

WÜRTTEMBERGISCHE GESELLSCHAFT-
ZUR FÖRDERUNG DER WISSENSCHAFTEN
ABTEILUNG TÜBINGEN
NATURWISSENSCHAFTLICH-MEDIZINISCHE KLASSE

TÜBINGER
NATURWISSENSCHAFTLICHE
ABHANDLUNGEN

6. HEFT

GELENKMECHANISMEN
ZUR KREISVERWANDTSCHAFT

VON GERHARD HESSENBERG

TÜBINGEN
J. C. B. MOHR (PAUL SIEBECK) IN KOMMISSION
1924

Ca-826/6

WÜRTTEMBERGISCHE GESELLSCHAFT
ZUR FÖRDERUNG DER WISSENSCHAFTEN
ABTEILUNG TÜBINGEN
NATURWISSENSCHAFTLICH-MEDIZINISCHE KLASSE

GELENKMECHANISMEN
ZUR KREISVERWANDTSCHAFT

VON

GERHARD HESSENBERG
IN TÜBINGEN

MIT EINER TAFEL

4253.124



TÜBINGEN
J. C. B. MOHR (PAUL SIEBECK) IN KOMMISSION
1924

GEDRUCKT MIT UNTERSTÜTZUNG DER NOTGEMEINSCHAFT
DER DEUTSCHEN WISSENSCHAFT.

§ 1. Die Kreisverwandtschaft, auch „Transformation durch reziproke Radien“ oder „Inversion“, genannt, läßt sich durch Mechanismen verwirklichen, die man „Inversoren“ nennt. Der älteste bekannte Inversor ist von Peaucellier angegeben worden: Man verbinde zwei Gegenecken L, L' einer Raute von der Seite p durch Stäbe von der Länge l mit einem festen Punkte O (Fig. 1); alsdann liegen die beiden anderen Gegenecken P und Q mit O in einer Geraden, und es ist das Produkt ihrer Abstände von O konstant,

$$OP \cdot OQ = (l - p)(l + p) = l^2 - p^2.$$

Beschreibt man also mit P irgendeine Figur, während der Punkt O auf der Zeichenfläche festgehalten wird, so beschreibt Q die zu ihr „inverse“ Figur, wobei O das Inversionszentrum und $l^2 - p^2$ die „Potenz“ der Inversion ist. Diese ist positiv oder negativ, d. h. P und Q liegen auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten von O , je nachdem $l > p$ (Fig. 1) oder $l < p$ (Fig. 2) ist. Beschreibt P insbesondere einen Kreis, so auch Q ; geht einer von beiden durch O , so artet der andere in eine Gerade aus. Der Inversor kann also dazu dienen, eine genaue Geradföhrung oder eine Kreisföhrung um einen unerreichbaren Mittelpunkt durch einen Gelenkmechanismus zu verwirklichen. Bisher ist er jedoch in der Technik unseres Wissens nicht angewandt worden, weil die angenäherten Geradföhrungen, z. B. das Wattsche Parallelogramm, ihm infolge der geringeren Anzahl ihrer Gelenke überlegen sind.

§ 2. Folgende Verallgemeinerung der Anordnung von Peaucellier ist ohne weiteres verständlich (Fig. 3, 4): Man setze an Stelle der Raute ein Trapez mit den Seiten $LP = LQ = p$, $L'P = L'Q = p'$ und verbinde L, L' durch Stäbe von solchen Längen l, l' mit einem festen Punkte O , daß $l'^2 - p'^2 = l^2 - p^2$ wird. Diese Größe ist alsdann die Potenz der Inversion; auch hier liegen P, Q ständig mit O in einer Geraden, und nach dem Potenzsatz am Kreise ist $OP \cdot OQ$ die Potenz des Punktes O in bezug auf den Kreis um L durch P und Q , also konstant, weil die Entfernung $OL = l$ des Punktes O vom Mittelpunkt und der Halbmesser p des Kreises es sind. Es kommt hierbei der Satz zur Anwendung, daß die Diagonalen eines Gelenkvierecks ständig zueinander lotrecht sind, wenn

die Summen der Quadrate der Gegenseiten, hier $l^2 + p'^2$ und $l'^2 + p^2$, einander gleich sind. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Figur und ihrer Konstruktion.

§ 3. Anscheinend auf ganz anderen Beziehungen beruht der Inversor von Hart. Auf den Seiten LM, LM', L'M eines „Antiparallelogramms“, d. h. eines überschlagenen Gelenkvierecks mit paarweise gleichen Gegenseiten ($LM = L'M'$, $L'M = LM'$, Fig. 5), werden die Punkte O, P, Q derart gewählt, daß sie auf einer zur Diagonale MM' parallelen Geraden liegen; es soll also die Proportion bestehen:

$$(1) \quad LO : OM = LP : PM' = L'Q : QM.$$

Alsdann liegen bei allen Stellungen des Mechanismus O, P, Q in einer Geraden, und es ist $OP \cdot OQ = PL \cdot QM - OL \cdot OM$, also konstant. Der Beweis wird sich aus den nachfolgenden Betrachtungen ergeben.

§ 4. Sylvester und Kempe haben den Inversor von Hart zu einem „Drehinversor“ verallgemeinert, der die Inversion mit einer Drehung durch einen festen Winkel verbindet. Beziehen wir die Proportionen (1) auf die Absolutbeträge, so müssen wir noch hinzusetzen, daß die Teilung in allen drei Brüchen zugleich eine innere oder äußere, also

$$(2) \quad \text{Winkel } LOM = LPM' = L'QM,$$

und zwar 0 oder π sein soll. Geben wir diesen Zusatz zu (2) auf, verlangen also nur die Ähnlichkeit der Dreiecke LOM, LPM', L'QM in der angegebenen Reihenfolge der Ecken, so daß die Punkte O, P, Q zwar noch starr mit den Geraden LM, LM', L'M verbunden, aber nicht mehr auf ihnen selbst gelegen sind, so bleibt bestehen, daß $OP \cdot OQ = PL \cdot QM - OL \cdot OM$, dagegen wird nunmehr Winkel POQ gleich LOM oder seinem Supplement, je nachdem in der letzten Formel rechts das negative oder (wie in Fig. 5, 6) das positive Vorzeichen auftritt.

Deutet man die Strecken OL, OM, LP, MQ usw. als komplexe Größen, so ist die Forderung (2) schon in (1) enthalten.

Wir wollen diese Inversoren auf einen einfacheren Mechanismus zurückführen, der uns zugleich eine Fülle von neuen Inversoren liefern wird.

