkeit der Kenntniss der Effektverhältnisse.* Eine gründliche Kenntniss der Effektverhältnisse ist für das gesammte Maschinenwesen von sehr grosser Wichtigkeit. Fast bei jedem Schritt, den man in diesem Fache thun will, wird man veranlasst, diese Verhältnisse zu berücksichtigen. Es beruht hierauf: 1) die so höchst wichtige Oekonomie der Motoren; 2) die Beurtheilung der Maschinen in Hinsicht auf ihr Kraftaufsammlungs- und Kraftfortleitungsvermögen; 3) die Bestimmung und Auffindung der zweckmässigsten Construktionsverhältnisse für neu zu erbauende Maschinen. Ich will versuchen, diesen Gegenstand durch eine weitere Ausführung deutlich zu machen.

Es ist zunächst klar, dass die Motoren für die Industrie von hohem

Werth sind, denn sie allein enthalten das aktive Prinzip, durch dessen Thätigkeit nützliche mechanische Veränderungen und Arbeitsprodukte hervorgehen. Wo kein Motor ist, gibt es keine Thätigkeit, keine Veränderung, kein Arbeitsprodukt, ohne Motoren gibt es keine Industrie.

Allein so gross der Reichthum der Natur an Motoren ist, so sind doch diejenigen, welche für technische Zwecke gebraucht werden können, nicht in dem Uebermaas vorhanden, dass es erlaubt wäre, mit denselben verschwenderisch umzugehen. Selbst mit den Wasserkräften, die doch — wenn einmal das Benutzungsrecht erworben, und die zur Benutzung nothwendigen Bauten und Einrichtungen hergestellt sind — keine Kosten verursachen, ist man, wenigstens bei grösseren industriellen Unternehmungen, fast immer gezwungen, die grösstmöglichste Oekonomie zu beobachten, weil sie sonst zum Betrieb der Fabriken nicht hinreichen, oder die zu ihrer Benutzung erforderlichen Bauten und Einrichtungen zu kostspielig ausfallen würden Aber einen noch höheren Grad von Sparsamkeit erfordert die Benutzung der Dampfkraft, indem fast an allen Orten der zur Dampferzeugung erforderliche Brennstoff mit bedeutenden Kosten erkauft werden muss.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass eine kluge und ökonomische Benutzung der Motoren ganz unmöglich ist, so lange man nicht weiss, wie man sich zu benehmen hat, um die Wirkung, die ein Motor zu entwickeln vermag, best möglichst aufzufassen, und dann durch die Maschine auf die arbeitenden Werkzeuge fortzuleiten, und diese Fähigkeit erlangt man nur allein durch ein gründliches Studium der Effektverhältnisse; dieses Studium ist also für die Oekonomie der Motoren von grossem Werth.

Ein weiterer Nutzen, den die Kenntniss der Effektverhältnisse gewährt, betrifft die Beurtheilung (Begutachtung, Kritik) eines Maschinenentwurfes oder eines bereits bestehenden Werkes in Hinsicht auf Effektverhältnisse. Solche Beurtheilungen sind für verschiedene Zwecke nützlich und nothwendig, z. B. für die Werthbestimmung eines Werkes, das angekauft oder verkauft werden soll; oder wegen Veränderungen und Verbesserungen, die an einem nicht ganz entsprechenden Baue vorgenommen werden sollen; oder wenn entschieden werden soll, ob es rathsam ist, einen Bau nach einem vorliegenden Entwurf auszuführen, oder ob ein wirklich ausgeführter Bau die in einem Vertrag ausgesprochenen Bedingungen erfüllt. In diesen und in allen ähnlichen Fällen ist es nicht genug, die Effektverhältnisse im Allgemeinen zu kennen, sondern man muss meistens auch im Stande sein, den Einfluss (günstigen oder ungünstigen) jedes einzelnen Construktionselementes auf die Effekte genau anzugeben, damit man mit Sicherheit aussprechen kann, was an einem Bau oder Entwurf gut und was daran fehlerhaft ist.

Den grössten Nutzen, den die Kenntniss der Effektverhältnisse gewährt, betrifft jedoch die Auffindung der zweckmässigsten Construktionselemente für eine neu zu erbauende Maschine; ohne Kenntniss der Effektverhältnisse ist es ganz unmöglich, diese zweckmässigsten Construktionselemente ausfindig zu machen. Wenn eine Kraftmaschine sammt Transmission angeordnet werden soll, muss zunächst der Nutzeffekt bekannt sein, der zum Betrieb des Werkes nothwendig ist; man muss dann ferner wissen, was für eine Kraftmaschine gewählt werden soll, wie sie einzurichten, welche Abmessungen alle ihre Theile erhalten sollen, und welches die zweckmässigste Geschwindigkeit ihres Ganges ist. Man muss ferner wissen, welche Dimensionen die Querschnitte aller Theile der Kraftmaschine und der Transmission erhalten sollen, damit sie den auf sie einwirkenden Kräften hinreichenden Widerstand zu leisten im Stande sind, und so fort. Diese und viele andere Fragen, die bei dem Bau einer Maschine sich darbieten, können nur allein durch eine genaue Kenntniss der Effektverhältnisse beantwortet werden.

Durch diese Erläuterungen wird man wohl die Ueberzeugung gewonnen haben, dass ein gründliches Studium der Effektverhältnisse für jeden rationellen Techniker von umfassender Wichtigkeit ist.

25) ***Bestimmung der absoluten Effekte der Motoren.*** Der absolute Effekt kann nur bei den durch Trägheit und bei den durch Schwerkraft wirkenden Motoren ganz scharf bestimmt werden. Bei den übrigen Motoren ist eine solche Bestimmung desshalb nicht möglich, weil die Gesetze der in ihnen wirkenden Kraft mit mathematischer Genauigkeit nicht bekannt sind.

Der absolute Effekt, welchen das in einem Bach oder Flusse fliessende Wasser an irgend einer Stelle seines Laufes darbietet, wird durch die lebendige Kraft der Wassermenge bestimmt, die in jeder Sekunde an einer bestimmten Stelle des Ufers vorbeifliesst.

Der absolute Effekt, welchen ein Bach oder Fluss auf eine Strecke darbietet, wo ein Gefäll vorhanden ist, wird durch das Produkt aus dem Gefäll in das Gewicht der Wassermenge, die in jeder Sekunde an irgend einer Stelle des Ufers vorbeifliesst, bestimmt.

Der absolute Effekt der belebten Motoren wird theils durch die Anzahl der Individuen, theils durch die nach Erfahrungen zu schätzenden Leistungen jedes einzelnen Individuums bestimmt Im Mittel genommen darf man für einen Arbeiter von mittlerer Stärke 6 bis 8 Kilogramm-Meter und für ein Pferd von mittlerer Stärke 60 Kilogramm-Meter in Rechnung bringen.

Der absolute Effekt der Dampfkraft wird am leichtesten nach der Menge und Heizkraft des zur Dampfkraft benützten Brennstoffs bestimmt. Um dieses Maas auf Kilogramm-Meter zu reduziren, müsste man genau wissen, wie viele Kilogramm-Meter Wirkungsgrösse jede Wärmeeinheit zu entwickeln im Stande wäre. Dies ist aber mit Zuverlässigkeit nicht bekannt; man muss sich also vorläufig, bis dieser Gegenstand durch weitere wissenschaftliche Forschungen entschieden ist, mit der Angabe der Brennstoffmenge begnügen.

Die übrigen Motoren können wir übergehen, indem dieselben einerseits für die Industrie von geringer Wichtigkeit sind, und andererseits eine scharfe Bestimmung ihres absoluten Effektes wegen Unkenntniss der in ihnen wirkenden Kräfte nicht möglich ist.

26) *Die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Nutzeffekte und Arbeitseffekte.* Die Effekte einer Maschine können durch dreierlei Methoden bestimmt werden: 1) durch Schätzung; 2) durch Messung; 3) durch Rechnung. Jede dieser Methoden hat gewisse Vortheile, und verdient unter gewissen Umständen den beiden andern vorgezogen zu werden.

Die Methode der Schätzung gewährt die geringste Genauigkeit, kann aber fast unter allen Umständen angewendet werden, und erfordert nur wenig Zeit, Mühe und Arbeit; sie führt aber nur dann zu Resultaten, die für praktische Zwecke hinreichend genau sind, wenn der Schätzende mit einem durch Erfahrungen und durch wissenschaftliche Studien ausgebildeten Gefühl für die Beurtheilung von Kraftverhältnisse begabt ist. Es ist diese Methode vorzugsweise auf wissenschaftlich technischen Reisen sehr wohl zu gebrauchen, auch muss man sich derselben bedienen, wenn die beiden andern weit umständlicheren Methoden nicht angewendet werden können.

Die Methode der Messung führt bei geschickter Anwendung zu sehr genauen numerischen Werthbestimmungen der Nutzeffekte und Arbeitseffekte, und kann auch möglicher Weise angewendet werden, um alle Umstände, welche auf einen Effekt Einfluss haben, im Einzelnen kennen zu lernen; allein ihre Anwendung erfordert in der Regel einen bedeutenderen Zeit- und Kostenaufwand, setzt einen geübten und erfahrenen Experimentator voraus, und kann nur dann gebraucht werden, wenn man über eine Maschine so weit verfügen darf, als es zur Vornahme gewisser Messungen nothwendig ist, wobei in der Regel die Arbeit der Maschine unterbrochen und selbst die Verbindung zwischen der Kraftmaschine und Arbeitsmaschine, durch Beseitigung einer Welle, oder durch Auskehrung zweier Räder aufgehoben werden muss. Diese Methode wird gegenwärtig vorzugsweise gebraucht, um zu bestimmen, ob eine ausgeführte Maschine hinsichtlich ihrer Effektleistungen den vertragsmässigen Bedingungen entspricht.

Die Effektbestimmung durch Rechnung ist nur möglich, wenn die

Gesetze genau bekannt sind, nach welchen sich die in einer Maschine wirkenden Kräfte und Widerstände richten; sie erfordert in der Regel nicht unbedeutende theoretische Kenntnisse, gewährt aber, wenn sie geschickt durchgeführt wird, eine sehr detaillirte Einsicht in die Art und Weise, wie jedes einzelne Construktionselement auf den Effekt Einfluss hat; kann daher in manchen Fällen zu einer sehr gründlichen Beurtheilung (Kritik) einer bestehenden Maschine dienen, und kann insbesondere auch zur Bestimmung der zweckmässigsten Construcktionselemente einer neu zu erbauenden Maschine gebraucht werden.

In den folgenden Nummern sollen nun diese drei Methoden der Effektsbestimmung ausführlicher besprochen werden

27) *Bestimmung der Effekte durch Schätzung.* Der Nutzeffekt einer bereits bestehenden Kraftmaschine kann mit ziemlicher Zuverlässigkeit durch Schätzung bestimmt werden, wenn an Ort und Stelle der absolute Effekt des auf die Maschine wirkenden Motors ermittelt, und ferner noch die Einrichtung der Maschine in Bezug auf ihr Kraftaufsammlungsvermögen beurtheilt wird. Eine in dieser Hinsicht absolut vollkommene Maschine gibt es nicht; wenn es aber eine solche gäbe, so würde sie bei einer gewissen Geschwindigkeit den totalen absoluten Effekt des Motors in sich aufnehmen, und dann wäre der Nutzeffekt eben so gross, als der absolute Effekt, jener wäre demnach durch diesen bestimmt. Allein es gibt keine absolut vollkommene Maschine, und daher ist der Nutzeffekt jeder wirklichen Maschine kleiner, als der absolute Effekt oder das Verhältniss:

$$\frac{\text{Nutzeffekt}}{\text{Absoluter Effekt}}$$

ist kleiner, als die Einheit

Nun kennt man aber mit ziemlicher Zuverlässigkeit den Werth dieses Verhältnisses bei verschiedenartigen, mehr oder weniger vollkommen eingerichteten Maschinen, und dadurch ist es möglich, den Nutzeffekt wenigstens annähernd zu bestimmen, indem man den absoluten Effekt mit jener Verhältnisszahl multiplizirt.

Das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und dem absoluten Effekt ist sowohl der Theorie als der Erfahrung zufolge:

1) für unterschlächtige Räder	. . . .	0·3 bis 0·4
2) „ gutconstruirte mittelschlächtige Räder	. . . .	0·5 „ 0·6
3) „ „ oberschlächtige Räder	. . . . .	0·6 „ 0·7
4) „ „ Turbinen	. . . .	0·6 „ 0·7

Man kann ferner der Erfahrung zufolge annehmen, dass für jede Pferdekraft des Nutzeffektes einer Dampfmaschine stündlich folgende Brennstoffmengen erforderlich sind:

1) für minder gut arbeitende Maschinen . . . 4—5 Kilogramm
2) » gut arbeitende Maschinen . . . . 3—4 »
3) » vorzüglich gute Construktionen . . . . 2—3 »

Mit Berücksichtigung dieser Thatsachen wird man, wenn man im Stande ist, über den Bau einer Maschine ein Urtheil zu fällen, jederzeit mit Leichtigkeit den Nutzeffekt der hydraulischen Receptoren und der Dampfmaschinen schätzungsweise bestimmen können. Hat man z. B. an einer Mahlmühle, die durch ein gut construirtes mittelschlächtiges Rad getrieben wird, durch Messung an Ort und Stelle den Wasserzufluss $= 0{\cdot}6$ Kubik-Meter pr. 1 Sekunde und das Gefäll gleich $2{\cdot}5$ Meter gefunden, so ist der absolute Effekt der Wasserkraft $= \frac{1000 \times 0{\cdot}6 \times 2{\cdot}5}{75} = 20$ Pferdekräften, und da nach obigen Angaben das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und dem absoluten Effekt $0{\cdot}5$ bis $0{\cdot}6$ beträgt, so wird man sagen dürfen: der Nutzeffekt des Rades sei $0{\cdot}5 \times 20 = 10$ bis $0{\cdot}6 \times 20 = 12$ Pferdekräfte

Wenn eine Fabrik durch eine gutconstruirte Dampfmaschine getrieben wird, die stündlich 35 Kilogramm Steinkohlen verbraucht, so wird man schätzungsweise den Nutzeffekt der Maschine auf $\frac{35}{3{\cdot}5} = 10$ Pferdekräfte anschlagen dürfen.

Wenn der Effekt bestimmt werden soll, der zum Betrieb einer noch nicht ausgeführten, sondern nur erst entworfenen Maschine nothwendig ist, kann das so eben erklärte Verfahren nicht angewendet werden, weil der absolute Effekt des Motors nicht bekannt ist. In diesem Falle ist eine Schätzung des Effekts eine sehr missliche Sache, weil es an jedem zuverlässigen Anhaltspunkt fehlt Es bleibt denn da nichts zu thun übrig, als entweder geradewegs nach dem Kraftgefühl zu schätzen oder die zu beurtheilende Maschine mit andern analogen Maschinen zu vergleichen, von denen man bereits weiss, welche Effekte sie zu ihrem Betriebe erfordern.

28) *Bestimmung der Effekte durch Messung. Brony's Bremse.* Die Bestimmung der Effekte durch Messung geschieht mit eigenen Messapparaten, die Dynamometer genannt werden. Es gibt im Allgemeinen zweierlei Arten von Dynamometern.

Vermittelst der einen Art wird der Druck bestimmt, mit welchem zwei Bestandtheile, die den Effekt übertragen, auf einander einwirken; das Produkt aus diesem Druck in die Geschwindigkeit seines Angriffspunktes gibt dann den zu messenden Effekt in Kilogramm-Metern ausgedrückt.

Vermittelst der zweiten Art von Dynamometern wird ein gewisser Widerstand gemessen, den man künstlich hervorbringt, und den man durch die Motore vermittelst der Kraftmaschine überwältigen lässt. Das Produkt aus diesem Widerstand in die Geschwindigkeit, mit welcher er überwunden wird, gibt dann den Effekt, der an der Stelle, wo die Messung vorgenommen wurde, vorhanden ist.

In diese zweite Klasse von Dynamometern gehört die von Prony erfundene Bremse, mit deren Einrichtung und Gebrauch wir uns nun beschäftigen wollen, weil dieselbe gegenwärtig am häufigsten, insbesondere zur Messung von grösseren Effekten, gebraucht wird.

Die einfachste Einrichtung der Prony'schen Bremse zeigt folgende Figur und erklärt nachstehende Beschreibung.

Es ist Fig. 8 Taf. IV. a eine Welle, an welcher die Messung des Effektes vorgenommen wird. Ihre Verbindung mit der Kraftmaschine ist vorhanden, jene mit der Arbeitsmaschine jedoch aufgehoben, und zwar entweder durch Wegnahme einer nächst folgenden Welle, oder durch Auskehrung zweier Zahnräder. Auf diese Welle ist eine gusseiserne an ihrem Umfang abgedrehte Rolle concentrisch befestigt, deren Durchmesser 4 bis 6 Mal und deren Breite 1 bis $1\frac{1}{2}$ Mal so gross ist, als der Durchmesser der Welle a. Diese Rolle b wird vermittelst zweier Schrauben f f zwischen zwei Holzstücke c und d mehr oder weniger fest eingeklemmt, wodurch an ihrem Umfang eine Reibung entsteht, die man von der Kraftmaschine überwältigen lässt, und deren Betrag gemessen wird. Zu diesem Behufe dient der Waagbalken e, an welchem eine Waagschale g angehängt ist, und der durch ein Gewicht h so balancirt wird, dass der Schwerpunkt des ganzen Apparates in die durch die Axe von a gehende Vertikallinie fällt. k k sind zwei Querbalken, welche zu verhindern haben, dass sich der Waagbalken e nicht viel von seiner horizontalen Lage entfernen kann

Um nun vermittelst dieses Apparates den Effekt zu bestimmen, den eine Kraftmaschine unter der Einwirkung des Motors bei einer gewissen Geschwindigkeit entwickelt, verfährt man auf folgende Weise.

Nachdem die Verbindung zwischen der Kraftmaschine und Arbeitsmaschine aufgehoben und der Bremsapparat in balancirten Zustand auf die mit der Kraftmaschine in Verbindung stehende Welle a angebracht worden ist, lässt man den Motor auf die Maschine einwirken, und zieht die Bremschrauben sachte so stark an, dass die Geschwindigkeit eintritt, bei welcher der Effekt bestimmt werden soll; wozu eine Sekundenuhr dient.

Während dieses Vorganges strebt die Rolle, durch die an ihrem Umfange stattfindende Reibung, den ganzen Bremsapparat nach der Richtung, nach der sie selbst geht, im Kreise mit umher zu bewegen, was zur Folge hat, dass der Waagbalken, wenn die Bewegung nach der Richtung des Pfeiles von links nach rechts erfolgt, an dem obern Balken k zuerst anschlägt, und dann im angedrückten Zustand mit demselben in Berührung bleibt.

Legt man nun allmählig und behutsam auf die Waagschale so viel Gewichte, dass der Waagbalken von dem obern Querbalken k weggezogen wird, und eine zwischen beiden Querbalken k frei schwebende Stellung annimmt, so ist klar, dass dieses Gewicht mit der am Umfange der Rolle stattfindenden Reibung (die theils durch das Anziehen der Schrauben, theils durch das Gewicht des Bremsapparates hervorgebracht wird) in's Gleichgewicht getreten ist. Nennt man nun G das auf die Waagschale gelegte Gewicht, R den Halbmesser der Rolle, und L den Horizontalabstand des Aufhängspunktes der Waagschale von der Axe der Welle, so ist nach statischen Gesetzen der Betrag jener Reibung

$$G \frac{L}{R}$$

Wenn nun noch, während sich der Hebel im frei schwebenden Zustande befindet, vermittelst einer Sekundenuhr die Anzahl n der Umdrehungen gezählt werden, die die Welle in einer Minute macht, so kann man daraus und aus dem Halbmesser der Rolle die Umfangsgeschwindigkeit v der Rolle bestimmen. Es ist nämlich:

$$v = \frac{2 R \pi n}{60}$$

Da nun obiger Reibungswiderstand mit dieser Geschwindigkeit v überwunden wird, so ist offenbar der Effekt, den die Kraftmaschine entwickelt, gleich dem Produkte aus jenem Widerstand in diese Geschwindigkeit, ist demnach gleich:

$$G \frac{L}{R} v$$

Allein es ist auch $\frac{L v}{R}$ die Geschwindigkeit V, mit welcher sich der Aufhängspunkt der Waagschale im Kreise herum bewegen würde, wenn der Waagbalken mit der Bremsrolle fest verbunden wäre; der Nutzeffekt E_n der Kraftmaschine ist demnach auch:

$$E_n = G V$$

d. h. der Nutzeffekt ist gleich dem Produkt aus dem auf die Waagschale gelegten, dem Reibungswiderstand das Gleichgewicht haltenden Gewichte in der Geschwindigkeit, mit welcher sich der Aufhängspunkt der Waagschale im Kreise herum bewegen würde, wenn der Waagbalken mit der Rolle fest verbunden wäre.

Wenn man v oder V durch n ausdrückt, hat man auch:

$$E_n = \frac{2\pi}{60} L n G,$$

woraus zu ersehen ist, dass dieser Effekt gar nicht von dem Halbmesser der Rolle abhängt.

Misst man auf ähnliche Weise, wie so eben beschrieben wurde, die Effekte, welche die Kraftmaschine unter verschiedenen Umständen, und namentlich bei schwachen und starken Einwirkungen des Motors, und für jede Einwirkungen bei verschiedenen Geschwindigkeiten entwickelt, so erhält man eine ganze Reihe von thatsächlichen Bestimmungen über die Leistungen der Maschine, und wenn diese Leistungen mit dem bei jedem einzelnen Versuch vorhanden gewesenen absoluten Effekt des Motors verglichen werden, so erfährt man auch, unter welchen Umständen diese Leistungen günstig und unter welchen sie ungünstig sind; auch kann man auf diesem Wege diejenigen Umstände kennen lernen, bei welchen die Leistungen der Maschine am günstigsten ausfallen, d. h. bei welchen das Verhältniss zwischen dem mit der Bremse gemessenen Nutzeffekt und dem absoluten Effekt des Motors den grössten Werth erreicht.

Auf diese Weise sind mit den Dynamometern von Prony sehr schätzenswerthe Erfahrungen gesammelt worden, und in neuerer Zeit werden insbesondere die Turbinen auf diesem Wege geprüft.

Wenn man durch diese Versuche zu verlässlichen Resultaten gelangen will, muss jedoch der Apparat in geeigneter Weise gehandhabt werden. Zunächst darf die Rolle nicht zu klein sein, weil sonst die Pressung zwischen den Bremsbalken und der Rolle so heftig sein müsste, dass nothwendig eine Erhitzung eintreten würde, bei der das Holz sogar zu brennen anfienge. Sodann ist nothwendig, dass der Umfang der Rolle sehr glatt abgedreht, und dass sie sehr genau concentrisch mit der Welle verbunden werde, denn wenn diesen Anforderungen nicht entsprochen wird, bringt man es nicht dahin, dass der Hebel ruhig in horizontaler Stellung verbleibt, oder nur sanft auf und nieder oscillirt. Weiters ist auch nothwendig, dass während des Versuches fortwährend Seifenwasser zwischen die sich reibenden Körper geleitet werde, theils um Erhitzungen zu verhindern, theils um eine weiche sanfte Bewegung zu veranlassen. Zu diesem Endzweck ist es auch gut, wenn man zuerst, bevor die Versuche vorgenommen werden, die inneren Flächen der Bremshölzer verkohlen lässt, was leicht geschehen kann, wenn man die Bremsschrauben stark anzieht, kein Seifenwasser zuleitet, und dann die Rolle so lange laufen lässt, bis die Hölzer zu rauchen anfangen. Auf diese Art erhalten die reibenden Holzflächen eine äusserst zarte sammtartige Beschaffenheit.

Wenn es sich um die Messung von hydraulischen Kraftmaschinen handelt, so verursacht meistens die Messung der Wassermenge zur Bestimmung des absoluten Effektes sehr viele praktische Schwierigkeiten, von denen jedoch hier nicht ausführlicher gesprochen werden kann, indem dies ein Gegenstand der Hydraulik ist.

Das Vorgetragene wird wohl genügen, um darnach die Möglichkeit der Effektbestimmung durch wirkliche Messung zu begreifen, und somit ist der Zweck, den wir uns vorgesetzt haben, erreicht.

29) ***Bestimmung des Nutzeffektes der Kraftmaschinen und des Betriebseffektes der Arbeitsmaschinen durch Rechnung.*** Die Berechnung des Nutzeffektes einer Kraftmaschine kann auf zweierlei Art geschehen.

Die erste Art gründet sich auf den Satz: dass der Nutzeffekt einer Kraftmaschine gleich ist der Differenz aus der Summe aller Effekte, die der Motor produzirt, indem er auf die Receptoren gewisse zu Gunsten der Bewegung wirkende Pressungen ausübt, und der Summe der Effekte, die durch Gegenkräfte, Widerstände, Formänderungen, Massenbeschleunigungen, Stösse und Vibrationen verloren gehen.

Dieser Methode muss man sich bedienen, wenn der absolute Effekt des Motors mit mathematischer Schärfe nicht angegeben werden kann, wie dies z. B. bei den Wirkungen des Dampfes der Fall ist.

