

Numerische Approximation quasiperiodischer invarianter Tori unter Anwendung erweiterter Systeme

Dissertation
zur Erlangung des Akademischen Grades
Dr. rer. nat.

vorgelegt von
Dipl.-Math. Frank Schilder

eingereicht bei der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Ilmenau am 26. September 2003
öffentlich verteidigt am 19. März 2004

Gutachter: Prof. Dr. Martin Hermann (FSU Jena)
Prof. Dr. Bernd Marx (TU Ilmenau)
Privatdozent Dr. Werner Vogt (TU Ilmenau)

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonderer Dank gilt meinem Betreuer Werner Vogt für die sorgfältige wissenschaftliche Betreuung, zahllose inspirierende Gespräche und das teilweise mehrmalige Korrekturlesen einzelner Kapitel. Bei der Bearbeitung des Themas ließ er mir genug Freiheit, einen eigenen Weg zu gehen. Das ermöglichte es mir, etwas von unserer ursprünglichen Zielsetzung abzuweichen und die Finiten-Differenzen-Verfahren zum Schwerpunkt meiner Arbeit zu machen.

Weiter bedanke ich mich an dieser Stelle bei Hans Crauel für das Korrekturlesen des 2. Kapitels - insbesondere der Beweise - und die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen und Hinweise.

Bei Hans Babovsky möchte ich mich insbesondere für seine großzügige Unterstützung bei der Finanzierung bedanken. Ohne diese hätte ich die Arbeit nicht abschließen können. In diesem Zusammenhang danke ich auch der Friedrich-Naumann-Stiftung, die meine Promotion mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert hat.

Herzlichst danke ich den Berichterstattern Herrn Prof. Dr. M. Herrmann und Herrn Prof. Dr. B. Marx für ihr Interesse an dieser Arbeit.

Für zahlreiche anregende Gespräche und Hinweise bedanke ich mich bei Bernd Marx, Armin Hoffmann und Jürgen Knobloch, die immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatten.

Bei Axel Wolf und Hans-Jörg Müller bedanke ich mich für die Erfüllung aller meiner Wünsche bezüglich der Rechentechnik.

Ich bedanke mich bei allen Mitarbeitern der Fachbereiche Numerische Mathematik und Analysis, die mir ein angenehmes Arbeitsklima geschaffen haben.

Bristol, 10. August 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Approximation invarianter Tori	8
2.1	Quasiperiodische invariante Tori	9
2.1.1	Einige Grundbegriffe, Modellproblem	9
2.1.2	Auftreten quasiperiodischer Lösungen	12
2.2	Mittelungsmethoden und die Harmonische-Balance-Methode . . .	17
2.2.1	Die Mittelungsmethode von KBM	18
2.2.2	Die formale Mittelungsmethode	21
2.2.3	Die Harmonische-Balance-Methode	23
2.3	Invarianzgleichungen für Tori	25
2.3.1	Die allgemeine Invarianzgleichung für Tori	27
2.3.2	Die Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori	29
2.4	Lösung der Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori	33
2.4.1	Der Fall $p = m$	33
2.4.2	Der Fall $p > m$	38
3	Diskretisierungsverfahren für quasiperiodische Tori	50
3.1	Finite-Differenzen-Methoden	50
3.1.1	Rekursive Konstruktion von FDMn für p -Tori	53
3.1.2	Konvergenz der FDM im Fall $p = m$	57
3.1.3	Ein Testbeispiel	70
3.1.4	Lösung der geränderten Gleichungssysteme	72
3.2	Fourier-Galerkin-Methoden	78
3.2.1	Semidiskretisierung mittels Fourier-Galerkin-Methode . . .	78
3.2.2	Volldiskretisierung mittels Fourier-Galerkin-Methode . . .	86
4	Numerische Analyse ausgewählter dynamischer Systeme	89
4.1	Ein parametrisch erregtes Netzwerk von E. Philippow	90
4.2	Ein System von C. Hayashi	104
4.3	Zwei gekoppelte Van der Pol Oszillatoren	114
5	Zusammenfassung	120
6	Abstract	121
A	Erklärung	122
B	Thesen	123
C	Korrekturen	126

Verzeichnis der verwendeten Symbole

Mit \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} bezeichnen wir die Mengen der natürlichen $\{1, 2, 3, \dots\}$, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen und mit \mathbb{Z}^+ bzw. \mathbb{R}^+ die Mengen der nichtnegativen ganzen bzw. reellen Zahlen. In den Räumen X^n mit $X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ verwenden wir das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ und die dadurch induzierte Norm $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$. Für Definitionen werden die Symbole „ $:=$ “ bzw. „ $=:$ “ verwendet, wobei der neu zu definierende Ausdruck auf der Seite des Doppelpunktes steht. Desweiteren bedeuten:

$\mathcal{O}(g)$	$f = \mathcal{O}(g)$ für $x \in M$ genau dann, wenn eine positive Konstante C existiert, so daß $ f(x) \leq Cg(x)$ für alle $x \in M$ gilt
$ \alpha $	$ \alpha := \sum_{i=1}^m \alpha_i$ für alle $\alpha \in [\mathbb{Z}^+]^m$
∂_x	Linearisierung bezüglich des Arguments x
A^T	Transponierte der Matrix A
L^*	adjungierter Operator von L
$\text{meas}(M)$	Lebesgue-Maß der Menge M
$\text{span } \{m\}$	lineare Hülle der Menge $M := \{m\}$
$\dim(X)$	Dimension von X
$\text{codim}(X)$	Kodimension von X
$\text{dom}(L)$	Definitionsbereich des Operators L
$\text{ran}(L)$	Bild des Operators L
$\ker(L)$	Nullraum des Operators L
$B(x, r)$	offene Kugel um x mit dem Radius r
$\sigma(A)$	Spektrum der Matrix A
\hat{i}	imaginäre Einheit, $\hat{i}^2 = -1$
$\Re(z)$	Realteil von z
$\Im(z)$	Imaginärteil von z
\bar{z}	die zu z konjugiert komplexe Zahl
$[x]$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich x

Die Bezeichnungen für Räume, Normen und Skalarprodukte sowie von weiteren häufig verwendeten Ausdrücken sind im Index unter Angabe der Seite der Definitionen aufgeführt.

The world is full of periodic and quasi-periodic motions and oscillations. That is multifrequency oscillations. Mathematically, to a large extent, that means the study of invariant tori of dynamical systems. These constitute the more systematic part of the phase space of a dynamical system as opposed to the chaotic parts and their study is just as (perhaps more) important as the study of chaos.

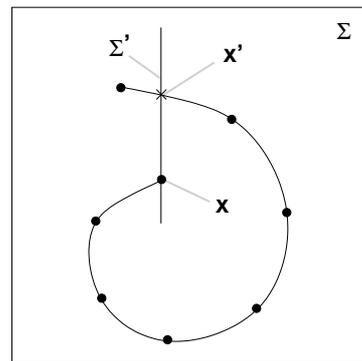
*Aus dem Vorwort von
A.M. Samoilenko
„Elements of the Mathematical Theory of
Multi-Frequency Oscillations“*

1 Einleitung

Kompakte invariante Mannigfaltigkeiten, wie z.B. Fixpunkte, periodische Orbits oder invariante Tori, sind für die qualitative Analyse dynamischer Systeme von zentralem Interesse. Während für die numerische Analyse von Fixpunkten und periodischen Orbits von Flüssen z.B. mit den Programmen AUTO, CONTENT oder MATCONT allgemein anwendbare Algorithmen vorliegen, ist es bisher nicht gelungen, generell einsetzbare Verfahren für die numerische Analyse invarianter Tori und quasiperiodischer Lösungen zu entwickeln, die eine vergleichbare Leistungsfähigkeit aufweisen. Ein Hauptproblem stellt dabei die Gewinnung einer Parametrisierung des invarianten Torus dar, die für eine weitergehende Analyse geeignet ist, also z.B. eine Unterscheidung zwischen quasiperiodischen, schwach resonanten und stark resonanten Tori erlaubt oder die Detektierung quasiperiodischer Bifurkationen ermöglicht.

Für die numerische Analyse quasiperiodischer Lösungen bzw. invarianter Tori sind drei wichtige Zugänge bekannt, die im folgenden kurz skizziert werden sollen.

Verallgemeinerte Poincaré-Abbildung. In [KAA85/1, KAA86, KAA87] wird die Idee entwickelt, eine quasiperiodische Lösung als Fixpunkt einer verallgemeinerten Poincaré-Abbildung $P_2 : \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ zu bestimmen (vgl. nebenstehende Abbildung). Dazu wird eine Teilfolge von Iterierten der Poincaré-Abbildung $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ berechnet, die hinreichend dicht und möglichst äquidistant auf der durch die quasiperiodische Lösung erzeugten Invarianzkurve liegen. Die Invarianzkurve kann dann, z.B. durch eine Spline-Interpolation durch diese



Punkte approximiert werden. Es sei nun x ein Punkt von Σ' , dann wird der Bildpunkt $x' := P_2(x)$ als Schnittpunkt der Interpolierenden mit Σ' definiert. Eine geschlossene Invarianzkurve ist offenbar als Fixpunkt von P_2 bestimmbar.

Dieser Algorithmus ist prinzipiell unabhängig von der Stabilität der quasiperiodischen Lösung, gerät aber bei geringer Rotationszahl wegen der dann langen Integrationszeiten in Schwierigkeiten. Desweiteren ist es sehr aufwendig, in der Nähe starker Resonanzen geeignete Punktfolgen zu berechnen, da sich die Iterierten in diesem Fall an wenigen Stellen häufen. Eine Verallgemeinerung auf höherdimensionale Tori ist theoretisch möglich, aber kaum praktikabel.

Allgemeine Invarianzgleichung. Eine große Anzahl von Arbeiten betrachtet die direkte Bestimmung invarianter Tori dynamischer Systeme als Lösung der in Abschnitt 2.3.1 hergeleiteten partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \Psi_{i-m}(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = f(u, \theta),$$

mit den m Erregungsfrequenzen Ω_i , und den $(p - m)$ unbekanntem Torusfunktionen Ψ_i . Mit diesen Algorithmen ist es möglich, unabhängig vom Stabilitätstyp sowohl quasiperiodische als auch resonante Tori zu approximieren. Eine große Schwierigkeit besteht hierbei darin, daß die Funktionen Ψ_i a-priori nicht bekannt sind. In Spezialfällen kann man diese durch Einführung globaler Toruskoordinaten explizit angeben (vgl. z.B. [DLR91, VB95, BER96]), im allgemeinen jedoch muß eine lokale Transformation in Toruskoordinaten mit großem Aufwand beschafft werden (vgl. [MOO96]).

Die folgende Aufstellung gibt einen Überblick über die verschiedenen Diskretisierungsverfahren, die entwickelt wurden, wobei aber kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben wird:

- Finite-Differenzen-Verfahren, in: [DLR91, DL92, DB92, DB94, DIE94, DB95, MOO96]
- Fourier-Galerkin-Verfahren, in: [CHL98, GL98, GIL93, GIL95, MKM97, SAMO91]
- Semidiskretisierung mit Finiten-Differenzen-Verfahren + Schießverfahren, in: [BBV95, BV94, BV96, BER96, S97, VBü92, VB95]
- Semidiskretisierung mit Fourier-Galerkin-Verfahren + Schießverfahren, in: [TRU00]
- Orthogonale Kollokation, in: [ERS00]

Graph-Transformation. Die Graph-Transformation ist ein Verfahren zur Approximation invarianter Mannigfaltigkeiten dynamischer Systeme, insbesondere auch zur Approximation kompakter invarianter Mannigfaltigkeiten, wie z.B. von Invarianzkurven und invarianten Tori. Die zu approximierende Mannigfaltigkeit

wird als Graph einer Funktion über einer gegebenen Mannigfaltigkeit interpretiert und diese Funktion mit einem Iterationsverfahren als Interpolierende einer Folge von Punkten bestimmt. Die Verfahren sind für Tori von beliebiger endlicher Dimension und beliebigem Stabilitätstyp konstruierbar. Sie liefern auf natürliche Weise eine lokale Parametrisierung der Invarianzkurve bzw. des invarianten Torus. Problematisch ist die Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit von der Stärke der Anziehung in Richtung der stabilen und der Abstoßung in Richtung der instabilen Mannigfaltigkeit. Desweiteren treten auch hier Schwierigkeiten auf, wenn der Torus stark resonant ist, da sich in diesem Fall die Elemente der Punktfolgen in der Nähe des periodischen Orbits häufen können, der dann auf dem Torus liegt.

Auf der Graph-Transformation beruhende Algorithmen zur Approximation von Invarianzkurven bzw. invarianten Tori werden z.B. in [BOV96/1, BOV96/2, BOV97, BHV02, BHV03, DL95, EDOH97, EL01, KASP85, KO00, Moo95, NED95, OS96, REI00, REI01, VEL87, VEL88] beschrieben.

In dieser Arbeit wollen wir einen invarianten Torus ebenfalls als Lösung einer Invarianzgleichung approximieren, wobei wir uns hier auf den Fall quasiperiodischer invarianten Tori beschränken. Ein quasiperiodischer invarianter Torus ist Lösung der in Abschnitt 2.3.2 hergeleiteten speziellen Invarianzgleichung

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = f(u, \theta)$$

mit den unbekanntenen Basisfrequenzen ω_i . Für den Fall $m < p$, d.h. die Anzahl der Erregungsfrequenzen ist kleiner als die Dimension des Torus, ist auch hier die Parametrisierung des Torus nicht eindeutig festgelegt. In Abschnitt 2.3.2 wird gezeigt, daß der Torus $(p - m)$ freie Phasen besitzt.

In Analogie zur Approximation periodischer Lösungen autonomer Differentialgleichungen können die freien Phasen durch Erweiterung der Invarianzgleichung um $(p - m)$ Phasenbedingungen fixiert werden, wobei wir die unbekanntenen Basisfrequenzen $\omega_{m+1}, \dots, \omega_p$ als künstliche Variablen verwenden. Angenommen, wir kennen eine Näherungslösung \tilde{u} , dann wählen wir unter allen möglichen Parametrisierungen für u^* diejenige aus, die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\|\tilde{u} - u^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

ist, vgl. Abschnitt 2.4.2. Die auf diese Weise konstruierbaren Phasenbedingungen sind Verallgemeinerungen der für den periodischen Fall bekannten Integralbedingung.

Die Diskretisierung der erweiterten Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori ist nun einfach, da eine Parametrisierung des Torus auf natürliche Weise gewonnen wird und nicht aufwendig beschafft werden muß. Insbesondere ist keine

a-priori Transformation der Differentialgleichung in Toruskoordinaten nötig. Dies ist ein wesentlicher Vorteil des hier gewählten Zugangs.

Es soll an dieser Stelle aber nicht verschwiegen werden, daß die hier vorgestellten Verfahren aufgrund der Einschränkung auf quasiperiodische Tori noch nicht generell auf Systeme anwendbar sind, in denen Resonanzen mit breiten Arnold-Zungen auftreten. Die Überwindung dieser Einschränkung sollte vorrangiges Ziel einer Weiterentwicklung der vorgestellten Algorithmen sein.

Ergebnisse. In der vorliegenden Arbeit wird eine erweiterte Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori hergeleitet und die Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens zur Approximation einer Lösung bewiesen. Speziell für den linearen Fall wird dabei die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt.

Zur numerischen Approximation von Lösungen werden Finite-Differenzen-Verfahren hoher Konsistenzordnung konstruiert, wobei die Konvergenz für den Fall $p = m$, d.h. das System ist partitioniert, bewiesen wird. Für den Fall $p > m$ ist der Nachweis der Stabilität der Verfahren noch offen. Weiter beschränken wir uns im Beweis auf den Fall asymptotisch stabiler bzw. nach Zeitumkehr asymptotisch stabiler Tori. Für die Konstruktion der Verfahren selbst werden aber keine Voraussetzungen über den Stabilitätstyp des Torus getroffen, sie sollten daher auch für die Approximation von Tori vom Satteltyp geeignet sein.

Die Finiten-Differenzen-Verfahren besitzen folgende Eigenschaften:

- Die Verfahren sind sehr leicht algorithmierbar. Es ist insbesondere keine a-priori Koordinatentransformation erforderlich, die Algorithmen arbeiten im Phasenraum des Systems.
- Die Verfahren sind durch Rekursion über die Dimension des Torus konstruierbar. Dadurch ist es praktisch möglich, quasiperiodische Tori beliebiger endlicher Dimension zu approximieren.
- Die Verfahren liefern alle Daten, durch die eine quasiperiodische Lösung vollständig beschrieben wird. Das sind neben dem Torus auch die Basisfrequenzen und eine Transformation des Vektorfeldes auf dem Torus in ein konstantes Vektorfeld auf dem Standardtorus. Für $p = 2$ bestehen die von den Finiten-Differenzen-Verfahren erzeugten Gitter aus Invarianzkurven der Stroboskop-Abbildungen.

Im Softwarepaket `torcont` [S04] ist eine auf der diskretisierten erweiterten Invarianzgleichung basierende Pseudo-Bogenlängen Parameterfortsetzung implementiert, wobei eine Finite-Differenzen-Methode mit der Konsistenzordnung 4 verwendet wurde.

Als weitere Verfahren werden eine Semidiskretisierung und eine Volldiskretisierung mit trigonometrischen Polynomen vorgestellt und zu Vergleichsrechnungen herangezogen. Es zeigt sich dabei, daß diese Verfahren für periodisch erregte

Systeme sehr effizient sind. Weiter wird ein Zusammenhang zwischen der Semidiskretisierung und der Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky sowie der formalen Mittelungsmethode hergestellt.

Inhaltsübersicht. In Abschnitt 2 werden – nach der Definition einiger Begriffe – zunächst Mittelungsmethoden und die Harmonische-Balance-Methode kurz vorgestellt. Diese Methoden können u.a. als Approximationsverfahren für periodische und quasiperiodische Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen interpretiert werden. Von besonderem Interesse ist dabei die Möglichkeit, unter bestimmten Voraussetzungen eine Invarianzkurve einer Poincaré-Abbildung durch eine periodische Lösung einer Differentialgleichung zu approximieren, die durch Anwendung einer Mittelungsmethode gewonnen werden kann.

Im dritten und vierten Teil dieses Abschnitts wird die erweiterte Invarianzgleichung hergeleitet und ihre Lösbarkeit untersucht. Die dort erhaltenen Aussagen sind so allgemein formuliert, daß sie auch auf die diskretisierte Invarianzgleichung anwendbar sind. Insbesondere werden explizite Werte für eine obere Schranke der Norm der inversen Operatoren angegeben. Die Herleitung dieser Schranken kann als Muster für die Gewinnung von Stabilitätsaussagen für Diskretisierungsverfahren dienen.

In Abschnitt 3 werden Diskretisierungsverfahren zur numerischen Approximation von Lösungen der erweiterten Invarianzgleichung vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den Finiten-Differenzen-Methoden. Es wird gezeigt, wie die Finiten-Differenzen-Verfahren rekursiv konstruiert werden können, wodurch die Approximation von Tori mit beliebiger endlicher Dimension auf einfache Weise möglich ist. Die Konvergenz wird für die nichtlineare diskretisierte Gleichung im Fall $p = m$ gezeigt. Ein Verfahren mit der Konvergenzordnung 4 wird an einem Beispiel mit analytisch bekannter Lösung getestet. Desweiteren wird kurz auf die Lösung der durch die Diskretisierung entstehenden großen geränderten Gleichungssysteme eingegangen.

Im zweiten Teil von Abschnitt 3 werden eine Semidiskretisierung und eine Volldiskretisierung des Torus mit trigonometrischen Polynomen algorithmisch dargestellt. Es wird ein Zusammenhang zwischen der Semidiskretisierung und den in Abschnitt 2 kurz beschriebenen Mittelungsmethoden hergestellt.

In Abschnitt 4 wird die Arbeitsweise der entwickelten Algorithmen anhand einiger Beispiele demonstriert. Es wird dabei Wert darauf gelegt, daß alle für Vergleichsrechnungen nötigen Daten angegeben sind.

2 Approximation invarianter Tori

In diesem Abschnitt werden die analytischen Hilfsmittel für die numerische Approximation invarianter Tori dynamischer Systeme bereitgestellt.

In Abschnitt 2.1 werden grundlegende Begriffe definiert und das Auftreten von quasiperiodischen Lösungen und deren Eigenschaften anhand von Beispielen erläutert.

In Abschnitt 2.2 werden die Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky sowie ähnliche (in den Ingenieurwissenschaften eingesetzte) Methoden vorgestellt, mit deren Hilfe in bestimmten Fällen die Existenz eines invarianten 2-Torus gezeigt, bzw. dieser approximiert werden kann. Das Studium dieser Methoden führte zur Idee der Semidiskretisierung, die in Abschnitt 3.2.1 entwickelt wird. Alle in Abschnitt 2.2 vorgestellten Methoden können in einem gewissen Sinne als Spezialfall der Semidiskretisierung mit trigonometrischen Polynomen aufgefaßt werden, siehe dazu Abschnitt 3.2.1.

In Abschnitt 2.3 werden partielle Differentialgleichungen hergeleitet, denen ein invarianter p -Torus genügen muß. Es wird insbesondere die Lösbarkeit der erweiterten Gleichung für quasiperiodische invariante p -Tori untersucht. Dabei werden einige allgemeine Sätze bewiesen, die später auch für den Nachweis der Stabilität von Diskretisierungsverfahren verwendet werden.

Notation. Die nachfolgend eingeführte Bezeichnungsweise werden wir in dieser Arbeit durchgängig verwenden. Es sei $I(n)$ die Indexmenge $I(n) := \{1, 2, \dots, n\}$ und X ein normierter Raum. Wir definieren den Raum $[X]^n$ durch:

$$[X]^n := \{ x \mid x : I(n) \rightarrow X \},$$

mit der Norm

$$\|x\|_{[X]^n}^2 := \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^2.$$

Es sei X ein normierter Raum mit Skalarprodukt. Wir definieren den Raum $[X]^n$ durch:

$$[X]^n := \{ x \mid x : I(n) \rightarrow X \},$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{[X]^n} := \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle_X$$

und der dadurch induzierten Norm¹

$$\|x\|_{[X]^n}^2 := \langle x, x \rangle_{[X]^n}.$$

¹Da nach dieser Definition die Räume $[X]^n$ und X^n mit $X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ isometrisch sind, werden wir nicht weiter zwischen ihnen unterscheiden. Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß wir ggfs. beide Interpretationsmöglichkeiten – als Abbildung oder als n -Tupel – verwenden werden.

Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, welche Norm bzw. welches Skalarprodukt gemeint ist, wird kein Subindex zur Kennzeichnung verwendet.

2.1 Quasiperiodische invariante Tori

In Abschnitt 2.1.1 werden zunächst das Modellproblem und einige grundlegende Begriffe eingeführt und in Abschnitt 2.1.2 wird an drei Beispielen erläutert, wann und in welchem Sinne quasiperiodische Lösungen in dynamischen Systemen persistent auftreten können. Diese Abschnitte sind sehr stark an das erste Kapitel in [BHS96] angelehnt.

2.1.1 Einige Grundbegriffe, Modellproblem

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Definitionen und Aussagen sind, mit Ausnahme des Modellproblems, aus [BHS96] S. 1-4 entnommen. Es wird daher in diesem Abschnitt ausnahmsweise nicht gesondert auf Literatur verwiesen.

Wir betrachten gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_m t), \quad (2.1)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega := (\Omega_1, \dots, \Omega_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$, und $t \in \mathbb{R}$. Die Ω_i seien *rational unabhängig*, d.h. es ist $\sum_{i=1}^m k_i \Omega_i \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$. Weiterhin sei die vektorwertige Funktion f 2π -periodisch in $\Omega_i t$ für $i = 1, \dots, m$, d.h. es ist

$$f(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_i t, \dots, \Omega_m t) = f(x, \Omega_1 t, \dots, (\Omega_i t) + 2\pi, \dots, \Omega_m t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Wir nennen die Ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$, die *Erregungsfrequenzen*.²

Modellproblem. Wir wandeln (2.1) in eine autonome Differentialgleichung um. Es sei $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/2\pi$ der eindimensionale Standardtorus. Wir erweitern (2.1) um Toruskoordinaten $\vartheta \in \mathbb{T}^m$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} &= \Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit $(x, \vartheta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$. Weiter gelte $f \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)]^n$, $r \in \mathbb{N}$, und φ_t sei der von (2.2) erzeugte Fluß im Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$. Mit $\varphi_t(x_0, \vartheta_0)$ bezeichnen wir einen *Orbit* (*Trajektorie*, *Lösungskurve*, *Lösung*) durch den Punkt (x_0, ϑ_0) .

²Für $m = 0, 1$ sind die Erregungsfrequenzen immer rational unabhängig. Sind für $m \geq 2$ die Erregungsfrequenzen rational abhängig, dann reduzieren wir ihre Anzahl sukzessive wie folgt. O.B.d.A. gelte etwa $k_m \Omega_m = \sum_{i=1}^{m-1} k_i \Omega_i$, dann setzen wir: $f(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_{m-1} t, \Omega_m t) = f\left(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_{m-1} t, \left(\sum_{i=1}^{m-1} k_i \Omega_i\right) \left(\frac{t}{k_m}\right)\right) =: \tilde{f}(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_{m-1} t)$.

In dieser Arbeit werden numerische Methoden für die Approximation invarianter quasiperiodischer (Def. s.u.) p -Tori von Flüssen von Differentialgleichungen der Form (2.2) entwickelt. Wir beziehen uns dabei regelmäßig auf das System (2.2) und wollen es daher das *Modellproblem* nennen. Durch die Differentialgleichung (2.2) ist ein C^r -Vektorfeld

$$X := f(x, \vartheta) \frac{\partial}{\partial x} + \Omega \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (2.3)$$

auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ gegeben.

Im weiteren wollen wir die Begriffe *generisch* und *typisch* in folgendem Sinne verwenden. Mit dem Begriff generisch meinen wir, daß Familien von C^r -Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ mit einer bestimmten Eigenschaft eine offene, überall dichte Teilmenge im Raum aller Familien von C^r -Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ bilden. Demgegenüber meinen wir mit dem Begriff typisch, daß Familien von C^r -Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ mit einer bestimmten Eigenschaft eine Menge mit nichtleerem Inneren im Raum aller Familien von C^r -Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ bilden.

Torus mit parallelem Fluß. System (2.2) (bzw. das Vektorfeld (2.3)) besitzt einen *invarianten p -Torus T* , $p \geq m$, mit *parallelem Fluß (paralleler Dynamik)*, wenn ein Diffeomorphismus $T \mapsto \mathbb{T}^p$ existiert, der die Restriktion $X|_T$ in ein konstantes Vektorfeld $\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ auf dem p -dimensionalen Standardtorus \mathbb{T}^p transformiert.

Die reellen Zahlen $\Omega_1, \dots, \Omega_m, \omega_{m+1}, \dots, \omega_p$ heißen *innere Frequenzen* oder *Basisfrequenzen* des Flusses auf T bzw. des Torus T . Der Vektor $\bar{\omega} := (\Omega, \omega) \in \mathbb{R}^p$ heißt *Frequenzbasis*. Die Basisfrequenzen sind bis auf Transformationen der Form $(\Omega, \omega) \mapsto A(\Omega, \omega)$ eindeutig bestimmt, wobei A eine $p \times p$ Matrix mit ganzzahligen Elementen ist, für die $\det(A) = \pm 1$ gilt.

Wir werden die hier eingeführte verschobene Indizierung $\omega := (\omega_{m+1}, \dots, \omega_p)$ für Elemente aus dem Teil $\omega \in \mathbb{R}^{p-m}$ der Frequenzbasis $(\Omega, \omega) \in \mathbb{R}^p$ in der gesamten Arbeit beibehalten. Dadurch ergeben sich besser lesbare Summendarstellungen, siehe z.B. die obige Darstellung des Vektorfeldes.

Die Eigenschaften des Flusses auf einem invarianten Torus mit paralleler Dynamik hängen empfindlich von den zahlentheoretischen Eigenschaften der Basisfrequenzen ab.

Quasiperiodischer Torus. Ein paralleler Fluß auf einem invarianten p -Torus T mit Frequenzbasis $\bar{\omega}$ heißt *nicht-resonant* oder *quasiperiodisch*, wenn die Basisfrequenzen $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_p$ rational unabhängig sind. In diesem Fall wird auch der Torus T nicht-resonant oder quasiperiodisch genannt. Andernfalls heißt der Torus T mit parallelem Fluß *resonant*. Zum Beispiel ist ein 2-Torus mit parallelem Fluß dann und nur dann quasiperiodisch, wenn das Verhältnis der beiden Basisfrequenzen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ irrational ist.

Auf einem quasiperiodischen Torus liegt jeder Orbit mit $(x_0, \vartheta_0) \in T$ dicht. Ein resonanter Torus ist geblättert in eine Familie von Untertori der Dimension q , $0 \leq q < p$. Für das Vektorfeld (2.3) gilt ein Kupka-Smale-Theorem, welches für generische Vektorfelder die Existenz resonanter Tori ausschließt. Es folgt, daß alle invarianten Tori mit parallelem Fluß eines generischen Vektorfeldes quasiperiodisch sind. Darüber hinaus zeigt sich, daß quasiperiodische Tori im Phasenraum eines generischen Vektorfeldes stärkere nicht-Resonanz-Bedingungen (als die rationale Unabhängigkeit) erfüllen, die im folgenden definiert werden.

Diophantischer Torus. Ein invarianter p -Torus mit parallelem Fluß heißt *diophantisch*, wenn reelle Zahlen $\tau > 0$ und $\gamma > 0$ existieren, so daß die Basisfrequenzen das folgende unendliche Ungleichungssystem erfüllen:

$$\left| \sum_{i=1}^p k_i \bar{\omega}_i \right| \geq \gamma |k|^{-\tau} \quad (2.4)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ mit $|k| := \sum_{i=1}^p |k_i|$. Diophantische Tori sind quasiperiodisch, aber nicht umgekehrt. Die Menge aller Frequenzbasen $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^p$, die in obigem Sinne diophantisch sind, besitzt für $\tau > p - 1$ positives Lebesgue-Maß.

Floquet-Torus. Ein invarianter p -Torus T mit parallelem Fluß heißt *floquet*, wenn man in einer Umgebung von T lokale Koordinaten $(y, \phi) \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{T}^p$, $n' := n - (p - m)$, einführen kann, in denen die Differentialgleichung (2.2) die Floquet-Form

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + \mathcal{O}(\|y\|^2), \\ \dot{\phi} &= \bar{\omega} + \mathcal{O}(\|y\|) \end{aligned}$$

annimmt und für T die Gleichung $y = 0$ gilt. Dabei ist $\bar{\omega}$ die Frequenzbasis von T , und J eine reelle $n' \times n'$ -Matrix, die nicht von ϕ abhängt. Ist diese Transformation möglich, dann wird J die *Floquet-Matrix* von T genannt. Die Floquet-Matrix ist bis auf Ähnlichkeitstransformation eindeutig bestimmt.

In der Umgebung eines jeden invarianten p -Torus mit parallelem Fluß kann man lokale Koordinaten $(y, \phi) \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{T}^p$ einführen, in denen die Differentialgleichung (2.2) die Form

$$\begin{aligned} \dot{y} &= J(\phi)y + \mathcal{O}(\|y\|^2), \\ \dot{\phi} &= \bar{\omega} + \mathcal{O}(\|y\|), \end{aligned}$$

mit einer von ϕ abhängigen reellen $n' \times n'$ -Matrix J , annimmt und für T die Gleichung $y = 0$ gilt. Die Gleichung $\dot{y} = J(\phi)y$ ist die *Variationsgleichung* auf T . Der Torus T ist floquet, wenn die Matrix J durch eine geeignete Wahl lokaler Koordinaten unabhängig von ϕ gemacht werden kann.

Jedem invarianten Floquet-Torus mit parallelem Fluß können *äußere Frequenzen* zugeordnet werden. Diese sind definiert als die positiven Imaginärteile der Eigenwerte seiner Floquet-Matrix. Diophantische Tori, über deren Existenz und

Eigenschaften die KAM-Theorie Aussagen treffen kann, müssen im allgemeinen auch Floquet-Tori sein. Darüberhinaus müssen die inneren $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_p$ und äußeren $\bar{\omega}_1^N, \dots, \bar{\omega}_q^N$, $0 < q \leq n'$, Frequenzen weitere nicht-Resonanz-Bedingungen erfüllen:

$$\left| \sum_{i=1}^p k_i \bar{\omega}_i + \sum_{i=1}^q l_i \bar{\omega}_i^N \right| \geq \gamma |k|^{-\tau}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, alle $l \in \mathbb{Z}^q$ mit $|l| \leq 2$ und reellen Konstanten γ und τ . Für $l = 0$ sind das gerade die Bedingungen (2.4).

2.1.2 Auftreten quasiperiodischer Lösungen

In diesem Abschnitt geben wir drei Beispiele an, in denen quasiperiodische Tori persistent auftreten. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf 2-Tori. Die hier gewählten Beispiellklassen umfassen die in Abschnitt 4 numerisch untersuchten Differentialgleichungen.

Die ersten beiden Beispiele basieren auf einem nichtlinearen Oszillator

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (2.5)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und reellen Parametern α und β , der einen periodischen Attraktor besitzen soll. Man denke zum Beispiel an den Van der Pol Oszillator mit $f(x, \dot{x}) = -\alpha x^2 \dot{x}$, der für $\beta = 1$ und negative α einen Grenzzyklus als Attraktor besitzt (siehe Abb. 1).

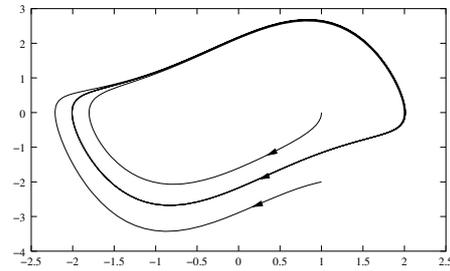


Abbildung 1: Der hyperbolische, attraktive Grenzzyklus des Van der Pol Oszillators.

Beispiel mit Kopplung. Wir betrachten zwei Oszillatoren der Gestalt (2.5) mit einer von ε abhängigen Kopplung:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \beta_1 x + f_1(x, \dot{x}) &= \varepsilon g_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ \ddot{y} + \alpha_2 \dot{y} + \beta_2 y + f_2(y, \dot{y}) &= \varepsilon g_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{aligned}$$

Dabei seien $x, y \in \mathbb{R}$ und α_i, β_i seien reelle Parameter für $i = 1, 2$. Die Funktionen f_i, g_i , $i = 1, 2$, seien glatt und ε sei ein kleiner reeller Parameter. Der Phasenraum ist der \mathbb{R}^4 . Das Beispielsystem zweier gekoppelter Van der Pol Oszillatoren liegt in dieser Form vor (vgl. Abschnitt 4.3).

Beispiel mit periodischer Störung. Wir betrachten einen Oszillator der Gestalt (2.5), den wir periodisch stören. Das führt auf die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + f(x, \dot{x}) = \varepsilon g(x, \dot{x}, t),$$

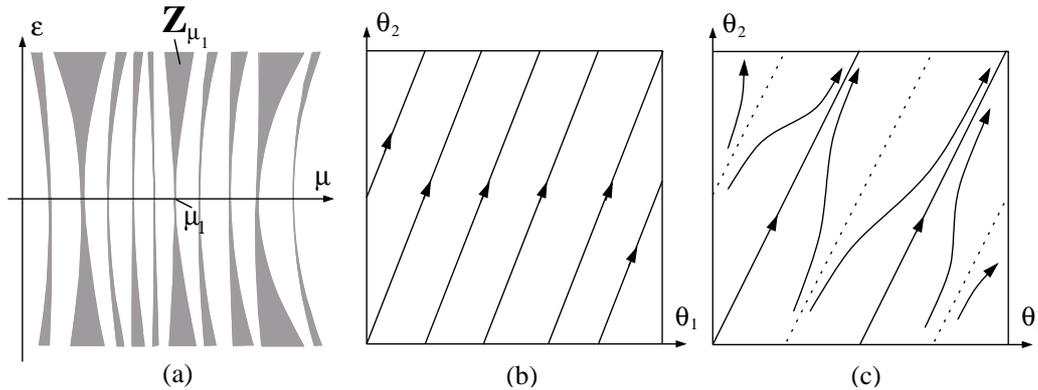


Abbildung 2: (a) Bifurkationsdiagramm (Skizze) mit einigen Arnold-Zungen; (b) paralleler Fluß; (c) phase-lock

wobei g 2π -periodisch in t sei. Wir nehmen die Funktionen f und g als glatt an und ε sei ein kleiner Parameter. Wir untersuchen dieses Beispiel im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ mit den Koordinaten $x \mapsto x_1$, $\dot{x} \mapsto x_2$, $t \mapsto \theta$, in welchem wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 - f(x_1, x_2) + \varepsilon g(x_1, x_2, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

erhalten. Das parametrisch erregte Netzwerk von E. Philippow liegt in dieser Form vor (vgl. Abschnitt 4.1).

Diese zwei Beispiele werden ausführlich in [BHS96] diskutiert. Hier wird nur eine Zusammenfassung der Ergebnisse angegeben, die für das Verständnis dieser Arbeit hilfreich sind.

Wir betrachten zunächst den ungestörten Fall $\varepsilon = 0$. Wir finden jeweils einen attraktiven, invarianten 2-Torus mit parallelem Fluß, $\zeta_1 \times \zeta_2 \subset \mathbb{R}^4$ im ersten und $\zeta \times \mathbb{T}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ im zweiten System. Dabei seien ζ_1, ζ_2 bzw. ζ die Grenzzyklen der ungestörten Oszillatoren. Die vorausgesetzte Hyperbolizität der Grenzzyklen impliziert, daß die Tori normal hyperbolisch sind. Daraus folgt weiter, daß die Tori als invariante Mannigfaltigkeit auch für kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existieren. Das gilt aber nicht für den parallelen Fluß auf den Tori. Wir nehmen im weiteren an, daß beide Beispiele für $\varepsilon = 0$ so von einem Parameter μ (z.B. $\mu = \alpha_1/\alpha_2$ bzw. $\mu = \alpha$) abhängen, daß die Ableitung des Verhältnisses der Basisfrequenzen $\varrho = \omega_1/\omega_2$ bzw. $\varrho = \omega/1$ als Funktion von μ von Null weg beschränkt ist, d.h. $|\varrho'(\mu)| \geq c > 0$ für $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. $\varrho(\mu)$ sei jeweils auf dem abgeschlossenen Intervall $[\mu_1, \mu_2] \subset \mathbb{R}$ beschränkt und die Tori mögen für $(\mu, \varepsilon) \in [\mu_1, \mu_2] \times]-\delta, \delta[$ mit einem kleinen $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta \ll 1$, existieren.

Es ergibt sich nun folgendes qualitatives Verhalten (vgl. Abb. 2). Für $\varepsilon = 0$ ist der Torus invariant mit parallelem Fluß. Gilt $\varrho(\mu) \in \mathbb{Q}$, d.h. $\varrho(\mu)$ ist rational, dann ist der Torus resonant, andernfalls ist der Torus quasiperiodisch. Das

Intervall $I := (\mu_1, \mu_2)$ zerfällt also in zwei Mengen, $R := \{ \mu \mid \varrho(\mu) \in \mathbb{Q} \}$ und $Q := I \setminus R$. R liegt dicht in I und es gilt $\text{meas}(Q) = \mu_2 - \mu_1$.

Für kleine $\varepsilon \neq 0$ geht im μ - ε -Diagramm von jedem Punkt $\mu \in R$ eine Arnold-Zunge Z_μ aus, die für jedes feste $\varepsilon > 0$ eine von Null verschiedene Breite hat. Für Parameterwerte $(\mu_0, \varepsilon_0) \in Z_\mu$ tritt ein sogenanntes *phase-locking* auf, d.h. auf dem Torus liegt ein stabiler und ein instabiler periodischer Orbit und der Fluß auf dem Torus ist nicht parallel (Abb. 2c).

Das Intervall I zerfällt für kleine $\varepsilon \neq 0$ in die zwei Mengen $R_\varepsilon := \{ \nu \mid \nu \in Z_\mu, \mu \in R \}$ und $Q_\varepsilon := I \setminus R_\varepsilon$. Es gilt $R = R_0$, $Q = Q_0$ und $\text{meas}(Q_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{meas}(Q)$. Für $\mu \in Q_\varepsilon$ ist der Torus quasiperiodisch (diophantisch). Q_ε ist eine Cantor-Menge mit positivem Maß, die für $\varepsilon \neq 0$ nur aus isolierten Punkten besteht und keine inneren Punkte besitzt.

Für größere werdende ε wird der Torus i.d.R. zerstört. Typische Szenarien sind das auftreten einer subkritischen Torus-Bifurkation, wobei der Torus mit einem periodischen Orbit verschmilzt und verschwindet, oder der Torus-breakdown. Hierbei verliert ein Torus mit phase-lock die Normalhyperbolizität und zerfällt infolgedessen.

Beispiel mit Torus-Bifurkation. Im dritten Beispiel nehmen wir an, daß für ein, von zwei reellen Parametern $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ abhängiges, dynamisches System im Parameterraum eine Kurve $(\mu_1(s), \mu_2(s))$ von Torus-Bifurkationen auftritt. Wir untersuchen das System in der Nähe dieser Kurve von Torus-Bifurkationen.

Wir geben hier zur Vereinfachung ein konkretes Beispiel an, welches das typische qualitative Verhalten wiedergibt. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) + \varepsilon g_1(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon g_2(x, \theta). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei sei $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ und $\mu = (\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$ ein zweidimensionaler, reeller Parameter. f und g_i , $i = 1, 2$, seien glatt und f sei gegeben durch:

$$f(x, \lambda, \omega) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 - \omega x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \omega x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Im Beispiel von C. Hayashi (vgl. Abschnitt 4.2) wird ein qualitativ ähnliches Verhalten wie im System (2.6) beobachtet.

Dieses Beispiel soll im folgenden etwas ausführlicher untersucht werden. Wir betrachten zunächst wieder das ungestörte System. Für $\varepsilon = 0$ besitzt (2.6) offensichtlich die 2π -periodische Lösung $x = 0$, $\theta = t$. Linearisieren wir (2.6) entlang dieser Lösung, so erhalten wir das Variationssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & -\omega & 0 \\ \omega & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix}.$$

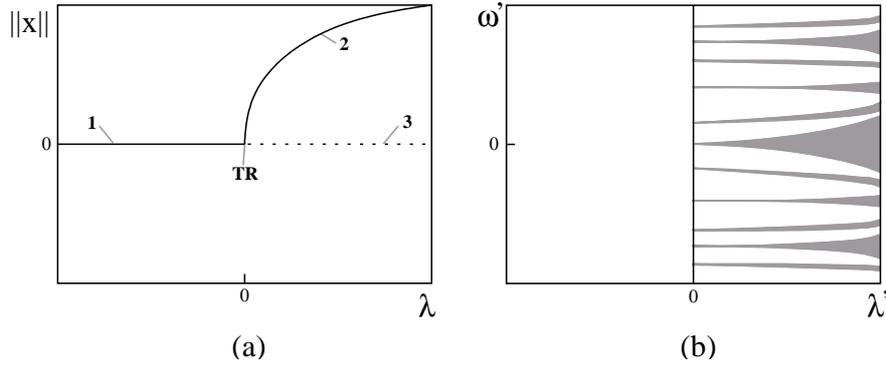


Abbildung 3: (a) Bifurkationsdiagramm für festes ω ($\|x\|$ bezeichnet die \mathcal{L}_2 -Norm von x), 1 - asymptotisch stab. per. Orbit, 2 - asymptotisch stab. inv. 2-Torus, 3 - instab. per. Orbit; (b) Bifurkationsdiagramm (Skizze) mit einigen Arnold-Zungen

Die Monodromiematrix M erhalten wir durch Integration des Variationssystems über eine Periode, $M = e^{2\pi J}$:

$$M = \begin{pmatrix} e^{2\pi\lambda} \cos 2\pi\omega & -e^{2\pi\lambda} \sin 2\pi\omega & 0 \\ e^{2\pi\lambda} \sin 2\pi\omega & e^{2\pi\lambda} \cos 2\pi\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir die Matrix M_0 :

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega & 0 \\ \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die für beliebiges ω ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte auf dem Einheitskreis hat, $\sigma(M_0) = \{e^{\pm i(2\pi\omega)}, 1\}$. Wegen $\frac{d}{d\lambda} e^{2\pi\lambda \pm i(2\pi\omega)}|_{\lambda=0} = 2\pi \neq 0$ folgt, daß für $\lambda = 0$ und beliebiges aber festes ω mit $e^{\pm ik(2\pi\omega)} \neq 1$, $k = 1, 2, 3, 4$, eine Torus-Bifurkation auftritt (Abb. 3a). Im λ - ω -Diagramm ist die Kurve $\lambda = 0$ eine Kurve von Torus-Bifurkationen.

Für $\lambda < 0$ besitzt (2.6) für beliebige ω den asymptotisch stabilen periodischen Orbit $x = 0$, $\theta = t$. Für $\lambda > 0$ besitzt (2.6) für beliebige ω den instabilen periodischen Orbit $x = 0$, $\theta = t$ und den asymptotisch stabilen invarianten 2-Torus mit parallelem Fluß $T_\omega := (\sqrt{\lambda} \cos \theta_1, \sqrt{\lambda} \sin \theta_1, \theta_2)^T$, $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$, mit $X|_{T_\omega} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial \theta_2}$. Für irrationales ω ist T_ω quasiperiodisch und für rationales $\omega = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, resonant. In diesem Fall spricht man auch von einer $a:b$ -Resonanz. Für $a = 1$ und $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ – das sind genau die oben ausgeschlossenen Fälle – spricht man auch von einer *starken Resonanz*, andernfalls von einer *schwachen Resonanz*. Für eine ausführliche Diskussion der verschiedenen Fälle sei der Leser z.B. auf [IO079, IJ90] verwiesen.

Betrachten wir nun das gestörte System für kleines $0 < \varepsilon \ll 1$. Aufgrund der Hyperbolizität des periodischen Orbits $x = 0$, $\theta = t$, besitzt das gestörte

System ebenfalls einen hyperbolischen periodischen Orbit nahe $x = 0$, $\theta = t$. Da für jedes ω die Kurve der Eigenwerte der Monodromiematrix des ungestörten Systems in Abhängigkeit von λ den Einheitskreis transversal schneidet, tritt auch im gestörten System eine Kurve von Torus-Bifurkationen auf, die nahe der Kurve $\lambda = 0$ des ungestörten Systems liegt. Aufgrund der Normalhyperbolizität des Torus T_ω besitzt das gestörte System einen invarianten 2-Torus $T_{\omega,\varepsilon}$ nahe T_ω . Allerdings ändern sich, wie in den vorigen Beispielen, die Eigenschaften des Flusses auf dem Torus.

Es sei $M_\varepsilon(\lambda, \omega)$ die Monodromiematrix des periodischen Orbits für kleine ε . Wir bezeichnen mit γ_ε die Kurve der Torus-Bifurkationen, d.h. für $(\lambda, \omega) \in \gamma_\varepsilon$ gelte $\{e^{\pm i(2\pi\omega')}\} \subset \sigma(M_\varepsilon(\lambda, \omega))$. Mit ω' als Parameter (diese Wahl ist für kleine ε wegen $\omega' = \omega$ für $\varepsilon = 0$ möglich) lautet die Kurve der Torus-Bifurkationen $\gamma_\varepsilon = (\lambda(\omega'), \omega(\omega'))$. Zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen führen wir die Transformation $\lambda' = \lambda(\omega') - \lambda$ ein. Damit lautet die Kurve der Torus-Bifurkationen in λ' - ω' -Koordinaten $\gamma'_\varepsilon = (0, \omega')$.

Für festgehaltenes kleines $\varepsilon > 0$ gehen für $\lambda' > 0$ von allen Punkten $(0, \omega')$ mit rationalem ω' Arnold-Zungen $Z_{\omega'}$ aus (Abb. 3b). Für festes $\lambda' > 0$ zerfällt ein beliebiges beschränktes ω' -Intervall $I := (\omega'_1, \omega'_2)$ wieder in eine Menge $R_{\varepsilon, \lambda'} = \{\nu \mid \nu \in Z_{\omega'}, \omega' \in I \cap \mathbb{Q}\}$ und die Komplementmenge $Q_{\varepsilon, \lambda'} = I \setminus R_{\varepsilon, \lambda'}$. Dabei tritt für $\omega' \in R_{\varepsilon, \lambda'}$ (bzw. $(\lambda'_0, \omega'_0) \in Z_{\omega'}$) wieder ein phase-lock auf und für $\omega' \in Q_{\varepsilon, \lambda'}$ sind die Tori quasiperiodisch. $Q_{\varepsilon, \lambda'}$ ist eine Cantor-Menge mit positivem Maß. Für größere Störungen wird der Torus i.d.R. zerstört.

Im folgenden wollen wir für invariante 2-Tori mit phase-lock folgende Sprechweise einführen. Es sei μ_1 ein Parameterwert innerhalb einer Arnold-Zunge Z_{μ_0} und $\frac{a}{b}$ das Verhältnis beider Basisfrequenzen für $\mu = \mu_0$. Dann sagen wir, *auf dem Torus liegt ein a:b-resonanter periodischer Orbit*, oder kürzer, *auf dem Torus liegt eine a:b-Resonanz*, oder noch kürzer, *der Torus ist a:b-resonant*. Analog übertragen wir die Begriffe schwach und stark resonant. Diese Bezeichnungsweise läßt sich auch auf p -Tori anwenden.