§ 5. Es sei O ein Ähnlichkeitszentrum zweier Kreise (P) und (Q) mit den Halbmessern p und q und den Mittelpunkten L und M; setzen wir $OL = l$, $OM = m$, dann gilt (vgl. Figur 7):

$$(3) \quad l : m = p : q.$$

Wir schließen sogleich den Trivialfall aus, daß (P), (Q) sich in O berühren. Es soll also nicht $l = p$ und entsprechend $m = q$ sein.

Ziehen wir durch einen Punkt Q auf (Q) die Gerade OQ , so trifft sie (P) in zwei Punkten, P, P' . Einer von beiden, es sei dies P' , entspricht dem Q durch Aehnlichkeit. Es ist also, wenn Q sich auf (Q) bewegt, ständig $OP' = x'$ zu $OQ = y$ proportional. Andererseits ist $OP = x$ zu x' umgekehrt proportional, weil nach dem Potenzsatz am Kreise (P) : $xx' = l^2 - p^2$. Danach ist auch y zu x umgekehrt proportional, und zwar wird mit Rücksicht auf (3):

$$(4) \quad xy = lm - pq = S.$$

Unsere beiden Kreise werden sonach auf doppelte Weise aufeinander abgebildet: einmal unter Erhaltung des Umlaufsinnens durch Aehnlichkeit; zum andern unter Umkehr des Umlaufsinnens durch Inversion. Diese, als unmittelbarster und einfachster Zugang zu einer elementaren Begründung der Kreisverwandtschaft wohl hinreichend bekannte Ueberlegung liefert uns sogleich einen Mechanismus zu ihrer zeichnerischen Ausführung (Fig. 8).

§ 6. Wir stellen die Strecke OLM durch einen geraden Stab mit drei Bohrungen in O, L, M dar und befestigen in L, M gelenkig zwei Kurbeln LP, MQ von den Längen p, q . Ihre freien Enden P, Q zwingen wir alsdann mittels einer geschlitzten Platte, mit O in gerader Linie zu bleiben. Diese Platte denken wir uns in O gelenkig befestigt; es würde genügen, daß O ebenso wie P, Q lediglich in dem Schlitz geführt würde. Doch erhielte dadurch die Schlitzplatte einen überflüssigen Freiheitsgrad, und ein Anlenken derselben in P oder Q würde die Symmetrie der Anordnung stören.

Unser Mechanismus besitzt einen inneren Freiheitsgrad; befestigen wir O gelenkig auf der Zeichenebene, so tritt ein äußerer Freiheitsgrad hinzu, indem der Apparat sich als Ganzes um O drehen kann. Die Punkte P und Q vermögen alsdann das Innere je eines Kreisringes von den Halbmessern $l - p, l + p$ und $m - q, m + q$ zu befahren. Diese Ringgebiete werden wiederum doppelt, durch Aehnlichkeit und durch Inversion, auf einander abgebildet. Unser Apparat vermittelt beide Abbildungen; die erste in der „pantographischen“ Einstellung, bei der LP' (vgl. Fig. 7, 8) zu MQ parallel liegt. Die „Pantographische Konstante“, d. h. das Verhältniß der Maßstäbe, ist hierbei gleich

$$(5) \quad s = l : m = p : q.$$

Bei der zweiten, der „inversorischen“ Einstellung des Apparates (OP in Fig. 7, 8) liegen die Geraden LP und MQ spiegelig in bezug auf das Mittellot von P und Q ; sie bilden mit dem Schlitz OPQ entgegengesetzte Winkel.

§ 7. Die von P und Q beschriebenen Ringgebiete können übereinandergreifen, was in Fig. 8 nicht der Fall ist. Sie können sich sogar völlig decken, wenn nämlich die pantographische Konstante gleich 1, also $l = m$ und $p = q$ ist. Für die „inverso-

rische Konstante“ oder Potenz erhalten wir aus dem Entsprechen der Ränder der Ringgebiete noch die beiden Darstellungen:

$$(6) \quad S = (1-p)(m+q) = (1+p)(m-q),$$

die wegen (3, 5) mit dem in (4) berechneten Wert übereinstimmen. Im Falle $s = 1$ ist der „Pantograph“ offenbar trivial, während der Inversor seine einfachste Gestalt erhält.

Da die Enden P, Q der Kurbeln LP, MQ in Schlitzen geschoben werden, nennen wir sie künftig die „Schubkurbeln“. Der Stab OLM stellt zwei in einer Geraden starr verbundene Kurbeln dar und soll daher die „Doppelkurbel“ heißen. Das vierte Element unseres Mechanismus hat bereits den Namen „Schlitzplatte“ erhalten.

§ 8. In den bisherigen Figuren sind beide Arme OL, OM der Doppelkurbel als gleichgerichtet angenommen. Sie können aber auch entgegengesetzt sein. In diesem Falle müssen wir l und m mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen. Welche von beiden Längen dabei positiv genommen wird, ist belanglos. Soll alsdann die Proportion (3) oder (5) weiterbestehen, so müssen auch p und q entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Alsdann erweist sich die Darstellung von S durch (4) oder (6) als unter allen Umständen gültig.

Man wird vielleicht fragen, was bei Strecken von verschiedener Richtung, wie p , q , ein Vorzeichen zu bedeuten habe. Entsinnen wir uns aber, daß die Geraden LP, MQ spiegelig zum Mittellot von P und Q liegen, so erkennen wir sogleich, daß die Richtung von q zum Spiegelbild der Richtung von p je nach dem Vorzeichen gleich oder entgegengesetzt ist. Bei der pantographischen Anordnung ist die Bedeutung des Vorzeichens ohne weiteres klar, da hier die Geraden LP, MQ parallel sind.

§ 9. Den Fig. 7, 8 liegt ferner die Annahme zugrunde, daß l absolut genommen größer als p ist. Da der Fall $l = \pm p$ als Trivialfall ausgeschlossen worden ist, bleibt noch zu untersuchen, wie sich unser Mechanismus im Falle $l < p$ gestaltet. Alsdann liegt O im Innern der beiden Kreise (P), (Q), und ein stetiger Uebergang aus der pantographischen in die inversorische Einstellung ist nicht mehr möglich. Die Verzweigungs- oder „Totlage“, in der die Schubkurbeln zum Schlitz senkrecht stehen, wird imaginär.

§ 10. Indem wir nunmehr die beiden Fallunterscheidungen miteinander verbinden, erhalten wir vier verschiedene Typen unseres Inversors, die sich am einfachsten nach den Vorzeichen der beiden Konstanten s und S klassifizieren lassen. Geben wir l und p das positive Vorzeichen, so stellen sie sich folgendermaßen dar, wobei wir die besonderen, für den pantographischen Gebrauch trivialen Werte $s = \pm 1$ hervorheben:

S positiv, { A) s positiv, $l > p$; a) $s = +1$, $l = +m > p = +q$.
 { B) s negativ, $l < p$; b) $s = -1$, $l = -m < p = -q$.
 S negativ, { C) s positiv, $l < p$; c) $s = +1$, $l = +m < p = +q$.
 { D) s negativ, $l > p$; d) $s = -1$, $l = -m > p = -q$.

