

3.6. Statische, modale, harmonische und transiente Analysen

Die strukturelle Analyse mit Finiten Elementen ist eine mathematische Prozedur, um Auslenkungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Spannungen und Reaktionskräfte zu berechnen, die aufgrund von konstanten oder auch zeitvariablen Belastungen auftreten. Die Struktur kann hierbei ein einfaches System mit nur wenigen Freiheitsgraden oder aber ein komplexes System wie das Corti-Organ sein, das selbst bei Erfassung eines kleinen Abschnitts des gesamten Organs einige tausend Freiheitsgrade aufweisen kann. Die Gleichgewichtsbedingungen werden als allgemeines Gleichungssystem einer strukturellen Analyse in Matrixform wie

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^e(t) \quad (3.6.1)$$

formuliert. Zur Auswertung von 3.6.1 werden in Abhängigkeit von der externen Belastung verschiedene Analyseverfahren eingesetzt.

Statische Analyse

Für die Berechnung der Strukturauslenkungen und Deformationen bei statischen Belastungen ist in 3.6.1 lediglich der zeitunabhängige Anteil

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^e$$

mit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} zu berücksichtigen. Massen und Dämpfungen sind damit bei statischen Analysen unwirksam. Selbstverständlich hat bei statischen Analysen, die die Gravitation berücksichtigen, die Masse einen Einfluss. Mit ihr ist in diesem Fall nämlich eine entsprechende extern wirkende Gravitationskraft verbunden.

Für Systeme mit Fluid-Struktur-Kopplung (Kap. 3.5.) vereinfacht sich das Matrixgleichungssystem 3.5.5 zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^s & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^s \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.6.2)$$

Statische Analysen werden in der Regel vor den aufwendigeren modalen, harmonischen und transienten Analysen durchgeführt und dienen beispielsweise dazu die Belastungsgrenzen von Systemen zu ermitteln. Wie bei den transienten Analysen müssen lineare und nichtlineare statische Analysen unterschieden werden. Während eine lineare statische Analysen lediglich die Lösung eines linearen Gleichungssystems erfordert, müssen bei nichtlinearen Analysen meist iterative Lösungsverfahren, wie im Kapitel 3.3. näher beschrieben, angewandt werden.

Moden-Frequenz-Analyse

Die Moden-Frequenz-Analyse ergibt die natürlichen Schwingungsfrequenzen (Eigenfrequenzen) und zugehörigen Auslenkungen (Eigenformen, Moden), die das System annimmt wenn weder Dämpfungen noch äußere Lasten vorhanden sind. In diesem Fall sprechen wir von freien Schwingungen. Die Ergebnisse zeigen daher die theoretisch möglichen Auslenkungen und Rotationen des dämpfungsfrei gedachten, freischwingenden Systems, wobei die tatsächlichen Auslenkungen und Rotationen von der äußeren Belastung und den Dämpfungseigenschaften der Strukturen und Flüssigkeiten abhängen.

Wenn im folgenden Auslenkungen genannt werden so sind damit immer, wenn nicht anders vermerkt, auch die rotatorischen Freiheitsgrade gemeint. Die korrekte Durchführung von Moden-Frequenz-Analysen setzt voraus, dass sowohl die Steifigkeiten wie die Massen zeitlich konstant sind.

Moden-Frequenz-Analysen können auch bei Systemen durchgeführt werden, bei denen die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} , entweder aus physikalischen Gründen oder aufgrund der Modellbildung, wie zum Beispiel beim Problem der Fluid-Struktur Wechselwirkung, berücksichtigt werden muss. Es wird daher kurz auf die Sonderform der für die Praxis wichtigen gedämpften Moden-Frequenz-Analysen eingegangen.

Unter den genannten Voraussetzungen lautet die Bewegungsgleichung für ein ungedämpftes System in Matrixschreibweise

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

Für lineare Systeme sind die freien Schwingungen und damit die Auslenkungen harmonisch

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}_i \cos \omega_i t \quad (3.6.3)$$

Aus der Lösung der zugehörigen Eigenwertgleichung

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0} \quad (3.6.4)$$

die durch Einsetzen von 3.6.3 entsteht, können die reellen Eigenvektoren $\hat{\mathbf{u}}_i$ bestimmt werden. Hierin sind \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, \mathbf{M} die Massenmatrix und ω_i die Eigenkreisfrequenzen, deren Quadrate die Eigenwerte λ_i sind. Die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{u}}_i$ beschreiben die Moden; das sind die Eigenformen, die das System bei den verschiedenen Eigenkreisfrequenzen annimmt. Zur Lösung von 3.6.4 können verschiedene Verfahren, zum Beispiel die Unterraummethode, verwendet werden.