Die zweite Methode der Effektbestimmung setzt voraus, dass die im Motor enthaltenen absoluten Effekte vor und nach dessen Einwirkung auf die Maschine genau bestimmt werden können, und beruht auf dem Satz: dass der Nutzeffekt einer Maschine gefunden wird, wenn man von dem absoluten Effekt, der in dem Motor vor seiner Einwirkung auf die Maschine enthalten ist, alle Effekte abzieht, die für die Wirkung auf die Maschine verloren gehen. Zu diesen Verlusten sind jene zu rechnen, die durch Stösse, Vibrationen, Formänderungen, Reibungen und durch Massenbeschleunigungen entstehen; insbesondere gehört auch dazu der absolute Effekt, welcher in dem Motor enthalten ist, wenn er die Maschine verlässt.

Diese zweite Methode eignet sich vorzugsweise für die Berechnung der hydraulischen Kraftmaschinen, der Wasserräder, Turbinen, Wassersäulenmaschinen etc.

Um den Nutzeffekt zu berechnen, der zum Betrieb irgend einer Arbeitsmaschine z. B. zum Betrieb eines Pumpwerkes oder Pochwerkes nothwendig ist, berechnet man zuerst den Effekt, welcher dem Hauptwiderstand, d. h. demjenigen Widerstand entspricht, durch dessen Ueberwindung ein nützliches Resultat hervorgeht, berechnet hierauf auch alle Effekte, die durch Reibungen, Stösse, Vibrationen, Formänderungen und Massenbeschleunigungen erschöpft werden. Die Summe aller dieser Effekte gibt dann den zu berechnenden Totaleffekt.

Wenn z. B. der Betriebseffekt für ein Pochwerk berechnet werden soll, muss man berechnen: 1) den Effekt, der der Erhebung der Gewichte der Stempel entspricht; 2) den Effektverlust, der durch den stossweisen Angriff der Stempel durch den Daumen entspricht; 3) den Effekt wegen Beschleunigung der Massen der Stempel, indem diese in dem Moment, wenn sie von dem Hebedaumen verlassen werden, eine gewisse Geschwindigkeit besitzen, die demnach nicht nur gehoben, sondern deren Massen auch beschleunigt werden müssen; 4) den Effektverlust, welcher durch die Reibung der Stempel auf den Daumen und an den Führungen entstehen; endlich müssen noch berechnet werden 5) die Effektverluste, welche durch die Reibungen an den Zapfen der Daumenwelle verursacht werden.

Als zweites Beispiel möge ein Pumpwerk dienen, vermittelst welchem Wasser auf eine grössere Entfernung fortgeleitet und auch auf eine gewisse Höhe gehoben werden soll. Hier besteht der Totalbetriebseffekt aus folgenden Partialeffekten: 1) Aus dem Effekt zur Hebung des Wassers. 2) Zur Beschleunigung des gehobenen Wassers, indem das in jeder Sekunde gehobene Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit, also mit einer gewissen lebendigen Kraft an seinem Bestimmungsort ankommt. 3) Zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes, der an den inneren Wänden der Leitungsröhren der Bewegung des Wassers entgegenwirkt. 4) Zur Ueberwältigung der verschiedenen Reibungen, die in der Pumpe und an der Transmission vorkommen. 5) Den Effektverlust, welcher durch die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen entsteht, die das Wasser in seiner Bewegung durch die Ventilöffnungen und überhaupt an allen Orten erleidet, wo plötzlich Querschnittsänderungen vorhanden sind.

Die Schwierigkeiten, welchen man in der Berechnung der Totaleffekte begegnet, liegen immer in der Bestimmung der Partialeffekte, aus denen jene zusammengesetzt sind, und richten sich nach dem Genauigkeitsgrad, der von der Rechnung gefordert wird. Es ist nicht für alle Zwecke eine ganz genaue Kenntniss der Effekte nothwendig, wie schon der Umstand beweist, dass die complizirtesten Maschinen und umfassendsten Maschinenanlagen bisher ohne complizirte Rechnungen zu Stande gebracht wurden, allein dessen ungeachtet ist doch eine auf den Fundamenten der Mechanik beruhende Einsicht in alle Verhältnisse und Umstände, die auf die Effekte Einfluss haben, sowohl für eine scharfe Kritik einer bereits bestehenden Maschine, so wie auch für die Auffindung der vortheilhaftesten Construktionsverhältnisse einer neu zu erbauenden Maschine von sehr grossem Werth.

Das Verfahren zur Berechnung der Partialeffekte ist nun im Allgemeinen folgendes:

Wenn eine Kraft mit unveränderlicher Intensität wirkt, und wenn ihr Angriffspunkt nach der Richtung der Kraft mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortrückt, findet man den Effekt durch Multiplikation der unveränderlichen Kraft mit der unveränderlichen Geschwindigkeit.

Ist die Intensität einer Kraft und die Bewegung ihres Angriffspunktes periodisch veränderlich, so findet man den mittleren Effekt, welchen sie entwickelt, wenn man die Wirkungsgrösse berechnet, die sie während einer Periode entwickelt, und diese dann durch die Dauer der Periode dividirt. Auch findet man diesen mittleren Effekt, wenn man den mittleren Werth der Kraft mit dem mittleren Werth der Geschwindigkeit multiplizirt. Es wird aber der mittlere Werth einer periodisch veränderlichen Kraft gefunden, wenn man die Wirkungsgrösse, welche sie in der Dauer einer Periode entwickelt, durch den Weg dividirt, welchen der Angriffspunkt während einer Periode, nach der Richtung der Kraft geschätzt, zurücklegt, ferner die mittlere Geschwindigkeit, wenn der zuletzt genannte Weg durch die Dauer der Periode dividirt wird.

Der mittlere Effekt einer unregelmässig veränderlichen Kraft wird gefunden, wenn man die Wirkungsgrösse, welche sie in der ganzen Bewegungsdauer entwickelt, durch diese Bewegungsdauer dividirt.

Auf ähnliche Weise hat man auch zu verfahren, um die Wirkungsgrössen zu berechnen, die durch constante oder veränderliche Widerstände consumirt werden.

Die durch Stösse und Vibrationen entstehenden Effektverluste werden gefunden, wenn man die lebendigen Kräfte, die in irgend einer längeren Zeit für die Wirkung verloren gehen, durch diese Zeit selbst dividirt.

Das Nähere über diese Berechnung wird in den nächstfolgenden Nummern erläutert.

30) *Effektverluste durch Reibung.* Um den Effekt zu bestimmen, den die Ueberwindung einer Reibung erfordert, muss man zunächst den Druck kennen, der an den Berührungsflächen der sich reibenden Körper statt findet. Ist dieser Druck bestimmt, so gibt das Produkt aus demselben in den Reibungscoeffizienten, der den Materialien der beiden Körper und der Beschaffenheit ihrer Berührungsflächen entspricht, den Widerstand, der dem Aufeinanderhingleiten der Körper entgegenwirkt. Und wenn man diesen Widerstand mit der relativen Geschwindigkeit der Körper gegen einander multiplizirt, so erhält man den in Kilogramm-Metern ausgedrückten Effekt. Manchmal ist der die Reibung bewirkende Druck unmittelbar bekannt, oder kann leicht durch Rechnung gefunden werden. Oft aber kann jener Druck erst durch umständliche Rechnungen bestimmt werden, wie dies namentlich der Fall ist, wenn man die Reibungswiderstände berechnen will, die in den Berührungspunkten einer zusammenhängenden Reihenfolge von Maschinenbestandtheilen statt finden,

wenn auf die Endglieder der Reihe Kräfte und Widerstände einwirken, die sich das Gleichgewicht halten.

Wenn vorauszusehen ist, dass die sämmtlichen Reibungswiderstände, im Vergleich zur Kraft K, die auf das erste Glied der Reihe einwirkt, von keinem Belang sind, findet man annähernd irgend eine von jenen Pressungen, wenn man diese Kraft K mit der durch geometrische Betrachtungen leicht zu findenden Verhältnisszahl multiplizirt, welche angibt, wie viel Mal sich der Angriffspunkt von K schneller bewegt, als die zu bestimmende Pressung; und wenn auf diese Weise sämmtliche Pressungen annähernd bestimmt sind, so unterliegt die Berechnung der einzelnen Reibungswiderstände keiner weiteren Schwierigkeit.

Wenn aber die zu berechnenden Reibungswiderstände im Vergleich zur Kraft K nicht unbedeutend sind, oder wenn man durch die Rechnung den höchsten Grad von Genauigkeit erreichen will, so muss man sich dazu bequemen, die Gleichgewichts- oder sogar die Bewegungsgleichungen für jedes einzelne Maschinenglied, mit Berücksichtigung aller auf dasselbe einwirkenden Kräfte anzuschreiben, und aus denselben durch geschickte analytische Operationen die zwischen jenen zwei Maschinenbestandtheilen herrschenden Pressungen herauszusuchen. Ich sagte, dass man entweder die Gleichgewichtsgleichungen oder die Bewegungsgleichungen für jedes einzelne Maschinenglied aufstellen müsse; dies bedarf einer näheren Erläuterung.

Wenn alle Bestandtheile, deren wechselseitige Pressungen bestimmt werden sollen, entweder geradlinig fortschreiten, oder sich um freie Axen (in Bezug auf welche die Centrifugalkräfte unter sich im Gleichgewicht sind) gleichförmig drehen, so haben die Massen als solche keinen Einfluss auf die während der Bewegung statt findenden Pressungen, und die Bestimmung dieser letzteren kann in diesem Falle nach rein statischen Gesetzen geschehen.

Wenn dagegen die Bewegung der Bestandtheile ungleichförmig erfolgt, und wenn überdies drehende Bewegungen um nicht freie Axen vorkommen, so muss man, um die zwischen den Bestandtheilen herrschenden Pressungen zu bestimmen, nicht nur die äusseren auf dieselben einwirkenden Kräfte, sondern man muss auch die Centrifugalkräfte und die zur Beschleunigung und Verzögerung der Massen erforderlichen Kräfte berücksichtigen, oder mit andern Worten, man muss in diesem Falle die Pressungen nach dynamischen Gesetzen berechnen.

Die Massen haben ferner noch in dem Falle Einfluss auf die zwischen den Körpern eintretenden Pressungen, wenn während der Bewegung der Maschine Stösse vorkommen. Treten diese nur nach längeren Zeitpausen ein, so haben sie während ihrer äusserst kurzen Dauer fast keinen Einfluss auf den Reibungseffekt erfolgen sie hingegen rasch hinter einander, wie bei einem Pochwerk oder Hammerwerk, so wird dadurch der mittlere Werth der Pressungen zwischen den Maschinenbestandtheilen und mithin auch der Reibungseffekt ansehnlich vergrössert.

Wenn man beurtheilen will, ob irgend ein Reibungseffekt von Bedeutung ist, darf man nicht vergessen, dass derselbe durch das Produkt dreier Faktoren (Pressung, Reibungscoeffizient, Geschwindigkeit) gemessen wird. Der Reibungswiderstand kann vielleicht sehr gross sein, und doch wird der Reibungseffekt von keinem Belang sein, wenn die Geschwindigkeit sehr klein ist. So ist z. B. der Reibungswiderstand an dem Balancierzapfen einer Dampfmaschine und der Reibungswiderstand des Steuerungsschiebers sehr beträchtlich, weil aber diese Widerstände nur mit kleiner Geschwindigkeit überwunden werden, beträgt der Effekt nicht viel.

Im Allgemeinen würde man sich die aus der Reibung entspringenden Effektverluste — da sie doch in der Regel nicht mehr als $^1/_{10}$ oder höchstens $^1/_5$ des Nutzeffekts betragen — gern gefallen lassen, wenn daraus nur keine Abnützungen entstünden; diese sind aber bei jeder Maschine und insbesondere bei solchen, die nach ihrer Bestimmung sehr genaue und sanfte Bewegungen machen sollen, höchst fatal, weil sie die Genauigkeit und Präzission des Zusammenwirkens aller Theile — wovon die Qualität und oft auch die Quantität der Produktion abhängt — vermindern, und oft nach kurzer Zeit in den Maschinen einen Zustand herbeiführen, in dem sie unbrauchbar werden und fast werthlos sind, denn eine stark abgenutzte Maschine gilt nicht mehr als altes Eisen.

Die Mittel, wodurch man sich am besten gegen diese schädlichen Abnutzungen schützen hann, sind bereits in dem Abschnitt, der von der Reibung handelt, angegeben worden. Sie sind nämlich, um sie kurz zu wiederholen: 1) Reinhaltung der Theile; 2) sorgfältige Beaufsichtigung und Behandlung; 3) fleissiges und reichliches Einfetten mit Oel; 4) hinreichend grosse Berührungsflächen zwischen den sich reibenden Körpern.

Aber so wie jedes Uebel von etwas Gutem begleitet wird, so ist es auch hier in so fern der Fall, als jede Maschine nicht gleich nach ihrer Aufstellung und ersten Ingangsetzung, sondern erst nach einiger Zeit, wenn sich die »laufenden« Theile durch die Reibung schön geglättet haben (sich eingelaufen haben) am besten arbeitet.

31) *Effektverluste durch Formänderungen und den sie begleitenden Vibrationen.* Wenn man sich eine richtige Vorstellung machen will, wie die Kräfte durch alle Theile einer Maschine hindurch wirken, und von einem Punkt zum andern sich fortpflanzen, darf man die Körper, aus denen sie besteht, nicht als träge und absolute starre Massen betrachten, sondern man muss sich dieselben als das vorstellen, was sie

wirklich sind; nämlich als Systeme von trägen Atomen und Molekulen, die durch anziehende und abstossende Kräfte gegenseitig auf einander wirken, und muss sich auch erinnern, dass in einem Körper, in welchem vollkommene Ruhe herrscht, die Anordnung und Gruppirung der Atome und Molekule als das Resultat eines stabilen Gleichgewichtszustandes der Molekularkräfte zu betrachten ist.

Wenn nun auf einen einzelnen, oder auf eine zusammenhängende Reihenfolge von solchen Molekularkörpern äussere Kräfte und Widerstände einwirken, wird zunächst das Gleichgewicht des natürlichen Zustandes gestört und es entsteht, je nach der Beschaffenheit der äusseren Einwirkungen, entweder ein neuer Gleichgewichtszustand zwischen den äusseren und inneren Kräften, oder es tritt eine Bewegung ein, die sich allmählig einem Beharrungszustand nähert, in welchem periodisch wiederkehrende oder unregelmässige Ortsveränderungen und Schwingungen der Molekule um ihre Gleichgewichtspositionen statt finden.

Um den Einfluss der Elastizitätsverhältnisse auf die Effekte und auf die Bewegung einer Maschine während ihres Anlaufes, Fortlaufes und Endlaufes kennen zu lernen, muss man zuvörderst die Wirkungsgrössen beachten, die erforderlich sind, um einen elastischen Körper aus einem ruhigen Zustand in einen bewegten, oder aus einem bewegten Zustand gewisser Art in einen bewegten Zustand anderer Art zu versetzen.

Die Bestimmung dieser Wirkungsgrösse beruht auf einigen Sätzen, die wir zunächst erklären müssen.

Wenn sich ein in einem schwingenden Zustand befindlicher Körper frei im Raume bewegt, kann die absolute Geschwindigkeit, mit welcher sich irgend ein Massenpunkt des Körpers in einem bestimmten Zeitmoment bewegt, als die Resultirende dreier Geschwindigkeiten angesehen werden, und diese sind: 1) die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Schwerpunkt der in jenem Zeitmoment vorhandenen Körperform bewegt; 2) die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich der Massenpunkt in dem betreffenden Zeitmoment um den Schwerpunkt bewegen würde, wenn der Körper in jenem Moment plötzlich erstarrte; 3) die Vibrationsgeschwindigkeit, d. h. die relative Geschwindigkeit des Massenpunktes gegen die in jenem Zeitmoment vorhandene Körperform.

Nennen wir nun 1) die Resultirende aus den beiden erstern der genannten Geschwindigkeiten: die Geschwindigkeit des Massenpunktes in der gemeinsamen Bewegung aller Punkte des Körpers; 2) die Summe der lebendigen Kräfte, welche in allen Punkten des Körpers vermöge ihrer gemeinsamen Bewegung enthalten ist: die lebendige Kraft der gemeinsamen Bewegung; 3) die Summe der lebendigen Kräfte, welche in allen Punkten des Körpers vermöge ihrer Vibrationsgeschwindigkeiten enthalten sind: die lebendige Kraft der Vibration; 4) die algebraische Summe der

Wirkungsgrössen, welche die zwischen je zwei Massenpunkten wirkenden Molekularkräfte entwickeln, indem bei dem Uebergang des Körpers aus einem Zustand in einen andern die Distanz je zweier Molokule sich ändert: die Wirkungsgrösse, welche der Formänderung des Körpers entspricht, so können wir nun folgende Sätze aussprechen:

1) Die lebendige Kraft eines Körpers, der sich im schwingenden Zustand frei im Raum bewegt, ist zusammengesetzt, aus der lebendigen Kraft der gemeinsamen Bewegung aller Punkte des Körpers, und aus der lebendigen Kraft, die der Vibration des Körpers entspricht.

2) Die totale Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um einen elastischen Körper aus einem ruhenden in einen bewegten Zustand zu versetzen, ist zusammengesetzt, aus der lebendigen Kraft, die der gemeinsamen Bewegung, aus der lebendigen Kraft, die der vibrirenden Bewegung und aus der Wirkungsgrösse die der Formänderung entspricht.

3) Die totale Wirkungsgrösse, die erforderlich ist, um einen elastischen Körper aus einem bewegten Zustand gewisser Art in einen bewegten Zustand anderer Art zu versetzen, besteht aus der Differenz der lebendigen Kräfte der in beiden Zuständen vorhandenen gemeinsamen Bewegungen, aus der Differenz der lebendigen Kräfte der beiden Vibrationszustände und aus der Wirkungsgrösse, die der Formänderung entspricht.

Wir wollen nun weiter untersuchen, unter welchen Umständen die verschiedenen Partialwirkungen gross oder klein ausfallen.

Die lebendige Kraft der gemeinsamen Bewegung richtet sich vorzugsweise nach dem Verhältniss zwischen den äussern Kräften und Widerständen, und nach der Dauer ihrer Einwirkung. Wirken die Kräfte durch längere Zeit weit stärker, als zur Ueberwindung aller äusseren Widerstände nothwendig ist, so erhält die lebendige Kraft der gemeinsamen Bewegung einen bedeutenden Werth. Halten sich die äusseren Kräfte und Widerstände durch längere Zeit das Gleichgewicht, so ändert sich in dieser Zeit die lebendige Kraft der gemeinsamen Bewegung nicht. Wirken die Kräfte durch längere Zeit schwächer, als zur Ueberwindung der äussern Widerstände erforderlich ist, so nimmt die lebendige Kraft der gemeinsamen Bewegung ab.

Die lebendige Kraft der vibrirenden Bewegung richtet sich vorzugsweise nach der Rapidität, mit welcher sich die Intensitäten der Kräfte und Widerstände ändern; dann aber auch noch nach der Ausdehnsamkeit des Materials, aus welchem ein Körper besteht. Bleiben die Intensitäten der Kräfte und Widerstände durch längere Zeit unverändert, so entsteht keine Aenderung des Vibrationszustandes; treten dagegen in einzelnen Augenblicken heftige Pressungen ein, so entstehen dadurch rasche

Vibrationsänderungen, wodurch die lebendige Kraft der vibrirenden Bewegung wächst.

Die Wirkungsgrössen, welche den Formänderungen entsprechen, richten sich theils nach der Intensität der äusseren Kräfte, theils nach den Dimensionen des Körpers, theils endlich nach der Ausdehnsamkeit des Materials, aus welchem er besteht. Wenn auf einen Körper starke äussere Kräfte einwirken, so werden diese eine ansehnliche Distanzänderung in den Molekulen hervorbringen; die diesen Veränderungen entsprechenden Wirkungsgrössen werden daher auch einen beträchtlichen Werth haben. Die Form- oder Volumensänderung der Körper und die denselben entsprechenden Wirkungsgrössen werden ferner bei Körpern, die eine grosse Länge und einen kleinen Querschnitt haben, gross, und bei kurzen und dicken Körpern klein ausfallen. Die Form- und Volumensänderungen werden endlich bei sehr ausdehnsamen Materialien ansehnlich, bei sehr starren Materialien von geringem Belang sein.

So findet man z. B. Nr. 43 I. Theil für die Wirkungsgrösse, die erforderlich ist, um einen Stab so stark auszudehnen, bis die inneren Molekularkräfte mit einer ausdehnenden Kraft P in's Gleichgewicht treten, den Werth

$$W = \frac{1}{2} \frac{l}{\Omega} \frac{P^2}{\varepsilon}$$

wobei bedeutet: l die Länge, Ω den Querschnitt des Stabes, P die äussere Kraft, ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht. Diese Wirkungsgrösse ist demnach der Länge des Stabes und dem Quadrat der ausdehnenden Kraft direkt, dagegen dem Querschnitt des Stabes, so wie dem Modulus der Elastizität verkehrt proportional.

Aehnliche Gesetze findet man für die Zusammendrückung, Biegung und Drehung von stabförmigen Körpern.

Besonders verdient noch hervorgehoben zu werden, dass die in Rede stehende Wirkungsgrösse in zwei Fällen gleich Null ist. Dies ist nämlich der Fall: 1) wenn die äusseren auf den Körper einwirkenden Kräfte durch lange Zeit sich das Gleichgewicht halten, so dass in der ganzen Zeitdauer keine Form- oder Volumensänderung eintreten kann; und 2) wenn ein Körper innerhalb zweier Zeitmomente, in Bezug auf welche die Wirkungsgrössen zu bestimmen sind, einmal oder mehrere Male ausgedehnt und comprimirt, hin und her gebogen, oder hin und her gedreht wird, und wenn dabei zuletzt die relative Lage der Atome gegen einander genau die gleiche wird, die anfangs vorhanden war.

Nach diesen Erklärungen ist es nun nicht mehr schwierig einzusehen, welche Nachtheile aus der Elastizität der Materialien für das Spiel der

Maschinen entstehen, unter welchen Umständen diese Nachtheile von Bedeutung sind, und durch welche Mittel man sich am besten gegen dieselben schützen kann. Diese Nachtheile sind: 1) ungenaue Bewegung; 2) Abnützung der Maschine; 3) Effektverluste, und sie sollen nun ausführlicher erklärt werden.

Wenn der geometrische Zusammenhang aller Theile einer Maschine angeordnet wird, benimmt man sich dabei immer so, wie wenn das Construktionsmaterial absolut starr, also gar keiner Formänderung fähig wäre. Der geometrische Zusammenhang kann daher nicht mehr ganz seinem Zwecke entsprechend sein, wenn in Folge von Krafteinwirkungen, Verlängerungen oder Verkürzungen oder Formänderungen in den Maschinenbestandtheilen eintreten. In dieser Hinsicht verdienen die Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand jenen mit periodischem Beharrungszustand vorgezogen zu werden. In beiden Arten von Maschinen haben die Bestandtheile im Beharrungszustand nicht mehr ihre natürliche Grösse und Form; ihr geometrischer Zusammenhang ist daher von jenem verschieden, den man bei der Construktion realisiren wollte; allein da im Beharrungszustand die Kräfte und Widerstände bei den Maschinen der ersten Art fortwährend, bei den Maschinen der zweiten Art aber nur in einzelnen Zeitmomenten im Gleichgewicht sind, so folgt daraus, mit Berücksichtigung der vorhergehenden Bemerkungen, dass die Grössen und Formen der Bestandtheile, so wie auch ihr geometrischer Zusammenhang bei den Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand unveränderlich bleiben, bei den Maschinen mit periodischem Beharrungszustand hingegen fortwährenden Veränderungen unterliegen.

Gegen diese nachtheiligen Form- und Grössenveränderungen kann man sich am besten durch möglichst starres Construktionsmaterial (Eisen, Stahl) und durch starke und zweckmässig gewählte Querschnitte schützen.

In Betreff der Effektverluste, die aus der Elastizität des Construktionsmaterials entstehen, scheint es bei oberflächlicher Betrachtung, dass die Grössen- und Formänderungen der Theile sehr nachtheilig sein müssten; geht man aber in die Sache genauer ein, so überzeugt man sich bald, dass durch die Distanzänderungen der Molekule keine beträchtlichen Wirkungsverluste entstehen können.

Bei den Maschinen mit gleichförmigem Fortlauf erleiden zwar alle Bestandtheile während des Anlaufes gewisse Veränderungen, die auf Kosten des Motors hervorgebracht werden; ist aber einmal der Beharrungszustand eingetreten, und sind alle Verbindungen sehr vollkommen hergestellt, so ändern sich ja die Formen der Theile nicht mehr. Abgesehen von der Vibration, die durch Stösse entstehen können (von welchen später die Rede sein wird), verursacht also die Elastizität des Materials bei einem gleichförmigen Beharrungszustand keinen Effektverlust.