Diese acht Typen sind in den Figuren 9 bis 16 dargestellt. Wir beschränken uns im folgenden auf diejenigen von positiver Potenz S , also auf A, B, a, b, da negative Potenzen nichts wesentlich Neues bieten, die zugehörigen Mechanismen dagegen, wie schon die Figuren zeigen, mehr Platz beanspruchen, ohne darum übersichtlicher oder gar geschlossener auszufallen.

§ 11. Wenn uns ein solcher Inversor von der Potenz S und außerdem ein Punktepaar P, Q gegeben ist, für das $OP \cdot OQ = S$, so können wir fragen, auf wieviele Arten sich der Inversor auf dieses Punktepaar einstellen läßt. Da ist zunächst klar, daß aus jeder möglichen Lage sich eine zweite durch Spiegelung am Schlitz OPQ gewinnen läßt. Beide Lagen lassen sich übrigens stetig ineinander überführen, wenn nicht die technische Ausführung des Instrumentes seine Bewegungsfreiheit über die rein geometrisch bedingten Grenzen hinaus einengt.

§ 12. Die Figuren 17—20 zeigen für die Typen A, B eine weitere Möglichkeit, auf gegebene Punkte einzustellen; sie entsteht ohne weiteres aus der Bemerkung, daß die Inversion eine involutorische Beziehung ist, d. h. daß P und Q vertauschbare Rollen spielen. Liegt daher P innerhalb des zu Q gehörigen Ringbereiches, was wir jetzt voraussetzen, so kann man das Schlitzende der Schubkurbel q auf P einstellen, wobei sich das Ende der andern umgekehrt auf Q einstellen muß.

Mit den in §§ 11, 12 angegebenen Fällen sind alle Einstellmöglichkeiten erschöpft; es gibt deren also vier, von denen in Sonderfällen je zwei zusammenfallen können.

Bei den Typen a, b, c, d ist jedoch zu beachten, daß die Vertauschung der Rollen von P und Q infolge der Symmetrie $l = m$, $p = q$ nichts wesentlich Neues bringen kann; in der Tat entsteht geometrisch keine andere Figur als die Ausgangslage und ihr Spiegelbild an OPQ .

§ 13. Im Anschlusse daran kann noch die Frage erörtert werden, ob die beiden soeben beschriebenen Lagen stetig ineinander übergeführt werden können. Dies setzt zunächst voraus, daß die zu P und Q gehörigen Ringgebiete einen gemeinsamen Teil besitzen, und die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür lautet, wie wir ohne Beweis angeben: Von den Absolutbeträgen der Längen l, m, p, q darf der größte nicht größer sein, als die Summe der übrigen. Ist er ihr gleich, so fallen die inneren Ränder der Ringgebiete zusammen, die einzige und triviale Lage, in der die

Vertauschung von P mit Q rein geometrisch möglich ist, existiert also auf diesem Innenrand.

§ 14. Wenn die soeben aufgestellte Bedingung erfüllt ist, so ist zunächst an den Typen C, D mit negativer Potenz die stetige Ueberführung leicht zu verifizieren: Man bringe die Entfernung OP auf die Länge y, so wird die Entfernung OQ die Länge x annehmen. Indem man nunmehr das Instrument um O durch einen gestreckten Winkel dreht, gelangen P, Q in die Ausgangslagen von Q und P.

Bei den Typen A, B ergibt sich eine Schwierigkeit daraus, daß hier P und Q im gleichen Schlitz geführt sind, und sich in diesem begegnen. Man kann dem aber dadurch abhelfen, daß man zwei starr verbundene übereinanderliegende Platten verwendet und die Schubkurbeln so anbringt, daß die Doppelkurbel samt den beiden Schlitzplatten zwischen ihnen liegt.

§ 15. Obwohl es sich nun bei diesen verschiedenen Anordnungen um zwei verschiedene Lagen des gleichen Instrumentes handelt, wollen wir dennoch aus Zweckmäßigkeitsgründen der vertauschten Lage einen neuen Inversor mit den Abmessungen (vgl. Fig. 17, 18)

(7) $l' = m, m' = l, p' = q, q' = p,$
zuordnen. Die Gleichungen (4, 5) bestätigen, daß er die gleichen Konstanten S und s besitzt, wie der ursprüngliche. Erneut kommt dabei zum Ausdruck, daß für die Typen a, b, c, d die Substitution (7) trivial wird, da bei ihnen bereits $l = m$ und $p = q$ ist.

§ 16. Der Anblick der Formeln (4, 5) legt nun zwei weitere Substitutionen nahe, die einen Inversor in einen anderen überführen:

(8) $l' = p, m' = q, p' = l, q' = m,$

(9) $l' = l, m' = -m, p' = p, q' = -q.$

Bei beiden wird $S' = -S$, bei der ersten außerdem $s' = s$, bei der zweiten $s' = -s$. Die erste führt also die Typen A, B, C, D über in C, D, A, B, die zweite in D, C, B, A. Ganz ebenso vertauschen sich die Sondertypen a, b, c, d.

Da wir nur Typen von positiver Potenz betrachten wollen, sind die Substitutionen (8, 9) für uns von untergeordnetem Interesse. Dagegen ist ihr Produkt:

(10) $l' = p, m' = -q, p' = l, q' = -m,$

darum von Bedeutung, weil es S unverändert läßt, also die hier bevorzugten Typen A und B, ebenso natürlich auch a und b, C und D, c und d miteinander vertauscht. Dabei geht s in $s' = -s$ über.

Wir nennen zwei Inversoren, die durch die Substitution (10) auseinander hervorgehen, „konjugiert“.

§ 17. Die geometrische Deutung der Substitution (10) ist die folgende: Man spiegele die Dreiecke OPL und OQM nach OPL' und OQM', und zwar das eine axial, also am Mittellot, das andere

zentral, also am Mittelpunkt seiner beiden erstgenannten, miteinander zu vertauschenden Ecken. Dann sind L' und M' wieder mit O in gerader Linie und bilden die Endpunkte der konjugierten Doppelkurbel.

Die Figurenpaare 9 und 10, 11 und 12, 13 und 14, 15 und 16 stellen solche konjugierten Inversoren dar. Ferner sind die Inversoren 19, 20 zu 17, 18 konjugiert, jedoch zwecks Raumersparnis außerdem noch ähnlich verkleinert. Sie sollen illustrieren, daß die Substitutionen (7) und (10) vertauschbar sind. Man kann übrigens aus den Formeln selbst unmittelbar die Vertauschbarkeit sämtlicher Substitutionen (7) bis (10) entnehmen, wenn man beachtet, daß ein Vorzeichenwechsel aller vier Größen l, m, p, q für unsere Betrachtungsweise geometrisch bedeutungslos, also der identischen Substitution gleich zu erachten ist.