Unterraummethode

Die von Bathe (1971) entwickelte Unterraum-Iterationsmethode dient zur Lösung sogenannter großer Eigenprobleme. Das Vorgehen wird anhand der Auflistung der einzelnen durchzuführenden Schritte erläutert :

1. Festlegung der anfänglichen Verschiebung s der Massenmatrix \mathbf{M} gegenüber der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} (Standardwert $s = -4\pi^2$). Die Verschiebung hat den Zweck, die Berechnung des gesuchten Eigensystems zu beschleunigen.
2. Initialisierung der q Startvektoren

$$q = p + d$$

p ist die Anzahl der Moden, die bestimmt werden soll; d ist die Anzahl der zusätzlichen Iterationsvektoren (Standardwert 4). Die q Startvektoren \mathbf{X}_0 werden wie folgt initialisiert. Für jede vordefinierte Starrkörperbewegung wird ein Starrkörpervektor definiert. Starrkörperverschiebungen sind solche Verschiebungsmoden, die das Element als starrer Körper auszuführen in der Lage sein muss, ohne dass in ihm Verzerrungen und Spannungen entstehen. Für eine translatorische Starrkörperbewegung wird der entsprechende Freiheitsgrad im Startvektor \mathbf{X} zu 1 gesetzt. Für eine rotatorische Starrkörperbewegung wird der entsprechende Freiheitsgrad entsprechend einer Einheitsrotation um den globalen

Ursprung gesetzt. Die Starrkörpervektoren werden mit der modifizierten Gram-Schmidt Methode orthogonalisiert. Die restlichen Vektoren werden als Zufallsvektoren initialisiert.

3. Transformation der verschobenen Matrix \mathbf{K}^* in eine Dreiecksform

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + s \mathbf{M}$$

Es folgt der Sturm-Folgen Test (nach J.Ch.Sturm, 1803-1855, französischer Mathematiker). Hierbei wird die Anzahl der negativen Hauptdiagonalelemente, die während der Triagonalisierung der verschobenen Matrix \mathbf{K}^* entstehen, berechnet. Diese entspricht der Anzahl der konvergenten Eigenwerte, sofern keine Eigenwerte verloren gegangen sind. In diesem Fall müssen entweder mehr Iterationsvektoren verwendet werden. Oder aber die Anfangsverschiebung war zu weit von der ersten Mode entfernt, dann beginnt man mit der Prozedur erneut mit einer veränderten Verschiebung s . Beim letzten Sturm-Folgen Test wird die Verschiebung zu

$$s = \lambda_p + 0.1(\lambda_{p+1} - \lambda_p)$$

wobei λ_p der Eigenwert der zuletzt gewünschten Mode ist, und λ_{p+1} der Eigenwert der nächsten berechneten Mode.

4. Führe für jede Unterraum Iteration n die Schritte 5 bis 14 aus. Die Schritte 5 bis 12 werden nur für die nicht-konvergierten Vektoren durchgeführt. Liegt ein konvergenter Eigenwert vor, wird der zugehörige Eigenvektor nicht mehr iteriert.

5. Berechne die Matrix $\mathbf{F} = \mathbf{M} \mathbf{X}_{n-1}$ und normiere \mathbf{F} auf λ_{n-1} , einen zuvor geschätzten Eigenwert.

6. Löse die Gleichung $\mathbf{K}^* \hat{\mathbf{X}}_n = \mathbf{F}$ nach $\hat{\mathbf{X}}_n$ auf.

7. Skalieren die Vektoren $\hat{\mathbf{X}}_n$ mit $\frac{\lambda_{n-1}-s}{\lambda_{n-1}}$.

8. Orthogonalisiere die Vektoren zu den zuvor konvergierten Vektoren mit der modifizierten Gram-Schmidt Orthogonalisierung. Die Gram-Schmidt Prozedur stellt sicher, dass die nicht-konvergierten Eigenvektoren orthogonal zu den konvergierten Vektoren bleiben, die nicht mehr iteriert werden.