Bei den Maschinen mit periodischem Beharrungszustande ändert sich die Grösse und Form der Bestandtheile nicht nur während des Anlaufes, sondern auch während des Fortlaufes ohne Unterbrechung; jedoch nicht immer in dem gleichen Sinn, sondern die Körper werden abwechselnd ausgedehnt und zusammengepresst, hin und her gebogen, hin und her gewunden. Nun wird aber bei jeder Wiederherstellung einer Form durch die innern Molekularkräfte immer wiederum eine eben so grosse Wirkungsgrösse produzirt, als durch die Formänderung consumirt wurde; man sieht also, dass durch diese periodisch wiederkehrenden Distanzänderungen der Molekule keine beträchtlichen Wirkungsgrössen erschöpft werden können.

Wenn aber auch diese aus der Formänderung der Theile möglicherweise entstehenden Effektverluste von keinem Belang sind, so ist es doch gut, sich gegen dieselben zu schützen, und dies erreicht man wiederum durch Anwendung eines starren Construktionsmaterials, und durch starke und zweckmässig geformte Querschnitte.

Sehr nachtheilig in mehrfacher Hinsicht sind nun die Vibrationen, welche durch Stösse oder durch rasche Formänderungen der Bestandtheile hervorgerufen werden. Zunächst wollen wir nur von den Vibrationen sprechen, die durch rasche Krafteinwirkungen entstehen, und nicht von jenen, die durch Massenstösse hervorgerufen werden.

Bei jeder raschen Aenderung der Intensität oder der Richtung einer Kraft und insbesondere, wenn die Intensität einer Kraft plötzlich nachlässt oder ganz verschwindet, entstehen nothwendig Molekularerschütterungen, indem die dadurch frei werdenden zwischen je zwei Molekulen wirkenden Molekularkräfte die ungemein kleinen Massen der Molekule sehr rasch beschleunigen, was zur Folge hat, dass sie in heftige Schwingungen um ihre neuen Gleichgewichtspositionen gerathen. Solche Schwingungen müssen z B. nach jedem Kolbenschub einer Dampfmaschine in den hin und hergehenden Massen eintreten. Während der Kolben nieder geht, ist die Kolbenstange und Schubstange ausgedehnt, der Balancier nach abwärts und seine Axe nach aufwärts gebogen; dieser Zustand ändert sich aber plötzlich, wenn der Kolben das Ende seines Niederganges erreicht hat, indem der Dampfdruck, der bis dahin oberhalb des Kolbens niederwärts gedrückt hat, verschwindet, und dafür unterhalb des Kolbens ein nach aufwärts wirkender Druck eintritt, was zur Folge hat, dass durch die innern Molekularkräfte in Verbindung mit dem nun nach aufwärts wirkenden Dampfdruck sämmtliche Massentheilchen der genannten Körper mit äusserst rapider Beschleunigung nach ihren natürlichen Gleichgewichtspositionen hingeschnellt werden, daselbst angekommen aber nicht verharren, sondern theils vermöge ihrer Trägheit, theils durch den nach aufwärts wirkenden Dampfdruck getrieben, ihre Wege weiter fortsetzen, bis zuletzt zwischen den innern Molekularkräften und dem nach aufwärts wirkenden Dampfdruck ein mittlerer Gleichgewichtszustand eintritt, in welchem die Kolbenstange und Schubstange comprimirt sind, der Balancier nach aufwärts gebogen ist, und sämmtliche Massentheilchen in heftigen Schwingungen um ihre Gleichgewichtspositionen sich befinden.

Die auf diese Weise entstehenden Vibrationen pflanzen sich durch die Maschine fort, gehen zum Theil von der Oberfläche der Bestandtheile aus in die Luft, zum Theil durch die Maschinengestelle, Mauerwerke und Fundamente in den Erdboden über, um nie wieder in die Maschine zurückzukehren. Es ist also klar, dass die diesen Vibrationen entsprechenden lebendigen Kräfte für die Thätigkeit der Maschine verloren gehen.

Auch wegen dieses Umstandes sind wiederum die Maschinen mit gleichförmigem Beharrungszustand jenen mit periodischem Fortlauf vorzuziehen; denn bei den erstern treten im Beharrungszustand gar keine, bei den letztern dagegen periodisch wiederkehrende Formänderungen ein, die eben die Ursachen jener Vibrationen sind.

Ausserdem, dass diese Vibrationen Effektverluste verursachen, sind sie noch überdies für die so wichtige Stetigkeit der Verbindung aller Theile einer Maschine höchst nachtheilig; denn bei dem Uebergang einer jeden Vibrationswelle aus einem Maschinenbestandtheil in den nächsten werden die Verbindungen derselben gelockert, die Berührungsflächen verletzt, und so kommt es denn, dass mit der Zeit die Stetigkeit des geometrischen Zusammenhangs immer mehr und mehr gestört wird, dass die Kraft erschöpfenden Vibrationen und Reibungswiderstände mehr und mehr wachsen, und dass endlich in den Werkzeugen eine unsichere, zitternde oder stossende Bewegung eintritt, die in den meisten Fällen für den Arbeitsprozess so nachtheilig wird, dass sowohl die Qualität als auch Quantität der Produkte der Maschine in hohem Grade leidet.

Um sich gegen diese Vibrationen zu schützen, hat man bei dem Entwurf einer Maschine dreierlei zu beachten. Man muss erstens für alle Bestandtheile ein möglichst starres Construktionsmaterial annehmen; muss ferner zweitens allen unbeweglichen, so wie auch den rotirenden Bestandtheilen starke und zweckmässig geformte Querschnitte geben, muss sich aber drittens hüten, die Querschnitte der hin und her gehenden Bestandtheile stärker zu machen, als es hinsichtlich der Festigkeit absolut nothwendig ist; denn je schwächer diese Theile gehalten werden können, desto geringer sind auch die Erschütterungen, welche durch die abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen dieser Massen hervorgerufen werden.

Nach diesen Betrachtungen über den Einfluss der Elastizität des Construktionsmaterials wird man wohl einsehen, dass von einer Berechnung der Effektverluste, die durch Vibrationen entstehen können, nicht die Rede sein kann, indem hierzu die raffinirtesten Mittel der Analysis nicht hinreichen.

Glücklicher Weise ist es für den praktischen Zweck des Maschinenbaues genügend, zu wissen, dass solche Verluste stattfinden, durch welche Umstände sie entstehen, unter welchen Verhältnissen sie von Belang sind, und durch welche Mittel man sich gegen den schädlichen Einfluss derselben schützen kann; und für diesen Zweck dürften die gegebenen Erläuterungen genügend sein.

32) *Effektverlust durch Stösse.* Nah verwandt mit den Erscheinungen, die durch rasch wechselnde Pressungen eintreten, sind diejenigen, welche in Folge einer stossweisen Wechselwirkung zweier Körper entstehen. Auch dabei werden Formänderungen und Vibrationen hervorgebracht; die ersteren erstrecken sich aber in der Regel nicht auf die ganze Ausdehnung des Körpers, sondern nur ganz lokal auf die Umgebung der Stosspunkte; die letztern dagegen sind weit heftiger, als in dem Fall, wenn sie durch rasch wechselnde Pressungen entstehen.

In der elementaren Behandlung der Lehre vom Stoss haben wir zwar gefunden, dass beim Stoss vollkommen elastischer Körper kein Verlust an lebendiger Kraft entstehe; allein dieses Resultat wurde unter den Voraussetzungen gefunden: 1) dass die Massentheilchen der Körper nach dem Stoss keine relative Bewegung gegen einander haben, und dass 2) auch die relative Lage der Massentheilchen vor und nach dem Stoss ganz identisch seien. Diese Voraussetzungen, welche nur zur Vereinfachung der Rechnung gemacht wurden, sind aber keineswegs naturgemäss, denn die Körper befinden sich nach jedem Stoss in einem vibrirenden Zustande, und erleiden dabei auch jederzeit gewisse Formänderungen; wir müssen daher jenes Ergebniss einer auf naturwidrigen Voraussetzungen beruhenden Theorie verwerfen und dafür den Satz aufstellen: dass auch beim Stoss elastischer Körper durch die dabei eintretenden Vibrationen und Formänderungen Effektverluste entstehen.

Eine ganz genaue Berechnung dieser Verluste führt in der Regel auf analytische Schwierigkeiten, die sich selbst mit den raffinirtesten Mitteln, welche die Analysis in ihrem gegenwärtigen Zustand darbietet, nicht überwältigt werden können, man muss daher diese Berechnungen entweder ganz unterlassen, oder sich mit unvollkommenen Annäherungen begnügen. Gewöhnlich berechnet man diese Effektverluste, indem man die Körper so behandelt, wie wenn sie vollkommen unelastisch wären, und verfährt dabei auf ähnliche Weise, wie es in der in Nr. 56 I. Theil behandelten Lehre vom Stoss unelastischer Körper geschehen ist. Nach dieser Lehre ist z. B. der Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoss zweier Massen M und M_1, die im Moment des Zusammentreffens, beziehungsweise die Geschwindigkeiten V und V_1 besitzen, gleich:

$$\frac{M\,M_1}{M + M_1}(V_1 - V)^2$$

oder auch:

$$\frac{(V_1 - V)^2}{\frac{1}{M} + \frac{1}{M_1}}$$

ist also um so grösser, je grösser die beiden Massen sind, und ist überdies noch dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit $V_1 - V$ der Massen vor dem Stoss proportional.

Um den nachtheiligen Folgen, welche die Stösse in den Maschinen verursachen in ihrem ganzen Umfange zu übersehen, muss man die verschiedenen Fälle berücksichtigen, in denen möglicher Weise Stösse entstehen können. Stösse können eintreten: 1) Unter den Massentheilchen des Motors vor dessen Einwirkung auf den Receptor; 2) durch stossweise Einwirkung des Motors auf den Receptor bei dessen Eintritt in die Maschine; 3) während der Motor in der Maschine verweilt, und zwar: a) zwischen den Massentheilchen des Motors unter einander, b) zwischen den Massentheilchen des Motors und andern die motorische Masse begrenzenden Körpern; 4) zwischen je zwei auf einander folgenden Maschinenbestandtheilen, wenn daselbst ein Spielraum vorhanden ist; 5) durch die Einwirkung der Werkzeuge auf die zu verändernden Körper; 6) zwischen den Massentheilchen des Stoffes, auf welchen die Maschine einzuwirken bestimmt ist.

Die unter 1, 2, 3 bezeichneten Stösse kommen vorzugsweise bei den hydraulischen Kraftmaschinen vor. Bei den Turbinen z. B. entsteht meistens schon durch die Leitung des Wassers bis an die Mündungen der Radkanäle eine mehr oder weniger unregelmässige Bewegung des Wassers, wodurch die Theilchen durch einander wirbeln und gegen einander stossen, und mithin ihre lebendige Kraft wechselseitig schwächen. Beim Eintritt und während seiner Bewegung durch die Kanäle des Turbinenrades entstehen abermals Stösse der Theilchen unter einander, und der Theilchen gegen den Radkörper. Alle diese Stösse können, wenn sie heftig sind, wie dies bei fehlerhaften Anordnungen der Fall ist, den Nutzeffekt der Kraftmaschine bedeutend schwächen; sie schaden aber auch noch dadurch, dass sie Erschütterungen hervorbringen, die sich durch die ganze Maschine fortpflanzen, den Zusammenhang je zweier Maschinenbestandtheile auflockern und dadurch abermals Stösse und

Vibrationen erzeugen. Die unter 5 und 6 angeführten Stösse betreffen vorzugsweise die Thätigkeit der Arbeitsmaschinen; sie vergrössern den zu ihrem Betrieb erforderlichen Effekt, zerrütteln den Bau der Maschinen und verursachen oftmals Beschädigungen der Werkzeuge. Die unter 4 angeführten Stösse betreffen endlich vorzugsweise die Transmission. Diese besteht in der Regel aus einer grössern Anzahl von Wellen, die vermittelst verzahnter Räder oder vermittelst Rollen und Riemen in Verbindung stehen. So vollkommen diese Transmissionen gegenwärtig ausgeführt werden, so besteht doch in den Verbindungen der Theile unter einander, und insbesondere zwischen den in einander greifenden Zähnen ein Spielraum. Wenn nun die Kraftmaschine und die Arbeitsmaschine durch Stösse erschüttert werden, so pflanzen sich die Vibrationen von beiden Seiten in die Transmission hinein, veranlassen ein Vibriren der Wellen, und ein Gegeneinanderschlagen der Zähne, wodurch neuerdings Vibrationen und Stösse hervorgerufen werden. Dieses Gewirre von Vibrationen, von welchem eine solche Transmission gleichsam durchströmt ist, entweicht zuletzt nach mancher Irrfahrt durch sämmtliche Stützpunkte der beweglichen Theile in den Erdboden, und von der Oberfläche der Theile aus in die Luft; und es ist gut, dass sich dies von selbst macht, denn wenn diesen Vibrationen kein Ausweg eröffnet wäre, müssten sie mit der Zeit in solcher Heftigkeit auftreten, dass die ganze Maschine in Staub und Trümmerwerk zerfiele.

Die lebendige Kraft, welche von der Oberfläche der vibrirenden Theile aus in die Luft entweicht, indem sie diese in schallende Schwingungen versetzt, und dadurch das bekannte widerwärtige Geräusch verursacht, ist, wegen der geringen Masse der Luft, nicht von Bedeutung im Vergleich mit jener, die durch die Stützpunkte der beweglichen Theile in die Gestelle, und von da durch die Gemäuer und durch die Fundamente in die Erde übergeht.

Die Zapfen und Hälse, mit welchen die Transmissionswellen versehen sind, und an welchen sie durch die Lager gehalten werden, bilden gleichsam die Thüren, durch welche sämmtliche Vibrationen entweichen; es ist daher leicht zu begreifen, dass daselbst oft ein dichtes Wellengedränge entstehen muss, wodurch die Zapfen, wegen ihrer kleinen Masse, heftig erschüttert werden, was die oft eintretenden Erhitzungen derselben zur Folge hat.

Man denke sich z. B. ein grosses, ganz von Eisen construirtes Wasserrad, das einen Nutzeffekt von 50 Pferdekräften entwickelt, und bei welchem durch den stossweisen Eintritt des Wassers, und durch die nicht ganz starren Verbindungen der Theile unter einander ein Effektverlust von 10 Pferdekräften entsteht; denke sich ferner, dass die hierdurch entstehenden Vibrationen keinen andern Ausweg finden, als die beiden Zapfen des Rades, so wird man wohl begreifen, dass in denselben heftige Erschütterungen eintreten müssen, wenn durch jeden derselben ein Effekt von 5 Pferdekräften, also in jeder Sekunde $5 \times 75 = 375$ Kilogramm-Meter entweichen sollen. Dazu kommt noch der bedeutende Reibungtwiderstand, den das ungefähr 500 Zentner betragende Gewicht des Rades verursacht, und der abermals Vibrationen verursacht.

Wenn man nun bedenkt, welche Effektverluste durch diese mannigfaltigen Stösse und Vibrationen entstehen, welche Zerrüttung des geometrischen Zusammenhangs und Abnützung der auf einander wirkenden Theile hervorgehen muss, wie sehr die Dauerhaftigkeit und Anwendbarkeit eines Werkes darunter leidet, und wie nachtheilig dies alles auf die Qualität und Quantität der Produktion einer Maschine einwirken muss, so wird man wohl gern als Grundsatz anerkennen, dass man bei dem Neubau einer Maschine dahin trachten soll, alle Theile des Baues, so weit es sich mit dem Arbeitsprozess verträgt, in der Weise einzurichten und anzuordnen, dass überall stetige Kraftwirkungen statt finden, und keine Stösse eintreten können. Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass diejenigen Arbeitsprozesse, welche ohne Stösse durchgeführt werden können, den Vorzug verdienen vor solchen, bei welchen Stösse unvermeidlich sind.

Analytische Theorie der Maschinen.

33) *Die Methode der analytischen Theorie.* Nachdem wir durch das Vorhergehende den Weg vorgezeichnet haben, der zur Aufstellung der Effektgleichungen führt, wollen wir nun zeigen, auf welche Weise die verschiedenen Fragen, welche hinsichtlich der Beurtheilung einer bestehenden oder hinsichtlich des Entwurfes einer neu zu erbauenden Maschine gestellt werden können, auf analytischem Wege zur Lösung gebracht werden können.

Zu diesem Behufe müssen zuerst sämmtliche Gleichungen aufgestellt werden, welche die Abhängigkeit aller Grössen, die mit der zu beantwortenden Frage in irgend einem Zuhammenhange stehen, ausdrücken. Ist dies geschehen, so ergeben sich sodann die unbekannten Grössen des Problems durch rein analytische Behandlung jener Gleichungen.

Bevor wir dieses analytische Verfahren näher erläutern können, ist es nothwendig, den Inhalt und die Beschaffenheit der Gleichungen, die zur Lösung der verschiedenen Fragen dienen, zu erklären.

Was zunächst den Inhalt, d. h. die Grössen, betrifft, welche in den verschiedenen Gleichungen vorkommen können, so wollen wir dieselben in Haupt- und Nebengrössen eintheilen.

Zu den letztern zählen wir: 1) die sämmtlichen Abmessungen der Theile einer Maschine; 2) die Anzahl der Theile jeder besondern Art; 3) die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die verschiedenen Punkte der Maschine im Beharrungszustand bewegen, insbesondere also auch die Geschwindigkeiten des Receptors und der Werkzeuge, endlich zählen wir auch hierher 4) die Quantität der motorischen Substanz, welche per 1 Sekunde auf die Kraftmaschine einwirkt.

Einige dieser Grössen sind von einander ganz unabhängig, so dass jede derselben ihren Werth verändern kann, ohne dass desshalb die übrigen Grössen ihre Werthe ebenfalls verändern müssten. Andere dieser Nebengrössen können jedoch von einander abhängen, und dann bestehen zwischen denselben gewisse Gleichungen, durch welche diese Abhängigkeiten ausgedrückt werden. Der Halbmesser eines Rades und die Umfangsgeschwindigkeit desselben sind z. B. zwei von einander unabhängige Grössen. Die Geschwindigkeiten zweier Punkte einer Maschine sind dagegen zwei von einander abhängige Grössen, und es kann jede dieser Geschwindigkeiten durch die andere, und durch die Abmessungen der Bestandtheile, welche jene Punkte verbinden, ausgedrückt werden.

Zu den Hauptgrössen zählen wir solche Grössen, die irgend eine wichtige Bedeutung haben, und die von den Nebengrössen abhängen, demnach als Funktionen dieser letzteren zu betrachten sind. Hauptgrössen sind z. B. die Effekte, Gewichte, Kosten und Leistungen einer Maschine.

Einige von den Gleichungen, die zur Lösung eines Problems dienen, drücken die Abhängigkeit aus, in welcher gewisse Nebengrössen zu einander stehen, und diese wollen wir Nebengleichungen nennen. Andere jener Gleichungen geben den Werth gewisser Hauptgrössen durch Nebengrössen an, und diese wollen wir Hauptgleichungen nennen, und zwar reine oder gemischte, je nachdem die Nebengrössen alle von einander unabhängig sind oder theilweise von einander abhängen.

Die zur Lösung eines Problems dienenden Gleichungen bestehen also entweder aus einem System von reinen Hauptgleichungen oder aus einem System von gemischten Hauptgleichungen und den dazu gehörigen Nebengleichungen.

Die verschiedenen Aufgaben, welche in Betreff einer Maschine gestellt werden können, lassen sich in zwei Klassen eintheilen. In die erste Klasse gehören diejenigen, wobei die Werthe gewisser Grössen bestimmt werden sollen, wenn die Werthe anderer Grössen gegeben sind. Die zweite Klasse dagegen umfasst alle Aufgaben, bei welchen diejenigen Werthe gewisser Nebengrössen bestimmt werden sollen, durch welche irgend eine Hauptgrösse ihren grössten oder kleinsten Werth erreicht.

Die Aufgaben der ersten Klasse werden gelöst, indem man aus dem ganzen System der gegebenen Gleichungen alle Grössen eliminirt, die nicht gegeben sind und auch nicht gesucht werden sollen, und sodann die nach dieser Elimination sich ergebenden Gleichungen in Bezug auf die zu suchenden Grössen auflöst.

Ist m die Anzahl der Haupt- und Nebengleichungen,
n die Anzahl aller in den m Gleichungen erscheinenden Haupt- und Nebengrössen,
x die Anzahl der zu suchenden Grössen,

so ist $m - x$ die Anzahl der zu eliminirenden Grössen. Werden diese $m - x$ Grössen eliminirt, so ergeben sich x Gleichungen, aus welchen die x unbekannten Werthe bestimmt werden können.

Die Anzahl der Fragen, welche gestellt werden können, wenn m Gleichungen mit n Grössen vorhanden sind, von denen je $n - m$ gegeben sein können, ist so gross, als die Zahl, welche angibt, wie oftmal es möglich ist, aus n Elementen Gruppen zu bilden, von denen jede entweder m oder $n - m$ Elemente enthält; und diese Zahl ist nach bekannten combinatorischen Gesetzen

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(m-1)]}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots\ldots\ldots m}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(m-n-1)]}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n)}$$

Von diesen logischen Möglichkeiten sind jedoch in der Regel immer nur wenige von praktischem Interesse.

Zur Lösung der Aufgaben der zweiten Klasse kann man nach der Lehre vom Maximum und Minimum der Funktionen auf zweierlei Weise verfahren. Nach der erstern Verfahrungsart eliminirt man zuerst aus dem Ausdruck derjenigen Hauptgrösse, die ein Maximum oder Minimum werden soll, vermittelst der übrigen Haupt- und Nebengleichungen des Problems diejenigen Nebengrössen, welche von den zu bestimmenden Nebengrössen abhängen; differenzirt hierauf den durch diese Elimination umgestalteten Ausdruck für die Hauptgrösse nach allen Nebengrössen, die den grössten oder kleinsten Werth der Hauptgrösse herbei führen sollen, setzt jeden der partiellen Differenzialquotienten für sich gleich Null, und sucht endlich aus den auf diese Weise sich ergebenden Gleichungen die unbekannten Grössen des Problems. Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdruck für die Hauptgrösse erhält man dann auch die Maximum- oder Minimum-Werthe derselben.

Nach dem zweiten Verfahren differenzirt man unmittelbar sämmtliche Gleichungen des Problems nach allen Nebengrössen, die den grössten oder kleinsten Werth der Hauptgrösse liefern sollen, so wie auch nach der von diesen Nebengrössen abhängigen Nebengrösse, setzt aber dabei das Differenziale der Hauptgrösse, weil es sich um ihren grössten oder kleinsten Werth handelt, gleich Null, sucht hierauf aus diesen Differenzialgleichungen so viele Differenzialien zu eliminiren, als die Anzahl der Differenzialgleichungen gestattet, und setzt in der zuletzt sich ergebenden Differenzialgleichung jeden der Faktoren, mit welchen die Differenzialien multiplizirt erscheinen, für sich gleich Null, so erhält man ein System von Gleichungen, die in Verbindung mit den gegebenen Haupt- und Nebengleichungen des Problems jeder Zeit zur Bestimmung aller unbekannten Grössen hinreichen.

Sind z. B. m Haupt- und Nebengleichungen gegeben, und sollen daraus diejenigen Werthe von n Nebengrössen bestimmt werden, durch welche eine gewisse Hauptgrösse ihren grössten oder kleinsten Werth erreicht, so erhält man zunächst durch Differenziation der m Gleichungen m Differenzialgleichungen, von denen jede möglicher Weise n Differenzialien enthält. Aus diesen Differenzialgleichungen erhält man durch Elimination von $m - 1$ Differenzialien eine einzige Differenzialgleichung mit $n - (m - 1) = (n - m + 1)$ Differenzialien und daher durch Nullsetzung der Differenzialfaktoren $n - m + 1$ endliche Gleichungen, welche in Verbindung mit den m Haupt- und Nebengleichungen eine Gesammtzahl von $n - m + 1 + m = n + 1$ Gleichungen liefern, aus welchen die zu suchenden n Nebengrössen, so wie auch der Maximum- oder Minimum-Werth der Hauptgrösse bestimmt werden kann.

In den folgenden Nummern sollen nun mehrere in praktischer Hinsicht vorzugsweise wichtige Fragen besprochen, und deren Beantwortung nach dem so eben angedeuteten Verfahren gezeigt werden.

34) *Einfluss der Abmessungen und der Geschwindigkeit einer Kraftmaschine auf deren Nutzeffekt.* Wenn man den genauen analytischen Ausdruck für den Nutzeffekt einer Kraftmaschine aufstellt, und aus demselben vermittelst der Nebengleichungen alle von einander abhängigen Nebengrössen eliminirt, so erhält man einen Ausdruck, aus welchem man erkennen kann, welche Grössen auf den Effekt Einfluss haben, und wie jede derselben auf das Resultat einwirkt.

Im Allgemeinen erscheint der Nutzeffekt einer Kraftmaschine als eine Funktion 1) gewisser Abmessungen der Maschine; 2) der Geschwindigkeit des Receptors; 3) der Quantität der motorischen Substanz, die in jeder Sekunde auf den Receptor wirkt. Von den Abmessungen der

Maschine hat in der Regel nur eine oder haben nur einige wenige einen erheblichen Einfluss auf den Effekt. Den grössten Einfluss haben immer die Abmessungen der Receptoren, und, wenn deren mehrere vorkommen, ihre Anzahl. Die Geschwindigkeit der Receptoren hat zuweilen einen sehr bedeutenden, zuweilen einen sehr geringen Einfluss auf den Effekt; das erstere ist der Fall bei allen hydraulischen Kraftmaschinen, das letztere bei den Dampfmaschinen.