§ 18. Unsere Mechanismen sind infolge der Verwendung von Schlitzplatten keine Gelenkmechanismen im engeren Sinne. Insbesondere für die Verwendung als Geradföhrungen werden sie dadurch zunächst bedeutungslos, weil sie in Gestalt der Schlitzföhrungen selber Geradföhrungen enthalten. Zudem nimmt ihnen die starke Reibung in den Schlitzten, besonders in der Nähe der Totlagen bei den Typen A, B, a, b, jede praktische Bedeutung.

Indessen können wir das Grundübel der Schlitzföhrung leicht beseitigen, indem wir zwei unserer Inversoren miteinander koppeln. Weil wir sie dergestalt als Elemente oder Bausteine zum Aufbau weiterer Mechanismen verwenden, werden wir sie als „Elementar-Inversoren“ oder kürzer als „Elemente“ schlechthin bezeichnen.

Wir koppeln zwei Elemente von gleicher Potenz S mit den Gelenken O, P, L, Q, M und O', P', L', Q', M' derart, daß wir O mit O' und P mit P' gelenkig verbinden, etwa indem wir sie auf gemeinsame Achsenzapfen aufsetzen oder die Zapfen durchbohren und Stifte hindurchstecken. Dann werden bei allen Bewegungen des Mechanismus sich die Punkte Q und Q' decken. Wir tun daher der Bewegungsfreiheit des Systems keinerlei Abbruch, wenn wir auch Q mit Q' verbinden, erhalten aber andererseits dadurch einen zweifach „übergeschlossenen“ Mechanismus, da die Forderung $Q = Q'$ zwei (linearen) Gleichungen gleichwertig ist. Infolgedessen können wir zwei andere Bedingungen beseitigen, ohne die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems zu vermehren, und als solche Bedingungen bieten sich unmittelbar die beiden, je eine lineare Gleichung darstellenden Schlitzföhrungen dar. Nach ihrer Entfernung bleibt nun ein reiner Gelenkmechanismus übrig.

§ 19. Die Betrachtung der Figur 21, die den Vorgang zu veranschaulichen sucht, zeigt uns in der Tat, daß der neue Gelenkmechanismus wieder zwei Freiheitsgrade besitzt. Der eine, äußere, besteht in der Drehbarkeit um O. Der Mechanismus als Ganzes aber ist ein Gelenkviereck OLPL', an das in den Punkten M, M' mit den Stäben MQ, M'Q ein weiterer Punkt Q angelenkt ist. Ein Gelenkviereck besitzt nun genau einen inneren Freiheitsgrad, und das Anlenken eines Punktes verringert die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems nicht, wenn nicht gerade ein sogenanntes singuläres Fachwerk dadurch entsteht. Dies tritt aber, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, hier nicht ein, sofern wir nur dafür gesorgt haben, daß die Ringgebiete der Punkte P und P' einen flächenhaften Teil gemein haben. Wenn sie sich überhaupt nicht überdecken, so mißlingt bereits die Koppelung von P und P', und wenn sie nur einen Randkreis gemein haben, so gelingt sie nur in einer Totlage, was wir natürlich ausschließen. Die Formulierung dieses Ausschlusses in Ungleichungen zwischen den Längen l, m, p, q, l', m', p', q' kann dem Leser überlassen bleiben.

§ 20. Analog können wir auch zwei unserer Elemente mit gleichen pantographischen Konstanten s und s' koppeln und werden alsdann zu einem Pantographen geführt, der ein reiner Gelenkmechanismus ohne Schlitzführung ist. Wir haben diese Mechanismen, die einfache Verallgemeinerungen des bekannten Storchschnabels darstellen, nicht figürlich wiederzugeben für nötig gehalten. Doch kommen sie insofern nebenbei in Betracht, als die Frage nicht ohne Interesse ist, bei welchen unserer Gelenk-Inversoren die Eigenschaft unserer Elementar-Inversoren erhalten bleibt, gleichzeitig Inversor und Pantograph sein zu können.

Beachten wir, daß nach (5) $l = sm$, $p = sq$ ist, so wird $S = lm - pq = s(m^2 - q^2)$, analog für ein zweites Element $S' = s'(m'^2 - q'^2)$, also im Falle $S' = S$, $s' = s$: $m^2 - q^2 = m'^2 - q'^2$, und ebenso: $l^2 - p^2 = l'^2 - p'^2$, was nach § 2 bedeutet, daß die Diagonalen der Vierecke OMQM' und OLPL' aufeinander senkrecht stehen. Nun fallen die Diagonalen OP und OQ in dieselbe Gerade. Es sind also LL' und MM' zueinander parallel (vgl. Fig. 24), woraus wir die Doppelseigenschaft unseres „pantographischen Inversors“ leicht entnehmen. Die Gelenkvierecke OLPL' und OMQM' sind bei einem solchen ähnlich und bleiben es bei der pantographischen Einstellung. Dagegen wird bei der inversorischen Einstellung das eine von beiden in die zweite Lage gebracht, die nach Festlegung von O und den beiden benachbarten Ecken noch möglich ist. Wir werden in der Folge noch mehreren dieser pantographischen Inversoren begegnen.

§ 21. Wir kehren nun wieder zu den allgemeinen Gelenk-

Inversoren zurück und beachten, daß wir für positive und für negative Potenz je drei Typen erhalten, die wir nach den Typen der zusammengesetzten Elemente mit AA, AB, BB ($S > 0$) und CC, CD, DD ($S < 0$) bezeichnen. Analog werden wir für Pantographen die sechs Typen AA, AC, CC ($s > 0$) und BB, BD, DD ($s < 0$) erhalten, woraus hervorgeht, daß pantographische Inversoren nur den vier Typen AA, BB, CC, DD angehören können. Durch Spezialisierung entstehen noch „gemischte“ Typen von den Formen Aa, Ab usw., an denen wir jedoch keine bemerkenswerten Eigenschaften feststellen konnten, und endlich die vollspezialisierten aa, ab, bb usw., unter denen aa, bb, cc, dd, jedenfalls pantographisch sind, da bei den beiden ersten (letzten) $s = s' = +1$ (-1) ist. Sind sie also inversorisch, so stellen sie pantographische Inversoren dar, deren pantographische Eigenschaft allerdings trivial ist.

