14.— RM 20.3.28. Br.

Sammlung Schubert LII

Theorie

der

geometrischen Konstruktionen

von

August Adler

k. k. Professor a. d. Staatsrealschule im 6. Bezirke Wiens
Privatdozent a. d. techn. Hochschule in Wien

Mit 177 Figuren

Büttner 1928.

Leipzig

G. J. Göschensche Verlagshandlung

1906

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig-R.

Vorwort.

Dieses Buch ist dem Wunsche entsprungen, die anziehenden und für den Anfänger ungemein anregenden Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben in zusammenhängender Weise und mit einer gewissen Vollständigkeit darzustellen. Es setzt keine eingehenderen Kenntnisse aus der höheren Mathematik voraus; alle notwendigen Hilfssätze werden angegeben; der Beweis derselben wird aber oft nur angedeutet, so daß der kundige Leser nicht ermüdet, während der Anfänger zum Beweise dieser einfachen Sätze angespornt wird.

Um seinen Zweck als Lehrbuch zu erfüllen, sind zahlreiche Übungsaufgaben hinzugefügt worden, deren Lösungen meist kurz angegeben werden. Ein Teil des Lehrstoffes konnte in diesen Aufgaben untergebracht werden, so daß der Leser, trotz des mäßigen Umfanges des Buches, über alle rein geometrischen Fragen, welche die geometrischen Konstruktionen betreffen, orientiert wird.

Für die zur Fertigstellung dieses Werkes gewährte Unterstützung sei der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen auch hier nochmals wärmstens gedankt.

Wien, im Juli 1906.

A. Adler.

Inhaltsverzeichnis.

III. Abschnitt.

Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Schlagen von Kreisbogen. (Mascheronische Konstruktionen.)

IV. Abschnitt.

Konstruktionen mit Hilfe eines Parallellineales (zwei parallele Linien in konstantem Abstande); Konstruktionen mit Zuhilfenahme eines beweglichen rechten Winkels; Konstruktionen mit Hilfe eines beliebigen beweglichen Winkels; Konstruktionen mittels des Lineales und eines Eichmaßes; Konstruktionen mit Hilfe des Winkelhalbierers.

IX. Abschnitt.

Geschichtliche Bemerkungen über die Quadratur des Zirkels; näherungsweise Rektifikation des Kreises: Regeln für genaues Konstruieren.

X. Abschnitt.

Geometrographie.

Geschichtliche Bemerkungen.

1. Unter der Theorie der geometrischen Konstruktionen versteht man gewöhnlich die Angabe von Methoden zur Lösung vorgelegter geometrischer Konstruktionsaufgaben.

Derlei Methoden wurden auch in großer Anzahl veröffentlicht; im ersten Abschnitte dieses Buches wird von ihnen ausführlich die Rede sein.

Es gibt aber noch Fragen, welche auch zur Theorie der geometrischen Konstruktionen gehören und welche viel seltener bearbeitet wurden; im vorliegenden Buche werden sie den größten Teil des Raumes einnehmen.

2. Eine solche Frage ist die nach dem Wirkungskreise jedes einzelnen der verwendeten Zeichenhilfsmittel, d. h. die Frage: „Welche Aufgaben kann man mit jedem der Zeichenhilfsmittel allein, welche mit mehreren zusammen streng lösen?

Mascheroni hat 1797 in seinem berühmten Werke „La Geometria del Compasso" gezeigt, daß man alle geometrischen Konstruktionen, die man sonst mit dem Zirkel und Lineal ausführt, also alle sogenannten geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades nur mit Hilfe des Zirkels allein lösen kann. Diese Konstruktionen sind für manche praktische Zwecke, z. B. für die Kreisteilung besonders vorteilhaft, da der Zirkel ein genaueres Zeicheninstrument ist als das Lineal, mit welchem man die geraden Linien zieht.

Bald darauf haben französische Geometer sich bestrebt, möglichst viele Aufgaben durch Ziehen von geraden Linien allein zu lösen.

Schon Lambert hatte („Freie Perspektive“ 1774) derartige Konstruktionen, welche für die Perspektive und die Feldmeßkunst von Wert sind, gesucht und gefunden. Brianchon hat 1818 über diese Konstruktionen eine Schrift veröffentlicht: „Les applications de la théorie des transversales“.

Besonders berühmt ist das Werk: „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“ geworden, welches Jakob Steiner 1833 veröffentlichte. In diesem Werke lehrt Steiner Konstruktionen, welche durch bloßes Ziehen von geraden Linien ausgeführt werden können, wenn gewisse gezeichnete Figuren, z. B. ein Parallelogramm, ein Quadrat oder ein Kreis gezeichnet vorliegen. Er beweist darin insbesondere folgenden Satz, welcher seinen Namen trägt:

„Bei Benutzung eines beliebigen, gezeichnet vorliegenden Kreises (samt Mittelpunkt) kann man jede geometrische Konstruktionsaufgabe zweiten Grades durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen.“

Es muß übrigens bemerkt werden, daß sehr viele der Konstruktionen, welche Steiner in diesem Werke anführt, schon in Lambert, „Freie Perspektive“ 1774 vorkommen, und daß sein Hauptresultat, welches wir anführten, in Poncelet, „Traité des propriétés projectives“, Paris 1822, pag. 187—190 bereits ausgesprochen ist.

Gauß bewies in seinen berühmten „Dispositiones arithmeticae“, daß die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes mit Zirkel und Lineal möglich ist.

Dieselbe wurde in besonders eleganter Weise von v. Staudt, Crelle Journal 24, 1842 ausgeführt und später von Schröter vereinfacht.

Kortum und Smith zeigten in zwei von der Berliner Akademie 1866 mit dem Steiner-Preise gekrönten Arbeiten, daß man imstande ist, jede geometrische Aufgabe dritten und vierten Grades nur durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Schlagen von Kreisbogen zu lösen, wenn ein

Kegelschnitt, der aber kein Kreis sein darf, gezeichnet vorliegt.

In einer Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen“, Wiener Akademie, 1890, wurde gezeigt, wie man das Prinzip der reziproken Radien zur Lösung der Aufgaben mit dem Zirkel allein vorteilhaft heranziehen kann.

In einer zweiten Arbeit „Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel“, Wiener Akademie 1890, wurde bewiesen, daß man auch mit dem Lineal (zwei parallele Linien in konstantem Abstande), mit einem beweglichen rechten oder spitzen Winkel allein imstande ist, jede geometrische Aufgabe zweiten Grades streng zu lösen, daß also jedes der gebräuchlichen Zeichenhilfsmittel, Zirkel, Lineal, beweglicher Winkel für sich allein genügt, um alle quadratischen, geometrischen Aufgaben strenge zu lösen; es wurde daselbst auch gezeigt, daß der rechte Winkel das mächtigste Zeicheninstrument ist, indem man mit zwei rechten Winkeln Aufgaben dritten und vierten Grades streng lösen kann.

In den „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert, Leipzig 1903, spielen die Konstruktionen, welche durch Ziehen von geraden Linien und Übertragen von Strecken gelöst werden können, eine besondere Rolle. Die Ausführung derselben wurde von Feldblum, „Über elementar-geometrische Konstruktionen“, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1899, gegeben.

Erwähnt müssen noch werden: H. Simon, „Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel“ (Zeitschrift f. math. u. nat. Unterr. XXII, 1891), und G. Wallenberg: „Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß sowie mit dem Lineal allein“ (Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft IV, 1905).

3. Mit allen diesen Arbeiten wurden die Betrachtungen über den Wirkungskreis der gebräuchlichen Zeichenhilfsmittel zu einem gewissen Abschlusse gebracht.

Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen gehört aber noch die Klassifikation der geometrischen Aufgaben, d. h. die Einteilung derselben in

1*

visuelle und metrische, in Aufgaben zweiten, dritten, vierten und höheren Grades. Davon wird späterhin ausführlich die Rede sein.

4. In die Theorie der geometrischen Konstruktionen gehören auch gewisse Unmöglichkeitsbeweise; es muß z. B. gezeigt werden, daß es unmöglich ist, einen beliebigen Winkel mittels Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu zerlegen, daß die Verdoppelung des Würfels in demselben Sinne nicht möglich ist und daß insbesondere das altberühmte Problem der Quadratur des Zirkels mit gewissen Hilfsmitteln nicht lösbar ist, ein Satz, der 1882 von Lindemann zuerst streng bewiesen wurde.

5. Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen gehört auch die Frage nach der Genauigkeit einer mit den gebräuchlichen Hilfsmitteln ausgeführten Zeichnung. Jedes zeichnerisch gefundene Resultat ist nämlich fehlerhaft. Der konstruktiv gefundene Punkt befindet sich nicht auf dem Orte, welchen er bei idealer Vollkommenheit sämtlicher verwendeten Zeichenhilfsmittel einnehmen würde, er liegt innerhalb eines gewissen Bereiches um diese Stelle, welchen Bereich man als eine Ellipse annehmen kann.

Es entsteht bei jeder ausgeführten Konstruktion die Aufgabe, wenigstens ungefähr die Genauigkeit derselben zu bestimmen, und daraus entsteht wieder die Aufgabe, die Konstruktion so einzurichten, daß der wahrscheinliche Fehler im Resultate möglichst klein wird. Derartige Untersuchungen wären praktisch sehr wichtig; sie wurden erst vor kurzem in Angriff genommen; in dem Werke über „Darstellende Geometrie“ von Wiener, 1. Bd., S. 185—191 findet man einiges über diese Frage.

In jüngster Zeit wurde über Anregung von Lemoine wenigstens erreicht, daß die Konstruktionen, welche früher gewöhnlich nur durchgedacht wurden, auch tatsächlich durchgezeichnet werden, ihr Einfachheitsgrad nach den von Lemoine gegebenen Annahmen bestimmt und insbesondere jene (geometrographischen) Konstruktionen gesucht wurden, für welche der Einfachheitsgrad möglichst klein wird.

Lemoine wendet nur den Zirkel und die gerade Linie an; läßt man auch das Lineal und den rechten Winkel als Konstruktionshilfsmittel zu, wie es in der Praxis der Fall ist, so gelangt man zu anderen Konstruktionen und insbesondere auch zu anderen geometrographischen Lösungen, wie am Schlusse der vorliegenden Arbeit gezeigt werden soll.

6. Über die Theorie der geometrischen Konstruktionen existieren bisher zwei Werke:

F. Klein: „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementar-Geometrie", Leipzig 1895, und F. Enriques, „Questioni Riguardanti La Geometria Elementare", Bologna 1900; beide Werke sind im folgenden oft benutzt worden.

I. Abschnitt.

Methoden zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

1. Jede geometrische Konstruktion löst eine geometrische Konstruktionsaufgabe.

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe fordert das Zeichnen einer Figur, welche gewissen Bedingungen genügt.

Sind soviele Bedingungen gegeben, als zur Bestimmung der gesuchten Figur notwendig und hinreichend sind, so sagt man, die Aufgabe ist bestimmt. Sie kann dann eine, zwei, auch mehrere Lösungen haben; man nennt sie dementsprechend eindeutig, zweideutig, mehrdeutig.

Sind weniger Bedingungen gegeben, als zur Bestimmung der Figur notwendig sind, so gibt es unzählig viele Figuren, welche der Aufgabe genügen. Die Aufgabe ist unbestimmt.

Sind mehr Bedingungen gegeben, als hinreichend sind, so ist die Figur überbestimmt; die Aufgabe ist dann im allgemeinen nicht lösbar.

2. Bei der Auflösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe geht man gewöhnlich folgendermaßen vor:

Man nimmt die zu suchende Figur als bekannt an und studiert unter Zuhilfenahme der Methoden, welche wir gleich kennen lernen werden, die Figur so lange, bis der Weg klar ist, auf welchem die Aufgabe mittels der vorgelegten Zeichenhilfsmittel gelöst werden kann.

Hierauf kann man die Konstruktionsaufgabe durchführen. Es ist aber dann noch notwendig zu zeigen, daß die erhaltene Figur den verlangten Bedingungen genügt, d. h., daß die Konstruktion richtig ist.

Endlich ist noch die Diskussion der ganzen Aufgabe nötig, d. h. die Untersuchung, wie viele Lösungen die Aufgabe hat, wie die Anzahl der Lösungen von den gegebenen Größen abhängt usw.

Bei der Ausführung jeder geometrischen Konstruktionsaufgabe sind also vier Punkte zu beachten:

1. Die Analyse der geometrischen Konstruktionsaufgabe,
2. die Ausführung der Konstruktion,
3. der Beweis für die Richtigkeit der Lösung,
4. die Determination.

3. Als Konstruktionshilfsmittel werden wir in diesem Abschnitte nur Zirkel und Lineal zulassen, andere Hilfsmittel werden erst in den kommenden Abschnitten verwendet werden.

§ 1. Die Methode der algebraischen Analyse.

1. Sind $a, b, c, \ldots$ gegebene Strecken, so kann man bekanntlich mit Zuhilfenahme des Zirkels und des Lineals, also durch Ziehen von geraden Linien und Kreisbogen leicht folgende Strecken finden:

$$a + b, \quad a - b, \quad \frac{ab}{c}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Grundoperationen kann man auch kompliziertere Ausdrücke zeichnen, z. B. den Ausdruck:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - cd},$$

indem man

$$cd = y^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{b^2 - y^2} = z$$

setzt; es ist dann:

$$x = \sqrt{a^2 + z^2};$$

y, z, x sind nach obigem konstruierbar. Ist

$$x = \frac{a^3 b^2}{c^2 d^2}$$

zu finden, so setze man:

$$\frac{a\,b}{c} = u_1\,, \qquad \frac{a\,u_1}{c} = u_2\,, \qquad \frac{a\,u_2}{d} = u_3\,,$$

dann ist

$$x = \frac{u_3\,b}{d}\,;$$

u_1, u_2, u_3, x sind leicht zu zeichnen.

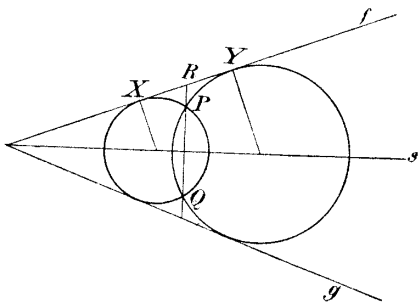

Fig. 1.

Auch folgender Ausdruck z. B. wird konstruierbar sein:

$$x = \frac{a\,b + \sqrt{c^2 d^2 - \sqrt{e^4 - f^3 g}}}{\sqrt{m^2 + n^2 + \frac{p\,q}{r}}}\,,$$

wobei a, b, c usw. gegebene Strecken sind.

Überhaupt wird jeder Ausdruck konstruierbar sein, welcher aus gegebenen Strecken durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren) und durch Quadratwurzelziehen hervorgeht.

2. Darauf beruht die sehr verwendbare Methode der algebraischen Analyse zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben:

„Man trachte eine, das gesuchte Resultat unmittelbar bestimmende Größe (z. B. Strecke) aus den gegebenen Größen zu berechnen (eventuell mit Zuhilfenahme der analytischen Geometrie) und konstruiere dann das gefundene Resultat."

3. Dies soll an einigen Beispielen erläutert werden:

1. Beispiel. Gegeben sind zwei Gerade f, g und ein Punkt P; es sind jene Kreise zu konstruieren, welche durch P gehen und die beiden geraden Linien berühren.

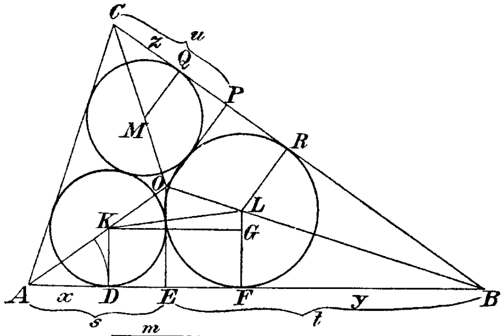

Fig. 2.

Man denke sich die Aufgabe gelöst (Fig. 1); dann ist

$$\overline{RX}^2 = \overline{RP} \times \overline{RQ}\,,$$

wobei Q das Spiegelbild des Punktes P bezüglich der Winkelsymmetralen bedeutet. Daraus folgt

$$RX = \sqrt{RP \cdot RQ}\,.$$

2. Beispiel. Gegeben ist ein Dreieck ABC; drei Kreise sind zu konstruieren so, daß jeder von ihnen die beiden anderen Kreise und zwei Dreieckseiten berührt (Malfattisches Problem*)). Wir nehmen die Aufgabe als gelöst an (Fig. 2). O sei

*) Diese berühmte Aufgabe wurde zuerst von Malfatti behandelt (Memorie di matematica Tomo X parte I, Modena 1803). Dieselbe Aufgabe wurde hierauf oft bearbeitet. Eine rein geometrische Lösung gab Steiner 1826 ohne Beweis in der Abhand-

der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises (mit dem Radius r). Die Radien der Kreise K und L seien r_1 resp. r_2. Nun fällen wir aus K, O, L Senkrechte auf die Seite AB, wodurch die Punkte D, E, F erhalten werden. Die Strecke AE sei gleich s und die Strecke $BE = t$, ferner sei $AD = x$ und $BF = y$.

Zieht man $KG \parallel AB$, so ist

$$LG = r_2 - r_1 \quad \text{und} \quad KG = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}\,.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADK und AEO folgt

$$r_1 = \frac{x r}{s}\,;$$

analog $r_2 = \dfrac{y r}{t}$ aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BFL und BEO.

Nun ist

$$AB = AD + DF + FB\,,$$

folglich:

$$x + y + 2\sqrt{r_1 r_2} = s + t$$

oder (indem wir die Werte für r_1 und r_2 einsetzen)

$$(1) \qquad x + y + \frac{2r}{\sqrt{st}}\sqrt{xy} = s + t\,.$$

Fällt man von L, M und O Senkrechte auf die Seite BC, setzt $PC = u$ und $QC = z$, so ergibt sich die Gleichung:

$$(2) \qquad y + z + \frac{2r}{\sqrt{tu}}\sqrt{yz} = t + u$$

und analog für die dritte Seite die Gleichung:

$$(3) \qquad z + x + \frac{2r}{\sqrt{us}}\sqrt{zx} = u + s\,.$$

Wir haben also drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z.

---

lung „Einige geometrische Betrachtungen", Crelle J. I. Bd. Der Beweis dafür wurde von Schröter (1874, Crelle Bd. 77) gegeben. Einen anderen Beweis der Steinerschen Auflösung gibt Petersen in seinen wertvollen „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben", ins Deutsche übersetzt von Fischer-Benzon 1879.

Malfatti teilte die Lösungen dieser drei Gleichungen mit:

Es sind

$$2x = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}\,,$$

$$2y = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}\,,$$

$$2z = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}\,.$$

Setzt man diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so genügen sie denselben. Der Weg, auf welchem Malfatti die Lösungen fand, ist sehr kompliziert, wie er selbst angibt.

Die geometrische Konstruktion von x, y, z gestaltet sich aber recht einfach, nachdem

$$\sqrt{r^2 + s^2} = OA\,, \quad \sqrt{r^2 + t^2} = OB\,, \quad \sqrt{r^2 + u^2} = OC$$

sind, also ebenso wie s, t, u und r leicht gefunden werden können.

Konstruiert man nun den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(OA + OB + OC - s - t - u + r) = m\,,$$

so sind schon:

$$x = OA - m$$

$$y = OB - m$$

$$z = OC - m \quad \text{(Fig. 2)}.$$

3. Beispiel. Gegeben sind drei Kreise K_1, K_2, K_3; die Mittelpunkte derselben sollen in einer geraden Linie liegen und die Radien von K_2 und K_3 gleich r_2 sein; letztere beiden Kreise sollen auch von $K_1(r_1)$ denselben Zentralabstand a haben. Es sind alle Kreise zu konstruieren, welche die drei gegebenen Kreise berühren (Fig. 3).

Um diese Aufgabe durch Rechnung zu lösen, legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde. Die Gleichungen der drei gegebenen Kreise sind dann

$$K_1 \ \ldots \qquad x^2 + y^2 = r_1^2\,,$$

$$K_2 \ \ldots \ (x - a)^2 + y^2 = r_2^2\,,$$

$$K_3 \ \ldots \ (x + a)^2 + y^2 = r_2^2\,.$$

Die Gleichung jedes der gesuchten Kreise wird die Form haben:

$$(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 = \varrho_i^2 .$$

Für den Kreis O_1 (Fig. 3) lassen sich leicht die drei Gleichungen für die Unbekannten p_1, q_1, ϱ_1 aufstellen, aus den Bedingungen

$$\overline{O_1 K_1} = \varrho_1 + r_1 ,$$
$$\overline{O_1 K_2} = \varrho_1 + r_2 ,$$
$$\overline{O_1 K_3} = \varrho_1 + r_2$$

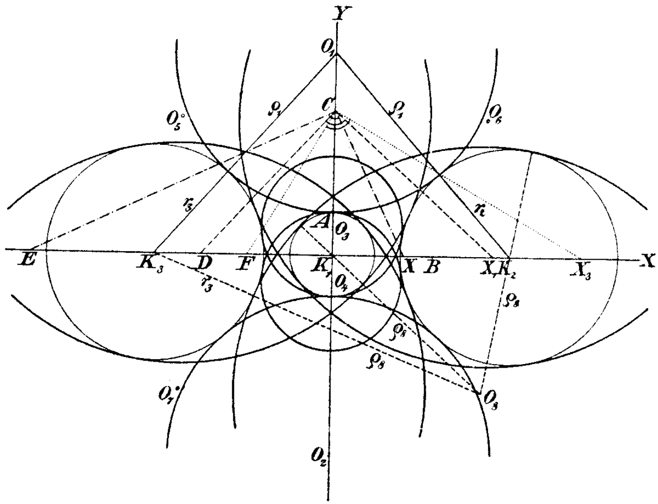

Fig. 3.

ergeben sich die drei Gleichungen

$$p_1^2 + q_1^2 = (\varrho_1 + r_1)^2 ,$$
$$(p_1 - a)^2 + q_1^2 = (\varrho_1 + r_2)^2 ,$$
$$(p_1 + a)^2 + q_1^2 = (\varrho_1 + r_2)^2 .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt $p_1 = 0$ und daraus ohne weiteres

(1) $$\varrho_1 = \frac{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2(r_2 - r_1)} = \varrho_2 ,$$

denn der Radius des Kreises O_2 ist gleich dem Radius ϱ_1 des Kreises O_1 (Fig. 3).