Die in den obigen Beispielen gemachten Beobachtungen können verallgemeinert werden. Es zeigt sich, daß das beobachtete Verhalten für generische Systeme, die von s Parametern abhängen, in folgendem Sinne typisch ist: *Eine generische Familie von Vektorfeldern besitzt keinen invarianten p -Torus, $p > 1$, mit paralleler Dynamik, wenn $s = 0$ ist (d.h. es sind keine Parameter vorhanden). Eine typische Familie von Vektorfeldern besitzt eine s -parametrische Cantor-ähnliche Familie von diophantischen invarianten p -Tori für $s \geq 1$ (vgl. [BHS96]).*

Damit quasiperiodische Tori überhaupt beobachtet werden können, müssen in einem System externe Parameter vorhanden sein. Aber selbst dann treten quasiperiodische Tori nur für eine (Teil-) Menge von Parameterwerten auf, die die Struktur einer Cantor-Menge hat. Mit anderen Worten: *Es existiert eine offene, überall dichte Teilmenge von Parameterwerten, für die kein invarianter quasiperiodischer p -Torus existiert. Es existieren daher beliebig kleine Störungen, die die Quasiperiodizität (nicht den Torus) zerstören.*

Daß wir uns trotzdem mit der numerischen Approximation quasiperiodischer Tori beschäftigen wollen, hat folgende Gründe:

- Es stellt sich heraus, daß für quasiperiodische Tori eine besonders einfache Bestimmungsgleichung für die direkte Berechnung hergeleitet werden kann, die eine vorteilhafte numerische Behandlung erlaubt. Es erscheint daher angebracht, eine effiziente Numerik zunächst für diese Gleichung zu entwickeln und sie dann auf den Fall von Tori mit phase-lock zu verallgemeinern.
- Es ist zu erwarten, daß Methoden für quasiperiodische Tori auch für Tori mit schwachen Resonanzen brauchbare Resultate liefern, da eine numerische Unterscheidung zwischen einem quasiperiodischen Torus und einem schwach resonanten Torus, auf dem periodische Orbits mit sehr hoher Periode liegen, kaum möglich ist. Bei einer Rechnung mit Fließkommazahlen sind die approximierten Basisfrequenzen immer rational abhängig.

2.2 Mittelungsmethoden und die Harmonische-Balance-Methode

Unter Mittelungsmethoden wollen wir die *Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky*, die in Abschnitt 2.2.1 beschrieben wird, sowie die *formale Mittelungsmethode*, die in Abschnitt 2.2.2 beschrieben wird, verstehen. Beide Methoden ermöglichen die Approximation von Poincaré-Abbildungen, können aber auch für die Approximation periodischer und quasiperiodischer Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen verwendet werden.

In der Literatur findet man häufig eine mit Koordinatentransformationen kombinierte bzw. vermischte Darstellung der Mittelungsmethoden, was eher verwirrend ist. Wir geben in dieser Arbeit daher eine einheitliche und stärker geometrisch motivierte Darstellung der Mittelungsmethoden an. Desweiteren werden wir Sätze über das gemittelte System aus der Sicht der numerischen Analyse interpretieren. Diese Interpretationen begründen unser Interesse an diesen Methoden und führten schließlich zur Entwicklung der in 3.2.1 vorgestellten Semidiskretisierung.

In Abschnitt 2.2.3 wird kurz die Harmonische-Balance-Methode skizziert, die zur Approximation periodischer und quasiperiodischer Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen vor allem in den Ingenieurwissenschaften angewendet wird.

Alle diese Methoden können, wenn sie zur Approximation periodischer und quasiperiodischer Lösungen verwendet werden, als Spezialfall der in Abschnitt 3.2.1 entwickelten Semidiskretisierung aufgefaßt werden, weshalb sie an dieser Stelle kurz vorgestellt werden sollen. Wir beschränken uns dabei auf Eigenschaften der Approximation von periodischen und quasiperiodischen Lösungen. Für umfassendere Darstellungen sei z.B. auf [CHL98, DXDM97, FAR94, GH97, JS99, LM88, MI96, MU91, PCH89, SV85, VER96, WIG90] verwiesen.

2.2.1 Die Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \quad (2.7)$$

mit $f \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)]^n$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, f ist 2π -periodisch in t , und einem kleinen reellen Parameter $0 < \varepsilon \ll 1$. Eine solche Differentialgleichung wird in der Literatur auch als *Differentialgleichung in periodischer Standardform* bezeichnet.

Wir erweitern (2.7) um eine Koordinate $\theta \in \mathbb{T}^1$ und erhalten die autonome Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f(x, \theta, \varepsilon), \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

im Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1$. Wir bezeichnen mit φ_t den durch (2.8) erzeugten Fluß und wollen annehmen, daß eine nichtleere offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $\varphi_t(x, 0)$ für alle $x \in M$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ beschränkt ist.

Wir können für (2.8) folgenden globalen Poincaré-Schnitt angeben:

$$\Sigma = \{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \mid \theta = 0 \},$$

da Σ wegen $\dot{\theta} = 1$ von allen Orbits transversal geschnitten wird. Bezeichnen wir mit $\varphi_t(x_0, \theta_0)$ den Orbit von (2.8) durch (x_0, θ_0) , dann ist die Poincaré-Abbildung $P_\varepsilon : M \rightarrow \Sigma$ gegeben durch:

$$P_\varepsilon : x \mapsto P \varphi_{2\pi}(x, 0), \quad (2.9)$$

wobei mit $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion $P : (x, \theta) \mapsto x$ und mit dem Index ε der Parameter aus (2.8) bezeichnet wird.

Das *gemittelte System* von (2.7) ist gegeben durch:

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{f}(x) := \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t, 0) dt. \quad (2.10)$$

Wir erweitern diese Differentialgleichung wieder um eine Koordinate $\theta \in \mathbb{T}^1$ und erhalten die entkoppelte autonome Differentialgleichung im Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon \bar{f}(x), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wir bezeichnen mit $\bar{\varphi}_t$ den Fluß von (2.11). Aufgrund der Entkoppelung können wir $\bar{\varphi}_t$ darstellen als $\bar{\varphi}_t = (\bar{\varphi}_t^x, \bar{\varphi}_t^\theta)$, mit $\bar{\varphi}_t(x_0, \theta_0) = (\bar{\varphi}_t^x(x_0), \bar{\varphi}_t^\theta(\theta_0))$. Dabei ist $\bar{\varphi}_t^x$ der Fluß von $\dot{x} = \varepsilon \bar{f}(x)$ im \mathbb{R}^n und $\bar{\varphi}_t^\theta$ der Fluß von $\dot{\theta} = 1$ im \mathbb{T}^1 .

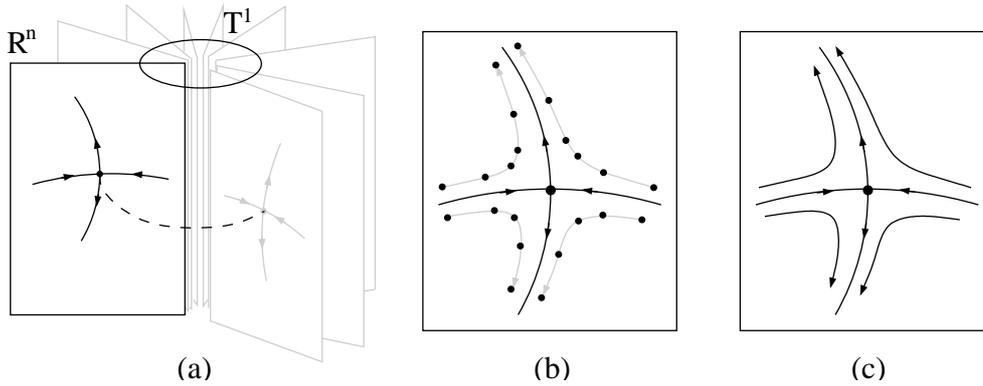


Abbildung 4: (a) Schematische Veranschaulichung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1$; (b) Poincaré-Abbildung mit Sattelpunkt; (c) Fluß mit Sattelpunkt

Es existiere wieder eine nichtleere offene Menge $M' \subseteq \mathbb{R}^n$, so daß $\bar{\varphi}_t(x, 0)$ für alle $x \in M'$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ beschränkt ist. Wir wählen auch für die gemittelte Differentialgleichung den globalen Poincaré-Schnitt

$$\Sigma = \{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \mid \theta = 0 \}$$

und definieren analog zu (2.9) die Poincaré-Abbildung $\bar{P}_\varepsilon : M' \rightarrow \Sigma$:

$$\bar{P}_\varepsilon : x \mapsto P \bar{\varphi}_{2\pi}(x, 0).$$

Wegen der Entkoppelung können wir diese Definition vereinfachen zu

$$\bar{P}_\varepsilon : x \mapsto \bar{\varphi}_{2\pi}^x(x). \quad (2.12)$$

Es stellt sich nun die Frage, welche Beziehung zwischen den Flüssen φ_t und $\bar{\varphi}_t$ bzw. den Poincaré-Abbildungen P_ε und \bar{P}_ε besteht. Eine erste Antwort gibt der folgende Satz:

2.1 Satz (Periodischer Orbit) *Ist \bar{p} ein hyperbolischer Fixpunkt von $\bar{\varphi}_t^x$ und damit wegen (2.12) auch von \bar{P}_ε , dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß P_ε für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ einen eindeutigen hyperbolischen Fixpunkt p vom selben Stabilitätstyp wie \bar{p} besitzt und es gilt $\|\bar{p} - p\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

Dieser Satz ist ein Teil des Mittelungstheorems. Den vollständigen Satz findet man z.B. in [GH97] auf S. 168 oder in [WIG90] auf S. 111. Uns interessiert hier nur der obige Auszug, da in diesem eine Beziehung zwischen einem Fixpunkt des Flusses $\bar{\varphi}_t^x$ und einem Fixpunkt der Poincaré-Abbildung P_ε hergestellt wird. In Abbildung 4 sind die geometrischen Verhältnisse skizziert. Der Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1$ kann als Blätterung in (\mathbb{R}^n, θ) mit $\theta \in \mathbb{T}^1$ interpretiert werden (Abb. 4a). Jedes Blatt ist ein Poincaré-Schnitt, insbesondere ist das Blatt $(\mathbb{R}^n, 0)$ gerade unser Poincaré-Schnitt Σ . Ein periodischer Orbit vom Sattel-Typ ist als gestrichelte Linie angedeutet.

Es sei nun \bar{p} ein Fixpunkt von $\bar{\varphi}_t^x$ (Abb. 4c). Dann besitzt auch die Poincaré-Abbildung P_ε einen Fixpunkt p (Abb. 4b), und \bar{p} ist eine gute Approximation an p . Weiter gilt, daß der periodische Orbit $\bar{\gamma} = \bar{p} \times \mathbb{T}^1$ von (2.11) eine gute Approximation an den periodischen Orbit $\gamma = \varphi_t(p, 0)$ von (2.8) durch $(p, 0)$ ist. Bezeichnen wir mit $\dot{x} = Jx$ das Variationssystem von $\dot{x} = \bar{f}(x)$ an der Stelle \bar{p} , dann sind die Eigenwerte von J gerade die charakteristischen Exponenten von $\bar{\gamma}$ und gute Approximationen an die charakteristischen Exponenten von γ . In diesem Sinne ist die Aussage über den gleichen Stabilitätstyp von \bar{p} (Fixpunkt eines Flusses) und p (Fixpunkt einer Abbildung) zu verstehen.

Es ist i.d.R. sehr viel einfacher einen Fixpunkt eines Flusses zu bestimmen (Nullstellenaufgabe im \mathbb{R}^n), als einen Fixpunkt der zugehörigen Poincaré-Abbildung, falls diese überhaupt explizit bekannt ist. Das gilt auch für numerische Methoden und begründet die Bedeutung der Mittelungsmethode für den Nachweis periodischer Orbits für Differentialgleichungen, die in periodischer Standardform vorliegen oder in diese transformiert werden können.

Der Fluß $\bar{\varphi}_t^x$ besitze nun einen hyperbolischen periodischen Orbit $\bar{\gamma}$. In Analogie zur Aussage von Satz 2.1 kann man die Frage stellen, ob dann die Poincaré-Abbildung P_ε eine geschlossene invariante Kurve γ nahe $\bar{\gamma}$ besitzt. Eine Antwort gibt der folgende Satz (vgl. [GH97] S. 181):

2.2 Satz (Invarianter 2-Torus) *Ist $\bar{\gamma}$ ein hyperbolischer periodischer Orbit von $\bar{\varphi}_t^x$, dann besitzt die Poincaré-Abbildung P_ε eine geschlossene invariante Kurve γ nahe $\bar{\gamma}$ und (2.8) besitzt einen normalhyperbolischen invarianten 2-Torus nahe $\bar{\gamma} \times \mathbb{T}^1$.*

Dies ist die für uns eigentlich interessante Eigenschaft der Mittelungsmethode. Es gilt nämlich analog zu oben, daß ein periodischer Orbit eines Flusses viel einfacher und effizienter numerisch zu approximieren ist, als ein invarianter 2-Torus. Es liegt also nahe zu versuchen, ein Approximationsverfahren zu entwickeln, welches sich auf Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

mit $f \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1)]^n$ und r hinreichend groß, anwenden läßt und in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Mittelungsmethode darstellt.

Das ist mit der Entwicklung der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Semidiskretisierung gelungen. Die Mittelungsmethode kann als Semidiskretisierung der Ordnung 0, angewendet auf die periodische Standardform (2.8), interpretiert werden. Eine andere, in der Literatur angegebene Interpretation ist die folgende.

Zunächst entwickle man die rechte Seite von (2.7) in eine Taylorreihe bezüglich ε :

$$f(x, t, \varepsilon) = f(x, t, 0) + f_\varepsilon(x, t, 0)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Für kleine ε werden alle Terme außer dem konstanten Glied vernachlässigt. Dieses wird nun in eine Fourierreihe bezüglich t entwickelt:

$$f(x, t, 0) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}(x) \sin kt + c_{2k}(x) \cos kt,$$

wobei die Fourierkoeffizienten wie üblich definiert sind, insbesondere ist

$$c_0(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t, 0) dt.$$

Unter der Annahme, daß die Normen $\|c_k\|$ für $k \geq 1$ klein sind, werden wiederum alle Koeffizienten, außer dem Absolutglied, vernachlässigt und man setzt $\bar{f}(x) := c_0(x)$. Nach diesen Überlegungen kann man nun argumentieren, daß das Integral-Mittel $\bar{f}(x)$ für kleine ε eine gute Approximation an $f(x, t, \varepsilon)$ ist und erwarten, daß sich die Lösungen der Differentialgleichungen (2.8) und (2.11) qualitativ ähnlich verhalten.

In den nun folgenden Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 werden einige Methoden vorgestellt, deren Anwendung in der Ingenieur-Literatur weit verbreitet ist. Gemeinsam ist allen diesen Methoden, daß ihnen das theoretische Fundament der Mittelungsmethode fehlt. Unter gewissen, einschränkenden Voraussetzungen werden wir diese Lücke dann im Abschnitt 3.2.1 schließen und einen Zusammenhang aller dieser Methoden herstellen.

2.2.2 Die formale Mittelungsmethode

Der formalen Mittelungsmethode liegt die Beobachtung zugrunde, daß die Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky auch für viele Differentialgleichungen, die nicht in periodischer Standardform vorliegen, erstaunlich gute Ergebnisse liefert. Ein Beispiel dafür ist das System von C. Hayashi (vgl. [YK95]), das wir im Abschnitt 4.2 untersuchen werden.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.13}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, f ist 2π -periodisch in t . Das *formal gemittelte System* von (2.13) ist analog zu (2.10) definiert durch:

$$\dot{x} = \bar{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t) dt.$$

Unter der Annahme, daß $\|f\|$ hinreichend klein ist, erscheint es zumindest plausibel, die Sätze der Mittelungsmethode auf das formal gemittelte System anzuwenden.

In der Praxis liegen Differentialgleichungen im allgemeinen nicht in periodischer Standardform vor, bzw. erfüllen z.B. $\|f\| \ll 1$ nicht. Man versucht daher, durch Koordinatentransformationen eine für die Anwendung der Mittelungsmethoden geeignete Darstellung zu gewinnen. Dies soll hier kurz am Beispiel der sogenannten Amplitudenmethode skizziert werden (vgl. [PHI71]).

Gegeben sei der schwach periodisch gestörte harmonische Oszillator:

$$\ddot{x} + x = f(x, \dot{x}, t) \quad (2.14)$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, f ist 2π -periodisch in t und es gelte $\|f\| \ll 1$ hinreichend klein. Wir formen (2.14) zunächst in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + f(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dieses System ist offensichtlich nicht für die Anwendung einer Mittelungsmethode geeignet. Es liegt aber nahe, die Lösungen von (2.15) durch Variation der Konstanten in der Form

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a(t) \sin t + b(t) \cos t, \\ x_2(t) &= a(t) \cos t - b(t) \sin t \end{aligned} \quad (2.16)$$

anzusetzen. Man bezeichnet die Ansatzfunktionen auch als „Schwingungen mit zeitlich veränderlicher Amplitude“ und die a - b -Ebene als „Amplitudenebene“. Man beachte, daß (2.16) eine Koordinatentransformation ist.

Einsetzen von (2.16) liefert:

$$\begin{aligned} \dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t &= 0, \\ \dot{a} \cos t - \dot{b} \sin t &= g(a, b, t), \end{aligned}$$

mit $g(a, b, t) := f(a \sin t + b \cos t, a \cos t - b \sin t, t)$. Die Auflösung dieses Gleichungssystems ist wegen

$$\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

einfach und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= g(a, b, t) \cos t, \\ \dot{b} &= -g(a, b, t) \sin t. \end{aligned}$$

Wegen $\|g\| \ll 1$ erscheint die Anwendung der formalen Mittelungsmethode zumindest plausibel. Wir mitteln die rechte Seite und erhalten schließlich das formal gemittelte System:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= g_c(a, b) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a, b, t) \cos t \, dt, \\ \dot{b} &= -g_s(a, b) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a, b, t) \sin t \, dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Analog zur Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky bestimmt man Fixpunkte und periodische Orbits des Flusses von (2.17). Es sei z.B. (a_0, b_0) ein hyperbolischer Fixpunkt des Flusses von (2.17), d.h. $g_c(a_0, b_0) = g_s(a_0, b_0) = 0$. Einsetzen in (2.16) liefert die periodischen Funktionen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_0 \sin t + b_0 \cos t, \\x_2(t) &= a_0 \cos t - b_0 \sin t,\end{aligned}$$

wobei $x_1(t)$ häufig eine brauchbare Approximation einer periodischen Lösung $x(t)$ von (2.14) darstellt.

Analog schließt man aus dem Auftreten einer hyperbolischen periodischen Lösung $\gamma(t) := (a(t), b(t))$ im System (2.17) auf die Existenz eines normalhyperbolischen invarianten 2-Torus im geeignet um $\dot{\theta}_1 = 1$, $\theta_1 \in \mathbb{T}^1$, erweiterten System (2.15) nahe

$$\begin{aligned}x_1(\theta_1, \theta_2) &= a(\theta_2) \sin \theta_1 + b(\theta_2) \cos \theta_1, \\x_2(\theta_1, \theta_2) &= a(\theta_2) \cos \theta_1 - b(\theta_2) \sin \theta_1,\end{aligned}$$

mit $\theta_2 \in \mathbb{T}^1$.

Hat die Gleichung (2.14) speziell die Gestalt

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t, \varepsilon),$$

dann liefert der Ansatz (2.15) gerade eine Transformation in die periodische Standardform:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon g(a, b, t, \varepsilon) \cos t, \\ \dot{b} &= -\varepsilon g(a, b, t, \varepsilon) \sin t.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Mittelungsmethode und formale Mittelung führen in diesem Fall auf dasselbe gemittelte System von (2.18).

2.2.3 Die Harmonische-Balance-Methode

Die Harmonische-Balance- und verwandte Methoden, die man in der Literatur z.B. auch unter den Bezeichnungen Inkrementelle Harmonische-Balance-Methode und Spektralbalancemethode findet (vgl. z.B. [CHL98], [PCH89]), sind Galerkin-Verfahren mit trigonometrischen Polynomen als Basisfunktionen. Sie können mit Erfolg zur Approximation von periodischen (und quasiperiodischen) Lösungen verwendet werden, wenn die Differentialgleichung einen direkten Ansatz der Lösung mittels Fourier-Polynomen zuläßt. Dies ist i.a., z.B. bei autonomen Differentialgleichungen, nicht der Fall. Im Abschnitt 3.2 werden wir zeigen, wie diese Einschränkung für Galerkin-Verfahren durch Verwendung einer geeigneten Invarianzgleichung überwunden werden kann.

An dieser Stelle wird die Harmonische-Balance-Methode nur kurz am Beispiel der Approximation periodischer Lösungen skizziert. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, t)\tag{2.19}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, f ist 2π -periodisch in t . Gesucht sind 2π -periodische Lösungen, die formal als abgebrochene Fourierreihe angesetzt werden:

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt, \quad (2.20)$$

mit $c_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 0, \dots, 2N$. Setzen wir (2.20) in Gleichung (2.19) ein, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^N c_{2k-1} k \cos kt - c_{2k} k \sin kt = f \left(c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt, t \right). \quad (2.21)$$

Wir entwickeln $f \left(c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt, t \right)$ in ein trigonometrisches Polynom N -ter Ordnung, wobei wir zur Abkürzung $c = (c_0, c_1, \dots, c_{2N})$ setzen:

$$f \left(c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt, t \right) \approx f_0(c) + \sum_{k=1}^N f_{2k-1}(c) \sin kt + f_{2k}(c) \cos kt.$$

Einsetzen dieses Polynoms in (2.21) und sukzessiver Koeffizientenvergleich der trigonometrischen Funktionen liefert für $k = 1, 2, \dots, N$ das nN -dimensionale nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten c_0, c_{2k-1} und c_{2k} :

$$\begin{aligned} 0 &= f_0(c), \\ -kc_{2k} &= f_{2k-1}(c), \\ kc_{2k-1} &= f_{2k}(c). \end{aligned}$$

Eine gewisse „Beziehung“ zur Mittelungsmethode ergibt sich wie folgt. Wir betrachten die Differentialgleichung in periodischer Standardform:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) \quad (2.22)$$

und wenden die Harmonische-Balance-Methode mit $N = 0$ an. Dies entspricht dem Ansatz $x(t) = c_0$, gesucht sind also 2π -periodische Lösungen, die „nahezu konstant“ sind. Wir erhalten die nichtlineare Gleichung

$$0 = \varepsilon f_0(c_0). \quad (2.23)$$

Das gemittelte System von (2.22) ist gegeben durch:

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{f}(x) := \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t) dt. \quad (2.24)$$

Wenn wir Fixpunkte des durch (2.24) erzeugten Flusses $\bar{\varphi}_t^x$ bestimmen wollen, haben wir Lösungen der nichtlinearen Gleichung

$$0 = \varepsilon \bar{f}(x) \quad (2.25)$$

zu bestimmen. Die rechte Seite von (2.25) stimmt mit der rechten Seite von Gleichung (2.23) überein und besitzt damit dieselben Nullstellen.

2.3 Invarianzgleichungen für Tori

In diesem Abschnitt werden partielle Differentialgleichungen hergeleitet, denen ein invarianter Torus genügen muß. Wir untersuchen die Lösbarkeit der für den quasiperiodischen Fall gewonnenen Gleichung, wobei Bedingungen an die rechte Seite f der Differentialgleichung formuliert werden. Die gewonnenen Aussagen werden allgemein genug gehalten, um sie später auch auf die diskretisierten Gleichungen anwenden zu können.

Wir betrachten unser Modellproblem (2.2):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} &= \Omega,\end{aligned}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und wollen im folgenden annehmen, daß die Erregungsfrequenzen $\Omega \in \mathbb{R}^m$ die folgende Voraussetzung erfüllen:

V2.3 $\Omega \in \mathbb{R}^m$, die Ω_i , $i = 1, \dots, m$, sind rational unabhängig.

Bevor wir mit der Herleitung beginnen, werden einige für die weiteren Darstellungen benötigte Begriffe und Bezeichnungen eingeführt, vgl. z.B. [SAMO91] S. 9ff.

Quasiperiodische Funktionen und Torusfunktionen. Mit $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{Z}^+$, bezeichnen wir den Raum der r -mal stetig differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Norm

$$\begin{aligned}\|x\|_{\mathcal{C}^r(\mathbb{R})} &:= \sum_{i=0}^r \|D^i x\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}, \\ \|x\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} &:= \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|,\end{aligned}$$

wobei $D^i := \frac{d^i}{dt^i}$ der gewöhnliche Differentialoperator der Ordnung i ist.

Eine Funktion $x : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir *Torusfunktion*. Mit $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$, $r \in \mathbb{Z}^+$, bezeichnen wir den Raum der r -mal stetig differenzierbaren Torusfunktionen. Im $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ definieren wir die Norm

$$\begin{aligned}\|x\|_{\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)} &:= \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha x\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)}, \\ \|x\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)} &:= \max_{\theta \in \mathbb{T}^p} |x(\theta)|,\end{aligned}$$

wobei $\alpha \in [\mathbb{Z}^+]^p$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^p \alpha_i$, ein Multi-Index und $D^\alpha := \prod_{i=1}^p \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial \theta_i^{\alpha_i}}$ der gewöhnliche Differentialoperator der Ordnung $|\alpha|$ zum Multi-Index α ist.

Mit $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)$, $r \in \mathbb{Z}^+$, bezeichnen wir den Raum $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p) := \overline{\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)} \cap \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ der r -mal verallgemeinert differenzierbaren Torusfunktionen, deren verallgemeinerte Ableitungen bis einschließlich der Ordnung r quadratisch Lebesgue-integrierbar sind. Der Abschluß ist dabei im $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)$ bezüglich der $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)$ -Norm zu

bilden. Skalarprodukt und Norm in $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)$ und $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)$ sind definiert durch:

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)} := \sum_{|\alpha| \leq r} \langle \delta^\alpha x, \delta^\alpha y \rangle_{\mathcal{W}_2^0(\mathbb{T}^p)}$$

und

$$\|x\|_{\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)}^2 := \|x\|_{\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)}^2 := \langle x, x \rangle_{\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)}.$$

δ^α ist dabei der verallgemeinerte Differentialoperator der Ordnung $|\alpha|$ zum Multi-Index $\alpha \in [\mathbb{Z}^+]^p$. Das Skalarprodukt in $\mathcal{W}_2^0(\mathbb{T}^p)$ und $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$ ist gegeben durch:

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{W}_2^0(\mathbb{T}^p)} := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} x(\theta) y(\theta) d\theta,$$

damit gilt $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p) = \mathcal{L}_2(\mathbb{T}^p)$ und darüber hinaus auch $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p) = \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}^p)$, da \mathbb{T}^p kompakt ist und keinen Rand hat.

Wenn nichts anderes festgelegt wird, wollen wir die folgende Notation vereinbaren. Es sei $x \in [X]^n$ mit $X \in \{\mathcal{C}^r(\mathbb{R}), \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p), \mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)\}$. Wir bezeichnen mit $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, die i -te Komponente von x . Es sei $t \in \text{dom}(x)$. Dann bezeichnen wir sowohl mit $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, als auch mit $x(t) = (x(t)_1, \dots, x(t)_n)$ das n -Tupel der Funktionswerte der Komponenten von x an der Stelle t . Zu Norm und Skalarprodukt im $[X]^n$ siehe Seite 8. Man beachte, daß diese Normen für „vektorierte Funktionen“ von den sonst üblichen Definitionen etwas abweichen, zu diesen jedoch für beliebiges aber festes $n < \infty$ äquivalent sind.

Wegen der besseren Lesbarkeit verwenden wir im folgenden die abkürzende Schreibweise $\mathcal{H}_s^n := [\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)]^n$. Wenn aus dem Kontext eindeutig zu erkennen ist, welche Norm bzw. welches Skalarprodukt gemeint ist, werden wir die Kennzeichnung mittels Subindex weglassen.

Es sei $\omega \in \mathbb{R}^p$ ein p -Tupel rational unabhängiger reeller Zahlen. Wir nennen eine Funktion $x \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, die sich darstellen läßt durch $x(t) = u(\omega t)$, $u \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$, eine *quasiperiodische Funktion*. Für quasiperiodische Funktionen gilt folgender Satz (vgl. [SAMO91] S. 10):

2.4 Satz Die Menge der Funktionswerte der quasiperiodischen Funktion $x(t) = u(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist dicht in der Menge der Funktionswerte der Torusfunktion $u(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}^p$.

Als eine Folgerung aus diesem Satz erhalten wir das Lemma (vgl. [SAMO91] S. 11):

2.5 Lemma Für $x(t) = u(\omega t)$ mit $u \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ gilt

$$\|x\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| = \max_{\theta \in \mathbb{T}^p} |u(\theta)| = \|u\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)},$$

woraus

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \iff \quad u(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^p$$

folgt.

Es seien für die quasiperiodische Funktion $x(t) = u(\omega t)$ mit

$$\gamma := \{ (x(t), \omega t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^p \mid t \in \mathbb{R} \}$$

der Graph von x und mit

$$T := \{ (u(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^p \mid \theta \in \mathbb{T}^p \}$$

der Graph von u im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^p$ definiert. Dann würde man erwarten, daß auch $T = \bar{\gamma}$ gilt (d.h. der Graph der quasiperiodischen Funktion liegt auf T dicht). Tatsächlich gilt sogar der Satz (vgl. [SAMO91] S. 83):

2.6 Satz *Es sei $x(t)$ eine quasiperiodische Funktion $x \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R})]^n$ mit Frequenzbasis $\omega \in \mathbb{R}^p$ und es sei γ der Graph von x . Dann ist $T := \bar{\gamma}$ \mathcal{C}^r -homöomorph zu \mathbb{T}^p , d.h. es existiert eine Torusfunktion $u \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$ mit $x(t) = u(\omega t)$ und T ist der Graph von u .*

2.3.1 Die allgemeine Invarianzgleichung für Tori

In diesem Abschnitt leiten wir eine Bestimmungsgleichung für einen invarianten p -Torus unseres Modellproblems (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} &= \Omega, \end{aligned}$$

her. Die Erregungsfrequenzen $\Omega \in \mathbb{R}^m$ seien rational unabhängig (V2.3) und wir wollen weiter annehmen, daß das System (2.2) einen normalhyperbolischen invarianten p -Torus T mit $m \leq p < m + n$ besitzt und daß $f \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)]^n$, $r \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, ist.

Es sei $T := \{ (u^*(\theta), \theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \mid \theta \in \mathbb{T}^p \}$ der Graph der Torusfunktion $u^* \in [\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^p)]^n$. T ist genau dann invariant unter dem Fluß von (2.2), wenn u^* der Bedingung

$$\mathbf{P}_{\mathbb{T}_{\theta}u}^{\perp} \begin{pmatrix} f(u(\theta), \theta) \\ \Omega \end{pmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

für alle $\theta \in \mathbb{T}^p$ genügt (vgl. [MOO96] S. 2333). Dabei ist \mathbf{P}_X die orthogonale Projektion auf den Unterraum X von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\mathbf{P}_X^{\perp} := Id - \mathbf{P}_X$ und $\mathbb{T}_{\theta}u$ ist der p -dimensionale Tangentialraum an der Stelle $(u(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ an T . Weiterhin ist $f(u(\theta), \theta) := f(u(\theta), \theta_1, \dots, \theta_m)$.

System (2.26) kann um m Gleichungen reduziert werden. Wir betrachten dazu die Tangentenvektoren τ_i in Richtung θ_i für $i = 1, \dots, m$:

$$\tau_i := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \\ e_i \end{pmatrix},$$

mit $e_i \in \mathbb{R}^m$ und $(e_i)_j = \delta_{ij}$. Es sei $E := \text{span} \{e_1, \dots, e_m\}$, dann können wir die Projektion auf E^\perp explizit angeben:

$$\begin{pmatrix} f(u(\theta), \theta) \\ \Omega \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^m \Omega_i \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u(\theta), \theta) - \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $U(\theta) := \text{span} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta_{m+1}}(\theta), \dots, \frac{\partial u}{\partial \theta_p}(\theta) \right\}$, dann vereinfacht sich (2.26) zu

$$P_{U(\theta)}^\perp \left(f(u(\theta), \theta) - \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) \right) = 0.$$

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden als (vgl. [MOO96] S. 2338)

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \Psi_{i-m}(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = f(u, \theta), \quad (2.27)$$

mit $\Psi_i \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$ für $i = 1, \dots, p-m$. Das sind n Gleichungen für die $n + (p-m)$ gesuchten Funktionen u_i , $i = 1, \dots, n$, und Ψ_i , $i = 1, \dots, p-m$.

Die Unterbestimmtheit des Systems ist eine Folge davon, daß die Parametrisierung der Lösung von (2.27) nicht eindeutig bestimmt ist. Es sei z.B. das Paar $u(\theta), \Psi(\theta)$ eine Lösung von (2.27), dann ist auch $v(\theta) := u(\theta + \beta)$, $\Phi(\theta) := \Psi(\theta + \beta)$ für jedes beliebige aber feste $\beta \in \mathbb{R}^p$ mit $\beta = (0, \dots, 0, \beta_{m+1}, \dots, \beta_p)$ wegen

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial v}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \Phi_{i-m}(\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta_i} = f(v, \theta + \beta) = f(v, \theta)$$

eine Lösung von (2.27), da f nicht explizit von θ_i für $m < i \leq p$ abhängt. In [MOO96] wird gezeigt, wie eine eindeutige Parametrisierung unter Einführung eines lokalen Torus-Koordinatensystems gewonnen werden kann.

In einigen Fällen gelingt die globale Einführung von Toruskoordinaten (r, θ) . System (2.2) wird dadurch in die partitionierte Form

$$\begin{aligned} \dot{r} &= g(r, \theta), \\ \dot{\theta}_i &= \Omega_i, & i = 1, \dots, m, \\ \dot{\theta}_i &= \Psi_{i-m}(r, \theta), & i = m+1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.28)$$

transformiert, mit $n' := n - (p-m)$, $g \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{T}^p)]^{n'}$ und *expliziten Darstellungen* für die Funktionen $\Psi_i : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Transformation bedeutet eine erhebliche Reduktion des Aufwands, da die analog zu (2.27) hergeleitete Gleichung

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial r}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \Psi_{i-m}(r, \theta) \frac{\partial r}{\partial \theta_i} = g(r, \theta)$$

für invariante p -Tori des Systems (2.28) nur noch aus n' Gleichungen für n' unbekannte Funktionen $r_i : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$, $i = 1, \dots, n'$, besteht. Diese können sehr effizient numerisch behandelt werden, siehe dazu z.B. [BER96, DLR91, DL92, ERS00, GL98, GIL93, MKM97, SAMO91, S97, TRU00, VOGT98, VOGT02].

In dieser Arbeit wählen wir aber einen neuen Weg, der zu einer eindeutigen Parametrisierung der Lösung führt. Anstatt lokale (bzw. globale) Torus-Koordinatensysteme einzuführen, konstruieren wir geeignet erweiterte Systeme. Insbesondere betrachten wir hier den Spezialfall quasiperiodischer invarianter p -Tori.

2.3.2 Die Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori

Gegeben sei unser Modellproblem (2.2):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} &= \Omega,\end{aligned}$$

und die Erregungsfrequenzen $\Omega \in \mathbb{R}^m$ seien rational unabhängig (V2.3). Weiter seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

V2.7 System (2.2) besitzt eine lokal eindeutige quasiperiodische Lösung $x^* \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{R})]^n$, $r \in \mathbb{N}$, mit der Frequenzbasis³ $(\Omega, \omega^*) \in \mathbb{R}^p$, $\omega^* \in \mathbb{R}^{p-m}$, $m \leq p < m+n$.

V2.8 $f \in [\mathcal{C}^{s+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)]^n$, $s \in \mathbb{N}$ und $s > r - 1 + \frac{p}{2}$.

Die Voraussetzungen V2.7 und V2.8 sind mit Absicht in dieser Reihenfolge aufgeführt. Normalerweise würde man aus Eigenschaften von f auf Eigenschaften der Lösung x^* schließen. Für die Konstruktion numerischer Methoden müssen wir aber Forderungen an die Lösung x^* formulieren. Es ist daher sinnvoll zu untersuchen, welche (möglichst leicht überprüfbaren) Eigenschaften f besitzen muß, damit diese erfüllt werden können. Die Forderung $s > r - 1 + \frac{p}{2}$ erscheint an dieser Stelle noch künstlich, ist jedoch u.a. erforderlich, um später einen Sobolewschen Einbettungssatz anwenden zu können (siehe Abschnitt 2.4.1 auf S. 34).

Unter der Voraussetzung V2.7 folgt aus Satz 2.6 die Existenz eines invarianten quasiperiodischen p -Torus

$$T := \{ (u^*(\theta), \theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \mid \theta \in \mathbb{T}^p \}$$

mit einer Torusfunktion $u^* \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$ und $x^*(t) = u^*(\Omega t, \omega^* t)$. Nachfolgend werden wir eine Bestimmungsgleichung für (u^*, ω^*) herleiten und anschließend die Lösbarkeit dieser Gleichung untersuchen.

Einsetzen von $x^*(t) = u^*(\Omega t, \omega^* t)$ in das Modellproblem (2.2) ergibt

$$\frac{dx^*}{dt}(t) = \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega^* t) + \sum_{i=m+1}^p \omega_i^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega^* t) = f(u^*(\Omega t, \omega^* t), \Omega t)$$

³Es sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, daß wir für die Komponente $\omega \in \mathbb{R}^{p-m}$ in der Frequenzbasis $(\Omega, \omega) \in \mathbb{R}^p$ die verschobene Indizierung $\omega := (\omega_{m+1}, \dots, \omega_p)$ verwenden.

bzw. umgestellt

$$0 = f(u^*(\Omega t, \omega^* t), \Omega t) - \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega^* t) - \sum_{i=m+1}^p \omega_i^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega^* t).$$

Betrachten wir die beiden Funktionen $g \in [\mathcal{C}^{r-1}(\mathbb{R})]^n$ und $G \in [\mathcal{C}^{r-1}(\mathbb{T}^p)]^n$:

$$g(t) := f(x^*(t), \Omega t) - \dot{x}^*(t)$$

und

$$G(\theta) := f(u^*(\theta), \theta) - \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\theta) - \sum_{i=m+1}^p \omega_i^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\theta),$$

wobei im folgenden immer $f(u(\theta), \theta) := f(u(\theta), \theta_1, \dots, \theta_m)$ bedeutet, dann gilt offenbar

$$g(t) = 0. \quad (2.29)$$

Die Funktion $g(t) = G(\Omega t, \omega^* t)$ ist nach Definition quasiperiodisch mit der Frequenzbasis (Ω, ω^*) und G eine zugehörige Torusfunktion. Wenden wir Lemma 2.5 auf jede Komponente von g und G an, dann erhalten wir folgende Äquivalenz:

$$g(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \iff \quad G(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^p. \quad (2.30)$$

Wir können also anstelle von (2.29) die äquivalente Bedingung

$$G(\theta) = 0 \quad (2.31)$$

zur Bestimmung von u^* und ω^* benutzen. Gleichung (2.31) entspricht der Aufgabe, eine Lösung (u^*, ω^*) der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = f(u, \theta) \quad (2.32)$$

zu finden. Man beachte, daß diese für den quasiperiodischen Fall gewonnene Gleichung ein sehr einfacher Spezialfall der Gleichung (2.27) ist. Insbesondere sind hier nur noch die *reellen Zahlen* ω_i und nicht mehr Funktionen $\Psi_{i-m} : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}$ für $m < i \leq p$ gesucht.

Der Nachteil dieser Gleichung im Vergleich zu (2.27) ist natürlich ihre auf quasiperiodische invariante Tori eingeschränkte Anwendbarkeit. In einem typischen System mit s externen Parametern $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^s$, existiert immer eine offene, überall dichte Teilmenge $R \subset M$, für die (2.32) *nicht* gilt (zur Frage, warum wir die Gleichung (2.32) trotzdem numerisch lösen wollen, siehe Abschnitt 2.1.2 auf S. 16).

Gilt $p > m$, dann ist auch die Lösung von (2.32) nicht eindeutig bestimmt. Es sei z.B. $(u(\theta), \omega)$ eine Lösung von (2.32). Dann ist auch $(v(\theta), \omega) = (u(\theta + \beta), \omega)$ für jedes beliebige aber feste $\beta \in \mathbb{R}^p$ mit $\beta = (0, \dots, 0, \beta_{m+1}, \dots, \beta_p)$ wegen

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial v}{\partial \theta_i} + \sum_{i=1}^p \omega_i \frac{\partial v}{\partial \theta_i} = f(v, \theta + \beta) = f(v, \theta)$$

eine Lösung, da f nicht explizit von θ_i für $m < i \leq p$ abhängt. In diesem Fall sagen wir (in Analogie zu periodischen Orbits autonomer Differentialgleichungen), der Torus u hat $(p - m)$ *freie Phasen*. Durch Erweiterung von (2.32) um geeignete *Phasenbedingungen* können diese „fixiert“ und dadurch die unbekanntenen ω_i bestimmt werden (siehe Abschnitt 2.4.2 auf S. 38).

System (2.32) besitzt einige bemerkenswerte Eigenschaften. (2.32) ist eine (semi-) lineare Transportgleichung auf \mathbb{T}^p . Die Charakteristiken genügen der Differentialgleichung

$$\dot{\theta} = (\Omega, \omega),$$

bilden also eine Schar paralleler Geraden mit dem Kurvenparameter t . Eine Lösung (u^*, ω^*) von (2.32) liefert offenbar gerade einen Diffeomorphismus u^* , der die Restriktion $X|_T$ des Vektorfeldes von (2.2) auf den invarianten p -Torus T in das konstante Vektorfeld

$$X' := \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i^* \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

auf \mathbb{T}^p transformiert. Das Bild

$$(x(t), \vartheta(t)) := (u^*(\Omega t, \omega^* t), \Omega t)$$

einer Charakteristik im Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ ist offenbar ein quasiperiodischer Orbit auf T . Aufgrund dieser speziellen Eigenschaften wollen wir die durch die Gleichung (2.32) erzeugte Parametrisierung von T die *natürliche Parametrisierung des Torus T* nennen.

Entlang der Charakteristiken werden beliebige Punktmenge $M \subseteq \mathbb{T}^p$ transportiert. Von besonderem Interesse sind dabei die durch

$$T_i := \{ \theta \in \mathbb{T}^p \mid \theta_i = 0 \}$$

definierten Teilmengen von \mathbb{T}^p , deren Bilder im Phasenraum Querschnitte von T sind. T_i ist ein Torus der Dimension $p - 1$ und wird nach der Zeit $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_i^*}$, $\overline{\omega}^* := (\Omega, \omega^*)$, auf sich abgebildet. Das bedeutet, das Bild von T_i im Phasenraum ist eine invariante Menge der Periode $\frac{2\pi}{\omega_i^*}$ -Stroboskop-Abbildung (in der Umgebung eines p -Torus lassen sich offenbar p verschiedene Stroboskopabbildungen lokal definieren).

Für den Fall $p = 2$ sind die Verhältnisse in Abb. 5 skizziert, in welcher der Transport der Menge $T_2 := (\theta_1, 0)$ veranschaulicht wird. Die Charakteristiken genügen der Differentialgleichung

$$\dot{\theta}_1 = \bar{\omega}_1^*, \quad \dot{\theta}_2 = \bar{\omega}_2^*.$$

Man sieht leicht, daß die Menge T_2 nach der Zeit $\Delta t = \frac{2\pi}{\bar{\omega}_2^*}$ auf sich abgebildet wird, wobei eine Rotation um den Winkel $2\pi\alpha_2$ mit $\alpha_2 := \frac{\bar{\omega}_2^*}{\bar{\omega}_1^*}$ erfolgt. Eine analoge Aussage gilt für die Menge $T_1 := (0, \theta_2)$. Man nennt die Abbildungen $P_i : T_i \mapsto T_i$, $i = 1, 2$, *Kreisabbildungen* und die Zahlen α_i , die *Rotationszahlen* von P_i . Da die Rotationszahl eine Invariante einer Kreisabbildung ist, erhalten wir im Falle $p = 2$ aus einer Lösung (u^*, ω^*) auch die Rotationszahlen der durch die beiden lokal definierbaren Stroboskop-Abbildungen gegebenen Kreisabbildungen der Torusquerschnitte auf sich.

Weiterhin ist bemerkenswert, daß die Invarianzgleichung (2.32) als direkte Verallgemeinerung der Bestimmungsgleichungen für Fixpunkte und periodische Orbits von Flüssen aufgefaßt werden kann. Man betrachte dazu die Darstellungen von (2.32) in den Fällen $p = 0$, $u \in \mathbb{R}^n$ (Fixpunkt eines autonomen Systems):

$$0 = f(u),$$

$p = 1$, $m = 0$, $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{R}$ unbekannt (periodischer Orbit eines autonomen Systems):

$$\omega \frac{du}{dt} = f(u)$$

und $p = 1$, $m = 1$, $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}$ gegeben (periodischer Orbit eines periodisch erregten Systems):

$$\Omega \frac{du}{dt} = f(u, \Omega t).$$

Diese stimmen bis auf eine Skalierung der unabhängigen Veränderlichen mit den üblicherweise verwendeten Bestimmungsgleichungen überein.

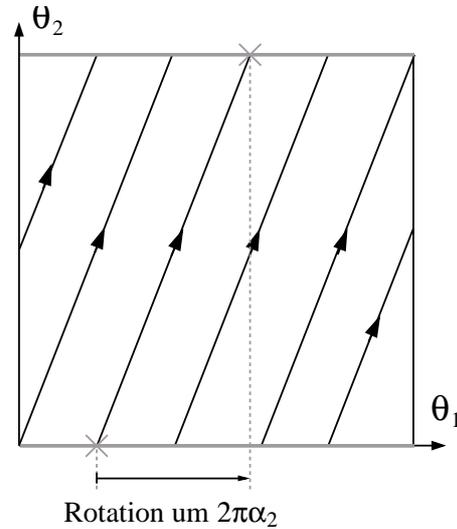


Abbildung 5: Das charakteristische Feld für $p = 2$. Angedeutet ist der Transport der Menge $\theta_2 = 0$.

2.4 Lösung der Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori

Zur Vereinfachung der Schreibweise der erweiterten Invarianzgleichung (2.40) definieren wir den Differentialoperator $D : [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n \rightarrow [\mathcal{C}^{r-1}(\mathbb{T}^p)]^n$:

$$(Du)(\theta) := - \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) - \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta), \quad (2.33)$$

wobei die Abhängigkeit des Operators D von den noch unbekanntenen ω_i für $m < i \leq p$ nicht explizit gekennzeichnet wird. Definieren wir den nichtlinearen Operator $F : [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n \rightarrow [\mathcal{C}^{r-1}(\mathbb{T}^p)]^n$:

$$F(u)(\theta) := f(u(\theta), \theta) + (Du)(\theta), \quad (2.34)$$

dann ist eine Lösung von (2.32) gerade eine Lösung der Gleichung

$$F(u) = 0, \quad (2.35)$$

welche z.B. mit Hilfe des Newton-Verfahrens:

$$\begin{aligned} d^{(k)} &= [F'(u^{(k)})]^{-1} F(u^{(k)}), \\ u^{(k+1)} &= u^{(k)} - d^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, bestimmt werden kann. Dazu untersuchen wir im folgenden, unter welchen Bedingungen das Newton-Verfahren durchführbar ist, d.h.

1. die Definition (2.34) von F sinnvoll ist und eine in einer Umgebung $U(u^*)$ der Lösung u^* Lipschitz-stetige Fréchet-Ableitung F' existiert und
2. der inverse Operator $[F'(u^*)]^{-1}$ existiert und stetig ist.

Wir erhalten damit die für die Konvergenz der Diskretisierung notwendige Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des linearen kontinuierlichen Problems

$$F'(u^{(k)})d^{(k)} = F(u^{(k)})$$

in einer Umgebung der Lösung u^* .

Der Übersichtlichkeit halber untersuchen wir zunächst den Fall $p = m$, d.h. die Dimension des p -Torus T ist gleich der Anzahl der Erregungsfrequenzen. Anschließend verallgemeinern wir die gewonnenen Aussagen auf den Fall $p \geq m$.

2.4.1 Der Fall $p = m$

Wir geben zunächst eine Definition des Operators F in geeigneten Sobolew-Räumen an und zeigen, daß die Linearisierung F' für eine hinreichend glatte rechte Seite f (V2.8) lokal Lipschitz-stetig ist. Anschließend untersuchen wir die stetige Invertierbarkeit von F' .