Der Nutzeffekt ist bei allen Kraftmaschinen der per 1 Sekunde auf dieselben einwirkenden Quantität der motorischen Substanz ungefähr proportional. Das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und jener Quantität ist jedoch, wenn man die Sache genau nimmt, von jener Quantität abhängig. Die Wasserräder geben im Allgemeinen mit kleineren, die Turbinen mit grösseren Wassermengen günstigere Effekte. Die Dampfmaschinen geben mit grosser und kleiner Dampfmenge fast gleich günstige Resultate.

Bezeichnet man durch E_n den Nutzeffekt, durch E_a den absoluten Effekt des Motors, so kann der Ausdruck für E_n immer auf die Form gebracht werden:

$$E_n = E_a (1 - k)$$

wobei im Allgemeinen k ein sehr zusammengesetzter Ausdruck sein kann. Durch diese Form kann man am leichtesten beurtheilen, unter welchen Umständen der Effekt einer Kraftmaschine günstig ausfällt. Für eine absolut vollkommene Anordnung wäre $k = o$; eine Maschine ist demnach um so vollkommener, je kleiner für dieselbe der Werth von k ausfällt. Alle Umstände, welche den Werth von k vermindern, sind daher günstig, und Alles, was den Werth von k vergrössert, ist nachtheilig. Manchmal kann der Werth von k als eine Summe mehrerer Glieder dargestellt werden, von denen jedes einzelne den schädlichen Einfluss eines besonderen Umstandes ausdrückt, und dann kann man die für den Effekt günstigen und ungünstigen Verhältnisse am deutlichsten erkennen.

35) *Bewegung einer Maschine unter gegebenen Umständen.* Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher sich eine Maschine im Beharrungszustand unter gegebenen Umständen bewegt, muss man die Effektgleichung, nachdem man aus derselben alle von der Geschwindigkeit abhängigen Grössen vermittelst der Nebengleichungen eliminirt hat, in Bezug auf die Geschwindigkeit auflösen. Unter die in diesem Falle zu eliminirenden Grössen gehört auch der Nutzeffekt E_n, welcher durch das Produkt aus der Geschwindigkeit v des Receptors in den auf den Receptor reduzirten Gesammtwiderstand P der Maschine ausgedrückt werden kann.

Zur Erklärung dieses Verfahrens wollen wir die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher eine Lokomotive bei einer bestimmten Dampfproduktion eine gegebene Last fortzuziehen vermag.

Nennt man:

O den Querschnitt eines Dampfcylinders,

l die Länge des Kolbenschubes;

D den Durchmesser eines Treibrades,

v die mittlere Geschwindigkeit der Kolben im Beharrungszustand der Bewegung,

V die Geschwindigkeit, mit welcher die Fahrt vor sich geht,

p den Druck des Dampfes hinter dem Kolben auf 1 Quadratmeter,

r den Druck per 1 Quadratmeter der Kolbenfläche, welcher zur Ueberwindung der Widerstände nothwendig ist, die in der Lokomotive vorkommen,

α und β zwei constante Grössen, vermittelst welchen die Dichte des Dampfes berechnet werden kann,

S die Dampfmenge in Kilogrammen, die in jeder Sekunde produzirt wird und auf die Lokomotive einwirkt,

Z die Zugkraft, welche die Lokomotive ausüben muss, um die angehängte Last fortzuschaffen, so hat man:

1) die Hauptgleichung $\quad \frac{E}{n} = Z\,V = 2\,O\,(p - r)\,v,$

2) die Nebengleichungen $\left\{ \begin{array}{l} S = 2\,O\,v\,(\alpha + \beta\,p) \\ \dfrac{V}{v} = \dfrac{D\,\pi}{2\,l} \end{array} \right.$

Aus diesen letzteren folgt zunächst:

$$V = v\,\frac{D\,\pi}{2\,l},\quad p = \frac{1}{\beta}\left(\frac{S}{2\,O\,v} - \alpha\right)$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung für $\frac{E}{n}$ einführt, so erhält man:

$$Z\,v\,\frac{D\,\pi}{2\,l} = 2\,O\,v\left\{\frac{1}{\beta}\left(\frac{S}{2\,O\,v} - \alpha\right) - r\right\}$$

und daraus folgt durch Auflösung in Bezug auf v

$$v = \frac{S}{\beta\left\{Z\,\dfrac{D\,\pi}{2\,l} + 2\,O\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + r\right)\right\}}$$

wodurch die mittlere Geschwindigkeit der Kolben bestimmt ist, und wenn man diese mit $\frac{D\,\pi}{2\,l}$ multiplizirt, so erhält man auch die Geschwindigkeit V der Fahrt.

36) *Bestimmung der Umstände, unter welchen bei einer bestehenden Maschine das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und dem absoluten Effekt den grössten Werth erreicht.* Bei einer bestehenden Maschine haben alle Abmessungen derselben ganz bestimmte unveränderliche Werthe, und nur die Geschwindigkeit ihrer Bewegung und die per 1 Sekunde einwirkende Quantität der motorischen Substanz können einer Veränderung unterliegen. Es entsteht also die Frage, welches die vortheilhaftesten, d. h. diejenigen Werthe dieser beiden Grössen sind, für welche das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und dem absoluten Effekt den grösstmöglichen Werth erreicht.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass der Nutzeffekt einer Maschine von ihrer Geschwindigkeit abhängt, dass es also nicht gleichgültig ist, ob eine Maschine im Beharrungszustand ihrer Bewegung schnell oder langsam geht. Es ist ferner klar, dass der Effekt einer Maschine verschwindet, sowohl dann, wenn sie sich gar nicht bewegt, als auch in dem Falle, wenn sie leer läuft, also vom Motor getrieben wird, ohne einen äusseren Widerstand zu überwinden.

Da nun der Nutzeffekt bei allen Geschwindigkeiten, die innerhalb des Stillstandes und des Leerlaufes liegen, bestimmte Werthe hat, an diesen Grenzen aber verschwindet, so muss es nothwendig eine Geschwindigkeit geben, bei welcher der Nutzeffekt einen grössten Werth erreicht.

Nicht so leicht ist es im Allgemeinen, einzusehen, dass das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und dem absoluten Fffekt von der per 1 Sekunde auf die Maschine einwirkenden Quantität der motorischen Substanz abhängt, denn diese Abhängigkeit wird in den meisten Fällen durch gewisse Nebenumstände bestimmt. In speziellen Fällen kann man sich jedoch von diesem Einfluss leicht überzeugen. Oberschlächtige Wasserräder geben bei geringem Wasserzufluss einen günstigeren Effekt, weil die Zellen, wenn sie wenig gefüllt werden, sich erst tief unten entleeren. Genau gebaute mittelschlächtige Wasserräder geben bei kleinerem, ungenau gebaute Räder dieser Art dagegen bei grösserem Wasserzufluss einen günstigeren Nutzeffekt. Der Grund hievon liegt in dem Wasserverlust, der durch den Spielraum des Rades im Gerinne entsteht. Turbinen geben nur bei vollständiger Füllung gute Effekte, denn wenn sie nur theilweise gefüllt sind, sprüht ein Theil des Wassers unregelmässig durch die Radkanäle, ohne eine merkliche Wirkung hervorzubringen.

Die genaue Bestimmung der vortheilhaftesten Werthe für die Geschwindigkeit und für die Quantität der motorischen Substanz unterliegt, wenn einmal die Effektgleichung mit ihren Nebengleichungen aufgestellt ist, keiner Schwierigkeit. Eliminirt man nämlich aus der Effektgleichung vermittelst der Nebengleichungen alle Grössen, welche von der Geschwindigkeit v des Receptors und von der Quantität Q der motorischen Substanz abhäng en, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$E_n = F(v, Q)$$

und wenn man hieraus die partiellen Differenzialquotienten von E_n nach v und nach Q aufsucht, und jeden derselben gleich Null setzt, so erhält man zwei Gleichungen:

$$\frac{dF(v, Q)}{dv} = o, \quad \frac{dF(v, Q)}{dQ} = o,$$

durch deren Auflösung in Bezug auf v und Q die vortheilhaftesten Werthe dieser Grössen erhalten werden.

37) ***Bestimmung der hinsichtlich des Nutzeffektes vortheilhaftesten Construktionsverhältnisse für eine neu zu erbauende Maschine.*** Eine ganz genaue Kenntniss aller Bedingungen, bei deren Erfüllung das Verhältniss zwischen dem Nutzeffekt und dem absoluten Effekt den grössten Werth erreicht, ist sowohl für die Beurtheilung einer bestehenden oder bereits entworfenen Maschine, wie auch für den Entwurf einer neu zu erbauenden Maschine von sehr grosser Wichtigkeit, denn durch diese Kenntniss erfährt man, wie jedes einzelne Construktionselement beschaffen sein muss, um die besten Dienste leisten zu können, und dadurch ist gewiss alles geboten, was für eine scharfe Kritik einer bestehenden und für den Entwurf einer neu zu erbauenden Maschine nur immer gewünscht werden kann.

In manchen Fällen, und insbesondere bei den Dampfmaschinen, sind diese hinsichtlich des Nutzeffekts vortheilhaftesten Bedingungen ohne alle Rechnung aus der Natur der Sache zu ersehen; in andern Fällen, und namentlich bei den Wasserrädern und Turbinen kann man zwar einige dieser Bedingungen ohne Rechnung errathen, andere aber, die mit dem Effekt in einem komplizirten Zusammenhang stehen, können nur allein durch Rechnung bestimmt werden. Es ist z. B. leicht einzusehen, dass es bei den Dampfmaschinen nur darauf ankommt, den Dampf mit hoher Spannung und mit Expansion wirken zu lassen, und den Gegendruck vor dem Kolben durch Condensation des Dampfes möglichst zu vermindern, um die günstigste Wirkung des Dampfes herbeizuführen. Es ist ferner auch leicht einzusehen, dass bei den Wasserrädern eine grosse Anzahl von Schaufeln oder Zellen günstig wirken muss; allein es wird wohl Niemanden gelingen, die für den Effekt dieser Maschinen vortheilhaftesten Detailabmessungen ohne Rechnung nach dem Gefühl zu bestimmen, und gerade da, wo das Gefühl nicht mehr ausreicht, ist die Rechnung, wenn sie gelingt, am rechten Platz.

Vorausgesetzt, dass die Effektgleichung und die dazu gehörigen Nebengleichungen mit aller Schärfe aufgefunden worden sind, unterliegt die Bestimmung der vortheilhaftesten Construktionsverhältnisse auf analytischem Wege keiner Schwierigkeit, obgleich sie mit weitläufigen Rechnungen verbunden sein kann, und auch meistens verbunden ist.

Man kann dabei auf zweifache Weise verfahren.

Das eine Verfahren besteht darin, dass man zuerst aus dem Ausdruck für den Effekt vermittelst der Nebengleichungen alle abhängigen Nebengrössen eliminirt, hierauf die partiellen Differenzialquotienten des Effektes nach allen independenten Grössen aufsucht, jeden einzelnen für sich gleich Null setzt, und endlich aus den auf diese Weise sich ergebenden Gleichungen die unbekannten Grössen aufsucht.

Nach dem zweiten Verfahren werden unmittelbar sowohl die Effektgleichungen als auch die Nebengleichungen nach allen abhängigen und unabhängigen Grössen differenzirt, und sodann aus diesen Differenzialgleichungen so viele Differenziale, als ihre Anzahl gestattet, eliminirt. Das Endresultat dieser Elimination ist eine gewisse Differenzialgleichung mit Differenzialien von independenten Grössen, die nur richtig sein kann, wenn die Faktoren der Differenzialien verschwinden. Durch Nullsetzung dieser Faktoren erhält man aber ein System von Gleichungen, die in Verbindung mit der Effektgleichung und mit den Nebengleichungen jederzeit zur Bestimmung der unbekannten Grössen hinreichen.

Um zu entscheiden, ob die sich ergebenden Werthe einem Maximum oder ob sie einem Minimum entsprechen, müsste man streng genommen auch die Zeichen der zweiten Differenzialquotienten untersuchen. Diese Mühe kann man sich aber ersparen, denn man kann immer schon aus der Natur der Sache leicht beurtheilen, ob die gefundenen Grössen einem grössten oder kleinsten Werth entsprechen.

Einige oder sämmtliche Bedingungen, welche dem Maximum des Effektes entsprechen, können oftmals gar nicht realisirt werden, oder führen zu äusserst kostspieligen Constructionen. Man muss sich daher in diesen Fällen begnügen, die realisirbaren Bedingungen vollkommen und die nicht realisirbaren doch annähernd zu erfüllen. Die Bedingungen des grössten Nutzeffektes eines oberschlächtigen Rades sind z. B. eine unendlich grosse Radbreite, unendlich viele Zellen, ein unendlich langsamer Gang, eine unendlich kleine radiale Tiefe der Zellen etc., es ist also keine derselben realisirbar, daher man sich mit einer Annäherung begnügen muss, indem man eine grosse Radbreite, geringe Tiefe, grosse Zellenanzahl und geringe Umfangsgeschwindigkeit annimmt. Die Bedingungen des grössten Nutzeffektes einer Turbine sind der Mehrzahl nach realisirbar; nur einige sind es nicht, und dazu gehört die unendlich grosse Schaufelzahl. In praktischer Hinsicht ist der Grundsatz von sehr grosser Wichtigkeit, dass sich eine Funktion in der Nähe ihres Maximum-Werthes nur sehr wenig ändert. Daher kommt es, dass die Construktionselemente oft bedeutend von denjenigen abweichen können, die dem wahren Maximum des Nutzeffektes entsprechen würden, ohne dass desshalb der Nutzeffekt merklich kleiner ausfällt, als sein grösster Werth.

Man würde also im Irrthum sein, wenn man die hinsichtlich des Effektes vortheilhafteste Anordnung einer Maschine unter allen für die zweckmässigste hielte; dies ist nur dann der Fall, wenn eine höchst ökonomische Verwendung des Motors gefordert wird, und wenn die Construktionskosten der hinsichtlich des Nutzeffektes günstigten Anordnung ein gewisses Maas nicht überschreiten.

38) *Wahl des Motors und der Kraftmaschine.* Die Wahl des Motors und der Kraftmaschine ist für jedes technische Unternehmen ein Gegenstand von besonderer Wichtigkeit. Jeder Motor und jede Kraftmaschine gewährt gewisse Vortheile, verursacht aber andrerseits gewisse Nachtheile; man muss daher in jedem besonderen Falle dasjenige zu wählen suchen, was unter gegebenen Umständen als das Zweckmässigste erscheint.

Die Wahl des Motors unterliegt in der Regel keiner Schwierigkeit. Wo Wasserkraft vorhanden ist, verdient dieser Motor jedem anderen vorgezogen zu werden; es ist der billigste von allen Motoren, denn diese motorische Substanz kostet als solche gar nichts, und die zur Benutzung der Wasserkräfte erforderlichen Bauten und Einrichtungen kosten nie mehr, in der Regel sogar viel weniger, als jene, welche Dampfkräfte und Thiere verursachen. Ist keine Wasserkraft vorhanden, hat man also zwischen Dampf, Wind und Pferdekraft zu wählen, so verdient in der Regel und insbesondere, wenn es sich um wichtigere Wirkungen handelt, die Dampfkraft den Vorzug. Pferde eignen sich nur für schwächere Wirkungen, und wenn die Arbeit oftmals unterbrochen werden muss. Die Windkraft wird nur in Flussniederungen benutzt, wo gewöhnlich weder Wasserkräfte, noch Steinkohlen oder Holz vorhanden sind, und die Pferdekräfte für den Betrieb der verschiedenen Werke nicht ausreichen. Holland ist bekanntlich das Land der Windmühlen. Hat man sich für die Benutzung der Dampfkraft entschieden, so unterliegt es keiner Schwierigkeit, zu entscheiden, was für eine Art von Dampfmaschinen gewählt werden soll. Soll die Maschine möglichst einfach sein und wenig kosten, so ist eine Hochdruckmaschine, in welcher der Dampf ohne Expansion und ohne Condensation wirkt, am Platz. Soll an einem Orte, wo nicht viel Wasser vorhanden ist, mit dem Brennstoff ökonomisirt werden, so wählt man eine Maschine, in welcher der Dampf mit Expansion aber ohne Condensation wirkt. Handelt es sich endlich um möglichste Oekonomie des Brennstoffes und ist reichlich kaltes Wasser vorhanden, so wählt man eine expandirende und condensirende Maschine.

Nicht so leicht ist es, zu entscheiden, was für eine Kraftmaschine zur Benutzung einer Wasserkraft gewählt werden soll; denn es gibt deren mehrere Arten, und von jeder Art mehrere Varietäten. Die Hauptarten der hydraulischen Kraftmaschinen sind: die Wassersäulenmaschinen, die Wasserräder und die Turbinen. Die ersteren eignen sich nur zum Betrieb von Bergwerkspumpen, wenn dazu sehr hohe Gefälle benutzt werden sollen. Die beiden andern Arten eignen sich im Allgemeinen zum Betrieb aller Fabriken und Gewerbe; es erfordert jedoch eine sehr gründliche bis in alle Einzelnheiten eingehende Kenntniss dieser Maschinen, um in jedem besonderen Falle zu entscheiden, welche von beiden Arten den Vorzug verdient. Aber auch die Bestimmung der Varietät ist in den meisten Fällen mit Schwierigkeiten verbunden, und erfordert eine äusserst spezielle Kenntniss aller vortheilhaften und nachtheiligen Eigenschaften jeder besonderen Varietät. Das Verfahren, wodurch derlei Fragen zur Entscheidung gebracht werden, besteht im Wesentlichen darin, dass man sich das Gewicht jeder guten und jeder nachtheiligen Eigenschaft einer Anordnung gleichsam durch Zahlen ausgedrückt denkt, sodann von jeder einzelnen Anordnung die Differenz aus den guten und nachtheiligen Eigenschaften nimmt, und sich zuletzt für diejenige Anordnung entscheidet, für welche diese Differenz den grössten Werth zu haben scheint. Derlei Fragen durch Rechnung zu entscheiden, ist kaum möglich, praktischer Sinn und gesunde Urtheilskraft führen in solchen Dingen weit schneller zum Ziele.

Anordnung der Arbeitsmaschinen.

39) *Grundsätze, auf welchen die Anordnung der Arbeitsmaschinen beruhen.* Wesentlich verschieden von den Prinzipien, nach welchen die Kraftmaschinen zu beurtheilen und anzuordnen sind, sind diejenigen, auf welchen die Arbeitsmaschinen beruhen. Die Kraftmaschinen haben die Bestimmung, den Motoren die in ihnen enthaltenen Wirkungsgrössen möglichst vollständig zu entziehen und in sich aufzunehmen; ihre Beurtheilung und Construktion beruht daher auf der Kenntniss der Bedingungen, bei deren Erfüllung diese Kraftentziehung bestmöglichst erfolgt. Die Arbeitsmaschinen haben dagegen die Bestimmung, vermittelst ihrer Werkzeuge auf einen Körper oder Stoff in solcher Weise einzuwirken, dass derselbe eine gewisse mechanische Orts- oder Formveränderung erleide; ihre

Construktion beruht daher wesentlich auf der Kenntniss des Prozesses und der Werkzeuge, wodurch die verschiedenen mechanischen Veränderungen der Stoffe am besten bewerkstelligt werden können, und dies sind gerade diejenigen Kenntnisse, welche die Technologie zu lehren hat. Dem Studium der Arbeitsmaschinen müssen daher nothwendig technologische Untersuchungen vorangehen, über die zu verändernden Stoffe, über die Produkte, welche daraus entstehen sollen, ferner über die Prozesse, durch welche diese Veränderungen bewerkstelligt werden können, endlich über die dabei dienlichen Werkzeuge. Erst dann, wenn diese technologischen Untersuchungen geschlossen sind, beginnt die Aufgabe des Mechanikers, die darin besteht: die für die Durchführung der Prozesse nothwendigen Funktionen und Bewegungen der Werkzeuge durch automatische, d. h. selbstwirkende Mechanismen hervorzubringen.

Die Wichtigkeit des technologischen Studiums und die Schwierigkeiten, denen man dabei begegnet, richten sich nach der Natur des Prozesses. Die Prozesse der Erhebung und Fortschaffung erfordern gar keine technologischen Vorstudien, denn die Stoffe erleiden dabei keine Veränderung, und daher sind auch in diesem Falle die Werkzeuge äusserst einfach.

Die Prozesse der Verdichtung und Zertheilung veranlassen schon einige Ueberlegung, die jedoch in den meisten Fällen keine erheblichen Schwierigkeiten verursachen. Aeusserst wichtig und in der Regel auch sehr schwierig ist das technologische Studium derjenigen Prozesse, durch welche die Stoffe ganz bestimmte Formänderungen erleiden sollen, so dass aus denselben gewisse regelmässige Gebilde, z. B Fäden oder Gewebe, entstehen. Ohne eine gründliche Kenntniss des Stoffes, der Prozesse und Werkzeuge ist das Verständniss und die Erfindung der zur Durchführung dieser Prozesse geeigneten Maschine ganz unmöglich. Dies beweist auch die Erfahrung, dass die Verbesserungen und Erfindungen der Arbeitsmaschinen meistens von intelligenten Arbeitern ausgehen, welche durch eine oft vieljährige Beschäftigung mit einer Maschine oder mit einem Prozess alle dabei vorkommenden Einzelheiten so genau kennen lernen, wie es einem Andern gar nicht möglich ist.

Von der Natur eines Prozesss hängt es ab, auf welchem Wege die technologischen Kenntnisse am besten und leichtesten erworben werden können.

Im Allgemeinen ist die Erfahrung die beste Schule, doch aber gibt es sehr viele Fälle, in denen man durch Versuche oder durch rein wissenschaftliche Mittel schneller und sicherer das Ziel erreichen kann.

Die technologischen Werke begnügen sich in der Regel mit einer descriptiven Behandlung ihres Gegenstandes; sie zeigen gewöhnlich nicht, wie aus der Natur eines Stoffes und aus den Eigenschaften des Arbeitsproduktes sowohl der Prozess, als auch die Werkzeuge fast mit

Nothwendigkeit folgen, und lassen daher für die Techniker von Beruf und für die Maschinenbauer Manches zu wünschen übrig.

Nach den diesem Buch vorgezeichneten Grenzen ist es nicht möglich, die mannigfaltigen technologischen Prozesse im Einzelnen zu behandeln, sondern wir müssen uns damit begnügen, das allen Arbeitsprozessen Gemeinsame, Allgemeine hervorzuheben, was nun in der nächsten Nummer geschehen soll.

40) *Der Rohstoff und die Arbeitsprodukte.* Das gründliche Verständniss eines Prozesses erfordert zunächst die Kenntniss des Rohstoffes und des daraus hervorzubringenden Arbeitsproduktes.

Jeder Rohstoff besitzt gewisse mechanische und chemische Eigenschaften, die auf den Molekularbau, d. h. auf der Art und Weise beruhen, wie die Molekule in jedem Theile des Stoffes nebeneinander gelagert sind, und durch welche Kräfte sie in dieser Nebeneinanderlagerung im Gleichgewicht erhalten werden. Nach diesem Molekularbau sind die Körper hart oder weich, spröde oder elastisch, fest oder flüssig, krystalinisch oder unregelmässig gemengt. Bei den organischen Körpern gründen sich die mechanischen Eigenschaften derselben vorzugsweise auf den Zellenbau. Die neuere Physiologie hat gelehrt, dass alle organischen Produkte, sowohl die vegetabilischen, als animalischen aus sogenannten Zellengebilden, d. h. aus blasenförmigen Molekulargebilden bestehen, in welchen flüssige oder feste Substanzen enthalten sind. Die Baumwoll- und Schafwollfasern bestehen aus linear aneinander gereihten Zellen. Die Holztextur aus neben einander gelagerten und unter einander verbundenen linearen Zellengebilden. Dieser Zellenbau spielt in den organischen Gebilden eine ähnliche Rolle, wie die Krystallisation in den unorganischen.

Aber nicht nur der Bau der Elementargebilde, sondern auch die in den Rohstoffen, wie sie im Handel vorkommen, gewöhnlich vorhandene unregelmässige Durcheinanderlagerung der Elementargebilde, so wie auch die Verunreinigungen und Beimischungen fremdartiger Stoffe kommen bei der Durchführung eines mechanischen Prozesses in Betrachtung, denn diese Unregelmässigkeiten erfordern zuweilen vorbereitende Operationen, und erschweren in den meisten Fällen die Durchführung eines Prozesses.

Wenn schon die Kenntniss der Rohstoffe von Wichtigkeit ist, so gilt dies in einem noch höheren Grade von den Produkten, die aus den Rohstoffen durch den mechanischen Prozess hervorzugehen haben. Der Rohstoff ist der Ausgangspunkt, das Produkt ist der Zielpunkt; das Ziel muss natürlich bekannt sein, wenn der dahin führende Weg aufgefunden werden soll.