Der Kreis O_3 berührt die Kreise K_2 und K_3 von außen, den Kreis K_1 umfassend, es gelten also die Gleichungen

$$\overline{O_3K_1} \ldots p_3^2 + q_3^2 = (\varrho_3 - r_1)^2 ,$$
$$\overline{O_3K_2} \ldots (p_3 - a)^2 + q_3^2 = (\varrho_3 + r_2)^2 ,$$
$$\overline{O_3K_3} \ldots (p_3 + a)^2 + q_3^2 = (\varrho_3 + r_2)^2 .$$

Daraus ergibt sich

$$\varrho_3 = \frac{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2(r_2 - r_1)} = \varrho_4 . \tag{2}$$

Für den Kreis O_5 gelten die Gleichungen

$$p_5^2 + q_5^2 = (\varrho_5 - r_1)^2 ,$$
$$(p_5 - a)^2 + q_5^2 = (\varrho_5 - r_2)^2 ,$$
$$(p_5 + a)^2 + q_5^2 = (\varrho_5 + r_2)^2 ,$$

woraus sich ergibt

$$\varrho_5 = \frac{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2r_1} = \varrho_6 = \varrho_7 = \varrho_8 .$$

Zur Konstruktion kann man nun folgenden Weg einschlagen:

Man zeichne der Reihe nach (Fig. 3):

$$AB = r_2 , \quad BC = a ,$$

dann ist

$$CK_1 = \sqrt{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)} ,$$

ferner zeichne man

$$K_1D = 2(r_2 - r_1) \quad \text{und} \quad CX_1 \perp CD ,$$

so ist

$$K_1X_1 = \varrho_1 = \varrho_2 .$$

Analog erhält man

$$K_1X_2 = \varrho_3 = \varrho_4 \quad \text{und} \quad K_1X_3 = \varrho_5 = \varrho_6 = \varrho_7 = \varrho_8 .$$

§ 2. Methode der geometrischen Örter.

1. Eine sehr brauchbare Methode zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben ist die der geometrischen Örter.

Sie beruht in folgendem: „Man trachtet die ganze Aufgabe auf die Auffindung eines einzigen Punktes X zurückzuführen, was in den allermeisten Fällen leicht gelingt.

X ist durch zwei Bedingungen, die sich aus der Aufgabe ergeben, bestimmt. Läßt man die erste der Bedingungen weg, so gibt es nicht nur einen Punkt X, sondern unzählig viele, welche eine Linie, einen geometrischen Ort, erfüllen. Läßt man die zweite der Bedingungen weg und hält die erste fest, so erhält man einen zweiten geometrischen Ort. Jeder Schnittpunkt der beiden geometrischen Örter genügt der Aufgabe.

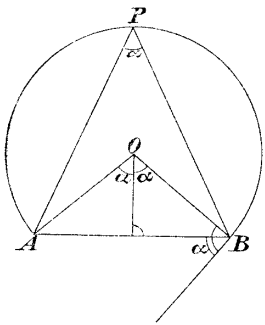

Fig. 4.

2. Es ist nötig, eine Reihe geometrischer Örter zu kennen. Wir wollen daher einige der einfachsten, aber am meisten verwendeten, anführen.

a) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben, ist ein Kreis um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt und mit dem gegebenen Abstand als Radius.

b) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand haben, besteht aus zwei Geraden parallel zur gegebenen Geraden in dem gegebenen Abstande.

c) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten A und B dieselbe Entfernung haben, ist eine Gerade. (Symmetrale der Punkte A und B.)

d) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Geraden denselben Abstand haben, wird von zwei aufeinander senkrechten Geraden gebildet, welche die Winkel zwischen den gegebenen Geraden halbieren. (Winkelsymmetralen.)

e) Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Strecke AB unter einem gegebenen Winkel α erscheint, ist ein Kreisbogen, welcher auf $\overline{AB}$ aufsteht (Konstruktion ergibt sich aus Fig. 4).

f) Der geometrische Ort für alle Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen, ist eine Kreislinie (Fig. 5).

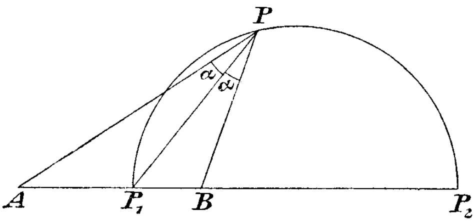

Fig. 5.

Es ist dabei

$$\frac{AP_1}{BP_1} = \frac{AP}{BP} = \frac{m}{n},$$

woraus sich nach einem bekannten Satz ergibt, daß

$\sphericalangle APP_1 = \sphericalangle P_1PB$.

Es gilt auch die Proportion

$AP_1 : P_1B = AP_2 : BP_2$.

Vier solche Punkte A, P_1, B, P_2 nennt man bekanntlich vier harmonische Punkte.

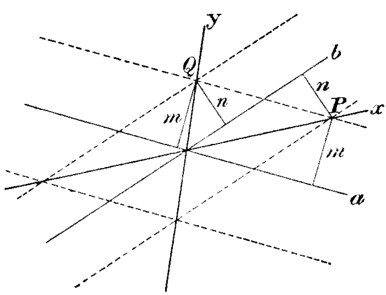

Fig. 6.

g) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Geraden a und b in dem gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen, wird von zwei geraden Linien x und y gebildet, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden gehen (Fig. 6).

h) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B eine konstante Differenz d^2 haben, ist eine zur Verbindungslinie der beiden Punkte A, B normale Gerade.

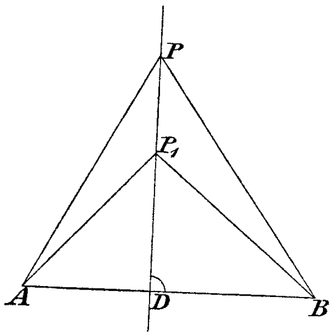

Fig. 7.

Beweis: Es sei P_1 (Fig. 7) ein Punkt von dieser Eigenschaft, also:

$$\overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = d^2.$$

Zieht man dann von P_1 die Senkrechte auf AB und nimmt auf ihr einen beliebigen Punkt P an, so ist

$$\overline{PB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DP}^2$$

und

$$\overline{PA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DP}^2,$$

daher:

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = d^2. \quad \text{q. e. d.}$$

Aus h) läßt sich eine Folgerung ziehen, welche für später von Wichtigkeit ist. Um diese auseinander zu setzen, müssen wir eine kurze **Bemerkung** einschalten:

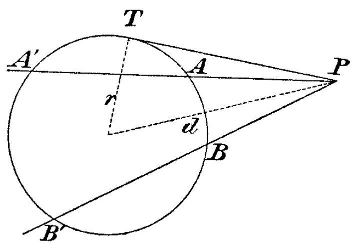

Fig. 8a.

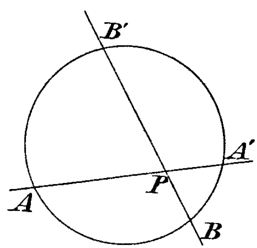

Fig. 8b.

α) Bekanntlich gilt folgender Satz: „Zieht man durch die Punkte P (Fig. 8a, 8b) Sekanten an den Kreis, so ist immer

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = \ldots\text{“}$$

Dieses konstante Produkt nennt man die Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis; sie ist gleich $d^2 - r^2$, wobei d der Zentralabstand des Punktes P und r der Radius des Kreises sind.

Liegt der Punkt P außerhalb des Kreises, so ist diese Potenz auch gleich $\overline{PT}^2$.

β) Sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten O_1 und O_2 gegeben, so hat ein Punkt P in bezug auf jeden der Kreise eine gewisse Potenz. Soll nun der Punkt P

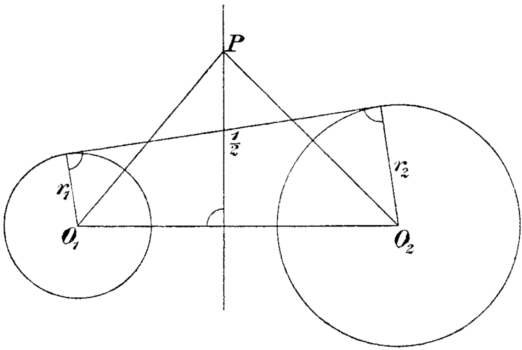

Fig. 9.

in bezug auf beide Kreise (mit den Radien r_1, r_2) dieselbe Potenz haben, so muß

$$\overline{PO}_1^2 - r_1^2 = \overline{PO}_2^2 - r_2^2 ,$$

also

$$\overline{PO}_1^2 - \overline{PO}_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \text{konstant}$$

sein, d. h. der geometrische Ort aller Punkte, welche in bezug auf beide Kreise dieselbe Potenz haben, ist (nach h) eine Gerade senkrecht auf der Zentralen der beiden Kreise, die sogenannte Potenzlinie der beiden Kreise.

Wenn sich die beiden Kreise schneiden, so geht ihre Potenzlinie durch die Schnittpunkte, denn jeder solche Schnittpunkt hat in bezug auf beide Kreise die Potenz Null. Wenn die beiden Kreise einander nicht schneiden, so findet man die Potenzlinie (Fig. 9), indem man eine der gemeinsamen Tangenten halbiert und durch den Halbierungspunkt die Senkrechte auf die Zentrale zieht, oder auch auf anderem Weg, etwa mit Zuhilfenahme des Satzes: „Sind drei Kreise in einer Ebene gegeben, so gehen die drei Potenzlinien, welche sie bestimmen, durch ein und denselben Punkt (Potenzzentrum der drei Kreise)“; denn der Schnittpunkt von je zwei Potenzlinien hat in bezug auf alle drei Kreise dieselbe Potenz, liegt also auch auf der dritten Potenzlinie.

3. Wir wollen die Methode der geometrischen Örter an zwei Beispielen erörtern:

α) Gegeben sind zwei Kreise O_1, O_2 mit den Radien r_1 und r_2. Man konstruiere jene Kreise K, welche beide Kreise berühren und den gegebenen Radius r haben.

Läßt man die Bedingung weg, daß K den Kreis O_2 berühren soll, so gibt es unendlich viele Kreise, der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte besteht aus zwei mit O_1 konzentrischen Kreisen mit den Radien $r_1 + r$ resp. $r_1 - r$. Analog erhält man für den gesuchten Mittelpunkt X einen weiteren geometrischen Ort und zwar konzentrische Kreise um O_2 mit den Radien $r + r$ und $r_2 - r$.

X muß in einem der gemeinsamen Punkte der beiden geometrischen Örter liegen; es gibt höchstens acht Punkte, welche der Aufgabe genügen.

β) Gegeben sind drei Kreise K_1, K_2, K_3; es sind alle Kreise zu konstruieren, welche diese drei Kreise berühren (Apollonisches Berührungsproblem).

Legt man (Fig. 10) konzentrisch mit dem gesuchten Kreise X einen neuen Kreis durch den Mittelpunkt eines der gegebenen drei Kreise, z. B. durch den Mittelpunkt des Kreises K_3, so erkennt man, daß obige Aufgabe auf folgende zurückgeführt ist:

„Gegeben sind zwei Kreise K_1', K_2' und ein Punkt P; es sind Kreise zu konstruieren, welche beide Kreise berühren und durch P hindurchgehen.“

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche den Kreis K_1' berühren und durch P hindurchgehen, ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem P

innerhalb oder außerhalb K_1' liegt. Der Mittelpunkt von K_1' und der Punkt P sind die Brennpunkte dieser Kegelschnitte; die Asymptoten der Hyperbel stehen senkrecht auf den Tangenten, welche man von P an K_1' legen kann.

Jeder der gegebenen drei Kreise kann sich auf einen Punkt reduzieren oder in eine Gerade übergehen. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine Gerade l berühren und durch einen Punkt P hindurchgehen, ist eine Parabel, welche l zur Leitlinie und P zum Brennpunkt hat.

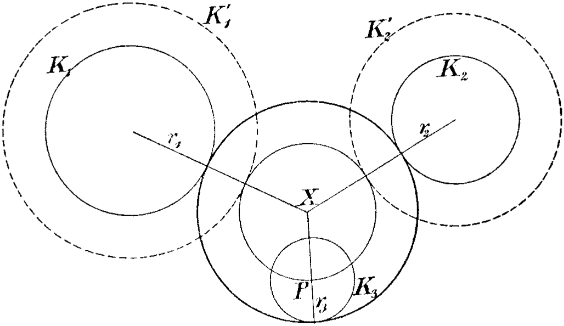

Fig. 10.

4. Übungsaufgaben

In folgenden Aufgaben bedeuten die am Schlusse der Aufgaben hinzugefügten Buchstaben jenen geometrischen Ort, welcher besondere Verwendung bei der Aufgabe findet.

Es ist dem Anfänger dringend zu empfehlen, die Aufgabe mit Zirkel und Lineal tatsächlich durchzuführen und die Diskussion der Lösung genau zu überlegen.

1. Gegeben sind zwei Strecken a, b in beliebiger gegenseitiger Lage und zwei Winkel α, β; es ist jener Punkt zu konstruieren, von dem aus a und b unter dem Winkel α resp. β erscheint (e) (Pothenotsches Problem).

2. Gegeben sind drei gerade Linien g_1, g_2, g_3; es ist jener Punkt zu konstruieren, dessen Abstände von den drei geraden Linien in einem gegebenen Verhältnis stehen (g).

3. Gegeben sind drei Kreise; es ist jener Punkt zu konstruieren, von dem aus sich an die drei Kreise gleich lange Tangenten legen lassen (h).

4. Gegeben sind ein Kreis und zwei Punkte A, B; es soll dem Kreise ein rechtwinkliges Dreieck so eingeschrieben werden, daß die Katheten desselben durch je einen der gegebenen Punkte gehen (e).

5. Gegeben sind zwei parallele Gerade und ein Punk P; es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher beide Gerade berührt und durch P hindurchgeht (a, d).

6. Gegeben sind drei gleich große Kreise; es ist ein Kreis zu konstruieren, welcher alle drei Kreise von außen berührt (h).

7. Eine gegebene Strecke a ist in zwei Teile x und y so zu zerlegen, daß das geometrische Mittel von x und y gleich einer zweiten gegebenen Strecke b ist (c, b).

8. Gegeben ein Dreieck ABC; es ist jener Punkt zu konstruieren, von welchem aus die drei Seiten unter gleich großen Winkeln erscheinen (120^0).

9. Auf einer Geraden liegen die Punkte A, B, C, D; es ist jener Punkt der Ebene zu suchen, von welchem aus die Strecken AB, BC, CD unter gleichen Winkeln erscheinen (f).

10. Gegeben sind drei Kreise; es ist ein Kreis zu konstruieren, welcher alle drei Kreise rechtwinklig schneidet (h).

11. Gegeben sind drei Kreise; es ist jener Punkt zu konstruieren, von dem aus die drei Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen. (Die Abstände des gesuchten Punktes von den Kreismittelpunkten müssen sich so wie die Radien der Kreise verhalten.)

12. Gegeben sind zwei Kreise K_1, K_2 und eine Strecke s; es ist ein Kreis von gegebenem Radius r zu zeichnen, so, daß sein Mittelpunkt auf K_1 liegt und er den Kreis K_2 nach einer Sehne von der gegebenen Länge s schneidet. (Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, welche K_2 unter der Sehne s schneiden?)

13. Gegeben ist eine Gerade g, auf derselben ein Punkt A und außerhalb derselben ein Punkt B; es ist jener Punkt X von g zu suchen, für welchen $\overline{AX}+\overline{XB}=s$,

wobei s eine gegebene Strecke ist. (Man trage s auf der gegebenen Geraden von A aus auf.)

14. Gegeben sind drei gerade Linien a, b, c und ein Punkt P; durch P ist eine Gerade x so zu ziehen, daß die drei entstehenden Schnittpunkte zusammen mit P eine harmonische Punktreihe bilden. (Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, welche den Punkt P von zwei Geraden harmonisch trennen? Wie viele Auflösungen hat die Aufgabe?)

15. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise K_1, K_2 und ein Punkt P; durch P ist eine Gerade x so zu ziehen, daß jenes Stück derselben, welches von den konzentrischen Kreisen abgeschnitten wird, vom Mittelpunkte aus, unter einem gegebenen Winkel α gesehen wird. (Dreht man um den Mittelpunkt den Winkel α, bringt den einen Schenkel desselben mit K_1, den anderen mit K_2 zum Schnitt und verbindet die Schnittpunkte, so umhüllen diese Verbindungslinien einen neuen konzentrischen Kreis, Fig. 11.)

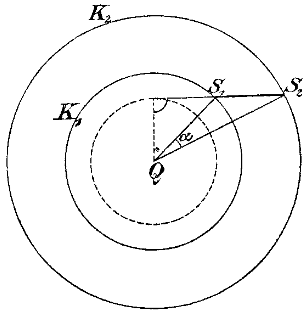

Fig. 11.

16. Gegeben sind zwei Paare paralleler Gerade und ein Punkt P; durch P ist eine gerade Linie so zu ziehen, daß von beiden Paaren paralleler Linien auf ihr gleich große Stücke abgeschnitten werden. (Man beachte das Parallelogramm, welches die beiden Paare paralleler Linien bilden.)

17. Gegeben sind vier Punkte A, B, C, D; es ist jenes Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch die vier Punkte gehen. (Schlägt man über AB (Fig. 12) als Durchmesser einen Kreis, so geht die Halbierungslinie des Winkels APB durch einen Punkt S des Kreises, welcher sich nicht ändert, wenn P auf dem Kreise sich fortbewegt.)

18. Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2; es ist eine Gerade zu konstruieren, welche beide Kreise unter gegebenen Sehnen s_1 resp. s_2 schneidet. (Gemeinschaftliche Tangenten an zwei Kreise.)

19. Gegeben ein Viereck; demselben ist ein Parallelogramm so einzuschreiben, daß dessen Seiten gegebene

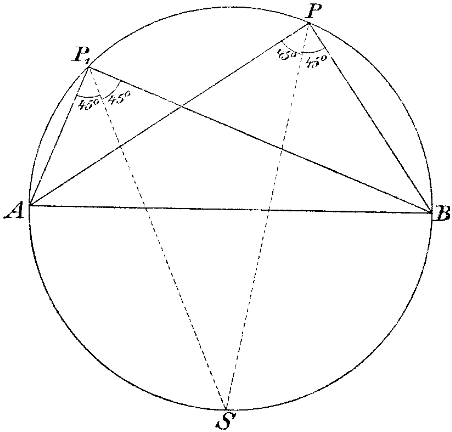

Fig. 12.

Richtungen haben. (Welchen Ort beschreibt die vierte Ecke des Parallelogrammes von den gegebenen Richtungen, wenn eine Seite des Viereckes weggelassen wird*)?)

---

§ 3. Methode der ähnlichen Figuren.

1. Manche Konstruktionsaufgaben haben die Eigenschaft, daß alle unendlich vielen Lösungen derselben, die sich ergeben, wenn man einen Teil der gegebenen Bedingungen wegläßt, untereinander ähnliche Figuren bilden. Hat man z. B. ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Winkeln und seinem Umfange, und läßt man die letztere Bedingung weg, so sind alle entstehenden Dreiecke untereinander ähnlich.

*) Weitere zahlreiche Beispiele findet man in dem sehr empfehlenswerten, schon erwähnten Buche von Petersen „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben“.

Bei Aufgaben dieser Art wendet man mit großem Vorteile die Methode der ähnlichen Figuren an: „Man zeichne zuerst eine der gesuchten Figur ähnliche Figur und vergrößere oder verkleinere dieselbe dann im notwendigen Verhältnisse.“

In unserem Beispiele würde man aus den Winkeln α und β ein Dreieck $A'B'C'$ zeichnen, dessen Umfang u' bestimmen (Fig. 13), dann den Punkt O als Ähnlichkeitspunkt betrachten, u auftragen und daraus durch Ziehen von parallelen Linien das gesuchte Dreieck ABC finden.

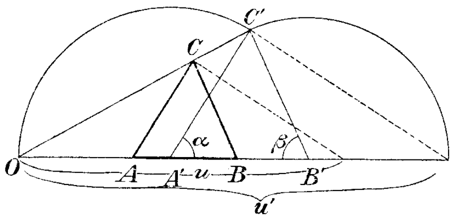

Fig. 13.

2. In zwei Fällen wird man immer die Methode der ähnlichen Figuren anwenden:

α) Wenn von der zu suchenden Figur nur eine Länge, sonst aber durchweg Winkel und Verhältnisse gegeben sind. (Läßt man die Länge weg, so sind alle den übrigen Bedingungen genügenden Figuren ähnlich.)

β) Wenn die gesuchte Figur eine bestimmte Lage zu gegebenen Linien oder Punkten einnehmen soll, so daß nach Wegnahme einer Bedingung ein System von ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren erhalten wird.

3. Wir wollen nun eine Reihe von Übungsaufgaben geben, welche nach der Methode der ähnlichen Figuren gelöst werden können:

20. Von einem Quadrate kennt man die Summe s einer Seite und der Diagonale; das Quadrat ist zu konstruieren.

21. Einem gegebenen Dreiecke ist ein Quadrat einzuschreiben.

22. In einem Kreise sind zwei Radien gegeben; man ziehe jene Sehne des Kreises, welche von den gegebenen Radien in drei gleiche Teile geteilt wird. (α sei der Winkel zwischen den beiden Radien. Man trage auf einer beliebigen Geraden drei gleiche Teile hintereinander auf, wodurch man die Punkte A', B', C', D' erhält; dann zeichne man die Symmetrale der Strecke $A'D'$ und suche auf derselben jenen Punkt auf, von dem aus $B'C'$ unter dem Winkel α erscheint; die erhaltene Figur ist der gesuchten Figur ähnlich.)

23. Gegeben ein Viereck; es ist demselben ein Rhombus einzuschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Viereckes parallel sind. (Man zeichne einen beliebigen Rhombus, dessen Seiten den Diagonalen des Viereckes parallel sind, und ziehe durch seine Ecken Parallele zu den Seiten des Viereckes.)

24. Ein Kreis ist zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Gerade a und b berührt.

25. Gegeben sind eine gerade Linie l und ein Punkt F, außerdem eine Gerade a; auf a ist jener Punkt X zu suchen, für welchen die Entfernung von l doppelt so groß ist als der Abstand von F. (Man nehme den Schnittpunkt von a und l als Ähnlichkeitszentrum.)

26. Gegeben sind zwei Punkte A und B und eine Gerade g; es ist jener Kreis zu konstruieren, welcher durch A und B hindurchgeht und g berührt.

27. Von einem Dreiecke kennt man die Höhen h_a, h_b, h_c; das Dreieck ist zu konstruieren. (Die Höhen jenes Dreieckes, welches h_a, h_b, h_c zu Seiten hat, sind proportional den Seiten des gesuchten Dreieckes.)

28. Gegeben sind zwei Kurven K_1 und K_2 und ein Punkt P; durch P ist eine Gerade x so zu ziehen, daß $PA_1 : PA_2 = m : n$, wobei $A_1 A_2$ die Schnittpunkte von x mit K_1 resp. K_2 bedeuten und m, n gegebene Zahlen sind. (Man nehme P als Ähnlichkeitszentrum an und zeichne zu K_2 die ähnliche und ähnlich liegende Kurve K_2' mit dem Modulus $\frac{m}{n}$, d. h. man multipliziere die Kurve K_2 mit $\frac{m}{n}$.*))

*) Petersen a. a. O.

§ 4. Methode der Hilfsfiguren.

1. Manche geometrische Aufgaben werden durch Hinzufügen einzelner Linien in die gesuchte Figur leicht lösbar, indem man dadurch Figuren erhält, welche ohne weiteres aus den Bedingungen konstruiert werden können.