9. Definiere die Unterraummatrizen $\hat{\mathbf{K}}$ und $\hat{\mathbf{M}}$:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{X}}_n^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_n$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{X}}_n^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}}_n$$

10. Berücksichtige die Verschiebung: $\hat{\mathbf{K}}^* = \hat{\mathbf{K}} + s \hat{\mathbf{M}}$.

11. Berechne die Eigenwerte und Vektoren durch eine verallgemeinerte Jacobi-Iteration

$$\hat{\mathbf{K}}^* \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{Q} \lambda_n$$

mit den Unterraum-Eigenvektoren \mathbf{Q} und den aufdatierten Eigenwerten λ_n .

12. Aktualisiere die approximierten Eigenvektoren gemäß:

$$\mathbf{X}_n = \hat{\mathbf{X}}_n \mathbf{Q}$$

13. Eliminiere negative oder redundante Moden und erstelle in diesen Fällen einen neuen Zufallsvektor.

14. Konvergenztest

a. Sind alle Moden konvergent, das heißt, ist die Abweichung e der Eigenwerte der vorletzten Iteration von denen der letzten Iteration bezogen auf die Eigenwerte der letzten Iteration kleiner als eine vorgegebene Toleranz (z.B. 10^{-5}) ? In diesem Falle folgt Schritt 15.

b. Ist eine neue Verschiebung erforderlich ? Dann gehe zu 3.

c. Gehe zum nächsten Iterationsschritt 4.

15. Führe einen letzten Sturm-Folgen Test durch.

Zur Simulation realer Systeme müssen Dämpfungen berücksichtigt werden. Dies erfordert die Kenntnis der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} in der Bewegungsgleichung (3.6.1), die sich wie in 3.2. beschrieben aus unterschiedlichen Komponenten zusammensetzt. Das Eigenwertproblem (Glg. 3.6.4) wird damit quadratisch :

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_i + \bar{\lambda}_i \mathbf{C} \hat{\mathbf{u}}_i = -\bar{\lambda}_i^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{u}}_i$$

Hierin sind die komplexen Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ durch

$$\bar{\lambda}_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$

gegeben. Die Systemantwort wird zu

$$\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i e^{\sigma_i \pm j\omega_i t}$$

Für negative Werte von σ_i ist das System stabil. Bei positiven Werten von σ_i wachsen die Lösungen zumindest bei linearen Systemen über alle Grenzen.

Bei der Modalanalyse gedämpfter Systeme können die Imaginärteile ω_i der komplexen Eigenwerte verwendet werden, um die kinetische Energie der Elemente zu berechnen.

Harmonische Analyse

Unter der harmonischen Analyse wird die Lösung der Bewegungsgleichung 3.6.1 eines linearen Systems im stationären Schwingungszustand verstanden. Da hierbei eine externe Anregung verwendet wird, kann mit der harmonischen Analyse im Gegensatz zur Modalanalyse die Abhängigkeit der Systemantwort vom Ort und der Art der externen Belastung untersucht werden. Eine wichtige Voraussetzung für die Durchführung einer harmonischen Analyse ist die Linearität des Systems. Sie hat zur Folge, dass sich alle Punkte des Systems mit der gleichen Frequenz, die der Erregerfrequenz entspricht, bewegen. Allerdings können aufgrund von Dämpfungen Phasenverschiebungen entstehen, sodass die Auslenkungen in der Form

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} e^{j\phi} e^{j\omega t} = \hat{\mathbf{u}} (\cos \phi + j \sin \phi) e^{j\omega t}$$

anzusetzen sind. Die Phasen ϕ können an jedem Ort unterschiedlich sein.

Die Hauptanwendung der harmonischen Analyse besteht in der Bestimmung des Frequenzgangs, das heißt der numerischen Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Amplitude und Phase der Ausgangsgröße eines linearen Systems. Bei einfachen technischen Systemen (z.B. Tiefpass, Hochpass) werden diese Werte als obere und untere Grenzfrequenzen

angegeben. Das sind die Frequenzen, bei denen die Amplitude der Ausgangsgröße auf den $1/\sqrt{2}$ -fachen Wert ($\equiv -3\text{ dB}$) des Maximalwertes abfällt. Allerdings ist diese Charakterisierung bei biologischen Systemen häufig unangemessen, da bei den ungleichmäßigen Übertragungseigenschaften eine Abgrenzung von Intervallen mit frequenzunabhängigem Amplitudenverlauf, wie beim Tief- oder Hochpass, selten möglich ist. Für die praktische Durchführung der harmonischen Analyse ist zu beachten, dass die Analysezeit wesentlich größer ist als die Einschwingzeit; das ist die Zeit bis das System den stationären Zustand erreicht.