Definition und Lipschitz-Stetigkeit. Wir betrachten die Gleichung (2.35) in einem geeigneten Sobolew-Raum \mathcal{H}_s^n . Wir wählen dabei $s > r - 1 + \frac{p}{2}$, so daß die Einbettung von $\mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{T}^p)$ in den Raum $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ kompakt ist (vgl. z.B. [ZEIIIA90] S. 239). Der kritische Punkt ist nun die sinnvolle Definition des Nemytskij-Operators $N : \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$:

$$N(u)(\theta) := f(u(\theta), \theta).$$

Es sei $f \in [\mathcal{C}^{s+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^p)]^n$ (vgl. V2.8). Wir definieren die Nemytskij-Operatoren $N_1 : \mathcal{H}_s^n \rightarrow L(\mathcal{H}_s^n, \mathcal{H}_s^n)$ und $N_2 : \mathcal{H}_s^n \rightarrow L(\mathcal{H}_s^n \times \mathcal{H}_s^n, \mathcal{H}_s^n)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} N_1(u)(\theta) &:= \frac{\partial f}{\partial x}(u(\theta), \theta), \\ N_2(u)(\theta) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u(\theta), \theta). \end{aligned}$$

Für die Operatoren N , N_1 und N_2 gilt das Lemma:

2.9 Lemma *Der Operator $N : \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ ist 2-mal stetig Fréchet-differenzierbar. Darüberhinaus gelten für alle $u, v \in \mathcal{H}_s^n$ die Gleichheiten*

$$\begin{aligned} (N'(u)(v))(\theta) &= (N_1(u)(\theta))(v(\theta)), \\ (N''(u)(v, v))(\theta) &= (N_2(u)(\theta))(v(\theta), v(\theta)). \end{aligned}$$

Beweis. Dieses Lemma ist eine einfache Folgerung aus den Sätzen 2.21 (S. 77) und 9.7 (S. 245) aus [AZ90]. \square

Wir definieren nun den Operator $F : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$:

$$F(u) := N(u) + Du,$$

wobei wir ab hier mit $D : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ den analog zu (2.33) definierten verallgemeinerten Differentialoperator meinen. Dann folgt für F aus Lemma 2.9 sofort das folgende Lemma:

2.10 Lemma *Der Operator $F : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ ist 2-mal stetig Fréchet-differenzierbar. Darüberhinaus gelten für alle $u \in \mathcal{H}_{s+1}^n$ die Gleichheiten*

$$\begin{aligned} F'(u) &= N'(u) + D, \\ F''(u) &= N''(u). \end{aligned}$$

Als Zusammenfassung obiger Überlegungen (die lokale Lipschitz-Stetigkeit von F' folgt aus der 2-mal stetigen Differenzierbarkeit von F , vgl. z.B. [ZEIIIA90] S. 191 Prob. 4.1b) formulieren wir den Satz:

2.11 Satz *Der Operator $F : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ ist wohldefiniert. Der Operator $F' : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow L(\mathcal{H}_{s+1}^n, \mathcal{H}_s^n)$ ist wohldefiniert und lokal Lipschitz-stetig.*

Es folgt damit die geforderte Existenz einer Umgebung $U(u^*)$, in der F' Lipschitz-stetig ist.

Stetige Invertierbarkeit. Es bleibt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der inverse Operator $[F'(u^*)]^{-1}$ existiert und stetig ist. Dazu beweisen wir zunächst einige Aussagen, die allgemein genug formuliert werden, um später auch auf die diskretisierten Operatoren anwendbar zu sein. Insbesondere werden wir explizite Abschätzungen der Norm des inversen Operators herleiten, die zwar nicht für die Existenz einer Lösung, wohl aber für den Nachweis der gleichmäßigen Beschränktheit der Inversen der diskretisierten Operatoren benötigt werden. Anschließend zeigen wir, daß aus den gewonnenen Aussagen – unter weiteren Voraussetzungen an die rechte Seite f – die stetige Invertierbarkeit von $[F'(u^*)]$ folgt.

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, vereinbaren wir bis zum Ende dieses Unterabschnitts:

1. Y sei ein reeller Hilbertraum und $X \subseteq Y$ ein dichter linearer Unterraum von Y . Zum Beispiel bilden die Elemente von \mathcal{H}_{s+1}^n einen dichten linearen Unterraum von \mathcal{H}_s^n .
2. Der Operator $A : Y \rightarrow Y$ ist linear, stetig und stark positiv, d.h. es existiert eine Konstante $c_1 > 0$ mit $\langle Ay, y \rangle \geq c_1 \|y\|^2$ für alle $y \in Y$. Im folgenden meinen wir mit c_1 immer eine Konstante, mit der diese Ungleichung gilt.
3. Der Operator $D : X \rightarrow Y$ ist linear, abgeschlossen und schiefadjungiert, d.h. es gilt $D^* = -D$ für alle $x \in X$.
4. Der Operator $L : X \rightarrow Y$ ist definiert durch $L := A + D$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für L das folgende Lemma:

2.12 Lemma Für alle $x \in X$ ist $\langle Lx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$.

Beweis. Es sei $x \in X$. Zunächst folgt aus der Schiefadjungiertheit von D :

$$\langle Dx, x \rangle = \langle x, -Dx \rangle = -\langle Dx, x \rangle$$

und daraus $\langle Dx, x \rangle = 0$. Weiter folgt für $L = A + D$:

$$\langle Lx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \underbrace{\langle Dx, x \rangle}_{=0} = \langle Ax, x \rangle$$

und damit die Behauptung. □

L ist damit also selbst stark positiv für alle $x \in X$. Daraus folgt das Lemma:

2.13 Lemma Das Bild des Operators L ist abgeschlossen.

Beweis. Es sei $x \in X$. Aus $c_1\|x\|^2 \leq \langle Lx, x \rangle \leq \|Lx\| \|x\|$ erhalten wir die Abschätzung $c_1\|x\| \leq \|Lx\|$, aus der mit der Abgeschlossenheit von L die Behauptung folgt (vgl. Beweis von Corollary 19.59 in [ZEIIIA90] auf S. 176f). \square

Aus den beiden Lemmata 2.12 und 2.13 folgt der Satz:

2.14 Satz *Es existiert der inverse Operator $L^{-1}: Y \rightarrow X$ und es gilt $\|L^{-1}\| \leq c_1^{-1}$.*

Beweis. Es sei $x \in X$. Wegen $\langle Lx, x \rangle = \langle x, L^*x \rangle = \langle L^*x, x \rangle$ ist auch L^* stark positiv. Es folgt, daß L^* den trivialen Kern $\ker(L^*) = \{0\}$ hat:

$$\begin{aligned} 0 &= L^*x, \\ 0 &= \langle L^*x, x \rangle \geq c_1\|x\|^2, \end{aligned}$$

d.h. aus $L^*x = 0$ folgt stets $x = 0$. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Bild (vgl. [AH01] Theorem 7.2.7 auf S. 243) folgt $\text{ran}(L) = \{0\}^\perp$ und damit die Existenz einer Lösung der Gleichung $Lx = r$ für jedes $r \in Y$. Die Eindeutigkeit folgt aus $\langle Lx, x \rangle \geq c_1\|x\|^2 > 0$ für alle $x \in X$, $x \neq 0$, zusammen mit Theorem 19.J in [ZEIIIA90] auf S. 174.

Die Abschätzung $\|L^{-1}\| \leq c_1^{-1}$ erhält man z.B. aus Satz 10.5 in [HEU92] auf S. 96f. \square

Wir wollen Satz 2.14 auf den Operator $L := F'(u^*)$ anwenden. Aus Lemma 2.10 folgt für L die Darstellung $L := N'(u^*) + D$. Wir definieren den Operator $A : \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ durch:

$$(Au)(\theta) := (N'(u^*)(u))(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^*(\theta), \theta)u(\theta).$$

Man beachte, daß für $u^* \in [C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)]^n$ auch der Ausdruck $A(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^*(\theta), \theta)$ eine sinnvolle Interpretation besitzt: $A(\theta)$ ist die Jacobi-Matrix von f (nach x), in die für x die Funktion u^* eingesetzt wurde.

Wir zeigen nun, daß A und der in (2.33) definierte Operator D die Voraussetzungen von Satz 2.14 erfüllen. Man sieht leicht, daß A linear und beschränkt (vgl. Lemma 9.7 in [AZ90] auf S. 244) ist. Wir fordern zusätzlich, daß A folgende Voraussetzung erfüllt:

V2.15 Der Operator $A : \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ ist stark positiv, d.h. es existiert eine Konstante $c_1 > 0$ mit $\langle Au, u \rangle \geq c_1\|u\|^2$ für alle $u \in \mathcal{H}_s^n$.

Damit erfüllt A die Voraussetzungen von Satz 2.14.

Der verallgemeinerte Differentialoperator $D : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ ist nach Definition linear und abgeschlossen. Weiter gilt für D folgendes Lemma:

2.16 Lemma *Der Differentialoperator $D : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ ist schiefadjungiert.*

Beweis Der Beweis erfolgt durch partielle Integration unter Ausnutzung der Periodizität.

Für das Skalarprodukt $\langle Dx, y \rangle_{\mathcal{H}_s^n}$ gilt nach Definition die Darstellung:

$$\langle Du, v \rangle_{\mathcal{H}_s^n} = \sum_{i=1}^n \langle Du_i, v_i \rangle_{\mathcal{H}_s^1} = \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \delta^\alpha Du_i, \delta^\alpha v_i \rangle_{\mathcal{H}_0^1},$$

wobei wir mit δ^α den verallgemeinerten Differentialoperator zum Multi-Index $\alpha \in [\mathbb{Z}^+]^p$ bezeichnen. Wir betrachten die Summanden der rechten Seite einzeln (und lassen den Index i der Komponente weg):

$$\begin{aligned} \langle \delta^\alpha Du, \delta^\alpha v \rangle_{\mathcal{H}_0^1} &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} (\delta^\alpha Du)(\theta) (\delta^\alpha v)(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} (D\delta^\alpha u)(\theta) (\delta^\alpha v)(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} \left(- \sum_{i=1}^p \omega_i \frac{\partial(\delta^\alpha u)}{\partial \theta_i}(\theta) \right) (\delta^\alpha v)(\theta) d\theta \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^p} \sum_{i=1}^p \omega_i \int_{\mathbb{T}^{p-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\delta^\alpha u)}{\partial \theta_i}(\theta) (\delta^\alpha v)(\theta) d\theta_i d\theta' \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^p} \sum_{i=1}^p \omega_i \int_{\mathbb{T}^{p-1}} \left(\underbrace{[(\delta^\alpha u)(\theta) (\delta^\alpha v)(\theta)]_{\theta_i=0}^{\theta_i=2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} (\delta^\alpha u)(\theta) \frac{\partial(\delta^\alpha v)}{\partial \theta_i}(\theta) d\theta_i \right) d\theta' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} (\delta^\alpha u)(\theta) \left(\sum_{i=1}^p \omega_i \frac{\partial(\delta^\alpha v)}{\partial \theta_i}(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} (\delta^\alpha u)(\theta) (-D\delta^\alpha v)(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} (\delta^\alpha u)(\theta) (\delta^\alpha(-Dv))(\theta) d\theta \\ &= \langle \delta^\alpha u, \delta^\alpha(-Dv) \rangle_{\mathcal{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Einsetzen des umgeformten Summanden liefert schließlich:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \delta^\alpha u_j, \delta^\alpha(-Dv_j) \rangle_{\mathcal{H}_0^1} = \sum_{j=1}^n \langle u_j, -Dv_j \rangle_{\mathcal{H}_s^1} = \langle u, -Dv \rangle_{\mathcal{H}_s^n}.$$

□

Also erfüllt auch D die Voraussetzungen von Satz 2.14 und es folgt damit unter den weiteren Voraussetzungen der rationalen Unabhängigkeit von $\boldsymbol{\omega}$ (V2.3), der Existenz einer quasiperiodischen Lösung (V2.7), der hinreichenden Glattheit der rechten Seite f (V2.8) und der starken Positivität von A (V2.15) der Satz:

2.17 Satz *Es existiert der zu $L := F'(u^*) = A + D$ inverse Operator $L^{-1} : \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_{s+1}^n$ und es gilt $\|L^{-1}\| \leq c_1^{-1}$ mit der Konstanten $c_1 > 0$ aus V2.15.*

Wir erhalten daraus über die Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens den Satz:

2.18 Satz *Es existiert eine Konstante δ , so daß die durch (2.36) definierte Newtonfolge $\{u^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots$, für jeden Startwert $u^{(0)}$ mit $\|u^{(0)} - u^*\| \leq \delta$ wohldefiniert ist und gegen die Lösung u^* von (2.35) konvergiert.*

Beweis. Die Aussage folgt aus den Sätzen 2.11 und 2.17 zusammen mit dem Satz über das Newton-Verfahren in Banach-Räumen, vgl. z.B. [ZEI86] S. 206ff. Man beachte, daß die Konvergenz tatsächlich im \mathcal{H}_{s+1}^n erfolgt, da die Graph-Norm $\|x\| := \|x\|_{\mathcal{H}_s^n} + \|Lx\|_{\mathcal{H}_s^n}$ äquivalent zur Norm $\|x\|_{\mathcal{H}_{s+1}^n}$ ist. \square

2.4.2 Der Fall $p > m$

Ist $p > m$, so gilt $\frac{\partial f}{\partial \theta_i}(x, \theta) = 0$ für $m < i \leq p$ und $L = F'(u^*)$ hat wegen

$$\begin{aligned} 0 &= F(u^*)(\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} F(u^*)(\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(u^*(\theta), \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta_i} (Du^*)(\theta) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^*(\theta), \theta) \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\theta) + \left(D \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \right) (\theta) \\ &= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^*(\theta), \theta) + D \right) \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \right) (\theta) \\ &= \left(F'(u^*) \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \right) (\theta) \end{aligned}$$

für alle $\theta \in \mathbb{T}^p$ mindestens den $(p - m)$ -dimensionalen Nullraum

$$K := \text{span} \{k_{m+1}, \dots, k_p\}, \quad (2.37)$$

mit

$$k_i := \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}, \quad m < i \leq p,$$

d.h. $K \subseteq \ker(L)$. Insbesondere muß damit auch $K \subseteq \mathcal{H}_{s+1}^n$ gelten, d.h. $\frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \in \mathcal{H}_{s+1}^n$ für $m < i \leq p$.

Die Existenz eines nichttrivialen Kerns von L ist also eine Folge davon, daß die Parametrisierung von u bezüglich $\theta_{m+1}, \dots, \theta_p$ nicht eindeutig durch die Invarianzgleichung (2.32) festgelegt ist. Eine übliche Technik zur Auswahl einer speziellen Parametrisierung ist die Einführung von $p - m$ künstlichen Variablen und die Erweiterung der Bestimmungsgleichung um $p - m$ sogenannte Phasenbedingungen. In unserem Fall wählen wir die noch unbekanntenen Basisfrequenzen $\omega_{m+1}, \dots, \omega_p$ als künstliche Variablen.

Phasenbedingungen. Geeignete Phasenbedingungen erhalten wir folgendermaßen. Angenommen, wir kennen eine Näherungslösung $\tilde{u} \in \mathcal{H}_{s+1}^n$, die z.B. im Rahmen einer Parameterfortsetzung erhalten wurde. Dann wollen wir unter allen möglichen Parametrisierungen $u^*(\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_{m+1} + s_{m+1}, \dots, \theta_p + s_p)$, $(s_{m+1}, \dots, s_p) \in \mathbb{T}^{p-m}$, diejenige auswählen, die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\|\tilde{u} - u^*\|_{\mathcal{H}_0^n}^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

ist. Eine Extremalstelle $(s_{m+1}^*, \dots, s_p^*)$ – ob ein Minimum oder Maximum vorliegt, ist in unserem Fall nicht relevant, da in beiden Fällen die Parametrisierung eindeutig ist – muß die notwendigen Bedingungen

$$\frac{d}{ds_i} \|\tilde{u} - u^*\|_{\mathcal{H}_0^n}^2 = 0, \quad m < i \leq p,$$

erfüllen. Diese können unter Ausnutzung der Schiefsymmetrie des verallgemeinerten Differentialoperators $\frac{d}{ds_i} : \mathcal{H}_{s+1}^n \subseteq \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds_i} \langle \tilde{u} - u^*, \tilde{u} - u^* \rangle_{\mathcal{H}_0^n} \\ &= \left\langle -\frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}, \tilde{u} - u^* \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} + \left\langle \tilde{u} - u^*, -\frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} \\ &= -2 \left\langle \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}, \tilde{u} - u^* \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} \\ &= -2 \left\langle u^*, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} \\ &= -2 \left\langle u^*, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} - \underbrace{2 \left\langle u^*, \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n}}_{=0} \\ &= -2 \left\langle u^*, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n}. \end{aligned}$$

Definieren wir

$$\tilde{K} := \text{span} \left\{ \tilde{k}_{m+1}, \dots, \tilde{k}_p \right\} \quad (2.38)$$

mit

$$\tilde{k}_i := \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, \quad m < i \leq p,$$

dann erweitern wir die Gleichung (2.32) um die $(p - m)$ Phasenbedingungen $\langle \tilde{k}_i, u \rangle_{\mathcal{H}_0^n} = 0$, $m < i \leq p$. Man beachte, daß die so im Fall $p = 1$ und $m = 0$ definierte Phasenbedingung mit der „klassischen“ Integral-Phasenbedingung übereinstimmt. Im folgenden bezeichnen wir mit $u^* \in \mathcal{H}_{s+1}^n$ immer eine spezielle Lösung, deren Parametrisierung die Phasenbedingungen $\langle \tilde{k}_i, u \rangle_{\mathcal{H}_0^n} = 0$ für $m < i \leq p$ erfüllt.

Wir führen wieder eine kompakte Schreibweise ein und definieren dazu die Operatoren $F : \mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}_s^n$:

$$F(u, \omega) := N(u) + Du$$

und $b : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p-m}$:

$$b(u) := \begin{pmatrix} \langle \tilde{k}_{m+1}, u \rangle_{\mathcal{H}_0^n} \\ \vdots \\ \langle \tilde{k}_p, u \rangle_{\mathcal{H}_0^n} \end{pmatrix},$$

wobei wir die Abhängigkeit des Operators D von ω_i für $m < i \leq p$ nicht explizit vermerken. Auf diese Weise können wir die für den Fall $p = m$ eingeführte Notation weiterverwenden, insbesondere können wir damit weiterhin $L := \frac{\partial}{\partial u} F(u^*, \omega^*)$ schreiben ($\frac{\partial}{\partial u}$ bedeutet die Fréchet-Ableitung nach u).

Wir definieren nun das erweiterte System (das \times steht für extended) $\overset{\times}{F} : \mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m}$:

$$\overset{\times}{F}(u, \omega) := \begin{pmatrix} F(u, \omega) \\ b(u) \end{pmatrix}.$$

Damit erfüllt die spezielle Lösung (u^*, ω^*) offensichtlich die Gleichung

$$\overset{\times}{F}(u, \omega) = 0. \quad (2.39)$$

Diese lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} &= f(u, \theta), \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, u \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} &= 0, \quad m < i \leq p. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wir wollen auf (2.39) wieder das Newton-Verfahren anwenden und überprüfen im folgenden die Voraussetzungen für dessen Durchführbarkeit (vgl. Punkte 1 und 2 auf S. 33).

Definition und Lipschitz-Stetigkeit. Aus Lemma 2.9 folgt für $\overset{\times}{F}$ das Lemma:

2.19 Lemma *Der Operator $\overset{\times}{F} : \mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m}$ ist 2-mal stetig differenzierbar. Darüberhinaus gelten die Gleichheiten*

$$\begin{aligned}\overset{\times}{F}'(u, \omega) &= \begin{pmatrix} N'(u) + D & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \\ \overset{\times}{F}''(u, \omega) &= \begin{pmatrix} N''(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $(u, \omega) \in \mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m}$ mit $a : \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}_s^n$

$$a(\psi) := - \sum_{i=m+1}^p \psi_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}.$$

Es folgt daraus der zu Satz 2.11 analoge Satz:

2.20 Satz *Der Operator $\overset{\times}{F} : \mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m}$ ist wohldefiniert. Der Operator $\overset{\times}{F}' : \mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow L(\mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m}, \mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m})$ ist wohldefiniert und lokal Lipschitz-stetig.*

Wir erhalten damit auch für $\overset{\times}{F}'$ die Existenz einer Umgebung $U(u^*, \omega^*)$, in der $\overset{\times}{F}'$ Lipschitz-stetig ist.

Stetige Invertierbarkeit. Es bleibt zu zeigen, daß $\overset{\times}{L} := \overset{\times}{F}'(u^*, \omega^*)$ stetig invertierbar ist. Dafür benötigen wir den Teil ii) des Bordering Lemmas (vgl. z.B. [KEL87] S. 76):

2.21 Satz (Bordering Lemma) *Es sei X ein Banach-Raum und der lineare Operator $\overset{\times}{L} : X \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow X \times \mathbb{R}^\nu$ habe die Form*

$$\overset{\times}{L} := \begin{pmatrix} L & a \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} L : X \rightarrow X, & a : \mathbb{R}^\nu \rightarrow X, \\ b : X \rightarrow \mathbb{R}^\nu, & c : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}^\nu. \end{cases}$$

Dann gelten:

i) Wenn L invertierbar ist, dann ist $\overset{\times}{L}$ genau dann invertierbar, wenn $c - bL^{-1}a : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ invertierbar ist.

ii) Ist L ist nicht invertierbar mit

$$\dim(\ker(L)) = \operatorname{codim}(\operatorname{ran}(L)) = \nu,$$

dann ist $\overset{\times}{L}$ genau dann invertierbar, wenn die folgenden Bedingungen

1. $\dim(\operatorname{ran}(a)) = \nu$,
2. $\dim(\operatorname{ran}(b)) = \nu$,
3. $\operatorname{ran}(L) \cap \operatorname{ran}(a) = \{0\}$ und
4. $\ker(L) \cap \ker(b) = \{0\}$

erfüllt sind.

iii) Ist L nicht invertierbar mit $\dim(\ker(L)) > \nu$, dann ist auch $\overset{\times}{L}$ nicht invertierbar.

Bevor wir das Bordering Lemma anwenden können, müssen wir Operatoren der Form $L = A + D$ mit nichttrivialem Kern im Hinblick auf die Eigenschaften 1.-4. aus Lemma 2.21 Teil ii) und insbesondere auf die Bedingung $\dim(\ker(L)) = \operatorname{codim}(\operatorname{ran}(L)) = \nu$ genauer untersuchen.

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, vereinbaren bis zum Ende dieses Unterabschnitts:

1. Y sei ein reeller Hilbertraum und $X \subseteq Y$ ein dichter linearer Unterraum von Y .
2. $K := \operatorname{span}\{k_1, \dots, k_\nu\}$, und $\tilde{K} := \operatorname{span}\{\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_\nu\}$ seien endlichdimensionale Unterräume von X und es gelte $\dim(K) = \dim(\tilde{K}) =: \nu$. Wir setzen zur Abkürzung $K_X^\perp := K^\perp \cap X$ und $\tilde{K}_X^\perp := \tilde{K}^\perp \cap X$.
3. Der Operator $A : Y \rightarrow Y$ ist linear, stetig und stark positiv auf K^\perp , d.h. es existiert eine Konstante $c_1 > 0$ mit $\langle Ay, y \rangle \geq c_1 \|y\|^2$ für alle $y \in K^\perp$. Im folgenden meinen wir mit c_1 immer eine Konstante, mit der diese Ungleichung gilt.
4. Der Operator $D : X \rightarrow Y$ ist linear, abgeschlossen und schiefadjungiert, d.h. es gilt $D^* = -D$ für alle $x \in X$.
5. Der Operator $L : X \rightarrow Y$ ist definiert durch $L := A + D$. Für alle $x \in K$ ist $Lx = 0$.

Wir hatten weiter vorn schon $K \subseteq \ker(L)$ festgestellt. Unter den hier gemachten Voraussetzungen gilt nun wegen $\langle Lx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$ für alle $x \in X$ sogar das Lemma:

2.22 Lemma *Es gilt $\ker(L) = K$.*

Beweis. Wir können X als direkte Summe $K \oplus K_X^\perp$ darstellen. Für beliebiges $x = x_1 + x_2$ mit $Lx = 0$ und $x_1 \in K$ und $x_2 \in K_X^\perp$ gilt nun

$$0 = \|Lx\| \|x_2\| \geq |\langle L(x_1 + x_2), x_2 \rangle| = |\langle Lx_2, x_2 \rangle| \geq c_1 \|x_2\|^2,$$

woraus $x_2 = 0$, also $x = x_1 \in K$ folgt. □

Weiter gilt für A und D das Lemma:

2.23 Lemma *Auf dem linearen Unterraum K gilt $A = -D$ und damit $A^* = -A$.*

Beweis. Für alle $x \in K$ gilt $Lx = Ax + Dx = 0$. Durch Umstellen erhalten wir daraus $Ax = -Dx$, d.h., das Bild Ax stimmt mit dem Bild $-Dx$ überein, also ist $A = -D$. Daraus folgt nun weiter $A^* = -D^* = -(-D) = -A$. □

Damit erhalten wir nun für L^* das Lemma:

2.24 Lemma *Es gilt $\ker(L^*) = K$.*

Beweis. Wir erhalten zunächst $K \subseteq \ker(L^*)$ wegen

$$0 = Lx = (A + D)x = -(-A - D)x = -(A^* + D^*)x = -L^*x$$

für alle $x \in K$. Weiter gilt $\langle Lx, x \rangle = \langle x, L^*x \rangle = \langle L^*x, x \rangle$ und damit auch $\langle L^*x, x \rangle \geq c_1 \|x\|^2$ für alle $x \in K_X^\perp$. Daraus erhalten wir $\ker(L^*) = K$ analog zu $\ker(L) = K$, siehe dazu den zweiten Teil des Beweises von Lemma 2.22. □

Aus diesen Überlegungen folgt nun der wichtige Satz:

2.25 Satz *Es gilt $\operatorname{ran}(L) = \operatorname{ran}(L^*) = K^\perp$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit des Bildes von L . Wir fassen X wieder als direkte Summe $K \oplus K_X^\perp$ auf. Für beliebiges $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in K$ und $x_2 \in K_X^\perp$ gilt $L(x_1 + x_2) = Lx_2$, d.h. $L(X) = L(K_X^\perp)$. Aus der Abschätzung $c_1 \|x_2\| \leq \|Lx_2\|$ folgt nun die Abgeschlossenheit des Bildes analog zu Lemma 2.13.

Damit und aus $\ker(L) = K$ und $\ker(L^*) = K$ folgt mit dem Satz über das abgeschlossene Bild

$$\operatorname{ran}(L) = \ker(L^*)^\perp = K^\perp = \ker(L)^\perp = \operatorname{ran}(L^*)$$

und damit die Behauptung. □

Als Vorbereitung für den Beweis der Existenz von $\overset{x}{L}^{-1}$ zeigen wir noch die beiden folgenden Lemmata über Stabilitätseigenschaften einer endlichdimensionalen Basis:

2.26 Lemma *Es sei Z ein reeller Prä-Hilbertraum und u_1, \dots, u_ν für ein $\nu \in \mathbb{N}$ eine Basis des ν -dimensionalen linearen Unterraumes $U \subseteq Z$. Dann existiert eine Konstante $c_3 > 0$ mit $\|\sum_{i=1}^\nu \alpha_i u_i\| \geq c_3 \|\alpha\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^\nu$.*

2.27 Lemma *Es sei Z ein reeller Prä-Hilbertraum und u_1, \dots, u_ν für ein $\nu \in \mathbb{N}$ eine Basis des ν -dimensionalen linearen Unterraumes $U \subseteq Z$. Dann existiert eine Konstante $c_4 > 0$ mit $\|\beta(z)\| \geq c_4 \|z\|$, $\beta(z) \in \mathbb{R}^\nu$ und $\beta(z)_i := \langle u_i, z \rangle$, für alle $z \in U$.*

Die explizite Angabe der Stabilitätskonstanten ist nichttrivial. Lemma 2.26 ist eine Folge der linearen Unabhängigkeit der Basiselemente und Lemma 2.27 eine Folge davon, daß kein nicht-Null-Element $u \in U$ gleichzeitig orthogonal zu allen Basiselementen sein kann.

Beweis. Wir zeigen die Gültigkeit der Abschätzungen aus den Lemmata 2.26 und 2.27.

Es sei $z := \sum_{i=1}^\nu \alpha_i u_i \in U$, dann erfüllt α das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^\nu \alpha_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle z, u_j \rangle =: \beta(z)_j, \quad j = 1, \dots, \nu,$$

zur Bestimmung der Koeffizienten eines Elementes $z \in U$ in der Basis u_i , $i = 1, \dots, \nu$. Wir setzen zur Abkürzung $\beta = \beta(z)$ und $C := (c_{ij})$ mit $c_{ij} := \langle u_i, u_j \rangle$ und erhalten die Darstellung

$$C\alpha = \beta$$

mit der regulären Systemmatrix C , sowie die Abschätzung

$$\|\alpha\| = \|C^{-1}\beta\| \leq \|C^{-1}\| \|\beta\|.$$

Zu Lemma 2.26: Nun gilt

$$\|\beta\|^2 = \sum_{i=1}^\nu \beta_i^2 = \sum_{i=1}^\nu \langle z, u_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^\nu \|z\|^2 \|u_i\|^2 = \|z\|^2 \sum_{i=1}^\nu \|u_i\|^2,$$

woraus $\|\beta\| \leq \|z\| \sqrt{\sum_{i=1}^\nu \|u_i\|^2}$ und damit

$$\|\alpha\| \leq \|C^{-1}\| \|\beta\| \leq \|C^{-1}\| \sqrt{\sum_{i=1}^\nu \|u_i\|^2} \left\| \sum_{i=1}^\nu \alpha_i u_i \right\|$$

folgt. Die Abschätzung gilt also z.B. für

$$c_3 = \frac{1}{\|C^{-1}\| \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \|u_i\|^2}}. \quad (2.41)$$

Zu Lemma 2.27: Weiter gilt

$$\|z\| = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{\nu} \|\alpha_i u_i\| \leq \nu \max_{1 \leq i \leq \nu} \|\alpha_i u_i\| \leq \nu \max_{1 \leq i \leq \nu} \|\alpha_i\| \max_{1 \leq i \leq \nu} \|u_i\|,$$

woraus nun mit $\max_{1 \leq i \leq \nu} \|\alpha_i\| \leq \|\alpha\|$ (Euklidische Norm!)

$$\|z\| \leq \nu \|\alpha\| \max_{1 \leq i \leq \nu} \|u_i\| \leq \nu \max_{1 \leq i \leq \nu} \|u_i\| \|C^{-1}\| \|\beta\|$$

folgt. Die Abschätzung gilt also z.B. für

$$c_4 = \frac{1}{\nu \max_{1 \leq i \leq \nu} \|u_i\| \|C^{-1}\|}. \quad (2.42)$$

□

Wir definieren im Raum $Y \times \mathbb{R}^{\nu}$ ein Skalarprodukt und die dadurch induzierte Norm durch:

$$\begin{aligned} \langle (x, \alpha), (y, \beta) \rangle_{Y \times \mathbb{R}^{\nu}} &:= \langle x, y \rangle_Y + \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}^{\nu}}, \\ \|(x, \alpha)\|_{Y \times \mathbb{R}^{\nu}}^2 &:= \langle (x, \alpha), (x, \alpha) \rangle_{Y \times \mathbb{R}^{\nu}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich den gewünschten Satz:

2.28 Satz Für alle $x \in K$ gelte für die Orthogonalprojektion $P_{\tilde{K}} : X \rightarrow \tilde{K}$ die Stabilitätsbedingung $\|P_{\tilde{K}} x\| \geq c_2 \|x\|$ mit einer Konstanten $c_2 > 0$. Weiter bezeichnen wir mit c_3 eine Stabilitätskonstante für K gemäß Lemma 2.26 und mit c_4 eine Stabilitätskonstante für \tilde{K} gemäß Lemma 2.27.

Es seien weiter die linearen Operatoren $a : \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow Y$ und $b : X \subseteq Y \rightarrow \mathbb{R}^{\nu}$ definiert durch

$$a(\alpha) := \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i k_i$$

und

$$b(x) := \begin{pmatrix} \langle \tilde{k}_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{k}_{\nu}, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Dann existiert der inverse Operator $\overset{\times}{L}^{-1} : Y \times \mathbb{R}^n \rightarrow (X \subseteq Y) \times \mathbb{R}^n$ des linearen erweiterten Operators $\overset{\times}{L} : (X \subseteq Y) \times \mathbb{R}^n \rightarrow Y \times \mathbb{R}^n$:

$$\overset{\times}{L} := \begin{pmatrix} L & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt $\|\overset{\times}{L}^{-1}\| \leq c^{-1}$. Ein möglicher Wert für c ist dabei durch (2.43, s.u.) explizit gegeben.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz des inversen Operators $\overset{\times}{L}^{-1}$ mit Hilfe von Teil ii) des Bordering Lemmas. Wegen Satz 2.25 gilt $\dim(\ker(L)) = \text{codim}(\text{ran}(L)) = \dim(\ker(L^*)) = \nu$. Weiter folgt aus $\dim(K) = \dim(\tilde{K}) = \nu$ auch $\dim(\text{ran}(a)) = \dim(\text{ran}(b)) = \nu$ und wegen $\text{ran}(L) = K^\perp$ und $\text{ran}(a) = K$ auch $\text{ran}(L) \cap \text{ran}(a) = \{0\}$. Es gilt aber auch $\ker(L) \cap \ker(b) =: K \cap \tilde{K}_X^\perp = \{0\}$, was man wie folgt sieht.

Es sei $x \in K \cap \tilde{K}_X^\perp$. Dann gilt $\mathbf{P}_{\tilde{K}} x = 0$ wegen $x \in \tilde{K}_X^\perp$. Nach Voraussetzung gilt wegen $x \in K$ aber auch $\|\mathbf{P}_{\tilde{K}} x\| \geq c_2 \|x\|$ mit $c_2 > 0$. Damit folgt aus $0 = \|\mathbf{P}_{\tilde{K}} x\| \geq c_2 \|x\|$ schließlich $x = 0$ und daraus die Behauptung. Es sind also alle Voraussetzungen des Bordering Lemmas Teil ii) erfüllt und es folgt die Existenz des inversen Operators $\overset{\times}{L}^{-1}$.

Um zusätzlich $\|\overset{\times}{L}^{-1}\| \leq c^{-1}$ zu erhalten, zeigen wir die Gültigkeit der Ungleichung $\|\overset{\times}{L}(x, \alpha)\| \geq c \|(x, \alpha)\|$, woraus die Normabschätzung folgt. Es ist

$$\overset{\times}{L}(x, \alpha) = \begin{pmatrix} L & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lx + a(\alpha) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} Lx + a(\alpha) \\ b(x) \end{pmatrix} \right\|^2 &= \|Lx + a(\alpha)\|^2 + \|b(x)\|^2 \\ &= \|Lx\|^2 + \|a(\alpha)\|^2 + \|b(x)\|^2, \end{aligned}$$

wobei $\text{ran}(L) = K^\perp$ und $\text{ran}(a) = K$ benutzt wurde.

Wir fassen X als direkte Summe $X = K \oplus K_X^\perp$ auf und erhalten für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in K$ und $x_2 \in K_X^\perp$ aus Lemma 2.22, $\|Lx_2\| \geq c_1 \|x_2\|$ und unseren Voraussetzungen über a die erste Abschätzung nach unten

$$\|Lx\|^2 + \|a(\alpha)\|^2 + \|b(x)\|^2 \geq c_1^2 \|x_2\|^2 + c_3^2 \|\alpha\|^2 + \|b(x)\|^2.$$

Um eine Abschätzung der rechten Seite nach unten zu erhalten, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Wir betrachten

$$\textbf{Fall 1: } \|x_2\| \geq \frac{c_2}{2} \|x_1\| \quad \text{und} \quad \textbf{Fall 2: } \|x_2\| \leq \frac{c_2}{2} \|x_1\|.$$

Diese Situation ist in Abb. 6 geometrisch veranschaulicht.

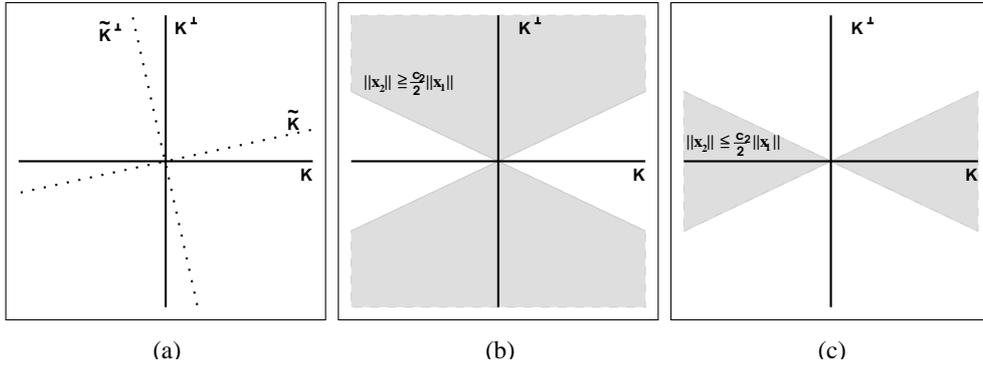


Abbildung 6: (a) Skizze der Lage der Räume K , K_X^\perp , \tilde{K} und \tilde{K}_X^\perp . (b) und (c) zeigen die in den Fällen 1 und 2 der Fallunterscheidung ausgewählten Doppelkegel.

Fall 1. Es gilt $\|x_2\| \geq \frac{c_2}{2}\|x_1\|$ und damit

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \leq \frac{4}{c_2^2}\|x_2\|^2 + \|x_2\|^2 = \frac{4 + c_2^2}{c_2^2}\|x_2\|^2$$

und es folgt

$$\|x_2\|^2 \geq \frac{c_2^2}{4 + c_2^2}\|x\|^2.$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} c_1^2\|x_2\|^2 + c_3^2\|\alpha\|^2 + \|b(x)\|^2 &\geq c_1^2\|x_2\|^2 + c_3^2\|\alpha\|^2 \\ &\geq c_1^2 \frac{c_2^2}{4 + c_2^2} \|x\|^2 + c_3^2\|\alpha\|^2 \\ &\geq \min \left\{ \frac{c_1^2 c_2^2}{4 + c_2^2}, c_3^2 \right\} \|(x, \alpha)\|^2. \end{aligned}$$

Fall 2. Es gilt $\|x_2\| \leq \frac{c_2}{2}\|x_1\|$. Aus der Definition von $b(x)$ folgt $b(x) = b(\mathbf{P}_{\tilde{K}}x)$ und daraus wegen $\mathbf{P}_{\tilde{K}}x \in \tilde{K}$

$$\|b(x)\| = \|b(\mathbf{P}_{\tilde{K}}x)\| \geq c_4\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x\|.$$

Es sei wieder $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in K$ und $x_2 \in K_X^\perp$. Dann gilt $\mathbf{P}_{\tilde{K}}x = \mathbf{P}_{\tilde{K}}x_1 + \mathbf{P}_{\tilde{K}}x_2$ und damit

$$\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x\| = \|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_1 + \mathbf{P}_{\tilde{K}}x_2\| \geq \|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_1\| - \|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_2\|.$$

Um nun eine Abschätzung nach unten zu erhalten, schätzen wir $\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_1\|$ nach unten und $\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_2\|$ nach oben ab. Es gilt wegen $x_1 \in K$

$$\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_1\| \geq c_2\|x_1\|$$

und die triviale Abschätzung

$$\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x_2\| \leq \|x_2\|.$$

Mit $\frac{c_2}{2}\|x_1\| \geq \|x_2\|$ erhalten wir daraus

$$\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}x\| \geq c_2\|x_1\| - \frac{c_2}{2}\|x_1\| = \frac{c_2}{2}\|x_1\|.$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} c_1^2\|x_2\|^2 + c_3^2\|\alpha\|^2 + \|b(x)\|^2 &\geq c_1^2\|x_2\|^2 + c_3^2\|\alpha\|^2 + \frac{c_4^2c_2^2}{4}\|x_1\|^2 \\ &\geq \min \left\{ c_1^2, c_3^2, \frac{c_4^2c_2^2}{4} \right\} (\|x_2\|^2 + \|\alpha\|^2 + \|x_1\|^2) \\ &= \min \left\{ c_1^2, c_3^2, \frac{c_4^2c_2^2}{4} \right\} \|(x, \alpha)\|^2. \end{aligned}$$

Fassen wir die in den beiden Fällen gewonnenen Aussagen zusammen, so gilt die Abschätzung

$$\|\check{L}(x, \alpha)\| \geq c\|(x, \alpha)\|$$

z.B. für den Wert

$$c := \min \left\{ \frac{c_1c_2}{\sqrt{4+c_2^2}}, c_1, c_3, \frac{c_4c_2}{2} \right\}. \quad (2.43)$$

□

Um den Satz 2.28 auf unseren Operator $\check{L} := F'(u^*, \omega^*)$ anwenden zu können, müssen wir die Forderung V2.15 (starke Positivität) an $A := N'(u^*)$ abschwächen. Die Voraussetzung V2.15 kann nicht erfüllt sein (bzw. ist zu stark), da aus ihr $\frac{\partial u^*}{\partial \theta_i} = 0$ für $m < i \leq p$ folgen würde ($F'(u^*)$ wäre ja stetig invertierbar und damit $\ker(F'(u^*)) = \{0\}$), d.h. der Torus wäre nicht p -dimensional, was im Widerspruch zu V2.7 (Existenz einer quasiperiodischen Lösung mit p -dimensionaler Frequenzbasis) stünde. Wir fordern daher nur noch:

V2.29 Der Operator $A : \mathcal{H}_s^n \rightarrow \mathcal{H}_s^n$ sei für alle $u \in K^\perp$ stark positiv, d.h. es gilt $\langle Au, u \rangle \geq c_1\|u\|^2$ für alle $u \in K^\perp$ mit einer Konstanten $c_1 > 0$.

Desweiteren fordern wir, daß für die in (2.37) und (2.38) definierten linearen Unterräume K und \tilde{K} die Voraussetzung

V2.30 Für alle $u \in K$ gelte für die Orthogonalprojektion $\mathbf{P}_{\tilde{K}} : \mathcal{H}_{s+1}^n \rightarrow \tilde{K}$ die Stabilitätsbedingung $\|\mathbf{P}_{\tilde{K}}u\| \geq c_2\|u\|$ mit einer Konstanten $c_2 > 0$.

erfüllt ist und wir bezeichnen mit c_3 eine Stabilitätskonstante für K gemäß Lemma 2.26 und mit c_4 eine Stabilitätskonstante für \tilde{K} gemäß Lemma 2.27.

Wir erhalten damit unter den Voraussetzungen der rationalen Unabhängigkeit von Ω (V2.3), der Existenz einer quasiperiodischen Lösung (V2.7), der hinreichenden Glattheit der rechten Seite f (V2.8), der starken Positivität von A auf K^\perp (V2.29) und der Projektionsstabilität von $P_{\tilde{K}}$ (V2.30) als Folgerung den Satz:

2.31 Satz *Der lineare erweiterte Operator $\overset{\times}{L} := \overset{\times}{F}'(u^*, \omega^*)$, $\overset{\times}{L} : (\mathcal{H}_{s+1}^n \times \mathbb{R}^{p-m}) \rightarrow (\mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m})$, besitzt einen stetigen Inversen Operator $\overset{\times}{L}^{-1} : (\mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m}) \rightarrow (\mathcal{H}_s^n \times \mathbb{R}^{p-m})$ und es gilt $\|\overset{\times}{L}^{-1}\| \leq c^{-1}$ mit einer Konstanten $c > 0$. Ein Wert für c kann nach Gleichung (2.43) explizit berechnet werden.*

Wir erhalten daraus über die Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens den Satz:

2.32 Satz *Es existiert eine Konstante δ , so daß die durch*

$$(u^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}) = (u^{(k)}, \omega^{(k)}) - [\overset{\times}{F}'(u^{(k)}, \omega^{(k)})]^{-1} \overset{\times}{F}(u^{(k)}, \omega^{(k)})$$

definierte Newtonfolge $\{(u^{(k)}, \omega^{(k)})\}$, $k = 1, 2, \dots$, für jeden Startwert $(u^{(0)}, \omega^{(0)})$ mit $\|(u^{(0)}, \omega^{(0)}) - (u^, \omega^*)\| \leq \delta$ wohldefiniert ist und gegen die Lösung (u^*, ω^*) von $\overset{\times}{F}(u, \omega) = 0$ konvergiert.*

Beweis. Die Aussage folgt aus den Sätzen 2.20 und 2.31 zusammen mit dem Satz über das Newton-Verfahren in Banach-Räumen, vgl. z.B. [ZEI86] S. 206ff. \square

An dieser Stelle sei angemerkt, daß der Fall $p = m$ als Spezialfall von $p \geq m$ behandelt werden kann, indem man die für $p = m$ entstehende triviale Erweiterung wegläßt. Das gilt auch für alle in den entsprechenden Abschnitten angegebenen Sätze.

Desweiteren ist der Nachweis der Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens im \mathcal{H}_s^n nicht nur von akademischem Interesse, da hieraus die *Existenz und Eindeutigkeit* einer Lösung der linearisierten Gleichung in einer *Umgebung der Lösung* folgt, welche Voraussetzung für eine konvergente Diskretisierung ist. Für den Nachweis der Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens haben wir hier lediglich die *stetige Invertierbarkeit von $\overset{\times}{F}(u, \omega)$ an der Stelle (u^*, ω^*)* benötigt.

3 Diskretisierungsverfahren für quasiperiodische Tori

In diesem Abschnitt wollen wir Lösungen der in Abschnitt 2.3.2 hergeleiteten erweiterten Invarianzgleichung quasiperiodischer p -Tori unter den in den Abschnitten 2.3.2 und 2.4 gemachten Voraussetzungen numerisch approximieren.

In Abschnitt 3.1 wird eine Approximation mittels zentraler Differenzenquotienten vorgestellt, die sich auf unsere Invarianzgleichung besonders leicht anwenden läßt. Insbesondere ist es möglich, *derartige Finite Differenzen Methoden für p -Tori rekursiv zu konstruieren*. Diese Tatsache wurde bei der Implementierung unter Anwendung von Template-Techniken (wie sie z.B. von C++ bereitgestellt werden) ausgenutzt, so daß tatsächlich *Implementierungen von Algorithmen für p -Tori mit beliebiger Dimension p automatisch erzeugt werden können*. Der Anwendbarkeit sind damit lediglich Grenzen durch die verfügbare Rechnerleistung gesetzt. In Abschnitt 3.1.4 wird ein Algorithmus zur numerischen Lösung der durch die Finite Differenzen Diskretisierung entstehenden großen geränderten Gleichungssysteme angegeben.

In Abschnitt 3.2 betrachten wir Unterraum-Projektionsmethoden, die auf einer Fourier-Entwicklung der Lösung beruhen. Besonderes Interesse gilt dabei der in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Semidiskretisierung, die in einem gewissen Sinne als Verallgemeinerung der formalen Mittelungsmethode aufgefaßt werden kann. Diese Methode ist offenbar besonders für die Analyse periodisch erregter Systeme geeignet, die z.B. in der Elektrotechnik auftreten.

3.1 Finite-Differenzen-Methoden

Wir wollen invariante quasiperiodische p -Tori⁴ $u^* : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Modellproblems (2.2) als Näherungslösung der erweiterten Invarianzgleichung (2.40) bestimmen:

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = f(u, \theta),$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, u \right\rangle_{\mathcal{H}_0^n} = 0, \quad m < i \leq p,$$

mit $u, \tilde{u} : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ und den unbekanntenen Basisfrequenzen ω_i für $m < i \leq p$, wobei wir wieder die abkürzende Schreibweise $f(u, \theta) := f(u, \theta_1, \dots, \theta_m)$ verwenden. Die Funktion \tilde{u} sei dabei eine gegebene Torusfunktion, z.B. eine a-priori bekannte Approximation von u^* .

⁴In diesem Abschnitt nennen wir zur Vereinfachung sowohl die Torusfunktion $u^* : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ als auch den eigentlichen invarianten Torus $T := \{(u^*(\theta), (\theta_1, \dots, \theta_m)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \mid \theta \in \mathbb{T}^p\}$ einen *quasiperiodischen invarianten p -Torus*. Wir unterscheiden also nicht mehr explizit zwischen der Torusfunktion u^* und dem geometrischen Objekt des Torus T im Phasenraum.

In Abschnitt 2.4 wurde die Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens zur näherungsweise Bestimmung einer Lösung von (2.40) im Raum \mathcal{H}_s^n unter geeigneten Voraussetzungen gezeigt (vgl. Abschnitt 2.4.2 auf S. 49). Wegen des komplizierten Skalarproduktes ist der Raum \mathcal{H}_s^n für die Konstruktion numerischer Verfahren aber eher ungeeignet. Wir wollen daher die Gleichung (2.40) im Raum $\mathcal{H}_{s,0}^n := \mathcal{H}_s^n \subseteq \mathcal{H}_0^n$ betrachten, d.h. im Raum aller Elemente von \mathcal{H}_s^n , versehen mit Norm und Skalarprodukt von \mathcal{H}_0^n . Man beachte weiter, daß unter unseren Voraussetzungen die Einbettung $\mathcal{H}_{s+1,0}^n \subseteq [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$ kompakt ist, d.h. zu jeder Funktion $u \in \mathcal{H}_{s+1,0}^n$ existiert eine Funktion $x \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$, für die fast überall $u \equiv x$ ist.

Eine Diskretisierung der erweiterten Invarianzgleichung (2.40) mittels finiter Differenzen bietet sich aus folgenden Gründen an:

1. Der Definitionsbereich \mathbb{T}^p ist kompakt und besitzt keinen Rand. Dadurch entfällt die mittels finiter Differenzen nur schwer durchführbare Randapproximation.
2. Differenzenquotienten mit hoher Konsistenzordnung können sehr leicht konstruiert werden.
3. Die Finite-Differenzen-Methode ist besonders leicht zu programmieren.

Um Verfahren hoher Konvergenzordnung zu erhalten, müssen allerdings starke Forderungen an die Differenzierbarkeit der Lösung gestellt werden.

Um später die in Abschnitt 2.4 bewiesenen Sätze zum Nachweis der Konvergenz verwenden zu können, betrachten wir hier speziell Verfahren, die die Schiefsymmetrie des Differentialoperators D erhalten. Es wird sich zeigen, daß dies mit zentralen Differenzenquotienten möglich ist.

Gegeben seien p natürliche Zahlen N_1, \dots, N_p . Wir definieren den *Diskretisierungsparameter* $N := \min\{N_1, \dots, N_p\}$, die Schrittweiten $h_i := \frac{2\pi}{N_i}$, $i = 1, \dots, p$, und nennen $h := \max\{h_1, \dots, h_p\} = \frac{2\pi}{N}$ die *Maschenweite*. Es seien weiter $\mathbb{T}_{N_i}^1 := \mathbb{Z}/N_i$, $i = 1, \dots, p$, eindimensionale toroidale Indexmengen mit den N_i Repräsentanten $\{[1], \dots, [N_i]\}$ und

$$\mathbb{T}_N^p := (\mathbb{T}_{N_1}^1) \times \cdots \times (\mathbb{T}_{N_p}^1)$$

eine p -dimensionale toroidale Multi-Indexmenge.