Beim Studium einer zu konstruierenden Figur beachte man daher folgendes:

Gegebene Stücke führe man immer in die Figur ein. Ist z. B. die Summe zweier Strecken gegeben, so führe man diese Summe in die Figur ein.

Man trachte dann Linien, Winkel oder ganze Teile der Figur zu finden, welche man aus den gegebenen Stücken leicht bestimmen kann; besonders suche man nach Dreiecken mit drei bekannten Bestimmungsstücken.

2. Einige einfache Übungsaufgaben mögen dies erläutern:

29. Von einem Dreiecke ABC (Fig. 14) kennt man den Winkel α, die Höhe h_a und die Winkelhalbierende w_a durch A; das Dreieck ist zu konstruieren. (Das rechtwinklige Dreieck aus w_a und h_a kann konstruiert werden.)

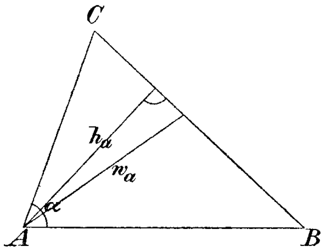

Fig. 14.

30. Von einem Dreiecke kennt man h_a, m_a und r, wobei r der Radius des eingeschriebenen Kreises und m_a die Mittellinie (Mediane) durch den Punkt A bedeutet. (Man konstruiere zuerst das rechtwinklige Dreieck h_a, m_a und suche den eingeschriebenen Kreis nach der Methode der geometrischen Örter.)

31. Von einem Dreiecke kennt man die Seite a, die Summe s der beiden Seiten b, c und die Höhe h_b. (Man führe $b+c$ in die Figur ein, indem man b über A um c verlängert.)

32. Von einem Dreiecke kennt man a, α (der a gegenüberliegende Winkel) und $b+c=s$; das Dreieck ist zu konstruieren. (Man verlängere b über A hinaus um c und erhält so den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$.)

33. Ein gegebener Kreisbogen ist in zwei andere so zu zerlegen, daß die Summe der zugehörigen Sehnen ein Maximum wird. (Geometrischer Beweis?)

34. Durch einen Schnittpunkt von zwei Kreisen ist eine Gerade so zu ziehen, daß die Summe der ausgeschnittenen Sehnen ein Maximum wird.

35. Gegeben eine Gerade g, auf derselben ein Punkt O und außerhalb derselben noch zwei Punkte A und B; durch A und B sind parallele Gerade AX und BY so zu ziehen, daß $XO : OY = m : n$. (Man teile die Verbindungslinie AB (Fig. 15) in dem Verhältnis $m : n$ und ziehe durch A und B Parallele zu ZO.)

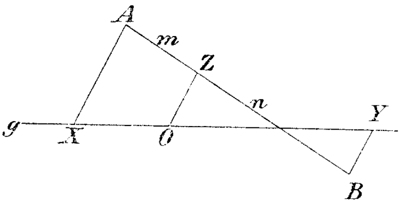

Fig. 15.

36. Gegeben sind zwei parallele Gerade und auf jeder derselben ein Punkt P resp. Q, außerdem ein Punkt O, welcher auf keiner der Parallelen liegt; durch P und Q sind parallele Gerade PX und QY so zu ziehen, daß die Gerade XY durch O hindurchgeht.

37. Gegeben sind zwei Punkte P, Q und eine durch Q gehende Gerade g; auf g sind zwei Punkte X, Y in gleicher Entfernung von Q so zu bestimmen, daß die Strecke XY von P aus unter dem Winkel α erscheint. (Man verlängere PQ bis R, so daß QR gleich PQ wird.)

38. Von einem Dreiecke kennt man die Summe der Seiten also $a + b + c = s$, den Winkel α und den Radius R des umgeschriebenen Kreises; das Dreieck ist zu konstruieren.

39. Gegeben sind zwei parallele Gerade a und b, außerdem auf a der Punkt A, auf b der Punkt B und zwischen den Parallelen der Punkt O; man soll durch O eine Gerade ziehen, welche a, b in X resp. in Y so schneidet, daß $\overline{AX} + \overline{BY} = s$ wird, wobei s eine gegebene Strecke ist und die Vorzeichen von $\overline{AX}$ und $\overline{BY}$ zu berücksichtigen sind.

§ 5. Methode der Umformung der Figur. (Parallelverschiebung, Umlegung, Drehung.)

A) Parallelverschiebung.

1. Zur Lösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe ist es oft vorteilhaft, einzelne Stücke der Figur parallel zu verschieben und die ganze Figur dadurch in eine für die Auflösung günstigere Gestalt zu bringen.

Kennt man z. B. in einer Figur zwei Strecken und den Winkel, welchen sie miteinander einschließen, und verschiebt die eine Strecke parallel mit sich selbst, bis einer ihrer Eckpunkte auf einen Endpunkt der anderen Strecke fällt, so erhält man ein Dreieck, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind. Dieses Dreieck läßt sich also leicht konstruieren, was für die Auflösung der Aufgabe vorteilhaft sein kann.

Auch andere Parallelverschiebungen erweisen sich oft recht nützlich: Kommt z. B. ein Polygon in der zu suchenden Figur vor, und zieht man durch einen gegebenen Punkt zu den Seiten des Polygones parallele und gleich lange Strecken, so bilden die Endpunkte derselben ein neues Polygon, welches sich nicht selten leicht zeichnen läßt, und dann das gesuchte Polygon bestimmt.

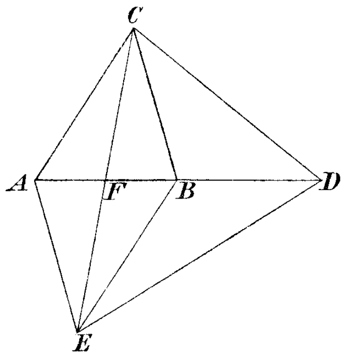

Fig. 16.

2. Für das Dreieck und Viereck sind zwei Parallelverschiebungen von besonderem Vorteile*).

Verschiebt man nämlich im Dreiecke ABC (Fig. 16) die Seiten AB nach BD, BC nach EA und AC nach EB, so erhält man ein neues Dreieck CDE. Die Seiten desselben sind

*) Petersen a. a. O.

parallel den Mittellinien des ursprünglichen Dreieckes und doppelt so lang als dieselben; die Winkel, welche Seiten, Mittellinien und Höhen im ursprünglichen Dreieck miteinander einschließen, kommen auch in dem Dreieck CDE vor.

3. Bei dem Vierecke $ABCD$ erweist sich folgende Parallelverschiebung für viele Aufgaben von Vorteil:

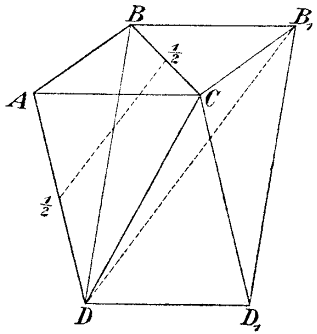

Fig. 17.

Man verschiebe AC (Fig. 17) nach BB_1 und DD_1; auf diese Weise erhält man das Parallelogramm BB_1D_1D. Die Seiten desselben sind so lang wie die Diagonalen des ursprünglichen Viereckes; die Strecken, welche von C ausgehen, sind den Seiten des Viereckes $ABCD$ gleich, und die Winkel um C herum sind gleich den Winkeln desselben Viereckes; die Diagonalen des Parallelogrammes sind parallel und doppelt so groß als die Strecken, welche die Mitten gegenüberliegender Seiten miteinander verbinden.

4. Wir wollen wieder einige Übungsaufgaben zur Lösung vorlegen:

40. Von einem Dreiecke kennt man die drei Mittellinien; das Dreieck ist zu konstruieren.

41. Von einem Parallelogramme kennt man die beiden Seiten und den Winkel zwischen den Diagonalen; das Parallelogramm ist zu konstruieren. (Man verschiebe die eine Diagonale, bis einer ihrer Endpunkte mit einem Endpunkte der anderen Diagonale zusammenfällt.)

42. Gegeben sind zwei Kreise; eine Strecke von der Länge s ist mit ihren Endpunkten auf diese beiden Kreise so zu legen, daß sie zu einer gegebenen Geraden parallel wird.

43. Gegeben ist ein Dreieck ABC; demselben ist ein gleichseitiges Dreieck von möglichst großem Flächeninhalte umzuschreiben. (Die Aufgabe kommt darauf hinaus, durch den Schnittpunkt zweier Kreise (Fig. 18)

eine Gerade zu ziehen, für welche die Summe der Sehnen möglichst groß ist. Aufgabe 34.)

44. Von einem Trapeze kennt man die Diagonalen und die beiden nicht parallelen Seiten; das Trapez ist zu konstruieren.

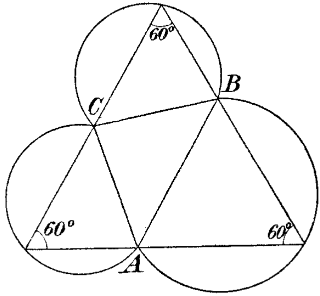

Fig. 18.

45. Von einem Vierecke kennt man die vier Seiten und die Länge der Strecke, welche die Mitten der Diagonalen verbindet; das Viereck ist zu konstruieren. (Man verbinde die Mitten der Diagonalen mit den Mitten der Seiten.)

46. Auf einer geraden Linie g liegen zwei Punkte A und A'; dieselben sind durch die Punkte P und P' harmonisch so zu teilen, daß $\overline{PP'}$ eine gegebene Länge s hat.

47. Ein Trapez ist zu konstruieren aus den parallelen Seiten und den Diagonalen.

48. Von einem Vierecke kennt man die Diagonalen, zwei gegenüberliegende Seiten und den Winkel zwischen letzteren; das Viereck ist zu konstruieren.

49. Gegeben sind zwei Kreise K_1, K_2 und ein Punkt P (Fig. 19); durch den Punkt P ist jene Gerade x zu ziehen,

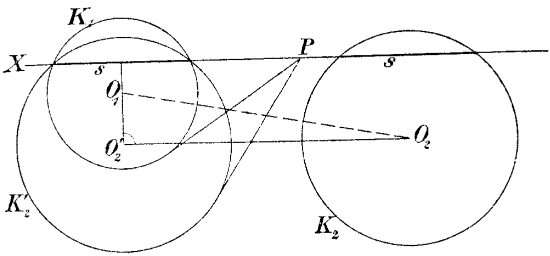

Fig. 19.

die aus beiden Kreisen gleiche Sehnen herausschneidet. (Man denke sich die Aufgabe gelöst und K_2 so lange parallel zur gefundenen Geraden verschoben, bis seine

Sehne s auf die Sehne s des Kreises K_1 fällt. Von dem neuen Mittelpunkte O_2' erscheint die Zentrale unter einem rechten Winkel; die Tangente von P an K_2' ist gleich der Tangente von P an K_1.)

50. Gegeben sind zwei Kreise K_1, K_2 und eine Gerade g; es ist parallel zu g eine Gerade x so zu ziehen, daß die Summe der Sehnen, welche sie aus beiden Kreisen ausschneidet, gleich einer gegebenen Strecke s wird. (Verschiebt man den Kreis K_1 (Fig. 20) parallel zur gegebenen

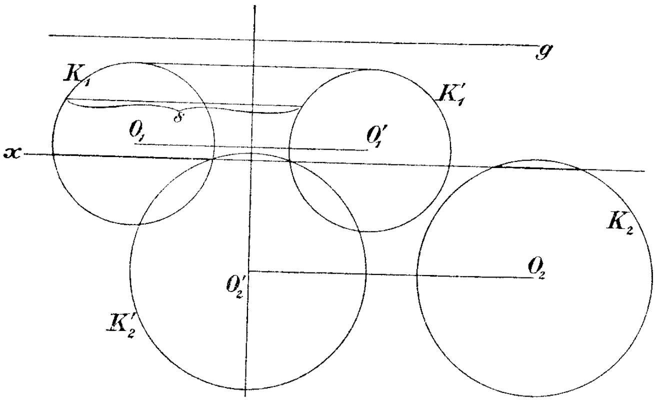

Fig. 20.

Geraden um die Strecke s, so erhält man den Kreis K_1'; sucht man die Symmetrale dieser beiden Kreise und verschiebt den Kreis K_2 parallel zur gegebenen Geraden, bis sein Mittelpunkt in die Symmetrale fällt, so bestimmt er schon die gesuchte Gerade x.)

B) Umlegung.

1. Man bringt bei dieser Methode die Figur durch Bewegung eines Teiles derselben in eine für die Ausführnng günstigere Lage. Vorteilhaft ist es wieder, die gegebenen Stücke in die Figur einzuzeichnen, gleiche Winkel und Strecken zur Deckung zu bringen, oder eine symmetrische Zeichnung zu erzeugen so, daß ein gesuchter Punkt auf der Symmetrieachse zu liegen kommt.

Dies soll durch einige **Übungsaufgaben** erläutert werden.

51. Von einem Dreiecke kennt man die Seiten a, b und die Differenz der Winkel $\alpha - \beta = \delta$. (Legt man das gesuchte Dreieck so um, daß A auf B und B auf A fällt, so erhält man ein neues Dreieck mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel δ.)

52. Von einem Viereck $ABCD$, dem sich ein Kreis einschreiben läßt (Tangentenviereck), kennt man die Seiten AD, AB, den Winkel D und den Winkel B; das Viereck ist zu konstruieren. (Man ziehe die Symmetrale des Winkels A (Fig. 21); D_1, C_1 seien die Gegenpunkte von D und C bezüglich dieser Symmetralen; dann ist C_1D_1 auch Tangente an den Kreis.)

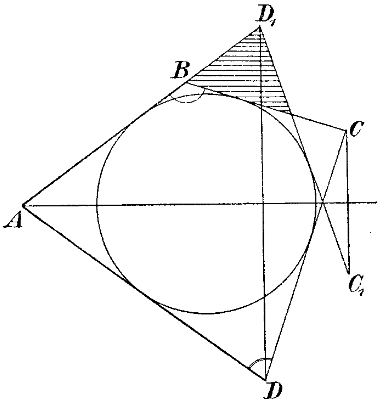

Fig. 21.

53. Von einem Sehnenvierecke $ABCD$ kennt man die vier Seiten; das Sehnenviereck ist zu zeichnen. (Man zeichne (Fig. 22) $B_1A = AD$, B_1C_1 parallel BC und $DE = B_1C_1$; dann ist Dreieck ADE kongruent dem Dreiecke AB_1C_1. Das Dreieck CAE ist zunächst zu konstruieren; dabei ist zu beachten, daß $AE:AC = AD:AB$; siehe geom. Ort f.)

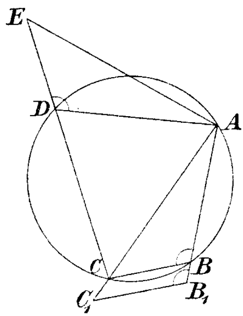

Fig. 22.

54. Gegeben ist eine Gerade l, ein Punkt F und eine Gerade g durch F; es ist auf g jener Punkt X zu suchen, welcher von F und l gleich weit absteht. (Man ziehe n normal zu g durch F und suche die Symmetrale von n und l.)

55. Gegeben ist eine Gerade g, auf derselben ein Punkt A, außerdem ein Kreis K; man konstruiere einen

Kreis mit dem Mittelpunkte X so, daß er g in A berührt und den Kreis K rechtwinklig schneidet. ($K' = K$ schneide g in A rechtwinklig, X liegt dann auf der Symmetralen (Potenzlinie) von K und K'.)

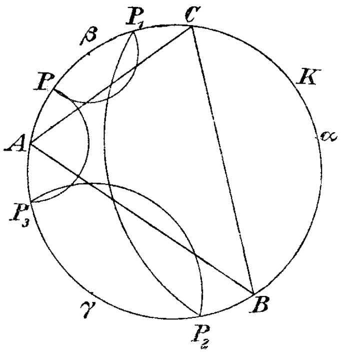

Fig. 23.

56. In einem Kreise K ist ein Dreieck ABC so einzuschreiben, daß die Punkte α, β, γ die Mitten der zu den Seiten des Dreieckes gehörigen Bogen sind. (Dreht man einen beliebigen Punkt P (Fig. 23) der Kreisperipherie um β nach P_1, dann P_1 um α nach P_2, P_2 um γ nach P_3, so ist A die Mitte von $\widehat{P_3 P}$.)

57. Gegeben ist ein Kreis K und drei von seinem Mittelpunkte ausgehende Linien a, b, c; es ist ein Dreieck ABC dem Kreise so umzuschreiben, daß A auf a,

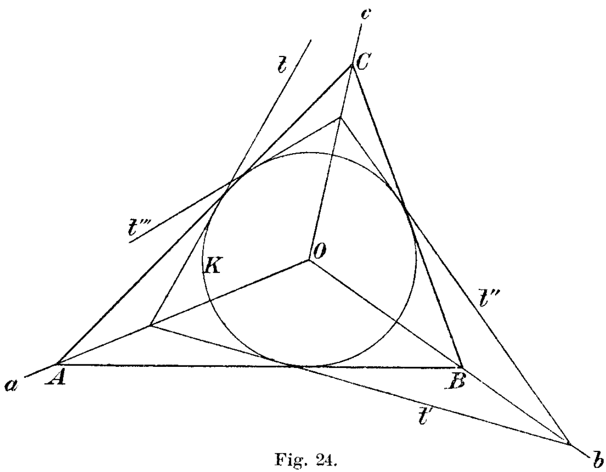

Fig. 24.

B auf b und C auf c zu liegen kommt. (Spiegelt man (Fig. 24) die beliebige Tangente t des Kreises an a, die so erhaltene Tangente t' an b und t'' an c, wodurch man t''' erhält, so schließt die Seite b des gesuchten Dreieckes mit t und t'' gleiche Winkel ein.)

58. Gegeben ein Dreieck ABC und durch C eine gerade Linie g; auf g ist jener Punkt X zu suchen, von dem aus die Seiten AC und BC unter gleichen Winkeln erscheinen. (Man spiegle das Dreieck ABC in bezug auf die Linie g.)

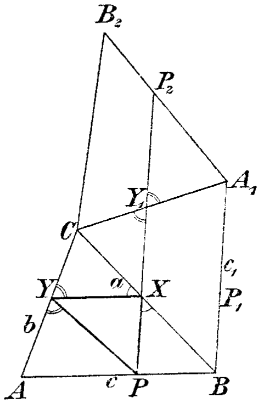

Fig. 52.

59. Gegeben ist ein Dreieck ABC und auf der Linie AB ein Punkt D; man suche auf AC jenen Punkt X, von dem aus die beiden Strecken AD und DB unter denselben Winkeln erscheinen. (Man bestimme den zu B in bezug auf DX symmetrisch liegenden Punkt B_1.)

60. Gegeben sind zwei Kurven C_1 und C_2 und eine Gerade g; senkrecht zu g ist eine Gerade x so zu ziehen, daß beide Kurven auf ihr, vom Schnittpunkt g mit x aus gerechnet, gleiche Stücke abschneiden. (Man lege C_2 um g um und bringe die umgelegte Kurve mit C_1 zum Schnitt.)

61. Gegeben eine Gerade g und zwei auf derselben Seite der Geraden liegende Punkte A und B; auf g ist ein Punkt X so zu suchen, daß $\overline{AX} + \overline{XB}$ ein Minimum wird. (Man lege B um g um und verbinde den so erhaltenen Punkt mit A.)

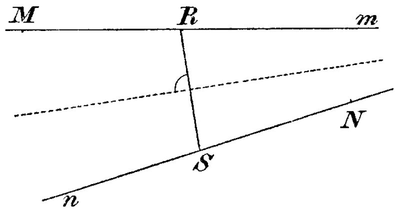

Fig. 26.

62. Gegeben ein Dreieck ABC und auf der Seite AB Punkt P; diesem Dreiecke ist ein neues Dreieck PXY so einzuschreiben, daß die Seiten des gesuchten Dreieckes mit den Seiten b und c des gegebenen Dreieckes gleiche Winkel einschließen (Fig. 25).

63. Gegeben ist ein Dreieck ABC; demselben ist ein Dreieck von kleinstem Umfange einzuschreiben. (Nach dem in der Aufgabe 62 benützten Vorgange wird diese Aufgabe auf folgende zurückgeführt (Fig. 26): „Gegeben sind zwei gerade Linien m, n; auf jeder derselben ein Punkt M resp. N; es sind zwei Punkte R und S auf m resp. n so zu bestimmen, daß $\overline{RM} = \overline{SN}$ und $\overline{RS}$ ein Minimum ist; RS steht senkrecht auf der Winkelhalbierenden.)

C) Drehung.

1. Dreht man eine Figur f um ein Zentrum O um den Winkel α, so beschreiben alle Punkte der Figur Kreisbogen mit verschiedenen Radien aber gleichen Zentriwinkeln α.

Eine Gerade g wird um den Winkel α gedreht, indem man z. B. ihre Normale um den Winkel α dreht. Die neue Lage g_1 der Geraden schließt mit der ursprünglichen Geraden g den Drehungswinkel α ein.

Denkt man sich ferner O als Ähnlichkeitszentrum und von ihm aus die Figur f_1 in einem bestimmten Verhältnisse vergrößert oder verkleinert oder, wie Petersen sagt, mit einer Zahl multipliziert, so erhält man eine neue Figur f_2, welche zu f_1 und daher auch zu f ähnlich ist.

2. Sind umgekehrt zwei ähnliche Figuren f_2 und f, welche denselben Umlaufungssinn haben, in einer Ebene gegeben, so ist man immer imstande, einen Punkt O so zu bestimmen, daß f durch Drehung um O und Multiplikation mit einer bestimmten Zahl mit f_2 zur Deckung gebracht werden kann.

Wir brauchen diesen Satz nur für den Fall zu bebeweisen, daß die Figur f eine Strecke AB und die Figur f_2 eine andere Strecke A_2B_2 ist, indem bei gleichem Umlaufungssinne beider Figuren die anderen Punkte von selbst zur Deckung kommen, sobald diese beiden Strecken zur Deckung gebracht werden. Zur Lösung dieser Aufgabe beachte man, daß der Winkel, den die beiden Strecken im Punkte S (Fig. 27) miteinander einschließen, schon der gesuchte Drehungswinkel α ist. O muß daher mit A, A_2, S auf einem Kreise K_1 und mit B, B_2, S auf einem zweiten Kreise K_2 liegen. Die Zahl, mit welcher f multipliziert werden muß, ist $\frac{A_2 B_2}{AB}$.

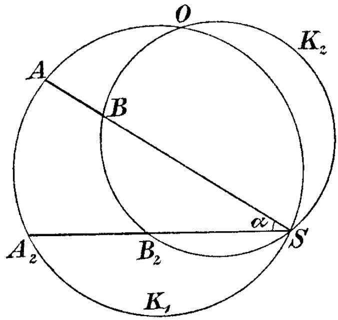

Fig. 27.

3. Bei sehr vielen Aufgaben wendet man die Drehung um einen Punkt, eventuell auch den zuletzt erwähnten Satz, mit großem Vorteile an.