Das Arbeitsprodukt ist von dem ursprünglichen Stoff entweder gar nicht oder nur wenig, oder endlich wesentlich verschieden. Das erste ist der Fall, wenn die Arbeit nur in einer Ortsveränderung besteht. Das zweite, wenn ein Körper verdichtet, zertheilt, zerstossen werden soll. Das dritte endlich, wenn das Arbeitsprodukt ein Körper von bestimmter regelmässiger Form oder ein bestimmtes regelmässiges Gebilde ist, und endlich auch dann, wenn das Arbeitsprodukt aus mehreren von einander geschiedenen, materiell verschiedenen Theilen bestehen soll. Vorzugsweise sind es die von dem ursprünglichen Stoffe wesentlich verschiedenen Produkte, welche ein sorgfältiges Studium erfordern, denn von einer unregelmässigen oder verworrenen Stoffmasse bis zu einem regelmässigen Gebilde ist ein weiter Weg, auf dem man leicht verirren kann, wenn man das Ziel nicht genau kennt.

Die Produktenkenntniss darf sich aber nicht bloss auf die wesentlichen und nothwendigen Eigenschaften beschränken, sondern sie muss sich auf den ganzen Umfang der Qualitäten erstrecken, in welchem ein Produkt erscheinen kann, d. h. man muss jedes Produkt von seiner schlechtesten bis zu seiner besten Qualität hin kennen, denn durch die Kenntniss der Fehler, mit welchen es möglicher Weise behaftet sein kann, schützt man sich am besten gegen fehlerhafte Operationen und Einrichtungen, die vor allem Andern vermieden werden müssen, wenn etwas Vollkommenes erreicht werden soll.

Zur Erläuterung des so eben im Allgemeinen Angedeuteten mögen einige Beispiele dienen. Betrachten wir zunächst die Getreidearten, und die daraus durch den Mahlprozess entstehenden Produkte: Mehl, Gries und Kleien

Das Getreidekorn ist keineswegs eine homogene Masse. Es besteht aus einem Gewebe von Zellen, die Stärkmehl und Klebertheilchen enthalten, und ist mit einer äusseren Oberhaut umgeben. Die äusseren Zellen, und insbesondere die mit der Oberhaut verwachsenen, sind am meisten mit Kleber versehen; gegen die Mitte zu nimmt der Klebergehalt der Zellen allmählig ab, und es treten an seiner Stelle Stärkmehltheilchen auf. Der stickstoffhaltige Kleber wird zu den ernährenden, das stickstofffreie Stärkmehl zu den wärmeerzeugenden Stoffen gerechnet. Die Kieselerde haltige Oberhaut hat weder ernährende noch Wärme erzeugende Kräfte. Dies ist im Wesentlichen die Beschaffenheit des reinen Stoffes.

Das Getreide, in dem Zustand, wie es auf den Markt oder in die Mühle gebracht wird, besteht aber nicht blos aus solch reinem Stoff, sondern die Körner sind bestaubt und beschmutzt, und manchmal auch bei gewissen Getreidearten in Hülsen eingeschlossen; auch sind gewöhnlich noch erdige Theile, Steinchen, kleine Samenkörner, Strohhalme und

Aehren unter dem Getreide. Der Rohstoff besteht also in diesem Falle aus sehr mannigfaltigen, theils werthvollen, theils werthlosen, theils fremdartigen Bestandtheilen, die im Produkt nicht vorkommen dürfen.

Die Produkte des Mahlprozesses sind bekanntlich Mehl, Gries und Kleien. Die Bestandtheile dieser Produkte sind nicht nur in ihrer Form und Grösse, sondern auch nach ihrem Stoffgehalt verschieden. Das Mehl ist ein feines an Kleber reiches, an Stärkmehl armes Pulver. Der Gries besteht aus grösseren Fragmenten, die wohl auch Kleber, grösstentheils jedoch Stärkmehl enthalten. Die Kleien sind schuppenförmige, Kieselerde haltige Theilchen.

Hieraus geht aber hervor, dass jedes dieser Produkte von einem besondern Theil des Getreidekorns herrührt; das Mehl von dem äussern, der Gries von dem innern Theile, die Kleien von der Oberhaut der Körner, und der ganze Mahlprozess erscheint demnach als ein dreifacher Prozess, denn es wird dabei der ursprüngliche Stoff nicht nur zertheilt und zerrieben, sondern es werden auch die dadurch entstehenden Partikelchen theils nach ihrer äussern Form und Grösse, theils nach ihrem chemischen Gehalt sortirt.

Als zweites Beispiel wollen wir die Baumwolle und die daraus durch den Spinnprozess entstehenden Garnfäden betrachten.

Die Baumwolle, welche sich in den Samenbehältern der Baumwollgewächse bildet, besteht aus einem Gewirre von feinen zarten bandförmigen Fäserchen, deren Länge von 20 bis 40 Millimetern variirt. Die Feinheit und Festigkeit der Fasern steht mit ihrer Länge im Zusammenhang. Die längere Wolle ist jederzeit feiner und fester als die kurze, jene wird daher vorzugsweise zu feinem, diese dagegen zu gröberem Garn verwendet.

Der Garnfaden besteht aus gleichmässig neben einander und nach einander liegenden und schraubenlinienförmig umeinander gewundenen Baumwollenfasern. Die Feinheit der Garne wird nach der Dicke und Anzahl der Elementarfasern gemessen, die in jedem Querschnitt des Fadens vorkommen. Der Neigungswinkel der äussern Schraubenlinie ist bei allen Garnen von jeder Feinheit gleich gross.

Auf diesen so einfachen Eigenschaften der Baumwolle und des Garnes beruht der ganze weitläufige Spinnprozess. Man sollte nicht glauben, dass derselbe so verwickelt sein könnte, als er es wirklich ist, denn es handelt sich dabei doch nur darum, die in dem Rohstoff wirr durch einander liegenden Fasern regelmässig an einander zu reihen und um einander zu drehen. Allein wenn man diese Aufgabe genau überdenkt, wird man sich bald überzeugen, dass die Durchführung dieses Prozesses mit Maschinen zahlreiche Schwierigkeiten verursacht.

Diese Beispiele werden vorläufig genügen, um zur Einsicht zu kommen, dass man vor allem andern die Stoffe und die Produkte kennen muss, bevor ein weiterer Schritt gethan werden kann.

41) *Der mechanisch-technologische Prozess.* Der mechanisch-technologische Prozess besteht in dem Verfahren, wodurch irgend ein Rohstoff in ein regelmässiges Gebilde umgewandelt werden kann.

Dieses Umwandlungsverfahren muss aus den Eigenschaften des Rohstoffs und des Produktes, das daraus entstehen soll, hervorgehen. Man muss zunächst wissen, was durch den Prozess geschehen soll, bevor man die Mittel zu seiner Durchführung ausfindig machen kann.

Gewöhnlich kann die Umwandlung nicht unmittelbar durch einen einzigen Schritt bewerkstelligt werden, sondern sie muss stufenweise durchgeführt werden, indem der Stoff aus seinem ursprünglichen Zustande durch eine Reihenfolge von Operationen seiner Bestimmung immer mehr und mehr näher gebracht wird Der totale Prozess muss also in der Regel in einzelne Partialprozesse zerlegt werden, und diese sind im Allgemeinen:

1) Die Reinigungsprozesse, welche zum Zweck haben, aus dem Rohstoff alle für die Fortsetzung des Prozesses hinderlichen oder für das Produkt nachtheiligen fremdartigen Bestandtheile zu entfernen.

2) Die Sortirungsprozesse, wodurch die ungleichartigen Bestandtheile, welche der Rohstoff oder ein Arbeitsprodukt enthält, gesondert und zu Gruppen von gleichartigen Theilen vereinigt werden.

3) Die Mischungsprozesse, welche in dem Falle vorkommen, wenn das Produkt aus mehreren Sorten des Rohstoffes gemacht werden soll.

4) Die sogenannten Vorbereitungsprozesse, durch welche der Stoff so weit umgewandelt wird, dass hierauf der Hauptprozess vorgenommen werden kann.

5) Der Hauptprozess, durch welchen die wesentlichste Umwandlung des Stoffes bewirkt wird.

6) Die Nebenprozesse und Zurichtungsprozesse, welche auf den Hauptprozess folgen, um dem Produkt noch gewisse in der Regel untergeordnete Eigenschaften zu ertheilen.

7) Die Hilfsprozesse, welche den Zweck haben, die übrigen Prozesse zu unterstützen Hierher gehört unter Anderm der Transport der Stoffe.

Von der Beschaffenheit des Rohstoffes und des Produktes hängt es ab, welche von diesen Partialprozessen nothwendig sind, und in welcher Ordnung sie auf einander zu folgen haben. Die Reinigungsprozesse gehen in der Regel allen andern voran. Die Sortirungsprozesse müssen zuweilen vor, zuweilen nach dem Hauptprozess vorgenommen werden. Die Vorbereitungsprozesse gehen jederzeit dem Hauptprozess voran.

Diese Theilung der Arbeit durch Auflösung derselben in einzelne Operationen und auf einander folgende Durchführung der letzteren unterscheidet die Maschinenarbeit wesentlich von der Handarbeit, bei welcher der Hauptprozess oftmals ohne vorhergehende Reinigung und Vorbereitung des Stoffes vorgenommen werden kann, indem alle Nebenoperationen gleichzeitig mit dem Hauptprozess durch die Intelligenz der Hand ausgeführt werden.

Zur Erläuterung des Gesagten wollen wir beispielsweise den Mahl- und Spinnprozess betrachten.

Der Mahlprozess besteht im Wesentlichen in einer Zerreibung der Getreidekörner und darauf folgenden Sortirung des zerriebenen Gutes in Mehl, Gries und Kleie. Dieser Prozess kann nicht mit einem Schritt, sondern muss durch eine Reihenfolge von Operationen bewerkstelligt werden.

Das Getreide ist in dem Zustande, wie es vom Landmann zu Markt gebracht wird, nur sehr unvollkommen gereinigt. Es sind immer noch erdige Theilchen, kleine Steinchen, kleine Samenkörner, Halme und Aehren darunter. Manche Getreidesorten, bei welchen die Körner mit einer sie umschliessenden Hülse so fest verwachsen sind, dass durch das Dreschen die Enthülsung nicht erfolgt, werden in dem unenthülsten Zustand zu Markte gebracht. Dann sind bei allen Getreidesorten die Körner selbst durch daran haftenden Staub und durch die in der Regel verfaulten Keime verunreinigt.

Da diese Beimengungen und Verunreinigungen nicht nur keinen Nahrungsstoff enthalten, sondern noch überdies die Mahlprodukte verschlechtern würden, indem sie die Dauerhaftigkeit derselben vermindern und den daraus bereiteten Speisen einen unangenehmen Beigeschmack ertheilen, so ist ihre sorgfältige und vollständige Beseitigung vor dem Vermahlen eine wesentliche Bedingung zur Erzielung einer guten Qualität der Produkte. In den kleinen unvollkommen eingerichteten Landmühlen werden diese Reinigungen in der Regel gar nicht vorgenommen, wohl aber in allen besser eingerichteten grössern Mühlen, welche die Städte mit bessern Produkten zu versehen haben, so wie auch in den grösseren Handelsmühlen.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass die vollständige Reinigung des Getreides von Steinchen, erdigen Theilchen, von Strohhalmen und Aehren, von den die Körner umschliessenden Hülsen, und endlich von dem an den Körner haftenden Staub und Schmutz, nicht durch eine einzige Operation geschehen kann, sondern dass zur Beseitigung jeder einzelnen Unreinigkeit eine besondere Operation vorgenommen werden muss, und dass dies vor dem Vermahlen geschehen muss.

Die Hauptoperation des Mahlprozesses: das Zerreiben des gereinigten Getreides zwischen den Steinen liefert zunächst ein Gemenge von Mehl, Gries, Schrot und Kleien, die hierauf von einander gesondert werden müssen. Bei dem neueren vorzugsweise in Handelsmühlen eingeführten Mahlprozess wird das Mahlgut nur einmal oder höchstens zweimal durch die Steine gelassen, und dann sorgfältig nach Mehl, Gries und Kleien sortirt. Nach dem älteren Verfahren, das noch gegenwärtig in allen kleineren Stadt- und Landmühlen befolgt wird, wird das Mahlgut mehrmals durch die Steine gelassen und jedesmal sortirt. Das erstmalige Durchlassen des Getreides liefert ein Gemenge von Mehl, Gries, Schrot und Kleien, die sogleich von einander gesondert werden. Bei jeder nächstfolgenden Wiederholung der Operation wird jedesmal der Schrot, der durch die unmittelbar vorhergehende Operation erhalten wurde, durch die Steine gelassen, und das sich ergebende Gemenge von Mehl, Gries und Kleien sortirt. Auf diese Weise wird fortgefahren, bis der Schrot die Feinheit des Grieses erreicht hat, der dann von der Kleie befreit wird.

Es ist leicht einzusehen, dass bei diesem älteren Verfahren eine weit vollständigere Sonderung der Kleber- und Stärkmehltheile möglich ist, als bei dem neueren Verfahren. Denn wenn das Mahlgut mehrere Mal durch die Steine gelassen wird, werden die Getreidekörner successiv von aussen nach innen abgerieben, jede Mehlsorte, welche man dabei erhält, muss daher von einem andern Theil des Getreidekorns herrühren. Die erste Sorte, die vorzugsweise von den äusseren Zellen herrührt, muss daher die kleberreichste sein, und jede folgende Sorte wird etwas weniger Kleber- und dafür mehr Stärkmehltheile enthalten.

Man erhält also auf diese Weise verschiedene Mehlsorten, die sich nicht nur nach der Grösse der Theilchen, sondern auch nach ihrer chemischen Substanz unterscheiden. Bei dem neueren Verfahren, wobei das Getreide nur einmal durch die Steine gelassen und vollständig zerrieben wird, findet eine so vollständige Vermengung aller Theile statt, dass nachher eine so vollständige Scheidung derselben gar nicht mehr möglich ist. Doch aber wird auch bei diesem Verfahren das Mehl mehr Kleber enthalten, als der Gries, indem das Mehl vorzugsweise von den Theilen herrühren muss, die der zerreibenden Wirkung der Steine am längsten ausgesetzt sind, d. h. von jenen Theilen, die zuerst von den Körnern losgerissen werden, mithin von den äusseren an Kleber reichsten Zellen

Aus dieser oberflächlichen Andeutung des Mahlprozesses wird man die Nothwendigkeit der Zerlegung des Gesammtprozesses in einzelne Partialprozesse und die Wichtigkeit des Studiums dieser Prozesse erkennen.

Als zweites Beispiel möge noch der Spinnprozess in Kürze angedeutet werden.

Der Baumwollspinnprozess zerfällt in folgende Partialprozesse:

1) Das erste Auflockern der Baumwolle.

2) Das mehrmalige Schlagen derselben zur vollständigen Auflockerung der Wolle und zur Beseitigung des Staubes und der Samenkörner.

3) Das Kämmen oder Krempeln der Wolle, welches den Zweck hat, den ursprünglich wirr durch einander liegenden Wollfasern eine parallele Richtung zu geben, und ein gleichförmig dichtes bandartiges Gebilde zu erhalten.

4) Das mehrmalige Doubliren der Kardenbänder, wodurch zuletzt abermals ein bandartiges Gebilde erhalten wird, das aber gleichförmiger ist, als das Kardenband.

5) Das mehrmalige Strecken und Doubliren, wodurch zuletzt wiederum ein Band erhalten wird, in welchem die Wollfasern äusserst gleichförmig und vollkommen parallel gelagert sind.

6) Das Vorspinnen, wodurch ein schwach gedrehter Faden erhalten wird.

7) Das Fertigspinnen, das den fertig gedrehten Faden liefert.

8) Das Abhaspeln, Sortiren und Verpacken des fertigen Garns.

42) *Die Werkzeuge.* Die Durchführung jeder einzelnen Operation vermittelst einer Maschine erfordert wenigstens Ein Werkzeug, oftmals aber auch mehrere. Das Werkzeug als das unmittelbar Wirkende muss der Natur des Prozesses entsprechen, kann daher, wenn es nicht bereits existirt, sondern erst ausgedacht werden soll, nur durch eine gründliche Analyse des Prozesses zu Stande gebracht werden. In der Erfindung des für einen Prozess ganz geeigneten Werkzeuges liegt daher der wesentlichste Theil der Erfindung einer Arbeitsmaschine, denn wenn einmal das rechte Werkzeug und die Art und Weise, wie es zu wirken hat, ausgemittelt sind, hat man in der Regel nur noch gewisse mechanische Combinationen auszudenken, was gegenwärtig gleichsam nur als ein Redaktionsgeschäft betrachtet werden darf. Die Erfindung eines Werkzeuges ist eine unbestimmte Aufgabe, die viele Lösungen zulässt, denn jedes Arbeitsprodukt kann durch sehr verschiedene Werkzeuge hervorgebracht werden. Aber nicht jedes derselben wird gleich gut arbeiten, d. h. gleich viele und gleich gute Produkte mit dem gleichen Kraftaufwand liefern, sondern es gibt in der Regel immer nur Eines, das dem Zweck ganz angemessen ist, und es darf weder Zeit noch Mühe gespart werden, um diese beste aller möglichen Auflösungen ausfindig zu machen. Ist einmal das Werkzeug im Wesentlichen ausgedacht, so muss dann mit aller Schärfe weiter ausgemittelt werden: 1) seine zweckmässigste Form; 2) das geeignetste Construktionsmaterial; 3) die dem Zwecke am besten entsprechende Bewegungsart; 4) die vortheilhafteste Geschwindigkeit seiner Thätigkeit; 5) seine Grösse; 6) die für eine

gewisse Produktion erforderliche Anzahl derselben; 7) der zu seiner Bewegung erforderliche Kraftaufwand.

Diese Punkte sollen durch die folgenden Bemerkungen näher erläutert werden:

1) Die zweckmässigste Form der Werkzeuge wird vorzugsweise durch die Angriffstheile bestimmt. Hierher gehört z. B. die Schärfung der Mühlsteine, die Form der Schneiden aller Schneidewerkzeuge, die Form der Kanellirungen der Eisenstreckwalzen u. s. f.

2) Das zweckmässigste Material für das Werkzeug. Bei keinem Maschinentheil kommen so mannigfaltige Materialien in Anwendung, als bei den Werkzeugen; nicht nur die verschiedenen Metalle, sondern auch mineralische, vegetabilische und animalische Produkte werden dazu verwendet, z. B. Stahl für Schneidewerkzeuge. Eisen für drückend oder schlagend wirkende Werkzeuge, z. B. Hämmer, Walzen. Messing, Kupfer für solche Werkzeuge, die der Nässe ausgesetzt sind und nicht rosten sollen. Steine zu zerreibend wirkenden Werkzeugen, wie die Mühlsteine. Gewebe aus Hanf, Baumwolle, Schafwolle und Seide zu Siebwerkzeugen. Papier zu den Kalanderwalzen. Leder, elastisches Harz, Guttabercha zu solchen Werkzeugen, die eine elastisch weiche Oberfläche haben sollen.

3) Die Grösse und Anzahl der Werkzeuge. Diese Elemente richten sich theils nach der Natur des Prozesses, theils nach der Quantität der Produktion, die gefordert wird. Für grobe Arbeiten, wobei es sich vorzugsweise nur darum handelt, einen mächtigen Widerstand zu bewältigen, wie z. B. zum Schmieden und Strecken starker Eisenbarren, ist es in der Regel am zweckmässigsten, ein einziges oder einige wenige, aber grosse gewichtige Werkzeuge anzuwenden. Feine zarte Operationen erfordern dagegen in der Regel feine und kleine Werkzeuge, und da ein einzelnes derselben nicht viel produziren kann, so müssen deren oft in grosser Anzahl angewendet werden. Im Allgemeinen kann man sagen, dass sich die zweckmässigste Grösse der Werkzeuge aus der Natur des Prozesses und die nöthige Anzahl derselben aus der Quantität der Produktion ergibt.

4) Bewegungsart des Werkzeuges. Die Bewegungen der Werkzeuge sind äusserst mannigfaltig und oftmals sehr zusammengesetzt. Das letztere ist vorzugsweise dann der Fall, wenn aus den Elementartheilen eines Stoffes regelmässige Gebilde hervorgebracht werden sollen, in welche jene Theile auf eine ganz bestimmte Weise neben einander gelagert, und mit einander verbunden sein müssen. Im Allgemeinen darf man als Regel aufstellen, dass die continuirlich und rotirend arbeitenden Werkzeuge am meisten und am gleichförmigsten produziren, die einfachsten Bewegungsmechanismen erfordern, und auch am wenigsten

Kraft erfordern, demnach allen andern Werkzeugen vorzuziehen sind. Man wird daher, wenn es sich um die Erfindung einer Arbeitsmaschine handelt, jederzeit bemüht sein, den Werkzeugen wo möglich eine solche Form und Einrichtung zu geben, dass sie mit gleichförmig rotirender Bewegung ihre Funktionen gehörig verrichten können. Nebst der rotirenden Bewegung ist dann auch die geradlinig hin- und hergehende, wie sie durch eine Kurbel leicht hervorgebracht werden kann, in jeder Hinsicht, insbesondere aber wegen ihrer Sanftheit sehr vortheilhaft.

5) Die Geschwindigkeit der Werkzeuge. Dieses Construktionselement ist ebenfalls sehr wichtig, indem von demselben die Quantität und Qualität der Produktion, so wie auch die Dauerhaftigkeit einer Maschine abhängt. Hinsichtlich der Quantität der Produktion ist im Allgemeinen eine grosse Geschwindigkeit der Werkzeuge vortheilhaft, so lange dieselbe innerhalb gewisser Grenzen bleibt, bei deren Ueberschreitung häufig Unterbrechungen und Störungen in der Arbeit eintreten. Hinsichtlich der Qualität der Produkte gibt es im Allgemeinen für jedes Werkzeug eine gewisse Geschwindigkeit, bei welcher es seine Funktion am besten zu verrichten vermag. Mühlsteine z. B. dürfen nicht zu langsam aber auch nicht zu schnell gehen, denn im ersteren Falle wirken sie gar nicht zerreibend, sondern nur quetschend, und im letzteren Falle tritt leicht eine für die Qualität des Mehles nachtheilige Erhitzung ein. Die für Quantität und Qualität der Produktion vortheilhafteste Geschwindigkeit der Mühlsteine ist daher die grösste Geschwindigkeit, bei welcher eine nachtheilige Erhitzung noch nicht eintritt, und diese ist der Erfahrung zufolge 8 bis 9 ^{m} Umfangsgeschwindigkeit. Holzsägen sollen mit der grössten Geschwindigkeit arbeiten, die mit der Dauerhaftigkeit der Maschine verträglich ist, denn je schneller die Sägzähne in die Holzfasern eingreifen, desto leichter erfolgt das Losreissen derselben, wo hingegen wenn die Geschwindigkeit gering ist, eine Erschütterung der ganzen Holzmasse, statt eines Losreissens der Fasern eintritt. Daher sollen sich Kreissägen so schnell bewegen, als es die Erhaltung der Zapfen nur immer zulässt; geradlinig schneidende Sägen müssen aber eine mässige Geschwindigkeit erhalten, damit durch die abwechselnde Beschleunigung und Verzögerung der auf- und nieder- oder hin- und hergehenden Massen des Sägrahmens und der Schubstange der Zusammenhang aller Theile nicht zerrüttelt wird. Die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Werkzeuges kann nur in dem Fall durch Rechnung bestimmt werden, wenn die Natur der zu bewältigenden Widerstände genau bekannt ist, in allen andern Fällen muss dies durch die Erfahrung bestimmt werden.

Mit der Kenntniss der Stoffe, der Produkte, der Prozesse und der Werkzeuge ist der technologische Theil der Aufgabe geschlossen und es beginnt hierauf das Geschäft des Mechanikers, welches darin besteht, die Mittel ausfindig zu machen, wodurch den Bedingungen des technologischen Prozesses entsprochen werden kann.

43) *Anordnung einer Werkzeugmaschine.* Die Anordnung einer Werkzeugmaschine besteht im Wesentlichen in der Auffindung derjenigen Mechanismen, durch welche die für einen gewiss Prozess bestimmten Werkzeuge in solche Bewegungen versetzt werden, wie es die Durchführung des Prozesses erfordert. Derjenige Bestandtheil einer Arbeitsmaschine, welcher zuerst und in der Regel von einer Transmission aus getrieben wird, ist meistentheils eine Welle. Daher bestehen die Werkzeugmaschinen zorzugsweise aus solchen Mechanismen, die zur Umwandlung einer gleichförmig drehenden Bewegung in irgend eine andere Bewegung dienen. Ueber das bei Anordnung einer Werkzeugmaschine zu befolgende Verfahren kann man als wohlzubeachtende Regel aussprechen, dass für jedes Werkzeug und für jede besondere Art seiner Bewegung ein besonderer Mechanismus ausgedacht oder in Anwendung gebracht werden muss. Eine Maschine, die viele Werkzeuge enthält, von denen jedes eine zusammengesetzte Bewegung zu machen hat, wird daher viele Bewegungsmechanismen enthalten, von denen jeder einzelne eine besondere Funktion zu verrichten hat, die aber alle zusammen den geometrischen Zusammenhang der Maschine ausmachen.