Wir definieren damit den Raum der *Gitterfunktionen* $\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)$:

$$\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p) := \{ u_N \mid u_N : \mathbb{T}_N^p \rightarrow \mathbb{R} \},$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle u_N, v_N \rangle_{\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)} := \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{[j] \in \mathbb{T}_N^p} u_N(j) v_N(j),$$

wobei die Summierung genau einmal über jeden Repräsentanten von \mathbb{T}_N^p erfolgt, und der induzierten Norm

$$\|u_N\|_{\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)}^2 := \langle u_N, u_N \rangle_{\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)}.$$

Addition und Multiplikation mit einem Skalar werden punktweise definiert:

$$\begin{aligned} (u_N + v_N)(j) &:= u_N(j) + v_N(j), \\ (\alpha u_N)(j) &:= \alpha u_N(j), \end{aligned}$$

für $u_N, v_N \in \mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)$, $j \in \mathbb{T}_N^p$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Weiterhin definieren wir den Diskretisierungsoperator $P_N : [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$(P_N u)(j_1, \dots, j_p) := u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p),$$

den Rotationsoperator $E_i : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$(E_i u_N)(j_1, \dots, j_i, \dots, j_p) := u_N(j_1, \dots, j_i + 1, \dots, j_p),$$

die Differenzenoperatoren $\partial_{N,i} : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$\partial_{N,i} u_N := \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l (E_i^l - E_i^{-l}) u_N, \quad \eta_l \in \mathbb{R}$$

und $D_N : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$D_N u_N := - \sum_{i=1}^m \Omega_i \partial_{N,i} u_N - \sum_{i=m+1}^p \omega_i \partial_{N,i} u_N$$

und vereinbaren mit $f_N : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$ die abkürzende Schreibweise

$$\begin{aligned} f_N(u_N)(j_1, \dots, j_p) &:= P_N(f(u(\theta), \theta))(j_1, \dots, j_p) \\ &:= f(u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p), (j_1 h_1, \dots, j_m h_m)). \end{aligned}$$

Die noch unbestimmten Parameter o und η_l , $l = 1, \dots, o$, in der Definition von $\partial_{N,i}$ werden später durch Konsistenzbedingungen festgelegt. Ein konkretes Verfahren, erhält man z.B. durch die Wahl $\{o = 1, \eta_1 = \frac{1}{2}\}$. Das ist der zentrale Differenzenquotient mit der Konsistenzordnung 2.

Mit diesen Definitionen ist die Finite-Differenzen-Diskretisierung der erweiterten Invarianzgleichung (2.40) gegeben durch:

$$\begin{aligned} f_N(u_N) + D_N u_N &= 0, \\ \langle \partial_{N,i} P_N \tilde{u}, u_N \rangle &= 0, \quad m < i \leq p. \end{aligned} \tag{3.1}$$

In einer Implementierung empfiehlt sich die Normierung der partiellen Differenzenquotienten $\partial_{N,i} P_N \tilde{u}$, $m < i \leq p$, da dies i.d.R. zu besser konditionierten Systemen führt.

3.1.1 Rekursive Konstruktion von Finiten-Differenzen-Methoden zur Approximation von p -Tori

Für die praktische Realisierung führt man gewöhnlich für festes p eine eindeutige Abbildung der Repräsentanten des Multi-Indexes $[j] \in \mathbb{T}_N^p$ auf einen Einfach-Index $k \in \{1, \dots, n \prod_{i=1}^p N_i\}$ ein und erhält aus (3.1) ein nichtlineares Gleichungssystem der Dimension $n \prod_{i=1}^p N_i + (p - m)$. Hier soll aber eine rekursive Definition der Finiten-Differenzen-Diskretisierung angegeben werden, die die algorithmierte Konstruktion des diskretisierten Systems für p -Tori mit beliebiger Dimension p ermöglicht. Diese läßt sich mit modernen Programmiersprachen direkt umsetzen, z.B. mittels Templates in C++.

Die rekursive Diskretisierung wird motiviert durch folgende Beobachtung. Wir betrachten die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Die (nicht erweiterte) Invarianzgleichung lautet für einen Torus mit der in der linken Spalte angegebenen Dimension:

$$\begin{array}{l|l} 0 & 0 = F^0(u) := f(u), \\ 1 & 0 = F^1(u) := f(u) - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_1} = F^0(u) - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_1}, \\ 2 & 0 = F^2(u) := \left(f(u) - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right) - \omega_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} = F^1(u) - \omega_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2}, \\ & \vdots \\ p & 0 = F^p(u) := \left(f(u) - \sum_{i=1}^{p-1} \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \right) - \omega_p \frac{\partial u}{\partial \theta_p} = F^{p-1}(u) - \omega_p \frac{\partial u}{\partial \theta_p}. \end{array}$$

Diese Notation läßt sich auf quasiperiodisch erregte Systeme übertragen. Wir wollen im folgenden die eben angedeutete Idee des sukzessiven Ausklammerns auf das diskretisierte System (3.1) anwenden.

Wir konstruieren zunächst rekursiv die Räume von Gitterfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_N^1(\mathbb{T}_{N_1}^1) &:= \left\{ u_N^1 \mid u_N^1 : \mathbb{T}_{N_1}^1 \rightarrow \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^q) &:= \left\{ u_N^q \mid u_N^q : \mathbb{T}_{N_q}^q \rightarrow \mathbb{G}_N^{q-1}(\mathbb{T}_{N_{q-1}}^1) \right\}, \end{aligned}$$

mit dem Rekursionsparameter q . In $\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^q)$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle u_N^q, v_N^q \rangle_{\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^q)} := \frac{1}{N_q} \sum_{j=1}^{N_q} \langle u_N^q(j), v_N^q(j) \rangle_{\mathbb{G}_N^{q-1}(\mathbb{T}_{N_{q-1}}^1)}$$

und die dadurch induzierten Norm

$$\|u_N^q\|_{\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)}^2 := \langle u_N^q, u_N^q \rangle_{\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)}.$$

Addition und Multiplikation mit einem Skalar werden punktweise definiert:

$$\begin{aligned} (u_N^q + v_N^q)(j) &:= u_N^q(j) + v_N^q(j), \\ (\alpha u_N^q)(j) &:= \alpha u_N^q(j), \end{aligned}$$

für $u_N^q, v_N^q \in \mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)$, $j = 1, \dots, N_q$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Der Diskretisierungsoperator $P_N : [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N^p(\mathbb{T}_{N_p}^1)]^n$ nimmt jetzt die Gestalt

$$(P_N u)(j_1) \dots (j_p) := u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p)$$

an. Identifizieren wir $u_N(j_1, \dots, j_p)$ mit $u_N^p(j_1) \dots (j_p)$, dann sind die Räume $[\mathbb{G}_N^p(\mathbb{T}_{N_p}^1)]^n$ und $[\mathbb{G}_N^p(\mathbb{T}_{N_p}^1)]^n$ isometrisch.

Man kann sich ein Element $u_N^q \in [\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)]^n$ als ein q -dimensionales Feld mit Elementen aus dem \mathbb{R}^n vorstellen und $u_N^q(j) \in [\mathbb{G}_N^{q-1}(\mathbb{T}_{N_{q-1}}^1)]^n$ ist dann ein $(q-1)$ -dimensionales Feld mit Elementen aus dem \mathbb{R}^n . Letztendlich ist die rekursive Definition nur eine andere Art der Indexrechnung und die Schreibweise $u_N^p(j_1) \dots (j_p)$ stark an die rekursive Indizierung mehrdimensionaler Felder in C und C++ angelehnt. *Entscheidend ist, daß die Elemente $u_N^q \in [\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)]^n$ Objekte sind, für die, z.B. durch Operator-Überladung, nur eine Indexabbildung mit eindimensionalen Indizes definiert werden muß.* Dadurch ist z.B. in C++ die Implementierung des Raums $[\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)]^n$ als Template-Klasse mit dem Template-Parameter q möglich.

Wir können jetzt eine Rekursionsformel für die Berechnung des Ausdrucks

$$F_N(u_N, \omega) := f_N(u_N) + D_N u_N$$

angeben. Es seien dazu $\theta \in \mathbb{T}^p$ und $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^p$ zwei allen nachfolgend definierten Abbildungen F_N^q gemeinsam bekannte Variablen. Vor Beginn der Auswertung werde $\bar{\omega}$ mit dem aktuellen Wert von (ω, ω) initialisiert. Der Funktionswert $F_N^p(u_N^p, \omega)$ kann dann nach der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ F_N^1(u_N^1, \omega)(j) \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} h_1 j \\ \downarrow f(u_N^1(j), \theta) - \bar{\omega}_1(\partial_{N,1} u_N^1)(j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N_1, \\ \begin{bmatrix} \theta_q \\ F_N^q(u_N^q, \omega)(j) \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} h_q j \\ \downarrow F_N^{q-1}(u_N^q(j), \omega) - \bar{\omega}_q(\partial_{N,q} u_N^q)(j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N_q, \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit

$$(\partial_{N,q} u_N^q)(j) := \frac{1}{h_q} \sum_{l=1}^o \eta_l (u_N^q(j+l) - u_N^q(j-l)) \tag{3.3}$$

berechnet werden. Man beachte, daß die Schreibweise in (3.2) eine Auswertungsreihenfolge festlegt, d.h. zuerst wird der Wert für θ_q berechnet und danach können die Funktionswerte von $F_N^q(u_N^q, \omega)$ berechnet werden. Bei der Auswertung von $f(u_N^1(j), \theta)$ werden dabei alle überzähligen Werte in θ ignoriert. Bemerkenswert ist weiter, daß in (3.3) sehr gut der Finite-Differenzen-Quotient zu erkennen ist, was die Realisierung als Programm erheblich erleichtert; man muß, im Unterschied zu Differenzensternen, nur mit einem Index arbeiten und hat trotzdem die Berechnung des Differenzenquotienten nur ein mal zu implementieren.

Das erweiterte System (3.1) in rekursiver Darstellung lautet

$$\begin{aligned} F_N^p(u_N^p, \omega) &= 0, \\ \langle \partial_{N,i} P_N \tilde{u}, u_N^p \rangle &= 0, \quad m < i \leq p, \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit

$$(\partial_{N,i} u_N^q)(j) := \begin{cases} \frac{1}{h_q} \sum_{l=1}^o \eta_l (u_N^q(j+l) - u_N^q(j-l)) & \text{für } i = q, \\ \partial_{N,i} u_N^q(j) & \text{für } i < q. \end{cases}$$

Um eine Nullstelle von (3.4) mit Hilfe des Newton-Verfahrens approximieren zu können, müssen wir die Linearisierung von (3.4) berechnen. Auch dafür geben wir einen rekursiven Algorithmus an. Als Nebenprodukt erhalten wir die Struktur der Systemmatrix.

Zunächst ergibt sich folgender prinzipieller Aufbau der Jacobimatrix:

$$\left(\begin{array}{c} F_N^p \\ \langle \partial_{N,i} P_N \tilde{u}, u_N^p \rangle \end{array} \right)' = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F_N^p}{\partial u_N^p} & \frac{\partial F_N^p}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \langle \partial_{N,i} P_N \tilde{u}, u_N^p \rangle}{\partial u_N^p} & 0 \end{array} \right).$$

Eine solche Matrix bezeichnet man als *gerändert*, der Inhalt der Ränder ist leicht anzugeben. Die Spalten von $\frac{\partial F_N^p}{\partial \omega}$ sind gegeben durch:

$$\frac{\partial F_N^p}{\partial \omega}(i) = \partial_{N,i} u_N^p \approx \frac{\partial u}{\partial \theta_i}, \quad i = m+1, \dots, p$$

und die Zeilen von $\frac{\partial \langle \partial_{N,i} P_N \tilde{u}, u_N^p \rangle}{\partial u_N^p}$ durch:

$$\frac{\partial \langle \partial_{N,i} P_N \tilde{u}, u_N^p \rangle}{\partial u_N^p}(i) = \partial_{N,i} P_N \tilde{u} \approx \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, \quad i = m+1, \dots, p.$$

Diese Approximationen der Ableitungen können über die Differenzenquotienten leicht beschafft werden.

Wir berechnen die rekursive Block-Matrix $L_N^p := \frac{\partial F_N^p}{\partial u_N^p}$ von außen nach innen. Für F_N^q gilt die Darstellung

$$F_N^q(u_N^q, \omega)(j) = F_N^{q-1}(u_N^q(j), \omega) - \bar{\omega}_q(\partial_{N,q} u_N^q)(j)$$

mit

$$(\partial_{N,q} u_N^q)(j) := \frac{1}{h_q} \sum_{l=1}^o \eta_l (u_N^q(j+l) - u_N^q(j-l)).$$

Differentiation nach $u_N^q(k)$ liefert für den ersten Summanden jeweils einen nicht-Null-Block in der Diagonalen:

$$L_N^{q-1} := L_N^q(j, j) := \frac{\partial F_N^{q-1}(u_N^q(j), \omega)}{\partial u_N^q(j)}, \quad j = 1, \dots, N_q,$$

den wir wieder rekursiv auswerten. Der zweite Summand liefert für jeden Zeilen-Block j die nicht-Null-Blöcke

$$\begin{aligned} L_N^q(j, j+l) &:= -\frac{\bar{\omega}_q \eta_l}{h_q} I, \quad l = 1, \dots, o, \\ L_N^q(j, j-l) &:= \frac{\bar{\omega}_q \eta_l}{h_q} I, \quad l = 1, \dots, o, \end{aligned}$$

wobei I die Einheitsmatrix mit $I : u_N^{q-1} \mapsto u_N^{q-1}$ ist. Für den zentralen Differenzenquotienten mit $\{o = 1, \eta_1 = \frac{1}{2}\}$ erhalten wir mit $\alpha_q := \frac{\bar{\omega}_j}{2h_q}$ speziell die zirkulante Block-Toeplitz-Struktur

$$L_N^q = \begin{pmatrix} L_N^q(1,1) & -\alpha_q I & & \alpha_q I \\ \alpha_q I & L_N^q(2,2) & -\alpha_q I & \\ & \alpha_q I & & \\ & & \ddots & \\ -\alpha_q I & & & -\alpha_q I \\ & \alpha_q I & L_N^q(N_q, N_q) & \end{pmatrix},$$

wobei wir die Kongruenz $j \cong j + N_q$ für alle $j \in \mathbb{T}_{N_q}^1$ ausgenutzt haben, um eine endliche Matrixdarstellung zu gewinnen. Man beachte, daß L_N^q ohne die Diagonalblöcke offensichtlich schiefsymmetrisch ist.

Die Block-Matrizen L_N^{q-1} werden nun rekursiv nach dem gleichen Schema bestimmt. Die Matrizen $L_N^1(j, j)$ für $j = 1, \dots, N_1$ erhält man dann wie folgt. Nach Definition ist

$$F_N^1(u_N^1(j), \omega) := f(u_N^1(j), \theta) - \bar{\omega}_1(\partial_{N,1} u_N^1)(j).$$

Für $L_N^1(j, j)$ gewinnen wir daraus die Darstellung

$$L_N^1(j, j) := \frac{\partial f}{\partial x}(u_N^1(j), \theta).$$

Für die Berechnung der Jacobimatrix $L_N^p := \frac{\partial F_N^p}{\partial u_N^p}$ an der Stelle (u_N^p, ω) erhalten wir schließlich die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ L_N^1(j, k) \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} h_1 j \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(u_N^1(j), \theta) & \text{für } k = j \\ -\frac{\bar{\omega}_1 \eta_l}{h_1} I & \text{für } k = j + l \text{ und } l = 1, \dots, o \\ \frac{\bar{\omega}_1 \eta_l}{h_1} I & \text{für } k = j - l \text{ und } l = 1, \dots, o \end{array} \right. \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \theta_q \\ L_N^q(j, k) \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} h_q j \\ \left\{ \begin{array}{ll} L_N^{q-1} & \text{für } k = j \\ -\frac{\bar{\omega}_q \eta_l}{h_q} I & \text{für } k = j + l \text{ und } l = 1, \dots, o \\ \frac{\bar{\omega}_q \eta_l}{h_q} I & \text{für } k = j - l \text{ und } l = 1, \dots, o \end{array} \right. \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.1.2 Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im Fall $p = m$

Wir wollen wieder eine kompakte Notation einführen und definieren daher analog zu Abschnitt 2.4 die Operatoren $A : \mathcal{H}_{s,0}^n \rightarrow \mathcal{H}_{s,0}^n$:

$$(Au)(\theta) := \frac{\partial f}{\partial x}(u^*(\theta), \theta) u(\theta)$$

und $D : \mathcal{H}_{s+1,0}^n \rightarrow \mathcal{H}_{s,0}^n$:

$$(Du)(\theta) := - \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) - \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta),$$

wobei wir die Abhängigkeit des Operators D von ω nicht explizit vermerken. Man beachte, daß für $u^* \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$ auch der Ausdruck $A(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^*(\theta), \theta)$ eine sinnvolle Interpretation besitzt und wir damit $(Au)(\theta) = A(\theta)u(\theta)$ schreiben können. Da keine Mißverständnisse auftreten können, werden wir beide Interpretationen von A benutzen, ohne ein neues Symbol einzuführen.

Weiter definieren wir die $(p - m)$ -dimensionalen linearen Unterräume $K \subseteq \mathcal{H}_{s+1,0}^n$:

$$K := \text{span} \{k_{m+1}, \dots, k_p\}, \quad k_i := \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}, \quad m < i \leq p$$

und $\tilde{K} \subseteq \mathcal{H}_{s+1,0}^n$:

$$\tilde{K} := \text{span} \left\{ \tilde{k}_{m+1}, \dots, \tilde{k}_p \right\}, \quad \tilde{k}_i := \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, \quad m < i \leq p,$$

sowie die Operatoren $F : (\mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m}) \rightarrow \mathcal{H}_{s,0}^n$:

$$F(u, \omega)(\theta) := f(u(\theta), \theta) + (Du)(\theta),$$

$b : \mathcal{H}_{s+1,0}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p-m}$:

$$b(u) := \begin{pmatrix} \langle \tilde{k}_{m+1}, u \rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{k}_p, u \rangle \end{pmatrix}$$

und $\overset{\times}{F} : (\mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m}) \rightarrow (\mathcal{H}_{s,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m})$:

$$\overset{\times}{F}(u, \omega) := \begin{pmatrix} F(u, \omega) \\ b(u) \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen erhält die erweiterte Invarianzgleichung im $\mathcal{H}_{s,0}^n$ die Form

$$\overset{\times}{F}(u, \omega) = 0. \tag{3.5}$$

Die Linearisierung von $\overset{\times}{F}$ an der Stelle (u^*, ω^*) ist gegeben durch den Operator $\overset{\times}{L} : (\mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m}) \rightarrow (\mathcal{H}_{s,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m})$:

$$\overset{\times}{L}(u, \omega) := (\overset{\times}{F}'(u^*, \omega^*))(u, \omega) = \begin{pmatrix} L & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $L : \mathcal{H}_{s+1,0}^n \rightarrow \mathcal{H}_{s,0}^n$:

$$Lu := Au + Du,$$

und $a : \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}_{s,0}^n$:

$$a(\omega) := - \sum_{i=m+1}^p \omega_i k_i$$

und es gilt $\ker(L) = K$.

Wir führen für die Diskretisierung von (3.5) ebenfalls eine kompakte Schreibweise ein (vgl. auch (3.1)) :

$$\overset{\times}{F}_N(u_N, \omega_N) := \begin{pmatrix} F_N(u_N, \omega_N) \\ b_N(u_N) \end{pmatrix},$$

wobei wir zur Unterscheidung die zweite Variable des diskretisierten Problems mit $\omega_N \in \mathbb{R}^{p-m}$ bezeichnen, man beachte aber, daß $\omega, \omega_N \in \mathbb{R}^{p-m}$ sind, mit $F_N : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$F_N(u_N, \omega_N) := f_N(u_N) + D_N u_N$$

und

$$b_N(u_N) := \begin{pmatrix} \langle P_N \tilde{k}_{m+1}, u_N \rangle \\ \vdots \\ \langle P_N \tilde{k}_p, u_N \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Diskretisierung von (3.5) lautet damit

$$\overset{\times}{F}_N(u_N, \omega_N) = 0. \quad (3.6)$$

Die Linearisierung von $\overset{\times}{F}_N$ an der Stelle $(P_N u^*, \omega^*)$ ist gegeben durch den Operator $\overset{\times}{L}_N : ([\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m}) \rightarrow ([\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m})$:

$$\overset{\times}{L}_N(u_N, \omega_N) := (\overset{\times}{F}'_N(P_N u^*, \omega^*))(u_N, \omega_N) = \begin{pmatrix} L_N & a_N \\ b_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_N \\ \omega_N \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $L_N : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$L_N u_N := A_N u_N + D_N u_N,$$

$A_N : [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$(A_N u_N)(j_1, \dots, j_p) := A(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) u_N(j_1, \dots, j_p)$$

und $a_N : \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$:

$$a_N(\omega_N) := - \sum_{i=m+1}^p \omega_{N,i} P_N k_i.$$

Die Gleichungen (3.5) und (3.6) hängen über das Approximationsschema

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m} & \xrightarrow{\overset{\times}{F}} & \mathcal{H}_{s,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m} \\ P_N \downarrow & & \downarrow P_N \\ [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m} & \xrightarrow{\overset{\times}{F}_N} & [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m} \end{array} \quad (3.7)$$

zusammen. Für die Gleichung $\overset{\times}{F}_N(u_N, \omega_N) = 0$ gilt nun der bekannte grundlegende Existenz- und Konvergenzsatz, vgl. z.B. [KEL75, STE73, VAI76, VOGT83, ZEIIIB90] :

3.1 Satz Für die Aufgaben (3.5) und (3.6) gelten folgende Voraussetzungen:

1. (Existenz und Eindeutigkeit) Die Gleichung $\check{F}(u, \omega) = 0$ besitze eine reguläre (isolierte) Lösung $(u^*, \omega^*) \in \mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m}$, lokal eindeutig in $B((u^*, \omega^*), R) \subset \mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m}$.
2. (Normkonsistenz) Der Diskretisierungsoperator P_N ist normkonsistent, d.h. es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N u\| = \|u\|.$$

Die Operatoren P_N sind dann gleichmäßig beschränkt durch $\|P_N\| \leq P$.

3. (Fréchet-Differenzierbarkeit) Die Operatoren \check{F} und \check{F}_N sind stetig Fréchet-differenzierbar auf den offenen Kugeln $B((u^*, \omega^*), R) \subset \mathcal{H}_{s+1,0}^n \times \mathbb{R}^{p-m}$ bzw. $B((P_N u^*, \omega^*), PR) \subset [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m}$.
4. (Konsistenz) \check{F}_N ist konsistent mit \check{F} mit der Ordnung $q > 0$ an der Stelle (u^*, ω^*) , d.h. es existiert eine von N unabhängige positive Konstante C_1 , so daß die Ungleichung

$$\|P_N \check{F}(u^*, \omega^*) - \check{F}_N(P_N u^*, \omega^*)\| \leq C_1 h^q$$

für alle $N \geq M_1$ mit einer Konstanten $M_1 \in \mathbb{N}$ gilt.

5. (Stabilität) \check{L}_N ist regulär und die Inverse \check{L}_N^{-1} ist gleichmäßig beschränkt, d.h. es existiert eine von N unabhängige positive Konstante C_2 , so daß die Abschätzung

$$\|\check{L}_N^{-1}\| \leq C_2^{-1}$$

für alle $N \geq M_2$ mit einer Konstanten $M_2 \in \mathbb{N}$ gilt.

6. (Lipschitz-Stetigkeit) Die Operatoren \check{F}'_N sind gleichmäßig Lipschitz-stetig auf den offenen Kugeln $B((P_N u^*, \omega^*), PR) \subset [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n \times \mathbb{R}^{p-m}$, d.h. es existiert eine von N unabhängige positive Konstante C_3 , so daß

$$\|\check{F}'_N(u, \omega) - \check{F}'_N(v, \psi)\| \leq C_3 \|(u, \omega) - (v, \psi)\|$$

für alle $(u, \omega), (v, \psi) \in B((P_N u^*, \omega^*), PR)$ gilt.

Dann existierten Konstanten $M_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 \geq \max\{M_1, M_2\}$, und $r \in \mathbb{R}$, $R \geq r > 0$, so daß für alle $N \geq M_0$ gilt:

1. Die diskreten Gleichungen $\check{F}_N(u_N, \omega_N) = 0$ besitzen eine eindeutige Lösung $(u_N^*, \omega_N^*) \in B((P_N u^*, \omega^*), PR)$.
2. (u_N^*, ω_N^*) konvergiert diskret mit der Ordnung q gegen die Lösung (u^*, ω^*) für $N \rightarrow \infty$. Es gilt die Fehlerabschätzung $\|(u_N^*, \omega_N^*) - (P_N u^*, \omega^*)\| \leq C_1 C_2^{-1} h^q$.

Wir wollen die Konvergenz unseres Verfahrens im Fall $p = m$ nachweisen, im Fall $p > m$ ist der Nachweis der Stabilität noch offen. Wir wollen wieder die rationale Unabhängigkeit von Ω (V2.3), die Existenz einer regulären (isolierten) quasiperiodischen Lösung (V2.7), die hinreichende Glattheit der rechten Seite f (V2.8), die starke Positivität von A im \mathcal{H}_s^n (V2.15) und zusätzlich die gleichmäßige starke Positivität von $A(\theta)$ voraussetzen:

V3.2 Die Jacobimatrix A ist gleichmäßig stark positiv, d.h. es gilt $\langle A(\theta)x, x \rangle \geq c_5 \|x\|^2$ für alle $\theta \in \mathbb{T}^p$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer von θ unabhängigen Konstanten $c_5 > 0$.

Im Vergleich zur starken Positivität von A im \mathcal{H}_s^n kann man diese Bedingung leicht geometrisch interpretieren. Ist der symmetrische Anteil $S(\theta) := \frac{1}{2}(A(\theta) + A(\theta)^T)$ von $A(\theta)$ für jedes θ positiv definit, dann ist $A(\theta)$ stark positiv (Satz 2.14 für Matrizen). Insbesondere gilt damit $\Re(\mu_i) \geq \min_{\lambda_j \in \sigma(S(\theta))} \{\lambda_j\} > 0$ für alle $\mu_i \in \sigma(A(\theta))$ und alle $\theta \in \mathbb{T}^p$ (vgl. Satz von Bendixson, z.B. in [H-B02] auf S. 209), d.h. der invariante Torus ist abstoßend, bzw. nach Zeitumkehr anziehend.

Wir weisen im folgenden nach, daß unser Verfahren die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt.

Existenz und Eindeutigkeit. Wir haben in V2.7 die Existenz einer regulären (isolierten, lokal eindeutigen) quasiperiodischen Lösung des Modellproblems (2.2) vorausgesetzt. Daraus folgt mit Satz 2.6 und der Äquivalenz 2.30 die Existenz einer regulären Lösung $u^* \in [C^r(\mathbb{T}^p)]^n$ der Invarianzgleichung.

Unter der Voraussetzung der starken Positivität von A im \mathcal{H}_s^n haben wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u^* \in \mathcal{H}_{s+1}^n \subseteq \mathcal{H}_s^n$ des linearen kontinuierlichen Problems

$$Lu = r$$

mit $L := A + D$ für $r \in \mathcal{H}_s^n$ sogar explizit gezeigt (Satz 2.17). Die Lösung u^* dieser Gleichung ist wegen $\|L^{-1}\| \leq c_1^{-1}$ (Satz 2.14) regulär.

Es existiert also eine Konstante $R > 0$, so daß $F(u) \neq 0$ für alle $u \in B(u^*, R)$, $u \neq u^*$, ist.

Normkonsistenz. Wir zeigen, daß das Skalarprodukt von $[G_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$ mit dem Skalarprodukt von $\mathcal{H}_{s,0}^n$ konsistent ist. Daraus folgt dann die Normkonsistenz. Es gilt das Lemma:

3.3 Lemma Für alle $x, y \in [C^r(\mathbb{T}^p)]^n$, $r = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, ist $\langle P_N x, P_N y \rangle$ konsistent mit $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^n}$ mit der Ordnung r , d.h.

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^n} - \langle P_N x, P_N y \rangle = \mathcal{O}(h^r).$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^n} - \langle P_N x, P_N y \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^1} - \langle P_N x_i, P_N y_i \rangle \right).$$

Wir betrachten jeden Summanden der rechten Seite einzeln, wobei wir den Index i der Komponente weglassen:

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^1} - \langle P_N x, P_N y \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} x(\theta) y(\theta) d\theta - \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^p} x(i_1 h_1, \dots, i_p h_p) y(i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \end{aligned}$$

und vereinfachen die Schreibweise der rechten Seite, indem wir $z(\theta) := x(\theta)y(\theta)$ setzen. Durch vollständige Induktion über p zeigen wir im folgenden zunächst, daß

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} z(\theta) d\theta = \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^p} z(i_1 h_1, \dots, i_p h_p) + \mathcal{O}(h^r) \quad (3.8)$$

gilt.

IA: Es sei $p = 1$. Wegen $z \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^1)$ erhalten wir aus der Euler-MacLaurin'schen Summenformel (vgl. [PLA00], Theorem 6.21 auf S. 110, oder [KRE98], Theorem 9.26 und Corollary 9.27 auf S. 209f.) die Fehlerdarstellung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} z(\theta) d\theta = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} z(i h_1) - \frac{B_r}{r!} h_1^r z^{(r)}(\xi)$$

mit den Bernoulli-Zahlen B_r und einer Zwischenstelle $\xi \in \mathbb{T}^1$, und damit die Induktionsbehauptung (3.8) für $p = 1$.

IS: Die Behauptung gelte für $p - 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} z(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_{\mathbb{T}^{p-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} z(\theta_1, \theta') d\theta_1 d\theta' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_{\mathbb{T}^{p-1}} \left(\frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} z(i h_1, \theta') - \frac{B_r}{r!} h_1^r \frac{\partial^r z}{\partial \theta_1^r}(\xi, \theta') \right) d\theta' \\ &= \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_{\mathbb{T}^{p-1}} z(i h_1, \theta') d\theta' - \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \frac{B_r}{r!} h_1^r \int_{\mathbb{T}^{p-1}} \frac{\partial^r z}{\partial \theta_1^r}(\xi, \theta') d\theta' \end{aligned}$$

mit einer Zwischenstelle $\xi \in \mathbb{T}^1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_{\mathbb{T}^{p-1}} z(ih_1, \theta') d\theta' = \frac{1}{\prod_{j=2}^p N_j} \sum_{j \in \mathbb{T}_N^{p-1}} z(i_1 h_1, j_1 h_2, \dots, j_{p-1} h_p) + \mathcal{O}(h^r)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} z(\theta) d\theta &= \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{\prod_{j=2}^p N_j} \sum_{j \in \mathbb{T}_N^{p-1}} z(i_1 h_1, j_1 h_2, \dots, j_{p-1} h_p) + \mathcal{O}(h^r) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^p} z(i_1 h_1, \dots, i_p h_p) + \mathcal{O}(h^r) \end{aligned}$$

und damit die Induktionsbehauptung (3.8).

Es gilt also

$$\langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^1} - \langle P_N x_i, P_N y_i \rangle = \mathcal{O}(h^r).$$

Einsetzen der umgeformten Summanden liefert schließlich

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^n} - \langle P_N x, P_N y \rangle &= \sum_{i=1}^n \left(\langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}^1} - \langle P_N x_i, P_N y_i \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{O}(h^r) = \mathcal{O}(h^r), \end{aligned}$$

also die Konsistenz des Skalarproduktes mit der Ordnung r . \square

Die Normkonsistenz für $x \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$, $r = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, folgt nun aus

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle_{\mathcal{H}_0^n} = \langle P_N x, P_N x \rangle + \mathcal{O}(h^r) = \|P_N x\|^2 + \mathcal{O}(h^r).$$

Es folgt die Existenz einer Konstanten P mit $\|P_N\| \leq P$ (vgl. [VAI76] S. 8, bzw. [VOGT83], Satz 2.7 auf S. 3).

Fréchet-Differenzierbarkeit. Die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit von F wurde bereits in Lemma 2.10 gezeigt. Für F_N gilt das Lemma:

3.4 Lemma *Unter der Voraussetzung V2.8: $f \in [\mathcal{C}^{s+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)]^n$, $s \in \mathbb{N}$, $s > r - 1 + \frac{p}{2}$, ist F_N für $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, mindestens 2-mal stetig Fréchet-differenzierbar. Es gelten die Darstellungen*

$$F'_N(u_N) := \frac{\partial f_N}{\partial u_N}(u_N) + D_N \quad \text{und} \quad F''_N(u_N) := \frac{\partial^2 f_N}{\partial u_N^2}(u_N).$$

Beweis. Es sei $i \in \mathbb{T}_N^p$. Nach Definition ist $F_N(u_N) = f_N(u_N) + D_N u_N$ mit

$$\begin{aligned} (f_N(u_N))(i) &= f(u_N(i), i_1 h_1, \dots, i_m h_m), \\ D_N u_N &= - \left(\sum_{i=1}^m \Omega_i \partial_{N,i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \partial_{N,i} \right) u_N, \\ \partial_{N,i} &= \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l (E_i^l - E_i^{-l}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $r \geq 1$ und wir können o.B.d.A. $p \geq 1$ annehmen. Damit ist $s > \frac{1}{2}$, d.h. es ist $s+2 \geq 3$. Also ist f nach Voraussetzung mindestens 3-mal stetig differenzierbar, es existieren somit die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(u_N(i), i_1 h_1, \dots, i_m h_m)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u_N(i), i_1 h_1, \dots, i_m h_m)$. Für $i, j, k \in \mathbb{T}_N^p$ erhalten wir damit

$$\left(\frac{\partial f_N}{\partial u_N}(u_N) \right) (i, j) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(u_N(i), i_1 h_1, \dots, i_m h_m) & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 f_N}{\partial u_N^2}(u_N) \right) (i, j, k) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u_N(i), i_1 h_1, \dots, i_m h_m) & \text{für } i = j = k, \\ 0 & \text{für } i = j \neq k, \end{cases}$$

wobei wegen $(\frac{\partial f_N}{\partial u_N}(u_N))(i, j) = 0$ für $i \neq j$ in der letzten Fallunterscheidung nur $i = j$ betrachtet werden muß. Es folgt die Existenz der stetigen Fréchet-Ableitungen f'_N und f''_N .

Weiter ist D_N ein linearer Operator, der selbst nicht von u_N abhängt. Es ist daher $(D_N u_N)' = D_N$ und $(D_N u_N)'' = 0$. \square

Konsistenz. Wir wollen Finite-Differenzen-Verfahren mit Hilfe bekannter zentraler Differenzenquotienten für Funktionen $x \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ konstruieren. Wir zeigen daher zunächst das folgende Lemma:

3.5 Lemma *Es sei für $x \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ der Differenzenquotient*

$$\Delta x(t) := \frac{1}{h} \sum_{l=1}^o \eta_l (x(t+lh) - x(t-lh)) \quad (3.9)$$

für $h \in [0, h_0(t))$, mit stetigem $h_0(t) > 0$, konsistent mit der Ordnung q , d.h. es existiert eine stetige Funktion C , so daß

$$\left| \frac{dx}{dt}(t) - \Delta x(t) \right| \leq C(t) h^q$$

mit $0 \leq C(t) < \infty$ gilt. Dann existieren Konstanten $M_1 \in \mathbb{N}$ und $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, $\tilde{C} > 0$, so daß für $N \geq M_1$ und $u \in [C^r(\mathbb{T}^p)]^n$ der Differenzenoperator D_N konsistent mit D mit der Ordnung q ist, d.h. es gilt

$$\|P_N D u - D_N P_N u\| \leq \tilde{C} h^q.$$

Beweis. Es sei $\tau_N := P_N D u - D_N P_N u$. Wir berechnen τ_N punktweise:

$$\begin{aligned} \tau_N(j_1, \dots, j_p) &= (P_N D u)(j_1, \dots, j_p) - (D_N P_N u)(j_1, \dots, j_p) \\ &= - \sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) + \sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \partial_{N,i}(P_N u)(j_1, \dots, j_p) \\ &= \sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \underbrace{\left[\partial_{N,i}(P_N u)(j_1, \dots, j_p) - \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) \right]}_{=: \kappa_i(j_1, \dots, j_p)} \\ &= \sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \kappa_i(j_1, \dots, j_p). \end{aligned}$$

Weiter gilt für die k -te Komponente von $\kappa_i(j_1, \dots, j_p)$:

$$\begin{aligned} \|\kappa_{i,k}(j_1, \dots, j_p)\| &= \\ &= \left\| \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l \left((E_i - E_i^{-1})(P_N u_k) \right) (j_1, \dots, j_p) - \frac{\partial u_k}{\partial \theta_i}(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l \left((P_N u_k) (j_1, \dots, j_i + l, \dots, j_p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (P_N u_k) (j_1, \dots, j_i - l, \dots, j_p) \right) - \frac{\partial u_k}{\partial \theta_i}(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l \left(u_k(j_1 h_1, \dots, j_i h_i + l h_i, \dots, j_p h_p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u_k(j_1 h_1, \dots, j_i h_i - l h_i, \dots, j_p h_p) \right) - \frac{\partial u_k}{\partial \theta_i}(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) \right\| \\ &= \left\| \Delta u_k(\dots, j_i h_i, \dots) - \frac{\partial u_k}{\partial \theta_i}(\dots, j_i h_i, \dots) \right\| \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, n$. Nach Voraussetzung existiert für jede partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$, $1 \leq i \leq p$, und jedes $\theta \in \mathbb{T}^p$ ein Intervall $[0, h_0(\theta))$, $h_0(\theta) > 0$, so daß der Differenzenquotient an jeder Stelle $\theta \in \mathbb{T}^p$ konsistent mit Ordnung q ist. Da \mathbb{T}^p

kompakt und h_0 stetig ist, existiert damit für jedes i ein $h_{0,i} > 0$:

$$h_{0,i} = \min_{\theta \in \mathbb{T}^p} h_0(\theta),$$

so daß die Fehlerabschätzung

$$\left\| \Delta u_k(\dots, j_i h_i, \dots) - \frac{\partial u_k}{\partial \theta_i}(\dots, j_i h_i, \dots) \right\| \leq C_{i,k}(j_1, \dots, j_p) h_i^q$$

für alle $h_i \in [0, h_{0,i})$ gilt. Da auch $M := \{1, \dots, p\} \times \mathbb{T}^p \times \{1, \dots, n\}$ kompakt und $C_{i,k}$ stetig ist, schließen wir mit einer analogen Überlegung auf die Existenz des Maximums

$$\widehat{C} := \max_{(i,\theta,k) \in M} C_{i,k}(\theta).$$

Damit gilt mit $h = \max\{h_1, \dots, h_p\}$ die Abschätzung

$$\|\kappa_i(j_1, \dots, j_p)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\kappa_{i,k}(j_1, \dots, j_p)\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \widehat{C}^2 h^{2q} = n \widehat{C}^2 h^{2q}$$

und wir erhalten für

$$\begin{aligned} \|\tau_N\|^2 &= \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \|\tau_N(j_1, \dots, j_p)\|^2 \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \left\| \sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \kappa_i(j_1, \dots, j_p) \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \left\| \sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \|\kappa_i(j_1, \dots, j_p)\| \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \left(\sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \right)^2 n \widehat{C}^2 h^{2q} \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \left(\sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} 1 \right) \left(\sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \right)^2 n \widehat{C}^2 h^{2q} \\ &= n \widehat{C}^2 h^{2q} \left(\sum_{i=1}^p \bar{\omega}_i \right)^2, \end{aligned}$$

woraus schließlich die Fehlerabschätzung

$$\|\tau_N\| \leq \left(\sqrt{n} \widehat{C} \sum_{i=1}^p |\bar{\omega}_i| \right) h^q = \tilde{C} h^q$$

folgt. Setzen wir noch $M_1 := \lceil 2\pi / \min\{h_{0,1}, \dots, h_{0,p}\} \rceil$, dann gilt wegen $N = 2\pi / \max\{h_1, \dots, h_p\}$ die Behauptung offensichtlich für alle $N \geq M_1$. \square

Mit diesem Lemma können wir nun die Konsistenz des Diskretisierungsverfahrens zeigen. Es gilt das Lemma:

3.6 Lemma *Der Operator D_N sei für alle $N \geq M_1$ konsistent mit D mit der Ordnung $q > 0$. Dann ist F_N für alle $N \geq M_1$ konsistent mit F mit der Ordnung q an der Stelle u^* . Es gilt die Ungleichung*

$$\|P_N F(u^*) - F_N(P_N u^*)\| \leq \tilde{C} h^q$$

mit den Konstanten M_1 und \tilde{C} aus Lemma 3.5.

Beweis. Nach Definition ist für alle $j \in \mathbb{T}_N^p$

$$\begin{aligned} (P_N F(u^*)) (j) &= P_N (f(u^*(\theta), \theta) + Du^*)(j) \\ &= (f(u^*(j_1 h_1, \dots, j_p h_p), j_1 h_1, \dots, j_m h_m) + P_N Du^*)(j) \\ &= (f_N(P_N u^*) + P_N Du^*)(j). \end{aligned}$$

Mithin gilt $P_N F(u^*) = f_N(P_N u^*) + P_N Du^*$ und es folgt

$$\begin{aligned} \|P_N F(u^*) - F_N(P_N u^*)\| &= \|f_N(P_N u^*) + P_N Du^* - f_N(P_N u^*) - D_N P_N u^*\| \\ &= \|P_N Du^* - D_N P_N u^*\| \end{aligned}$$

und daraus zusammen mit Lemma 3.5 die Behauptung. \square

Konsistente Verfahren der Form (3.9) sind bekannt bzw. leicht zu konstruieren (vgl. [HER01] S. 419ff.). Wir geben hier die Verfahren an, die implementiert wurden.

o	η_l				Ordnung	für
1	$\frac{1}{2}$				2	$x \in \mathcal{C}^3 \mathbb{R}$
2	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$			4	$x \in \mathcal{C}^5 \mathbb{R}$
3	$\frac{45}{60}$	$-\frac{9}{60}$	$\frac{1}{60}$		6	$x \in \mathcal{C}^7 \mathbb{R}$
4	$\frac{672}{840}$	$-\frac{168}{840}$	$\frac{32}{840}$	$-\frac{3}{840}$	8	$x \in \mathcal{C}^9 \mathbb{R}$

Stabilität. Wir wollen die Stabilität, d.h. die gleichmäßige Beschränktheit von L_N^{-1} mit Hilfe von Satz 2.14 zeigen. Dazu beweisen wir zunächst die folgenden beiden Lemmata:

3.7 Lemma *Unter der Voraussetzung V3.2 der gleichmäßigen starken Positivität von $A(\theta)$ ist A_N stark positiv. Es gilt $\langle A_N u_N, u_N \rangle \geq c_5 \|u_N\|^2$ mit der Konstanten $c_5 > 0$ aus V3.2.*

Beweis. Es gilt nach Voraussetzung $\langle A(\theta)x, x \rangle \geq c_5 \|x\|^2$ und damit:

$$\begin{aligned}
& \langle A_N u_N, u_N \rangle_{\mathbb{T}_N^p} = \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j \in \mathbb{T}_N^p} \langle A_N(j) u_N(j), u_N(j) \rangle \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j \in \mathbb{T}_N^p} \langle A(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p), u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) \rangle \\
&\geq \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j \in \mathbb{T}_N^p} c_5 \langle u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p), u(j_1 h_1, \dots, j_p h_p) \rangle \\
&= c_5 \frac{1}{\prod_{i=1}^p N_i} \sum_{j \in \mathbb{T}_N^p} \langle u_N(j), u_N(j) \rangle \\
&= c_5 \|u_N\|_{\mathbb{T}_N^p}^2,
\end{aligned}$$

da jeder Summand nach unten abgeschätzt werden kann. \square

3.8 Lemma Für $N \geq 2o + 1$ ist D_N schiefadjungiert.

Beweis. Um pathologische Fälle auszuschließen, in denen \mathbb{T}_N^p in einer Richtung weniger Gitterpunkte als der Differenzenquotient Stützstellen hat, wählen wir $N \geq M_2 \geq 2o + 1$.

Wir zeigen zunächst, daß der inverse Operator E_i^{-1} von E_i gleich dem Adjungierten E_i^* , d.h. $E_i^* = E_i^{-1}$ ist. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
& \langle E_i u_N, v_N \rangle = \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^p N_k} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_i=1}^{N_i} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \langle u_N(\dots, j_i + 1, \dots), v_N(\dots, j_i, \dots) \rangle.
\end{aligned}$$

Die Indexverschiebung $j_i + 1 \rightarrow \tilde{j}_i$ ergibt

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^p N_k} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{\tilde{j}_i=2}^{N_i+1} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \langle u_N(\dots, \tilde{j}_i, \dots), v_N(\dots, \tilde{j}_i - 1, \dots) \rangle.$$

Nun gilt aber wegen $\tilde{j} \in \mathbb{Z}/N_i$ die Kongruenz $1 \cong N_i + 1 \pmod{N_i}$, so daß alle Summanden mit $\tilde{j} = N_i + 1$ gleich den Summanden mit $\tilde{j} = 1$ sind. Daher kann die Summe umgeordnet werden:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^p N_k} \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{\tilde{j}_i=1}^{N_i} \cdots \sum_{j_p=1}^{N_p} \langle u_N(\dots, \tilde{j}_i, \dots), v_N(\dots, \tilde{j}_i - 1, \dots) \rangle \\
&= \langle u_N, E_i^{-1} v_N \rangle.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
(\partial_{N,i})^* &= \left(\frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l (E_i^l - E_i^{-l}) \right)^* &= \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l \left((E_i^l)^* - ((E_i^*)^l)^* \right) \\
&= \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l \left((E_i^*)^l - ((E_i^*)^*)^l \right) &= \frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l \left((E_i^{-1})^l - E_i^l \right) \\
&= -\frac{1}{h_i} \sum_{l=1}^o \eta_l (E_i^l - E_i^{-l}) &= -\partial_{N,i}.
\end{aligned}$$

und daraus schließlich:

$$(D_N)^* = \left(-\sum_{i=1}^p \omega_i \partial_{N,i} \right)^* = -\sum_{i=1}^p \omega_i (\partial_{N,i})^* = \sum_{i=1}^p \omega_i \partial_{N,i} = -D_N. \quad \square$$

Es gelten also die auf den Raum der Gitterfunktionen übertragenen Voraussetzungen von Satz 2.14 an die Operatoren A_N , D_N und L_N und wir erhalten als Folgerung das Lemma:

3.9 Lemma *Die inversen Operatoren L_N^{-1} existieren für $N \geq M_2 \geq 2o + 1$ und sind gleichmäßig durch $\|L_N^{-1}\| \leq c_5^{-1}$ beschränkt.*

Lipschitz-Stetigkeit. F_N ist 2-mal stetig Fréchet-differenzierbar (Lemma 3.4), woraus die lokale Lipschitz-Stetigkeit von F'_N folgt, d.h. F'_N ist insbesondere auf jeder offenen Kugel $B(P_N u^*, r) \subset [\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)]^n$ mit $r > 0$ Lipschitz-stetig. Man kann als Lipschitz-Konstante

$$C_3 := \sup_{u_N \in B(P_N u^*, r)} \|F''_N(u_N)\|$$

wählen (vgl. z.B. Theorem 3.9 in [AE99] auf S. 173).

Als Zusammenfassung der vorangegangenen Untersuchungen formulieren wir den folgenden Konvergenzsatz:

3.10 Satz (Konvergenz der Finite-Differenzen-Methode)

Das Finite-Differenzen-Verfahren $F_N(u_N) = 0$ sei konsistent mit der Ordnung $q = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$, es existiere eine reguläre Lösung $u^* \in [\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)]^n$ der kontinuierlichen Aufgabe $F(u) = 0$ mit $r \geq q + 1$ und die Matrix $\partial_x f(u^*(\theta), \theta)$ sei gleichmäßig stark positiv für alle $\theta \in \mathbb{T}^p$.

Dann existieren Konstanten $M_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 \geq \max\{M_1, M_2\}$, und $r \in \mathbb{R}$, $R \geq r > 0$, so daß für alle $N \geq M_0$ gilt:

1. Die diskretisierten Gleichungen $F_N(u_N) = 0$ besitzen jeweils eine eindeutige Lösung $u_N^* \in B(P_N u^*, Pr)$.
2. Die Gitterfunktionen u_N^* konvergieren diskret mit der Ordnung q gegen die Lösung u^* für $N \rightarrow \infty$. Es gilt die Fehlerabschätzung $\|u_N^* - P_N u^*\| \leq Ch^q$ mit $C := \tilde{C}c_5^{-1}$ und den oben definierten Konstanten.