Wir wollen dies wieder an einigen Übungsaufgaben erläutern:

64. Gegeben drei gerade Linien p, q, r und auf p der Punkt A; ein gleichseitiges Dreieck ist so zu konstruieren, daß einer der Eckpunkte mit A zusammenfällt und die beiden anderen auf den

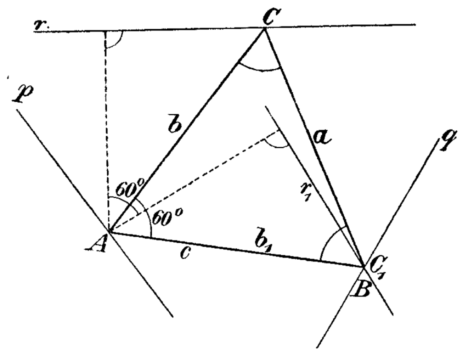

Fig. 28.

geraden Linien q und r liegen. (Man drehe (Fig. 28) die Seite b, die Gerade r und damit den Punkt C um 60^0 nach b_1, r_1, C_1.)

65. Gegeben ist ein Quadrat; demselben ist ein gleichseitiges Dreieck einzuschreiben, welches von einem, auf einer der Seiten des Quadrates gegebenen, Punkte ausgeht.

66. Gegeben sind zwei gerade Linien a und a_2, auf jeder derselben ein Punkt A resp. A_2 und außerhalb der Geraden ein Punkt P; durch P soll eine Gerade x, welche die gegebenen Geraden in X resp. X_2 schneidet, so gezeichnet werden, daß

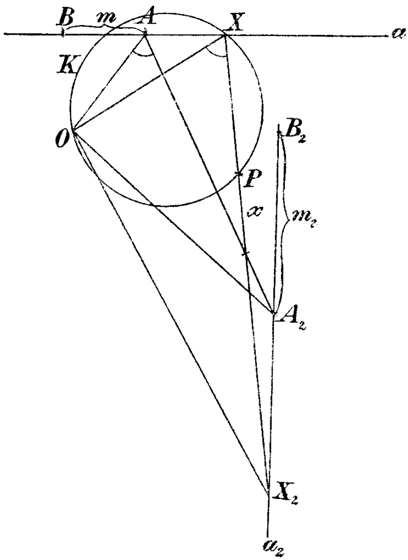

Fig. 29.

$$AX : A_2X_2 = m : m_2,$$

wobei m und m_2 gegebene Zahlen sind. (Man trage (Fig. 29) auf den Geraden a und a_2 von A resp. A_2 aus zwei Strecken m resp. m_2 auf, wodurch man die Punkte B und B_2 erhält. Nun betrachte man A und A_2, B und B_2 als homologe Punkte ähnlicher Systeme und bestimme nach Fig. 27 den Drehungspunkt O. Da nun das Dreieck XX_2O ähnlich ist dem Dreiecke AA_2O, so ist $\sphericalangle X = \sphericalangle A$; daher liegt X auf einem Kreisbogen K über $\overline{OP}$.) (Nach Fig. 4.)

67. Gegeben sind zwei Gerade a und a_2 und auf jeder derselben ein Punkt A resp. A_2, außerdem noch ein Punkt P, welcher auf keiner der Geraden liegt; man soll durch P eine Gerade ziehen, welche die gegebenen Linien in X resp. X_2 so schneidet, daß $\overline{AX} + \overline{A_2X_2} = s$, einer gegebenen Strecke, wird. (Trägt man auf a die Strecke $AB = s$ ab, so muß $A_2X_2 = XB$ sein, womit die Aufgabe auf 66 zurückgeführt ist.)

68. Gegeben sind zwei gerade Linien a und a_2, außerdem ein Punkt P; durch P eine Gerade XX_2 so zu ziehen, daß das Dreieck AXX_2 einen gegebenen Flächeninhalt besitzt. (Man konstruiere zuerst ein Dreieck APA_2, welches flächengleich mit dem gesuchten Dreieck ist,

wobei A_2 auf a_2 liegen muß. Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke PX_2A_2 und PAX sind gleich; daher ist $AX : A_2X_2 = h_2 : h$, wobei h und h_2 die Abstände des Punktes P von a resp. a_2 sind; dadurch ist diese Aufgabe auf 66 zurückgeführt.)

Petersen behandelt in seinem wiederholt erwähnten Buche noch eine ganze Reihe sehr schöner Aufgaben nach der Drehungsmethode, indem er die zwei folgenden Sätze benutzt:

a) Wenn ein Polygon sich so bewegt, daß es sich immer ähnlich bleibt und drei von seinen Eckpunkten gerade Linien beschreiben, welche nicht durch denselben Punkt zu gehen brauchen, so beschreibt auch jeder andere Eckpunkt des Polygones eine gerade Linie. (Beweis?)

b) Wenn ein Polygon sich so bewegt, daß es sich immer ähnlich bleibt und drei seiner Seiten sich um feste Punkte drehen, welche aber nicht in einer geraden Linie zu liegen brauchen, so drehen sich alle Seiten des Polygones um feste Punkte. (Beweis?)

§ 6. Methode der Inversion.

Eine sehr nützliche Methode zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, namentlich solcher, welche den Kreis betreffen, ist die Methode der Inversion oder der reziproken Radien. Sie gestattet Figuren, welche Kreise enthalten, in einfachere Figuren zu verwandeln.

1. Zunächst müssen wir das Prinzip der Inversion (Prinzip der reziproken Radien) erläutern.

Gegeben sei (Fig. 30) ein Kreis K mit dem Radius r und ein Punkt P. Bringt man die Zentrale des Punktes P mit der Polaren p von P bezüglich K zum Schnitt, so erhält man den Punkt P', jenen Punkt, der P in bezug auf K nach dem Prinzipe der Inversion zugeordnet ist.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke OAP folgt sofort

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 ,$$

also

$$\varrho' = \frac{1}{\varrho},$$

wenn $r = 1$ und OP, OP' mit ϱ resp. ϱ' bezeichnet werden.

Daher nennt man dieses Abbildungsprinzip auch das Prinzip der reziproken Radien.

K heißt der Grundkreis, O das Inversionszentrum und r^2 die Potenz der Inversion.

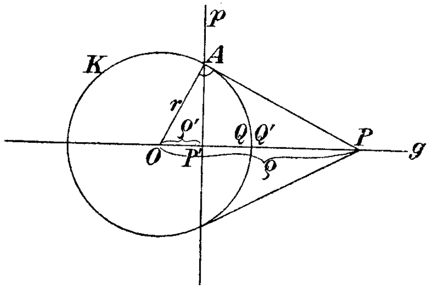

Fig. 30.

2. Bewegt sich (Fig. 30) P auf der Geraden g, so bewegt sich auch P' auf derselben Geraden; rückt P immer weiter hinaus, so nähert sich P' immer mehr dem Punkte O; dem unendlich fernen Punkte von g entspricht O als inverser Punkt. Nähert sich P auf der Geraden g dem Punkte O, so entfernt sich P' von O, der Punkt Q des Kreises fällt mit seinem entsprechenden Punkte Q' zusammen.

Die Beziehung zwischen P und P' ist eine involutorische, d. h. fällt P auf P', so kommt P' auf P zu liegen, wie aus der Gleichung

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

folgt.

Die ganze außerhalb des Kreises liegende Ebene ist dadurch auf die Fläche innerhalb des Kreises abgebildet; sämtliche unendlich ferne Punkte haben den Punkt O als Bild.

Bewegt sich P auf einer geraden oder krummen Linie, so bewegt sich P' auf einer Linie, welche das inverse Bild der ersten Kurve heißt. Insbesondere entspricht g

sich selbst (Eig. 30), d. h. g fällt mit seiner entsprechenden Linie g' zusammen. Auch K entspricht sich selbst, und zwar Punkt für Punkt.

3. Für das Folgende sind einige Sätze, die wir jetzt ableiten wollen, von Wichtigkeit:

a) Entsprechen sich (Fig. 31) die Punkte P und P', Q und Q' bezüglich K nach dem Prinzip der reziproken Radien, so ist:

$$\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P',$$

denn es ist:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'},$$

also:

$$OP : OQ = OQ' : OP'.$$

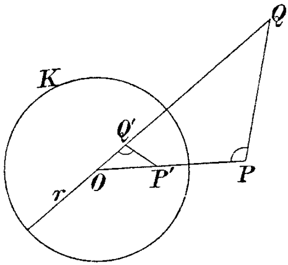

Fig. 31.

Die vier Punkte PP', QQ' liegen also auf einem Kreise, welcher den Kreis K rechtwinklig schneidet (c).

b) Beschreibt P eine Gerade g, so beschreibt P' einen durch O gehenden Kreis.

Beweis. Ist (Fig. 32) OQ die Normale auf g, P ein beliebiger Punkt von g, und sind Q' und P' die inversen Punkte von Q und P, so muß nach a)

$$\sphericalangle OP'Q' = \sphericalangle OQP = 90^0$$

sein. P' liegt also auf dem Kreise mit dem Halbmesser OQ'.

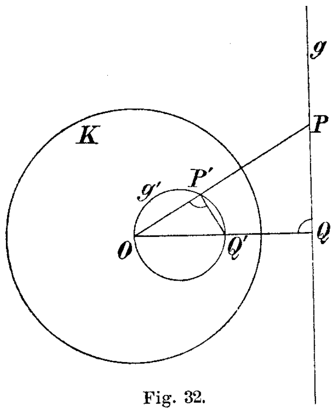

Fig. 32.

Aus der Figur folgt auch, wie man zur Geraden g den inversen Kreis g' konstruiert.

c) Sind A und A', B und B' inverse Punkte auf einer und derselben Geraden aus O und P, P' irgend ein weiteres inverses Punktepaar (Fig. 33), so ist

$$\triangle APB \sim \triangle A'P'B',$$

denn aus a) folgt

$$\sphericalangle OA'P' = \sphericalangle OPA\ ,$$

ebenso

$$\sphericalangle OB'P' = \sphericalangle OPB\ ,$$

demnach ist

$$\sphericalangle A'P'B' = \sphericalangle APB$$

(aber entgegengesetzten Sinnes).

Daraus ergibt sich: Beschreibt P den Kreis K_1 mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, so beschreibt P' den Kreis K_1' mit $A'B'$ als Durchmesser.

Die inverse Figur eines Kreises ist demnach wieder ein Kreis; beide Kreise liegen so, daß O ihr äußerer Ähnlichkeitspunkt ist.

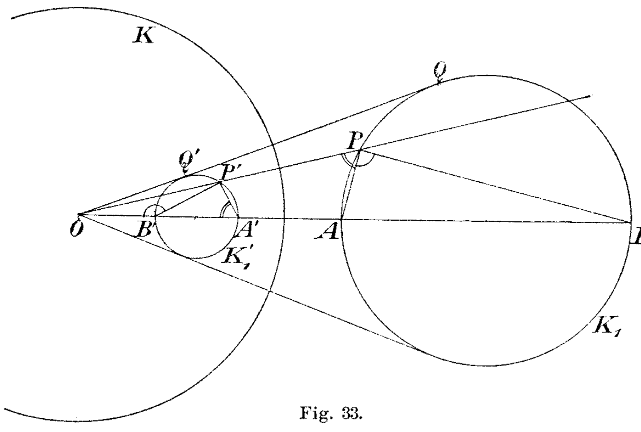

Fig. 33.

Ist K_1 gegeben, so zeichnet man K_1' am vorteilhaftesten, indem man zum Punkte Q den inversen Punkt Q' sucht und den Mittelpunkt von K_1' aus der ähnlichen Lage zu K_1 bestimmt. (Die Mittelpunkte der beiden Kreise sind nicht inverse Punkte.)

d) Aus der Fig. 33 läßt sich noch ein wichtiger Satz schließen: Ist APB ein unendlich kleines Dreieck, so kann man dessen inverse Figur zusammenfallend denken mit dem Dreiecke $A'P'B'$. Dieses ist dem Dreiecke APB ähnlich, weil:

$$\sphericalangle P' = \sphericalangle P \quad \text{und} \quad \sphericalangle B' = \sphericalangle B\,.$$

Daraus ergibt sich folgender Satz:

Sind C_1, C_2 zwei Kurven, welche sich unter dem Winkel α schneiden, so schneiden sich ihre inversen Figuren C_1', C_2' unter demselben Winkel α; berühren sich insbesondere die beiden Kurven, so berühren sich ihre inversen Figuren ebenfalls.

Die Abbildung ist also ähnlich in den kleinsten Teilen, winkeltreu oder konform.

4. Mit dem eben erwähnten Abbildungsverfahren steht ein zweites, welches wir später brauchen werden, in inniger Beziehung:

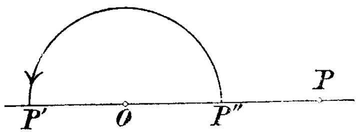

Fig. 34.

Es sei O (Fig. 34) ein fester Punkt, r eine gegebene Strecke, P ein beliebiger Punkt der Ebene; man ziehe OP und suche auf der Verlängerung dieser Linie über O hinaus einen Punkt P' so, daß

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = -r^2 .$$

Weist man irgend zwei Punkte P und P' der Ebene einander zu, welche dieser Gleichung genügen, so ist dadurch auch eine Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene festgelegt.

Konstruiert man nun (Fig. 34) den Punkt P'' nach der früheren Methode, so also, daß

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP''} = r^2 ,$$

so sieht man, daß P' aus P'' durch Drehung um 180^0 erhalten wird.

Sind also F und F'' zwei inverse Figuren für O als Inversionszentrum und r^2 als Potenz, und dreht man F'' um O um 180^0, wodurch man F' erhält, so sind F und F' inverse Figuren für O als Inversionszentrum und $-r^2$ als Potenz.

Der Radius des Grundkreises für die Potenz $-r^2$ ist $r\sqrt{-1}$, also imaginär.

Die früher entwickelten Sätze gelten auch für die Inversion mit einer negativen Potenz:

Einer Geraden entspricht wieder ein Kreis durch den Mittelpunkt der Inversion, einem Kreise wieder ein Kreis, wobei aber jetzt O der innere Ähnlichkeitspunkt beider Kreise ist; die Abbildung ist auch winkeltreu, zwei inverse Winkel haben wieder entgegengesetzten Sinn.

Übungsaufgaben:

69. Außer dem Grundkreise K ist eine Gerade gegeben; ihr inverses Bild ist zu konstruieren, wenn die Gerade den Kreis berührt, ihn schneidet oder an ihm vorbeigeht.

Gegeben ist der Grundkreis K und noch ein Kreis K_1; man konstruiere die inverse Figur zu K_1 in folgenden Fällen:

„K_1 gehe durch den Mittelpunkt von K; K_1 möge K von außen oder von innen berühren; K_1 schneide K unter einem schiefen, rechten Winkel; K_1 möge ganz innerhalb oder außerhalb K liegen."

70. Die Gesamtheit aller Kreise, welche dieselbe Potenzlinie haben, nennt man ein Kreisbüschel.

a) Schneiden sich irgend zwei von diesen Kreisen, so liegen ihre Schnittpunkte auf der gemeinschaftlichen Potenzlinie und gehören somit sämtlichen Kreisen des Büschels an. Das Büschel hat dann zwei reelle Grundpunkte und besteht aus der Gesamtheit aller Kreise, welche durch diese zwei Punkte gehen (Elliptisches Kreisbüschel).

b) Es kann aber auch der Fall eintreten, daß kein Kreis des Büschels mit einem anderen desselben reelle Punkte gemein hat (Hyperbolisches Kreisbüschel).

Sind dann K_1 und K_2 zwei Kreise dieses Büschels, so können aus ihnen unschwer weitere Kreise des Büschels konstruiert werden:

Ist nämlich P der Schnittpunkt ihrer Potenzlinie mit ihrer Zentralen, so hat P in bezug auf alle Kreise dieselbe Potenz p^2. Von P aus müssen sich daher an sämtliche Kreise des Büschels gleich lange Tangenten $(= p)$ ziehen lassen. Die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen also auf einem Kreise K, welcher P als Mittelpunkt hat und sämtliche Kreise des Büschels rechtwinklig schneidet.

Will man nun einen weiteren Kreis K_3 des Büschels konstruieren, so ziehe man einen beliebigen

Radius von K und errichte in seinem Endpunkte E die Normale, welche die Zentrale in einem Punkte O_3 schneidet. Der Kreis $O_3(E)$ gehört dem Büschel an, denn er hat im Punkte P auch die Potenz p^2.

Aus dieser Konstruktion folgt auch die Beziehung:

$$r^2 = d^2 - p^2 ,$$

wobei r der Radius des Kreises O_3, d der Abstand seines Mittelpunktes von P und p^2 die konstante Potenz im Punkte P ist.

Setzt man $$d = p ,$$

so wird $$r = 0 ,$$

d. h. dieses hyperbolische Büschel enthält auch zwei Punkte (Punktkreise); es sind dies die Schnittpunkte der Zentralen mit dem Kreise K.

c) Ist p die gemeinschaftliche Potenzlinie eines Büschels, Q irgend ein Punkt der Potenzlinie, so hat derselbe in bezug auf alle Kreise des Büschels die gleiche Potenz q^2;es lassen sich also von ihm aus an alle Kreise des Büschels gleich lange Tangenten ziehen.

Schlägt man um Q mit der Länge q dieser Tangenten einen Kreis, so schneidet er sämtliche Kreise des Büschels orthogonal.

Aus jedem Punkte Q der Potenzlinie erhält man also einen Kreis, welcher sämtliche Kreise des gegebenen Büschels orthogonal schneidet.

d) Die Gesamtheit aller dieser Orthogonalkreise bildet ein neues Büschel, welches die Zentrale des gegebenen Büschels zur Potenzlinie hat.

Beweis: Irgend ein Kreis K_1 des ersten (gegebenen) Büschels wird nämlich von sämtlichen Kreisen des zweiten Büschels orthogonal geschnitten. Die Tangenten in diesen Schnittpunkten an die Kreise des zweiten Büschels gehen also durch den Mittelpunkt O_1 des angenommenen Kreises K_1. Der beliebige Punkt O_1 der Zentrale des ersten Büschels hat daher gleiche Potenz in bezug auf sämtliche Kreise des zweiten Büschels.

e) Hat das erste Büschel reelle Grundpunkte, so hat das orthogonale Büschel keine reellen Grundpunkte. Das orthogonale Büschel hat die Knotenpunkte des ersten Büschels zu Punktkreisen.

Hat jedoch das erste Büschel keine reellen Grundpunkte, so hat das zweite Büschel reelle Grundpunkte, und zwar in den Punktkreisen des ersten Büschels.

f) Zeichnet man von einem Systeme konzentrischer Kreise und ihrer Durchmesser die inverse Figur, so erhält man zwei orthogonale Kreisbüschel.

71. Gegeben sei der Kreis K_1 und außerhalb desselben der Punkt P.

Zieht man von P die Tangenten an K_1 und schlägt mit der Länge der Tangenten den Kreis K um P, so entspricht K_1 sich selbst invers in bezug auf den Kreis K; was zu beweisen ist.

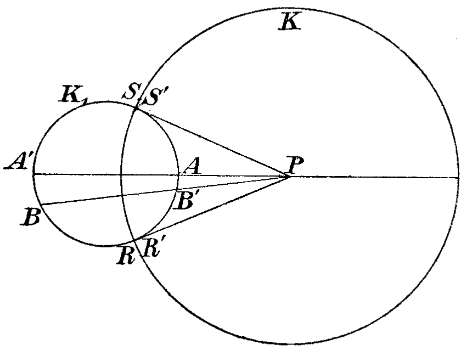

Fig. 35.

Die Kreise K und K_1 schneiden einander rechtwinklig. Die einander entsprechenden Punkte A und A', B und B' ... (Fig. 35) des Kreises K_1 bilden dabei eine Involution. Die Potenz unserer Inversion ist die Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis K_1.

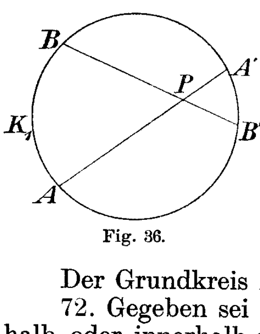

Fig. 36.

Auch wenn P innerhalb K_1 (Fig. 36) liegt, kann man eine Inversion mit P als Zentrum festlegen, in welcher K_1 sich selbst entspricht. Die Potenz der Inversion ist dann wieder gleich der Potenz desPunktes P in bezug auf den Kreis K_1, also negativ.

Der Grundkreis K der Inversion ist hier imaginär.

72. Gegeben sei der Kreis K_1 und ein Punkt P außerhalb oder innerhalb von K_1 (Fig. 37a, b); man bestimme

zu einem weiteren Punkte Q den zugehörigen Punkt Q' in jener Inversion, welche P zum Zentrum hat, und den Kreis K_1 in sich selbst überführt.

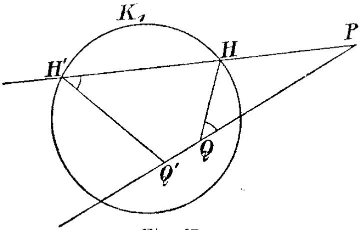

Fig. 37a.

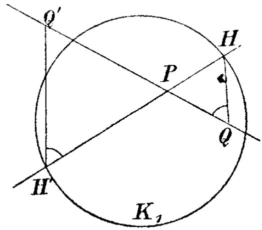

Fig. 37b.

73. Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2, welche sich im Punkte A berühren; man nehme A als Inversionszentrum und zeichne die inversen Figuren zu K_1 und K_2; welche Lage werden diese Figuren zueinander haben?

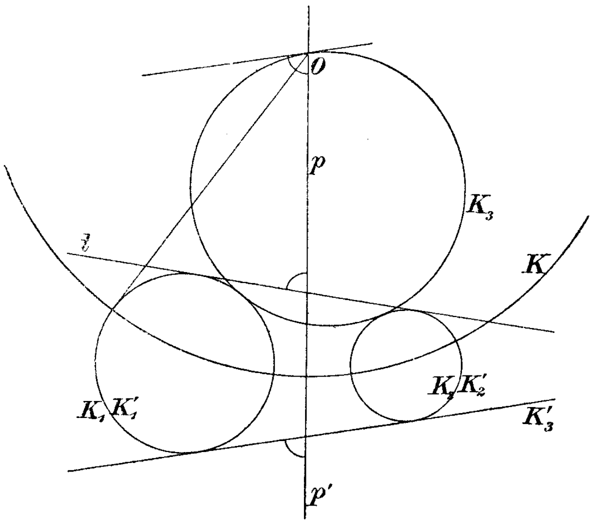

Fig. 38.

74. K_1, K_2 seien zwei Kreise, p sei ihre Potenzlinie, K_3 ein Kreis, welcher beide berührt, t eine gemeinsame

Tangente, welche zum selben Systeme berührender Kreise gehört wie K_3 (Fig. 38).

K_3 schneidet dann die Potenzlinie p unter demselben Winkel, unter dem t die Potenzlinie schneidet; ein Satz, der zur Auflösung des Apollonischen Berührungsproblemes Anwendung findet.