Die mannigfaltigen Bewegungsmechanismen, deren man zur Anordnung der Arbeitsmaschinen bedarf, müssen nicht jederzeit neu erfunden werden. Dies war allerdings zu der Zeit nothwendig, als die Spinn- und Dampfmaschinen erfunden wurden, denn damals kannte man der Mechanismen zur Umwandlung der Bewegungen nur sehr wenige; gegenwärtig sind aber deren von jeder Art in sehr grosser Anzahl bekannt, und man findet in der Regel immer einen oder den andern, der in einem vorliegenden Fall gebraucht werden kann, so dass nur für ganz ungewöhnliche Bewegungsbedingungen wahrhaft neue Erfindungen nothwendig sind. Eine sehr genaue und vollständige Kenntniss der bereits erfundenen Bewegungsmechanismen ist daher für die Anordnung der Arbeitsmaschinen äusserst wichtig. Eigentlich wissenschaftliche Kenntnisse helfen dabei sehr wenig, denn nicht durch das allgemeine Denkvermögen, sondern durch die ganz speziellen Vermögen des Formensinnes, Anordnungssinnes und Zusammensetzungssinnes werden mechanische Combinationen zu Stande gebracht. Wer mit diesen Vermögen begabt ist, und dieselben durch vielfache Uebungen ausgebildet hat, wird daher, selbst bei sonst fast gänzlichem Mangel an geistiger Bildung, sehr mannigfaltige und sinnreiche Erfindungen an den Tag zu fördern vermögen, und wem jene Vermögen fehlen, wird selbst mit sonst sehr bedeutenden und vielseitigen Begabungen auch nicht den unbedeutendsten Mechanismus zu ersinnen im Stande sein. In einem hohen Grade erleichtert man sich aber jederzeit die Sache durch ein methodisch geordnetes Verfahren, indem man zuerst alle zusammengesetzten Bewegungen in einfache Bewegungen auflöst, sodann für jede einzelne derselben einen geeigneten Mechanismus ausdenkt, und endlich die verschiedenen Mechanismen in gehörigen Zusammenhang bringt. Anfänger bringen oft desshalb nichts zu Stande, weil sie diese Regel nicht beachten, sondern gleich Alles auf einmal machen wollen, was eine Unmöglichkeit ist.

44) *Anordnung der Transmission.* Durch die Transmission wird die Kraftmaschine mit der Arbeitsmaschine in einen solchen Zusammenhang gebracht, dass in beiden gleichzeitig die für ihre Thätigkeit geeignetsten Bewegungen und Geschwindigkeiten eintreten können. Es ist nicht genug, dass man nur weiss, welche Bewegungen und Geschwindigkeiten das beste Resultat hervorzubringen vermögen, man muss auch dafür sorgen, dass dieselben auch wirklich eintreten, wenn eine Maschine ausgeführt worden, und dann in Gang gebracht wird, und dies wird durch die gehörige Anordnung der Transmission erreicht. Wird diese nämlich so eingerichtet, dass zunächst die Bewegungsart des Receptors oder der Kraftmaschine in jene des Werkzeuges oder der Werkzeugmaschine umgewandelt wird, und dass ferner die durch die Transmission verbundenen Theile ein Geschwindigkeitsverhältniss erhalten, das genau mit dem Verhältniss ihrer vortheilhaftesten Geschwindigkeiten übereinstimmt, so müssen diese vortheilhaftesten Geschwindigkeiten gleichzeitig und wirklich eintreten, wenn man den Motor in solcher Menge auf den Receptor einwirken lässt, bis in demselben die vortheilhafteste Geschwindigkeit vorhanden ist.

Es sei z. B. eine Mahlmühle durch ein Wasserrad zu treiben. Die vortheilhafteste Geschwindigkeit sei für den Mühlstein 120 Umdrehungen, für das Wasserrad 10 Umdrehungen in jeder Minute, also für den ersteren 12 Mal grösser als für das letztere. Wenn man nun die Transmission vermittelst Räderwerken oder Rollen in der Weise einrichtet, dass die Mühlsteine, wie schnell oder wie langsam auch das Wasserrad gehen mag, 12 Mal so oft umlaufen müssen, als das Wasserrad, so müssen die Mühlsteine auch dann, wenn das Wasserrad in der Minute 10 Umdrehungen macht, 12 Mal so oft, mithin 120 Mal in der Minute umlaufen. Lässt man also auf das Wasserrad so viel Wasser einwirken, bis seine vortheilhafteste Geschwindigkeit von 10 Umdrehungen per 1 Minute eintritt, so bewegen sich dann gleichzeitig die Mühlsteine mit ihrer vortheilhaftesten Geschwindigkeit von 120 Umdrehungen per 1 Minute.

Es sei, um ein zweites Beispiel anzuführen, eine Brettsäge, die durch eine Turbine getrieben werden soll, anzuordnen. Die vortheilhaftesten Geschwindigkeiten seien für die Säge 200, für die Turbine

20 Umdrehungen per 1 Minute. Verwandelt man zunächst durch Anwendung einer Schubstange und Kurbel die geradlinig auf- und niedergehende Bewegung der Säge in eine drehende der Kurbelwelle, verbindet ferner diese Kurbelwelle mit der Turbinenaxe durch Räder oder Rollen in der Weise, dass erstere 10 Mal so oft umlaufen muss, als die letztere, so ist die Transmission richtig angeordnet; denn wenn man auf die Turbine so viel Wasser einwirken lässt, bis sie in einer Minute 20 Umdrehungen macht, so wird die Säge vermöge der Transmission 10 Mal so viel, mithin $20 \times 10 = 200$ Schnitte machen müssen.

Die Transmission ist zuweilen äusserst einfach, und besteht oft nur aus einer das Werkzeug mit dem Receptor direkt verbindenden Stange. Dies ist z. B. der Fall bei den Bergwerkspumpen, die durch Wassersäulenmaschinen getrieben werden; ferner bei dem von Nassmiht erfundenen Dampfhammer.

In manchen Fällen wird man gezwungen, die Kraftmaschine in einer grossen Entfernung von der Arbeitsmaschine aufzustellen, und dann bedient man sich zur Transmittirung der Kraft eines sogenannten Feldgestänges.

Zum Betrieb der Fabriken besteht die Transmission meistens aus einem System von Wellen, die durch verzahnte Räder oder durch Rollen und Riemen in Verbindung gesetzt werden. Ein Räderpaar oder ein Rollenpaar, das zur Verbindung zweier Wellen dient, wird eine »Uebersetzung« genannt.

Da eine weitläufige und complizirte Transmission jederzeit viele Kraft erschöpft, ungenaue Bewegungen verursacht und kostspielig ist, so muss man jederzeit trachten, dieselbe so einfach als möglich einzurichten. Um dies zu erreichen, muss man folgendes beachten:

1) Zweckmässige Aufstellung aller zu betreibenden Maschinen. Die am meisten krafterschöpfenden Maschinen müssen in die Nähe der Kraftmaschine gebracht werden. Alle Maschinen sollen so dicht neben einander gestellt werden, als es die Bedienung und Behandlung derselben gestattet. Die Aufstellung soll ferner von der Art sein, dass möglichst wenige Wellenverzweigungen nothwendig werden.

2) Geeignete Geschwindigkeit der Bewegung. Wir werden in der Folge zeigen, dass eine Transmission, die einen gewissen Effekt zu übertragen hat, starke Querschnittsdimensionen erhalten muss, oder schwache erhalten kann, je nachdem sie langsam oder schnell läuft. Schnelllaufende Transmissionen sind daher nicht so kosspielig, als langsam gehende.

3) Wahl und Einrichtung der Kraftmaschinen. Je nachdem die vortheilhaftesten Geschwindigkeiten der Kraftmaschine und der Arbeits-

maschine nahe übereinstimmen oder bedeutend von einander abweichen, wird man im ersteren Falle wenige, im letzteren Falle viele Uebersetzungen nothwendig haben. Man soll daher hinsichtlich der Transmission diejenige Kraftmaschine wählen, deren Geschwindigkeit, ohne Nachtheil für den Effekt, der Geschwindigkeit der Arbeitsmaschine am nächsten gebracht werden kann; wo möglich wird man sogar suchen, die Räderübersetzungen ganz entbehren zu können. Der Maschinen, die ohne Räderübersetzungen arbeiten, gibt es in grosser Anzahl Es gehören hierher: a) die Bergwerkspumpen, es sei nun, dass sie durch Wassersäulenmaschinen oder durch Dampfmaschinen getrieben werden. b) Alle mit Ruderrädern versehenen Dampfschiff-Treibapparate. Nur bei Schleppschiffen findet man zuweilen Räderwerke angewendet. c) Die Lokomotive der Eisenbahnen. d) Die durch kleine ungemein schnell laufende Wasserräder getriebenen Mahlmühlen, Sägen und anderartigen Maschinen, welche vorzugsweise in Gebirgsgegenden, in Tyrol und Graubündten angetroffen werden. In der Regel ist jedoch die Weglassung der Räderübersetzung mit einer unvortheilhaften Benutzung des Motors verbunden; so z. B. bei der Lokomotive, deren schneller Lauf durch eine sehr nachtheilige, äusserst schnelle Bewegung der Dampfkolben erzielt wird; noch mehr aber bei den oben angeführten kleinen Wasserrädern, deren Nutzeffekt $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ vom absoluten Effekt des Motors beträgt. Dessen ungeachtet sind es aber doch für wasserreiche und geldarme Gebirgsgegenden sehr zweckmässige Einrichtungen.

Manchmal ist es zweckmässig, eine Maschine oder ein ganzes System von Maschinen mit einer Kraftmaschine und von einer Transmission aus zu treiben. In anderen Fällen sind zum Betrieb einer Maschine oder eines Systems von Maschinen mehrere Kraftmaschinen nöthig, die alle auf eine und dieselbe Transmission einwirken. Endlich gibt es noch Fälle, in denen es zweckmässig erscheint, mehrere Kraftmaschinen, von denen jede auf eine besondere Transmission einwirkt, in Anwendung zu bringen.

Das erstere ist der Fall, wenn die zu betreibenden Maschinen nach ihrem Bau, nach ihren Geschwindigkeiten und nach der Natur der Prozesse, zu deren Durchführung sie bestimmt sind, nicht zu sehr von einander abweichen.

Die Anwendung zweier oder mehrerer auf eine und dieselbe Transmission einwirkender Kraftmaschinen wird in folgenden Fällen nothwendig: a) wenn die gesammte Betriebskraft so gross ist, dass sie nicht wohl durch eine einzige Kraftmaschine hervorgebracht werden kann. b) Wenn eine vorhandene Wasserkraft für den Betrieb einer Fabrik nicht hinreicht und der fehlende Theil durch eine Dampfmaschine geliefert werden muss. c) Wenn durch die Anwendung einer einzigen Maschine eine zu grosse Ungleichförmigkeit der Bewegung entstünde, wie z. B. bei Dampfschiffen, Lokomotiven und in allen Fällen, wo Dampfmaschinen ohne Schwungräder gebraucht werden müssen.

Die Anwendung mehrerer Kraftmaschinen, von denen jede vermittelst einer besonderen Transmission eine oder mehrere Arbeitsmaschinen bewegt, ist unter folgenden Umständen zweckmässig oder nothwendig: a) wenn die zu betreibenden Maschinen nach ihrer Bauart, Bewegungsart, Geschwindigkeit, und auch nach der Natur der Prozesse, denen sie zu dienen haben, so bedeutend von einander abweichen, dass sie sich wechselseitig in ihrer Thätigkeit stören könnten, und auch viele Räderübersetzungen nothwendig wären, wenn sich diese Maschinen alle von einer einzigen Transmission aus bewegen würden. b) Wenn die Bewegung einzelner der zu betreibenden Maschinen unregelmässig und stossweise erfolgt, während die andern einen sehr gleichförmigen geschmeidigweichen Gang haben sollen, z. B. die Holländer und Papiermaschinen einer Papierfabrik. c) Wenn es die Natur der Prozesse erfordert, dass einige von den zu betreibenden Maschinen ihre Arbeit vollkommen unabhängig von den übrigen sollen verrichten können. d) Wenn einige wenige Arbeitsmaschinen, die eine bedeutende Betriebskraft erfordern, in grosser Entfernung von einander aufgestellt werden müssen. e) Wenn mehrere Motoren angewendet werden müssen, die nicht gut zusammenwirken können, z. B. Dampfkraft und Pferde.

Die Bestimmung der Form und Stärke aller Theile einer Transmission ist eine Aufgabe der speziellen Maschinenlehre, doch wird Einiges hierüber in einer der folgenden Nummern besprochen werden.

45) *Die Regulatoren.* Durch die Transmission, so wie überhaupt durch den geometrischen Zusammenhang aller Theile einer Maschine wird nur allein das richtige Verhältniss der Geschwindigkeiten aller Theile hervorgebracht. Sie bewirkt nur, dass die vortheilhafteste Geschwindigkeit der Werkzeuge gleichzeitig mit jener des Receptors eintreten muss; die Herbeiführung dieser vortheilhaftesten Geschwindigkeit und, wenn sie eingetreten ist, die dauernde Erhaltung derselben steht aber nicht in ihrer Macht, sondern dieses richtet sich nach den Kräften, Widerständen und Massen. Sind die sämmtlichen Widerstände, welche der Bewegung einer Maschine entgegenwirken, unveränderlich, und besteht dieselbe nur allein aus unbeweglichen und aus rotirenden Theilen, so wird der vortheilhafteste und gleichförmige Beharrungszustand schon dadurch herbeigeführt, indem man auf die Maschine eine gewisse Menge der motorischen Substanz gleichförmig einwirken lässt. Sind dagegen bei einer Maschine die Verhältnisse von der Art, dass ein ungleichförmiger oder periodisch veränderlicher Bewegungszustand eintreten muss, so ist

es sowohl für die Aufsammlung der Kraft des Motors durch den Receptor als für die Thätigkeit der Werkzeuge von Wichtigkeit, die Bewegung der Maschine durch Anwendung geeigneter Mittel in der Weise zu reguliren, dass sich die Bewegung von dem vortheilhaftesten Zustand nie zu weit entfernen könne. Die zu diesem Zwecke dienenden Mittel werden „Regulatoren" genannt, und deren gibt es vorzugsweise dreierlei Arten, nämlich: Schwungräder, Gegengewichte, und solche, durch welche die Einwirkung des Motors auf den Receptor regulirt wird.

Das Schwungrad wird vorzugsweise angewendet, um zu grosse Geschwindigkeitsänderungen, die in der rotirenden Bewegung einer Welle eintreten könnten, zu verhindern. Nennt man M die Masse des Schwungrings eines Schwungrades, W die Differenz der Wirkungsgrössen, die in irgend einer Zeitintervalle von den Kräften produzirt und von den Widerständen consumirt werden, v und V die Geschwindigkeiten des Schwungringes am Anfange und am Ende dieser Zeitintervalle, so hat man, in der Voraussetzung, dass die lebendige Kraft aller Massen der Maschine gegen jene des Schwungrades unbedeutend ist, annähernd:

$$M\,(V^2 - v^2) = W.$$

Hieraus folgt:

$$V - v = v \left\{ \sqrt{1 + \frac{W}{M\,v^2}} - 1 \right\}$$

Da aber gewöhnlich die Wirkungsgrösse W im Vergleich zur lebendigen Kraft $M\,v^2$ des Schwungrades klein ist, so darf man annähernd

$$\sqrt{1 + \frac{W}{M\,v^2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{W}{M\,v^2}$$

setzen, und dann wird

$$V - v = \frac{1}{2}\,\frac{W}{M\,v}$$

woraus zu ersehen ist, dass die Geschwindigkeitsänderung des Schwungringes der von demselben aufgenommenen Wirkungsgrösse W direkt und der Masse so wie der Geschwindigkeit des Schwungringes verkehrt proportional ist. Ein schweres und schnelllaufendes Schwungrad vermag demnach die Bewegung einer Welle und mithin auch die Bewegung einer ganzen Maschine in der Weise zu beherrschen, dass in derselben bedeutende Geschwindigkeitsänderungen selbst dann nicht eintreten können, wenn der Unterschied zwischen den Wirkungsgrössen, die in einer bestimmten Zeitintervalle von den Kräften produzirt und von den Widerständen consumirt werden, einen bedeutenden Werth erreicht. Man bedient sich der Schwungräder 1) zur Regulirung der Bewegung der

Hammerwerke, der Walzwerke und überhaupt aller rotirenden Maschinen, bei welchen der Widerstand durch zufällige Ursachen veränderlich ist; 2) zur Verminderung der Ungleichförmigkeiten, welche bei Anwendung der Kurbel eintreten müssen; insbesondere werden die ihren Ort nicht verändernden Dampfmaschinen mit Schwungrädern versehen.

Die Schwungmassen können nur in dem Falle durch Rechnung genau bestimmt werden, wenn die Ungleichförmigkeiten der Bewegung durch bekannte regelmässig wiederkehrende Ursachen veranlasst werden. Dies ist z. B. bei der Kurbelbewegung der Fall, für welche bereits in Nr. 21 II. Theil die Massenbestimmung in einem speziellen Fall gezeigt wurde. Wirken hingegen die Ursachen, welche die Ungleichförmigkeiten veranlassen, unregelmässig, so ist eine genaue Bestimmung der Schwungmassen durch Rechnung nicht möglich; doch aber darf man in diesen Fällen als Regel aussprechen, dass die lebendige Kraft, welche der mittleren Geschwindigkeit des Schwungrades entspricht, dem Nutzeffekt der Maschine proportional sein soll. Nennt man also:

G das Gewicht des Schwungringes;
V die mittlere Geschwindigkeit desselben;
N die Pferdekraft der Maschine;
$\mathfrak{A}$ eine gewisse Constante, deren Werth nach der Beschaffenheit der Maschine und nach dem durch das Schwungrad hervorzubringenden Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung durch Erfahrung zu wählen ist;

so hat man:

$$\frac{G}{2\,g} V^2 = 75\,\mathfrak{A}\,N$$

demnach:

$$G = \frac{2\,g\,75\,\mathfrak{A}\,N}{V^2}$$

Der Werth von $\mathfrak{A}$ variirt von 30 bis 60, d. h. die Massen dieser Schwungräder sollen so gross genommen werden, dass die lebendige Kraft, welche der mittleren Geschwindigkeit entspricht, so gross ist, als die Wirkungsgrösse, welche der Motor in 30 bis 60 Sekunden entwickelt.

Das zweite zur Regulirung der Bewegung in manchen Fällen brauchbare Mittel sind die Gegengewichte. Ihre Anwendung ist vorzugsweise zweckmässig: 1) wenn sich die Schwerpunkte einzelner Maschinentheile abwechselnd auf und nieder bewegen; 2) wenn eine Maschine gewisse Gewichte ruckweise zu heben hat; 3) wenn sehr veränderliche, aber regelmässig wiederkehrende Widerstände zu überwinden sind. Die Gegengewichte müssen eine solche Grösse erhalten und in der Weise angebracht werden, dass durch dieselben in der ganzen Maschine eine möglichst gleichförmige Bewegung eintritt.

Auf diese Weise werden z. B. die Kurbelgewichte an den Lokomotiven balancirt, indem man an den Treibrädern den Kurbeln gegenüber grosse Gewichte anbringt. — Bei einer gewöhnlichen Baumsäge sind mehrere Ursachen vorhanden, welche Ungleichförmigkeiten der Bewegung veranlassen, nämlich: 1) der Kurbelmechanismus; 2) das Gewicht der Kurbel, der Schubstange und des Sägrahmens sammt Säge; 3) der ungleiche Widerstand, den die Säge verursacht, indem sie nur beim Niedergange einschneidet, beim Aufgang aber leer läuft; 4) der periodisch wiederkehrende Widerstand, den die Bewegung des Blockwagens verursacht.

Die Ungleichförmigkeiten, welche alle diese Ursachen hervor zu bringen streben, werden grösstentheils gehoben, indem man an die Kurbelaxe ein Schwungrad anbringt und dieses noch überdies mit einem geeigneten Gegengewichte versieht. — Der ungleiche Widerstand, den die Pumpen verursachen, wenn dieselben nur mit einem und einfach wirkenden Cylinder versehen sind, kann wohl auch durch Gegengewichte beseitigt werden; für mächtigere Pumpen dieser Art, wie sie in Bergwerken vorkommen, würden jedoch die Gegengewichte so ungeschickt schwer ausfallen, dass man es vorzieht, einfach wirkende Betriebsmaschinen und namentlich einfach wirkende Dampfmaschinen oder Wassersäulenmaschinen anzuwenden.

Die Regulirung der Bewegung durch das dritte der früher genannten Mittel geschieht, indem man durch eine geeignete Vorrichtung bewirkt, dass die Einwirkung des Motors auf die Receptoren bei jeder Geschwindigkeitszunahme der Maschine vermindert, bei jeder Geschwindigkeitsabnahme vergrössert wird. Diese Vorrichtungen, deren wesentlichster Bestandtheil durch den Watt'schen Schwungkugelregulator gebildet wird, entsprechen jedoch nur sehr unvollkommen ihrem Zwecke. Sie allein vermögen die Bewegung nicht zu beherrschen, denn so wie Ursachen zu grösseren Ungleichförmigkeiten vorhanden sind, reguliren diese Vorrichtungen immer entweder zu schwach oder zu stark, oder zur unrechten Zeit, meistens zu langsam, daher zu spät. Wohl aber können sie gebraucht werden, um die Regulirung der Wirkung eines Schwungrades in dem Fall zu unterstützen, wenn ein sehr hoher Grad von Gleichförmigkeit der Bewegung gefordert wird.

Die Theorie dieser und anderer Regulatoren, die zu ganz speziellen Zwecken dienen, z. B. die Windfänge, Uhrenhemmungen, Bremsen etc., übergehen wir hier, wo wir uns in keine Spezialitäten einlassen wollen.

45) *Construktion der Maschinentheile. Allgemeiner Grundsatz.* Ist einmal die Anordnung einer Maschinenanlage im Allgemeinen und in allen wesentlichen Theilen ausgemittelt, so kennt man dadurch die

sämmtlichen Theile, aus welchen das Ganze zu bestehen hat, und deren nothwendigen geometrischen Zusammenhang, und kennt dann ferner auch von jedem einzelnen Maschinentheil: seine Grundform, seine Grösse mit Ausschluss der Querschnittsabmessungen, den Effekt, welchen derselbe zu übertragen hat, die Geschwindigkeit seiner Bewegung, und endlich auch die Kräfte, denen er zu widerstehen hat. Es ist mithin durch die allgemeine Anordnung Alles gegeben, was der Construkteur zu wissen braucht, um für jeden Bestandtheil das zweckmässigste Material, seine Form und seine Dimensionen bestimmen zu können.

Es ist hier nicht unsere Absicht, die Construktion der Maschinentheile im Speziellen zu behandeln, sondern wir beschränken uns auf die Erläuterung der allgemeinen Grundsätze, die bei der Construktion der Maschinentheile zu beachten sind:

Die Bedingungen, welchen jeder Maschinenbestandtheil entsprechen muss, um seinen Zweck erfüllen zu können, sind im Allgemeinen folgende:

1) Hinreichende Stärke. Zunächst muss jeder Bestandtheil so stark gemacht werden, dass er unter der Einwirkung der Kräfte nicht bricht. Da aber jeder Bestandtheil, um dem geometrischen Zusammenhang zu entsprechen, eine ganz bestimmte und unveränderliche Form und Grösse haben soll, so ist es nicht genug, wenn er nicht bricht, sondern er muss auch so stark gemacht werden, dass er durch die auf ihn einwirkenden Kräfte seine Grundform (welche er nur dann besitzt, wenn auf ihn gar keine äusseren Kräfte einwirken) gar nicht merklich verändert, denn nur unter dieser Voraussetzung ist es möglich, den durch die Anordnung vorgeschriebenen geometrischen Zusammenhang aller Theile wenigstens annähernd zu realisiren.

2) Geringe Abnützung. Die Angriffspunkte zweier Maschinentheile pressen sich wechselseitig und bewegen sich gegen einander; daraus entstehen nothwendig Reibungen, wodurch die angreifenden Theile mit der Zeit ihre ursprüngliche Form und Grösse verlieren und ihrer Bestimmung nicht mehr befriedigend entsprechen können. Es muss daher bei der Construktion der Maschinentheile alles, was gegen derlei Abnützungen schützen kann, wohl beachtet werden.

3) Geringer Reibungswiderstand. Die Erfüllung dieser Bedingung ist nur dann von Wichtigkeit, wenn eine äusserst ökonomische Verwendung des Motors gefordert wird; in allen andern Fällen ist es genügend, wenn dafür gesorgt wird, dass der Reibungswiderstand nicht grösser ausfällt, als er unvermeidlich sein muss, um anderen wichtigeren Bedingungen entsprechen zu können. Man darf jedoch nie unterlassen, den Reibungswiderstand möglichst zu vermindern, wenn man sich dadurch gleichzeitig gegen schädliche Abnützungen schützen kann.