Transiente Analyse

Die bisher behandelten Lösungsverfahren dienen zur Bestimmung des statischen Verhaltens, der Eigenwertanalyse und des Frequenzgangs linearer Systeme. Um das Zeitverhalten linearer und nichtlinearer Systeme zu ermitteln, sind transiente Analysen erforderlich.

In der Messtechnik wird unter transienter Anregung eine Stimulation verstanden, die gegenüber dem Beobachtungszeitraum wesentlich kürzer ist. Bei den Zeit-Diskretisierungen werden Einschrittverfahren, die lediglich zwei aufeinanderfolgende Abtastzeitpunkte u_{n+1} und u_n verwenden, und Mehrschrittverfahren unterschieden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden nur Einschrittverfahren dargestellt. Ein weiterer wesentlicher Unterschied der zeitdiskreten Lösungsschemata besteht zwischen den *impliziten* und den *expliziten* Lösungsverfahren. Die *expliziten* Schemata berechnen den Lösungsvektor des nachfolgenden Zeitschritts ($\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}$) ausschließlich aus den Werten des Vorgängers ($\ddot{\mathbf{u}}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_n$), während bei *impliziten* Verfahren das Gleichungssystem beidseitig Werte des Zeitpunktes $n + 1$ enthält. Es werden daher zusätzliche Speicherungen und Zuweisungen erforderlich. Während die *impliziten* Verfahren, wie das oft angewandte Newmark-Schema, den Vorteil der unbedingten Stabilität haben, erfordern sie meist einen höheren Rechenaufwand gegenüber den *expliziten* Verfahren.

Wichtiger Vertreter eines expliziten Verfahrens ist das Runge-Kutta-Verfahren (nach C. Runge, 1856-1927, und M.W. Kutta, 1867-1944, deutsche Mathematiker). Hochentwickelte explizite Lösungsverfahren verfügen über die Möglichkeit, im Raum Lagrange- oder Euler-Komponenten zu verwenden. Sie erfordern jedoch einen beträchtlichen Entwicklungsaufwand.

Die transiente Analysen dient zur Lösung der Bewegungsgleichung (3.6.1) im Zeitbereich. Bei der Verarbeitung diskreter Signale sind die Abtastbedingungen zu erfüllen. Dies ist insbesondere bei der Berechnung nichtlinearer Systeme zu beachten, da trotz Frequenzbandbegrenzung des Eingangssignals höherfrequente Signalkomponenten entstehen können, die entsprechend erhöhte Abtastraten erfordern. Die verschiedenen Integrations-techniken sind in der Literatur (z.B. Zienkiewicz und Taylor, 1991) beschrieben. Besonderheiten treten bei den gekoppelten Problemen, wie z.B. bei der Fluid-Struktur-Kopplung (Kap. 3.5.), wegen der Unsymmetrie der Matrizen auf (Zienkiewicz und Taylor, 1985). Daher wird die numerische Lösung des gekoppelten Fluid-Struktur Problems, das durch das Differentialgleichungssystem mit unsymmetrischen Matrizen beschrieben wird, betrachtet :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^s & \mathbf{0} \\ \rho_{Fl} \mathbf{R}^T & \mathbf{M}^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}^s & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^s \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.6.5)$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass gemäß Glg. 3.1.33 die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c im Fluid und damit die Kompressibilität K in der Fluidmassenmatrix \mathbf{M}^f enthalten ist. Bei einem inkompressiblen Fluid verschwindet diese zusätzliche Massenmatrix (added mass matrix). Das Gleichungssystem von zweiter Ordnung in der Zeit erfordert mindestens einen Reihenansatz zweiter Ordnung für die zeitabhängigen Variablen \mathbf{u} und \mathbf{p} . Durch die beiden Variablen