Man ziehe zum Beweise von O aus Tangenten an K_1 (oder K_2) und betrachte die Länge derselben als Radius

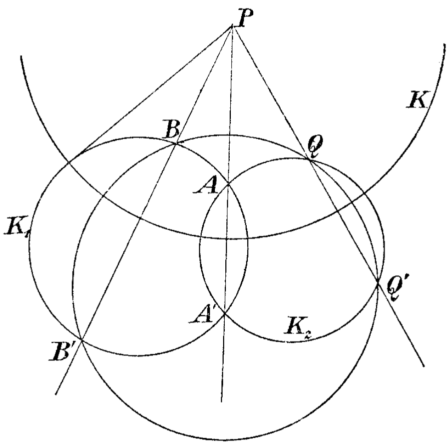

Fig. 39.

eines Kreises K, in bezug auf welchen man zu der ganzen Figur die inverse Figur zeichnet; K_1, K_2 und p entsprechen sich selbst in dieser Inversion; aus K_3 wird die gemeinschaftliche Tangente K_3'. Die Abbildung ist winkeltreu.

75. Gegeben sind ein Kreis K und zwei Punkte A und B; man konstruiere jenen Kreis, welcher dnrch A und B geht und K berührt.

Man nehme einen beliebigen Punkt des Kreises als Inversionszentrum, wenn möglich, einen der Schnittpunkte der Symmetralen von $\overline{AB}$ mit K.

76. Gegeben sind drei Kreise K_1, K_2, K_3, welche einen Punkt S gemeinsam haben; man konstruiere jenen

Kreis, welcher alle drei Kreise berührt. (Man nehme S als Zentrum der Inversion an.)

77. Gegeben sind der Kreis K_1, die Punkte P und Q; man ziehe durch P (Fig. 39) eine beliebige Sekante, welche K_1 in A und A' schneidet, und lege dann durch A, A' und Q den Kreis K_2; ändert man die Sekante AP, so erhält man neue Kreise K_2, welche alle außer durch Q noch durch einen zweiten festen Punkt Q' gehen, also ein Büschel bilden. (Die Tangenten von P an K und K_2 sind gleich lang; schlägt man mit dieser Tangente um P einen Kreis K und betrachtet denselben als Inversionskreis, so entsprechen K_1 und alle Kreise K_2 sich selbst. K_2 muß also noch durch jenen Punkt Q' gehen, welcher Q in der Inversion entspricht.)

78. Gegeben ein Kreis K_1 und zwei Punkte Q und Q'; es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher durch Q und Q' geht und K_1 berührt (77).

79. Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2; es ist jener Kreis K zu zeichnen, in bezug auf welchen sich die beiden Kreise invers entsprechen (mit positiver Potenz).

Der Mittelpunkt O von K (Fig. 40) muß der äußere Ähnlichkeitspunkt von K_1, K_2 sein; der Radius r von K folgt aus der Gleichung:

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} .$$

Da die beiden Kreise inverse Figuren sind, so ergibt sich auch weiter:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2 .$$

Aus der Inversion folgt sofort, daß jener Kreis K_3, welcher K_1 in Q (Fig. 40) berührt und durch Q' geht, auch K_2 in Q' berühren muß; denn er entspricht in der Inversion sich selbst, schneidet also den Inversionskreis senkrecht. Daraus folgt der oft gebrauchte Satz:

B e r ü h r t e i n K r e i s z w e i g e g e b e n e K r e i s e, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt, und zwar durch einen äußeren, wenn die Berührung mit den beiden Kreisen gleichartig, durch den inneren, wenn die Berührung mit den beiden Kreisen eine ungleichartige ist.

Die Potenz des äußeren Ähnlichkeitspunktes in bezug auf alle gleichartig berührenden Kreise K_3 ist also konstant und zwar gleich

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} .$$

Wie gestaltet sich die vorhergehende Aufgabe, wenn man an Stelle des äußeren Ähnlichkeitspunktes den inneren Ähnlichkeitspunkt als Inversionszentrum annimmt? (K wird dann imaginär.)

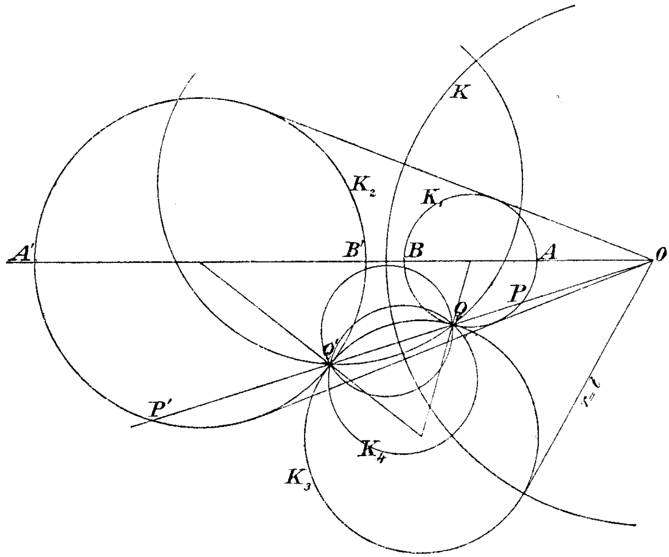

Fig. 40.

80. Legt man durch die inversen Punkte Q, Q' der Fig. 40 (Aufgabe 77) irgend einen Kreis K_3, so entspricht er in bezug auf den Inversionskreis K sich selbst, schneidet also K orthogonal und die beiden Kreise K_1, K_2 unter gleichen Winkeln. K_3 ist ein Isogonalkreis der beiden Kreise K_1, K_2.

Jeder Orthogonalkreis von K ist ein Isogonalkreis von K_1, K_2, weil er sich in der Inversion selbst entspricht.

Es seien nun drei Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben; $A_{1,2}$ sei ein Ähnlichkeitspunkt von M_1 und M_2, $K_{1,2}$ jener Kreis, in bezug auf welchen M_1 und M_2 einander invers entsprechen mit $A_{1,2}$ als Inversionszentrum; $A_{1,3}$ und $K_{1,3}$ sollen die analoge Bedeutung für die Kreise M_1, M_3 haben.

Alle Orthogonalkreise von $K_{1,2}$ resp. $K_{1,3}$ schneiden nach Aufgabe 80 die Kreise M_1 und M_2 resp. M_1 und M_3 unter gleichen Winkeln. Alle gemeinsamen Orthogonalkreise von $K_{1,2}$ und $K_{1,3}$ schneiden also alle drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln.

Die Gesamtheit der Orthogonalkreise von zwei Kreisen bilden ein Büschel (70), welches die Zentrale der zwei Kreise zur Potenzlinie hat.

Die Gesamtheit aller so erhaltener Isogonalkreise von M_1, M_2, M_3 wird also ein Büschel bilden, welches die Ähnlichkeitsachse a zur Potenzlinie hat.

Nun kann man von einer anderen Ähnlichkeitsachse der drei Kreise ausgehen, man erhält wieder ein Büschel von Isogonalkreisen, welches diese Ähnlichkeitsachse zur Potenzlinie hat.

Es gilt also der Satz:

„Die Gesamtheit aller Isogonalkreise der drei gegebenen Kreise bilden vier Kreisbüschel mit je einer Ähnlichkeitsachse als Potenzlinie."

Je zwei M_1, M_2, M_3 berührende Kreise gehören einem und demselben Büschel an.

Z sei das Potenzzentrum der drei Kreise, K jener Kreis, welcher alle drei Kreise rechtwinklig schneidet, also jener Kreis, welcher um Z mit einem Radius beschrieben wird, gleich der Länge der Tangenten, die man von Z an die drei Kreise legen kann.

Nimmt man nun K als Inversionskreis an, so entsprechen die Kreise M_1, M_2, M_3 als Orthogonalkreise von K sich selbst, und jedem Isogonalkreise der drei Kreise entspricht ein Isogonalkreis desselben Büschels, insbesondere jedem berührenden Kreise der drei Kreise ein anderer berührender Kreis derselben drei Kreise.

Zwei in bezug auf K invers liegende Kreise haben aber Z als Ähnlichkeitspunkt und schneiden sich auf K. Daraus folgt:

a) Die Grundpunkte der vier Isogonalkreisbüschel liegen auf K; K gehört also allen vier Isogonalkreisbüscheln an.

Die Grundpunkte sind also die Schnittpunkte der Ähnlichkeitsachsen mit K.

b) Die berührenden Kreise desselben Büschels schneiden K in den eben erwähnten Grundpunkten und haben Z als Ähnlichkeitspunkt.

Diese Bemerkungen werden bei der Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes von Nutzen sein.

81. Gegeben sind zwei Kreise K_1, K_2 und ein Punkt P; es ist jener Kreis zu zeichnen, welcher durch P geht und beide Kreise berührt. (Man nehme einen Ähnlichkeitspunkt von K_1 und K_2 als Inversionszentrum an, bestimme den Radius r des Inversionskreises, in bezug auf welchen K_1 und K_2 einander entsprechen.

Der gesuchte Kreis entspricht in dieser Inversion sich selbst und muß daher durch jenen Punkt P' gehen, welcher invers zu P ist. Diese Aufgabe ist dann zurückgeführt auf 78.

Als Inversionszentrum nehme man einmal den äußeren, dann den inneren Ähnlichkeitspunkt an.

82. Gegeben eine Gerade g, ein Kreis K_1 und ein Punkt P; es sind Kreise X zu konstruieren, welche g und K_1 berühren und durch P hindurchgehen (Fig. 41).

Man nehme A oder J als Inversionszentrum an, bestimme den Grundkreis K so, daß K_1 und g einander invers entsprechen (für den Punkt J wird dieser Grundkreis imaginär).

Die Potenz der Punkte A und J in bezug auf die gesuchten Kreise läßt sich unmittelbar aus der Figur bestimmen.

83. Gegeben sei ein Kreis K und n Inversionen $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$, $\ldots$, $O_n(r_n)$; man suche zu K bezüglich $O_1(r_1)$ den inversen Kreis K_1, zu K_1 bezüglich $O_2(r_2)$ den inversen Kreis K_2, zu K_2 bezüglich $O_3(r_3)$ den inversen Kreis K_3 usw. Schließlich erhält man den

Kreis K_n durch Inversion des vorletzten Kreises K_{n-1} an $O_n(r_n)$.

K_n kann auch mit K zusammenfallen; dann muß $O_n(r_n)$ jener Grundkreis sein, durch welchen K_{n-1} in K übergeführt wird (Aufgabe 71).

Wir wollen voraussetzen, daß O_n derart gewählt wurde.

Nimmt man nun auf K einen Punkt A an, so entstehen durch die aufeinanderfolgenden Inversionen die Punkte A_1 auf K_1, A_2 auf $K_2, \ldots$, schließlich ein Punkt A_n

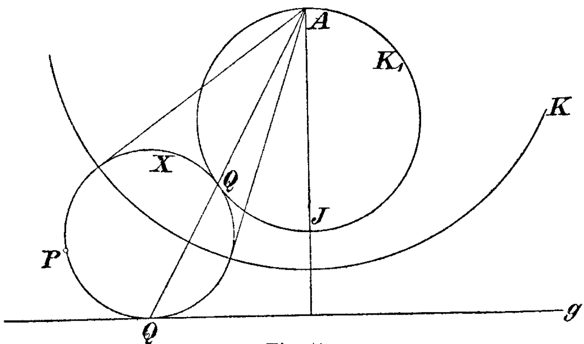

Fig. 41.

auf K_n, welcher mit dem auf K angenommenen Punkte A im allgemeinen nicht zusammenfällt. Wir stellen folgende Aufgabe:

Es soll A auf dem Kreise K so bestimmt werden, daß A mit A_n zusammenfällt.

Der gesuchte Punkt heiße X. Die Aufsuchung desselben ist die Aufgabe des Folgenden.

Bei dieser Aufgabe spielen zwei Punkte eine Hauptrolle:

Sucht man zu O_1 in der zweiten Inversion $O_2(r_2)$ den entsprechenden Punkt, zu dem so erhaltenen Punkte den entsprechenden Punkt in der dritten Inversion $O_3(r_3)$ usw., so erhält man nach sukzessiver Inversion an den $n-1$ Zentren $O_2, \ldots, O_n$ den Punkt H_1.

Sucht man nun zu O_n in der Inversion $O_{n-1}(r_{n-1})$ den zugehörigen Punkt, zu dem so gefundenen den entsprechenden in bezug auf $O_{n-2}(r_{n-2})$ usw., die Reihe der Inversionen in entgegengesetzter Folge durchlaufend, so erhält man schließlich nach den $n-1$ Inversionen den Punkt H_n.

Jeder Geraden a aus H_n entspricht nach Vornahme der aufeinanderfolgenden n Inversionen an $O_1, O_2, \ldots, O_n$ eine Gerade α' aus H_1.

Beweis. Durch die erste Inversion wird a übergeführt in einen Kreis a_1, welcher durch O_1 hindurchgeht; dieser Kreis wird durch die zweite Inversion wieder in einen Kreis verwandelt usw. Schließlich erhält man nach $n-1$ Inversionen einen Kreis, der durch O_n gehen muß, weil H_n, welches auf a liegt, nach den $n-1$ aufeinanderfolgenden Inversionen auf O_n zu liegen kommt. Durch die noch fehlende Inversion an O_n wird der zuletzt erhaltene Kreis in eine Gerade a' übergeführt.

Die Gerade a geht dabei durch die erste Inversion an O_1 in einen Kreis a_1 über, welcher durch O_1 gehen muß; der Kreis a_1 geht also durch die aufeinanderfolgenden Inversionen an $O_2, O_3, \ldots, O_n$ auch in die Gerade a' über. Weil aber a_1 durch O_1 geht, so muß a' durch H_1 gehen, womit der Satz bewiesen ist.

Das Strahlenbüschel H_n geht daher durch die n Inversionen an $O_1, \ldots, O_n$ in das Strahlenbüschel H_1 über.

Aus den Punkten H_1 und H_n ergibt sich die Lösung unserer Aufgabe, wobei wir aber zwei Fälle unterscheiden müssen, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Bei jeder Inversion ist nämlich der Winkel α seinem entsprechenden gleich aber entgegengesetzten Sinnes.

Unterwirft man den Winkel n aufeinanderfolgenden Inversionen, so wird die Größe des Winkels erhalten bleiben, der Sinn aber nur dann, wenn n gerade ist. Ist n ungerade, so hat sich der Sinn des Winkels umgekehrt.

a) n sei gerade.

Verbindet man den gesuchten Punkt X auf K, mit H_n, so wird dieser Verbindungsgerade nach den n Inversionen die Linie XH_1 entsprechen. Beide Linien müssen im Punkte X mit dem Kreise gleiche Winkel von demselben Sinne einschließen. Dies ist nur möglich, wenn X auf die Verbindungslinie der Punkte H_1, H_n fällt.

Unsere Aufgabe hat also zwei Lösungen: Die Schnittpunkte der Geraden H_1H_n mit dem ursprünglichen Kreise K.

b) n sei ungerade.

Die Gerade H_1H_n entspricht sich in diesem Falle nicht mehr selbst.

Rechnet man diese Gerade zum Büschel H_1 und bezeichnet sie mit s, so entspricht ihr nach obigem eine Gerade s' von H_n; rechnet man aber die Gerade H_1H_n zum Büschel H_n und bezeichnet sie dann mit σ, so entspricht ihr eine Gerade σ' aus H_1.

Die Geraden H_1H_n, s' und σ' müssen den Kreis K unter denselben Winkeln schneiden, sie müssen daher ein und denselben zu K konzentrischen Kreis berühren. Ferner entspricht dem Geradenpaare s', s das Geradenpaar σ, σ'; es müssen daher die Winkel σ', s und σ, s' gleich sein.

Beides ist aber nur dann möglich, wenn H_1 und H_n vom Mittelpunkte des Kreises K gleich weit entfernt sind.

Legt man nun durch H_1, H_n und den Mittelpunkt des Kreises K einen neuen Kreis, so schneidet derselbe den Kreis K in den gesuchten Punkten X; denn die Verbindungsgerade jedes dieser Schnittpunkte mit H_1 schneidet K unter demselben Winkel, wie die Verbindungslinie dieses Punktes mit H_n.

Petersen behandelt (a. a. O. Nr. 201) dieselbe Aufgabe; er entwickelt aber nicht die Eigenschaft, daß die Punkte H_1 und H_n von dem Mittelpunkte des Kreises K gleich weit abstehen. Seine Konstruktion der Punkte X ist daher weniger einfach als die eben angegebene.

84.*) Gegeben sind ein Kreis K und vier Punkte O_1, O_2, O_3, O_4; dem Kreise K ist ein Viereck $XYZO$ so einzuschreiben, daß die Seite XY durch O_1, YZ durch O_2, ZO durch O_3, OX durch O_4 geht.

(Man führe den Kreis K durch Inversion an O_1 in sich selbst über (Aufgabe 71), hierauf durch Inversion an O_2 wieder in sich selbst; analog durch Inversion an O_3

*) Petersen a. a. O.

und O_4. Der Kreis K ist dann durch vier bestimmte Inversionen in sich selbst übergeführt. Der Punkt X wird nach Nr. 83a gefunden.)

85.*) Gegeben ein Kreis und drei Punkte O_1, O_2, O_3; es ist ein Dreieck zu zeichnen, welches dem Kreise eingeschrieben ist so, daß seine Seiten durch die gegebenen Punkte gehen.

(Zurückzuführen auf Aufgabe 83b.)

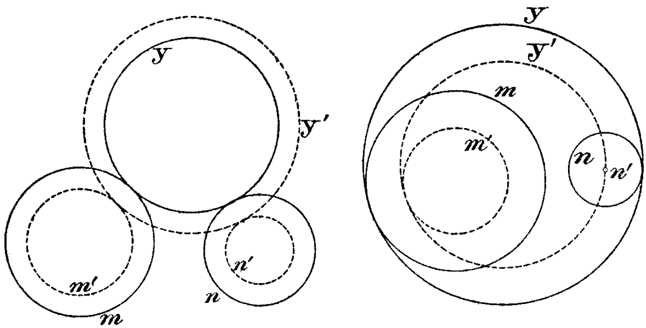

Fig. 42a. Fig. 42b.

86. Gegeben sind drei Kreise K_1, K_2, K_3; es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher alle drei Kreise berührt. (Apollonisches Berührungsproblem.)

Die angegebenen Methoden setzen uns in den Stand, eine ganze Reihe von Verfahren zur Auflösung dieser altberühmten Aufgabe zu geben; wir wollen in den Absätzen a), b), c), d) einige Lösungsweisen anführen.

a) Man kann diese Aufgabe immer auf folgenden speziellen Fall reduzieren:

„Gegeben sind zwei Kreise und ein Punkt; es ist jener Kreis zu suchen, welcher die zwei gegegebenen Kreise berührt und durch den Punkt geht.“

Diese Aufgabe hat (81) vier Lösungen.

Die Zurückführung der allgemeinen Aufgabe auf diesen speziellen Fall ergibt sich aus folgender Überlegung:

*) Petersen a. a. O.

Es seien m und n zwei Kreise, y ein sie berührender Kreis (Fig. 42, 43).

Wir lassen diese drei Kreise sich so ändern, daß ihre Mittelpunkte unverändert bleiben und y immer m und n berührt; die Kreise können sich also nur ausdehnen und zusammenziehen.

Berührt y die beiden Kreise m und n gleichartig (Fig. 42a, b), so werden die Radien der beiden Kreise dabei gleichzeitig wachsen oder gleichzeitig abnehmen.

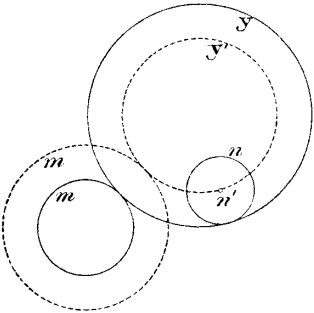

Fig. 43a.

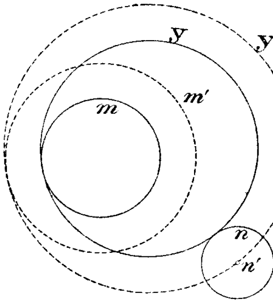

Fig. 43b.

Berührt y die beiden Kreise m und n ungleichartig (Fig. 43a, b), so muß von den Kreisen m und n der eine wachsen und gleichzeitig der andere abnehmen.

Sind nun drei Kreise K_1, K_2, K_3 mit den Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 und den Radien r_1, r_2, r_3 gegeben, und ist X jener Kreis, welcher alle drei Kreise berührt, so läßt man den Kreis K_1 auf den Punkt O_1 sich reduzieren und gleichzeitig, dem Erklärten nach, die anderen Kreise sich ausdehnen oder zusammenziehen, wodurch die Zurückführung auf 81 erfolgt ist.

Die Ausführung der ganzen Konstruktion gestaltet sich folgendermaßen:

Man schlage um O_2 zwei Kreise K_2' und K_2'' mit den Radien r_2+r_1 und r_2-r_1, um O_3 ebenfalls zwei Kreise K_3' und K_3'' mit den Radien r_3+r_1 und r_3-r_1. Man suche nun jene Kreise, welche durch O_1 gehen, außerdem K_2' und K_3' oder K_2'' und K_3'' berühren, und zwar jedesmal die beiden Kreise gleichartig berühren (vier Lösungen).

Man suche ferner jene Kreise, welche durch O_1 gehen, außerdem K_2', K_3'' oder K_2'', K_3' berühren, und zwar jedesmal ungleichartig (vier Lösungen).

Die gefundenen acht Kreise sind schon konzentrisch mit den gesuchten Kreisen. Die Aufgabe hat daher acht Lösungen.

b) Man nehme die Aufgabe als gelöst an, lasse dann die Radien der Kreise um ein bestimmtes Stück wachsen oder abnehmen so lange, bis zwei Kreise, z. B. K_1' und K_2' einander im Punkte Q berühren (Fig. 44).

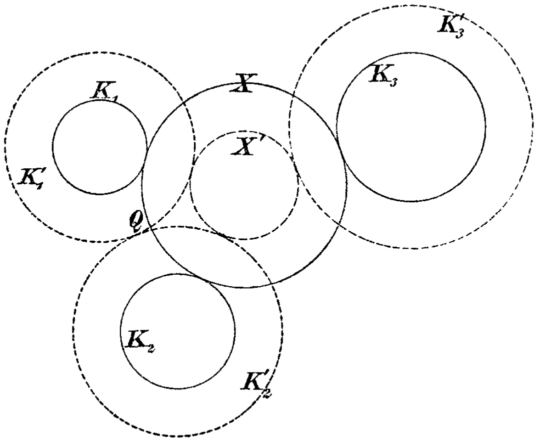

Fig. 44.

Nimmt man nun Q zum Inversionszentrum, so verwandeln sich K_1' und K_2' in parallele Gerade usw.

c) K sei jener Kreis, welcher alle drei Kreise senkrecht schneidet (S. 49).

Nimmt man auf K einen Punkt O als Inversionszentrum an, so verwandeln sich die gegebenen Kreise in Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen; durch nochmalige Inversion kann man auf den Fall kommen, welchen Fig. 3 darstellt.