4) Geringer Materialaufwand. Die meisten Maschinentheile werden

aus Eisen, Messing, Stahl, demnach aus einem kostspieligen Material hergestellt; es ist daher von bedeutender Wichtigkeit, die Formen, Dimensionen und sonstigen Verhältnisse, welche auf den Materialbedarf Einfluss haben, so zu wählen, dass die Maschinentheile mit dem geringsten Materialaufwand die hinreichende Festigkeit erlangen.

5) Leichte Ausführung. Die Arbeitskosten betragen im Allgemeinen 5 bis 10 Mal mehr, als der Materialaufwand; es ist daher bei der Construktion jedes Maschinenbestandtheils sehr darauf zu achten, dass keine zwecklosen Schwierigkeiten veranlasst werden. Wohl aber ist bei dem gegenwärtigen Zustande der Maschinenfabriken eine schwierig auszuführende Construktion zulässig, wenn durch dieselbe irgend ein wichtiger Zweck erreicht werden kann.

6) Leichte Aufstellung. Ein wichtiger Umstand, der bei jeder Construktion beachtet werden soll, betrifft die Aufstellung der Maschinen. Eine Maschine mag noch so zweckmässig angeordnet sein, und alle Theile mögen noch so vollkommen ausgeführt worden sein, so wird das Ganze doch keine befriedigenden Resultate liefern, wenn in der Aufstellung der Maschine Fehler vorkommen. Dies ist aber um so schwieriger zu vermeiden, je difficiler es ist, die Maschinenbestandtheile mit der nöthigen Genauigkeit an ihrem rechten Platz zu befestigen. Man muss dahin trachten, alles zu vermeiden, was die Aufstellung einer Maschine erschweren könnte.

7) Wenig Modelle. Die Modelle, welche zur Anfertigung gusseiserner Gegenstände nothwendig sind, verursachen bedeutende Unkosten; man muss daher jederzeit suchen, die Construktion wo möglich so einzurichten, dass die in jeder Maschinenfabrik bereits vorhandenen Modelle benutzt werden können, also nur wenige neu anzufertigen sind.

Es ist leicht einzusehen, dass es wohl selten möglich ist, diesen Bedingungen allein gleichzeitig zu entsprechen, denn manche derselben stehen gegen einander im Widerspruch; indem das, was in einer Hinsicht gut ist, in anderer Hinsicht es nicht ist.

Die zweckmässigste Construktion, d. h. diejenige, für welche die Summe der Nachtheile ein Minimum und die Summe der Vortheile ein Maximum ist, kann daher oft nur nach reiflicher Prüfung mehrerer für den gleichen Zweck anwendbaren Constructionen ausgemittelt werden. Dies ist jedoch in den meisten Fällen nicht schwierig, so wie einmal diejenigen Formen und Dimensionen ausgemittelt sind, durch welche den Festigkeitsbedingungen am besten entsprochen werden kann, und dies ist der Gegenstand, mit welchem wir uns in der nächsten Nummer beschäftigen wollen.

46) *Bestimmung der Stärke der Maschinentheile.* Die Querschnittsdimensionen eines Maschinentheils richten sich theils nach seiner

Hauptgrösse und Grundform, theils nach der Intensität und Angriffsweise der auf denselben einwirkenden Kräfte. Grundform, Hauptgrösse und Angriffsart der Kräfte sind jederzeit durch den geometrischen Zusammenhang gegeben; manchmal sind es auch die Intensitäten der Kräfte, meistentheils ist jedoch von einem zu konstruirenden Maschinenbestandtheil nur der durch ihn zu übertragende Effekt und die Geschwindigkeit seiner Bewegung unmittelbar bekannt, und die Intensität der Kräfte muss dann erst durch Rechnung gefunden werden. Dies geschieht dadurch, indem man den in Kilogramm-Metern ausgedrückten Effekt durch die in Metern ausgedrückte Geschwindigkeit dividirt, mit welcher sich der Angriffspunkt der Kraft bewegt. Wenn z. B. ein Zahnrad von 1·2 Meter Halbmesser in 1 Minute 40 Umdrehungen macht, und einen Effekt von 20 Pferdekräften übertragen soll, so ist die Umfangsgeschwindigkeit desselben $\frac{2\pi \times 1{\cdot}2 \times 40}{60} = 5$ Meter (nahe); der Druck, den die Zähne auszuhalten haben, ist demnach $\frac{20 \times 75}{5} = 300$ Kilogramm.

Da sich die Stärke der Theile nach der Intensität der Kräfte und nicht nach dem Effekt richten, und da die Intensitäten bei einerlei Effekt den Geschwindigkeiten verkehrt proportional sind, so folgt daraus der äusserst wichtige Satz: dass schnell laufende Maschinentheile oder vollständige Maschinen zur Uebertragung gewisser Effekte nur schwache, langsam gehende hingegen starke Querschnittsdimensionen erfordern. Wird diese Regel schon bei der Anordnung der Transmission wohl beobachtet, so kann man dadurch oft weit mehr an Construktionsmaterial ersparen, als durch kleinliche »Tifteleien«, in welchen manche Construkteure ihr Heil zu finden glauben. Den meisten Construkteurs ist jedoch diese Regel wohl bekannt, und sie wird schon seit langer Zeit mit Einsicht und bestem Erfolg angewendet.

Von besonderer Wichtigkeit ist es zu wissen, bis auf den wie vielten Theil ihrer Festigkeit die Maschinentheile durch die auf sie einwirkenden Kräfte in Anspruch genommen werden dürfen. In dieser Hinsicht haben sich bis jetzt die Mehrzahl der Theoretiker gewaltig geirrt, indem sie, ohne die Thatsachen der Wirklichkeit zu berücksichtigen, als Regel aufstellten, dass eine drei- bis fünffache Sicherheit im Allgemeinen genügend sei. Dies ist aber nicht richtig, denn man darf wohl als Regel annehmen, dass von den wirklich bestehenden Maschinen die anerkannt gut construirten nicht zu stark gebaut sind, und bei diesen findet man, dass die Theile bei weitem nicht so stark in Anspruch genommen sind. Um zur Bestimmung der Stärke der Theile zuverlässige Regeln zu erhalten, habe ich alle Arten von Maschinen und von jeder Art die einzelnen Theile hinsichtlich ihrer Festigkeit untersucht, und dabei gefunden, dass zwar gewisse Theile, namentlich Ketten und Seile, bis auf $1/_5$ in Anspruch genommen sind, dass jedoch alle übrigen Theile wenigstens mit zehnfacher Sicherheit construirt sind. Die auf absolute Festigkeit in Anspruch genommenen Theile sind mit zehn-, zwanzig- bis fünfzigfacher Sicherheit construirt. Die auf respektive Festigkeit in Anspruch genommenen mit zehn- bis fünfzehnfacher. Die auf Torsion in Anspruch genommenen mit dreissig- bis fünfzigfacher Sicherheit. Und wenn man bedenkt, dass die Maschinentheile nicht nur den im Normalzustand der Bewegung vorhandenen Kräften, sondern auch jenen Kräften zu widerstehen haben, die oft durch zufällige Ursachen momentan eintreten, oder durch Massenwirkungen entstehen, und dass ferner in den Theilen keine merklichen Vibrationen und Formänderungen eintreten dürfen, so darf man wohl mit Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die gut construirten Maschinen, so wie sie wirklich sind, keine übermässige Stärke haben; die Klugheit räth daher, die Regeln für die Bestimmung der Stärke der Theile einstweilen so einzurichten, dass man mit denselben Dimensionen erhält, wie sie bei anerkannt gut construirten Maschinen gefunden werden, und es der Zukunft zu überlassen, zu entscheiden, ob eine leichtere Bauart die nöthige Sicherheit zu gewähren im Stande ist.

Die Formen und Dimensionen der Theile können entweder durch das Gefühl oder durch Rechnung, oder endlich theils durch das eine, theils durch die andere bestimmt werden.

Das erstere Verfahren beruht auf dem Sinn für Formen, Grössen und Raumverhältnisse, mit welchen man wohl begabt sein muss, um als Construkteur etwas leisten zu können. Das Gefühl für Formen und Grössen muss aber auch durch vielfache Uebungen, Anschauungen und Erfahrungen ausgebildet werden, um mit einiger Sicherheit in jedem besonderen Fall das Rechte treffen zu können. Dies erfordert selbst unter günstigen Umständen einen Zeitaufwand von vielen Jahren, und am Ende, wenn das Gefühl den höchsten Grad von Entwicklung erreicht hat, weiss es sich doch in zahllosen Fällen nicht zu helfen, wenn es ganz allein dasteht, und gar keine Stütze hat, an der es sich halten könnte.

Das zweite Verfahren, welches zur Bestimmung der Formen und Abmessungen nur allein das Mittel der Rechnung in Anwendung bringen will, hat von jeher zu keinem Ziele geführt und wird auch nie zum Ziele führen können, denn es gibt tausenderlei Dinge, die sich entweder gar nicht oder nur mit einem Aufwand von Zeit und gelehrtem Wissen berechnen lassen, der mit dem Zweck, um den es sich handelt, in gar keinem vernünftigen Verhältniss steht. Auch ist die Zahl der Grössen, die man für einen Maschinenentwurf wissen muss, so ausserordentlich gross, dass ihre Berechnung, auch wenn sie möglich wäre, zu endlosen Rechnungen Veranlassung geben muss. Diese ausschliesslich rechnende Methode ist also ganz zu verwerfen.

Das dritte Verfahren, welches Rechnung und Gefühl zu verbinden sucht, bedient sich in jedem besonderen Falle desjenigen Mittels, das am einfachsten, schnellsten und sichersten zum Ziele führt. Es berechnet, was am leichtesten und sichersten durch Rechnung bestimmt werden kann, hält sich an Erfahrungen, wie solche vorhanden sind, und überlässt sich dem Gefühl, wo dieses sich selbst allein zu helfen weiss. Dieses dritte Verfahren ist in jeder Hinsicht den beiden erstern vorzuziehen. Es bietet den grössten Reichthum von Mitteln dar, indem es alle speziellen Methoden in sich vereinigt; gewährt die grösste Sicherheit, indem die Resultate, die auf einem Weg gefunden werden, durch die beiden anderen verifizirt werden können; erfordert keine spezielle Virtuosität und bringt den Anfänger ungemein schnell vorwärts, indem sich dabei Gefühl, Erfahrung und Rechnung wechselseitig so kräftig unterstützen, dass jedes durch die beiden andern ungemein schnell gefördert wird.

Es war von jeher meine Ueberzeugung, dass diese combinirte Methode die einzig richtige sein könne, und dass es möglich sein müsse, auf diesem Wege den Bau der Maschinen und insbesondere die Construktion der Maschinenorgane auf einfache, leicht anwendbare, jedoch wissenschaftlich begründete Regeln zurück zu führen. Die Verwirklichung dieses Gedankens wollte mir jedoch lange Zeit hindurch nicht gelingen, bis ich endlich erkannte, dass das Mittel nicht in einer analytischen oder sonst in einer künstlichen Theorie, sondern dass es in dem Verfahren liegen müsse, das man gleichsam bewusstlos oder instinktiv befolgt, wenn man sich bei einer Construktion rein durch das Gefühl leiten lässt. Durch aufmerksame Beobachtung dieses Verfahrens erkannte ich endlich, dass es nur darauf ankomme, die allgemeine und längst bekannte empirische Regel: „dass die Dimensionen und Formen aller Theile einer Maschine in einem richtigen Verhältniss zu einander stehen sollen“, dadurch auf eine wissenschaftliche Grundlage zu stellen, indem man vermittelst der bekannten Formen für die Festigkeit der Materialien nicht die absoluten Werthe der Dimensionen, sondern nur die Verhältnisse derselben zu irgend einer Hauptdimension aufsucht. Dadurch ist nun eine Construktionsmethode entstanden, die ich die Methode der Verhältnisszahlen nennen will, vermittelst welcher man jeden Anfänger im Maschinenbau in Zeit von 2 bis 3 Monaten dahin bringen kann, jeden Maschinentheil nach gegebenen Bedingungen vollkommen richtig zu construiren. Ich bediene mich dieser Methode seit einer Reihe von Jahren, und der Erfolg, den ich durch Einführung derselben in die Schule erreicht habe, ist von der Art, dass dagegen das, was ich in früherer Zeit durch andere

Methoden zu Stande brachte, als Null und Nichtig erscheint. Wer sich einmal mit dieser Methode vertraut gemacht hat, wird dieselbe gewiss nicht mehr verlassen, denn sie lässt in Bezug auf Sicherheit und Leichtigkeit der Anwendung nichts zu wünschen übrig.

Die Construktion der Maschinen nach der Methode der Verhältnisszahlen geschieht auf folgende Weise: Zuerst wird eine oder werden mehrere vorzugsweise wichtige Dimensionen je nach Umständen direkt durch Rechnung bestimmt, oder nach bekannten Erfahrungen angenommen, oder endlich selbst nur nach dem Gefühl gewählt. Hierauf werden alle diejenigen Grössen und Abmessungen, die mit jenen Hauptgrössen in einer durch Rechnung bestimmbaren Abhängigkeit stehen, durch Verhältnisszahlen bestimmt, was jedoch nach den von mir aufgestellten in den „Resultaten für den Maschinenbau" enthaltenen Regeln ohne alle Rechnung geschieht. Ist auch dies geschehen, so sind hiedurch alle Dimensionen der beweglichen Organe und der Zapfenlager bekannt, und es erübrigt dann nur noch die Construktion der Lagerstühle, Maschinengestelle etc., was ohne Schwierigkeit nach dem Gefühl geschehen kann, indem dieses an den bereits bestimmten Abmessungen hinreichende Anhaltspunkte findet, die es gegen Fehlgriffe schützen.

Ich muss mich auf diese allgemeine Andeutung dieser neuen Construktionsmethode beschränken, denn so leicht ihre Anwendung ist, wenn man sich einmal mit derselben vertraut gemacht hat, so führt doch die Herleitung sämmtlicher Regeln, worauf sie beruht, und die Anleitung ihres Gebrauches zu Weitläufigkeiten, für die wir hier unmöglich Raum gewinnen können. Ich behalte mir aber vor, diesen Gegenstand in der Folge so ausführlich und gründlich zu behandeln, als es die Wichtigkeit desselben verdient, und will hier nur noch einige Bemerkungen über die Anwendbarkeit dieser Methode, über die Herleitung der Regeln, auf welchen sie beruht, und endlich über die Charakteristik der Festigkeitsformen folgen lassen.

47) *Anwendbarkeit der Methode der Verhältnisszahlen.* Die Anwendbarkeit der Methode der Verhältnisszahlen betreffend, verdient zunächst hervorgehoben zu werden, dass dieselbe von jedem besonderen Maasssystem ganz unabhängig ist. Eine Ausnahme hievon machen jedoch die Hauptgrössen, auf welche alle übrigen Dimensionen bezogen werden, und dies sind in der Regel mehrere Zapfen- oder Wellendurchmesser. Je nachdem man also nach dem metrischen Maass oder nach irgend einem Fussmaass construiren will, müssen zuerst diese Durchmesser in Meter oder in Fussen ausgedrückt werden. Die Methode kann selbst dann angewendet werden, wenn die Hauptgrössen, auf welche alle übrigen bezogen werden, in Natura, d. h. in wirklich verzeichneten Linien von bestimmter Grösse gegeben sind, denn man braucht nur diese Linien

so oftmal zu nehmen, als es die Verhältnisszahlen vorschreiben, um alle zu bestimmenden Dimensionen in ihrer natürlichen Grösse zu erhalten. Ferner verdient hervorgehoben zu werden, dass es nach der Methode der Verhältnisszahlen ganz gleichgültig ist, ob es sich um die Construktionen einer ganz kleinen oder einer kolossalen Maschine handelt, ob eine Kraftmaschine, eine Transmission oder eine Arbeitsmaschine zu construiren ist; denn so wie die Peripherie eines Kreises 3·1415 Mal so lang ist, als der Durchmesser, dieser letztere mag nun gross oder klein sein, so sind auch die Verhältnisse der Dimensionen einer Maschine im Allgemeinen ganz unabhängig von ihrer absoluten Grösse.

Nicht selten sind die Verhältnisszahlen eines einzelnen Maschinenbestandtheiles oder sogar einer ganzen vollständigen Maschine innerhalb gewisser Grenzen ganz constant, und dann liefert die Methode der Verhältnisszahlen schon dadurch richtige Construktionen, indem man eine, für einen besonderen Fall richtig entworfene Construktion in einem gewissen Verhältniss vergrössert oder verkleinert. So z. B. können die Zapfenlager jeder besonderen Art und auch andere Maschinentheile, ferner Dampfkessel, Turbinen, Dampfmaschinen und ganze Dampfschiffe mit Maschinen, Kesseln und Treibapparaten innerhalb gewisser Grenzen geometrisch ähnlich gemacht werden.

48) *Die Festigkeitsformen.* Was die Formen betrifft, welche die Maschinentheile erhalten sollen, um mit dem geringsten Materialaufwand eine hinreichende Festigkeit gewähren zu können, so müssen in dieser Hinsicht die statischen Verhältnisse von den dymanischen unterschieden werden. Wenn eine Maschine einen gleichförmigen Beharrungszustand annimmt, sind die Kräfte und Widerstände, welche auf irgend einen einzelnen Bestandtheil einwirken, in jedem Augenblicke im Gleichgewicht; die Construktion dieser Maschinentheile darf daher auf die bekannten statischen Gesetze der Körperfestigkeiten gegründet werden. Nach diesen Gesetzen ist für die absolute Festigkeit eines Körpers dessen Querschnittsform ganz gleichgültig, und ebenso auch seine Länge; für die respektive rückwirkende und Torsionsfestigkeit sind aber solche Querschnittsformen vortheilhaft, bei welchen der grösste Theil des Materials von der Schwerpunktsfaser weit entfernt und insbesondere da angebracht ist, wo eine starke Körperausdehnung statt findet, wie dies bei den gerippten hohlen und durchbrochenen Formen der Fall ist.

Wenn hingegen in einer Maschine bedeutende Massen vorkommen, deren Geschwindigkeiten sich plötzlich oder doch sehr rapid ändern, so müssen die Maschinenbestandtheile, auf welche diese Massen einwirken, im Stande sein, ohne zu brechen, die lebendigen Kräfte, welche jenen Geschwindigkeitsänderungen und Massen entsprechen, in sich aufzunehmen; und um dies leisten zu können, dürfen sie nicht nach statischen, sondern müssen nach dynamischen Gesetzen construirt werden. Nach diesen letztern ist aber die Festigkeit eines Körpers gegen die Einwirkung lebendiger Kräfte dem Volumen des Körpers und dem Quadrat des Festigkeitscoeffizienten direkt, und dem Modulus der Elastizität des Materials verkehrt proportional; man kann also in diesem Falle die Festigkeit nicht durch eine Querschnittsform, sondern muss sie durch das Volumen hervorbringen, daher die gedrungenen Massenformen am besten dem Zweck entsprechen.

Die Richtigkeit des so eben Gesagten wird auch durch die Thatsachen der Wirklichkeit bestätigt, denn man findet bei allen Maschinen, die einen ruhigen gleichförmigen Gang haben, gerippte Formen angewendet, dagegen bei solchen, wo Massenwirkungen auftreten, z. B. Hammerwerken, Walzwerken u. s. f. kräftig gedrungene Formen. Auch ist es eine allgemein bekannte Sache, dass Schmiedeisen und sogar Holz bei gleichem Volumen eine grössere Festigkeit gegen Stösse und Massenwirkung gewähren, als Gusseisen, was daher kommt, dass für die beiden zuerst genannten Materialien der Quotient aus dem Quadrat des statischen Festigkeitscoeffizienten, dividirt durch den Modulus der Elastizität, grösser ist, als für Gusseisen.

49) *Anfertigung der zur Ausführung einer Maschine nothwendigen Zeichnungen.* Das Zeichnen ist für den Mechaniker ein Mittel, wodurch derselbe seine Gedanken und Vorstellungen mit einer Klarheit, Schärfe und Uebersichtlichkeit darzustellen vermag, die nichts zu wünschen übrig lässt. Eine gezeichnete Maschine ist gleichsam eine ideale Verwirklichung derselben, aber mit einem Material, das wenig kostet und sich leichter behandelt lässt, als Eisen und Stahl.

Die Verzeichnung einer Maschine erfordert an Zeit und Mühe einen Aufwand, der im Vergleich zu jenem, den die Ausführung der Maschine in Eisen und Stahl verursacht, gar nicht in Anschlag kommt, insbesondere wenn man den Nutzen berücksichtigt, den das Zeichnen sowohl für den Entwurf als auch für die Ausführung gewährt.

Ist einmal Alles wohl ausgedacht, und sind die wesentlichsten Dimensionen durch Rechnung oder Erfahrung bestimmt, so ist man mit dem Entwurf einer Maschine oder Maschinenanlage auf dem Papier bald fertig, und kann dann das Ganze und die Einzelnheiten mit aller Bequemlichkeit der schärfsten Kritik unterwerfen. Findet man das Ganze nicht befriedigend, so legt man den Entwurf bei Seite und ist dann bald mit einem zweiten besseren fertig. Findet man nur einzelne Abänderungen zweckmässig oder nothwendig, so sind die zu verändernden Dinge bald beseitigt und durch andere bessere ersetzt. Ist man von vorn herein im Zweifel, welche von verschiedenen möglichen Anordnungen die zweckmässigste sein dürfte, so entwirft man sie alle, vergleicht sie hierauf mit einander, und wählt das Zweckmässigste mit Leichtigkeit aus.

Aber nicht nur für den Entwurf, sondern auch für die Ausführung sind die Zeichnungen äusserst wichtig, denn es sind dadurch von vorn herein alle Abmessungen und Formen aller Theile so scharf und fest bestimmt, dass es sich bei der Ausführung nur darum handelt, das, was die Zeichnung darstellt, mit dem Construktionsmaterial identisch nachzubilden. Jeder Maschinenbestandtheil kann im Allgemeinen unabhängig von allen andern ausgeführt werden, und dadurch ist es möglich, die Gesammtheit der Arbeiten unter eine grosse Anzahl von Arbeitern zu vertheilen, und das ganze Geschäft der Ausführung in der Weise zu organisiren, dass alle Arbeiten zur rechten Zeit, am geeignetsten Orte, mit dem geringsten Aufwand von Zeit und Kosten und Material und endlich mit einer Genauigkeit und Zuverlässigkeit ausgeführt werden können, die kaum etwas zu wünschen übrig lassen. Wesentliche Fehler können bei einer dergestalt organisirten Thätigkeit gar nicht vorkommen, und begegnet es ein oder das andere Mal, dass ein Fehler begangen wird, so weiss man gleich an wem die Schuld liegt.

Äusserst nützlich sind dann die Maschinenzeichnungen für die Vorausberechnung der Construktionskosten einer Maschine.

Zur Ausführung einer grösseren Maschinenanlage sind dreierlei Arten von Zeichnungen nothwendig, nämlich: 1) Entwürfe, Anordnungspläne, Dispositionspläne. 2) Baupläne, Zusammenstellungen, Montirungspläne. 3) Detailzeichnungen, Arbeitszeichnungen. Es ist nicht gleichgültig, welche von diesen Zeichnungen man zuerst und welche man zuletzt macht, sondern es ist im Gegentheil durchaus nothwendig, mit dem Ganzen zu beginnen und stufenweise zu den Einzelnheiten überzugehen, denn die Construktion der Details ist erst dann möglich, wenn einmal das Ganze im Wesentlichen angeordnet ist. Man muss daher mit dem Dispositionsplane beginnen, sodann zu den Zusammenstellungen übergehen, und zuletzt erst die Detailconstruktionen vornehmen. Zwar ist es nur selten möglich, eine dieser Zeichnungen ganz fehlerfrei zu vollenden, bevor auch alle andern in Arbeit genommen sind, denn man wird meistens mit dem Fortschreiten der Arbeit veranlasst, an dem, was bereits entworfen ist, Abänderungen eintreten zu lassen. Dies kann jedoch mit wenig Zeit und Mühe geschehen, weil in den das Ganze betreffenden Zeichnungen alle Theile in so einfacher Weise dargestellt werden, dass z. B. das Zeichnen an und für sich eines ganzen Dispositionsplanes oft nicht mehr Zeit und Mühe erfordert, als die vollständige Ausführung eines einzelnen Details. Und wenn auch derlei nachträgliche Abänderungen nothwendig werden, so ist dies gar nicht in Anschlag zu bringen gegen den ausserordentlichen Vortheil, den das vom Ganzen zum Einzelnen fortschreitende Verfahren dadurch gewährt, dass sich dabei die natürliche Ordnung des Fortschreitens gleichsam von selbst ergibt, und dass man ferner bei jedem Schritte aus dem vorhergehenden genau weiss, um was es sich handelt. Schlägt man hingegen den entgegengesetzten Weg ein, indem man mit den Einzelnheiten beginnt und dann zu dem Ganzen fortzuschreiten sucht, so kommt man entweder gar nicht oder erst nach vielen nutzlosen, ermüdenden Arbeiten ans Ziel, und es ist das eben so verkehrt, wie wenn man bei den Vermessungen eines Landes zuerst mit der Messkette, dann mit dem Messtisch, hierauf mit dem Theodolit und endlich mit dem Meridiankreis operiren wollte.