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{\alpha_n^u (\Delta t)^2}{2} \quad \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \dot{\mathbf{p}}_n \Delta t + \frac{\alpha_n^p (\Delta t)^2}{2}$$

und $\Delta t = t_2 - t_1$ wird das Gleichungssystem 3.6.5 in die beiden Bedingungen

$$\mathbf{M}^s \alpha_n^u + \mathbf{C}^s (\dot{\mathbf{u}}_n + \alpha_n^u \Theta_1 \Delta t) + \mathbf{K}^s (\mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Theta_1 \Delta t + \frac{\alpha_n^u \Theta_2 (\Delta t)^2}{2}) - \mathbf{R} (\mathbf{p}_n + \dot{\mathbf{p}}_n \Theta_1 \Delta t + \frac{\alpha_n^p \Theta_2 (\Delta t)^2}{2}) = \mathbf{F}^s$$

$$\rho_{Fl} \mathbf{R}^T \alpha_n^u + \mathbf{M}^f \alpha_n^p + \mathbf{C}^f (\dot{\mathbf{p}}_n + \alpha_n^p \bar{\Theta}_1 \Delta t) + \mathbf{K}^f (\mathbf{p}_n + \dot{\mathbf{p}}_n \bar{\Theta}_1 \Delta t + \frac{\alpha_n^p \bar{\Theta}_2 (\Delta t)^2}{2}) = 0$$

mit den unbekanntenen Vektoren α_n^u und α_n^p überführt. Mit der normierten Dichte $\rho_{Fl} = 1$, der Multiplikation der zweiten Gleichung mit $-0.5 \Theta_2 \Delta t^2$ und der Subtraktion konstanter von α_n^u und α_n^p unabhängiger Glieder entsteht eine symmetrische Matrixgleichung mit dem neuen Kraftvektor \mathbf{F}^n , der sowohl die externen Kräfte als auch die Anfangsbedingungen enthält. Sie lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^s + \mathbf{C}^s \Theta_1 \Delta t + \mathbf{K}^s 0.5 \Theta_2 (\Delta t)^2 & -\mathbf{R} 0.5 \Theta_2 (\Delta t)^2 \\ -\mathbf{R}^T 0.5 \Theta_2 (\Delta t)^2, & -\mathbf{M}^f 0.5 \Theta_2 (\Delta t)^2 - \mathbf{C}^f 0.5 \bar{\Theta}_1 \Theta_2 (\Delta t)^3 - \mathbf{K}^f 0.25 \bar{\Theta}_2 \Theta_2 (\Delta t)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n^u \\ \alpha_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{n1} \\ \mathbf{F}^{n2} \end{pmatrix}$$

Die Wichtungparameter, die für die beiden Bedingungen jeweils unterschiedlich gewählt werden können ($\Theta_1 \neq \bar{\Theta}_1$, $\Theta_2 \neq \bar{\Theta}_2$), errechnen sich zu

$$\Theta_i = \frac{\int_0^{\Delta t} W \tau^i d\tau}{\Delta t^i \int_0^{\Delta t} W d\tau}$$

aus den Wichtungsfunktionen W und $\tau = t - t_n$.

Damit konnte gezeigt werden, dass das Fluid-Struktur System unter bestimmten Voraussetzungen zu einem symmetrischen Gleichungssystem führt, dessen Lösung numerisch effektiv durchgeführt werden kann. Sind die Vektoren α_n^u und α_n^p berechnet, ergibt sich durch Einsetzen in 3.6.5 ein rekursives Schema zur transienten Lösung des Fluid-Struktur Problems.

Das Newmark Integrationsschema wird wegen seiner unbedingten Stabilität und der hohen Genauigkeit bei der Anwendung auf Wellenausbreitungsprobleme häufig verwendet, und kann direkt auf 3.6.5 angewandt werden. Allerdings ist mit Stabilitätsproblemen zu rechnen, denen in gewissen Fällen mit Stabilisierungsschemata entgegen gewirkt werden kann (Zienkiewicz und Taylor, 1991).

Orts- und Zeiddiskretisierung bei transienter Wellenausbreitung

Bei der Berechnung transienter Wellenausbreitungsprobleme ergeben sich hinsichtlich der Genauigkeit gegenüber der harmonischen Analyse unterschiedliche Anforderungen an die Diskretisierung. Für die harmonische Analyse kann die Auflösung des Raumes und der Zeit *unabhängig* voneinander, entsprechend dem Shannon-Abtasttheorem ($f_T \geq 2f_{max}$, $\Delta x \leq \lambda_{min}/2$), vorgenommen werden. Anders besteht bei den transienten Analysen die Notwendigkeit der problemabhängigen Abstimmung dieser beiden Parameter. Das heißt, Orts- und Zeitauflösung unterliegen bei vorgegebener Genauigkeit schon bei linearen Systemen gekoppelten Bedingungen, die entsprechend der Arbeit von Wang et al. (1992) im weiteren dargelegt werden.