Vorteilhaft ist es, das Inversionszentrum womöglich im Schnittpunkte von K mit einem der gegebenen Kreise anzunehmen.

Schneiden sich zwei der gegebenen Kreise, so ist es vorteilhaft, das Inversionszentrum im Schnittpunkte derselben anzunehmen, wodurch sie in gerade Linien verwandelt werden.

Es empfiehlt sich auch, zuerst nach 86, a einen Kreis auf einen Punkt zu reduzieren, bevor man die Inversion anwendet.

d) Mittels der in Aufgabe 80 entwickelten Sätze ergibt sich folgende Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes:

Gegeben sind die Kreise M_1, M_2, M_3 (Fig. 45).

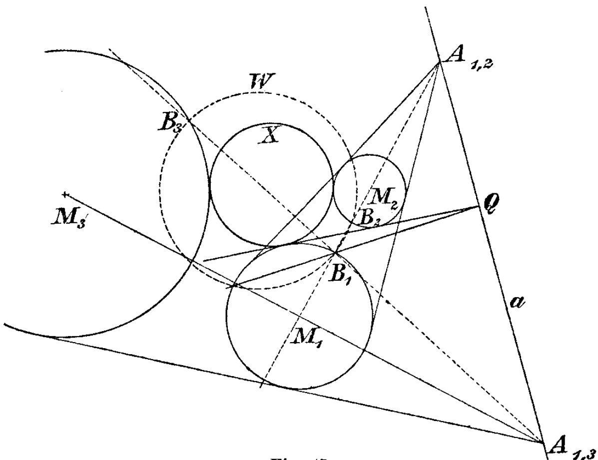

Fig. 45.

Wir gehen von einer Ähnlichkeitsachse, z. B. von der äußeren Ähnlichkeitsachse a aus und konstruieren einen Isogonalkreis W des Isogonalkreisbüschels, für welche a die Potenzlinie ist.

Zu diesem Zwecke nehmen wir auf M_1 einen Punkt B_1 an und konstruieren den inversen Punkt B_2 auf M_2 in bezug auf $A_{1,2}$ als Inversionszentrum; außerdem suchen wir zu B_1 den inversen Punkt B_3 auf M_3 in bezug auf $A_{1,3}$ als Inversionszentrum.

Der Kreis W durch die drei Punkte B_1, B_2, B_3 ist ein Isogonalkreis (80).

Konstruiert man nun die Potenzlinie von W und M_1 und bringt sie zum Schnitt mit a im Punkte Q, so hat Q dieselbe Potenz in bezug auf M_1 und W; da aber Q auf a liegt, so hat Q auch in bezug auf den gesuchten Kreis X, welcher dem Isogonalkreisbüschel W angehört, dieselbe Potenz, denn a ist die Potenzlinie dieses Büschels. Q ist daher ein Punkt der Potenzlinie von X und M_1.

Da nun X und M_1 einander berühren sollen, ihre Potenzlinie also ihre gemeinschaftliche Tangente sein muß, so folgt daraus sofort die Konstruktion des Berührungspunktes von X und M_1 (Fig. 45).

e) Eine elegante Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes werden wir in dem folgenden Paragraphen auf Grund räumlicher Betrachtungen kennen lernen.

---

§ 7. Räumliche Betrachtungen als Hilfsmittel zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

1. Räumliche Betrachtungen werden zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben oft vorteilhaft benutzt, z. B. zur Lösung der folgenden Aufgabe:

„Gegeben ist ein Kegelschnitt; es ist ein zweiter Kegelschnitt zu konstruieren, welcher den gegebenen Kegelschnitt doppelt berührt und drei weitere Bedingungen erfüllt, z. B. durch drei Punkte geht.“

Auf diese Aufgabe wollen wir aber nicht näher eingehen, sondern räumliche Betrachtungen nur zur Lösung von Aufgaben und Sätzen heranziehen, die in dem Rahmen der jetzt behandelten Aufgaben liegen.

2. Wir wollen zuerst mittels räumlicher Anschauung einige Sätze beweisen, die wir später brauchen werden.

a) Es seien die Kreise K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten O_1 resp. O_2 und den Radien r_1 resp. r_2 gegeben.

Man denke sich senkrecht zur Zeichenfläche in den Punkten O_1 und O_2 die Radien r_1 resp. r_2 aufgetragen und die so erhaltenen Punkte S_1 und S_2 mit sämtlichen Punkten der Kreise K_1 resp. K_2 verbunden.

Dadurch erhält man Kegelflächen, welche auf den Kreisen aufstehen, und welche wir rechtwinklige Kegel-

flächen nennen wollen, weil jeder Achsenschnitt derselben ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck ist.

Zieht man nun in den beiden Kreisen zwei gleichgerichtete Radien, so sind dieselben Projektionen von zwei parallelen Erzeugenden der Kegelflächen. Legt man durch diese Erzeugenden eine Ebene, so geht deren Spur durch den Schnittpunkt A der Verbindungslinie der Kegelspitzen mit der Zeichenebene, also geht auch die Verbindungsgerade der Endpunkte der Radien durch A.

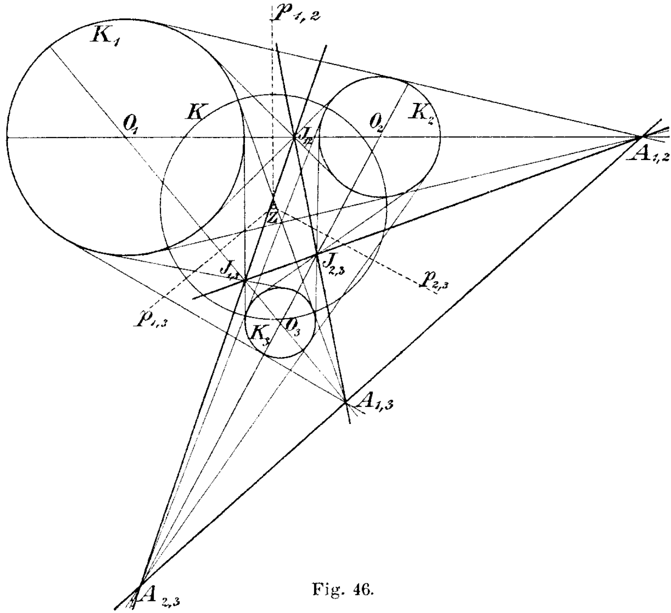

Fig. 46.

Wir haben dabei beide Kegelflächen auf derselben Seite der Zeichenebene gedacht.

Nimmt man den Punkt S_1 auf einer Seite der Zeichenebene und den Punkt S_2 auf der anderen an, so erhält man ganz analog die **Haupteigenschaft des inneren Ähnlichkeitspunktes** der beiden Kreise.

b) Es seien (Fig. 46) drei Kreise K_1, K_2, K_3 mit den Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 und den Radien r_1, r_2, r_3 gegeben.

Man errichte in den Mittelpunkten wieder Strecken mit den Radien r_1 resp. r_2 und r_3, z. B. alle oberhalb der Zeichenebene; man erhält dadurch die Punkte S_1, S_2, S_3.

Der Schnittpunkt der Linie $S_1 S_2$ mit der Zeichenfläche ist der äußere Ähnlichkeitspunkt A_{12} der beiden Kreise K_1, K_2; analog ist A_{13} der Schnittpunkt der Geraden $S_1 S_3$ und A_{23} der Schnittpunkt der Geraden $S_2 S_3$.

Die drei Geraden $S_1 S_2$, $S_2 S_3$, $S_3 S_1$ liegen in der Ebene, welche die Spitzen der Kegel bestimmen; daher liegen ihre Spurpunkte A_{12}, A_{23}, A_{31} in einer Geraden.

Denkt man sich ferner die Kegelflächen auf andere Art errichtet: über K_1 oberhalb, über K_2 und K_3 aber unterhalb der Zeichenfläche, so erhält man durch eine ganz analoge Betrachtung den Satz, daß die drei Punkte J_{12}, J_{13}, A_{23} in einer Geraden liegen müssen, usw.

Damit ist folgender Satz räumlich bewiesen:

Die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen bilden die Ecken eines vollständigen Vierseites.

Die Seiten des Viereckes nennt man die Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise.

c) Auch die Hauptsätze der Polarentheorie für den Kreis kann man durch räumliche Anschauung sofort gewinnen:

Gegeben sei ein Kreis K. Man denke sich denselben als größten Kreis einer Kugel, welche zur Hälfte oberhalb, zur Hälfte unterhalb der Zeichenfläche liegt.

Nimmt man nun einen Punkt P außerhalb der Kugel an, so ist seine Polare p die orthogonale Projektion des Berührungskreises jenes Kegels, welchen man von P an die Kugel legen kann. Bewegt sich P in einer Geraden g, so ändert sich dieser Berührungskreis, geht aber immer durch die Berührungspunkte der Tangentialebenen, die man von g an die Kugel legen kann. Die Polare des Punktes P wird sich also um G drehen, wenn P die Gerade g beschreibt.

Wenn G eine Gerade f beschreibt, wird g sich um einen Punkt F drehen, den Pol von f; denn die Polare g von G wird nach obigem gefunden, indem man durch G eine Normale zur Zeichenfläche zieht, sie mit der Kugel zum Schnitte bringt im Punkte S, dann in S die Tangentialebene an die Kugel legt, welche die Zeichenfläche in der gesuchten Geraden g schneidet.

f ist die Projektion eines Kreises s der Kugel. Die Tangentialebenen in sämtlichen Punkten dieses Kreises umhüllen einen Rotationskegel, dessen Spitze F in der Zeichenfläche liegt.

Bewegt sich nun G auf der Geraden f, so wird der Punkt S immer auf dem Kreise s liegen, daher wird seine Tangentialebene immer durch F gehen, d. h.: Bewegt sich G auf der Geraden f, so dreht sich die Polare g um den Punkt F.

d) Wir wollen noch einen Satz, welchen wir später oft brauchen werden, durch räumliche Betrachtung beweisen.

Dieser Satz ist der folgende:

„Sind A, B, C und A', B', C' zwei Dreiecke derselben Ebene, a, b, c und a', b', c' ihre Seiten, und gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte A, A', B, B', C, C' durch ein und denselben Punkt S der Ebene, so schneiden sich die entsprechenden Seiten a, a', b, b', c, c' in Punkten P, Q, R, welche in einer Geraden s liegen."

Umgekehrt gilt:

„Schneiden sich die Seiten a, a', b, b', c, c' in Punkten P, Q, R einer Geraden, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch ein und denselben Punkt S."

Wir wollen beide Aussagen durch räumliche Betrachtung beweisen; dabei werden wir folgende zwei, wohl unmittelbar einleuchtende, Sätze anwenden:

1. „Liegt eine Gerade g in einer Ebene F, so liegt ihr Spurpunkt mit einer zweiten Ebene E in der Schnittlinie der Ebene E mit der Ebene F."

2. „Projiziert man eine Gerade g auf eine Ebene E, so geht die Projektion der Geraden immer durch den Spurpunkt von g mit E, ob nun das Projektionszentrum im Endlichen oder im Unendlichen liegt."

α) Es seien nun ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke der Ebene E in einer derartigen gegenseitigen

Lage, daß die Verbindungslinien der Punkte A, A', B, B', C, C' durch ein und denselben Punkt S gehen.

Wir ziehen durch S eine nicht in E liegende, sonst aber beliebige Gerade h und nehmen auf derselben zwei Punkte O und O' an; den Punkt O verbinden wir mit den Ecken des Dreieckes ABC und den Punkt O' mit den Eckpunkten des zweiten Dreieckes $A'B'C'$.

Die Linien OA und $O'A'$ werden sich in einem Punkte A'' schneiden, weil sie in einer und derselben Ebene liegen, ebenso werden sich die Geraden $OB, O'B'$ in B'' und die Geraden $OC, O'C'$ in C'' schneiden.

Wir haben im Raume ein Dreieck $A''B''C''$ erhalten, von welchem die beiden gegebenen Dreiecke Zentralprojektionen sind, und zwar ist ABC die Projektion von $A''B''C''$ aus O und $A'B'C'$ die Zentralprojektion desselben Dreieckes aus O'.

Die Geraden a und a' müssen daher durch den Spurpunkt der Geraden $B''C''$ mit der Ebene E gehen. Der Punkt $P(\equiv a \times a')$ ist also der Spurpunkt der Geraden $B''C''$.

Analog ist $Q(\equiv b \times b')$ der Spurpunkt der Geraden $A''C''$ und der Punkt $R(\equiv c \times c')$ der Spurpunkt der Geraden $A''B''$ mit der Ebene F.

Da aber die Punkte A'', B'', C'' in einer Ebene liegen, so müssen die Punkte P, Q, R in einer Geraden liegen, nämlich in der Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene E.

Damit ist die erste Aussage des Satzes nachgewiesen.

β) Es seien ABC und $A'B'C'$, zwei Dreiecke derselben Ebene, in einer derartigen Lage, daß die Schnittpunkte P, Q, R der entsprechenden Seiten a und a', b und b', c und c' auf einer und derselben Geraden s liegen.

Wir legen durch s eine Hilfsebene H und zeichnen in derselben ein Dreieck $A''B''C''$ derart, daß $B''C''$ durch P, $C''A''$ durch Q und $A''B''$ durch R geht.

Die Seiten dieses neuen Dreieckes nennen wir a'', b'', c''; legen wir nun durch die Geraden a und a'' eine Ebene, ebenso durch b, b'' resp. c, c'', so schneiden sich diese drei Ebenen in einem Punkte O; O ist derjenige Punkt des Raumes, aus welchem das Dreieck $A''B''C''$ in ABC projiziert wird.

Analog finden wir den Punkt O', aus welchem das Dreieck $A''B''C''$ in ABC projiziert wird.

Die Gerade OO' schneidet die Ebene E in einem Punkte S, welcher mit den Punkten A, A' resp. B, B' und C, C' auf einer Geraden liegen muß; denn die Punkte OO' liegen mit dem Punktepaare A, A' in einer Ebene, ebenso mit dem Punktepaare B, B' und dem Punktepaare C, C', womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Zwei Dreiecke in einer derartigen Lage nennt man zwei perspektiv liegende Dreiecke oder zwei homologe Dreiecke.

3. Abbildung der Kreise einer Ebene auf den Raum (Zyklographie von Fiedler).

K sei ein Kreis der Ebene E, O sein Mittelpunkt, r sein Radius; man errichte in O die Normale auf E und mache sie gleich dem Radius r; man erhält dadurch einen Punkt P.

Ist umgekehrt P gegeben, so findet man zu P einen einzigen Kreis der Ebene E, indem man von P auf E die Normale fällt und um den Fußpunkt derselben den Kreis beschreibt mit einem Radius, der dem Abstande des Punktes P von E gleich ist.

P bestimmt mit dem Kreise K einen rechtwinkligen Kegel, den wir schon früher kennen gelernt haben. Jedem Kreise K entsprechen zwei Punkte des Raumes, einer oberhalb und einer unterhalb der Zeichenfläche. (Wir wollen die Ebene E horizontal annehmen.)

Reduziert sich der Kreis auf einen Punkt, so ist derselbe sein räumliches Bild. Einer Geraden g entsprechen zwei Ebenen, welche durch g gehen und mit K einen Winkel von 45^0 einschließen.

4. Gegeben sei ein Kreis K der Ebene E; P sei sein räumliches Bild, und zwar oberhalb der Ebene E (Fig. 47).

Nimmt man nun auf einer Erzeugenden e der Kegelfläche irgend einen Punkt an, so entspricht ihm ein bestimmter Kreis in der Ebene E, welcher den Kreis K im Spurpunkte Q der Erzeugenden e berühren wird. Liegt dabei der Punkt oberhalb der Ebene E aber tiefer als P etwa wie P_1, so wird der zugehörige Kreis K_1 den Kreis K von innen berühren, während der Kreis K_2, welcher zu P_2 (Fig. 47) gehört, den Kreis K umfassend berührt; die Kreise K_3, welche zu allen unterhalb der Ebene liegenden Punkten der Kegelflächen gehören, werden den Kreis K von außen berühren.

5. Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes.

Diese wenigen Bemerkungen gestatten, das Apollonische Berührungsproblem zu lösen:

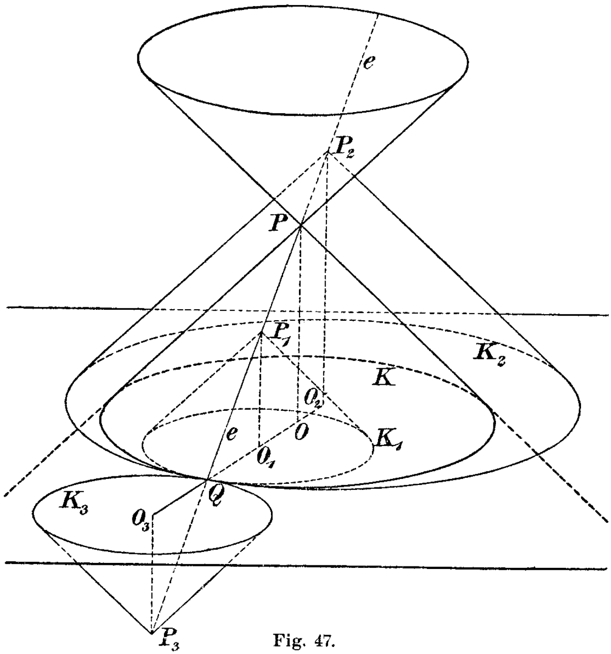

Fig. 47.

K_1, K_2, K_3 seien die gegebenen drei Kreise, man konstruiere die zugehörigen Kegel nach der Methode der Zyklographie. Zu jedem Kreise gehören zwei Kegel. Wir wollen zunächst nur jene drei Kegel betrachten, welche oberhalb der Zeichenfläche liegen.

Je zwei von diesen Kegeln schneiden sich nach einer Kurve, die eine Hyperbel ist, wie wir gleich sehen werden. Die Schnittpunkte $X_1 X_2$ dieser Hyperbel mit dem dritten Kegel sind Punkte, welche allen drei Kegeln angehören.

Konstruiert man nun zu diesen gemeinsamen Punkten X_1, X_2 die zugehörigen Kreise der Zeichenebene, so müssen dieselben die gegebenen Kreise berühren, sie sind also zwei der gesuchten Kreise.

Weitere Lösungen erhält man, wenn man die Kegel nicht nur oberhalb der Zeichenfläche, sondern einen Teil derselben oberhalb, den anderen Teil unterhalb dieser Ebene annimmt.

6. Durchführung der Konstruktion zur Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes.

1. Die vorige Nummer enthält wohl die allgemeine Auflösung des Apollonischen Berührungsproblemes; um die Konstruktion auf möglichst einfachem Wege durchführen zu können, sind noch einige Bemerkungen wichtig, die wir jetzt geben wollen:

a) In Fig. 48 sind in orthogonaler Projektion Grund- und Aufriß von zwei rechtwinkligen Kegelflächen P_1, P_2 dargestellt, deren Achsen auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht stehen und von der vertikalen Projektionsebene gleich weit entfernt sind.

Die zweite Projektion der Schnittfigur dieser beiden Kegel ist ein Teil der Linie e_2; die Schnittfigur liegt daher in einer Ebene und ist eine Hyperbel.

Die erste Spur e_1 der Ebene, in welcher die Schnittfigur liegt, geht durch die gemeinschaftlichen Punkte von K_1' und K_2', d. h.: Die Grundrißspur der Ebene, in welcher die Schnittfigur der beiden Kegelflächen liegt, ist die Potenzlinie der beiden Kreise K_1 und K_2.

b) Die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ schneidet die Grundrißebene in A, einem Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise. Die Linie a_1 der Fig. 48 ist die Polare des Punktes A in bezug auf den Kreis K_1; a_1 und a_2 sind die Spuren einer Ebene, welche durch P_1 geht und welche die Polarebene des Punktes A in bezug auf den Kegel P_1 genannt wird.

Die Punkte A'', B, C, D der Projektionsachse sind vier harmonische Punkte; die vier Strahlen, welche P_1''

mit diesen vier Punkten bildet, sind daher vier harmonische Strahlen, welche bekanntlich von jeder Geraden, also auch von e_2 nach vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Da nun der Punkt *2* der Fig. 48 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{1,\ 3}$ ist, also der vierte harmonische Punkt der Punktreihe *1*, *2*, *3* im Unendlichen zu liegen kommt, so muß a_2 parallel e_2 und daher die Ebene a_1, a_2 parallel zur Ebene e_1, e_2 sein.

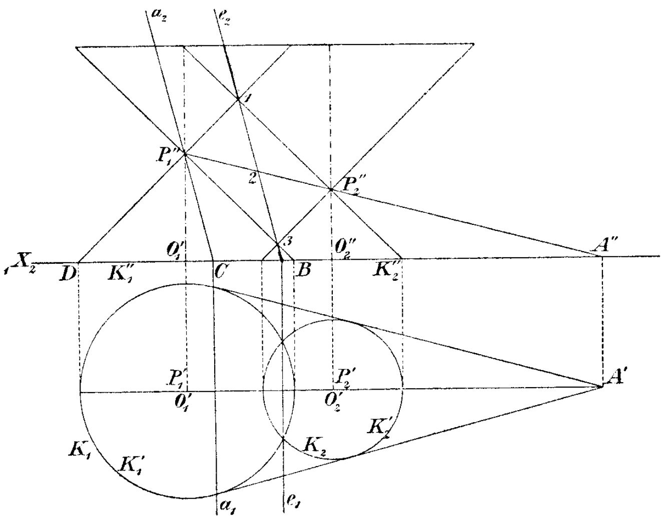

Fig. 48.

Folglich gilt der Satz:

Die Ebene e_1, e_2, welche die Schnittfigur der beiden Kegel P_1, P_2 enthält, ist parallel zur Polarebene a_1, a_2 des Punktes A bezüglich der Kegelfläche K_1 (oder der Kegelfläche K_2).

c) Es sei K ein Kreis der Zeichenfläche (Fig. 49); über demselben sei wieder ein rechtwinkliger Kegel (mit der Spitze P) errichtet. Die Projektion P' der Spitze auf die Zeichenfläche fällt mit O zusammen.

Ein Punkt H der Zeichenfläche sei mit dem Punkte P durch eine Gerade h verbunden, h' ist deren Projektion.

Durch den beliebigen Punkt G der Zeichenebene sei eine Gerade g parallel zu h gezogen (g' parallel h' ist ihre Projektion). Es sollen die Schnittpunkte X, Y der Geraden g mit der Kegelfläche bestimmt werden.

Man lege durch h und g eine Hilfsebene; dieselbe schneidet die Zeichenebene in der Linie s und den Kegel nach zwei Erzeugenden, welche sich in OM und ON projizieren. Die gesuchten Punkte X, Y müssen auf diesen Erzeugenden liegen; X', Y' sind damit (Fig. 49) gefunden.