3.1.3 Ein Testbeispiel

Um die Implementierung der Finiten-Differenzen-Methode zu testen, konstruieren wir eine Differentialgleichung mit einem bekannten quasiperiodischen 2-Torus. Wir gehen dazu vom System zweier entkoppelter Oszillatoren

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 - \omega_1 x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\
 \dot{x}_2 &= \omega_1 x_1 - \lambda_1 x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \\
 \dot{y}_1 &= -\lambda_2 y_1 - \omega_2 y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2), \\
 \dot{y}_2 &= \omega_2 y_1 - \lambda_2 y_2 + y_2(y_1^2 + y_2^2)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

aus und addieren jeweils die Identitäten

$$\begin{aligned}
 0 &= -x_2 + \sqrt{\lambda_1} \sin \omega_1 t, \\
 0 &= x_1 - \sqrt{\lambda_1} \cos \omega_1 t, \\
 0 &= -y_2 + \sqrt{\lambda_2} \sin \omega_2 t, \\
 0 &= y_1 - \sqrt{\lambda_2} \cos \omega_2 t,
 \end{aligned}$$

die aus der speziellen Lösung

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt{\lambda_1} \cos \omega_1 t, & x_2 &= \sqrt{\lambda_1} \sin \omega_1 t, \\
 y_1 &= \sqrt{\lambda_2} \cos \omega_2 t, & y_2 &= \sqrt{\lambda_2} \sin \omega_2 t
 \end{aligned}$$

von (3.10) gewonnen werden. Für irrationales Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ erhalten wir dadurch das quasiperiodisch erregte System

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 - (\omega_1 + 1)x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) + \sqrt{\lambda_1} \sin \omega_1 t, \\
 \dot{x}_2 &= (\omega_1 + 1)x_1 - \lambda_1 x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) - \sqrt{\lambda_1} \cos \omega_1 t, \\
 \dot{y}_1 &= -\lambda_2 y_1 - (\omega_2 + 1)y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2) + \sqrt{\lambda_2} \sin \omega_2 t, \\
 \dot{y}_2 &= (\omega_2 + 1)y_1 - \lambda_2 y_2 + y_2(y_1^2 + y_2^2) - \sqrt{\lambda_2} \cos \omega_2 t
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

mit dem quasiperiodischen invarianten 2-Torus

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt{\lambda_1} \cos \theta_1, & x_2 &= \sqrt{\lambda_1} \sin \theta_1, \\
 y_1 &= \sqrt{\lambda_2} \cos \theta_2, & y_2 &= \sqrt{\lambda_2} \sin \theta_2.
 \end{aligned}$$

Für unseren Test verwendeten wir die speziellen Parameterwerte

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{5}.$$

Es wurde das Verfahren 4. Ordnung verwendet.

Die Ergebnisse können der Tabelle auf der nächsten Seite (mitte) entnommen werden und sind in den Abbildungen 7a und 7b grafisch veranschaulicht.

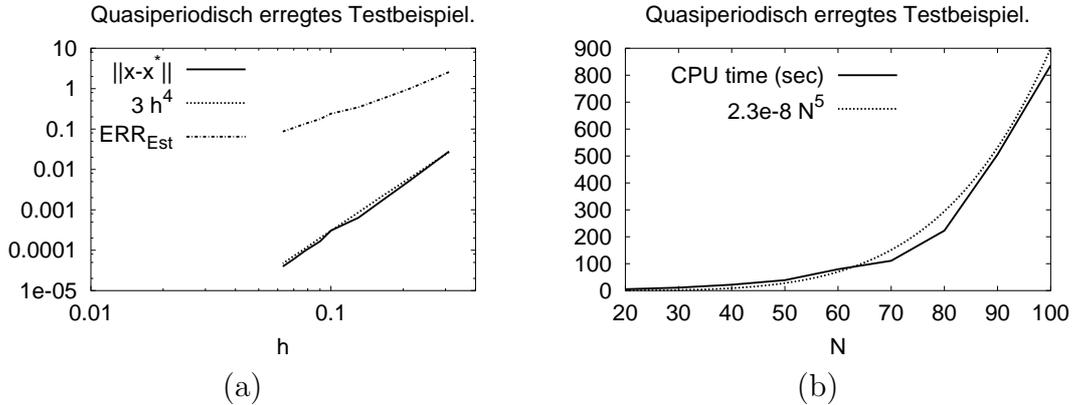


Abbildung 7: (a): Der tatsächliche Fehler in Abhängigkeit von der Maschenweite in doppelt logarithmischer Darstellung. Zum Vergleich sind die Gerade für $3h^4$ und der geschätzte Fehler $\text{TOL}=\text{ERR}_{\text{Est}}$ eingezeichnet. (b): Die Entwicklung der Rechenzeit in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter N . Zum Vergleich ist die Kurve $2.3 \cdot 10^{-8} N^5$ eingezeichnet.

N_1	N_2	h	$\ u_N - P_N u^*\ $	TOL	IT	RZ*
20	20	$3.1e-01$	$2.787194e-02$	$2.5741e+00$	7	5.2
30	30	$2.1e-01$	$4.985247e-03$	$9.7016e-01$	5	11.0
40	40	$1.6e-01$	$1.557613e-03$	$5.3955e-01$	4	21.9
50	50	$1.3e-01$	$6.362157e-04$	$3.4546e-01$	4	39.0
60	60	$1.0e-01$	$3.065961e-04$	$2.4031e-01$	4	79.5
70	70	$9.0e-02$	$1.654431e-04$	$1.7682e-01$	4	110.8
80	80	$7.8e-02$	$9.697462e-05$	$1.3553e-01$	4	222.7
90	90	$7.0e-02$	$6.054316e-05$	$1.0718e-01$	4	505.5
100	100	$6.3e-02$	$3.972226e-05$	$8.6877e-02$	4	836.7

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Für den Test wählten wir ein Gitter mit $N = N_1 = N_2$. Die einzelnen Spalten enthalten

- N_1, N_2 : Anzahl der Gitterpunkte in θ_1 - bzw. θ_2 -Richtung
- h : Maschenweite $h = \frac{2\pi}{N}$
- $\|u_N - P_N u^*\|$: Norm des tatsächlichen Fehlers
- TOL : geschätzter Fehler
- IT : Anzahl Newton-Iterationen bis zum Erreichen der Maschinengenauigkeit
- RZ : Rechenzeit in Sekunden

In der Grafik 7a ist gut zu erkennen, daß sich der Fehler genau wie theoretisch vorhergesagt ($\mathcal{O}(h^4)$) verhält. Der verwendete Fehlerschätzer ist wie folgt definiert: Es sei $(u_N, \omega)_{(4)}$ eine Lösung des Verfahrens 4. Ordnung und $\tilde{F}_{N,(2)}^x$ das

diskretisierte erweiterte System der Ordnung 2. Dann wird die Größe

$$\text{TOL} := \left\| \left[\overset{\times}{F}'_{N,(2)} \left((u_N, \omega)_{(4)} \right) \right]^{-1} \overset{\times}{F}_{N,(2)} \left((u_N, \omega)_{(4)} \right) \right\|$$

als Fehlerschätzer verwendet. Das entspricht einer Approximation der Normdifferenz zweier Lösungen mit verschiedener Konvergenzordnung auf demselben Gitter. Wegen des hohen Rechenaufwands wird lediglich die erste Newton-Korrektur des Verfahrens der Ordnung 2, statt der exakten Differenz $(u_N, \omega)_{(4)} - (u_N, \omega)_{(2)}$, berechnet. Diese Vorgehensweise ergibt einen Fehlerschätzer für das Verfahren der Ordnung 2. Das ist der Grund dafür, daß der tatsächliche Fehler durch TOL sehr stark überschätzt wird.

In der Grafik 7b wird die Rechenzeit über dem Diskretisierungsparameter N dargestellt. Der Hauptaufwand steckt in der Lösung eines großen linearen Gleichungssystems, die in jedem Newton-Iterationsschritt notwendig ist, siehe dazu Abschnitt 3.1.4. Die Entwicklung der Rechenzeit scheint proportional zu N^5 zu sein, was asymptotisch etwas besser als der worst-case Fall N^6 ist. Insgesamt ist die Rechenzeit aber moderat, man bedenke dazu, daß im Fall $N = N_1 = N_2 = 100$ ein 40.000-dimensionales nichtlineares Gleichungssystem zu lösen ist.

3.1.4 Lösung der großen geränderten Gleichungssysteme

Die durch die Diskretisierung mittels Finiter Differenzen entstehenden linearen Gleichungssysteme mit dem Hauptblock $L_N = A_N + D_N$ sind sehr dünn besetzt, weisen aber aufgrund der Schiefsymmetrie von D_N keine für Iterationsverfahren besonders geeignete Struktur auf. Man ist daher gezwungen, generell anwendbare Methoden, z.B. GMRES oder BICGSTAB (siehe z.B. [MEI99]), einzusetzen. Da schon die Norm der Matrix D_N und damit auch die Kondition des Systems etwa proportional mit $\frac{1}{h}$ wächst (die Norm der Inversen ist gleichmäßig nach oben beschränkt, dürfte aber, wenn überhaupt, kaum mit $\frac{1}{h}$ fallen), ist insbesondere eine robuste Vorkonditionierung nötig.

In unserer Implementierung entschieden wir uns für den Einsatz von GMRES mit einer Vorkonditionierung durch unvollständige LU-Zerlegung, im folgenden kurz ILU genannt. Als Grundlage verwendeten wir das frei verfügbare Paket SPARSKIT, wobei die ILU an unsere großen geränderten Systeme leicht angepaßt werden mußte.

Die Originalversion der ILU tendiert dazu, die Ränder frühzeitig als Pivotzeilen bzw. Pivotspalten zu verwenden, was zu sehr stark besetzten Matrizen L und U führt, da die Ränder ja praktisch vollbesetzt sind. Die Pivotstrategie wurde daher so abgewandelt, daß erst, wenn die letzten $2(p - m)$ Zeilen zu bearbeiten sind, Pivotelemente auch in den Rändern gesucht werden.

In der nachfolgenden Tabelle wird das Verhalten des linearen Löser für das Testbeispiel (3.11) angegeben und in Abbildung 8 grafisch veranschaulicht.

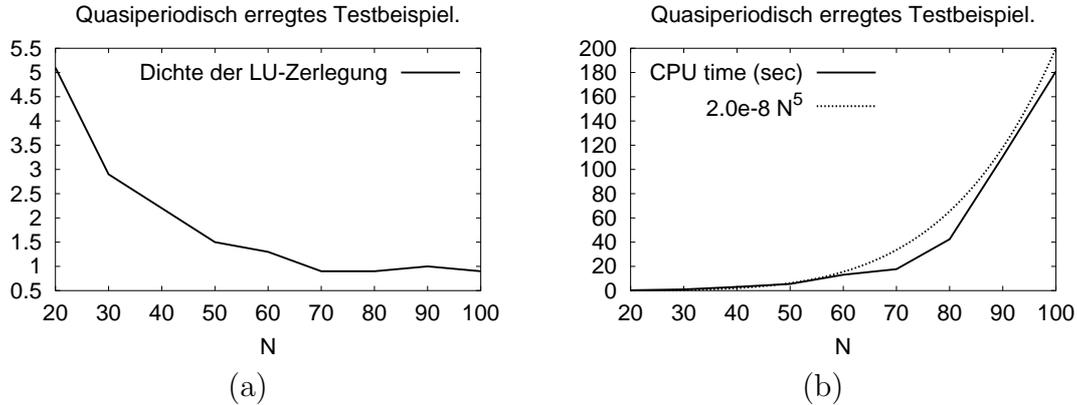


Abbildung 8: (a): Die Entwicklung der Besetzungsdichte der LU -Faktorisierung und (b): der Rechenzeit in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter N . Zum Vergleich ist die Kurve $2 \cdot 10^{-8} N^5$ eingezeichnet.

N_1	N_2	nnz in Tsd.		Dichte in %		fill-in	Rechenzeit* in sec.		
		A	$L + U$	A	$L + U$		ILU	GMRES	ges.
20	20	19	130	0.74	5.1	6.8	0.2	0.1	0.3
30	30	43	373	0.33	2.9	8.6	0.8	0.2	1.0
40	40	77	895	0.19	2.2	11.6	2.5	0.6	3.1
50	50	120	1500	0.12	1.5	12.5	4.5	1.0	5.5
60	60	173	2710	0.08	1.3	15.7	10.3	2.8	13.1
70	70	235	3620	0.06	0.9	15.4	13.3	4.4	17.7
80	80	307	6190	0.05	0.9	20.2	32.0	10.4	42.4
90	90	389	11000	0.04	1.0	28.3	86.8	23.9	110.7
100	100	480	15000	0.03	0.9	31.3	134.3	46.6	180.9

*Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Es wurden dabei folgende Parameter verwendet:

DropTOL = 10^{-2} , alle Elemente, die betragsmäßig kleiner als **DropTOL** $\cdot |r_{ii}|$ sind, werden vernachlässigt. r_{ii} ist dabei das aktuelle Pivotelement.

Restart = 50, Neustart des Arnoldi-Prozesses alle **Restart** Iterationen.

ItMX = 350, es werden maximal **ItMX** Iterationen ausgeführt. Man beachte, daß die Gesamtiterationszahl gleich **ItMX** und nicht gleich dem Produkt aus **ItMX** und **Restart**, wie z.B. in Matlab, ist.

TOL = 10^{-10} , Abbruch, wenn die Norm des relativen Residuums kleiner als **TOL** ist.

Die einzelnen Spalten der Tabelle enthalten:

- N_1, N_2 : Anzahl der Gitterpunkte in θ_1 - bzw. θ_2 -Richtung
- nnz $A, L + U$: Anzahl der strukturellen nicht-Null-Elemente
- Dichte $A, L + U$: Besetzungsdichte in % $\left(= \frac{\text{nnz}(X)}{nN_1N_2} \cdot 100\% \right)$

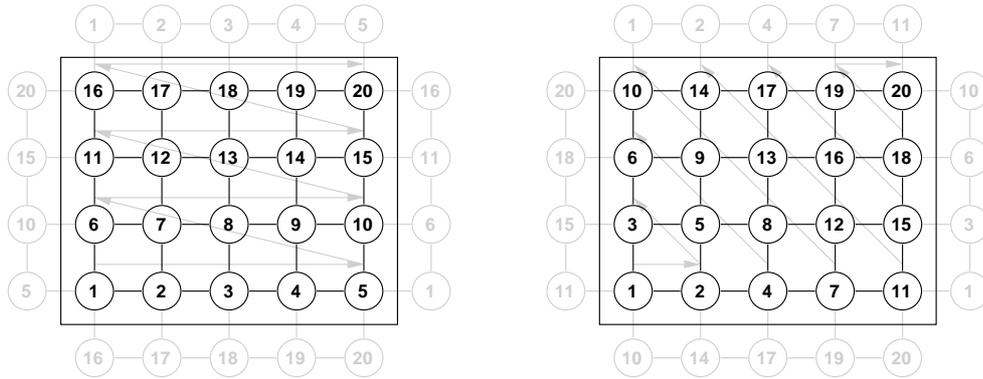


Abbildung 9: Numerierungen der Knoten von \mathbb{T}_N^2 am Beispiel eines 5×4 -Gitters. Die toroidale Geometrie des Gitters wird durch die grau gedruckte Fortsetzung über den Rand angedeutet.

fill-in : Grad der Auffüllung durch ILU $\left(= \frac{\text{nnz}(A)}{\text{nnz}(L+U)} \right)$
 Rechenzeit ILU,
 GMRES, ges. : Rechenzeiten von ILU, GMRES und gesamt

Man kann hier die für die Rechenzeit wichtige Beobachtung machen, daß sich die Dichte der Matrix $L + U$ auf einen konstanten Wert (hier etwa 0.9) einstellt. Es folgt, daß die Anzahl der nicht-Null-Einträge quadratisch in der Dimension des Systems und damit die Rechenzeit mindestens wie N^4 wächst. Die Anwendung von GMRES auf das vorkonditionierte System verschlechtert offenbar die Zeitkomplexität weiter auf etwa N^5 , was auch in der Abbildung 8 zum Ausdruck kommt.

Um die Rechenzeit etwas zu verringern, haben wir speziell für 2-Tori zwei Algorithmen zur Bandbreitenreduktion durch Umnumerierung der Knoten des Gitters \mathbb{T}_N^2 entwickelt. Man betrachte dazu die Abbildung 9. Die links dargestellte zeilenweise Numerierung ist die durch unsere Diskretisierung erzeugte Numerierung. Einen Spyplot der Systemmatrix und von $L + U$ zeigt Abbildung 11a. Eine erste einfache Möglichkeit, die Bandbreite zu reduzieren, ist die in Abbildung 9 rechts dargestellte Numerierung entlang der Diagonalen. Die Wirkung dieser Umnumerierung wird in Abbildung 11b veranschaulicht. Es entsteht eine Spindelstruktur nahe der Diagonalen, wobei aber nicht-Null-Einträge weit außerhalb der Diagonalen verbleiben.

Diesen beiden Numerierungen ist gemein, daß sie die toroidale Geometrie des Gitters nicht berücksichtigen, wodurch strukturelle nicht-Null-Elemente in der Nähe der rechten oberen und der linken unteren Ecke auftreten. Um eine möglichst vollständige Bandbreitenreduktion zu erhalten, wurde daher der nachfolgend als Struktogramm beschriebene Algorithmus entwickelt.

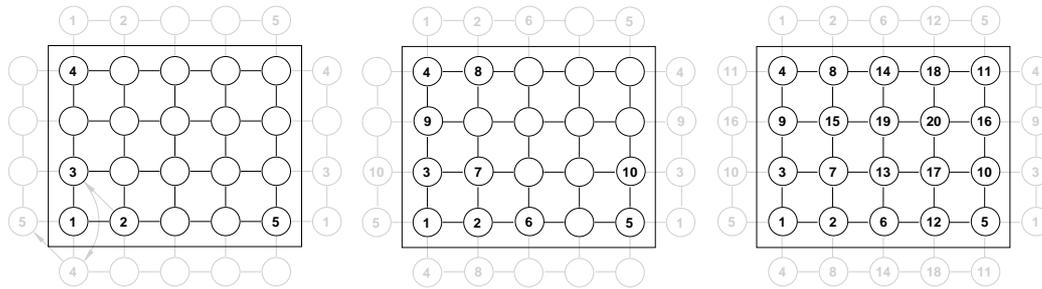


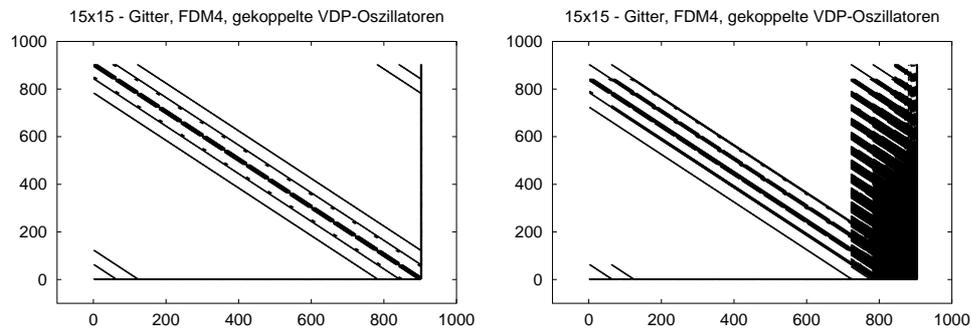
Abbildung 10: Veranschaulichung der Arbeitsweise des Numerierungsalgorithmus. Links: Nach dem ersten Schritt. Es ist die links-oben-unten-rechts-Reihenfolge der Knoten angedeutet. Mitte: Nach dem dritten Schritt und Rechts: Die vom Algorithmus erzeugte Numerierung.

Der hier angegebene Algorithmus bricht ab, wenn jeder Knoten ein Gewicht $g \in \{1, \dots, N_1 N_2\}$ erhalten hat. Jedes Gewicht wird genau ein mal vergeben. Diese Gewichte stellen dann eine zulässige Umnummerierung der Knoten dar. In Abbildung 10 ist die Arbeitsweise unseres Algorithmus grafisch veranschaulicht. Links ist die Verteilung der Gewichte nach dem ersten Durchlauf der Schleife 4, im mittleren Bild die Verteilung nach zwei weiteren Durchläufen und rechts schließlich die endgültige Verteilung der Gewichte dargestellt. In Abbildung 11c haben wir die Wirkung dieser Umnummerierung veranschaulicht. Es entsteht eine Spindelstruktur, wobei keine strukturellen nicht-Null-Elemente mehr in der rechten oberen und der linken unteren Ecke auftreten.

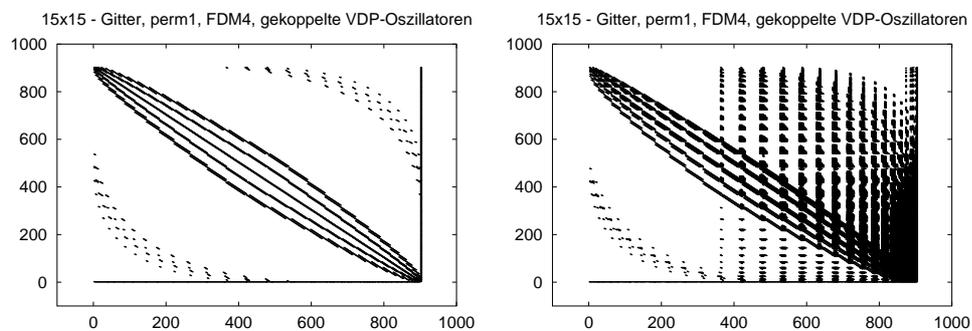
Tabelle 1 auf Seite 77 gibt einen Vergleich der drei Numerierungen an. Es zeigt sich, daß für unser Testbeispiel die Umnummerierungen nachteilig sind. Das gilt aber nicht in jedem Fall, es empfiehlt sich daher, bei der numerischen Analyse konkreter Beispiele, die verschiedenen Permutationen auszuprobieren.

⁵Ein Sortierverfahren bezüglich einer Relation (z.B. \leq) heißt *stabil*, wenn die Reihenfolge von Elementen, die die Relation bereits erfüllen, durch das Verfahren nicht geändert wird.

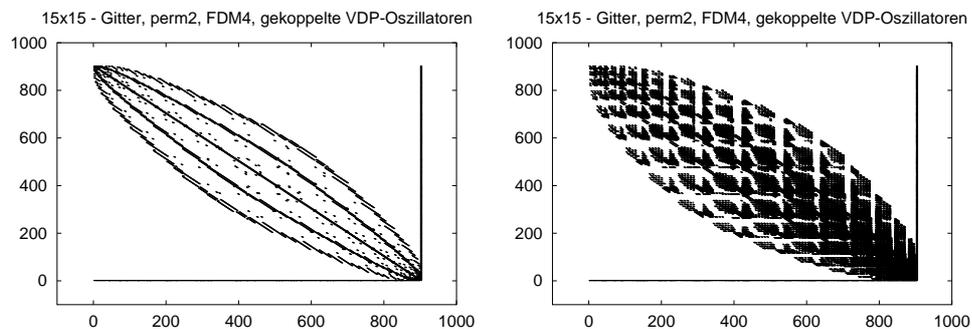
- | | | | |
|---|--|---|----------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Alle Knoten erhalten das Gewicht 0. 2. Der erste Knoten erhält das Gewicht 1. 3. Setze $g = 2$. 4. Für alle Knoten $K = 1, \dots, N_1 N_2$: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <ol style="list-style-type: none"> 4.1. Berechne alle noch nicht nummerierten Nachbarn $l = \{l_1, \dots, l_j\}$, $0 \leq j \leq 4$ des Knoten K in der Reihenfolge links-oben-unten-rechts. 4.2. Sortiere die Knoten in l aufsteigend nach dem kleinsten Gewicht ihrer Nachbarn mit einem stabilen Verfahren⁵. 4.2. Für $i = 1, \dots, j$: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="padding: 5px;">4.2.1. Setze das Gewicht von Knoten $l_i = g$.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4.2.1. Setze $g = g + 1$.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table> | <ol style="list-style-type: none"> 4.1. Berechne alle noch nicht nummerierten Nachbarn $l = \{l_1, \dots, l_j\}$, $0 \leq j \leq 4$ des Knoten K in der Reihenfolge links-oben-unten-rechts. 4.2. Sortiere die Knoten in l aufsteigend nach dem kleinsten Gewicht ihrer Nachbarn mit einem stabilen Verfahren⁵. 4.2. Für $i = 1, \dots, j$: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="padding: 5px;">4.2.1. Setze das Gewicht von Knoten $l_i = g$.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4.2.1. Setze $g = g + 1$.</td> </tr> </table> | 4.2.1. Setze das Gewicht von Knoten $l_i = g$. | 4.2.1. Setze $g = g + 1$. |
| <ol style="list-style-type: none"> 4.1. Berechne alle noch nicht nummerierten Nachbarn $l = \{l_1, \dots, l_j\}$, $0 \leq j \leq 4$ des Knoten K in der Reihenfolge links-oben-unten-rechts. 4.2. Sortiere die Knoten in l aufsteigend nach dem kleinsten Gewicht ihrer Nachbarn mit einem stabilen Verfahren⁵. 4.2. Für $i = 1, \dots, j$: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="padding: 5px;">4.2.1. Setze das Gewicht von Knoten $l_i = g$.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4.2.1. Setze $g = g + 1$.</td> </tr> </table> | 4.2.1. Setze das Gewicht von Knoten $l_i = g$. | 4.2.1. Setze $g = g + 1$. | |
| 4.2.1. Setze das Gewicht von Knoten $l_i = g$. | | | |
| 4.2.1. Setze $g = g + 1$. | | | |



(a)



(b)



(c)

Abbildung 11: Spyplots der Systemmatrix (links) und von $L+U$ (rechts) nach Anwendung verschiedener Permutationen der Knoten. Diese Bilder stammen nicht vom Testbeispiel, sondern vom Beispiel zweier gekoppelter Van der pol Oszillatoren, um eine geränderte Matrix als Beispiel zu haben. Die vollbesetzten Ränder sind rechts und unten zu erkennen.

Drop-TOL	nnz $L + U$	Dichte $L + U$	fill-in	It	$\ x - x^*\ $	Rechenzeit* in sec.		
						ILU	GMRES	ges.
<i>keine Permutation</i>								
0.001	2513	2.5	20.9	7	3.6e-08	11.5	0.6	12.1
0.0025	2170	2.2	18.1	10	7.9e-08	8.9	0.7	9.6
0.005	1881	1.9	15.7	13	1.5e-07	6.8	0.8	7.6
0.01	1528	1.5	12.7	20	1.0e-07	4.7	1.1	5.8
0.025	1274	1.3	10.6	39	8.9e-08	3.7	1.9	5.6
0.05	796	0.8	6.6	94	5.3e-08	1.7	3.6	5.3
<i>Permutation 1</i>								
0.001	2753	2.8	22.9	9	1.7e-08	13.7	0.8	14.5
0.0025	2229	2.2	18.6	12	1.2e-07	8.8	0.9	9.7
0.005	1918	1.9	16.0	19	6.2e-08	6.8	1.2	8.0
0.01	1549	1.5	12.9	29	4.4e-08	4.6	1.6	6.2
0.025	1200	1.2	10.0	67	1.5e-07	3.1	3.2	6.3
0.05	819	0.8	6.8	325	1.8e-07	1.7	12.5	14.2
<i>Permutation 2</i>								
0.001	2830	2.8	23.6	7	4.2e-09	17.5	0.7	18.2
0.0025	2380	2.4	19.8	10	1.5e-08	12.6	0.8	13.4
0.005	2366	2.4	19.7	14	2.8e-08	14.3	1.1	15.4
0.01	1622	1.6	13.3	21	5.2e-08	5.6	1.2	6.8
0.025	1516	1.5	12.6	53	8.4e-08	6.3	3.0	9.3
0.05	1210	1.2	10.1	332	1.2e-07	4.1	16.1	20.2

*Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Tabelle 1: Das Verhalten des linearen Löser für unser Testbeispiel unter verschiedenen Permutationen. Permutation 1 ist die diagonale Numerierung und Permutation 2 die durch den vorangehend beschriebenen Algorithmus erzeugte. Die Gesamtrechenzeit ist für das Testbeispiel ohne Umnummerierung am kleinsten. Es wurde `Restart` = 50, `ItMX` = 350 und `TOL` = 10^{-10} verwendet, die Spalte $\|x - x^*\|$ gibt den tatsächlichen Fehler an.

3.2 Fourier-Galerkin-Methoden

Ausgangspunkt der Entwicklung der zunächst vorgestellten Semidiskretisierung mit trigonometrischen Polynomen war der Wunsch, die in Abschnitt 2.2.1 (bzw. 2.2.2) beschriebene (formale) Mittelungsmethode so zu verallgemeinern, daß sie als black-box-Methode, d.h. insbesondere ohne vorherige Koordinatentransformation, auf beliebige Differentialgleichungen anwendbar ist und geeignete Approximationseigenschaften besitzt. Besonders interessierte dabei der Fall der Approximation invarianter 2-Tori periodisch erregter Systeme, da hierfür eine autonome Differentialgleichung gewonnen wird, für die *periodische Orbits* gesucht sind. Diese können aber mit Standard-Algorithmen, wie sie z.B. in AUTO (vgl. [DOE97]) implementiert sind, numerisch analysiert werden.

In 3.2.2 wird die Volldiskretisierung mit trigonometrischen Polynomen über \mathbb{T}^p vorgestellt. Diese ist vorteilhaft, wenn sich der Torus bereits mit wenigen Basisfunktionen approximieren läßt, was nicht selten der Fall ist, da dieses Verfahren dann auf kleine (relativ stark besetzte) Gleichungssysteme führt.

3.2.1 Semidiskretisierung mittels Fourier-Galerkin-Methode

Im quasiperiodisch erregten Fall ($m \geq 1$) sind die ersten m Basisfrequenzen bekannt. Darüber hinaus sind die Erregungsterme in technischen Systemen häufig harmonische Funktionen. Daher liegt es in vielen Fällen nahe, die gesuchte Torusfunktion u^* in den ersten m Veränderlichen als trigonometrisches Polynom anzusetzen.

Gegeben seien m natürliche Zahlen N_1, \dots, N_m . Wir definieren den *Diskretisierungsparameter* $N := \min\{N_1, \dots, N_m\}$ und für $j = 1, \dots, m$ die Indexmengen $\mathbb{I}_{N_j} \subset \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{I}_{N_j} := \{-N_j, \dots, 0, \dots, N_j\}.$$

sowie die Multi-Indexmenge $\mathbb{I}_N \subset \mathbb{Z}^m$:

$$\mathbb{I}_N := \mathbb{I}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{I}_{N_m}.$$

Im folgenden bezeichnen wir mit $\theta^m := (\theta_1, \dots, \theta_m)$ und mit $\theta^p := (\theta_{m+1}, \dots, \theta_p)$ und definieren für $k := (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ die Basisfunktionen $\varphi_k : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\varphi_k(\theta^m) := e^{\hat{i} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j^m}, \quad \hat{i}^2 = -1.$$

Die φ_k bilden ein Orthonormalsystem im $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^m)$, aber nur ein Orthogonalsystem im $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^m)$, $s \geq 1$, bezüglich des Skalarproduktes

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^m)} &:= \sum_{|\alpha| \leq r} \langle \delta^\alpha x, \delta^\alpha y \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^m)}, \\ \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^m)} &:= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} x(\theta) \overline{y(\theta)} d\theta^m, \end{aligned}$$

wobei mit δ^α der verallgemeinerte Differentialoperator der Ordnung $|\alpha|$ zum Multi-Index $\alpha \in [\mathbb{Z}^+]^m$ bezeichnet wird.

Wir definieren nun den linearen Unterraum $\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p) \subseteq \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$:

$$\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p) := \text{span} \left\{ \eta \varphi_k \mid \eta \in \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^{p-m}), k \in \mathbb{I}_N \right\},$$

wobei wir im folgenden Elemente von $[\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)]^n$ mit dem Index N kennzeichnen werden, und den Projektionsoperator $P_N : [\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)]^n \rightarrow [\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)]^n$:

$$(P_N u)(\theta) := \sum_{k \in \mathbb{I}_N} u_k(\theta^p) \varphi_k(\theta^m).$$

Dabei sind die $\varphi_k : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{C}$ skalare Funktionen und die θ^p -abhängigen Koeffizienten $u_k : \mathbb{T}^{p-m} \rightarrow \mathbb{C}^n$ durch

$$u_k(\theta^p) := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} u(\theta) \overline{\varphi_k(\theta^m)} d\theta^m$$

für $u : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in [\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)]^n$, gegeben. *Anmerkung:* Der Multi-Index k im Ausdruck u_k bedeutet dabei nicht die k -te Komponente sondern den k -ten Koeffizienten. Diese Bezeichnungsweise werden wir in diesem Abschnitt beibehalten.

Einsetzen von u_N in die erweiterte Invarianzgleichung (2.40) und Anwenden von P_N ergibt das Galerkin-Verfahren

$$\begin{aligned} P_N \left(\sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} \right) &= P_N f(u_N, \theta) \\ \left\langle \frac{\partial P_N \tilde{u}}{\partial \theta_j}, u_N \right\rangle &= 0, \quad m < j \leq p, \end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei für die Diskretisierung der Phasenbedingung die wegen $u_N \in [\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)]^n$ gültige Gleichheit

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j}, u_N \right\rangle = \left\langle P_N \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j}, u_N \right\rangle$$

benutzt wurde.

Diese Gleichungen können weiter umgeformt werden. Wir betrachten zunächst die erste Gleichung:

$$P_N \left(\sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} \right) + P_N \left(\sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} \right) = P_N f(u_N, \theta).$$

Für den ersten Summanden der linken Seite gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} &= \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{k \in \mathbb{I}_N} u_k(\theta^p) \varphi_k(\theta^m) \\ &= \sum_{j=1}^m \Omega_j \sum_{k \in \mathbb{I}_N} u_k(\theta^p) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_j}(\theta^m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \sum_{j=1}^m \Omega_j u_k(\theta^p) \hat{i}k_j \varphi_k(\theta^m). \end{aligned}$$

Analog erhält man für den zweiten Summanden

$$\sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} = \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_k}{\partial \theta_j}(\theta^p) \varphi_k(\theta^m).$$

Mit diesen Darstellungen können wir nun die Projektion der linken Seite auf $[\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)]^n$ koeffizientenweise für $l \in \mathbb{I}_N$ angeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \left(\sum_{j=1}^m \Omega_j u_k(\theta^p) \hat{i}k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_k}{\partial \theta_j}(\theta^p) \right) \varphi_k(\theta^m) \overline{\varphi_l(\theta^m)} d\theta^m &= \\ = \sum_{j=1}^m \Omega_j u_l(\theta^p) \hat{i}l_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_l}{\partial \theta_j}(\theta^p). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$(h_l(u_N))(\theta^p) := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(u_N(\theta), \theta) \overline{\varphi_l(\theta^m)} d\theta^m$$

den l -ten Fourier-Koeffizienten von $f(u_N(\theta), \theta)$, dann lautet das Galerkin-System der ersten Gleichung

$$\sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_l}{\partial \theta_j} = h_l(u_N) - \hat{i} \sum_{j=1}^m \Omega_j l_j u_l, \quad \forall l \in \mathbb{I}_N.$$

Das ist eine $(n \prod_{j=1}^m (2N_j + 1))$ -dimensionale (partielle) Differentialgleichung in $\theta^p \in \mathbb{T}^{p-m}$ für die Koeffizientenfunktionen $u_l : \mathbb{T}^{p-m} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $l \in \mathbb{I}_N$ und dem unbekanntem Koeffizientenvektor $\omega \in \mathbb{R}^{p-m}$.

Wir betrachten nun die zweite Gleichung von (3.12):

$$\left\langle \frac{\partial P_N \tilde{u}}{\partial \theta_j}, u_N \right\rangle = 0, \quad m < j \leq p.$$

Einsetzen der Summendarstellungen für u_N und $P_N \tilde{u}$,

$$P_N \tilde{u} := \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \tilde{u}_k \varphi_k,$$

ergibt

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \theta_j} \varphi_k, \sum_{l \in \mathbb{I}_N} u_l \varphi_l \right\rangle &= \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \sum_{l \in \mathbb{I}_N} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \theta_j} \varphi_k, u_l \varphi_l \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \theta_j}, u_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Damit lautet das erweiterte Galerkin-System

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_l}{\partial \theta_j} &= h_l(u_N) - \hat{i} \sum_{j=1}^m \Omega_j l_j u_l, \quad \forall l \in \mathbb{I}_N, \\ \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \theta_j}, u_k \right\rangle &= 0, \quad m < j \leq p. \end{aligned}$$

Da die Winkelkoordinaten θ^p nicht mehr explizit im Ausdruck $h_l(u_N)$ für $l \in \mathbb{I}_N$ erscheinen, könnte man dieses System in einem gewissen Sinne autonom nennen. Diese Bezeichnungsweise erhält durch den Spezialfall $p = 2$ und $m = 1$, der weiter unten genauer untersucht wird, weitere Berechtigung.

Im Fall $p = m$ ist die Semidiskretisierung äquivalent zur im nächsten Abschnitt beschriebenen Volldiskretisierung, deren Konvergenz z.B. in [SAMO91] untersucht wird. Im Fall $p > m$ ist auch hier die Konvergenz noch offen.

Es seien nun $p = 2$ und $m = 1$, dann setzen wir o.B.d.A. $\Omega = 1$, und $\theta = \theta_2$ und erhalten mit der speziellen Indexmenge $\mathbb{I}_N = \{-N, \dots, 0, \dots, N\}$ das Galerkin-System

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial u_k}{\partial \theta} &= h_k(u_N) - \hat{i} k u_k, \quad \forall k \in \mathbb{I}_N, \\ \sum_{k=-N}^N \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \theta}, u_k \right\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Das ist eine gewöhnliche $n(2N + 1)$ -dimensionale erweiterte autonome Differentialgleichung, die wir etwas kompakter aufschreiben wollen. Wir setzen $t := \frac{1}{\omega} \theta$ und fassen die Koeffizienten u_k bzw. \tilde{u}_k zu den $(n \times (2N + 1))$ -Block-Vektoren y bzw. \tilde{y} :

$$\begin{aligned} y(t) &= y \left(\frac{1}{\omega} \theta \right) := (u_{-N}(\theta), \dots, u_N(\theta)), \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{y} \left(\frac{1}{\omega} \theta \right) := (\tilde{u}_{-N}(\theta), \dots, \tilde{u}_N(\theta)) \end{aligned}$$

und die Funktionen h_k zu der $(n \times (2N + 1))$ -Block-Vektorfunktion g :

$$g(y) := (h_{-N}(y) - \hat{i}(-N)u_{-N}, \dots, h_N(y) - \hat{i}Nu_N)$$

zusammen. Damit können wir (3.13) in das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= g(y), \\ \langle \tilde{y}', y \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit $\langle \tilde{y}', y \rangle := \sum_{k=-N}^N \langle \tilde{y}'_k, y_k \rangle$ und dem Block-Index k umschreiben, wobei $'$ die Ableitung nach t bedeutet. Wir nennen $y' = g(y)$ auch das *Spektralsystem*.

Die erste Gleichung von (3.14) ist eine $n(2N + 1)$ -dimensionale autonome Differentialgleichung, für die periodische Lösungen mit unbekannter Periode gesucht sind. Dies ist aber eine Standardaufgabe der Numerik, für deren Behandlung zahlreiche Algorithmen verfügbar sind. Insbesondere wird z.B. in AUTO (vgl. [DOE97]) dieselbe Integral-Phasenbedingung wie in (3.14) verwendet.

Hat man eine periodische Lösung von (3.14) gefunden, dann kann man die Invarianzkurven γ_1 und γ_2 der Stroboskopabbildungen wie folgt approximieren:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta_2) &:= \sum_{k=-N}^N u_k(\theta_2) \varphi_k(0), \\ \gamma_2(\theta_1) &:= \sum_{k=-N}^N u_k(0) \varphi_k(\theta_1). \end{aligned}$$

Dabei ist γ_1 die „primäre“ Invarianzkurve, die z.B. um einen Fixpunkt einer Poincaré-Abbildung bei einer Torus-Bifurkation des zum Fixpunkt gehörigen periodischen Orbits entsteht.

Bemerkung 1: Man kann auch Fixpunkte von (3.14) bestimmen und erhält dafür das nichtlineare Gleichungssystem

$$g(y) = 0 \tag{3.15}$$

(da man dann sinnvollerweise auch $\tilde{y}' = 0$ setzt, ist die Phasenbedingung trivial erfüllt). Das entspricht aber gerade dem Galerkin-Verfahren für periodische Lösungen von periodisch erregten Differentialgleichungen (Fall $p = m = 1$).

Bemerkung 2: An dieser Stelle wollen wir noch einen Zusammenhang mit den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Mittelungsmethoden herstellen, wobei wir vorbereitend eine Transformation des komplexen Spektralsystems in eine reelle Form angeben.

Wegen $u(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^n$ und $f(u, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^n$ rechnet man für alle $\theta = \theta_2 \in \mathbb{T}^1$ leicht die Gültigkeit folgender Beziehungen nach:

$$\begin{aligned} y_k(\theta) &= \overline{y_{-k}(\theta)}, \\ h_k(y(\theta)) &= \overline{h_{-k}(y(\theta))}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Insbesondere gilt $y_0(\theta) = \overline{y_0(\theta)}$ und $h_0(y(\theta)) = \overline{h_0(y(\theta))}$, d.h. $y_0(\theta)$ und $h_0(y(\theta))$ sind reell. Mit Hilfe der Beziehungen (3.16) kann man die Transformation von (3.14) in ein reelles System verifizieren:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{-k} &= \frac{1}{2i} (y_k - y_{-k}), \quad k = 1, \dots, N, \\ \hat{y}_0 &= y_0, \\ \hat{y}_k &= \frac{1}{2} (y_k + y_{-k}), \quad k = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Die Rücktransformation ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}y_{-k} &= (\hat{y}_k - i\hat{y}_{-k}), \quad k = 1, \dots, N, \\ y_0 &= \hat{y}_0, \\ y_k &= (\hat{y}_k + i\hat{y}_{-k}), \quad k = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Durch die Transformation (3.17) erhält man gerade die zum Orthonormalsystem $\{1, \sin k\theta, \cos k\theta\}_{k=1, \dots, N}$ im $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$ gehörenden Galerkin-Gleichungen.

Es sei nun eine Differentialgleichung in periodischer Standardform (2.7) gegeben:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon),\tag{3.18}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ und f ist 2π -periodisch in t . Wir setzen einen invarianten 2-Torus von (3.18) als trigonometrisches Polynom 0-ter Ordnung mit $\varphi_0(\theta_1) = 1$ an:

$$u(\theta_1, \theta_2) := y(\theta_2) \cdot 1$$

und erhalten durch Anwendung das Galerkin-Verfahrens

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) + \omega \frac{\partial u}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(y(\theta_2) \cdot 1, \theta_1, \varepsilon) \cdot 1 d\theta_1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y'(\theta_2) \cdot 1 d\theta_1 &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y(\theta_2), \theta_1, \varepsilon) d\theta_1 \\ y'(\theta_2) &= \varepsilon f_0(y, \varepsilon)\end{aligned}$$

die autonome Differentialgleichung

$$y' = \varepsilon f_0(y, \varepsilon),$$

wobei hier ' die Ableitung nach θ_2 bedeutet. Entwickeln wir noch $f_0(y, \varepsilon)$ in eine Taylorreihe bezüglich ε :

$$f_0(y, \varepsilon) = f_0(y, 0) + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(y, 0)\varepsilon + \dots,$$

dann erhalten wir wegen $\bar{f}(y) = f_0(y, 0)$ für das gemittelte System (2.10) die Darstellung

$$y' = \varepsilon f_0(y, 0).$$

Das gemittelte System kann also auch als Approximation des reellen Galerkin-Systems 0-ter Ordnung interpretiert werden. Das formal gemittelte System ist sogar genau das reelle Galerkin-System 0-ter Ordnung.

Bemerkung 3: Einen gewissen Zusammenhang zur formalen Mittelung mit vorheriger Transformation sieht man wie folgt. Man betrachte dazu noch einmal das System (2.15):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + f(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

und vergleiche den Ansatz (2.16) der formalen Mittelungsmethode

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a(t) \sin t + b(t) \cos t, \\ x_2(t) &= a(t) \cos t - b(t) \sin t \end{aligned}$$

mit dem Ansatz erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1(\theta_1, \theta_2) &= y_{10}(\theta_2) + y_{11}(\theta_2) \sin \theta_1 + y_{12}(\theta_2) \cos \theta_1, \\ u_2(\theta_1, \theta_2) &= y_{20}(\theta_2) + y_{21}(\theta_2) \sin \theta_1 + y_{22}(\theta_2) \cos \theta_1. \end{aligned}$$

Falls das formal gemittelte System (2.17) eine gute Approximation

$$\begin{aligned} x_1(\theta_1, \theta_2) &= a(\theta_2) \sin \theta_1 + b(\theta_2) \cos \theta_1, \\ x_2(\theta_1, \theta_2) &= a(\theta_2) \cos \theta_1 - b(\theta_2) \sin \theta_1, \end{aligned}$$

eines invarianten 2-Torus von (3.19) liefert, wird man erwarten, daß für die Koeffizientenfunktionen der jeweiligen Lösungen die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} 0 &\approx y_{10}(\theta_2) \approx y_{20}(\theta_2), \\ a(\theta_2) &\approx y_{11}(\theta_2) \approx y_{22}(\theta_2), \\ b(\theta_2) &\approx y_{12}(\theta_2) \approx -y_{21}(\theta_2). \end{aligned}$$

In diesem Sinne kann man davon sprechen, daß die Semidiskretisierung eine Verallgemeinerung der formalen Mittelungsmethode darstellt und insbesondere ohne eine vorherige Koordinatentransformation anwendbar ist.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Interpretationen nur für den Fall sinnvoll sind, daß die Mittelungsmethoden als Approximationsmethoden für periodische Lösungen bzw. invariante 2-Tori interpretiert werden. Die Mittelungsmethoden besitzen darüber hinaus noch weitere Anwendungsgebiete (vgl. z.B. [GH97, SV85, WIG90]), die durch die Semidiskretisierung nicht abgedeckt werden. Die Semidiskretisierung stellt also eine Verallgemeinerung der durch die Mittelungsmethoden gegebenen Approximationsmethoden für spezielle invariante Mengen des Flusses einer Differentialgleichung dar.

Bemerkung 4: Demgegenüber ist die Harmonische-Balance-Methode ein echter Spezialfall der Semidiskretisierung. Für $p = m = 1$ erhält man nach Transformation von (3.15) mittels (3.17) in ein reelles System die nichtlineare Gleichung

$$\hat{g}(\hat{y}) = 0,$$

die mit dem System (2.2.3) übereinstimmt. Man beachte dabei, daß der in 2.2.3 beschriebene Koeffizientenvergleich wegen der Orthogonalität der Basis $\{1, \sin k\theta, \cos k\theta\}_{k \in \mathbb{N}}$ gerade das Galerkin-System liefert.

Beispiele. Die Semidiskretisierung für den Fall $p = 2$ und $m = 1$, d.h. zur Approximation quasiperiodischer 2-Tori periodisch erregter Systeme, wurde als symbolischer Algorithmus in Maple und in MuPad implementiert. Dieser Algorithmus erzeugt für Differentialgleichungen mit polynomialer rechter Seite und harmonischen Erregungstermen:

$$\dot{x} = P_0(x) + \sum_k P_{2k-1}(x) \sin kt + P_{2k}(x) \cos kt,$$

das Galerkin-System in symbolischer Darstellung, d.h. die bei der Projektion auftretenden Integrationen werden exakt ausgeführt. Das erzeugte System kann z.B. mit AUTO (vgl. [DOE97]) oder mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programm `pocont` untersucht werden.

Mit diesem Algorithmus haben wir die Spektralsysteme für ein parametrisch erregtes Netzwerk von E. Philippow (Spalte PNET, vgl. Abschnitt 4.1) und ein System von C. Hayashi (Spalte HAY, vgl. Abschnitt 4.2) erzeugt. Die nebenstehende Tabelle gibt die dafür von Maple bzw. MuPad benötigte Zeit in Abhängigkeit von der Approximationsordnung N an. Es ist dabei zu beachten, daß dieser Rechenaufwand nur *einmal* anfällt und das einmal erzeugte Spektralsystem beliebig weiter analysiert werden kann.

N	PNET		HAY	
	Maple**	MuPad***	Maple	MuPad
1	0.05	2	0.1	2
3	0.2	6	1.5	35
5	0.9	38	7	258
7	2.4	176	24	1296
9	5.3	623	67	—

Rechenzeit in Sekunden*

*Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

MapleVR5.1 für Windows; *MuPad 2.5.1 für LINUX

Die meiste Zeit benötigt der Algorithmus für die Ausführung der Funktion `combine`, die benutzt wird, um Potenzen der trigonometrischen Funktionen in den Basisfunktionen $\sin kt$ und $\cos kt$ darzustellen. Bemerkenswert ist der gewaltige Unterschied in den Rechenzeiten von Maple und MuPad. Offenbar ist die Implementierung der Funktion `combine` in Maple erheblich effizienter, als die in MuPad vorliegende.

3.2.2 Volldiskretisierung mittels Fourier-Galerkin-Methode

Der vollständige Ansatz eines invarianten p -Torus als trigonometrisches Polynom in $\theta \in \mathbb{T}^p$ erscheint besonders dann geeignet, wenn sich der Torus bereits mit relativ wenigen Termen der Fourier-Entwicklung gut approximieren läßt. Dieses Verfahren führt dann auf nichtlineare Gleichungssysteme moderater Größe, deren Jacobi-Matrix i.d.R. zu etwa 50% und mehr besetzt ist.

Wir werden, wegen der engen Verwandtschaft zwischen Semi- und Volldiskretisierung mit trigonometrischen Polynomen, die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts weitgehend weiterverwenden. Es seien p natürliche Zahlen N_1, \dots, N_p gegeben. Wir definieren den *Diskretisierungsparameter* $N := \min\{N_1, \dots, N_p\}$ und für $j = 1, \dots, p$ die Indexmengen $\mathbb{I}_{N_j} \subset \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{I}_{N_j} := \{-N_j, \dots, 0, \dots, N_j\},$$

sowie die Multi-Indexmenge $\mathbb{I}_N \subset \mathbb{Z}^p$:

$$\mathbb{I}_N := \mathbb{I}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{I}_{N_p}.$$

Wir betrachten die Basisfunktionen $\varphi_k : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\varphi_k(\theta) := e^{i \sum_{j=1}^p k_j \theta_j},$$

$k \in \mathbb{Z}^p$, die im $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$ ein Orthonormalsystem bilden und definieren den linearen Unterraum $\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p) \subseteq \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$:

$$\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p) := \text{span} \{ \varphi_k \mid k \in \mathbb{I}_N \},$$

sowie den Projektionsoperator $P_N : [\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)]^n \rightarrow [\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)]^n$:

$$(P_N u)(\theta) := \sum_{k \in \mathbb{I}_N} u_k \varphi_k(\theta),$$

wobei die Koeffizienten $u_k \in \mathbb{C}^n$ durch

$$u_k := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} u(\theta) \overline{\varphi_k(\theta)} d\theta$$

für $u : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in [\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)]^n$, gegeben sind.