Zuvor sei auf das Problem der scharfen Approximation von Diskontinuitäten hingewiesen, dass sich generell bei diskreten Approximationen stellt, die die zweifache Ableitung nach der Zeit enthalten. Es bedeutet, dass sich durch die Diskretisierung Sprünge der physikalisch kontinuierlichen Variablen einstellen, die zu numerisch vorgetäuschten (spurious) Oszillationen führen können.

Abhilfe bietet beispielsweise das TVD (total variation diminishing) Schema, das in glatten Bereichen eine Genauigkeit zweiter Ordnung gewährleistet und in Zonen mit hohen Gradienten die Genauigkeit auf die erste Ordnung reduziert (Harten, 1983). Weiterhin können an den Sprungstellen Begrenzer eingesetzt werden, z.B. der für den Riemann-Löser entwickelte Roe-Begrenzer (Roe, 1985). Eine Darstellung dieser Probleme im Zusammenhang mit der (konvektiven) Fluidmechanik gibt Hirsch (1990).

Als Gegenstück zum Problem der zusätzlichen numerischen Oszillationen muss natürlich immer die schon früher beschriebene Verfälschung der numerischen Resultate durch die Tiefpasswirkung bei zu grober Diskretisierung beachtet werden (Shipley et al., 1967). Die Diskretisierung ist demnach entscheidend für die Qualität der numerischen Simulation. Allerdings werden zukünftig feinere Diskretisierungen möglich sein, sodass dann die Güte einer Lösung durch die Unabhängigkeit von der Netzdichte überprüft werden kann. Als Beispiel zu diesen Problemen dient die Wellenausbreitung auf einem Balken :

Der Zeitverlauf der Anregung der eindimensionalen Struktur habe die Form

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

mit der Kreisfrequenz ω und der Amplitude A . Für die Lösung des Wellenausbreitungsproblems kann der Ansatz

$$u(x, t) = B \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c_n} x\right) \quad (3.6.6)$$

mit der numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeit c_n , der daraus resultierenden Zeitdauer $t = x/c_n$, mit der die Wellenfront den Ort x erreicht, sowie der Amplitude B formuliert werden. Es wird angenommen, dass sich die physikalische Ausbreitungsgeschwindigkeit ($c = \sqrt{E/\rho}$) von der numerischen Ausbreitungsgeschwindigkeit c_n unterscheidet. Die Umstellung von 3.6.6 ergibt

$$c_n = \frac{\omega x}{\omega t - \arcsin\left(\frac{u(x,t)}{B}\right)} \approx \frac{\omega x}{\omega t - \arcsin\left(\frac{u(x,t)}{A}\right)}$$

Der relative Fehler

$$c_\epsilon = \frac{c_n - c}{c}$$

kann jetzt für das spezielle Problem in Abhängigkeit von $T/\Delta t$ und $\lambda/\Delta x$ numerisch bestimmt werden.

Es konnte gezeigt werden, dass beim Newmark-Integrationsschema die Amplitudendämpfung nur von der räumlichen Diskretisierung und dem Spektrum der Belastung abhängt.

Dagegen ist die Dispersion der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von der räumlichen *und* zeitlichen Diskretisierung abhängig. Beim Wellenausbreitungsproblem mit nur einer Welle zeigt sich, dass die numerisch vorgetäuschte Dispersion bei linearen Elementformfunktionen durch eine geeignete räumliche (Δx) und zeitliche (Δt) Diskretisierung vollständig vermieden werden kann. Bei quadratischen Elementformfunktionen war dies nicht möglich.

Der Fehler durch die Geschwindigkeitsdispersion nimmt mit der Ausbreitungsentfernung der Welle vom Anregungsort und der Frequenzbandbreite der Belastung zu. Es konnte ein Kriterium entwickelt werden, dass zumindest für den Fall der eindimensionalen Wellenausbreitung dreier phasengekoppelter harmonischer Wellen eine optimale Wahl der Schrittweiten Δx und Δt gestattet.

Eine Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall ist zwar grundsätzlich möglich, bedarf aber weiterer umfassender numerischer Untersuchungen.