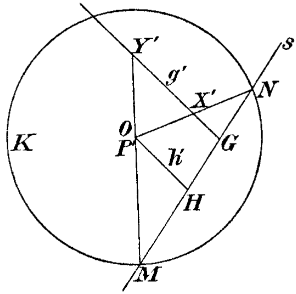

Fig. 49.

2. Mit Hilfe dieser Bemerkungen und des früher genommenen können wir nun das Apollonische Berührungsproblem leicht lösen:

Gegeben seien die Kreise K_1, K_2, K_3 mit den Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 (Fig. 50).

a) Man denke sich über diesen Kreisen die rechtwinkligen Kegelflächen P_1, P_2, P_3 errichtet und zwar alle oberhalb der Zeichenfläche. Man hat die gemeinschaftlichen Punkte dieser drei Kegel zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke bringe man den Kegel P_1 mit dem Kegel P_2 zum Schnitte. Die Schnittfigur liegt in einer Ebene $s_{1,2}$, welche durch die Potenzlinie $p_{1,2}$ geht und parallel ist zu jener Ebene, welche durch die Polare $a_{1,2}$ und P_1 bestimmt ist, wie wir in a) und b) der vorigen Nummer gezeigt haben.

Nun bringe man die Kegelfläche P_1 mit der Kegelfläche P_3 zum Schnitte. Die Schnittkurve wird in jener Ebene $s_{1,3}$ liegen, welche durch die Potenzlinie $p_{1,3}$ geht und parallel ist zur Ebene $\overline{a_{1,3}, P_1}$.

b) Gemeinsame Punkte der drei Kegelflächen werden also in der Schnittlinie g der beiden Ebenen $s_{1,2}$ und $s_{1,3}$ liegen und werden erhalten, indem man die Gerade g mit irgend einem der drei Kegel, z. B mit P_1 zum Schnitte bringt.

Nun ist g parallel zu der Schnittlinie h der beiden Ebenen $\overline{a_{1,2}, P_1}$ und $\overline{a_{1,3}, P_1}$; man bestimmt daher die Projektionen X', Y' der Schnittpunkte von g und P_1 nach der Nummer c (Fig. 49).

Die so gefundenen Punkte X' und Y' sind schon die Mittelpunkte von Kreisen, welche alle drei Kreise berühren, und zwar in Punkten, welche man findet, indem man X' und Y' mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise verbindet.

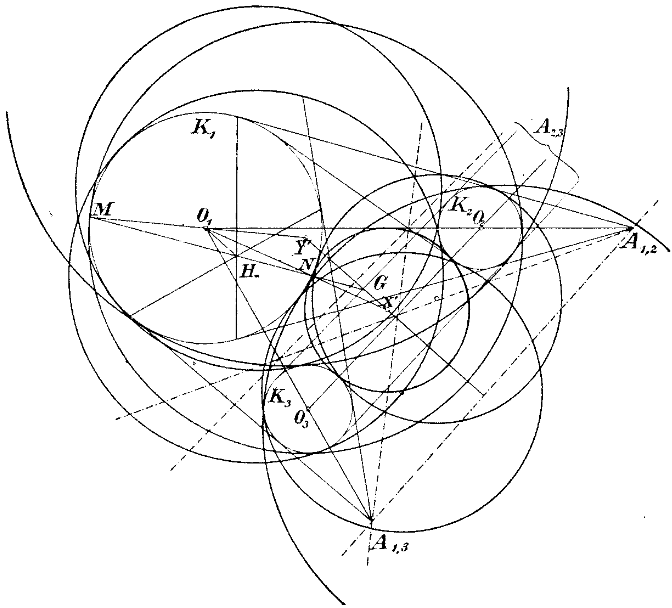

Fig. 50.

c) Auf diese Weise wurden zwei Kreise erhalten.

Weitere berührende Kreise erhalten wir, wenn wir nicht alle drei Kegel auf derselben Seite der Zeichenebene annehmen, sondern zwei auf der einen und den dritten auf der anderen Seite.

Aus jeder dieser Annahmen erhält man zwei Kreise, also im ganzen acht. Mehr Lösungen erhält man nicht, weil z. B. die Annahme, alle drei Kegel liegen oberhalb der Ebene, dieselben Lösungen hat, wie die

Annahme, alle drei Kegel liegen unterhalb der Zeichenebene.

3. Diese Gergonnesche Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes kann man auch in anderer Form darstellen:

Der Schnittpunkt H von $a_{1,2}$ und $a_{1,3}$ (Fig. 50) ist nämlich der Pol einer Ähnlichkeitsachse der drei Kreise (§ 7, 2b).

Der Schnittpunkt G der Geraden $p_{1,2}$ und $p_{1,3}$ ist das Potenzzentrum der drei Kreise (§ 6); die Linie $O_1 H$ steht senkrecht auf der Ähnlichkeitsachse; daher steht auch g' senkrecht auf der Ähnlichkeitsachse.

Zur Auffindung der Mittelpunkte X' und Y' gehe man also so vor:

Man suche zuerst das Potenzzentrum G der drei Kreise (Fig. 50), dann den Pol H einer Ähnlichkeitsachse in bezug auf den Kreis K_1. Verbindet man H mit G, so schneidet diese Linie den Kreis K_1 in zwei Punkten M und N; die Projektionen der Punkte M und N aus O_1 auf die Senkrechte g' aus G auf die Ähnlichkeitsachse liefern die gesuchten Punkte X' und Y'.

Aus jeder der vier Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise erhält man zwei Lösungen, also im ganzen acht Lösungen.

In Fig. 50 wurden alle acht berührende Kreise gezeichnet; um die Figur nicht zu überladen, wurde die Konstruktion nur für die gleichartig berührenden Kreise durchgeführt.

Übungsaufgaben.

88. Welchen Ort erfüllen die räumlichen Bilder P aller Kreise der Ebene, welche zwei gerade Linien berühren?

89. Die Gesamtheit aller Kreise, welche dieselbe Potenzlinie haben, nennt man ein Kreisbüschel.

Schneiden sich zwei Kreise des Büschels in reellen Punkten, hat also das Kreisbüschel reelle Grundpunkte, so gibt es unter den Kreisen des Büschels einen kleinsten, nämlich den, der die gemeinschaftliche Sehne zum Durchmesser hat; haben aber die Kreise des Büschels keine reellen Grundpunkte, so gehören zu diesen Kreisen auch zwei Punkte K_1 und K_2.

Ist nämlich P der Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Zentralen der Kreise, p^2 die Potenz des Punktes P in bezug auf alle Kreise des Büschels, d der Abstand des Mittelpunktes eines der Kreise des Büschels von P, r der Radius dieses Kreises, so gilt immer die Gleichung:

$$r^2 = d^2 - p^2 .$$

Es wird also:

$$r = 0 ,$$

wenn

$$d = p .$$

Welche Kurven erfüllen nun die räumlichen Bilder eines Kreisbüschels mit reellen Grundpunkten, welche die Bilder eines Kreisbüschels mit imaginären Grundpunkten?

90. Zu jedem Kreisbüschel gehört ein orthogonales Kreisbüschel. Ist nämlich p die gemeinsame Potenzlinie des ersten Büschels, so ist jeder Punkt von p der Mittelpunkt eines Kreises, welcher alle Kreise des ersten Büschels senkrecht schneidet.

Zeichnet man alle diese orthogonalen Kreise, so bilden sie wieder ein Kreisbüschel, welches imaginäre Grundpunkte hat, wenn das erste Büschel reelle, und reelle Grundpunkte, wenn das erste Büschel imaginäre hat.

Gegeben ist nun ein Kreisbüschel und das dazu orthogonale Kreisbüschel. Welches sind die räumlichen Bilder der Kreise beider Büschel?

91. Gegeben ein Punkt A der Zeichenebene und ein Kreis K; welchen Ort erfüllen die räumlichen Bilder aller Kreise der Ebene, welche durch den Punkt A gehen und K berühren?

92. Gegeben eine Gerade g; welchen Ort erfüllen die räumlichen Bilder aller Kreise der Ebene, welche die Gerade g berühren?

93. Gegeben eine Gerade und ein Punkt; welchen Ort erfüllen die Spitzen aller rechtwinkligen Kegelflächen, welche zu jenen Kreisen gehören, welche die Gerade berühren und durch den Punkt gehen?

94. Gegeben ein Kreis; welchen Ort erfüllen die räumlichen Bilder aller Kreise der Ebene, welche diesen Kreis berühren?

95. Gegeben zwei Kreise; welchen Ort erfüllen die Spitzen aller rechtwinkligen Kegelflächen, welche zu den Kreisen gehören, die beide gegebene Kreise berühren?

96. Gegeben ein Kreis und eine Gerade; welchen Ort erfüllen die Spitzen aller rechtwinkligen Kegelflächen, welche zu den Kreisen gehören, die den gegebenen Kreis und die gegebene Gerade berühren?

97. Gegeben zwei Kreise K_1 und K_2; zieht man Linien, wie sie aus Fig. 51 hervorgehen, so ist P ein Punkt der Potenzlinie der beiden Kreise. (Der Beweis ergibt sich aus Fig. 48 durch Umlegung der Symmetrieebene der beiden Kegelflächen.)

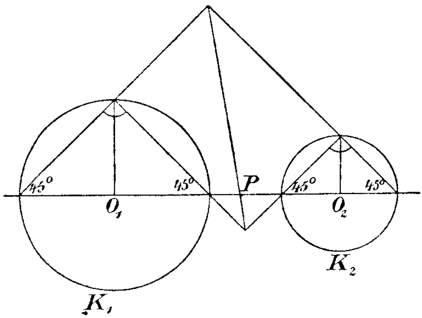

Fig. 51.

98. Gegeben zwei Kreise und ein Punkt P. Man konstruiere die vier berührenden Kreise nach der erörterten Gergonneschen Konstruktion.

Die Potenzlinie eines Punktes und Kreises halbiert die Tangenten, welche man von dem Punkte an den Kreis legen kann. Ist ein Punkt und ein Kreis gegeben, so fallen äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt derselben mit dem gegebenen Punkte zusammen. Sind zwei Kreise und ein Punkt gegeben, so gibt es also nur zwei Ähnlichkeitsachsen.

99. Gegeben sind zwei Kreise und eine Gerade; man konstruiere sämtliche Kreise, welche die beiden Kreise und die Gerade berühren.

Artet von zwei Kreisen der eine Kreis in eine Gerade aus, so fällt die Potenzlinie der beiden Kreise mit der Geraden zusammen, der innere und der äußere Ähnlichkeitspunkt fallen auf den festen Kreis, und zwar ist der innere Ähnlichkeitspunkt jener Punkt des Kreises, welcher der Geraden am nächsten ist, und der äußere der, welcher von der Geraden am entferntesten ist.

Die ganze Konstruktion gestaltet sich wie früher.

100. Gegeben ein Kreis, eine Gerade und ein Punkt; man konstruiere sämtliche Kreise, welche den gegebenen Kreis und die Gerade berühren und durch den gegebenen Punkt gehen.

Artet von zwei Kreisen der eine in eine Gerade aus, während sich der zweite auf einen Punkt zusammenzieht, so fällt die Potenzlinie mit der Geraden zusammen, und die beiden Ähnlichkeitspunkte vereinigen sich in dem Punkte.

Die Gergonnesche Konstruktion kann wieder angewendet werden.

101. Gegeben ein Kreis und zwei Punkte; es sind jene Kreise zu konstruieren, welche durch die beiden Punkte gehen und den gegebenen Kreis berühren.

Ziehen sich zwei Kreise in Punkte zusammen, so geht ihre Potenzlinie in die Symmetrale der beiden Punkte über, der innere Ähnlichkeitspunkt fällt mit dem Mittelpunkte der Zentralen zusammen, während der äußere Ähnlichkeitspunkt im Unendlichen liegt.

---

§ 8. Näherungsweise Lösung von Konstruktionsaufgaben.

1. Im Vorhergehenden haben wir die wichtigsten Methoden kennen gelernt, welche bei der Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben von Vorteil sind, und sie an einer großen Reihe von Aufgaben angewendet.

Weitere Aufgaben findet man in dem oft zitierten Buche von Petersen „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben", ins Deutsche übersetzt von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1879, und in zahlreichen anderen Büchern.

Liegt eine geometrische Konstruktionsaufgabe zur Lösung vor, so wird man aber nicht selten trotz der angegebenen Methoden längere Zeit nachdenken und die Figur eifrig studieren müssen, bis man eine befriedigende Lösung findet.

2. Soll nun diese geometrische Aufgabe rasch gelöst werden, ohne daß man noch ihre strenge Lösung kennt, oder ist eine strenge Lösung derselben mit Hilfe des Zirkels und des Lineales überhaupt nicht möglich (es gibt solche Aufgaben, wie wir später sehen werden), so muß man Näherungsverfahren anwenden. Ein sehr verwendbares Näherungsverfahren wollen wir an einem Beispiele erläutern:

3. Man habe folgende Aufgabe konstruktiv zu lösen:

Gegeben ist ein Kreis K und drei Punkte $1, 2, 3$ (Fig. 52); man soll dem Kreise ein Dreieck X, X_1, X_2 so einschreiben, daß die Seiten des Dreieckes durch die gegebenen Punkte 1 resp. 2 und 3 gehen. (Vergleiche Aufgabe 85).

Man nehme zum Zwecke der Lösung dieser Aufgabe einen Punkt A auf dem Kreise K an und bestimme daraus die Punkte A_1, A_2, A_3 (Fig. 52). A ist der gesuchte Punkt X, wenn A_3 mit A zusammenfällt.

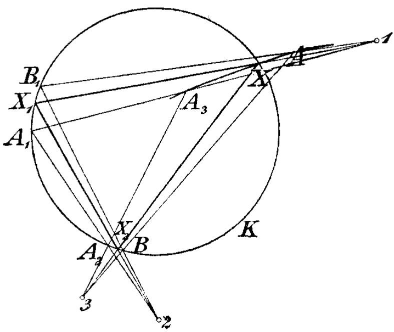

Fig. 52.

Ändert man den angenommenen Punkt A, so beschreibt der Punkt A_3 eine Kurve f, eine sogenannte Fehlerkurve, welche den gegebenen Kreis K in dem gesuchten Punkte X schneidet.

Von f zeichnet man einige wenige Punkte in der Nähe ihres veränderlichen Schnittpunktes mit K.

Dadurch wird man den Punkt X mit einer, praktisch genommen, vollständig genügenden Genauigkeit erhalten.

II. Abschnitt.

Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wenn gegebene Figuren zur Benutzung vorliegen. (Steinersche Konstruktionen.)

§ 9. Einleitung.

1. In diesem Abschnitte werden wir hauptsächlich Aufgaben behandeln, welche durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden können, wenn zwei parallele Gerade oder ein Parallelogramm, ein Quadrat oder ein Kreis schon gezeichnet vorliegen.

2. Es gibt aber auch Aufgaben, welche sich nur durch bloßes Ziehen von geraden Linien, ohne gegebene Figuren zu benutzen, lösen lassen.

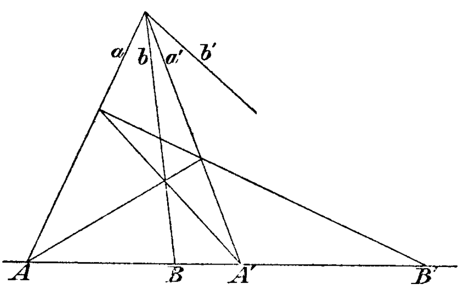

Fig. 53.

Man kann z. B. zu drei Punkten A, B, A' jenen Punkt B' durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruieren, welcher von B durch A, A' harmonisch getrennt ist. (Fig. 53.)

Ebenso kann man den vierten Strahl b' (Fig. 53) eines harmonischen Strahlenbüschels immer durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden.

Eine andere Aufgabe, die sich durch bloßes Ziehen von geraden Linien ohne Voraussetzungen lösen läßt, ist die folgende:

Gegeben sind zwei Gerade a, b und ein Punkt P (Fig. 54); es ist durch P jene gerade Linie zu ziehen, welche durch den unzugänglichen Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden a und b geht. Die Lösung erkennt man aus der Figur; sie beruht auf der zweimaligen Anwendung des Satzes der vorhergehenden Figur.

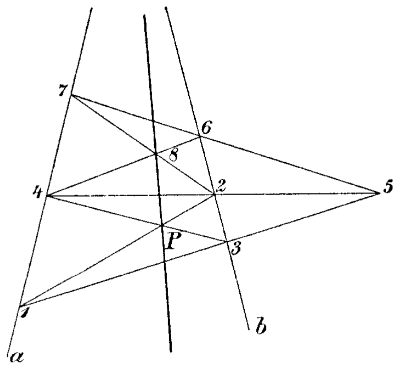

Fig. 54.

Die projektive Geometrie kennt eine große Reihe von Aufgaben, welche sich durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen lassen, ohne dabei Daten zu benutzen, welche der Figur fremd sind.

Kennt man z. B. von einem Kegelschnitte fünf Punkte, so kann man mit Hilfe des Pascalschen Sechseckes den weiteren Schnittpunkt einer Geraden, welche durch einen der gegebenen fünf Punkte geht, durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden.

Eine andere Aufgabe ist die folgende:

Sind A, B, C, D, E fünf Punkte des Kegelschnittes K_1, A, B, C, F, G fünf Punkte des Kegelschnittes K_2, kennt man also drei Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte, so kann man den vierten Schnittpunkt durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden.

102. Von einem Vierecke liegen zwei Eckpunkte auf der Zeichenfläche, die beiden anderen mögen außerhalb der Zeichenfläche fallen; es ist die Verbindungslinie der beiden unzugänglichen Schnittpunkte durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu bestimmen.

§ 10. Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wenn zwei parallele Gerade gegeben sind.*)

1. Wir müssen zuerst an einen Satz erinnern, der im folgenden oft Anwendung finden wird:

Verbindet man (Fig. 55) den Schnittpunkt E der beiden Diagonalen des Trapezes $ABCD$ mit dem Schnittpunkte F der beiden nicht parallelen Seiten, so wird die Seite AB halbiert; denn es ist:

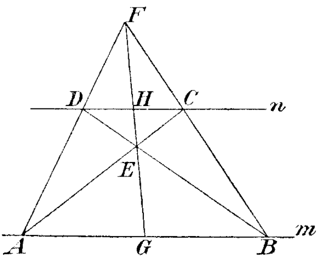

Fig. 55.

$$AG : GB = DH : HC ,$$

und:

$$AG : GB = HC : DH .$$

Durch Multiplikation dieser beiden Proportionen ergibt sich der Satz.

Mit Hilfe desselben lassen sich die folgenden Aufgaben lösen:

103. Auf einer Geraden sind drei Punkte A, G, B gegeben so, daß G in der Mitte von AB liegt; man soll durch bloßes Ziehen von geraden Linien durch einen gegebenen Punkt D die Parallele zu der gegebenen Geraden ziehen.

104. Gegeben sind zwei parallele Gerade m, n und auf m die Strecke AB; man soll diese Strecke durch bloßes Ziehen von geraden Linien halbieren.

105. Gegeben zwei parallele Gerade m, n und außerhalb der beiden Geraden ein Punkt P. Man soll durch P die Parallele zu den beiden gegebenen Geraden bestimmen durch bloßes Ziehen von geraden Linien. (Man zeichne zuerst auf m zwei gleiche Strecken.)

---

*) Die Konstruktionen der folgenden Paragraphen 10, 11, 12, 13 befinden sich in dem berühmten Werke von Jakob Steiner „Geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“ (Berlin 1833, in Oswalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Nr. 60).

106. Gegeben zwei parallele Linien m, n und auf m eine Strecke; dieselbe ist zu verdoppeln durch bloßes Ziehen von geraden Linien*).

2. Wenn zwei parallele Linien m, n und auf einer derselben die Strecke AB gegeben sind, so kann man unschwer folgende Aufgaben lösen:

107. Man soll die Strecke AB (Fig. 56) vervielfachen. (Man ziehe p parallel m, Aufgabe 105.)

108. Man soll AB in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zerlegen, z. B. in drei. (Man verdreifache zuerst die Strecke AB und bestimme dann den Punkt J (Fig. 56).)

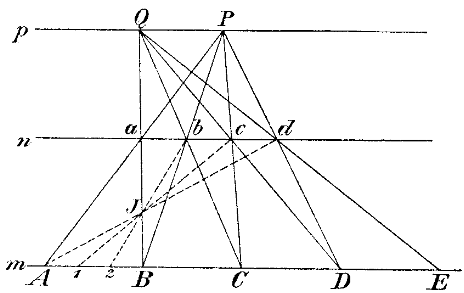

Fig. 56.

109. Man soll auf m eine Strecke zeichnen, welche zu AB in einem rationalen Verhältnisse $r:s$ steht, wobei r und s ganze relativ prime Zahlen sind. (Man teile AB in r gleiche Teile und trage einen dieser Teile von B aus noch $s$mal auf.)

110. Man teile die Strecke AB in zwei Teile, welche sich wie $r:s$ verhalten.

Anmerkung. Brianchon hat in dem Werke „Application de la Théorie des Transversales", Paris 1818, S. 37, ein sehr elegantes Verfahren angegeben, um durch bloßes Ziehen von geraden Linien den dritten,

---

*) In diesem ganzen Abschnitte ist die einzige erlaubte Zeichenoperation das Ziehen von geraden Linien. Eine Aufgabe wird also erst dann als gelöst betrachtet, wenn sie durch Ziehen von geraden Linien gelöst wurde.

vierten, fünften ... Teil einer Strecke AB zu finden, vorausgesetzt, daß eine zu AB parallele Gerade ab gegeben ist:

Man nehme P (Fig. 57) beliebig an und ziehe die Linien Ab und Ba, dann ist AD die Hälfte der Strecke AB. Zieht man weiter die Linien Da und Pe, so ist AE der dritte Teil der Strecke AB; denn die vier Punkte A, E, D, B sind vier harmonische Punkte, wie aus ihrer Lage zu dem vollständigen Vierecke $aedP$ folgt. Daher gilt:

$$AE : ED = AB : DB;$$

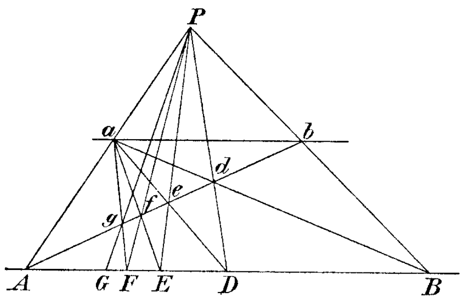

Fig. 57.

da aber $AB = 2DB$ ist, so folgt auch:

$$AE = 2\,ED,$$

also:

$$AE = \tfrac{1}{3} AB.$$

Zieht man ferner die Linien Ea und Pf, so erhält man den Punkt F, und es ist

$$AF = \tfrac{1}{4} AB,$$

wie aus den vier harmonischen Punkten A, F, E, D folgt.

Zieht man die Linien Fa und Pg, so erhält man G, und es ist

$$AG = \tfrac{1}{5} AB,$$

was sich aus den vier harmonischen Punkten A, G, F, E ergibt.

Diese Konstruktion kann man ins Unbegrenzte fortsetzen.