Einsetzen von u_N in die erweiterte Invarianzgleichung (2.40) und Anwenden von P_N ergibt das Galerkin-Verfahren

$$\begin{aligned} P_N \left(\sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} \right) &= P_N f(u_N, \theta), \\ \left\langle \frac{\partial P_N \tilde{u}}{\partial \theta_j}, u_N \right\rangle &= 0, \quad m < j \leq p. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Diese Gleichungen können weiter umgeformt werden. Wir betrachten zunächst wieder die erste Gleichung:

$$P_N \left(\sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} \right) + P_N \left(\sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} \right) = P_N f(u_N, \theta).$$

Für den ersten Summanden der linken Seite gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} &= \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{k \in \mathbb{I}_N} u_k \varphi_k(\theta) \\ &= \sum_{j=1}^m \Omega_j \sum_{k \in \mathbb{I}_N} u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_j}(\theta) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \sum_{j=1}^m \Omega_j u_k \hat{i}k_j \varphi_k(\theta). \end{aligned}$$

Analog erhält man für den zweiten Summanden

$$\sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u_N}{\partial \theta_j} = \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \sum_{j=m+1}^p \omega_j u_k \hat{i}k_j \varphi_k(\theta).$$

Mit diesen Darstellungen können wir nun die Projektion der linken Seite auf $[\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)]^n$ koeffizientenweise für $l \in \mathbb{I}_N$ angeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \left(\sum_{j=1}^m \Omega_j u_k \hat{i}k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j u_k \hat{i}k_j \right) \varphi_k(\theta) \overline{\varphi_l(\theta)} d\theta &= \\ = \sum_{j=1}^m \Omega_j u_l \hat{i}l_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j u_l \hat{i}l_j. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$h_l(u_N) := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} f(u_N(\theta), \theta) \overline{\varphi_l(\theta)} d\theta$$

den l -ten Fourier-Koeffizienten von $f(u_N(\theta), \theta)$, dann lautet das Galerkin-System der ersten Gleichung

$$\hat{i} \sum_{j=1}^m \Omega_j l_j u_l + \hat{i} \sum_{j=m+1}^p \omega_j l_j u_l = h_l(u_N), \quad \forall l \in \mathbb{I}_N.$$

Das ist ein $(n \prod_{j=1}^p (2N_j + 1))$ -dimensionales nichtlineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $u_l \in \mathbb{C}^n$ mit $l \in \mathbb{I}_N$ und den unbekanntem Koeffizientenvektor $\omega \in \mathbb{R}^{p-m}$.

Wir betrachten nun die zweite Gleichung von (3.20):

$$\left\langle \frac{\partial P_N \tilde{u}}{\partial \theta_j}, u_N \right\rangle = 0, \quad m < j \leq p.$$

Einsetzen der Summendarstellungen für u_N und $P_N \tilde{u}$ ergibt

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \tilde{u}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_j}, \sum_{l \in \mathbb{I}_N} u_l \varphi_l \right\rangle &= \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \sum_{l \in \mathbb{I}_N} \langle \tilde{u}_k \hat{k}_j \varphi_k, u_l \varphi_l \rangle \\ &= \hat{i} \sum_{k \in \mathbb{I}_N} k_j \langle \tilde{u}_k, u_k \rangle. \end{aligned}$$

Damit lautet das erweiterte Galerkin-System

$$\begin{aligned} \hat{i} \sum_{j=1}^m \Omega_j l_j u_l + \hat{i} \sum_{j=m+1}^p \omega_j l_j u_l &= h_l(u_N), \quad \forall l \in \mathbb{I}_N, \\ \sum_{k \in \mathbb{I}_N} k_j \langle \tilde{u}_k, u_k \rangle &= 0, \quad m < j \leq p. \end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen können mittels (3.17) in ein reelles System transformiert werden. Speziell im Fall $p = 1$ und $m = 0$ erhält man so eine Verallgemeinerung der Harmonischen-Balance-Methode zur Approximation periodischer Lösungen autonomer Differentialgleichungen.

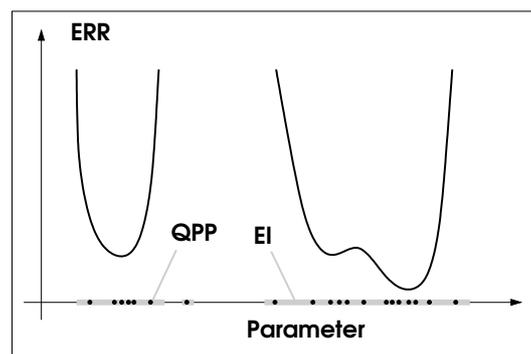
4 Numerische Analyse ausgewählter dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt soll an drei ausgewählten dynamischen Systemen die Anwendbarkeit der Finiten-Differenzen-Methode und der Semidiskretisierung gezeigt werden. In Abschnitt 4.1 wird ein parametrisch erregtes Netzwerk von E. Philippow vorgestellt, welches wir sehr ausführlich untersuchen, da an ihm bereits viele wichtige Eigenschaften unserer Algorithmen demonstriert werden können. Darüberhinaus hat der Phasenraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ dieses Systems die kleinstmögliche Dimension $n = 3$, für die nichttriviale invariante 2-Tori beobachtbar sind. Dadurch besteht die Möglichkeit, die Algorithmen auch für recht feine Gitter auf einem PC zu testen.

In Abschnitt 4.2 wird ein System von C. Hayashi vorgestellt, in dem offenbar eine Kaskade von Torus-Dopplungen auftritt. An diesem Beispiel wird erkennbar, daß unsere Algorithmen auch die Approximation und Parameterverfolgung instabiler Tori ermöglichen, die in diesem System durch die Torus-Dopplungen entstehen. Desweiteren haben für dieses Beispiel die in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Knotenumnumerierungen einen erheblichen Beschleunigungseffekt auf die Rechnungen.

Während die ersten beiden Beispiele periodisch erregt sind, werden in Abschnitt 4.3 zwei verschiedene autonome Systeme zweier linear gekoppelter Van der Pol Oszillatoren untersucht. Zunächst wird das häufig als Beispiel verwendete System betrachtet, welches einen asymptotisch stabilen invarianten 2-Torus besitzt. Anschließend wird das System so verändert, daß nunmehr ein Torus vom Satteltyp existiert, der unter Anwendung der Finiten-Differenzen-Methode ebenfalls approximiert werden kann.

Bevor wir die Ergebnisse der Rechnungen vorstellen, soll hier noch darauf eingegangen werden, in welchem Sinne wir eine Konvergenz der Verfahren erwarten, da ja, wie in den Abschnitten 2.1.2 und 2.3.2 bereits angedeutet, die Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori lediglich auf einer Cantor-Menge von Parameterwerten mit positivem Maß gültig ist. Eine solche Menge besteht nur aus isolierten Punkten, d.h. die Komplementmenge ist offen und überall dicht.



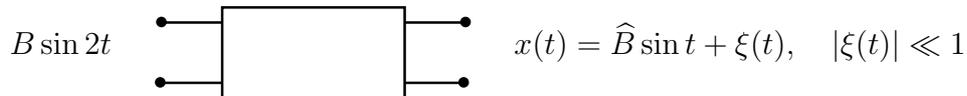
In der vorangehenden Abbildung haben wir versucht, die Situation zu veranschaulichen. Abgetragen ist der Diskretisierungsfehler (ERR) über dem Fortsetzungsparameter. Die Punkte (QPP) seien Parameterwerte, für die ein quasiperiodischer invarianter Torus existiert. Für diese Parameterwerte besitze un-

sere diskretisierte Invarianzgleichung eine reguläre Lösung u_N . Dann folgt aus der Regularität, daß die diskretisierte Gleichung auch bei kleinen Störungen eine Lösung v_N in der Nähe von u_N besitzt, d.h. um jeden Parameterwert für den die Invarianzgleichung gilt, existiert eine kleine Umgebung, in der die diskretisierte Invarianzgleichung eine ebenfalls reguläre Lösung besitzt. Letztere muß natürlich nichts mit dem invarianten Torus zu tun haben, aber es liegt nahe anzunehmen, daß sie eine brauchbare Approximation darstellt.

Die Vereinigung aller dieser Umgebungen ist in obiger Abbildung mit EI (Existenzintervalle) bezeichnet und grau dargestellt. Auf dieser Menge sollte also eine Parameterfortsetzung mit den hier entwickelten Verfahren möglich sein. Wir erwarten dabei, daß sich der geschätzte Fehler qualitativ wie im Bild dargestellt, verhält. Insbesondere in der Nähe von Resonanzen, die eine breite Arnold-Zunge besitzen, d.h. eine größere Lücke in der Menge EI erzeugen, ist mit Schwierigkeiten zu rechnen.

4.1 Ein parametrisch erregtes Netzwerk von E. Philippow

Wir wollen ein System der nichtlinearen Elektrotechnik untersuchen, welches als Frequenzteiler benutzt wird, vgl. z.B. [FA89, PB92]. Die Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangssignal kann durch das Blockschaltbild



veranschaulicht werden. Das System wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 - \beta \dot{x} + (1 + B \sin 2t)x = 0 \quad (4.1)$$

mit den Parametern

$$B, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \alpha = \varepsilon - B, \quad \beta = \frac{\varepsilon}{2} - B$$

beschrieben. Wir wollen zunächst einige qualitative Untersuchungen vornehmen. Dazu transformieren wir (4.1) in ein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \beta x_2 - \alpha x_2^3 - (B \sin 2t)x_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

und beginnen die Analyse für den Fall $B = 0$, d.h. das System ist autonom.

Man sieht sofort, daß (4.2) immer die Lösung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ hat. Die Linearisierung an $(0, 0)$ ist gegeben durch:

$$J(0, 0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Für $\varepsilon < 0$ ist $(0, 0)$ ein stabiler und für $\varepsilon > 0$ ein instabiler Fixpunkt des Flusses von (4.2), bei $\varepsilon = 0$ findet eine Hopf-Bifurkation statt. Für $\varepsilon = 0$ und $B = 0$ hat (4.2) die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \end{aligned}$$

es zweigt also eine Familie von periodischen Orbits

$$x(t) = A \sin(t + t_0)$$

mit dem Familienparameter A ab.

Um das System (4.2) in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ weiter zu untersuchen, führen wir für $|\varepsilon| \ll 1$ Polarkoordinaten $r(t)$ und $\theta(t)$ ein:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = -r \sin \theta.$$

Einsetzen in (4.2) liefert

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ -\sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ -r \cos \theta - \beta r \sin \theta + \alpha r^3 \sin^3 \theta \end{pmatrix}.$$

Die Auflösung nach \dot{r} und $\dot{\theta}$ ist wegen

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ -\sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & -\frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

leicht und wir erhalten in Polarkoordinaten das System

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (\beta r - \alpha r^3 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} &= 1 + (\beta - \alpha r^2 \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Substitution $\theta(t) := t + \phi(t)$ und einsetzen der Werte für α und β liefert das System in periodischer Standardform (vgl. Abschnitt 2.2.1):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \left(\frac{1}{2} r - r^3 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta, \\ \dot{\phi} &= \varepsilon \left(\frac{1}{2} - r^2 \sin^2 \theta \right) \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

auf das wir die Mittelungsmethode anwenden können. Wir erhalten das gemittelte System

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \frac{1}{8} (2r - 3r^3), \\ \dot{\phi} &= 0, \end{aligned}$$

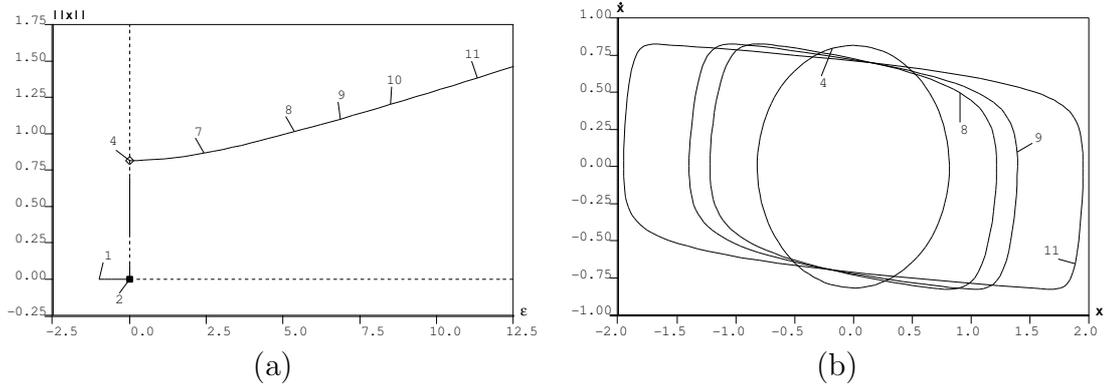


Abbildung 12: (a) Das Bifurkationsdiagramm des für $B = 0$ autonomen Systems (4.2). (b) Einige periodische Lösungen in der x_1 - x_2 -Ebene. Für kleine $B \neq 0$ werden wir erwarten können, daß der Querschnitt des Torus qualitativ dieselbe Gestalt hat. Diese Diagramme wurden mit AUTO [DOE97] berechnet.

bzw. nach der Rücksubstitution von $\theta(t) := t + \phi(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \frac{1}{8} (2r - 3r^3), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

Dieses System ist entkoppelt und die Nullstellen $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.8165$ der Gleichung

$$\varepsilon \frac{1}{8} (2r - 3r^3) = 0$$

liefern offenbar die periodischen Orbits

$$r = r_i, \quad \theta = t$$

des gemittelten Systems mit den Amplituden r_i . Das ist für $r = r_1 = 0$ der triviale periodische Orbit, den wir weiter vorn schon als Lösung gefunden haben und für $r = r_2$ und $r = r_3$ erhalten wir aus Symmetriegründen denselben periodischen Orbit mit der Periode $T = 2\pi$.

Nach dem Theorem 2.1 existiert somit ein Intervall $[0, \varepsilon_0)$, so daß (4.3) – und damit auch (4.2) – für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ einen periodischen Orbit nahe

$$r = \sqrt{2/3}, \quad \theta = t$$

bzw.

$$x_1 = \sqrt{2/3} \cos t, \quad x_2 = -\sqrt{2/3} \sin t$$

besitzt. Dieser ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varepsilon}{8} (2r - 3r^3) \right) \Big|_{r=\sqrt{2/3}} = \frac{\varepsilon}{8} (2 - 9r^2) \Big|_{r=\sqrt{2/3}} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

für $\varepsilon > 0$ asymptotisch stabil. Insbesondere nimmt die Attraktivität für wachsendes ε zu; vgl. auch [BER96].

Von der Familie

$$x(t) = A \sin(t + t_0)$$

periodischer Orbits zweigt also für $A \approx \sqrt{2/3}$ eine weitere Familie von asymptotisch stabilen periodischen Orbits γ_ε mit dem Familienparameter ε ab. Dieses Szenario ist in Abbildung 12a veranschaulicht. Nach den Vorbetrachtungen in Abschnitt 2.1.2 können wir daher annehmen, daß für kleine B ein attraktiver invarianter 2-Torus nahe $T := \gamma_\varepsilon \times \mathbb{T}^1$ existiert.

In der Tabelle rechts ist ein Teil der Daten angegeben, die von AUTO während der Verfolgung des periodischen Orbits γ_ε wurden wurde. Die Erregungsfrequenz ist $\omega_1 = 2$, d.h. die Erregungsperiode ist $T_1 = \pi$. Resonanzen treten nun in den Fällen auf, in denen das Verhältnis T_1/T_2 der Erregungsperiode T_1 und der in der Spalte PERIOD angegebenen Periode T_2 des periodischen Orbits γ_ε rational ist. Uns sollen hier nur starke Resonanzen, d.h. 1:n-Resonanzen mit $n = 1, \dots, 4$, interessieren.

Eine 1:2-Resonanz haben wir bereits für $\varepsilon = 0$ gefunden, da die Periode der abzweigenden Orbits gleich 2π ist. Die in der Tabelle mit UZ gekennzeichneten Zeilen sind offenbar Punkte einer 1:3- bzw. 1:4-Resonanz. In den Punkten $B = 0$ und $\varepsilon \in \{0, 6.86 \dots, 11.32 \dots\}$ liegen somit Spitzen von Arnold-Zungen im B - ε -Bifurkationsdiagramm, welches in Abbildung 13a dargestellt ist. Die Arnold-Zungen, in in denen kein quasiperiodischer Torus existiert, sind grau ausgefüllt. Man beachte, daß in diesen Gebieten weitere Bifurkationen bzw. ein Torus-break-down auftreten können, was hier nicht weiter untersucht wurde. Der Torus braucht dort also nicht überall zu existieren, z.B. kann der invariante Torus nicht mehr in den Gebieten existieren, in denen sich verschiedene Arnold-Zungen überlappen. Weiter existieren natürlich (unendlich viele) weitere Arnold-Zungen, die aber nicht berechnet wurden.

Auf der in (a) eingezeichneten Linie $B = 0.1$ wurde eine Parameterfortsetzung des invarianten Torus durchgeführt, deren Ergebnisse nachfolgend vorgestellt werden. Die Abbildung (b) zeigt das Bifurkationsdiagramm der trivialen π -periodischen Lösung $x = 0$ im Bereich $\varepsilon \in [0, 2.5]$. Für die Parameterwerte $\varepsilon \approx 0.1$ und $\varepsilon \approx 0.3$ treten Periodenverdopplungen (PD) auf und es zweigt jeweils eine 2π -periodische (subharmonische) Lösung ab. Diese verschmelzen für $\varepsilon \approx 1.56$ (LP). Bei der Periodenverdopplung bei $\varepsilon \approx 0.3$ entsteht ein 1:2-resonanter invarianter Torus. Dieses Szenario ist in den qualitativen Darstellungen der Poincaré-Abbildungen in den Bildern (c)-(h) auf der nächsten Seite skizziert.

	TY	PAR(1)	L2-NORM	PERIOD
		2.42222E+00	8.66396E-01	6.83065E+00
		5.37056E+00	1.01430E+00	8.45596E+00
	UZ	6.85660E+00	1.10142E+00	9.42478E+00
		8.50346E+00	1.20292E+00	1.05533E+01
	UZ	1.13214E+01	1.38561E+00	1.25663E+01
		1.25295E+01	1.46671E+00	1.34508E+01
	EP	1.33324E+01	1.52138E+00	1.40439E+01

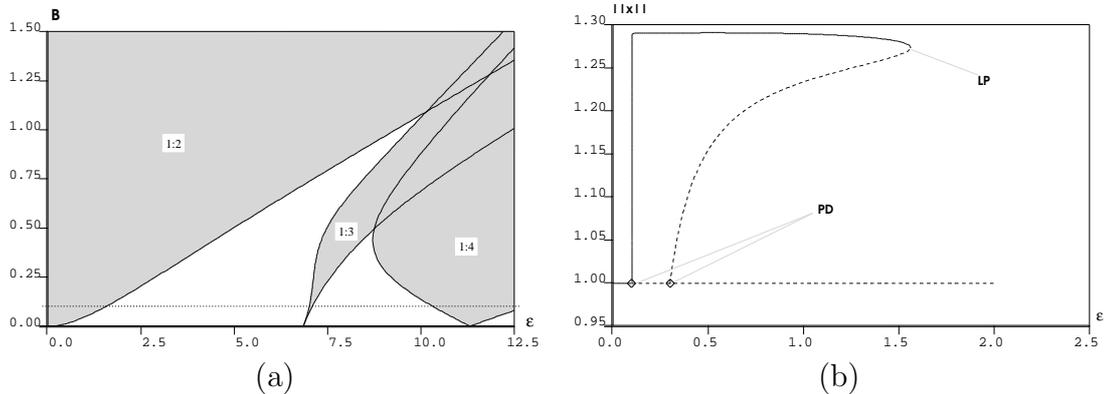
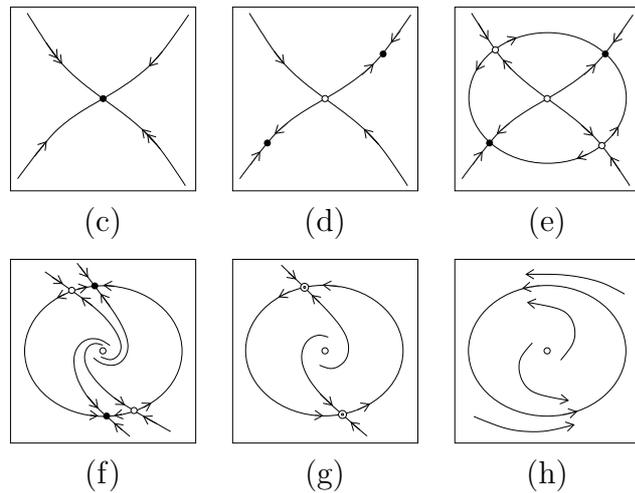


Abbildung 13: (a) Das Bifurkationsdiagramm in der ε - B -Ebene. Die Arnold-Zungen der 1:2-, 1:3- und 1:4-Resonanzen sind grau gefüllt. (b) Das Bifurkationsdiagramm der trivialen π -periodischen Lösung $x = 0$ im Bereich $\varepsilon \in [0, 2.5]$.

Für $0 < \varepsilon < 0.1$ ist die periodische Lösung $x = 0$ asymptotisch stabil mit zwei negativen reellen Multiplikatoren (c). Bei $\varepsilon \approx 0.1$ verläßt der erste Multiplikator über -1 den Einheitskreis, es findet eine Periodenverdopplung statt. Für $0.1 < \varepsilon < 0.3$ co-existieren ein Sattelpunkt und ein asymptotisch stabiler 2-periodischer Punkt (d). Bei $\varepsilon \approx 0.3$ verläßt auch der zweite Multiplikator über -1 den Einheitskreis und es entsteht ein invarianter Kreis, der aus den invarianten Mannigfaltigkeiten der 2-periodischen Punkte besteht (e).



Bei $\varepsilon \approx 1.1$ verschmelzen die beiden Multiplikatoren und werden konjugiert komplex. Gleichzeitig wandern für $0.3 < \varepsilon < 1.1$ die beiden 2-periodischen Punkte aufeinander zu (f) und verschmelzen schließlich bei $\varepsilon \approx 1.56$ (g). Für $\varepsilon > 1.56$ existiert ein invarianter Kreis der Poincaré-Abbildung (h), auf dem, abhängig von ε , ein quasiperiodischer bzw. schwach resonanter Orbit liegt.

Es werden zunächst die mit der Finiten-Differenzen-Methode gewonnenen Ergebnisse einer Parameterfortsetzung bezüglich ε vorgestellt. Letztere wurde über die zwei Teilintervalle $\varepsilon \in [1.6, 5.5]$ und $\varepsilon \in [5.5, 6.9]$ durchgeführt, da es dem Algorithmus sehr schwer fällt, über eine bei $\varepsilon \approx 5.5$ auftretende 8:3-Resonanz hinwegzukommen. Desweiteren ist es nicht möglich, für $\varepsilon < 1.6$ (1:2-Resonanz) und $\varepsilon > 7$ (1:3-Resonanz) eine Fortsetzung mit der Finiten-Differenzen-Methode

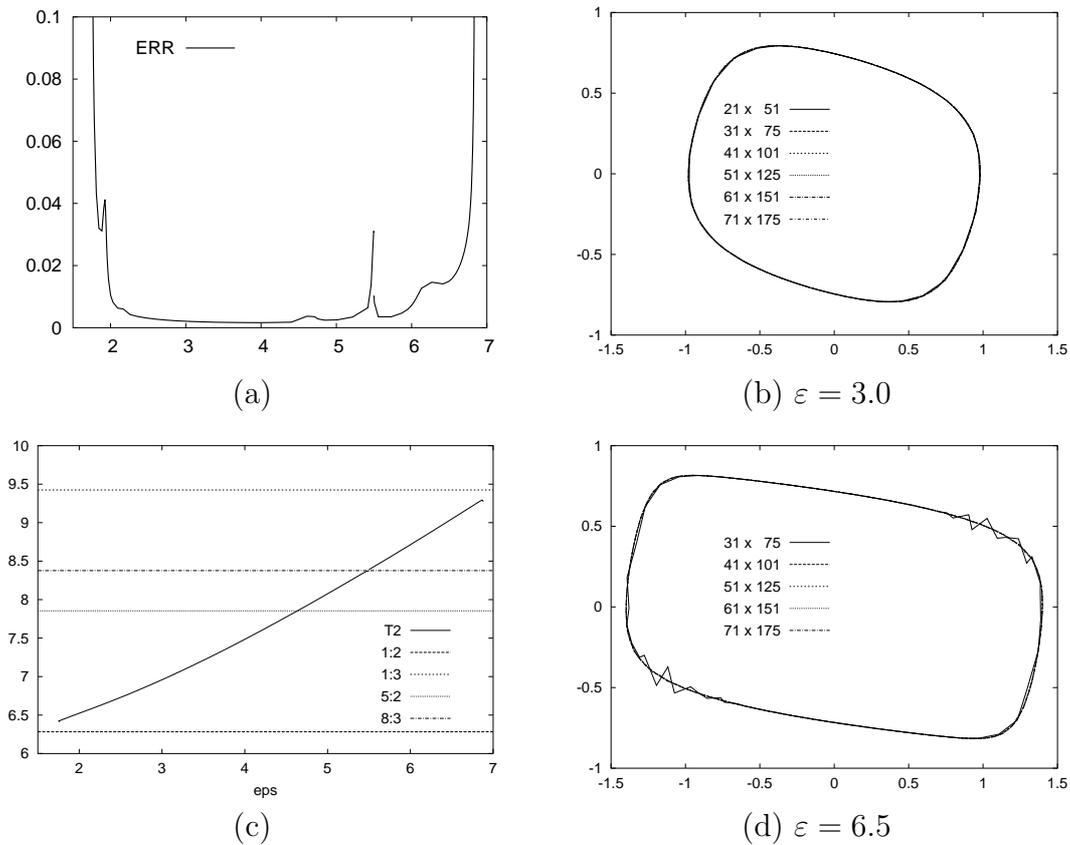


Abbildung 14: (a) geschätzter Fehler ERR über ε . (c) Periode T_2 über ε . (b) und (d) Torus-Querschnitte für verschiedene Parameterwerte und Gitter.

durchzuführen, weshalb wir uns im folgenden auf das Intervall $\varepsilon \in [1.6, 7]$ beschränken wollen. Es wurde mit einem $N_1 \times N_2 = 41 \times 101$ -Gitter gerechnet. Als Startwert wurde für $B = 0.1$ und $\varepsilon = 2.0$ die Funktion $x_1(\theta_1, \theta_2) = \sin \theta_2$, $x_2(\theta_1, \theta_2) = \cos \theta_2$ mit den Grundfrequenzen $\omega_1 = 2$ und $\omega_2 = 2.08$ verwendet.

In Abbildung 14a ist der geschätzte Fehler ERR und in Bild (c) darunter die Periode T_2 über ε abgetragen. Zusätzlich sind in (c) die Linien ausgewählter Resonanzen eingetragen. Immer, wenn die Periode T_2 eine solche Linie schneidet, ist zu erwarten, daß der Algorithmus Schwierigkeiten hat, da ja die Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori nicht gilt. Dieses Verhalten ist gut am geschätzten Fehler zu erkennen. Für $\varepsilon < 1.5$ und $\varepsilon > 6.9$ bricht das Verfahren sogar ab. Man erkennt hier auch, daß schwache Resonanzen offenbar keine große Rolle spielen. In den Bildern (b) und (d) sind Torus-Querschnitte für verschiedene Parameterwerte und Diskretisierungsparameter dargestellt. Für $\varepsilon = 3.0$ ist der Torusquerschnitt nahezu kreisförmig und der Torus darüber hinaus offenbar nur sehr schwach resonant bzw. quasiperiodisch, weshalb bereits für grobe Gitter gute Approximationen erzielt werden. Der Parameterwert $\varepsilon = 6.5$ liegt schon dicht bei der 1:3-Resonanz, was sich in der deutlich schlechteren Konvergenz zeigt.

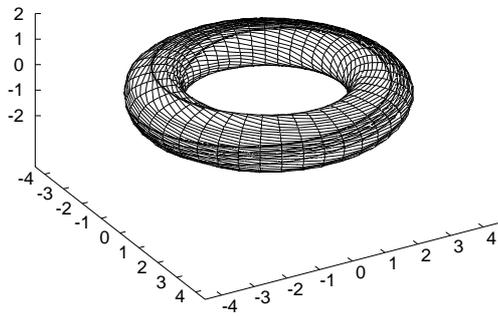
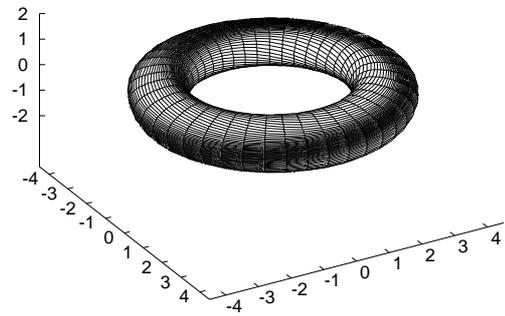
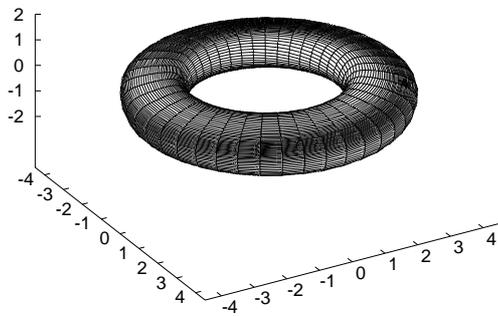
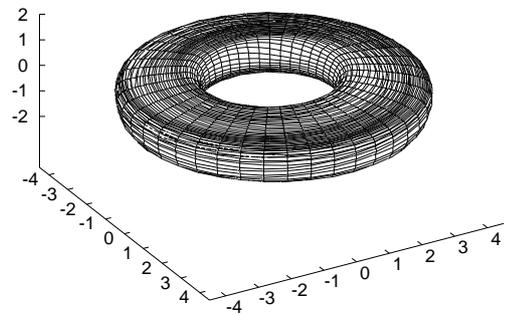
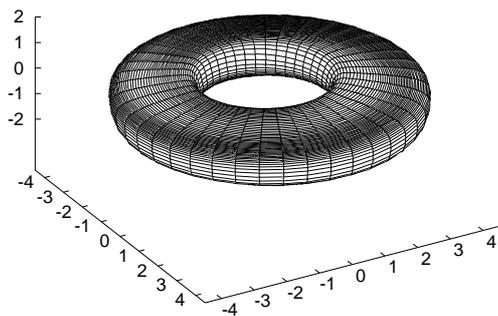
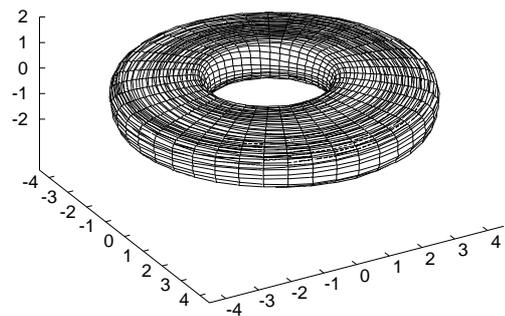
(a) $\varepsilon = 1.750$ (b) $\varepsilon = 2.000$ (c) $\varepsilon = 3.054$ (d) $\varepsilon = 5.493$ (e) $\varepsilon = 6.000$ (f) $\varepsilon = 6.884$

Abbildung 15: Darstellungen des invarianten Torus für verschiedene Parameterwerte. Um eine Darstellung als Torus zu erhalten, wurden die θ_1 - x_1 -Koordinaten mittels $\theta'_1 = r + x_1 \cos \theta_1$ und $x'_1 = r + x_1 \sin \theta_1$, mit $r = 3$, transformiert. Man erkennt in (a), (d) und (f) gut die gestörte Konvergenz in der Nähe von „stärkeren“ Resonanzen.

Bei der Lösung der diskretisierten Gleichungen tritt ein interessantes Phänomen auf. Es zeigt sich, daß die Rechenzeit sehr stark vom Verhältnis N_1/N_2 der Gitterpunkte abhängt. Es gibt dabei offenbar „optimale“ Werte für N_1/N_2 , für die bei festem Diskretisierungsparameter N sowohl die Rechenzeit als auch der geschätzte Fehler besonders klein werden. Für unsere Rechnungen verwendeten wir daher immer ein Gitter mit festem Verhältnis N_1/N_2 . Die ermittelten Daten sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben. Die einzelnen Spalten enthalten:

- N_1, N_2 : Anzahl der Gitterpunkte in θ_1 - bzw. θ_2 -Richtung
- ERR : geschätzter Fehler
- fill-in : Faktor der Auffüllung der Systemmatrix durch die ILU
- 1 LGS : durchschnittliche Rechenzeit für die Lösung eines linearen Systems
- ges. : Rechenzeit des Newtonverfahrens insgesamt

Die Rechnungen wurden für $\varepsilon = 2.0$ mit folgenden Parametern durchgeführt, siehe dazu auch die Abschnitte 3.1.3 und 3.1.4: DropTOL = 0.005, Restart = 35, TOL_{GMRES} = 10^{-8} , TOL_{Newton} = 10^{-4} . Die Gesamtrechenzeiten sind auf 8 Newton-Iterationen normalisiert.

N_1	N_2	ERR	fill-in	Rechenzeit*	
				1 LGS	ges.
41	41	9.4797e-02	38.2	14.3	116.5
41	51	4.8700e-02	41.8	20.2	163.1
41	61	3.3933e-02	42.5	25.8	208.7
41	71	2.0481e-02	40.1	27.3	220.4
41	81	1.1848e-02	40.1	31.3	254.1
41	91	6.6308e-03	28.5	15.5	135.5
41	101	1.0498e-02	22.1	10.3	98.9
41	111	1.8392e-02	20.1	10.8	94.4
41	121	3.6929e-02	20.1	11.7	102.2
41	131	1.1514e-01	20.2	11.7	96.0
41	141	6.7397e-02	18.7	10.1	103.9
41	151	5.5799e-02	19.5	12.0	132.0
41	41	9.4797e-02	38.2	14.3	102.2
51	41	1.0731e-01	44.2	23.5	195.1
61	41	1.0726e-01	50.0	35.7	288.4
71	41	1.0454e-01	55.8	50.5	402.8
81	41	1.0225e-01	57.7	64.0	513.1
91	41	1.0062e-01	61.4	81.8	652.3

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Diese Ergebnisse werden in der Abbildung auf der nächsten Seite grafisch dargestellt.

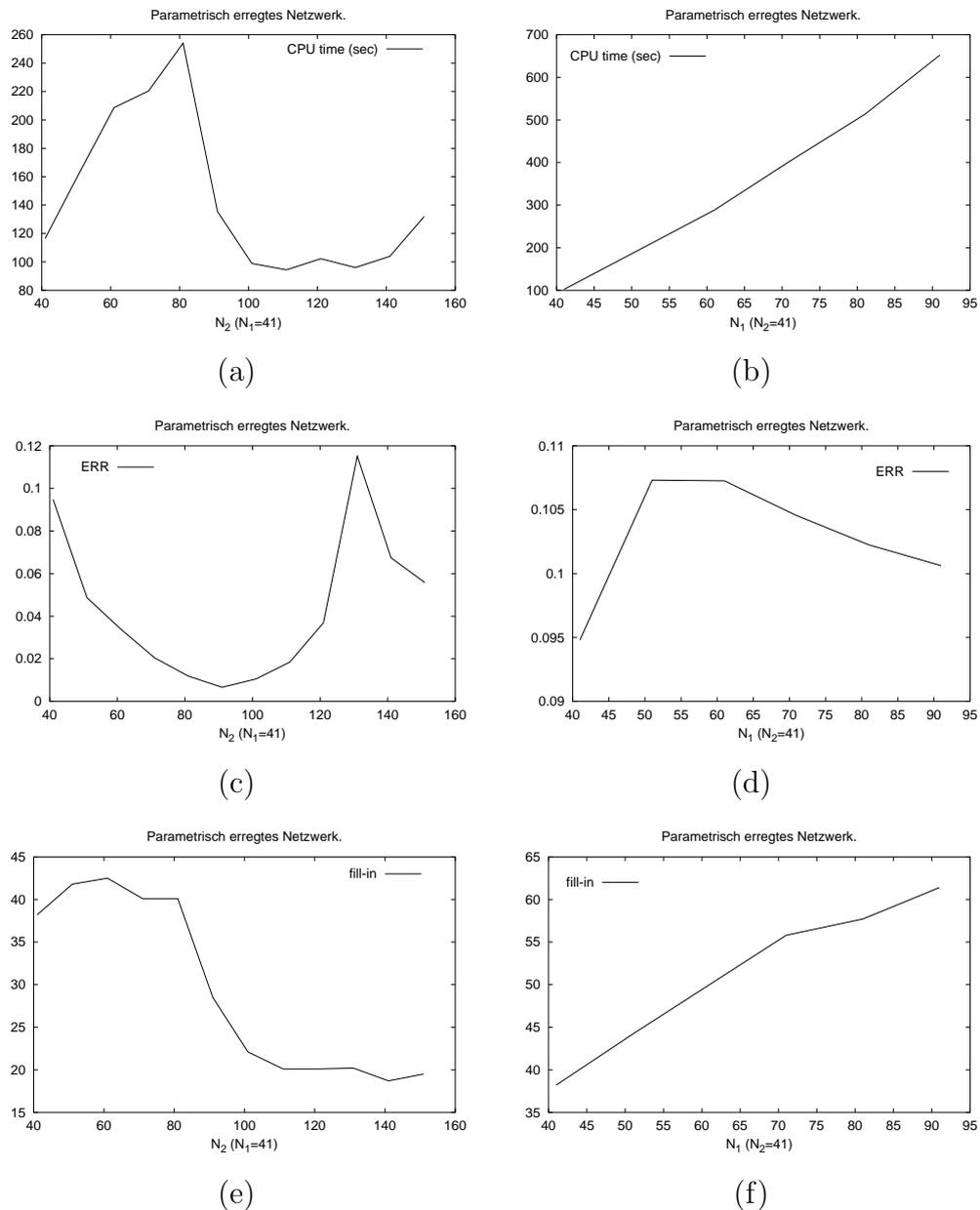


Abbildung 16: (a), (c) und (e). Darstellungen der Rechenzeit, des geschätzten Fehlers ERR und des durch die ILU erzeugten fill-ins über N_2 für festes $N_1 = 41$. Man erkennt deutlich, daß das Gitter 41×101 ein guter Kompromiß zwischen Rechenzeit und geschätztem Fehler ist. Von der analogen Darstellung (b), (d) und (f) kann man ablesen, daß es für festes N_2 und $N_1 \geq N_2$ offenbar kein solches Optimum gibt. Man beachte, daß die Wertebereiche der Diagramme links und rechts nicht übereinstimmen, um den Effekt in den übereinanderstehenden Abbildungen hervorzuheben.

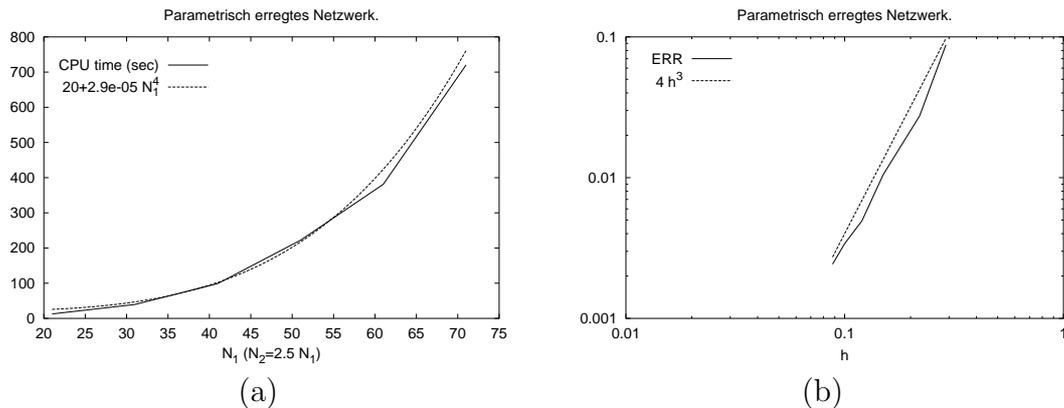


Abbildung 17: Die Entwicklung der Rechenzeit (a) und des geschätzten Fehlers (b) in Abhängigkeit von N_1 für $N_2 \approx 2.5N_1$.

Für „optimale“ Gitter mit $N_2/N_1 \approx 2.5$ ergeben sich folgende Rechenzeiten und geschätzte Fehler, die Daten dieser Tabelle sind in Abbildung 17 grafisch dargestellt:

N_1	N_2	h	ERR	fill-in	Rechenzeit*	
					1 LGS	ges.
21	51	2.9e-01	8.7725e-02	14.8	1.2	12.7
31	75	2.2e-01	2.7472e-02	17.9	4.2	39.5
41	101	1.5e-01	1.0498e-02	22.1	10.3	98.9
51	125	1.2e-01	4.9415e-03	26.8	24.7	222.1
61	151	1.0e-01	3.3994e-03	28.5	42.3	381.0
71	175	8.8e-02	2.4292e-03	31.5	89.9	720.2

Der invariante Torus des Systems (4.2) wurde auch mit der in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Semidiskretisierung (SDM) numerische approximiert. Um einen direkten Vergleich mit den Ergebnissen der Finiten-Differenzen-Methode zu erleichtern, werden die Rechenzeiten für verschiedene Diskretisierungen schon an dieser Stelle angegeben, siehe auch Seite 101:

N_2	Rechenzeit*									
	$N_1 = 1$		$N_1 = 3$		$N_1 = 5$		$N_1 = 7$		$N_1 = 9$	
	eval.	ges.	eval.	ges.	eval.	ges.	eval.	ges.	eval.	ges.
51	0.1	0.2	0.5	1.0	0.9	2.1	1.6	3.7	2.6	5.8
75	0.1	0.3	0.6	1.4	1.3	3.1	2.3	5.3	3.9	8.5
101	0.3	0.6	0.8	1.9	1.6	4.0	3.1	7.2	5.2	11.4
125	0.3	0.7	0.9	2.3	2.0	5.0	3.8	8.8	6.7	14.6
151	0.4	0.8	1.2	3.1	2.6	6.4	4.9	11.3	8.1	18.0
175	0.4	1.0	1.4	3.5	3.0	7.4	5.6	13.1	9.5	21.0
201	0.5	1.1	1.6	4.1	3.4	8.6	6.3	15.0	10.8	24.0

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Die Rechnungen wurden für $\varepsilon = 2.0$ mit folgenden Parametern durchgeführt, siehe dazu auch die Abschnitte 3.1.3 sowie 3.1.4: DropTOL = 0.01, Restart = 35, $\text{TOL}_{\text{GMRES}} = 10^{-8}$, $\text{TOL}_{\text{Newton}} = 10^{-6}$. Die Rechenzeiten sind auf 8 (FDM) bzw. 6 (SDM) Newton-Iterationen normalisiert.

Es werden nun die Ergebnisse einer Parameterfortsetzung vorgestellt, die mit der in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Semidiskretisierung durchgeführt wurde. Hierbei war es nicht nötig, das ε -Intervall zu zerlegen, allerdings liefert auch eine Semidiskretisierung höherer Ordnung N für $\varepsilon < 1$ und $\varepsilon > 9$ keine brauchbaren Ergebnisse. Wir wollen uns daher im folgenden auf das Intervall $\varepsilon \in [1, 9]$ beschränken, wobei wir aber die Ergebnisse im Intervall $\varepsilon \in [1, 12]$ angeben, da für die Semidiskretisierung mit der Ordnung 1 keine Schwierigkeiten auftraten.

Die durch die Semidiskretisierung gewonnene autonome Differentialgleichung, für die periodische Lösungen mit unbekannter Periode T_2 gesucht sind, wurde wieder mit der Finiten-Differenzen-Methode für 1-Tori diskretisiert.

Die Rechnungen wurden mit dem reellen Ansatz

$$u(\theta_1, \theta_2) = y_0(\theta_2) + \sum_{k=1}^{N_1} y_{2k-1}(\theta_2) \sin(k\theta_1) + y_{2k}(\theta_2) \cos(k\theta_1)$$

für die Ordnungen $N_1 = 1, 3, 5, 7, 9$ auf einem Gitter mit $N_2 = 175$ Gitterpunkten durchgeführt. Als Startwert wurde für $B = 0.1$ und $\varepsilon = 2.0$ die Funktion

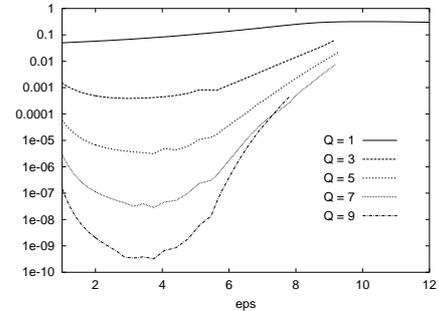
$$y_0(\theta_2) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) \end{pmatrix},$$

$$y_l(\theta_2) = 0, \quad l = 1, \dots, 2N_1,$$

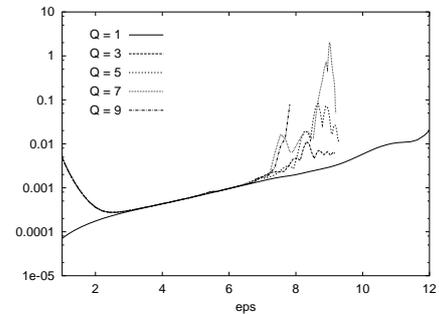
mit der Frequenz $\omega_2 = 2.08$ bzw. der Periode $T_2 = 6.52$ verwendet.

In der nebenstehenden Abbildung sind (a) die Norm der Koeffizienten der Basisfunktionen der Ordnung N_1 :

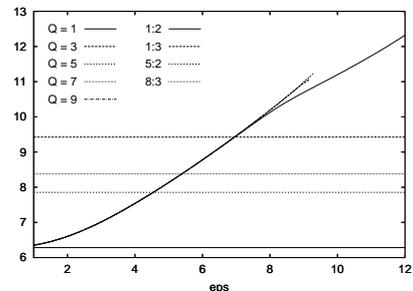
$$\text{ERR}_{\text{SDM}} = \sqrt{\|y_{(2N_1-1)}\|^2 + \|y_{(2N_1)}\|^2},$$



(a)



(b)



(c)

(b) der geschätzte Fehler ERR der Finiten-Differenzen-Methode und (c) die Periode T_2 über ε abgetragen. Zusätzlich sind in Bild (c) wieder die Linien einiger ausgewählter Resonanzen eingezeichnet.

Für $\varepsilon \in [1, 5.5]$ liegt offenbar exponentielle Konvergenz vor, die für $\varepsilon > 5.5$ allmählich verloren geht. Die Verfahren brechen für $N_1 = 3, 5, 7$ bei $\varepsilon \approx 9.3$ und für $N_1 = 9$ schon bei $\varepsilon \approx 7.8$ ab. Dies spiegelt sich auch im Verhalten des geschätzten Fehlers TOL wieder, der für $\varepsilon < 2.5$ und $\varepsilon > 7$ sehr stark ansteigt.

Auch hier spielen schwache Resonanzen offenbar keine Rolle, während in der Nähe starker Resonanzen wieder – wie erwartet – Konvergenzprobleme auftreten. Bemerkenswert ist hierbei aber, daß die Semidiskretisierung deutlich robuster ist, als die Finite-Differenzen-Methode.

Verglichen mit der Finiten-Differenzen-Methode ist die Semidiskretisierung ein sehr effizientes Verfahren. Man betrachte dazu noch einmal die beiden Tabellen auf Seite 99. In der unteren Tabelle sind die Rechenzeiten zur Bestimmung einer Lösung mit dem Newton-Verfahren in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter N_2 der Finiten-Differenzen-Methode angegeben. Dabei sind für jede Ordnung N_1 zwei Spalten aufgeführt:

- eval. : Rechenzeit für Funktionswert- und Jacobimatrix-Berechnung
- ges. : Gesamtrechenzeit (incl. dem Wert der Spalte eval.)

Selbst bei Verwendung eines Ansatzes 9. Ordnung entsteht noch ein Rechenzeitgewinn um den Faktor 10 ($N_2 = 101$).

Desweiteren ist zu erkennen, daß die Berechnung von Funktionswerten und der Jacobimatrix einen signifikanten Beitrag zur Rechenzeit liefern (bei der Voll-diskretisierung mit der Finiten-Differenzen-Methode ist dieser verschwindend gering). Das erklärt sich dadurch, daß die Anzahl der benötigten Operationen zur Auswertung der rechten Seite der durch die Semidiskretisierung generierten autonomen Differentialgleichung sehr stark mit N_1 anwächst.

In den Abbildungen 18 (a) und (b) sind Torus-Querschnitte für die Parameterwerte $\varepsilon = 2.0$ und $\varepsilon = 7.82$ sowie verschiedene Diskretisierungsparameter dargestellt. In (c) und (d) sind die Normen der zugehörigen Koeffizientenfunktionen für $N_1 = 9$ und $N_2 = 175$ abgebildet. Für $\varepsilon = 2.0$ treten keine Konvergenzprobleme auf und man erkennt ein exponentielles Abfallen der Normen der Koeffizientenfunktionen, während diese für $\varepsilon = 7.82$ deutlich schwächer fallen. In den Torusquerschnitten (b) sind nur geringe Approximationsprobleme erkennbar, die Querschnitte stimmen für $N_1 = 3, 5, 7, 9$ praktisch überein.