Die Dispositionszeichnungen werden in einem kleinen Maasstab, je nach Umständen in $^1/_{100}$ bis $^1/_{50}$ der natürlichen Grösse ausgeführt. Es wird in denselben dargestellt: 1) das Fabrikgebäude und alle sonstigen Lokalitäten, die zum Ganzen gehören. 2) Die sämmtlichen Maschinen, die in der Anlage vorkommen sollen, und zwar jede einzelne derselben an dem ihr zukommenden Ort und in ganz einfachen die Grundformen derselben charakterisirenden Umrissen; auch ist es gut, bei jeder Maschine die Welle und Rolle, welche zunächst an ihr getrieben wird, anzudeuten, und die Anzahl der Umdrehungen derselben per 1 Sekunde durch eine Zahl zu bemerken. 3) Die Transmission aber ebenfalls nur in einfachen jedoch ziemlich kräftig gezogenen Linien. Die Wellen werden durch einfache Linien, die Räder durch ihre Grundform, die Kupplungen durch kleine Vierecke, die Stellen, wo die Wellen durch Lager zu halten sind, durch zwei Strichelchen angedeutet. Um die Zeichnung der Transmission deutlich hervorzuheben, ist es gut, sie mit lebhaft dunkelblauer Farbe auszuzeichnen. 4) Die Fundamente, auf welche die Maschine und die Transmission zu stellen sind. 5) Die Apparate, welche zur Beheizung, zur Beleuchtung und zu anderen Zwecken dienen, und es ist gut, Alles, was zu einem dieser Apparate gehört, durch eine besondere Farbe auszuzeichnen.

Um eine zwechmässige Aufstellung der Maschinen und Apparate ausfindig zu machen, ist sehr Vieles zu berücksichtigen. Zunächst sollen die sämmtlichen Maschinen in solcher Weise aufgestellt werden, dass die Durchführung des totalen Prozesses mit dem geringsten Materialtransport bewerkstelligt werden kann; die Maschinen sollen daher der Reihe nach einander zuarbeiten, so dass sie alle zusammen gleichsam eine einzige selbst wirkende Maschine bilden. Man muss ferner dafür sorgen, dass die Durchführung jedes einzelnen Partialprozesses auf die übrigen keinen nachtheiligen oder störenden Einfluss haben könne; es müssen daher die Maschinen, welche Nässe, Feuchtigkeit und Staub verursachen, von andern Maschinen, die rein und trocken arbeiten können und sollen, getrennt, also in besondern Lokalitäten aufgestellt werden. Sodann muss man trachten, dass die Transmission möglichst einfach und zweckmässig ausfällt; die schweren und krafterschöpfenden Maschinen müssen daher in das ebenerdige Geschoss und in die Nähe der Kraftmaschine verlegt werden, die leichteren und wenig krafterschöpfenden Maschinen dagegen in die oberen Stockwerke. Auch muss man suchen, die Geschwindigkeit der Transmisssion so zu wählen, dass zum Betrieb der verschiedenen Arbeitsmaschinen möglichst wenige Uebersetzungen nothwendig sind. In manchen Fällen, und namentlich bei Spinnereien und Webereien, muss man auch berücksichtigen, dass die Beaufsichtigung und Bedienung der Maschine Helligkeit erfordert, man muss also sorgen, dass das Licht möglichst direkt durch die Fenster der Arbeitssäle an jene Punkte gelange, welche vorzugsweise Helle erfordern. In dieser Hinsicht ist z. B. eine Queraufstellung der Maschinen einer Spinnerei besser, als eine Längenaufstellung. Für Fabriken, die viele Arbeiter erfordern, ist es ferner auch wünschenswerth, dass die Aufstellung der Maschinen der Beaufsichtigung und Ueberwachung aller Thätigkeiten, die in einem Arbeitssaal vorkomen, nicht hinderlich sei. In dieser Hinsicht ist z. B. in dem Arbeitssaal einer Spinnerei, wo die Vorwerke, Karden, Streckwerke und Vorspinnstühle aufgestellt sind, eine Längenaufstellung dieser Maschinen vortheilhaft. Endlich muss auf Alles Rücksicht genommen werden, was für die Feuersicherheit und Reinlichkeit günstig ist. Wohnungen und Comptoirs sollen daher nie in grössere Fabrikgebäude, sondern immer in einen Nebenbau verlegt werden.

Natürlich ist es wohl selten möglich, diesen Anforderungen allen zu entsprechen; wer jedoch mit Anordnungssinn glücklich begabt ist, und denselben durch vielfache Uebungen ausgebildet hat, erreicht in der Regel das Ziel auf eine sehr befriedigende Weise.

Die Dispositionszeichnung bleibt stets in Händen des Construkteurs, bis sämmtliche Bestandtheile des Ganzen ausgeführt sind, und erst dann wird dem Monteur, d. h. dem Arbeiter, welcher die Aufstellung und Zusammensetzung der Maschine zu besorgen hat, eine Pause übergeben.

Was die zweite Art von Zeichnungen betrifft, nämlich die Zusammenstellungen und Bauzeichnungen, so sind zur Ausführung derselben durch die Berechnungen und durch die Dispositionszeichnung alle wichtigsten Daten gegeben. Diese Zeichnungen werden gewöhnlich in $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ der natürlichen Grösse auf Papier ausgeführt, und zwar zunächst mit Auslassung aller kleineren construktiven Details, weil diese am zuverlässigsten aus den Arbeitszeichnungen entnommen werden können. Wenn der darzustellende Gegenstand nicht gar zu gross ist, ist es jedoch zweckmässiger, denselben nicht auf Papier im verkleinerten Maase, sondern auf einer grossen schwarzen Tafel mit Kreide in Naturgrösse auszuführen, und davon eine Kopie auf Papier zu machen.

Was endlich die Arbeitszeichnungen betrifft, nach welchen die einzelnen Bestandtheile in den Werkstätten auszuführen sind, so ist es am zweckmässigsten, dieselben erst in Naturgrösse mit Kreide auf eine schwarze Tafel zu zeichnen und sie dann in natürlicher Grösse entweder auf Papier oder auf Bretter zu übertragen. Die Kreidezeichnungen, welche schon seit langer Zeit in England in den Werkstätten eingeführt sind, sind äusserst praktisch. Die Kreidestriche können aus grösserer Entfernung gesehen werden, und dadurch kann das Gefühl die Verhältnisse aller Dimensionen weit richtiger und leichter beurtheilen, als wenn solche Details mit Bleistift auf dem Papier gezeichnet werden, es kann jeder unrichtige Strich so leicht ohne Verletzung der Zeichenfläche beseitigt werden, und die fertige Zeichnung macht einen so lebhaften Eindruck auf die Phantasie, dass sie den wirklichen Gegenstand vor Augen zu haben wähnt. Auch für den Unterricht in Schulen ist das Kreidezeichnen sehr zu empfehlen, weil dadurch das Gefühl für Formen und Verhältnisse äusserst rasch und gesund gebildet wird.

Zum Schluss über diesen Gegenstand will ich noch einige Bemerkungen über die Art der Ausführung dieser Zeichnungen folgen lassen.

In den Schulen wird gewöhnlich mit dem Zeichnen unendlich viel gespielt. Es werden oftmals schön schattirte und iluminirte oder gar perspektivische Bildchen gemacht, auf denen Alles, nur nicht das, was man zur Ausführung braucht, enthalten ist, daher auch das Renomé, in welchem die »Schulzeichnungen“ stehen. Wer einmal erfahren hat, welcher Aufwand von Zeit und Mühe erforderlich ist, um die Zeichnungen so auszuarbeiten, dass man darnach ausführen kann, dem vergeht die Lust zu derlei kindischen Beschäftigungen. Verständige Zeichnungen sollen nicht mehr und nicht weniger enthalten, als zur Ausführung nach denselben nothwendig ist. Wird dieser Grundsatz mit Consequenz befolgt, so erspart man sich ungemein viel unnütze Arbeit, und gewinnt dadurch Zeit, alles Wesentliche mit äusserster Sorgfalt und Genauigkeit auszuführen.

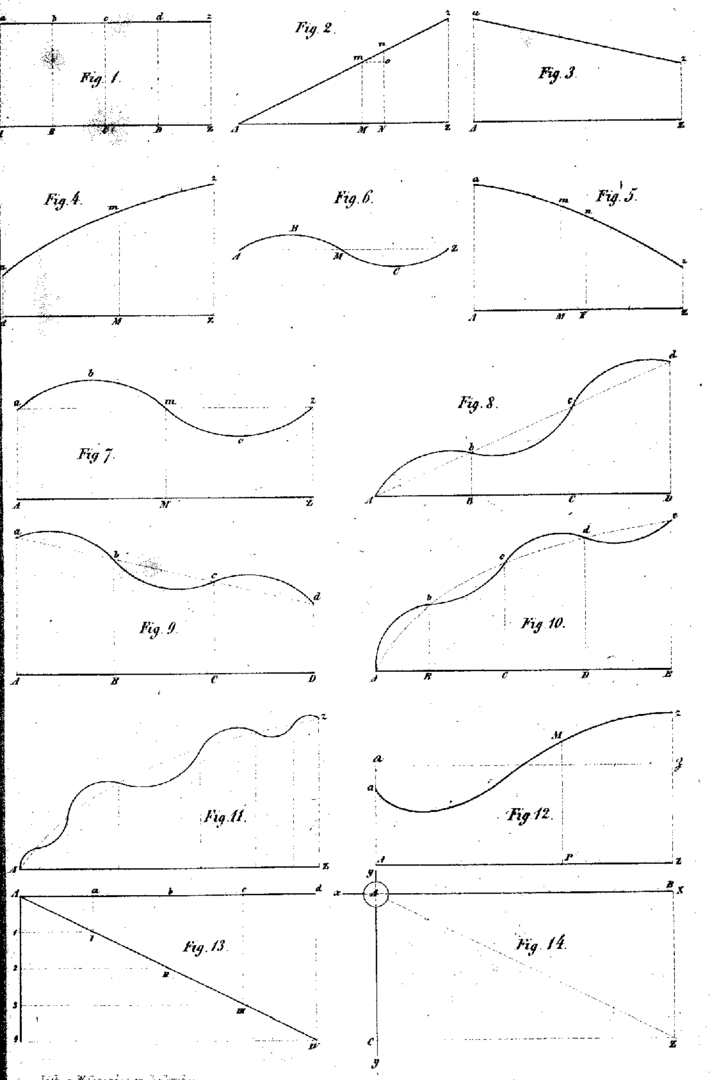
Die Zapfenlager brauchen in der Regel nicht gezeichnet zu werden, wenn nur die Lagerplatten am rechten Ort und mit richtiger Dimension dargestellt werden ist es genug. Die Zahnräder braucht man nur im Durchschnitt ausführlicher darzustellen, und von der Ansicht immer nur den Theilkreis, auf welchen die Zahnzahl und die Umdrehungszahl geschrieben werden kann. Die Verbindungsschrauben, deren richtige Verzeichnung, wenn sie in grosser Anzahl vorkommen, ungemein viel Arbeit erfordern, kann man fast immer weglassen, wenn nur die Bolzenlöcher gezeichnet werden, ist genug gethan. Aehnlich verhält es sich mit allen übrigen

Maschinentheilen, und wenn man auf solche Weise verfährt, indem man alles Zweckwidrige und Entbehrliche weglässt, dafür alles Nothwendige mit äusserster Sorgfalt ausführt, erhält man sehr einfache, deutliche und fehlerfreie Zeichnungen, die ihrem Zwecke vollkommen entsprechen. Schraffirungen und Schattenlinien soll man nicht anwenden, die ersteren geben den Zeichnungen ein flimmriges Ansehen, was die ruhige Betrachtung derselben stört, und verursachen oft Undeutlichkeiten, indem die Schraffirungslinien leicht mit Körpergrenzen verwechselt werden können. Die Schattenlinien haben bei Zeichnungen in grösserem Maase gar keinen Sinn und beeinträchtigen die Genauigkeit der Maase. Am zweckmässigsten ist es, die Zeichnungen mit ziemlich kräftigen jedoch reinen Strichen von gleicher Dicke auszuziehen, die Querschnitte mit lebhaften, das Material bezeichnenden Farben anzulegen, und die Mittellinien und Hauptmaase mit rother Farbe darzustellen. Keine Linie soll aus freier Hand sondern immer mit einer Lehre ausgezogen werden. Für schwach gekrümmte und geschwungene Linien bedient man sich am besten einer dünnen elastischen Ruthe aus Holz, die man längs der mit Bleistift vorgezeichneten Linie hinbiegt und mit Bleigewichten in ihrer richtigen Lage fest hält, bis die Tuschlinie gezogen ist. Rapid gekrümmte Linien können am besten mit Lehren gezogen werden, die nach Kegelschnittslinien gekrümmt sind. Man erhält solche Lehren, wenn man einen genau abgedrehten Kegel aus Buchsholz von 6 bis 8 Centimeter Höhe und dessen Winkel an der Spitze 90° beträgt, durch parallele Schnitte mit der Säge in Platten zerschneidet, die dann entweder von Hyperbeln oder von Parabeln begrenzt sind, je nachdem die Schnitte parallel mit der Axe oder mit der Seite des Kegels geführt sind. Ein solcher Kegel liefert 6 bis 8 solche Platten, unter denen sich in jedem vorliegenden Falle immer eine vorfindet, die gebraucht werden kann. Insbesondere kleine Abänderungen lassen sich mit diesen Lehren sehr schön bewerkstelligen.

Verbesserungen.

Seite	Zeile	statt	soll es heissen:
10	5 von unten	A a $\mathfrak{Z}$ Z	A a z Z.
13	13 von unten	Componirende	Componirenden.
15	17 von oben	resultirende	Resultirende.
30	15 von unten	Wärme	Aether.
31	18 von oben	verschieden	verschwindend.
38	15 von oben	der äussern	die äussere.
48	8 von unten	$\frac{1}{2} g \frac{K}{g}$	$\frac{1}{2} g \frac{K}{G}$.
49	5 von oben	$v = c + g \frac{K}{G}$	$v = c + g \frac{K}{G} t$.
49	8 von unten	K	$K + \Delta K$.
57	10 von oben	$d\, d_1\ \varepsilon e$	$d\, d_1\ \mathfrak{E} e$.
57	17 18 v. oben	$E\ E_1$	$\mathfrak{E}\ \mathfrak{E}_1$.
61	14 von unten	Bezeichnen	Beziehen.
62	21 von oben	Eorm	Form.
64	2 von unten	nun	nur.
69	10 von unten	gebe	gibt.
76	13 von unten	48	49.
105	in Formel (3)	$\frac{Q}{Q+g}$	$\frac{Q}{Q+q}$.
127	2 von oben	$\frac{\mathfrak{N}}{t} = \frac{q}{g} \frac{\mathfrak{D}}{t}$	$\frac{\mathfrak{N}}{t} = \frac{q}{g} \frac{v}{t} t$.
219	5 von oben	E D	E G.

Tafel I.



Lith. v. W. Gr...

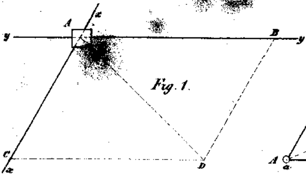


Fig. 1.

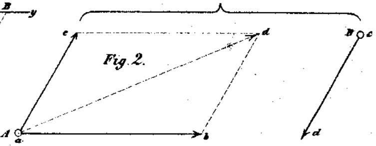


Fig. 2.

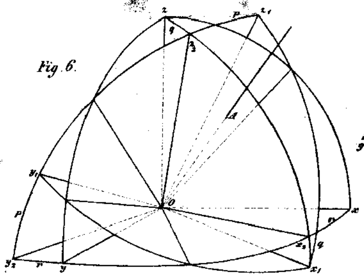


Fig. 6.

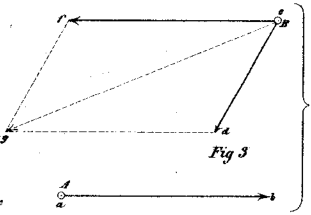


Fig 3

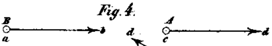


Fig. 4.

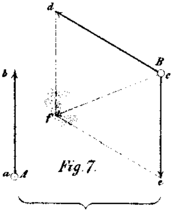


Fig. 7.

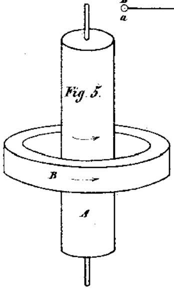


Fig. 5.

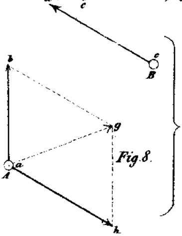


Fig. 8.

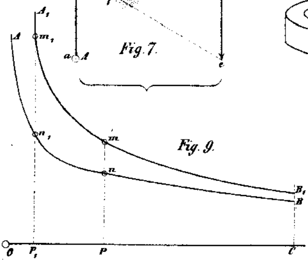


Fig. 9.

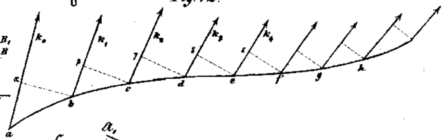


Fig. 12.

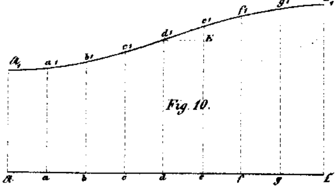


Fig. 10.

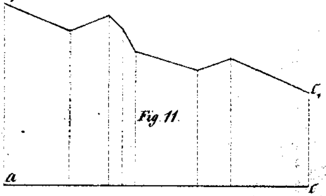


Fig. 11.

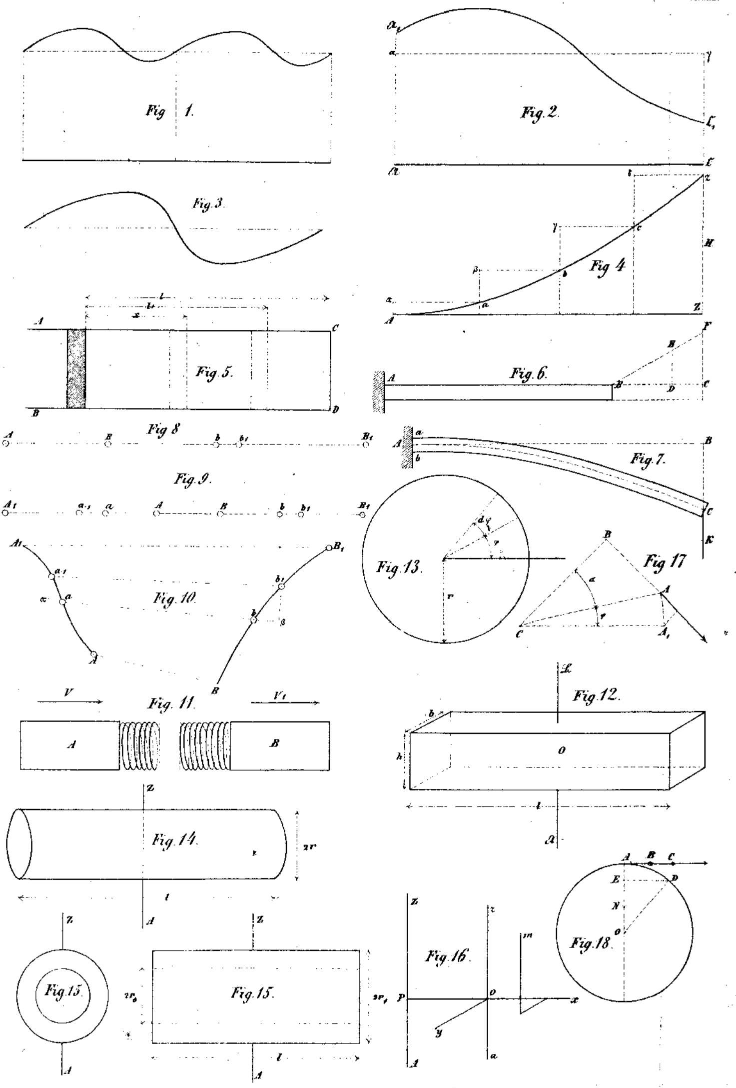


Fig 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig 17
Fig. 18.

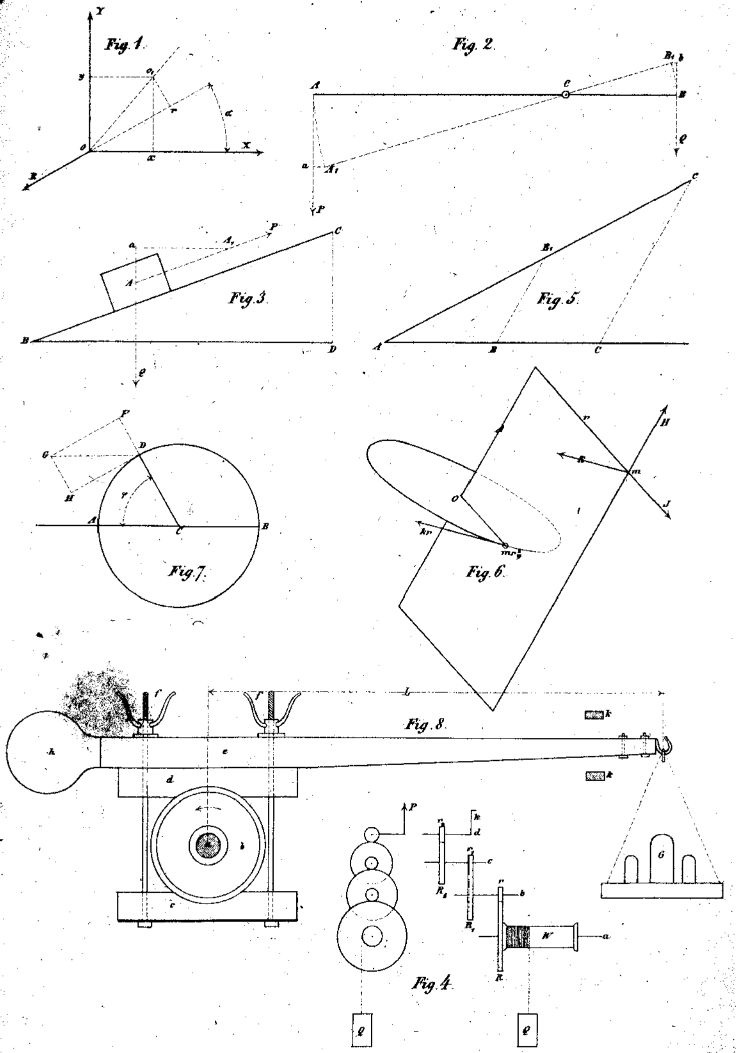


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 4.

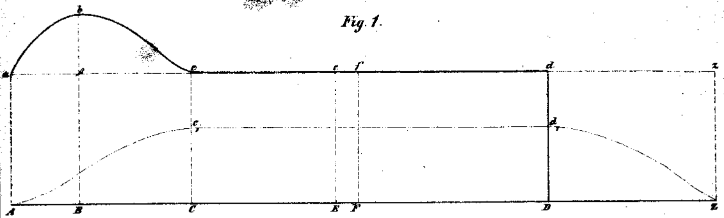


Fig. 1.

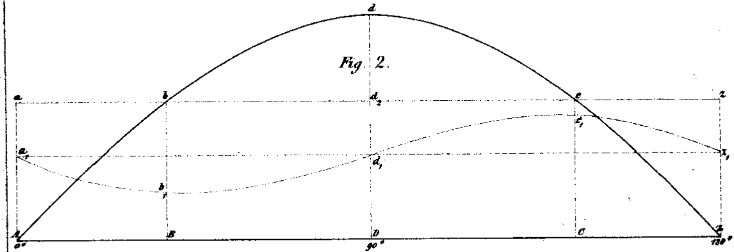


Fig. 2.

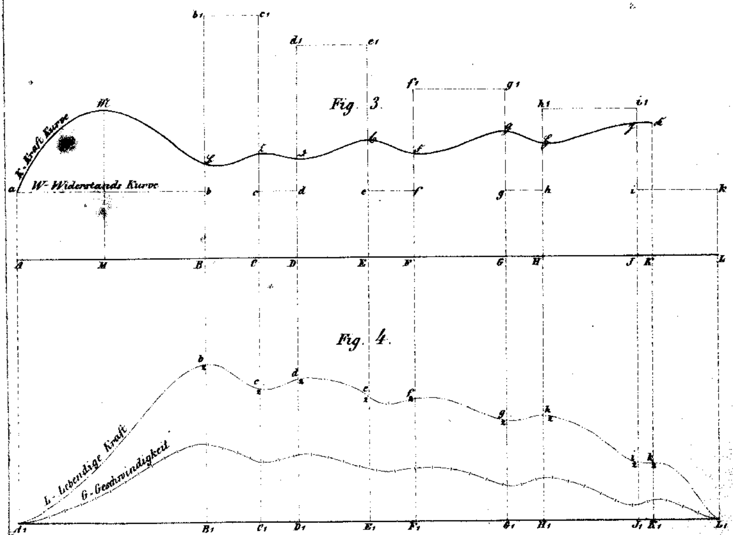


Fig. 3.

Fig. 4.