Die Typen AA, AB, BB sind in den Fig. 21, 22, 23, zunächst in ihrer allgemeinsten Form, dargestellt. Der Typus aa ist der verallgemeinerte „Peaucellier“ der Fig. 3, 4; ab und bb sehen wir in Fig. 27 und 25. Die Struktur dieser Mechanismen, ihr Aufbau aus einem Gelenkviereck OLPL' mit einem angelenkten Punkt Q, oder auch aus zwei Gelenkvierecken OLPL', OMQM', deren von O ausgehende Seiten starr miteinander verbunden sind, kommt in diesen Figuren klar zum Ausdruck. Dagegen sind die besonderen Bedingungen, denen ihre Abmessungen unterliegen:

$l : m = p : q = s ; l' : m' = p' : q' = s' ; lm - pq = l'm' - p'q' = S$, nicht ohne weiteres anschaulich zu erfassen; dadurch fehlt diesen allgemeinen Anordnungen ein anschauliches, unmittelbar überzeugendes, „einprägsames“ Moment. Diesem Mangel können wir durch Spezialisierung der Abmessungen abhelfen.

§ 22. Als solche Spezialisierung ist bereits die in § 20 besprochene pantographische Eigenschaft anzusehen. Aber einmal ist sie nur für die Typen AA, BB, CC, DD, nicht aber für AB, CD durchführbar, und zum ändern scheint sie uns für den Typus BB, ja selbst für den einfachsten Fall bb (Fig. 25) nicht weit genug zu gehen, während die pantographischen Typen AA (Fig. 24) und aa (Fig. 3, 4) allerdings an Klarheit nichts zu wünschen lassen. Der Unterschied liegt wahrscheinlich an dem überschlagenen oder einspringenden Viereck in BB, bb.

Zu besonders einfachen Formen gelangen wir dagegen, wenn wir ein Element mit einem zu ihm kongruenten oder konjugierten koppeln. Diese Koppelung kann noch auf verschiedene Weise erfolgen, indem wir die Spiegelung (§ 11) oder die Umlegung (§ 12) zu Hilfe nehmen. Letztere ist bei den Typen aa, bb gegenstandslos (§ 12). Den aus spiegeligen Elementen aufgebauten Inversor bb zeigt Fig. 26; der spiegelige Inversor aa ist

mit dem gemeinen „Peaucellier“ Fig. 1 identisch, während Fig. 2 den spiegeligen Inversor cc (vgl. Fig. 15) darstellt.

§ 23. Auf eine besondere Darstellung der spiegeligen Typen AA, BB glauben wir verzichten zu können, zumal sie in den Fig. 30, 31, 32 angedeutet vorkommen. Dagegen sind diejenigen Formen beachtenswert, die aus zwei kongruenten, aber nach § 12 gegeneinander umgelegten Elementen bestehen. Sie sind in Fig. 30, 31 gezeichnet und lassen sich in zwei wesentlich verschiedenen Formen auf gegebene Punkte auflegen; die zweite Form ist punktiert eingetragen.

§ 24. Koppeln wir endlich zwei konjugierte Elemente, so entsteht der Mechanismus der Fig. 32. Die Gelenkvierecke OLPL', OMQM' sind hier ähnliche Parallelogramme, von denen eines konvex, das andere durchgeschlagen ist. Im Sonderfalle ba sind sie überdies kongruent (Fig. 28, 29). Dieser Apparat bildet zusammen mit dem gemeinen „Peaucellier“ (Fig. 1) und dem spiegeligen Typus bb (Fig. 26) das Tripel der einfachsten und gedrungeusten Formen.

Im allgemeinen Falle AB konjugierter Elemente entsteht noch eine weitere Anordnung dadurch, daß das eine Element vor der Koppelung umgelegt wird (§ 12). Der zunächst unübersichtlich erscheinende Mechanismus (Fig. 33) besteht aus zwei kongruenten Gelenkvierecken OLPL' und QM'OM, deren Seiten in der angegebenen Reihenfolge der Ecken die Längen l, p, m, q besitzen; das eine von beiden ist bei der dargestellten Lage konvex, das andere überschlagen. Im Sonderfall des Typus ba geht auch diese Form in diejenige der Fig. 28 über.

§ 25. Von dem Inversor der Fig. 28 führt eine einfache Brücke zum Inversor von Hart, die durch das auftretende Antiparallelogramm wohl ausreichend gekennzeichnet ist, so daß wir sie hier nicht aufzubauen brauchen. Zudem wäre sie trotz ihres elementargeometrischen Charakters noch immer ein Umweg gegenüber der folgenden Zurückführung des Inversors von Hart auf unseren Elementar-Inversor (Fig. 34):

Wir spiegeln einen Elementar-Inversor (vom Typus B, um auf die übliche Darstellung des Hartschen Inversors zu kommen) an dem Mittellot von P und Q. Dabei entstehen zwei neue Punkte, die Spiegelbilder L', M' von L, M. Man sieht nun ohne weiteres, daß diese auf den Stäben MQ, LP feste Lagen und überdies die feste Entfernung LM besitzen. Verbindet man sie daher (im Falle unserer Figur nach vorheriger Verlängerung der Stäbe LP, MQ) durch einen starren Stab von der Länge LM, so entsteht wieder ein übergeschlossener Mechanismus, aus dem man nunmehr die

Schlitzplatte entfernen kann. Damit ist bereits der Inversor von Hart gewonnen.

Das Verfahren ist insofern einfacher, als das zum „Peaucellier“ führende, als nur ein Element und nur eine überzählige, (hier allerdings quadratische) Bedingung benutzt wird. Dafür ist der Grundgedanke, die Spiegelung, mehr kunstgrifflicher Art, und das Endergebnis nicht so reichhaltig, wie bei unserer ersten Methode. Auch in der nachfolgenden Verallgemeinerung auf Drehinversoren wird der gleiche Unterschied zutage treten.

§ 26. Wenn wir in einem Element vom Typus A das Dreieck OMQ um O durch einen festen Winkel ω drehen (vgl. Fig. 9 und 35), so bilden die Punkte O, L, M in der neuen Lage ein starres Dreieck, das wir durch eine Platte mit Bohrungen in den Ecken zur Aufnahme von Gelenken dargestellt denken. An Stelle des geradlinigen Schlitzes tritt alsdann eine Schlitzplatte mit zwei in O unter dem Winkel ω einlaufenden Schlitzten, in denen die Enden P, Q der in L, M anzulenkenden Stäbe von den Längen l, p geführt werden.

Wählen wir $\omega = 0$, so erhalten wir den bisherigen Typus A; für $\omega = \pi$ dagegen entsteht der bisherige Typus D. Wir fassen daher beide in den verallgemeinerten Typus A zusammen.

Führen wir die gleiche Drehung an einem Element vom Typus B aus (Fig. 10, 36), so entsteht an der Ecke O des Dreiecks OLM der Winkel $\pi - \omega$, während die Schlitzte wie zuvor den Winkel ω bilden. Für $\omega = 0$ erhalten wir den bisherigen Typus B, für $\omega = \pi$ den Typus C. Beide sind also Sonderfälle des verallgemeinerten Typus B.