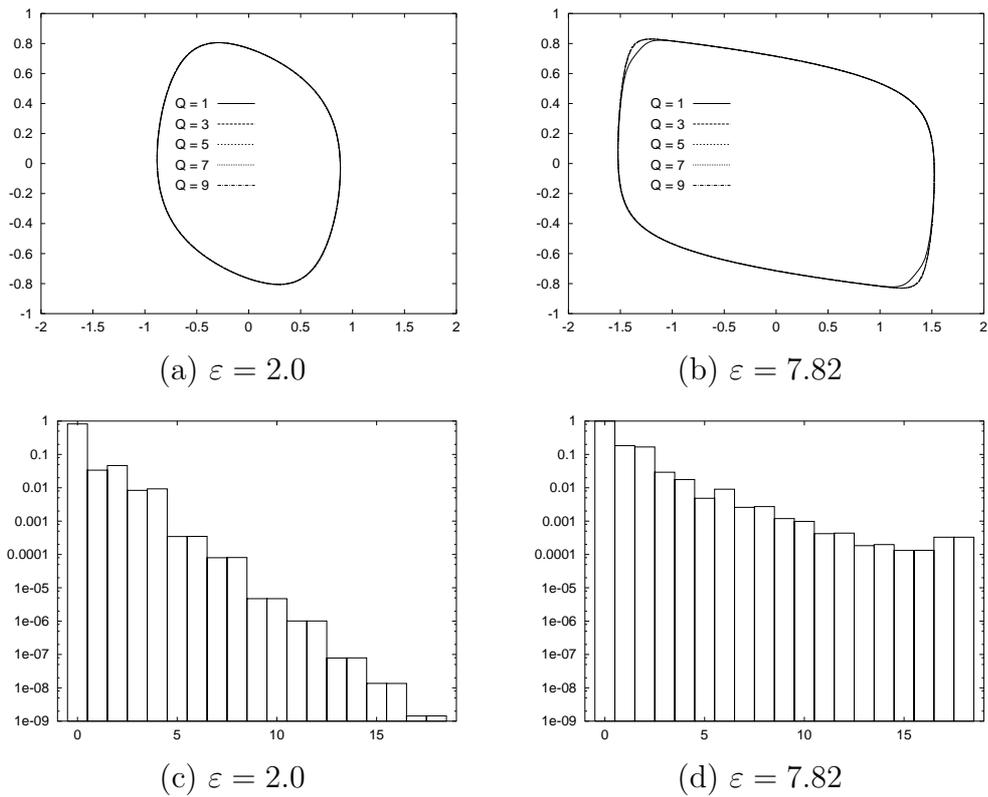


Abbildung 18: Darstellung der Torus-Querschnitte $\theta_1 = 0$ (a) und (b) für verschiedene Diskretisierungsordnungen. In (c) und (d) sind die Normen der Fourier-Koeffizienten dargestellt. Zum Fourier-Mode $k \geq 1$ gehören dabei die Abszissenwerte $2k - 1$ (minus) und $2k$ (Co-Sinus).

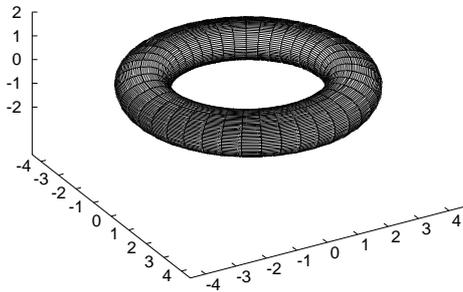
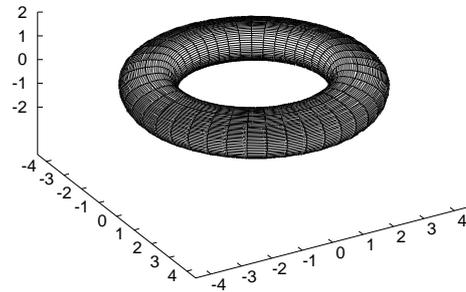
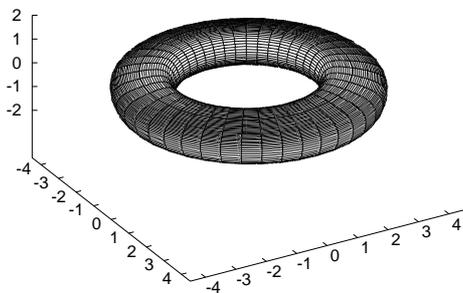
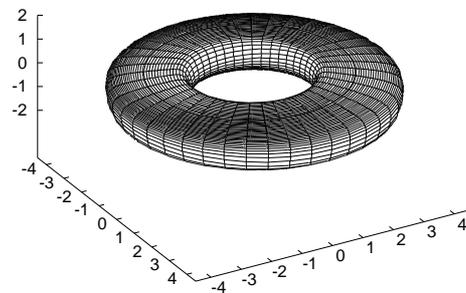
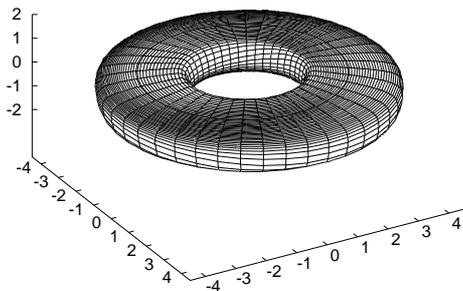
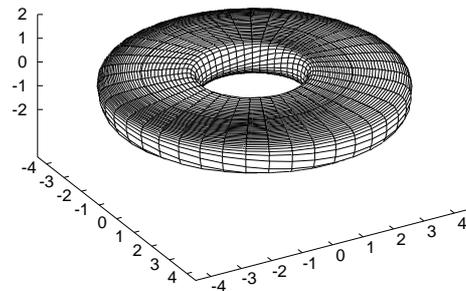
(a) $\varepsilon = 1.344$ (b) $\varepsilon = 2.000$ (c) $\varepsilon = 3.142$ (d) $\varepsilon = 5.844$ (e) $\varepsilon = 7.054$ (f) $\varepsilon = 7.818$

Abbildung 19: Darstellungen des invarianten Torus für verschiedene Parameterwerte. Um eine Darstellung als Torus zu erhalten, wurden die θ_1 - x_1 -Koordinaten mittels $\theta'_1 = r + x_1 \cos \theta_1$ und $x'_1 = r + x_1 \sin \theta_1$, mit $r = 3$, transformiert. Im Vergleich zur Finiten-Differenzen-Methode sind Konvergenzprobleme auch in der unmittelbaren Nähe starker Resonanzen (Bilder (a) und (e)) zumindest optisch nicht erkennbar.

4.2 Ein System von C. Hayashi

In [HAY75, YK95] wird das System 3. Ordnung vom Duffing-Typ:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - \frac{1}{8}(x_1^2 + 3x_3^2)x_1 + B \cos t, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{8}k_2(3x_1^2 + x_3^2)x_3 + B_0\end{aligned}\tag{4.4}$$

untersucht. Für die Parameterwerte

$$B_0 = 0.03, \quad B = 0.22, \quad k_2 = 0.05 \quad \text{und} \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

wird für kleiner werdendes $k_1 \in [0.043, 0.09]$ eine Kaskade von Torusdopplungen beobachtet, bei der offenbar ein seltsamer Attraktor entsteht. Das System (4.4) wird in [YK95] mit Hilfe der formalen Mittelungsmethode analysiert (siehe Abschnitt 2.2.2). Die Ergebnisse sollen hier zum Vergleich kurz skizziert werden.

In [HAY75, YK95] wird für die Lösungen von (4.4) der Grundwellenansatz

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y_1(t) \cos t + y_2(t) \sin t, \\ x_2(t) &= -y_1(t) \sin t + y_2(t) \cos t, \\ x_3(t) &= y_3(t)\end{aligned}$$

mit „langsam veränderlichen Amplituden“ y_i gewählt, da man an harmonischen Lösungen mit der Erregungsperiode $T_1 = 2\pi$ interessiert ist. Einsetzen in (4.4), auflösen nach y_i und Mittelung über $[0, 2\pi]$ führt auf das gemittelte System

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{1}{2}(-k_1 y_1 - A y_2), \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{2}(A y_1 - k_1 y_2 + B), \\ \dot{y}_3 &= B_0 - \frac{1}{16}k_2(3r^2 + 2y_3^2)y_3,\end{aligned}\tag{4.5}$$

mit den Größen

$$A := 1 - \frac{3}{32}(r^2 + 4y_3^2) \quad \text{und} \quad r^2 := y_1^2 + y_2^2.$$

Das gemittelte System (4.5) wurde nun mit AUTO (vgl. [DOE97]) für $k_1 \in [0.04, 0.2]$ numerisch analysiert. Das Ergebnis ist als Bifurkationsdiagramm in Abbildung 20a grafisch dargestellt. Für $k_1 = 0.2$ existiert ein asymptotisch stabiler Fixpunkt (Label 1) des Flusses von System (4.5), der in Abhängigkeit

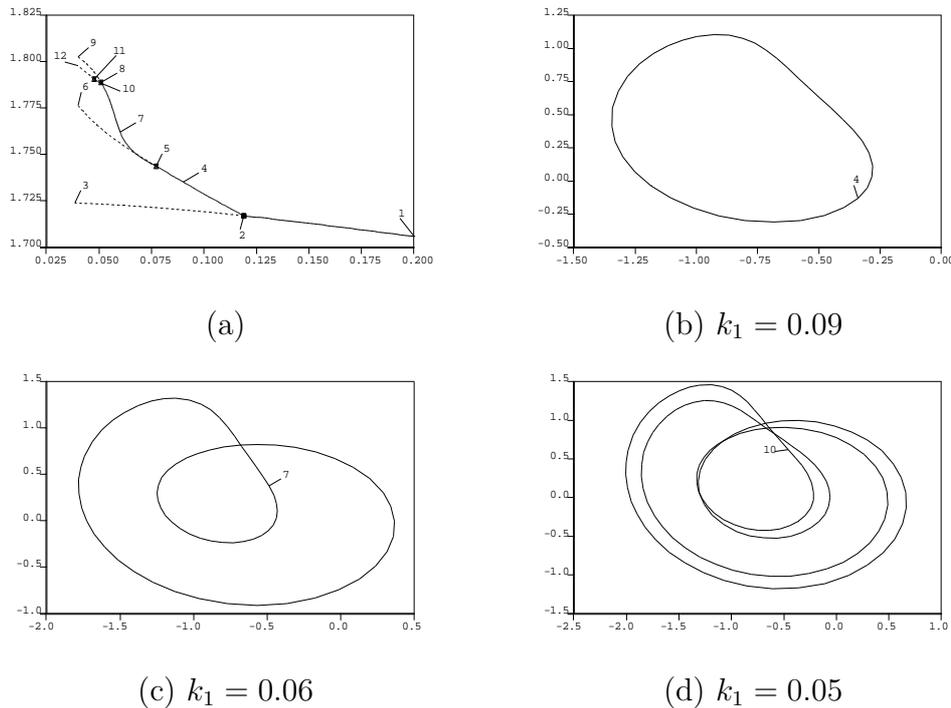


Abbildung 20: (a) Bifurkationsdiagramm für System (4.5), abgetragen ist die \mathcal{L}_2 -Norm der Lösung über k_1 . In den Bildern (b)-(d) sind Projektionen des periodischen Orbits in die y_1 - y_2 -Ebene dargestellt. Man wird erwarten, daß die Torusquerschnitte eine ähnliche Gestalt besitzen.

von k_1 verfolgt werden soll. Für kleiner werdendes k_1 tritt bei $k_1 \approx 0.1189$ eine Hopf-Bifurkation auf (Label 2) und eine Familie asymptotisch stabiler periodischer Orbits zweigt ab. Bei $k_1 \approx 0.0772$ tritt eine Periodenverdopplung auf (Label 5) und es zweigt eine weitere Familie periodischer Orbits ab. Bei $k_1 \in \{0.0509, 0.0476, \dots\}$ werden weitere Periodenverdopplungen gefunden, die offenbar eine Kaskade bilden. Für $k_1 < 0.043$ kann schließlich ein seltsamer Attraktor beobachtet werden.

Aus diesen, für das gemittelte System gewonnenen Ergebnissen, schließt man in Anlehnung an die Sätze 2.1 und 2.2 über die Mittelungsmethode auf das qualitative Verhalten von Lösungen des Ausgangssystems (4.4). Einem Fixpunkt von (4.5) wird eine periodische Lösung von (4.4) und einer periodischen Lösung von (4.5) ein invarianter 2-Torus von (4.4) zugeordnet. In der Nähe von $k_1 \approx 0.1189$ wird man in (4.4) das Auftreten einer Torus-Bifurkation und in der Nähe der Parameterwerte $k_1 \in \{0.0772, 0.0509, 0.0476, \dots\}$ das Auftreten von Torus-Dopplungen erwarten. Tatsächlich kann man mit AUTO zumindest das Auftreten einer Torusbifurkation für $k_1 \approx 0.1214$ numerisch verifizieren. Diese Interpretation wird in der nachfolgenden Tabelle zusammengefaßt, die erste Spalte enthält dabei das im Bifurkationsdiagramm (Abb. 20a) verwendete Label:

Label	Gemittelttes System (4.5)	Ausgangssystem (4.4)
1	stabile Ruhelage	stabile per. Lösung
2	Hopf-Bifurkation	Torus-Bifurkation
4	stabile per. Lösung	stabiler inv. Torus
5	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
7	stabile 2-per. Lösung	stabiler inv. Doppel-Torus
8	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
10	stabile 4-per. Lösung	stabiler inv. Vierfach-Torus
11	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
—	seltsamer Attraktor	seltsamer Attraktor

Eine Parameterfortsetzung der Toruslösungen konnte sowohl mit der Finiten-Differenzen-Methode, als auch mit der Semidiskretisierung ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden. Verfolgt wurden der einfache Torus im Intervall $k_1 \in [0.04, 0.12]$, der gedoppelte Torus im Intervall $k_1 \in [0.04, 0.8]$ und zum Vergleich auch der periodische Orbit.

Da bisher keine Algorithmen zur Bifurkationsanalyse invarianter Tori und zum Branch-Switching implementiert sind, wurden geeignete Startlösungen aus Simulationsdaten gewonnen, was im vorliegenden Beispiel aufgrund der asymptotischen Stabilität der Tori leicht möglich ist. Für geeignete Parameterwerte wurde ein eingeschwungener Orbit über einen hinreichend langen Zeitraum integriert. Für eine Torusfunktion u , auf der dieser Orbit liegt, können dann aus dem zweidimensionalen Fourier-Ansatz

$$u(t, \omega_2 t) = c_{00} + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} c_{kl} \varphi_{kl}(t, \omega_2 t)$$

mit

$$\varphi_{kl}(t, \omega_2 t) = \begin{cases} \sin \frac{k+1}{2} t \sin \omega_2 \frac{l+1}{2} t & k, l \text{ ungerade,} \\ \cos \frac{k}{2} t \sin \omega_2 \frac{l+1}{2} t & k \text{ gerade, } l \text{ ungerade,} \\ \sin \frac{k+1}{2} t \cos \omega_2 \frac{l}{2} t & k \text{ ungerade, } l \text{ gerade,} \\ \cos \frac{k}{2} t \cos \omega_2 \frac{l}{2} t & k, l \text{ gerade} \end{cases}$$

geeignete Werte für die Koeffizienten c_{kl} und die unbekannt Basisfrequenz ω_2 durch nichtlineare Ausgleichsrechnung ermittelt werden.

Es werden im folgenden zunächst die Ergebnisse der Rechnungen mit semidiskretisierten Systemen vorgestellt. Es wurden hierbei reelle Ansätze der Ordnungen $N_1 = 1, 3, 5, 7, 9$ verwendet. Die so gewonnenen autonomen Differentialgleichungen wurden mit der Finiten-Differenzen-Methode für 1-Tori mit $N_2 = 75$ Gitterpunkten für den einfachen und mit $N_2 = 151$ Gitterpunkten für den gedoppelten Torus diskretisiert.

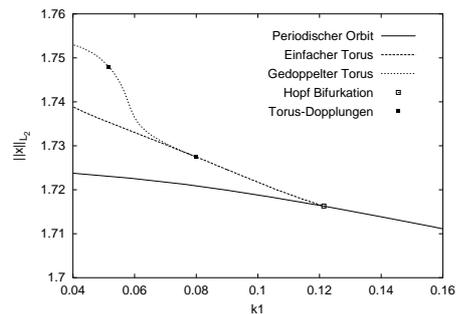
In der Abbildung rechts sind (a) das Bifurkationsdiagramm, (b) die Normen $\|y_{N_1}\|$ der N_1 -ten Koeffizientenfunktionen (vgl. Abschnitt 4.1) und (c) der geschätzte Fehler ERR der Finiten-Differenzen-Methode über dem Parameter ε abgetragen. Offenbar liegt im gesamten Parameterbereich exponentielle Konvergenz der Semidiskretisierung vor, was auch in der Darstellung der Normen der Koeffizientenfunktionen für den Ansatz der Ordnung $N_1 = 9$ in Abbildung 23 zum Ausdruck kommt. In Abbildung 21 ist der einfache Torus und in Abbildung 22 der gedoppelte Torus für ausgewählte Parameterwerte dargestellt. Man beachte, daß der einfache Torus für $k_1 < 0.0799$ und der gedoppelte Torus für $k_1 < 0.0517$ instabil sind und daher nicht mit Methoden approximiert werden können, die die Attraktivität voraussetzen.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die zur Approximation des einfachen Torus benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit von der Ansatzordnung N_1 und der Anzahl der Gitterpunkte N_2 . Auch in diesem Beispiel kann man beobachten, daß ein signifikanter Anteil der Gesamtrechenzeit (Spalten ges.) auf die Auswertung der rechten Seite bzw. deren Jacobimatrix (Spalten eval.) entfällt.

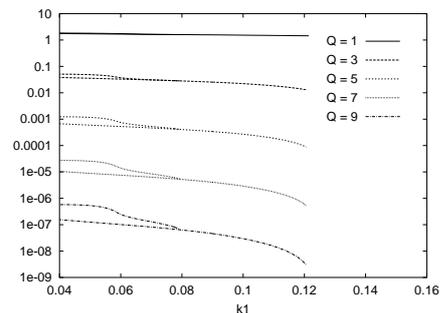
N_2	Rechenzeit*									
	$N_1 = 1$		$N_1 = 3$		$N_1 = 5$		$N_1 = 7$		$N_1 = 9$	
	eval.	ges.	eval.	ges.	eval.	ges.	eval.	ges.	eval.	ges.
51	0.3	0.6	0.9	2.1	2.3	4.8	5.4	9.1	15.8	21.9
75	0.4	0.8	1.2	3.1	3.3	7.1	7.9	14.1	22.2	31.5
101	0.5	1.1	1.6	4.8	4.4	10.7	10.8	20.7	29.9	44.2
125	0.5	1.2	1.9	5.9	5.5	13.3	13.3	25.6	37.0	54.9
151	0.7	1.6	2.3	7.2	6.6	16.9	16.0	32.2	44.4	67.3
175	0.7	1.7	2.7	8.2	7.6	22.6	18.8	41.3	52.2	84.2
201	0.8	2.0	3.0	9.4	8.8	25.8	21.4	47.3	59.2	95.4

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

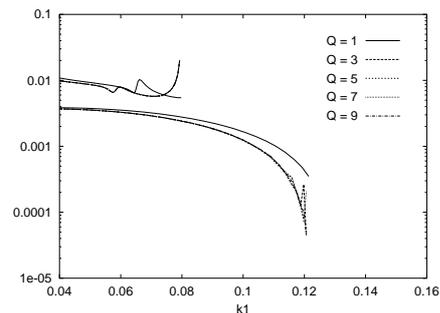
Die Rechnungen wurden für $k_1 = 0.09$ mit folgenden Parametern durchgeführt, siehe dazu auch die Abschnitte 3.1.3 und 3.1.4: DropTOL = 0.01, Restart = 35,



(a)



(b)



(c)

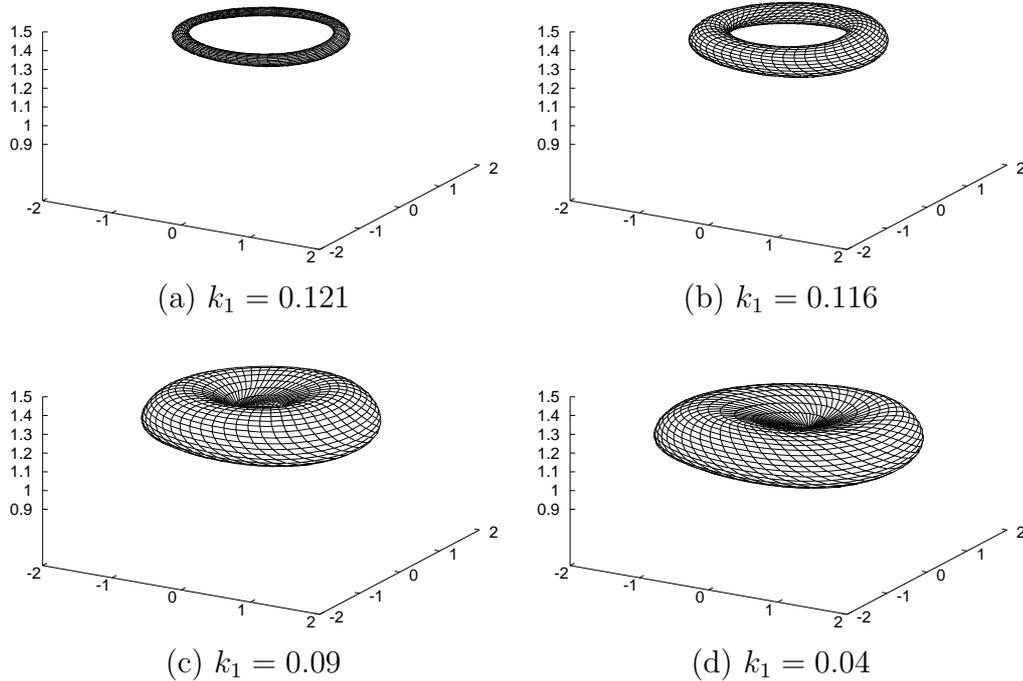


Abbildung 21: Der einfache invariante Torus des Systems (4.4) für verschiedene Parameterwerte, projiziert in die x_1 - x_2 - x_3 -Hyperebene. Es wurde ein Ansatz mit der Ordnung $N_1 = 9$ und $N_2 = 75$ Gitterpunkten verwendet.

$TOL_{\text{GMRES}} = 10^{-8}$, $TOL_{\text{Newton}} = 10^{-6}$. Die Rechenzeiten sind auf 6 Newton-Iterationen normalisiert.

Die unter Anwendung der Finiten-Differenzen-Methode gewonnenen Ergebnisse sind im Rahmen der Rechengenauigkeit mit denen der Semidiskretisierung identisch. Die Parameterfortsetzungen wurden auf einem 31×31 -Gitter für den einfachen und einem 31×61 -Gitter für den gedoppelten Torus durchgeführt.

Beide Verfahren unterscheiden sich erheblich in der benötigten Rechenzeit. In den Tabellen rechts und auf Seite 111 oben sind die geschätzten Fehler und die Rechenzeiten der Finiten-Differenzen-Methode für verschiedene Diskretisierungen des einfachen Torus angegeben. In Abbildung 24 ist der geschätzte Fehler für den periodischen Orbit und den einfachen sowie den gedoppelten Torus auf den oben angegebenen Gittern über k_1 grafisch dargestellt. Um etwa dieselbe Genauigkeit mit der Semidiskretisierung zu erreichen, genügt ein Ansatz der Ordnung $N_1 = 5$ mit $N_2 = 51$ Gitterpunkten. Für die Lösung des

N_1	N_2	h	ERR
21	21	3.0e-01	8.8439e-02
31	31	2.0e-01	4.0137e-02
41	41	1.5e-01	2.2831e-02
51	51	1.2e-01	1.4718e-02
61	61	1.0e-01	1.0273e-02
71	71	8.8e-02	7.5763e-03
81	81	7.8e-02	5.8176e-03
91	91	6.9e-02	4.6074e-03
101	101	6.2e-02	3.7391e-03

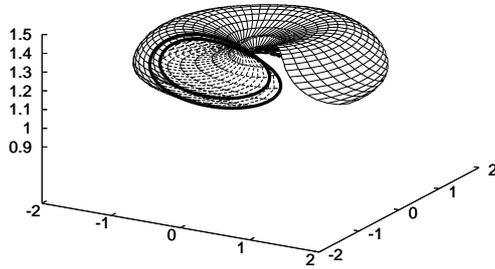
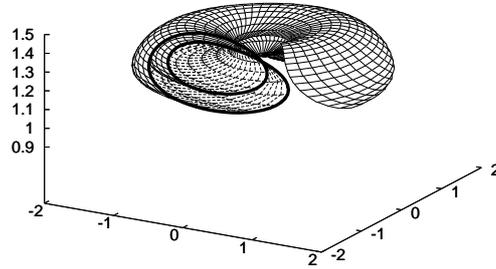
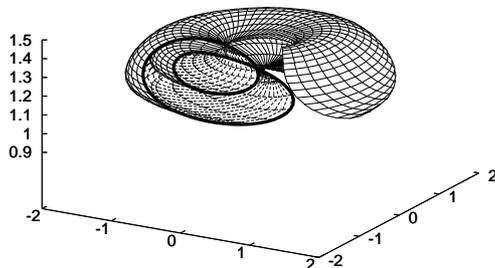
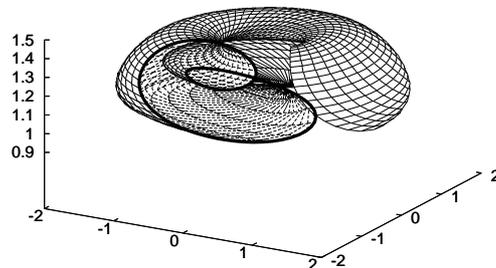
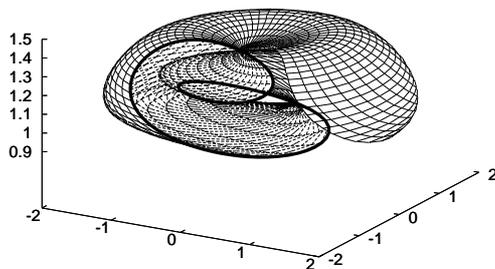
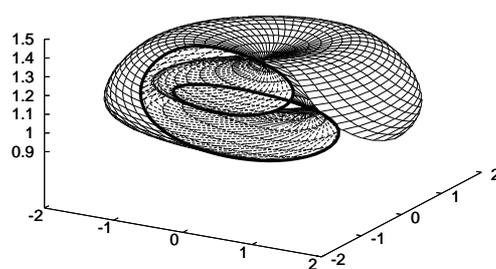
(a) $k_1 = 0.079$ (b) $k_1 = 0.077$ (c) $k_1 = 0.073$ (d) $k_1 = 0.060$ (e) $k_1 = 0.051$ (f) $k_1 = 0.039$

Abbildung 22: Der gedoppelte invariante Torus des Systems (4.4) für verschiedene Parameterwerte, projiziert in die x_1 - x_2 - x_3 -Hyperebene. Der Torus wurde aufgeschnitten und ein Querschnitt fett eingezeichnet, um die Entwicklung besser sichtbar zu machen. Verdeckte Abschnitte des Querschnitts sind nicht besonders gekennzeichnet. Es wurde ein Ansatz mit der Ordnung $N_1 = 9$ und $N_2 = 151$ Gitterpunkten verwendet.

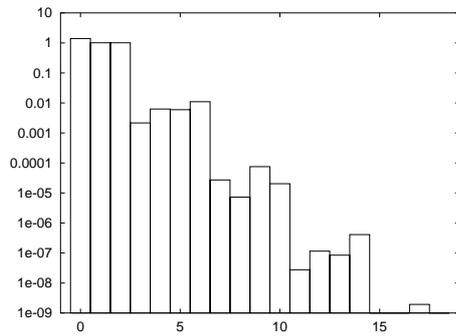
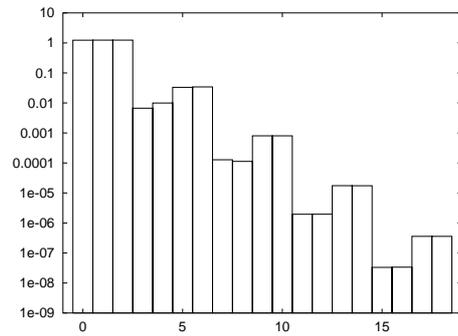
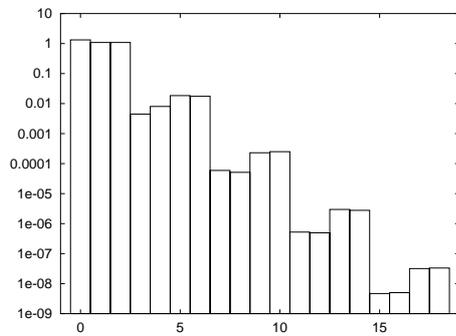
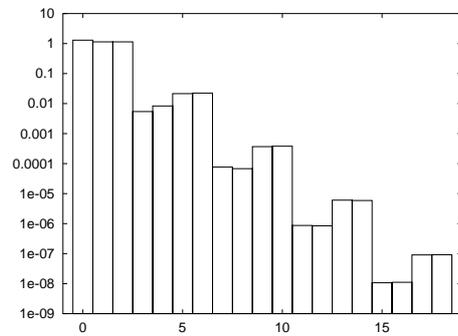
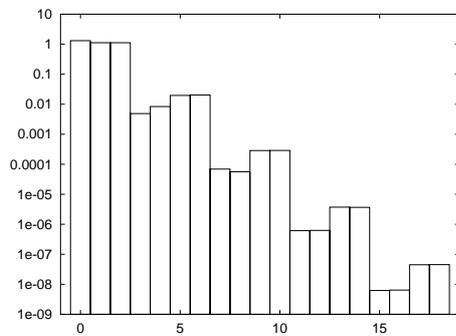
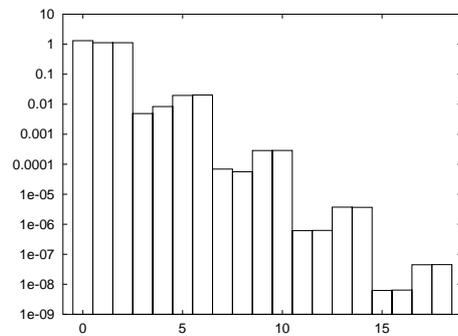
(a) $k_1 = 0.1214$ (b) $k_1 = 0.0517$ (c) $k_1 = 0.0900$ (d) $k_1 = 0.0700$ (e) $k_1 = 0.0799$ (f) $k_1 = 0.0799$

Abbildung 23: Die Normen der Koeffizientenfunktionen der Semidiskretisierung der Ordnung $N_1 = 9$ des einfachen Torus (links) und des gedoppelten Torus (rechts) für verschiedene Parameterwerte. Der exponentielle Abfall der Normen ist gut zu erkennen, auch in unmittelbarer Nähe zu den Bifurkationspunkten $k_1 = 0.1214$ (Bild a), $k_1 = 0.0799$ (Bilder e und f) und $k_1 = 0.0517$ (Bild b). Am Punkt der Torusdopplung $k_1 = 0.0799$ stimmen die Normen der Koeffizientenfunktionen des einfachen und des gedoppelten Torus erwartungsgemäß überein.

		Rechenzeit*								
		Permutation 2			Permutation 1			Permutation 0		
N_1	N_2	fill-in	1 LGS	ges.	fill-in	1 LGS	ges.	fill-in	1 LGS	ges.
21	21	8.1	0.4	3.2	10.0	0.6	4.3	20.3	1.7	9.8
31	31	9.1	1.0	8.4	11.8	1.7	12.2	28.0	7.9	43.0
41	41	10.3	2.2	20.1	13.4	3.8	27.4	35.8	22.8	122.8
51	51	11.3	4.7	39.2	16.1	8.7	59.0	---	---	---
61	61	11.9	6.7	58.1	17.6	14.5	96.3	---	---	---
71	71	12.9	11.0	83.7	19.3	24.8	159.4	---	---	---
81	81	13.9	16.5	133.4	21.1	37.3	239.4	---	---	---
91	91	15.2	26.9	204.9	23.5	63.2	385.1	---	---	---
101	101	15.9	37.9	280.9	25.4	104.1	604.8	---	---	---

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

semidiskretisierten Systems werden ca. 4.8 sec. und für die Lösung des Finiten-Differenzen-Systems ca. 8.4 sec. benötigt, die Anwendung der Semidiskretisierung bietet in diesem Beispiel einen Rechenzeitgewinn um etwa den Faktor 1.75 – 2.

Für dieses Beispiel kann mit Hilfe der in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Knotenumnumerierungen eine erhebliche Beschleunigung der Rechnung erreicht werden, wie die Tabelle oben verdeutlicht. Es sind dort die Rechenzeiten für verschiedene Permutationen in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter angegeben. Man kann ablesen, daß die Numerierung mit dem in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Algorithmus am effizientesten ist (Permutation 2), gefolgt von der diagonalen Numerierung (Permutation 1). Ohne Ummumerierung ist die Lösung des linearen Gleichungssystems mit ILU+GMRES sehr aufwendig. Bei den in den Abschnitten 4.1 und 4.3 vorgestellten Beispielen waren die beiden Permutationen aber – wie auch schon beim Testbeispiel – von Nachteil.

Die Rechnungen wurden für $k_1 = 0.09$ mit folgenden Parametern durchgeführt, siehe dazu auch die Abschnitte 3.1.3 und 3.1.4: DropTOL = 0.002, Restart = 35, $TOL_{GMRES} = 10^{-6}$, $TOL_{Newton} = 10^{-4}$. Die Gesamt-Rechenzeiten sind auf 5 Newton-Iterationen normalisiert.

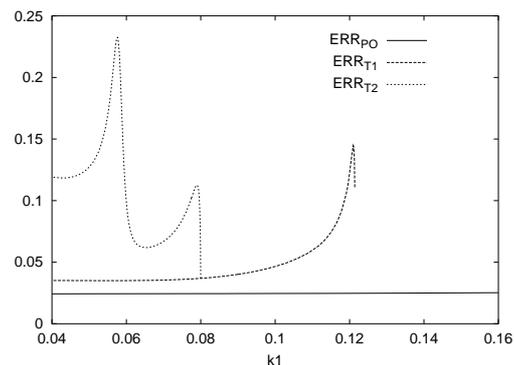


Abbildung 24: Die Entwicklung des geschätzten Fehlers ERR in Abhängigkeit vom Parameter k_1 .

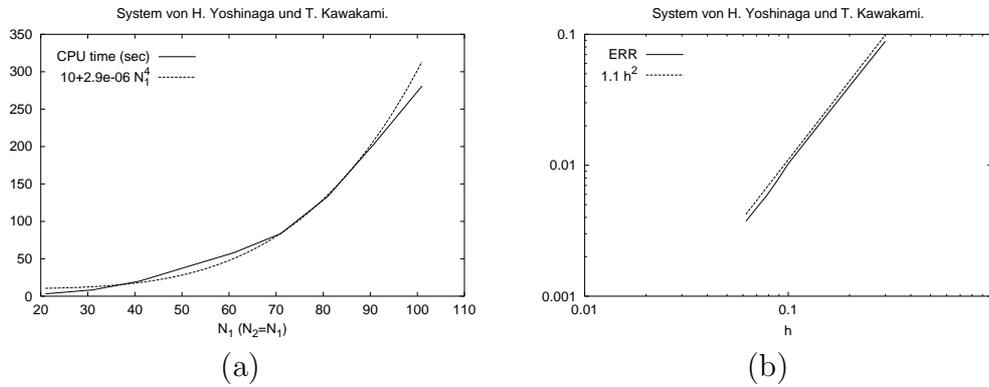


Abbildung 25: Die Entwicklung der Rechenzeit und des geschätzten Fehlers ERR in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter $N = N_1 = N_2$ bzw. der Schrittweite $h = 2\pi/N$ (vgl. mit der Tabelle mitte rechts).

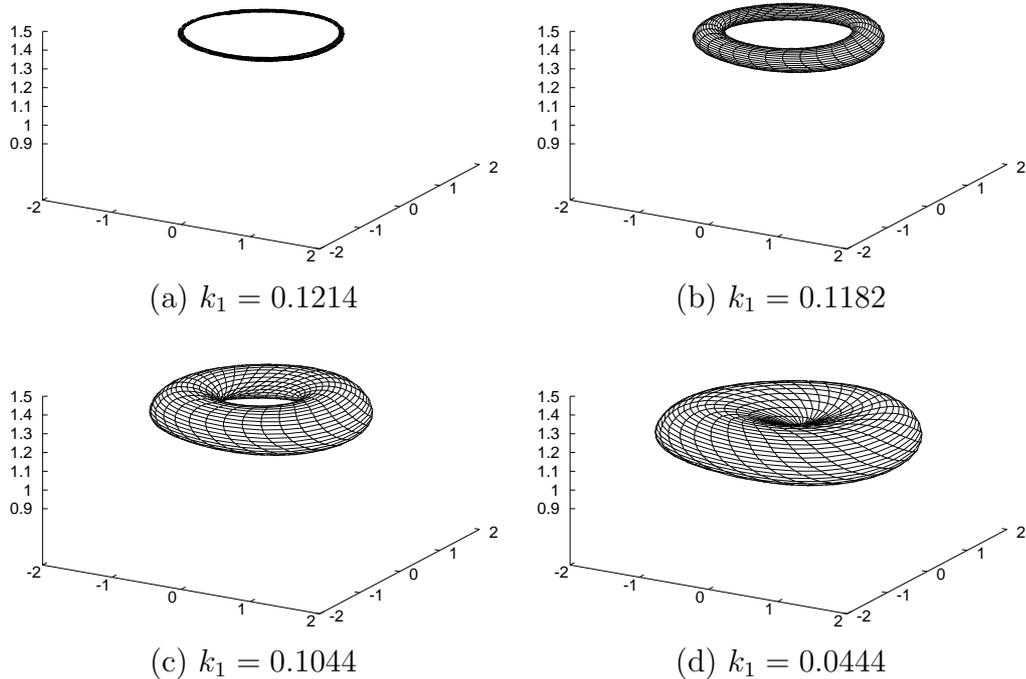


Abbildung 26: Der einfache invariante Torus des Systems (4.4) für verschiedene Parameterwerte, projiziert in die x_1 - x_2 - x_3 -Hyperebene. Es wurde auf einem 31×31 -Gitter gerechnet.

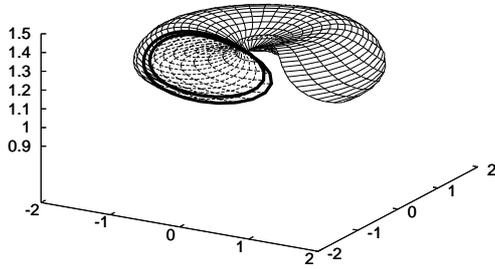
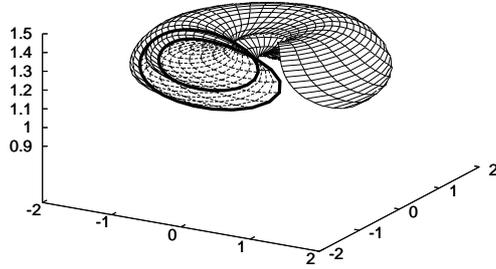
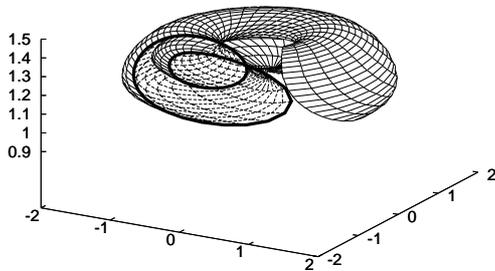
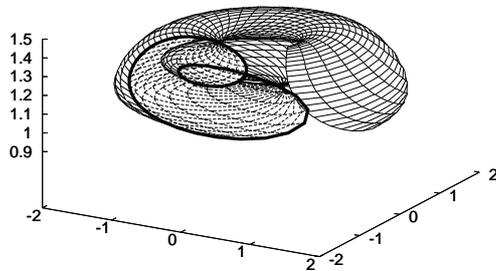
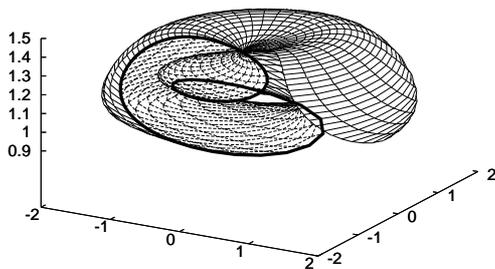
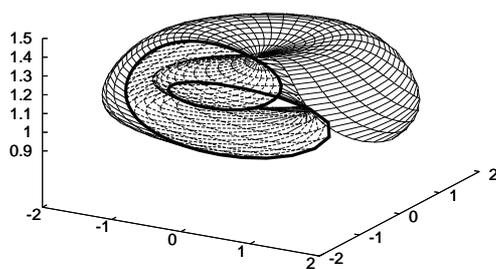
(a) $k_1 = 0.0797$ (b) $k_1 = 0.0775$ (c) $k_1 = 0.0700$ (d) $k_1 = 0.0598$ (e) $k_1 = 0.0502$ (f) $k_1 = 0.0421$

Abbildung 27: Der gedoppelte invariante Torus des Systems (4.4) für verschiedene Parameterwerte, projiziert in die x_1 - x_2 - x_3 -Hyperebene. Der Torus wurde aufgeschnitten und ein Querschnitt fett eingezeichnet, um die Entwicklung besser sichtbar zu machen. Verdeckte Abschnitte des Querschnitts sind nicht besonders gekennzeichnet. Es wurde auf einem 31×61 -Gitter gerechnet.

4.3 Zwei gekoppelte Van der Pol Oszillatoren

Als Beispiel eines autonomen Systems sollen hier zwei linear gekoppelte Van der Pol Oszillatoren untersucht werden (vgl. z.B. [BER96, GL98, GIL93, GH97]) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x &= \beta(y - x), \\ \ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y &= \beta(x - y) - \delta y, \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit dem Dämpfungsparameter $\varepsilon \geq 0$, dem Kopplungsparameter $\beta \geq 0$ und einem Verzerrungsparameter $\delta \geq 0$. Im entkoppelten Fall $\beta = 0$ besitzen die beiden Einzelsysteme für $\varepsilon > 0$ und $d \geq 0$ jeweils einen attraktiven Grenzyklus γ_1 und γ_2 . Nach den Vorbetrachtungen in Abschnitt 2.1.2 können wir annehmen, daß für $\varepsilon > 0$ und hinreichend kleine Kopplung $\beta \geq 0$ ein attraktiver invarianter 2-Torus nahe $T := \gamma_1 \times \gamma_2$ existiert. Da Systeme gekoppelter Oszillatoren bereits in Abschnitt 2.1.2 ausführlich diskutiert wurden, wollen wir uns an dieser Stelle auf die Wiedergabe der Ergebnisse der numerischen Analyse beschränken.

Das Bifurkationsdiagramm von System (4.6) ist in der Abbildung 28a dargestellt. Das Verhalten der periodischen Lösungen für Parameterwerte links oberhalb der Kurve der Torusbifurkationen ist für uns hier nicht von Interesse und wurde daher nicht weiter untersucht. Das Diagramm ist in diesem Bereich eventuell unvollständig. Abbildung 28b zeigt eine Vergrößerung des Ausschnitts $[0, 2] \times [0, 1.5]$. Möglicherweise existiert noch eine von der freien Spitze der 1:1-Arnold-Zunge ausgehende Kurve von Torus-Bifurkationen, auf der auch die anderen Arnold-Zungen enden (vgl. z.B. [BER96]).

Es wurden Parameterfortsetzungen mit der Finiten-Differenzen-Methode für die Parameterbereiche

$$\varepsilon = 1.0, \quad \beta = 0.1, \quad \delta \in [0, 10]$$

und

$$\varepsilon = 1.0, \quad \beta \in [0, 2], \quad \delta = 2.0$$

durchgeführt. Als Startlösung wurde die Funktion

$$u(\theta) = (2.00 \sin \theta_1, 2.00 \cos \theta_1, 2.00 \sin \theta_2, 2.19 \cos \theta_2)$$

mit $\omega_1 = 1.0$ und $\omega_2 = 1.17$ verwendet, die für $\varepsilon \approx 0.1$, $\delta \approx 0.2$ und $\beta \approx 0.0$ eine gute Approximation an den invarianten Torus darstellt. Die Rechnungen wurden auf einem 41×61 -Gitter durchgeführt.

Auch bei diesem Beispiel beobachten wir wie erwartet, daß bei stärkeren Resonanzen Probleme auftreten. In Abbildung 29 ist der geschätzte Fehler ERR (Bilder a und b) und darunter das Verhältnis T_1/T_2 (Bilder c und d) über dem Fortsetzungsparameter δ (links) bzw. β (rechts) dargestellt. Zum besseren Vergleich sind in den Bildern (c) und (d) wieder Linien ausgewählter Resonanzen eingezeichnet. Die Fortsetzung bezüglich δ kommt offenbar nicht über die bei $\varepsilon \approx 7.77$ bzw. $\varepsilon \approx 1.74$ auftretende 3:1- bzw. 5:3-Resonanz und die Fortsetzung bezüglich β nicht über die bei $\beta \approx 1.30$ auftretende 5:3-Resonanz hinweg.

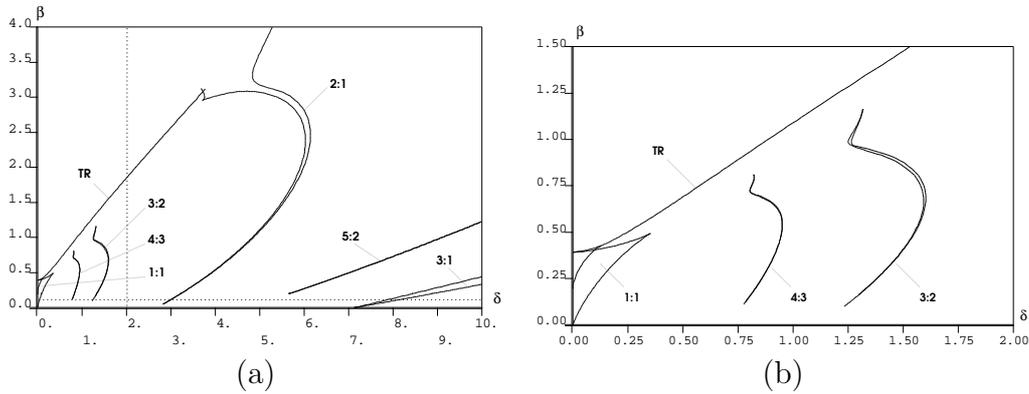


Abbildung 28: (a) Das Bifurkationsdiagramm von System (4.6) in der δ - β -Ebene mit einigen Arnold-Zungen ($p:q$) und einer Kurve von Torus-Bifurkationen (TR). Entlang der beiden gepunktet eingezeichneten Linien für $\beta = 0.1$ bzw. $\delta = 2.0$ wurden Parameterfortsetzungen des invarianten Torus durchgeführt. (b) Eine Vergrößerung des Ausschnitts $[0, 2] \times [0, 1.5]$.

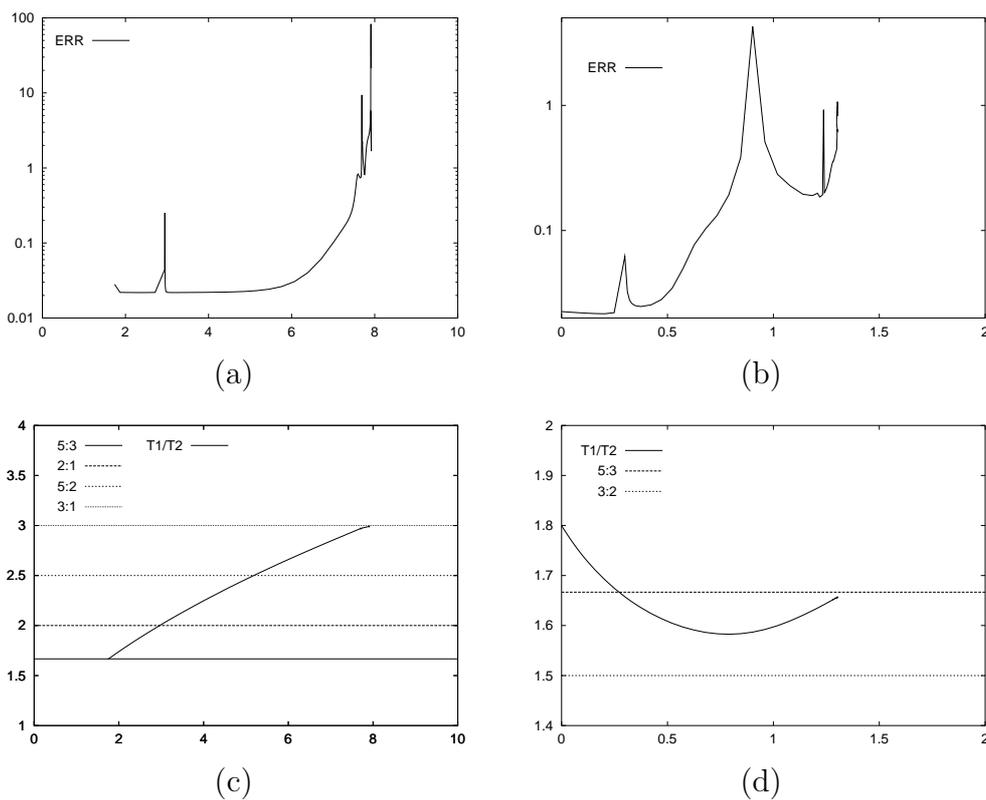


Abbildung 29: In den Bildern (a) und (b) ist der geschätzte Fehler ERR und in den Bildern (c) und (d) darunter das Verhältnis T_1/T_2 über den Parametern δ (a und c) bzw. β (b und d) dargestellt.

