

Rechnen mit Dualzahlen

1. Addition und Subtraktion von Dualzahlen

Rechenregeln:

Addition	Subtraktion
$0+0 = (0)0$	$1-0 = (0)1$
$0+1 = (0)1$	$1-1 = (0)0$
$1+0 = (0)1$	$0-0 = (0)0$
$1+1 = (1)0$	$0-1 = (1)1$

Beispiel:

$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ +\ \underset{1}{1}\ \underset{1}{1}\ 0\ 1 \\ \hline \color{red}{1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 2 \\ +\ 1\ 3 \\ \hline 3\ 5 \\ \hline \hline \end{array}$		
$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ -\ \underset{1}{1}\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \hline \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 3 \\ -\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 2 \\ \hline \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ -\ \underset{1}{1}\ \underset{1}{1}\ \underset{1}{1}\ \underset{1}{1}\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 0 \\ -\ \underset{1}{1}\ 3 \\ \hline 7 \\ \hline \hline \end{array}$

Aufgabe: Löse die folgenden Aufgaben!

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ +\ \ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ -\ \ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ -\ \ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ -\ \ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

2. Darstellung negativer Zahlen

- Idee:

Fest vorgegebene Länge von n Bit um eine ganze Zahlen darzustellen und davon 1 Bit für das Vorzeichen.

Dabei gilt immer: Vorzeichenbit = 0 \Rightarrow positive Zahl
Vorzeichenbit = 1 \Rightarrow negative Zahl

Bsp.: 1Bit Vorzeichen + 7Bit Betrag

- 1-Komplement:

Bildung: Alle Bit invertieren.

Beispiel: $z = 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \hat{=} 86$ als 8-Bit-Dualzahl

$\hat{z} = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \hat{=} -86$ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement

$z = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \hat{=} 0$ als 8-Bit-Dualzahl

$\hat{z} = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \hat{=} -0$ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement

\Rightarrow positive und negative Null

Zahlenbereich: n Bit $\Rightarrow 2^n$ verschiedene Zahlen

1 Vorzeichenbit $\Rightarrow n-1$ Bit für die Beträge $\Rightarrow 0 \dots 2^{n-1} - 1$ als Betrag

\Rightarrow Die Zahlen $-2^{n-1} + 1$ bis $2^{n-1} - 1$ sind darstellbar

Bsp.: 8Bit $\Rightarrow -2^7 + 1 = -127$ bis $2^7 - 1 = 127$

Problem: Bei Addition und Subtraktion entstehen oft Fehler!!!

Aufgabe: Stelle folgende Zahlen als 8-Bit-Dualzahlen im 1-Komplement dar!

$22 \hat{=}$

$72 \hat{=}$

$-22 \hat{=}$

$-72 \hat{=}$

$41 \hat{=}$

$84 \hat{=}$

$-41 \hat{=}$

$-84 \hat{=}$

$57 \hat{=}$

$102 \hat{=}$

$-57 \hat{=}$

$-102 \hat{=}$

- 2-Komplement:

Bildung: Alle Bit invertieren. Danach 1 addieren.
Überträge ins $n+1$ te Bit werden ignoriert.

Beispiel:

$$z = 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \hat{=} 86 \text{ als 8-Bit-Dualzahl}$$

$$\hat{z} = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \hat{=} -86 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement}$$

$$\tilde{z} = 1\ 0 \Rightarrow 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \hat{=} -86 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 2-Komplement}$$

$$z = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \hat{=} 0 \text{ als 8-Bit-Dualzahl}$$

$$\hat{z} = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \hat{=} 0 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement}$$

$$\tilde{z} = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \hat{=} 0 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 2-Komplement}$$

Zahlenbereich: n Bit $\Rightarrow 2^n$ verschiedene Zahlen
1 Vorzeichenbit $\Rightarrow n-1$ Bit für die Beträge $\Rightarrow 0 \dots 2^{n-1} - 1$ als Betrag
nur einfache Null $\Rightarrow 1$ weitere Zahl darstellbar

\Rightarrow Die Zahlen -2^{n-1} bis $2^{n-1} - 1$ sind darstellbar

Bsp.: 8Bit $\Rightarrow -2^7 = -128$ bis $2^7 - 1 = 127$

Rechnen: Addition analog zu Addition von positiven Dualzahlen (siehe oben).
Subtraktion erfolgt durch addieren der negativen Zahl.
Überträge in das $n+1$ te Bit werden ignoriert.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3\ 6 \\ -\ 4\ 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3\ 6 \\ +\ (-\ 4\ 8) \\ \hline (-\ 1\ 2) \\ \hline \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ \hline \hline \end{array}$$

Aufgabe: Stelle folgende Zahlen als 8-Bit-Dualzahlen im 2-Komplement dar!
Überprüfe die Ergebnisse!
 $-22; -57; 73; -73; -84; 118; -118; 128; -128$

Aufgabe: Löse folgende Rechnungen mit 8-Bit-Dualzahlen im 2-Komplement!
Überprüfe die Ergebnisse!

$$\begin{array}{r} +32 \\ +15 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} +32 \\ -15 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -32 \\ +15 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} -32 \\ -15 \\ \hline \end{array}$$