§ 27. Hiermit sind nun die Vorzeichenfragen auf den Winkel ω abgeschoben, so daß wir l, m, p, q als absolute, positive Größen ansehen können, zwischen denen wieder die Proportion

$$1 : m = p : q = s$$

besteht. Fassen wir auch die Potenz S als positiv auf, so entsteht folgende einfache Einteilung der Elemente in zwei Typen:

A) $l > p, m > q, S = lm - pq$, Winkel LOM = ω .

B) $l < p, m < q, S = pq - lm$, Winkel LOM = $\pi + \omega$.

Dabei ist ω als der Winkel POQ unter Beachtung des Drehsinnes definiert. Dieser ist in unseren Figuren stets positiv im Sinne des Uhrzeigers, der Winkel ω selber spitz oder als ein Rechter gewählt. Die Beachtung des Drehsinnes erklärt, warum beim Typus B der Winkel LOM als $\pi + \omega$ und nicht $\pi - \omega$ angegeben ist. Der letztere Wert kommt in unseren Figuren dem Winkel MOL zu.

Dem Werte $s = 1$ entsprechen wieder besonders einfache Typen, die wir a, b nennen.

§ 28. Ein gegebenes Element kann auf zwei Arten auf gegebene Punkte O, P, Q aufgelegt werden. Aus einer von ihnen erhalten wir die zweite, indem wir die Dreiecke OLP und OMQ an den Seiten OP und OQ nach OL'P und OM'Q spiegeln; dann ist OL'M' die zweite Lage der Doppelkurbel OLM. Auf diese Art entsprechen sich die Fig. 35 und 38, 37 und 39, 36 und 40, endlich die beiden in 41 gekoppelten Elemente. Ein stetiger Uebergang aus der einen Lage in die andere ist geometrisch möglich unter der Bedingung des § 13.

§ 29. Weil die Drehinversion nicht mehr involutorisch ist, lassen sich die Rollen von P und Q nicht mehr vertauschen; bringt man P an Stelle von Q, so gelangt Q nicht in die Ausgangslage von P. Eine „Umlegung“ als Verallgemeinerung der Substitution (7) des § 15 scheint also auf den ersten Blick ebensowenig möglich, wie eine Spiegelung des Elementes als Ganzen, da letztere den Drehsinn von ω umkehrt. Da diese Umkehrung des Drehsinnes aber auch bei der Vertauschung der Rollen von P und Q auftritt, sieht man sogleich, daß eine Vereinigung von Umlegung und Spiegelung einen neuen Inversor von gleicher Potenz und gleichem Drehwinkel liefern wird. In der Tat braucht man nur das Instrument umgewendet auf die Zeichenfläche zu legen und nunmehr das bisherige Ende Q der Schubkurbel q auf P zu stellen; dann wird sich das Ende der Schubkurbel p auf Q einstellen. Dieser Inversor, der durch die Substitution

$$(11) \quad l' = m, \quad m' = l, \quad p' = q, \quad q' = p,$$

aus einem gegebenen entsteht, ist insofern kein „neues“ Element, als er durch Umwenden des gegebenen erhalten werden kann. Jedoch ist ohne diese Umwendung, also eine räumliche Hilfe, die Vertauschung (11) nicht stetig ausführbar.

Durch diese Umlegung entstehen aus den Elementen der Fig. 35, 38 diejenigen der Fig. 37, 39; ebenso aus Fig. 36, 40 die beiden in Fig. 41 gekoppelten Elemente. Auch in den Fig. 42, 43 sind umgelegte Elemente miteinander gekoppelt.

Für die Typen a, b wird die Umlegung wie schon früher gegenstandslos, weil bereits $l = m$ und $p = q$ ist.

§ 30. Genau wie früher sind wieder je zwei „konjugierte“ Elemente der Typen A und B durch die Substitution

$$(12) \quad l' = p, \quad m' = q, \quad p' = l, \quad q' = m,$$

zu erklären. Die geometrische Deutung stimmt wörtlich mit derjenigen des § 17 überein. Von unseren Figuren sind 36, 40 zu 35, 38 konjugiert, ferner die beiden in 41 gekoppelten Elemente zu 37, 39. Endlich sind die in den Fig. 44 und 48 gekoppelten Elemente konjugiert.

Die in Fig. 45 gekoppelten Elemente sind ebenfalls konjugiert, doch ist vor der Koppelung das eine von ihnen umgelegt worden. Hierbei entsteht, wie in Fig. 33 (vgl. § 24), ein aus zwei kongruenten Gelenkvierecken $OLPL'$ und $QM'OM$ aufgebauter Mechanismus, in dem wieder die Seiten OL , OM und OL' , OM' starr verbunden sind, jedoch nicht geradlinig, sondern unter den Winkeln ω und $\pi + \omega$, hier insbesondere rechten Winkeln von entgegengesetztem Drehsinn. Die Bezeichnung der Seiten mit l , m , p , q weicht in Fig. 45 in nebensächlicher Weise von derjenigen in Fig. 33 ab zugunsten des Zusammenhanges mit den Fig. 42, 43, 44.

§ 31. Die Beseitigung der Schlitzführung geschieht wörtlich wie in § 18 durch Koppelung zweier Elemente, was schematisch in Fig. 41 angedeutet ist. Die hier gekoppelten Elemente sind kongruent gemäß § 28; der entstehende Gelenk-Inversor ist daher pantographisch; die Gelenkvierecke $OLPL'$, $OMQM'$ sind ähnliche Trapeze, von denen das eine konvex, das andere einspringend angeordnet ist. Bei gleichartiger Anordnung entsteht ein Drehpantograph. Doch ist diese Anordnung bei den in der Figur gewählten Typen B nicht durch stetigen Uebergang aus der inversorischen Einstellung zu gewinnen (vgl. § 9).

Auf die Darstellung des Typus AA aus zwei kongruenten Elementen konnte verzichtet werden. Auch die aus beliebigen Elementen gleicher Potenz aufgebauten allgemeinen Typen sind nicht gezeichnet, weil die am Schlusse des § 21 vorgebrachten Mängel ästhetischer Art hier naturgemäß noch stärker zutage treten. In den weiteren Darstellungen 42 bis 48 ist zunächst durchgehends ω als rechter Winkel gewählt; die zugrundeliegenden Elemente gehen in Fig. 42 bis 45 und ebenso in 46 bis 48 aus einem von ihnen durch die Substitutionen (11), (12) hervor. Die Inversoren aa und bb sind pantographisch, auch wenn sie nicht, wie in Fig. 46, 47 aus kongruenten Elementen bestehen.