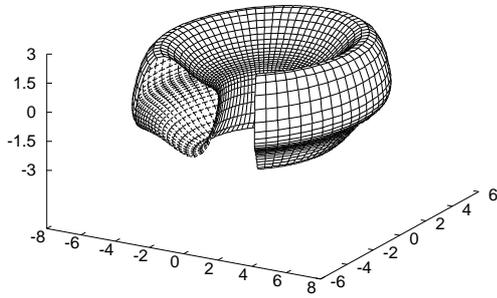
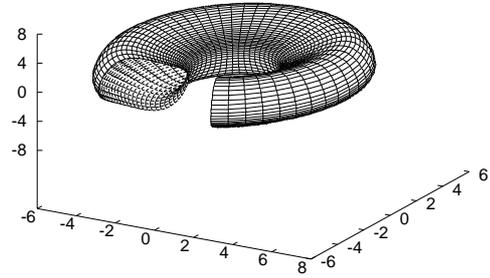
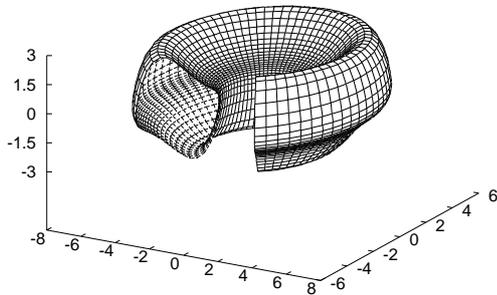
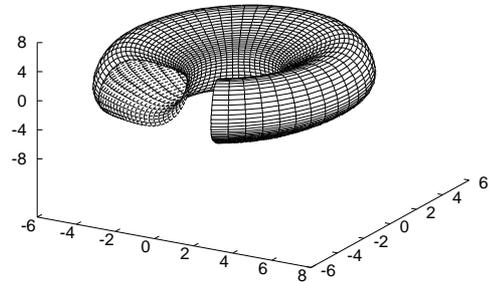
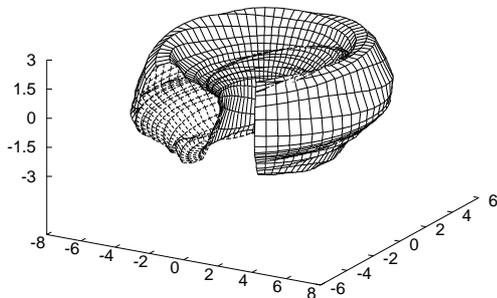
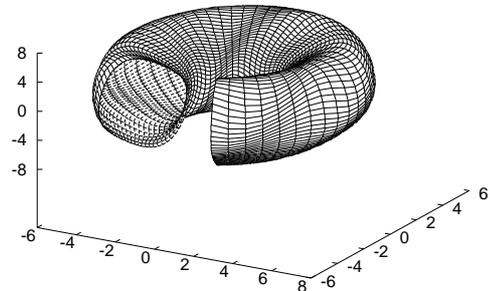
(a) $\delta = 1.739$ (b) $\delta = 1.739$ (c) $\delta = 3.708$ (d) $\delta = 3.708$ (e) $\delta = 7.748$ (f) $\delta = 7.748$

Abbildung 30: Der invariante Torus für $\varepsilon = 1.0$, $\beta = 0.1$ und verschiedene Parameterwerte δ . Um eine Darstellung als Torus zu erhalten, wurden die θ_2 - x -Koordinaten mittels $\theta'_2 = r + x \cos \theta_2$, $x' = r + x \sin \theta_2$ und die θ_1 - y -Koordinaten mittels $\theta'_1 = r + y \cos \theta_1$, $y' = r + y \sin \theta_1$, mit $r = 4$, transformiert. Die Darstellungen sind Projektionen in die θ'_2 - x' - \dot{x} - (links) und die θ'_1 - y' - \dot{y} -Hyperebenen (rechts). Man erkennt in (e) und (f) gut die gestörte Konvergenz in der Nähe der 3:1-Resonanz.

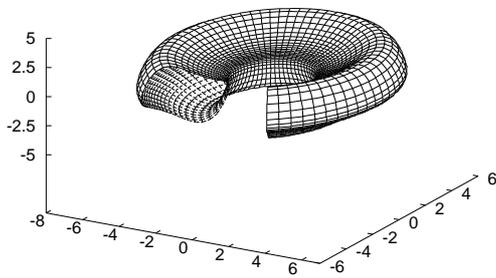
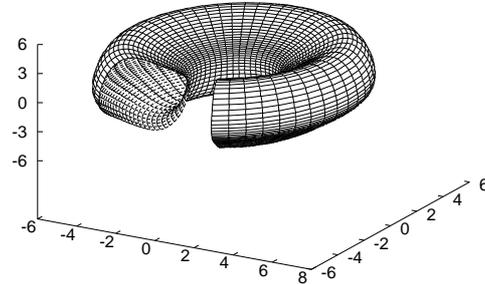
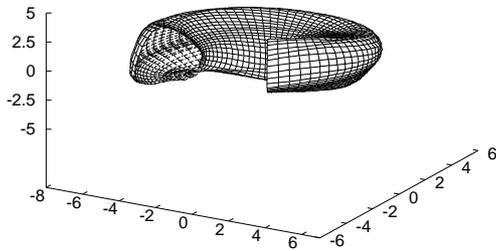
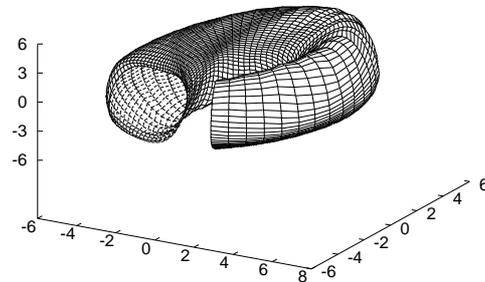
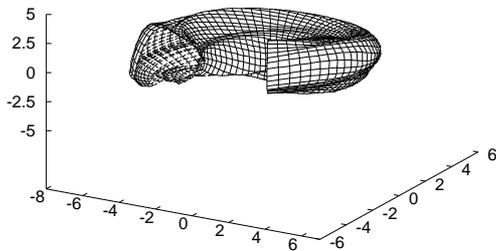
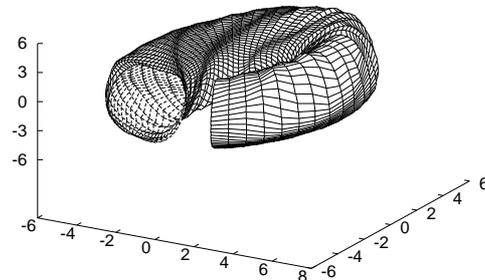
(a) $\beta = -0.040$ (b) $\beta = -0.040$ (c) $\beta = 1.256$ (d) $\beta = 1.256$ (e) $\beta = 1.298$ (f) $\beta = 1.298$

Abbildung 31: Der invariante Torus für $\varepsilon = 1.0$, $\delta = 2.0$ und verschiedene Parameterwerte β . Um eine Darstellung als Torus zu erhalten, wurden wieder die θ_2 - x -Koordinaten mittels $\theta'_2 = r + x \cos \theta_2$, $x' = r + x \sin \theta_2$ und die θ_1 - y -Koordinaten mittels $\theta'_1 = r + y \cos \theta_1$, $y' = r + y \sin \theta_1$, mit $r = 4$, transformiert. Die Darstellungen sind Projektionen in die θ'_2 - x' - \hat{x} - (links) und die θ'_1 - y' - \hat{y} -Hyperebenen (rechts). Man erkennt auch hier in (e) und (f) gut die gestörte Konvergenz in der Nähe der 5:3-Resonanz.

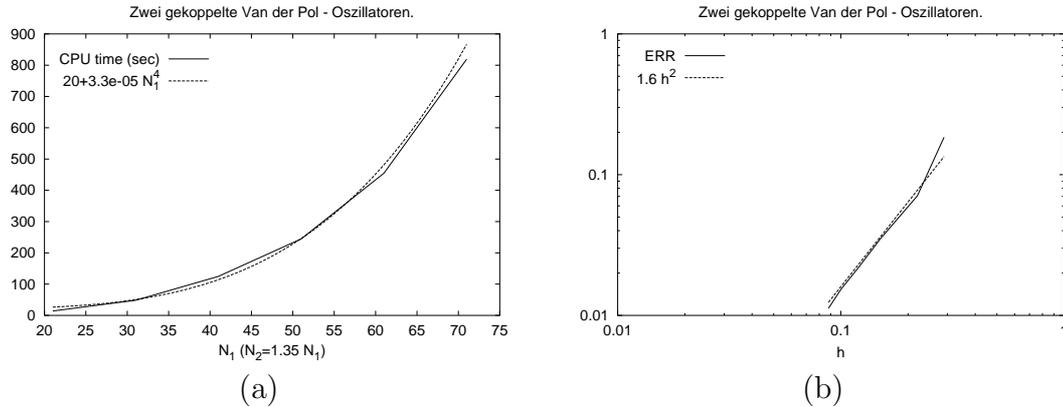


Abbildung 32: Die Entwicklung der Rechenzeit (a) und des geschätzten Fehlers ERR (b) in Abhängigkeit vom Diskretisierungsparameter $N = N_1$ bzw. der Maschenweite $h = 2\pi/N$.

Die folgende Tabelle gibt die zur Approximation des Torus für die Parameterwerte $\varepsilon = 1.0$, $\beta = 0.1$ und $\delta = 2.0$ benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit des Diskretisierungsparameters $N = N_1$ auf einem Gitter mit $N_2 \approx 1.35 N_1$ an. Die Ergebnisse sind in Abbildung 32 grafisch dargestellt. Als Startlösung wurde die am Anfang dieses Abschnitts angegebene Funktion verwendet. Man kann ablesen, daß die numerische Approximation des Torus mit dem vorgestellten Algorithmus noch sehr aufwendig ist. Eine Beschleunigung der Rechnung sollte durch eine Weiterentwicklung des Lösers für die geränderten Gleichungssysteme unter Ausnutzung der speziellen Eigenschaften des Systems und z.B. von Mehrgittertechniken erreicht werden können.

N_1	N_2	h	ERR	fill-in	Rechenzeit*	
					1 LGS	ges.
21	29	2.9e-01	1.8462e-01	12.6	2.2	14.1
31	41	2.2e-01	7.0598e-02	17.2	8.2	48.2
41	55	1.5e-01	3.4881e-02	21.1	23.0	124.7
51	69	1.2e-01	2.1896e-02	24.0	45.0	244.4
61	81	1.0e-01	1.5288e-02	27.8	82.0	454.5
71	95	8.8e-02	1.1219e-02	31.7	157.7	819.1

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Die Spalten enthalten die Maschenweite h , den geschätzten Fehler ERR, den von der ILU erzeugten fill-in, die durchschnittlich benötigte Zeit zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (1 LGS) und die Gesamt-Rechenzeit in Sekunden. Die Rechnungen wurden mit folgenden Parametern durchgeführt, siehe dazu auch die Abschnitte 3.1.3 und 3.1.4: $\text{DropTOL} = 0.005$, $\text{Restart} = 50$, $\text{TOL}_{\text{GMRES}} = 10^{-9}$, $\text{TOL}_{\text{Newton}} = 10^{-4}$. Die Gesamt-Rechenzeiten sind auf 5 Newton-Iterationen normalisiert.

Führen wir im zweiten Oszillator eine Zeitumkehr durch, so erhalten wir das System

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x &= \beta(y - x), \\ \ddot{y} - \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} - y &= -\beta(x - y) + \delta y,\end{aligned}$$

das nun einen invarianten Torus vom Satteltyp besitzt. Auch dieser konnte mit dem in dieser Arbeit entwickelten Algorithmus approximiert und verfolgt werden. In der folgenden Tabelle sind die für die Approximation des Torus benötigten Rechenzeiten und die geschätzten Fehler auf denselben Gittern wie oben angegeben. Diese Rechnungen wurden ebenfalls für $\varepsilon = 1.0$, $\beta = 0.1$ und $\delta = 2.0$ und den oben aufgeführten Verfahrensparametern durchgeführt, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten.

N_1	N_2	h	ERR	fill-in	Rechenzeit*	
					1 LGS	ges.
21	29	2.9e-01	1.8490e-01	13.6	2.9	17.6
31	41	2.2e-01	7.0852e-02	20.0	11.1	62.1
41	55	1.5e-01	3.4981e-02	24.3	27.4	151.0
51	69	1.2e-01	2.1949e-02	28.4	56.9	316.3
61	81	1.0e-01	1.5323e-02	32.3	102.9	560.2
71	95	8.8e-02	1.1245e-02	37.1	194.3	1039.8

*in sec.; Pentium III, 800MHz; 250MB RAM

Die Entwicklung des Fehlers ist bei beiden Tori nahezu identisch und die Entwicklung der Rechenzeit unterscheidet sich lediglich um einen konstanten Faktor ≈ 1.27 .

5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Algorithmus zur Approximation quasiperiodischer invarianter Tori entwickelt. Er basiert auf einer Invarianzgleichung für Tori die von einer quasiperiodischen Lösung dicht ausgefüllt werden. Für die Herleitung dieser Gleichung ist keine Transformation des Systems in (lokale) Toruskordinaten nötig, was die Konstruktion von Diskretisierungsverfahren erheblich vereinfacht und den vorgestellten Zugang von Früheren unterscheidet.

In Analogie zu periodischen Lösungen autonomer Systeme besitzt auch eine Lösung dieser Gleichung für jede unbekannte Basisfrequenz jeweils eine freie Phase, die durch Erweiterung der Gleichung um Phasenbedingungen fixiert werden können. Die hier konstruierten Phasenbedingungen sind dabei Verallgemeinerungen der für periodische Orbits bekannten Integralbedingung. Für die erweiterte Invarianzgleichung wird die Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens für Funktionen gezeigt.

Konkrete Algorithmen werden durch Diskretisierung der Invarianzgleichung mittels Finiten-Differenzen- und, für Vergleichsrechnungen, Fourier-Galerkin-Verfahren konstruiert. Diese sind unabhängig vom Stabilitätstyp des Torus. Die Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode wird unter den Einschränkungen nachgewiesen, daß das System partitioniert vorliegt und der Torus asymptotisch stabil bzw. nach Zeitumkehr asymptotisch stabil ist. Der Nachweis der Stabilität des um Phasenbedingungen erweiterten diskretisierten Systems ist noch offen.

Im Softwarepaket `torcont`, wurde eine Pseudo-Bogenlängen-Parameterfortsetzung auf der Grundlage der beschriebenen Verfahren (als Korrektor) implementiert und an zahlreichen Beispielen erfolgreich getestet, von denen eine Auswahl in der vorliegenden Arbeit diskutiert wird.

6 Abstract

This thesis presents an algorithm for the computation of quasi-periodic invariant tori. The algorithm is based on an invariance equation for tori which are densely filled by a quasi-periodic orbit. This equation is derived without introducing (local) torus coordinates, which greatly simplifies the construction of discretisation methods and distinguishes the approach discussed here from earlier ones.

Similar to periodic solutions of autonomous systems, a solution of the invariance equation has a free phase for each unknown basic frequency. These free phases can be fixed by extending the equation by phase conditions. The phase conditions given here are generalisations of the well-known integral condition for periodic orbits. It is shown that an approximate solution of the extended invariance equation can be computed using Newton's method for functions.

Concrete algorithms are constructed by discretising the extended invariance equation using finite-difference and, for comparison, Fourier-Galerkin methods. These methods are independent of the stability-type of the torus. Convergence of the finite-difference method is shown under the restrictions that the system is available in a partitioned form and that the torus is attractive or attractive after reversal of time, respectively. The proof of stability is still open for the extended system.

A pseudo-arc-length continuation based on the methods discussed here (as correctors) is implemented in the software package `torcont`. It was successfully tested on numerous examples, some of which are discussed in this thesis.

A Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Bei der Auswahl und Auswertung folgenden Materials haben mir die nachstehend aufgeführten Personen in der jeweils beschriebenen Weise unentgeltlich geholfen:

.....keine.....

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder anderer Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ich bin darauf hingewiesen worden, dass die Unrichtigkeit der vorstehenden Erklärung als Täuschungsversuch angesehen wird und den erfolglosen Abbruch des Promotionsverfahrens zu Folge hat.

Frank Schilder,
 Ilmenau, 24. September 2003.

B Thesen

The world is full of periodic and quasi-periodic motions and oscillations. That is multifrequency oscillations. Mathematically, to a large extent, that means the study of invariant tori of dynamical systems. These constitute the more systematic part of the phase space of a dynamical system as opposed to the chaotic parts and their study is just as (perhaps more) important as the study of chaos.

*Aus dem Vorwort von
A.M. Samoilenko
„Elements of the Mathematical Theory of
Multi-Frequency Oscillations“*

Numerische Approximation quasiperiodischer invarianter Tori unter Anwendung erweiterter Systeme

Thesen zur Dissertation
von Frank Schilder

Kompakte invariante Mannigfaltigkeiten, wie z.B. Fixpunkte, periodische Orbits oder invariante Tori, sind für die qualitative Analyse dynamischer Systeme von zentralem Interesse. Während für die numerische Analyse von Fixpunkten und periodischen Orbits von Flüssen z.B. mit den Programmen AUTO, CONTENT oder MATCONT allgemein anwendbare Algorithmen vorliegen, ist es bisher nicht gelungen, generell einsetzbare Verfahren für die numerische Analyse invarianter Tori und quasiperiodischer Lösungen zu entwickeln, die eine vergleichbare Leistungsfähigkeit aufweisen. Ein Hauptproblem stellt dabei die Gewinnung einer Parametrisierung des invarianten Torus dar, die für eine weitergehende Analyse geeignet ist, also z.B. eine Unterscheidung zwischen quasiperiodischen, schwach resonanten und stark resonanten Tori oder die Detektierung quasiperiodischer Bifurkationen ermöglicht.

Ein quasiperiodischer invarianter Torus ist Lösung der speziellen Invarianzgleichung

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = f(u, \theta)$$

mit den unbekanntenen Basisfrequenzen ω_i . Für den Fall $m < p$, d.h. die Anzahl der Erregungsfrequenzen ist kleiner als die Dimension des Torus, ist die Parametrisierung des Torus nicht eindeutig festgelegt, der Torus besitzt $(p - m)$ freie Phasen.

In Analogie zur Approximation periodischer Lösungen autonomer Differentialgleichungen können die freien Phasen durch Erweiterung der Invarianzgleichung um $(p - m)$ Phasenbedingungen fixiert werden, wobei wir die unbekanntenen Basisfrequenzen $\omega_{m+1}, \dots, \omega_p$ als künstliche Variablen verwenden. Angenommen, wir kennen eine Näherungslösung \tilde{u} , dann wählen wir unter allen möglichen Parametrisierungen für u^* diejenige aus, die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\|\tilde{u} - u^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

ist. Die auf diese Weise konstruierbaren Phasenbedingungen sind Verallgemeinerungen der für den periodischen Fall bekannten Integralbedingung.

Die Diskretisierung der erweiterten Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori ist nun einfach, da eine Parametrisierung des Torus auf natürliche Weise gewonnen wird und nicht aufwendig beschafft werden muß. Insbesondere ist keine a-priori Transformation der Invarianzgleichung in Toruskoordinaten nötig. Dies ist ein wesentlicher Vorteil des hier gewählten Zugangs.

Es soll an dieser Stelle aber nicht verschwiegen werden, daß die hier vorgestellten Verfahren aufgrund der Einschränkung auf quasiperiodische Tori noch nicht generell auf Systeme anwendbar sind, in denen Resonanzen mit breiten Arnold-Zungen auftreten. Die Überwindung dieser Einschränkung sollte vorrangiges Ziel einer Weiterentwicklung der vorgestellten Algorithmen sein.

In der vorliegenden Arbeit wird eine erweiterte Invarianzgleichung für quasiperiodische Tori hergeleitet und die Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens zur Approximation einer Lösung bewiesen. Speziell für den linearen Fall wird dabei die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt.

Zur numerischen Approximation von Lösungen werden Finite-Differenzen-Verfahren hoher Konsistenzordnung konstruiert, wobei die Konvergenz für den Fall $p = m$, d.h. das System ist partitioniert, bewiesen wird. Für den Fall $p > m$ ist der Nachweis der Stabilität der Verfahren noch offen. Weiter beschränken wir uns im Beweis auf den Fall asymptotisch stabiler bzw. nach Zeitumkehr asymptotisch stabiler Tori. Für die Konstruktion der Verfahren selbst werden aber keine Voraussetzungen über den Stabilitätstyp des Torus getroffen, sie sollten daher auch für die Approximation von Tori vom Satteltyp geeignet sein.

Die Finiten-Differenzen-Verfahren besitzen folgende Eigenschaften:

- Die Verfahren sind sehr leicht algorithmierbar. Es ist insbesondere keine a-priori Koordinatentransformation erforderlich, die Algorithmen arbeiten im Phasenraum des Systems.
- Die Verfahren sind durch Rekursion über die Dimension des Torus konstruierbar. Dadurch ist es praktisch möglich, quasiperiodische Tori beliebiger endlicher Dimension zu approximieren.
- Die Verfahren liefern alle Daten, durch die eine quasiperiodische Lösung eindeutig beschrieben wird, d.h. neben dem Torus auch die Basisfrequen-

zen und eine Transformation des Vektorfeldes auf dem Torus in ein konstantes Vektorfeld auf dem Standardtorus. Für $p = 2$ bestehen die von den Finiten-Differenzen-Verfahren erzeugten Gitter aus Invarianzkurven der Stroboskop-Abbildungen.

Im Softwarepaket `torcont` ist eine auf der diskretisierten erweiterten Invarianzgleichung basierende Pseudo-Bogenlängen Parameterfortsetzung implementiert, wobei eine Finite-Differenzen-Methode mit der Konsistenzordnung 4 verwendet wurde.

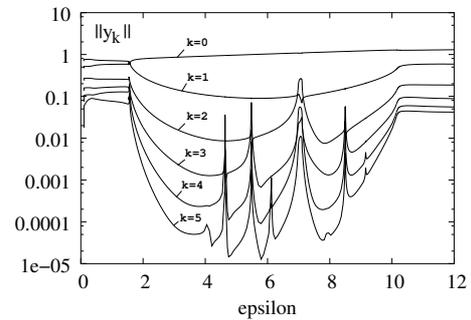
Als weitere Verfahren werden eine Semidiskretisierung und eine Volldiskretisierung mit trigonometrischen Polynomen vorgestellt und zu Vergleichsrechnungen herangezogen. Es zeigt sich dabei, daß diese Verfahren für periodisch erregte Systeme sehr effizient sind. Weiter wird ein Zusammenhang zwischen der Semidiskretisierung und der Mittelungsmethode von Krylov, Bogoliubov und Mitropolsky sowie der formalen Mittelungsmethode hergestellt.

C Korrekturen

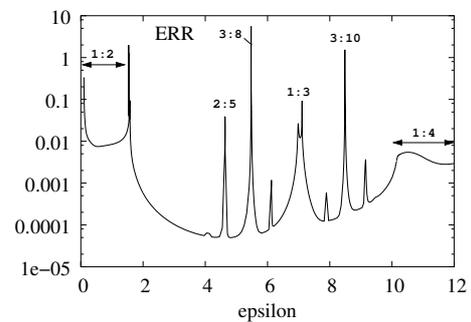
Bei der numerischen Analyse des parametrisch erregten Netzwerkes in Abschnitt 4.1 wurde zum Erzeugen des Spektralsystems eine fehlerhafte rechte Seite verwendet. Dieser Fehler wurde erst nach der Verteidigung der vorliegenden Arbeit bemerkt. Daher werden die Ergebnisse der Analyse des korrigierten Systems an dieser Stelle angegeben. Die Rechnungen wurden mit einem reellen Spektralsystem der Ordnung 5 wiederholt. Das Spektralsystem wurde mit der Finiten-Differenzen-Methode für 1-Tori auf einem äquidistanten Gitter mit 801 Gitterpunkten diskretisiert und es wurde dieselbe Startlösung wie in Abschnitt 4.1 verwendet.

In der Abbildung rechts sind (a) die Normen der Fourierkoeffizienten für jeden Fourier-Mode $k = 0, \dots, 5$, (b) der geschätzte Fehler der Finiten-Differenzen-Methode und (c) die Rotationszahl $\rho = \omega_2/\omega_1$ graphisch dargestellt. Für die Parameterwerte $\varepsilon \leq 1.8$ und $\varepsilon \geq 10$ beobachten wir ein Plateauähnliches Verhalten und sehr langsames Abklingen der Normen der Fourierkoeffizienten. Das sind genau die Parameterwerte, die in einer breiten Arnold-Zunge liegen, siehe auch Abb. 13 auf Seite 94. Mit Ausnahme einiger Peaks klingen die Normen der Fourierkoeffizienten im Intervall $\varepsilon = [1.8, 10]$ offenbar exponentiell ab. Der geschätzte Fehler in Bild (b) zeigt ein ähnliches Verhalten. Die Peaks in den Normen bzw. im Geschätzten Fehler treten für Parameterwerte auf, für die die Rotationszahl (c) bestimmte rationale (resonante) Werte annimmt. Im Bild (b) haben wir die Resonanzen angegeben, die wir anhand der gewonnenen Daten zweifelsfrei identifizieren konnten. Im Bild (c) ist insbesondere die Formierung einer sogenannten „Devil’s staircase“ zu erkennen.

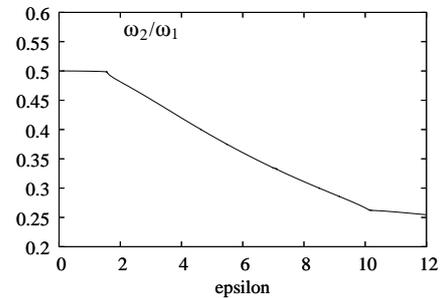
In Abb. 33 haben wir den Torus für verschiedene Parameterwerte graphisch dargestellt. Die linken Tori sind resonant und es ist gut die gestörte Konvergenz zu beobachten. Die Tori rechts sind offenbar quasiperiodisch und es treten keine Probleme bei ihrer Berechnung auf. Abschließend wollen wir hervorheben, daß die Semidiskretisierung deutlich robuster ist, als die Finite-Differenzen-Methode.



(a)



(b)



(c)

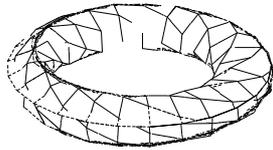
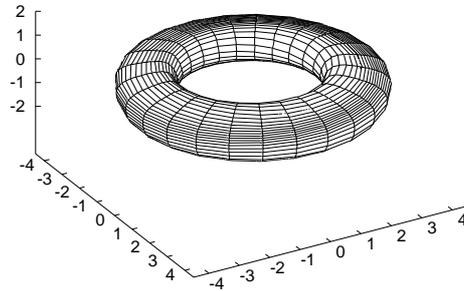
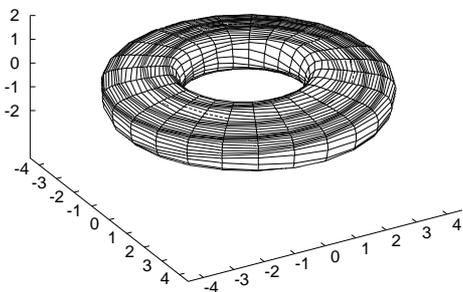
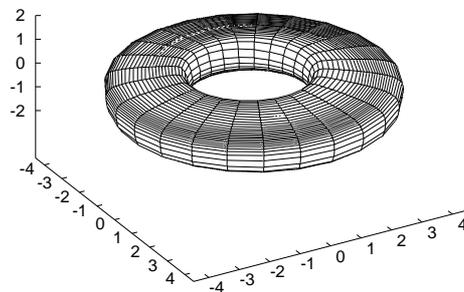
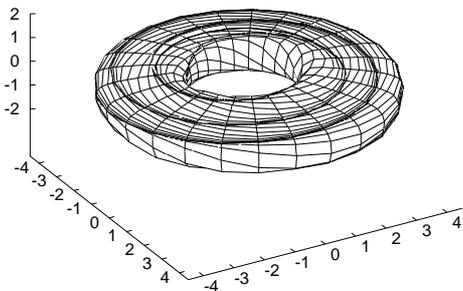
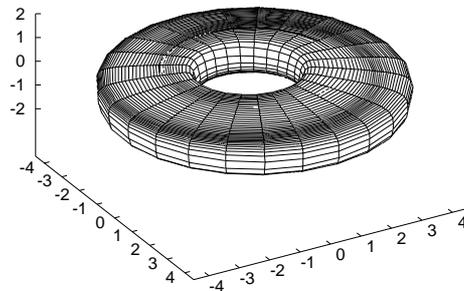
(a) $\varepsilon = 1.00$ (b) $\varepsilon = 3.00$ (c) $\varepsilon = 5.48$ (d) $\varepsilon = 6.00$ (e) $\varepsilon = 7.05$ (f) $\varepsilon = 8.00$

Abbildung 33: Darstellungen des invarianten Torus für verschiedene Parameterwerte. Um eine Darstellung als Torus zu erhalten, wurden die θ_1 - x_1 -Koordinaten mittels $\theta'_1 = r + x_1 \cos \theta_1$ und $x'_1 = r + x_1 \sin \theta_1$, mit $r = 3$, transformiert. Wie bei der Finiten-Differenzen-Methode treten bei Resonanzen Konvergenzprobleme auf, vergleiche auch die Abbildungen 15 auf Seite 96 (Finite-Differenzen-Methode) und 19 auf Seite 103 (Semidiskretisierung). Die Lücken im Gitter für $\varepsilon = 1.00$ sind Darstellungsfehler von `gnuplot`.

Literatur

- [AE99] H. AMANN, J. ESCHER: Analysis II, Birkhäuser Verlag Berlin u.a., 1999.
- [AH01] K. ATKINSON, W. HAN: Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework, Springer Verlag, 2001
- [AZ90] J. APPELL, P.P. ZABREJKO: Nonlinear superposition operators, Cambridge University Press, 1990
- [BBV95] K. BERNET, W.G. BÜNTIG, W. VOGT: Zur Numerischen Analyse von Toruslösungen nichtlinearer gekoppelter Netzwerke, 40. Int. Wiss. Koll., 1995, TU-Ilmenau, Band 3, 225-230.
- [BER96] K. BERNET: Ein Beitrag zur numerischen Approximation und Verfolgung von Toruslösungen parameterabhängiger dynamischer Systeme. Diss., TU Ilmenau, Shaker Verlag 1996.
- [BHS96] H.W. BROER, G.B. HUITEMA, M.B. SEVRYUK: Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [BHV02] H.W. BROER, A. HAGEN, G. VEGTER: Numerical approximation of normally hyperbolic invariant manifolds. Proceedings Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, May 2002, pp. 1-8, Wilmington USA.
- [BHV03] H.W. BROER, A. HAGEN, G. VEGTER: Multiple purpose algorithms for invariant manifolds, To appear in: Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2003.
- [BOV96/1] H.W. BROER, H. OSINGA, G. VEGTER: Computing a normally hyperbolic invariant manifold of saddle type, In: G.S. Ladde and M. Sambandham (Eds.), Proceedings of Dynamic Systems & Applications 2, pp. 83-90, Dynamic Publishers, 1996.
- [BOV96/2] H.W. BROER, H. OSINGA, G. VEGTER: On the computation of normally hyperbolic invariant manifolds, In: H.W. Broer, S.A. van Gils, I. Hoveijn & F. Takens (Eds.), Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 19, pp. 423-447, Birkhäuser Verlag, Basel / Switzerland, 1996.
- [BOV97] H.W. BROER, H. OSINGA, G. VEGTER: Algorithms for computing normally hyperbolic invariant manifolds, Z. angew. Math. Phys. 48(3): 480-524, 1997.
- [BV94] K. BERNET, W. VOGT: Anwendung finiter Differenzenverfahren zur direkten Bestimmung invarianter Tori. ZAMM 74 (1994), No. 6, T577-T579.

- [BV96] K. BERNET, W. VOGT: Numerical Continuation Methods for Invariant Tori, Preprint No. M 6/96, TU-Ilmenau, 1996
- [BW97] C. BREZINSKI, L. WUYTACK: Projection Methods for Systems of Equations, Elsevier Amsterdam u.a., 1997.
- [ChL98] Y. CHEN, A.Y.T. LEUNG: Bifurcation and Chaos in Engineering. Springer-Verlag, London 1998.
- [DB92] L. DIECI, G. BADER: On Approximating Invariant Tori : Block Iterations and Multigrid Methods for the Associated Systems. Preprint Nr. 658, SFB 123, Universität Heidelberg, 1992.
- [DB94] L. DIECI, G. BADER: Solution of the Systems associated to Invariant Tori Approximation. II: Multigrid Methods, In: SIAM J. Scientific Computing 15 (1994), 1375-1400.
- [DB95] L. DIECI, G. BADER: Block iterations and compactification for periodic block dominant systems associated to invariant tori approximation, Applied Numerical Mathematics 17 (1995), 251-274.
- [DGK03/1] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS, YU.A. KUZNETSOV: MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. ACM Trans. Math. Software 29 (2003), 141 - 164
- [DGK03/2] E.J. DOEDEL, W. GOVAERTS, YU.A. KUZNETSOV: Computation of Periodic Solution Bifurcations in ODEs using Bordered Systems, SIAM J. Numer. Anal. 41 (2003), S. 401-435.
- [DIE94] L. DIECI: Computation of Invariant Circles and Tori: A Brief Review, Proc.s of IMACS 14 Conference, W. Ames Editor, Vol. 3 (1994), 1211-1214.
- [DL92] L. DIECI, J. LORENZ: Block M-Matrices and Computation of Invariant Tori. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13 (1992), 885-903.
- [DL95] L. DIECI, J. LORENZ: Computation of invariant Tori by the Method of Characteristics. SIAM J. Num. Anal. 32 No. 5, (1995), 1436-1474.
- [DLR91] L. DIECI, J. LORENZ, R.D. RUSSELL: Numerical Calculation of Invariant Tori. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 12 (1991), 607-647.
- [DOE97] E.J. DOEDEL, A.R. CHAMPNEYS, TH.F. FAIRGRIEVE, Y.A. KUZNETSOV, B. SANDSTEDDE, X. WANG: AUTO 97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont), 1997
- [DXDM97] L. DINGJUN, W. XIAN, Z. DEMING, H. MAOAN: Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems, World Scientific, 1997.

- [EDOH97] K. EDOH: A numerical algorithm for the computation of invariant circles. Dean, Nathaniel (ed.), African Americans in mathematics. Proceedings of the second conference for African-American researchers in the mathematical sciences held at DIMACS, Piscataway, NJ, USA, June 26–28, 1996. Providence, RI: American Mathematical Society. DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 34, 117-122 (1997).
- [EL01] K.D. EDOH, J. LORENZ: A new algorithm for the computation of invariant curves using arc-length parametrization. In: Proceedings, International Conference on Computing and Information Technologies, World Scientific, 2001.
- [ERS00] K.D. EDOH, R.D. RUSSELL, W. SUN: Computation of invariant tori by orthogonal collocation, Applied Numerical Mathematics 32 (2000) 273-289.
- [FA89] J.G. FARRAG: Ein Beitrag zur Theorie der Systeme mit subharmonischer Reaktion, Diss. TH Ilmenau, 1989.
- [FAR94] M. FARKAS: Periodic Motions, Springer Verlag, 1994.
- [GH97] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields, Springer Verlag, 1997
- [GIL93] D.E. GILSINN: Constructing Invariant Tori for Two Weakly Coupled Van der Pol Oscillators, Nonlinear Dynamics 4 (1993), 289-308.
- [GIL95] D.E. GILSINN: Constructing Galerkin's Approximation of Invariant Tori Using MACSYMA, Nonlinear Dynamics 8 (1995), 269-305.
- [GL98] T. GE, A.Y.T. LEUNG: Construction of Invariant Torus Using Toeplitz Jacobian Matrices/Fast Fourier Transform Approach, Nonlinear Dynamics 15: 283-305, 1998.
- [HALE63] J.K. HALE: Oscillations in Nonlinear Systems. Dover Publications, New York 1992 (Reprint).
- [HAY64] C. HAYASHI: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill New Yoer u.a., 1964.
- [HAY75] C. HAYASHI: Quasi-Periodic Oscillations in Non-Linear Control Systems, In: Selected Papers on Nonlinear Oscillations, Chihiro Hayashi, Professor Emeritus, Kyoto University; Kyoto University 1975, Printed by Nippon Printing and Publishing Company, Ltd. Yoshino, Fukushima-ku, Osaka, Japan

- [H-B02] M. HANKE-BOURGEOIS: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Teubner Verlag Leipzig u.a., 2002.
- [HER01] M. HERMANN: Numerische Mathematik, Oldenburg Verlag München Wien, 2001.
- [HEU92] H. HEUSER: Funktionalanalysis, Theorie und Anwendung, 3. Auflage, Teubner Verlag Stuttgart, 1992
- [HOV95] A.J. HOMBURG, H.M. OSINGA, G.VEGTER: On the computation of invariant manifolds of fixed points, Z. angew. Math. Phys., 46 (1995), 171-187.
- [IA98] G. IOOSS, M. ADELMEYER: Topics in Bifurcation Theory and Applications, World Scientific, 1998.
- [IJ90] G. IOOSS, D.D. JOSEPH: Elementary Stability and Bifurcation Theory, 2. Auflage, Springer-Verlag, 1990
- [IOO79] G. IOOSS: Bifurcation of Maps and Applications, North-Holland Publishing Company, 1979.
- [JS99] D.W. JORDAN, P. SMITH: Nonlinear ordinary differential equations, An Introduction to dynamical systems, 3rd Ed., Oxford University Press, 1999.
- [KAA85/1] CHR. KAAS-PETERSEN: Computation of Quasi-periodic Solutions of Forced Dissipative Systems, (Reprint) St. Catherine Press Ltd., 1986.
- [KAA86] CHR. KAAS-PETERSEN: Computation of Quasi-periodic Solutions of Forced Dissipative Systems II, (Reprint) St. Catherine Press Ltd., 1986.
- [KAA87] CHR. KAAS-PETERSEN: Computation, Continuation, and Bifurcation of Torus Solutions for Dissipative Maps and Ordinary Differential Equations, In: Physica 25D (1987) 288-306, Elsevier Science Publishers B.V.
- [KASP85] I.G. KEVREKIDIS, R. ARIS, L.D. SCHMIDT, S. PELIKAN: Numerical Computations of Invariant Circles of Maps. Physica 16 D (1985), 243-251.
- [KEL75] H.B. KELLER: Approximation Methods for Nonlinear Problems with Application to Two-Point Boundary Value Problems, Mathematics of Computation (1975), Vol. 29, No. 130, 464-474.
- [KEL87] H.B. KELLER: Lectures on Numerical Methods in Bifurcation Problems, Sprinder Verlag Berlin u.a., 1987.
- [KO00] B. KRAUSKOPF, H.M. OSINGA: Investigating torus bifurcations in the forced Van der Pol oscillator, Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems (Proceedings), Springer Verlag, 2000.

- [KRE98] R. KRESS: Numerical Analysis, Springer-Verlag New York, 1998.
- [KUZ97] Y.A. KUZNETSOV: Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer Verlag, 1997
- [KUZ98] YU.A. KUZNETSOV: CONTENT - integrated environment for analysis of dynamical systems. Tutorial. Ecole Normale Supérieure de Lyon, Rapport de Recherche UPMA-98-224 (1998)
- [LM88] P. LOCHAK, C. MEUNIER: Multiphase averaging for classical systems: with applications to adiabatic theorems, Springer Verlag, 1988.
- [MEI99] A. MEISTER: Numerik linearer Gleichungssysteme, Eine Einführung in moderne verfahren, Vieweg, 1999.
- [MI96] R.E. MICKENS: Oscillations in Planar Dynamic Systems, World Scientific 1996.
- [MKM97] H. MINGYOU, T. KÜPPER, N. MASBAUM: Computation of Invariant Tori by the Fourier Methods. SIAM J. Sci. Comput. 18 (1997), 918-942.
- [MOO95] G. MOORE: Geometric Methods for computing invariant manifolds, Applied Numerical Mathematics 17 (1995) 319-331.
- [MOO96] G. MOORE: Computation and Parametrisation of Invariant Curves and Tori, SIAM J. of Numer. Anal., (1996), Vol. 33 No. 6, S. 2333-2358.
- [MOS96] E. MOSEKILDE: Topics in Nonlinear Dynamics, Applications to Physics, Biology and Economic Systems, World Scientific, 1996.
- [MU91] J.A. MURDOCK: Perturbations, Theory and Methods, John Wiley & Sons, 1991
- [NED95] F. NEDWAL: Eine direkte Methode zur numerischen Approximation geschlossener Invarianzkurven von Poincaré-Abbildungen, Diplomarbeit TU-Ilmenau (15. 9. 1995).
- [OR66] J.M. ORTEGA, W.C. RHEINBOLDT: On Discretisation and Differentiation of operators with Application to Newton's Method, J. SIAM Numer. Anal., Vol. 3, No. 1, 1966.
- [OS96] H. OSINGA: Computing Invariant Manifolds: Variations on the Graph Transform, Diss., Univ. Groningen, 1996.
- [PB92] E. PHILIPPOW, W.G. BÜNTIG: Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme der Elektrotechnik: Einführung in die numerische Untersuchung einfacher Systeme, Carl Hanser Verlag München u.a., 1992.

- [PCH89] T.S. PARKER, L.O. CHUA: Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems, Springer-Verlag New York, 1989
- [PHI71] E. PHILIPPOW: Nichtlineare Elektrotechnik, 2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1971.
- [PHS86] E. PHILIPPOW, D. SCHUCHARDT: Chaotische Lösungen bei der dreifachen Frequenzteilung, Periodica Polytechnica, Electrical Engineering, Vol. 30 No. 4, Budapest, 1986
- [PLA00] R. PLATO: Numerische Mathematik kompakt, Vieweg Verlag, 2000.
- [QSS02/1] A. QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI: Numerische Mathematik 1, Springer Verlag Berlin u.a., 2002.
- [QSS02/2] A. QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI: Numerische Mathematik 2, Springer Verlag Berlin u.a., 2002.
- [REI00] V. REICHELDT: Computing invariant tori and circles in dynamical systems, Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems (Proceedings), Springer Verlag, 2000.
- [REI01] V. REICHELDT: Berechnung invarianter Mannigfaltigkeiten in dynamischen Systemen, Dissertation an der RWTH Aachen, Verlag Mainz, Aachen, 2001
- [RH00] W.C. RHEINBOLDT: Numerical continuation methods: a perspective, J. of Comp. and Appl. Math. 124 (2000) 229-244.
- [S97] F. SCHILDER: Angepaßte Schießverfahren zur Approximation und Verfolgung invarianter 2-Tori parameterabhängiger dynamischer Systeme, Diplomarbeit, TU-Ilmenau, (1997)
- [SAMO91] A.M. SAMOILENKO: Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht u.a. 1991.
- [STE73] H.J. STETTER: Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations, Springer Verlag Berlin u.a., 1973.
- [STR89] J.C. STRIKWERDA: Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989.
- [STU94] A.M. STUART: Numerical analysis of dynamical systems, Cambridge Univ. Press, Acta Numerica (1994), 467-572.
- [SV85] J.A. SANDERS, F. VERHULST: Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. Springer Verlag, 1985.

- [S04] F. SCHILDER, *Torcont v1 (2003) User Manual*, Applied Nonlinear Mathematics Preprint 2004.18, University of Bristol, 2004.
- [SV00] F. SCHILDER, W. VOGT: Eine Spektralmethode zur Verfolgung und Analyse periodischer und quasiperiodischer Lösungen. Preprint No. M 27/00, TU Ilmenau 2000.
- [SV02] F. SCHILDER, W. VOGT: Computation and continuation of quasiperiodic solutions, Proc.s Equadiff 10 (Prag), Aug. 27-31, 2001, Papers, 363-377.
- [SV03/1] F. SCHILDER, W. VOGT: Semidiscretisation Methods for Quasiperiodic Solutions, PAMM-Proc. Appl. Math. Mech., Vol. 2 (2003), 497-498.
- [SV03/2] F. SCHILDER, W. VOGT: A Generalized Fourier Method for Quasiperiodic Oscillations in Nonlinear Circuits. Proc. 48. Int. Wiss. Koll., 22.-25. Sep. 2003, TU-Ilmenau.
- [THO95] J.W. THOMAS: Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Springer Verlag Berlin u.a., 1995.
- [TRU00] M.R. TRUMMER: Spectral methods in computing invariant tori, Appl. Num. Math. 34 (2000), 275-292.
- [VAI76] G. VAINIKKO: Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden, Teubner Verlag leipzig, 1976.
- [VB95] W. VOGT, K. BERNET: A Shooting Method for Invariant Tori. Preprint No. M 3/95, Technical University of Ilmenau, Department of Mathematics.
- [VBP92] W. VOGT, W.G. BÜNTIG, E. PHILIPPOW: Die Entstehung quasiperiodischer Lösungen in nichtlinearen Systemen der Elektrotechnik, 37. Int. Wiss. Koll., 1992, TU-Ilmenau, Band 2, 151-156.
- [VBÜ92] W. VOGT, W.G. BÜNTIG: Anwendungsorientierte neuere Verfahren zur Bestimmung und Analyse quasiperiodischer Lösungen, 37. Int. Wiss. Koll., 1992, TU-Ilmenau, Band 2, 145-150.
- [VBÜ98] W. VOGT, W.G. BÜNTIG: Non-linear Basic Circuits for Modelling Energetic Systems, In: Non-Linear Electromagnetic Systems, ISO Press Amsterdam, 1998, 531-534.
- [VEL87] M. VAN VELDHUIZEN: A new algorithm for the numerical approximation of an invariant curve. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 8 (1987), 951-962.
- [VEL88] M. VAN VELDHUIZEN: Convergence Results for invariant curve algorithms. Math. Comp. 51 (1988), No. 184, 677-697.

- [VER96] F. VERHULST: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd edition, Springer Verlag, 1996
- [VOGT83] W. VOGT: Zur Theorie und Anwendung konstruktiver Defektkorrektur-Verfahren, Diss., TU-Ilmenau, 1983
- [VOGT98] W. VOGT: Zur Konstruktion von Differenzenverfahren 2. Ordnung für quasilineare hyperbolische Systeme auf dem Torus, Preprint No. M 28/98, TU Ilmenau, 1998
- [VOGT02] W. VOGT: Zwei Anwendungen von Diskretisierungsverfahren für nichtlineare Operatorgleichungen, Preprint No. M 12/02, 2002
- [WER95] D. WERNER: Funktionalanalysis, Springer Verlag, 1995.
- [WIG90] S. WIGGINS: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer Verlag New York, 1990.
- [WIG94] S. WIGGINS: Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1994.
- [YK95] T. YOSHINAGA, H. KAWAKAMI: Bifurcations and Chaotic State in Forced Oscillatory Circuits containing Saturable Inductors. In: T. CARROLL, L. PECORA Nonlinear Dynamics In Circuits, S. 89-118. World Scientific Publishing, 1995.
- [ZEI86] E. ZEIDLER: Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, 1986
- [ZEIIIA90] E. ZEIDLER: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990
- [ZEIIB90] E. ZEIDLER: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990

Index

- \mathbb{T}^1 , 9
 \mathbb{I}_N , 78, 86
 \mathbb{T}_N^p , 51
 $[X]^n$, 8
 $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$, 25
 $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$, 25
 $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)$, 25
 \mathcal{H}_s^n , 26
 $\mathcal{H}_{s,0}^n$, 51
 $\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)$, 51
 $\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^q)$, 53
 $\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^p)$, 79, 86
 $\|x\|_{[X]^n}$, 8
 $\|x\|_{\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)}$, 26
 $\|x\|_{\mathcal{C}^r(\mathbb{R})}$, 25
 $\|x\|_{\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)}$, 25
 $\|(x, \alpha)\|_{Y \times \mathbb{R}^\nu}$, 45
 $\|u_N^q\|_{\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)}$, 54
 $\|u_N\|_{\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)}$, 52
 $\langle x, y \rangle_{[X]^n}$, 8
 $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^p)}$, 26
 $\langle (x, \alpha), (y, \beta) \rangle_{Y \times \mathbb{R}^\nu}$, 45
 $\langle u_N^q, v_N^q \rangle_{\mathbb{G}_N^q(\mathbb{T}_{N_q}^1)}$, 54
 $\langle u_N, v_N \rangle_{\mathbb{G}_N(\mathbb{T}_N^p)}$, 52
 K , 38, 58
 \tilde{K} , 40, 58
 A , 36, 57
 A_N , 59
 D , 33, 34, 57
 D_N , 52
 E_i , 52
 F , 33, 34, 40, 58
 F_N , 54, 59
 F_N^p , 54
 L , 36, 58
 L_N , 59
 L_N^q , 56
 P_N , 52, 54, 79, 86
 $\overset{\times}{F}$, 40, 58
 $\overset{\times}{F}_N$, 59
 $\overset{\times}{L}$, 49, 58
 $\overset{\times}{L}_N$, 59
 $\partial_{N,q}$, 55
 $\partial_{N,i}$, 52
 a , 41, 58
 a_N , 59
 b , 40, 58
 b_N , 59
 f_N , 52