§ 32. In den Punkten O , L , M , P , Q des Inversors von Sylvester und Kempe (Fig. 6) erkennen wir nunmehr ohne weiteres einen elementaren Drehinversor, und zwar bei der in Fig. 6 gewählten Anordnung einen solchen vom Typus B. Die Entfernung der Schlitzplatte ist wiederum dadurch ermöglicht, daß zwei mit den Kurbeln starr verbundene Punkte L' , M' existieren, welche bei den Bewegungen des Mechanismus einen konstanten Abstand einhalten, also eine überzählige Bedingung zulassen. Ihre Lage ist durch die bereits in § 2 angegebene Aehnlichkeit von Dreiecken bestimmt.

Indem wir aber versuchen, die Lage dieser Punkte durch Verallgemeinerung des in § 25 angewandten Gedankens aufzufinden,

kommt uns das kunstgriffliche jener Betrachtungsweise zum klaren Bewußtsein. Die dort angewandte Spiegelung kann hier nämlich nur umständlich und nur bei vorheriger Kenntnis des Ergebnisses zum Ziele führen, weil es in Wahrheit auf gleichsinnige Aehnlichkeit ankommt, die Spiegelung aber den Umlaufsinn umkehrt.

§ 33. Immerhin scheint sich der elementare Beweis der Eigenschaft des betrachteten Inversors etwas zu vereinfachen, wenn wir von dem zugehörigen Element ausgehen. Es seien zu diesem die mit den Schubkurbeln fest verbundenen Punkte L' , M' durch die gleichsinnige Aehnlichkeit der Dreiecke LOM , LPM' , $L'QM$ definiert (Fig. 6). Dann ist zu zeigen, daß $L'M = LM'$, was sofort aus $l:m = p:q$ folgt (die Dreiecke LPM' und $L'QM$ werden kongruent), und daß $LM = L'M'$. Letzteres wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß LL' zu MM' parallel ist. Nun ergibt die gleichsinnige Aehnlichkeit von OLM und PLM' in bekannter Weise diejenige von OLP und MLM' , wonach die Winkel LMM' und LOP gleich sind. Ebenso ist Winkel MLL' gleich MOQ . Andererseits ergeben LOP und MOQ in dem hier betrachteten Falle des Typus B (Fig. 6) zusammen einen gestreckten, weil dies von LOM und POQ auf Grund der Eigenschaften unseres Elementar-Inversors zutrifft. Damit ist die Behauptung erwiesen. Die Umstellung des Beweises für den Fall des Typus A bietet keine Schwierigkeit.

§ 34. Gegentüber dem Sylvester-Kempeschen Inversor besitzen unsere aus zwei Elementen gekoppelten Mechanismen den Vorzug, daß nur zwei Dreiecke auftreten, und daß diese nicht ähnlich zu sein brauchen (vgl. Fig. 35, 36)¹⁾. Die Rolle der Gleichsinnigkeit in der Theorie des ersteren verrät zugleich, daß trotz seines engen Zusammenhanges mit unserem Elementar-Inversor dieser nicht den eigentlichen Kern der Figur 6 darstellt. Damit sind die Grenzen der Tragweite unserer elementargeometrischen Betrachtungsweise abgesteckt. Ihre Ergiebigkeit für den Inversor von Peaucellier steht in einem auffallenden und lehrreichen Gegensatz zu ihrem Versagen am Inversor von Hart.

§ 35. Gleichwohl halte ich diese Untersuchungen, die seit über 10 Jahren ein beschauliches Dasein in meinem Schreibtisch geführt haben, heute für der Veröffentlichung nicht mehr unwert. Denn unseren Lehramtskandidaten, die die Mehrheit unserer Mathematik-Beflissenen darstellen, bleibt heute unter der erhöhten Berufsbelastung und bei einem möglichst kurz gehaltenen, durch Nebenerwerb eingeengten Studium vielfach nicht mehr die Zeit, sich im Gebiet der höheren Mathematik bis zu selbständiger wissenschaft-

¹⁾ Daß in den Fig. 42—48 ähnliche (zum Teil jedoch ungleichsinnig ähnliche) Dreiecke auftreten, liegt an der besonderen Wahl der gekoppelten Mechanismen und des Winkels ω .

licher Arbeit hindurchzuringen und dabei doch den Kontakt mit dem „Schulpensum“ zu wahren. Darum sollte unseres Erachtens den ohnehin und schon vor dem Kriege über Gebühr vernachlässigten elementaren Methoden mehr Aufmerksamkeit im Unterricht gewidmet werden. Sie verlangen weniger an Vorkenntnissen und an Geistesgymnastik, stehen aber dafür dem Gegenstand des Schulunterrichtes um so näher und ermöglichen es auch dem „Minderbemittelten“, als Lehrer immer noch etwas mehr zu wissen, als seine begabteren Schüler, — was nicht für die Wahrung der Autorität allein von Wichtigkeit ist.

§ 36. Die hier vorgetragene Theorie soll nur ein Beispiel dafür abgeben, wie weit elementare Betrachtungen tragen können, und wie sie zwischendurch und an den Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit Anschlüsse an tiefere Gedanken (wie Substitutionen, Gruppen, Kinematik starrer und ähnlich-veränderlicher Systeme) darbieten. Was insbesondere die Transformation durch reziproke Radien betrifft, so hat ihre vielfach allzu einseitige rein analytische Behandlung, dazu meist nur unter dem Gesichtspunkt der konformen Abbildung, den Nachteil, daß derart hübsche Mechanismen, wie die Inversoren, völlig außerhalb des theoretischen Zusammenhanges stehen bleiben. Wenn sie dann überhaupt einer Erwähnung für würdig erachtet werden, so belasten sie lediglich das Gedächtnis des Lernenden, ohne seinen geometrischen Formensinn zu schulen.

§ 37. Im Anschluß an diesen pädagogischen Exkurs möge noch einiges über unsere Figuren und die ihnen in der Idee zugrundeliegenden Modelle gesagt werden.

Eine Ausführung von Modellen hatte in liebenswürdiger Weise Herr Kollege H. Wiener durch seine Darmstädter Werkstatt vorgesehen. Der Krieg hat einen Strich durch den Plan gemacht. Mittels einer Heftzange amerikanischer Herkunft habe ich aus starker Pappe, sogenanntem „Preßspahn“, eine Reihe von Modellen angefertigt, die sich in der geometrischen Sammlung der Technischen Hochschule Breslau befinden. Die Zange ¹⁾ ist mit einer Lochstanze kombiniert. In die von dieser gestanzten Löcher von 5 mm Durchmesser werden sodann Metallösen eingepreßt, wie sie auch die Schuhmacher an den Schnürlöchern der Schuhe verwenden. Man darf sie nur nicht zu fest einpressen, damit das

¹⁾ Sie scheint im Handel noch nicht wieder erhältlich zu sein. Von zwei deutschen Nachahmungen ist die eine für unseren Zweck völlig unbrauchbar, weil das Stanzloch für die Oesen zu klein ist. An der anderen fehlt, außer der Exaktheit der Stanze und der Vernickelung, die Riffelung der Griffe, wodurch die Handhabung unsicher und überaus ermüdend wird.

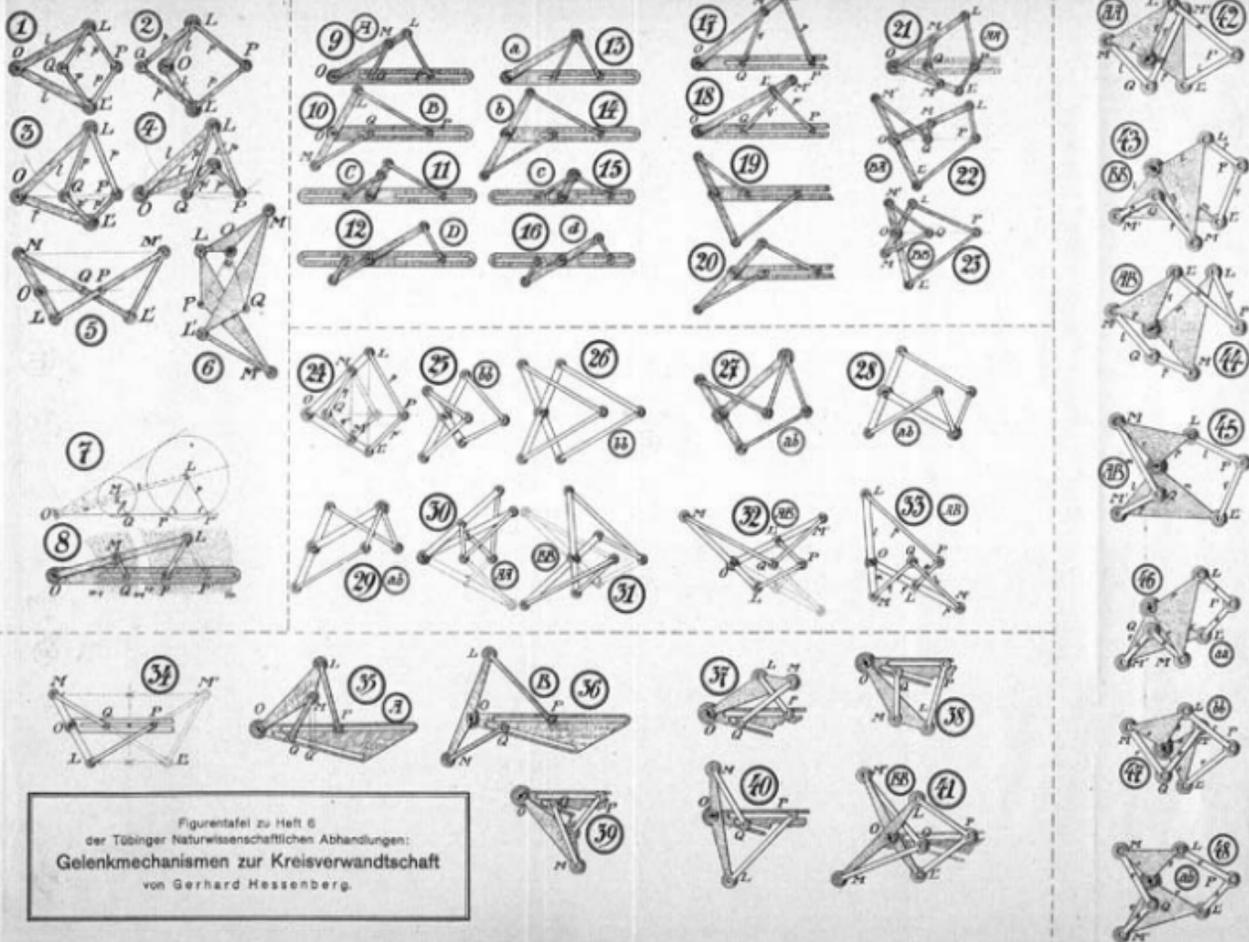
dergestalt hergestellte Gelenk nicht seine Beweglichkeit verliert. Die Koppelung solcher Oesengelenke ist besonders einfach mittels durchgesteckter Stifte zu bewirken.

§ 38. Bei der Anfertigung solcher Modelle sind nun die hier gegebenen Figuren mit Vorsicht zu verwenden. Die einzelnen Stäbe und Platten liegen dabei in verschiedenen Ebenen, aber die Gelenke durchsetzen mindestens zwei und oft mehrere dieser Ebenen, wodurch Kollisionen und geometrisch nicht vorgesehene Bewegungsgrenzen entstehen können. Auf diese ist in den Fig. 1 bis 29 und 34 bis 40 keine Rücksicht genommen, vielmehr sind hier stets die Schubkurbeln vom Beschauer aus gesehen über die Doppelkurbeln gelegt. Infolgedessen vermögen z. B. die Inversoren Fig. 28, 29 gewisse Totlagen nicht zu passieren und auch, soviel ich sehe, nicht stetig ineinander überzugehen. Bei den Fig. 30 bis 33 und 41 bis 48 habe ich mich bemüht, größtmögliche Bewegungsfreiheit zu erzielen; da ich sie jedoch bei weitem nicht alle durch Modelle verwirklichen konnte, ist es sehr wohl möglich, daß sich auch hier noch unzuweckmäßige Anordnungen vorfinden.

§ 39. Die Anbringung von Kreisplatten verschiedener Größe in den Gelenken ist bei linearen Stäben ein rein zeichnerischer Luxus. Für diese Bestandteile läßt man sich vom Buchbinder den Preßspahn in Streifen von 1 bis 2 cm Breite schneiden und trennt sich von diesen nach Bedarf Stücke ab. Dreieckige Platten dagegen, wie sie bei den Drehinversoren auftreten, muß man sich selber ausschneiden, was besser, wenn auch langsamer als mit einem (sehr starken) Messer mit einem scharfen, gut gehärteten Meißel (Stechbeitel) geschieht. Hier wird man nun die Kanten der Platte nach dem geometrischen Vorbild abstechen, muß dann aber in den Ecken zur Anbringung der Gelenke solche Platten stehen lassen, wie sie in unseren Figuren zu sehen sind.

Auf Bestellung ist auch die Werkstätte der Tübinger Studentenhilfe in der Lage, solche Modelle herzustellen.

Tübingen, im November 1923.



Figurentafel zu Heft 6
 der Tübinger Naturwissenschaftlichen Abhandlungen:
Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft
 von Gerhard Hessenberg.