111. Man denke sich die ganze Fig. 57 auf eine zweite Ebene so projiziert, daß P ins Unendliche fällt und der Winkel bei A ein rechter wird. Welche Figur entsteht daraus?

3. In einer Geraden g (Fig. 58) seien zwei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ gegeben, welche ein bekanntes rationales Verhältnis $a:b$ (z. B. $5:3$) zueinander haben sollen.

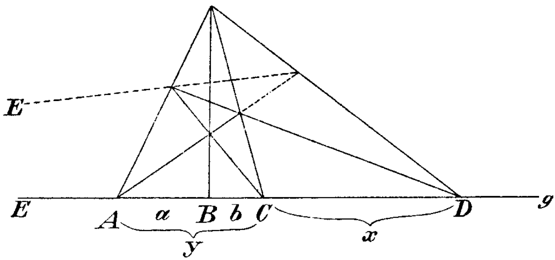

Fig. 58.

Es soll durch Ziehen von geraden Linien allein durch den beliebigen Punkt P die Parallele zu g gezeichnet werden. Diese Aufgabe kommt darauf hinaus, auf der Geraden g zwei Strecken zu erhalten, welche gleich lang sind.

Wir nehmen an, a sei größer als b und konstruieren den vierten harmonischen Punkt D (Fig. 58); dann ist:

$$AB:BC = AD:CD$$

oder

$$a:b = (a+b+x):x$$

und daraus

$$x = \frac{b(a+b)}{a-b};$$

daher verhalten sich die Strecken:

$$CD:AC = \frac{b(a+b)}{a-b}:(a+b)$$
$$= b:(a-b)\,.$$

Wir haben damit zwei Strecken erhalten, welche sich wie $b:(a-b)$ verhalten, deren Verhältniszahlen also kleiner geworden sind.

(In unserem speziellen Falle verhalten sich diese beiden Strecken wie $3:2$.)

Nun gehen wir mit den beiden Strecken AC, CD ganz in der eben erklärten Weise vor, d. h. wir suchen zu C den Punkt E, welcher von A, D harmonisch getrennt ist, und erhalten dadurch zwei Strecken, deren Verhältniszahlen wieder kleiner geworden sind. Durch wiederholte Anwendung dieser Konstruktion kommen wir schließlich zu zwei Strecken, die einander gleich sind.

In unserem speziellen Beispiele verhalten sich:

$$AB:BC=5:3\,,$$

daher (Fig. 58)

$$AC:CD=3:2\,.$$

Konstruiert man zu C den harmonischen Punkt E in bezug auf AD, so verhalten sich:

$$AD:DE=2:1\,.$$

Konstruiert man endlich zu D den harmonischen Punkt F in bezug auf AE, so erhält man schon zwei gleiche Strecken AE und EF, denn es verhält sich:

$$AE:EF=1:1\,,$$

also

$$AE=EF\,.$$

4. Man erkennt aus dieser Aufgabe, daß die Angabe von zwei parallelen Geraden der Angabe von zwei Strecken mit gegebenem rationalen Verhältnisse haben, äquivalent ist, d. h. hat man parallele Linien gezeichnet, so kann man leicht Strecken von gewünschtem rationalen Verhältnis zeichnen, hat man Strecken von bekanntem rationalen Verhältnis gegeben, so kann man sofort parallele Linien konstruieren.

§ 11. Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wenn ein Parallelogramm gegeben ist.

1. Man kann dann folgende Aufgaben leicht lösen (wie immer, nur durch bloßes Ziehen von geraden Linien).

112. Durch den Punkt E (Fig. 59) ist eine Parallele zu den Seiten des gegebenen Parallelogrammes $ABCD$ zu konstruieren*).

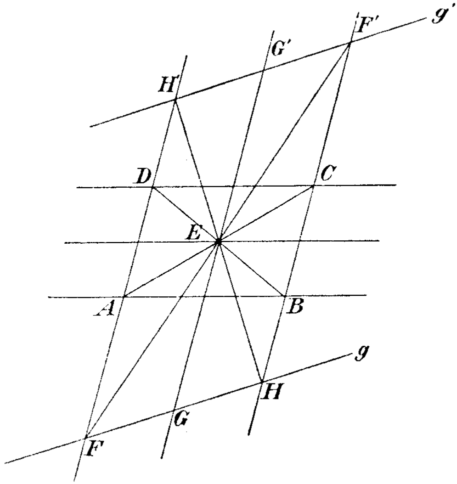

Fig. 59.

113. Zu der beliebig gegebenen Geraden g ist eine Parallele durch einen beliebig gegebenen Punkt zu ziehen.

Auf g entstehen (Fig. 59) zwei gleiche Strecken FG und GH. Eine zweite Lösung ergibt sich aus der Figur, welche zeigt, daß zu der Geraden g eine bestimmte Parallele g' leicht konstruiert werden kann.

114. Gegeben sei eine Strecke AB in beliebiger Lage zum Parallelogramme; man teile die gegebene Strecke in einem bestimmten Verhältnisse.

*) Im folgenden werden wir nicht immer bereits behandelte Aufgaben, auf welchen die Auflösung der gestellten Aufgabe beruht, angeben.

115. Gegeben sind drei parallele Gerade a, b, c, welche auf einer vierten Geraden d Strecken von dem bekannten Verhältnisse $p : q$ abschneiden; welcher Figur ist diese Angabe äquivalent?

116. Zwei Strecken auf beliebigen Geraden seien in bekannte rationale Verhältnisse geteilt; man zeichne ein Parallelogramm *).

§ 12. Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wenn ein Quadrat gegeben ist.

Wenn ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 60) zur Benutzung vorliegt, so kann man mit demselben alle Aufgaben der vorhergehenden Paragraphen 10, 11 lösen, außerdem aber noch folgende Aufgaben:

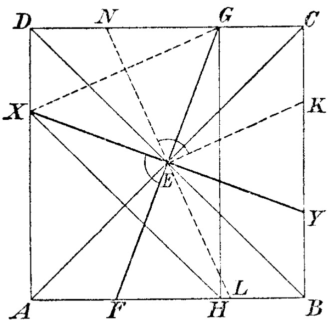

Fig. 60.

117. Zur Geraden FG, welche durch den Mittelpunkt des Quadrates geht, sonst aber beliebig ist, soll eine Normale errichtet werden.

Man ziehe GH (Fig. 60) parallel zu CB, ferner HX parallel zu BD; dann ist $XY \perp FG$.

118. Gegeben sei eine beliebige Gerade g und ein Punkt P; durch P ist das Perpendikel auf g zu fällen. (Man konstruiere die Parallele g' zu g durch E usw.)

119. Gegeben ist ein rechter Winkel XEG mit dem Mittelpunkte des Quadrates als Scheitel (Fig. 60); dieser rechte Winkel ist zu halbieren. (Man ziehe EK parallel XG und SN normal EK, so ist schon die Halbierungslinie gefunden.)

*) Bei diesen Aufgaben gibt es oft, außer den unmittelbar aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Lösungen, noch Lösungen, die sich einfacher gestalten; man trachte immer, die einfachste Lösung zu finden.

120. Irgend ein gegebener rechter Winkel ist zu halbieren.

121. Von drei Strahlen a, b, c mögen b und c aufeinander senkrecht stehen; es ist eine vierte Gerade d so zu konstruieren, daß Winkel bd gleich dem Winkel ab ist. (Da d von a durch b und c harmonisch getrennt ist, kann d durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruiert werden.)

122. Gegeben ist der Winkel ab; derselbe ist zu vervielfachen mit Hilfe des Quadrates und durch bloßes Ziehen von geraden Linien. (Man beachte die vorhergehende Aufgabe.)

Mit Hilfe des Quadrates ist man also auch imstande, Winkel zu vervielfachen.

---

§ 13. Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wenn ein fester Kreis samt Mittelpunkt gezeichnet vorliegt.

1. Es sei ein Kreis K samt Mittelpunkt O gegeben.

Man kann dann durch bloßes Ziehen von geraden Linien ein Quadrat (Fig. 61) zeichnen, indem man $A'B'$ parallel zum Durchmesser AB zieht ($AO = OB$) und dann verfährt, wie aus der Figur ersichtlich.

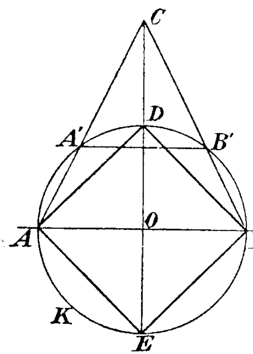

Fig. 61.

Mit Benutzung des Kreises K kann man also alle Aufgaben lösen, die in den früher behandelten Paragraphen 9, 10, 11, 12 durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst wurden, also insbesondere Parallele ziehen, Senkrechte fällen, Strecken teilen und vervielfachen und Winkel vervielfachen.

Man kann aber auch Aufgaben lösen, die man mit dem Quadrat allein nicht lösen kann, z. B. beliebige Winkel halbieren.

Wir werden auch gleich sehen, daß man bei Benutzung des festen Kreises (samt Mittelpunkt) alle Aufgaben lösen kann, die man gewöhnlich mit Zirkel und Lineal löst; also alle Aufgaben der elementaren Geometrie, alle sogenannte geometrische Aufgaben zweiten Grades.

2. Eine dieser Aufgaben wollen wir hier besonders besprechen:

123. Gegeben sei außer dem Hilfskreise K die Strecke AB (Fig. 62), die Gerade g und auf g der Punkt C; ein Punkt X auf g ist so zu bestimmen, daß CX gleich AB ist*).

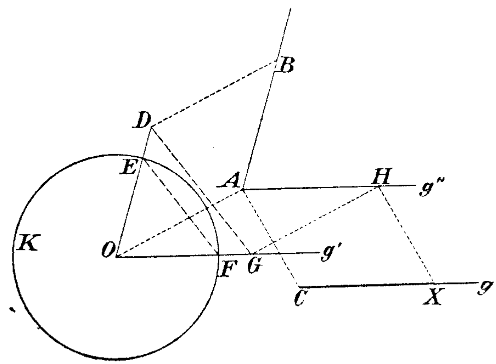

Fig. 62.

Man zeichne OD (Fig. 62) parallel und gleich lang AB, g' (parallel g'') parallel g, DG parallel EF, GH parallel OA und HX parallel AC.

3. Es soll nun bewiesen werden, daß bei Benutzung des Hilfskreises jede quadratische Aufgabe durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden kann.

Um dies zu zeigen, muß zunächst eine Bemerkung eingeschaltet werden:

So kompliziert eine geometrische Konstruktion, die bei uneingeschränktem Gebrauch des Zirkels und

*) Durch bloßes Ziehen von geraden Linien, wie in allen Aufgaben dieses Abschnittes.

Lineales ausgeführt wurde, auch immer sein möge, so setzt sie sich doch aus einigen Zeichenoperationen der einfachsten Art zusammen.

Nimmt man nämlich das Lineal zur Hand, so kann man nur eine der folgenden Operationen unmittelbar ausführen:

1. Eine gerade Linie ziehen,
2. den Schnittpunkt einer zu suchenden Geraden mit einer schon gezeichneten bestimmen,
3. den Schnittpunkt einer zu suchenden Geraden mit einem schon gezeichneten Kreisbogen finden.

Nimmt man den Zirkel zur Hand, so kann man direkt nur eine der folgenden Operationen ausführen:

4. Einen Kreisbogen schlagen,
5. einen zu suchenden Kreis mit einer schon gezeichneten Geraden zum Schnitte bringen,
6. einen zu suchenden Kreis mit einem schon gegebenen Kreis zum Schnitte bringen.

Sind nun Zirkel und Lineal zur unbeschränkten Benutzung gegeben, so bietet die Ausführung dieser Operationen keine Schwierigkeiten, und die Schwierigkeit der Auflösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe liegt nur darin, diese Operationen passend zu kombinieren.

Sind dagegen die Zeichenhilfsmittel beschränkt, so muß zuerst gezeigt werden, daß sich mit diesen beschränkten Hilfsmitteln obige Grundoperationen durchführen lassen; dann ist aber auch streng bewiesen, daß alle quadratischen Konstruktionen mit diesen beschränkten Hilfsmitteln gelöst werden können.

4. In unserem Falle dürfen nur gerade Linien gezeichnet werden.

Die Ausführung der obigen Operationen 1, 2 bietet daher keine Schwierigkeiten. Die Aufgabe 4 können wir durch bloßes Ziehen von geraden Linien überhaupt nicht lösen; wir können aber dadurch beliebig viele Punkte einer Kreislinie finden, wie wir gleich sehen werden. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß mit unseren beschränkten Hilfsmitteln sich folgende zwei Aufgaben lösen lassen:

A) Gegeben ist ein Kreis durch Mittelpunkt und Radius, außerdem eine Gerade; es sind die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise zu konstruieren.

B) Gegeben sind zwei Kreise durch ihre Mittelpunkte und Radien; es sind die Schnittpunkte dieser Kreise zu bestimmen.

5. Die Aufgabe B läßt sich nun auf die Aufgabe A reduzieren. Man ist nämlich imstande, durch bloßes Ziehen von geraden Linien die Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise zu bestimmen*).

Wir wollen diese Konstruktion der Potenzlinie auf zwei verschiedene Arten zeigen:

1. Art: O_1, O_2 seien die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise (Fig. 63), r_1, r_2 ihre Radien, gegeben durch beliebig gelegene Strecken.

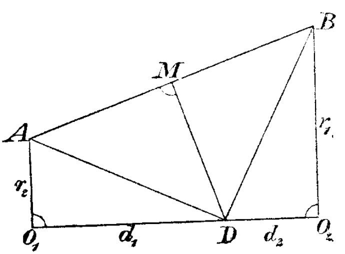

Fig. 63.

Man ziehe O_1A und O_2B (Fig. 63) senkrecht O_1O_2 (Aufgabe 118), mache O_1A gleich r_2 und O_2B gleich r_1 (Aufgabe 123); halbiere nun AB in M und ziehe durch M die Normale MD; diese schneidet die Zentrale der beiden Kreise in einem Punkte D, welcher schon ein Punkt der gesuchten Potenzlinie ist.

Beweis: Aus der Fig. 63 folgt:

$$d_1^2 + r_2^2 = d_2^2 + r_1^2\,,$$

also

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2\,,$$

womit bewiesen ist, daß P ein Punkt der Potenzlinie ist (S. 17).

*) Steiner, a. a. O., schlägt diesen Weg nicht ein, sondern führt durch Ähnlichkeitstransformation die Aufgabe B auf folgende zurück: „Die Schnittpunkte eines durch Mittelpunkt und Radius gegebenen Kreises mit dem gegebenen Hilfskreise sind zu bestimmen."

2. Art: Diese ergibt sich aus Fig. 9.

(124. Gegeben sind außer dem Hilfskreise zwei Kreise durch ihre Mittelpunkte und Radien; man konstruiere die gemeinschaftliche Potenzlinie auf die zweite Art.)

6. Wir müssen jetzt zeigen, wie man die Aufgabe A mit unseren beschränkten Hilfsmitteln lösen kann:

Gegeben seien, außer dem Grundkreise K mit dem Mittelpunkte O (Fig. 64), der Punkt M, die Strecke r und die Gerade g; es sind die Schnittpunkte X, Y von g mit jenem Kreise K_1 zu bestimmen, welcher um M mit dem Radius r geschlagen werden kann.

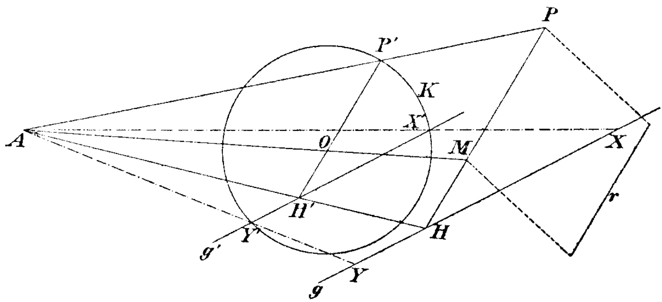

Fig. 64.

Zu diesem Zwecke zieht man MP parallel und gleich r (Fig. 64), ferner OP' parallel MP; dann ist A der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise K_1 und K.

Zeichnet man in diesen ähnlichen Systemen zu g die homologe Gerade g', so erhält man schon X' und Y' und daraus X und Y.

Bemerkung. Sollte der Punkt A außerhalb der Zeichenfläche fallen, so kann man zu MP den parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Radius des Kreises K ziehen und den inneren Ähnlichkeitspunkt J der beiden Kreise K_1 und K benutzen.

7. Die Hauptaufgabe A läßt sich also mittels unserer beschränkten Hilfsmittel lösen; damit ist der Steinersche Satz bewiesen, daß man alle geometrischen Aufgaben, die gewöhnlich mit Hilfe des

Zirkels und Lineales gelöst werden, durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen kann, wenn in der Ebene ein fester Kreis samt Mittelpunkt gezeichnet vorliegt*).

Ist nämlich eine geometrische Konstruktionsaufgabe mit unseren beschränkten Hilfsmitteln zu lösen, so denke man sich die Aufgabe auf gewöhnliche Weise gelöst und folge der so erhaltenen Lösung Schritt für Schritt, indem man aber jede vorzunehmende Zeichenoperation mit den beschränkten Hilfsmitteln ausführt; dies ist immer möglich, wie bewiesen wurde.

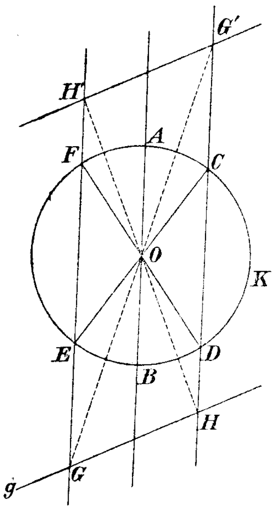

Fig. 65.

8. Dieses Verfahren, geometrische Aufgaben mit unseren Hilfsmitteln zu lösen, wäre aber zumeist sehr umständlich. Es ist daher vorteilhaft, für die am häufigsten vorkommenden Konstruktionen einfache Lösungen mittels des Hilfskreises direkt zu suchen.

Wir wollen (nach Steiner) diese Grundoperationen durchnehmen, ihre Lösungen angeben oder wenigstens andeuten.

125. Zu einer geraden Linie g ist eine Parallele zu ziehen.

Die Aufgabe ist für folgende Fälle zu lösen:

1. g ist ein Durchmesser AB des Kreises K,
2. g schneidet den Kreis in zwei Punkten E, D,
3. g liegt außerhalb des Kreises. (Die Lösung geschieht nach der Fig. 65.)

*) Steiner, a. a. O. Die Steinersche Arbeit führt bekanntlich den Titel: „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, . . .“. Vom Mittelpunkte des Kreises ist dabei nicht die Rede; derselbe ist aber von der größten Bedeutung, denn ohne den Mittelpunkt kann man nicht eine einzige der Aufgaben der Paragraphen 11, 12, 13 durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen.

126. Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P; durch P ist die Normale auf g zu konstruieren.

(Ist g ein Durchmesser AB des Kreises K (Fig. 66) und $A'B'$ parallel zu AB, so steht CO senkrecht auf g; schneidet g den Kreis K (Fig. 66) in zwei Punkten DE, so steht FE auf DE normal.)

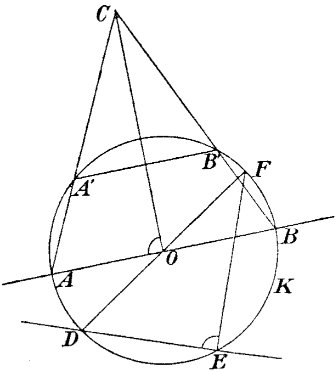

Fig. 66.

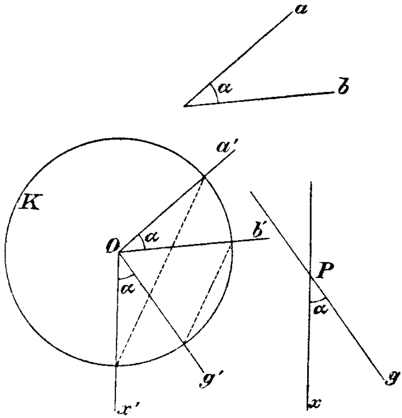

Fig. 67.

127. Gegeben sind ein Winkel α mit den Schenkeln a, b, eine Gerade g und auf ihr ein Punkt P; durch P ist eine Gerade x so zu ziehen, daß sie mit g den Winkel α einschließt.

(Man ziehe durch O (Fig. 67) die Geraden a', b', g' parallel zu a, resp. b, g, ferner AD parallel BC und x parallel x'.)

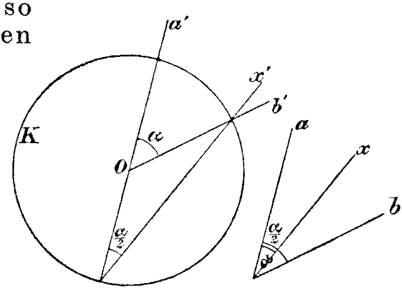

Fig. 68.

128. Gegeben ist (außer dem Hilfskreise, der in diesem Paragraphen immer gegeben sein muß) der Winkel α mit den Schenkeln a und b; es ist die Halbierungslinie x des Winkels zu konstruieren.

(Man ziehe durch O (Fig. 68) die Geraden a', b' parallel zu a resp. b.)

129. Der Winkel α soll verdoppelt werden. (Ziehe a' parallel a und b' parallel b (Fig. 69).)

130. Gegeben ist ein Dreieck, von dem ein Eckpunkt auf dem Hilfskreise liegt; man konstruiere die drei Höhen des Dreieckes, den Mittelpunkt des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises.

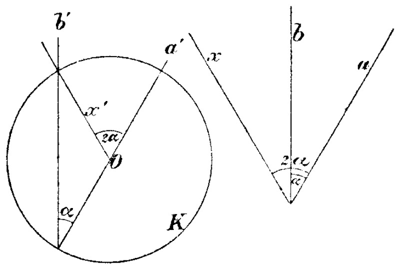

Fig. 69.

131. Gegeben sind ein Kreis K und zwei Punkte A, B; man konstruiere die Mittelpunkte jener Kreise, welche durch A und B gehen und K berühren, durch bloßes Ziehen von geraden Linien, indem man K als Grundkreis annimmt.

132. Gegeben sind drei Kreise K_1, K_2, K_3 und nur von K_1 der Mittelpunkt O_1; man konstruiere nach der Gergonneschen Methode durch bloßes Ziehen von geraden Linien den Mittelpunkt eines der Kreise, welcher alle drei Kreise berührt.

133. Gegeben sind zwei Kreise K und K_1, außerdem der Mittelpunkt von K; es ist der Mittelpunkt O_1 von K_1 durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu bestimmen.

134. Ist außer einer gezeichneten Kreislinie nichts weiteres gegeben, so ist man nicht imstande, den Mittelpunkt dieses Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu finden. Ist aber außer einer Kreislinie noch ein Parallelogramm gegeben, so kann man den Mittelpunkt des Kreises finden. (Wie?)

135. Wenn ein Quadrat gegeben ist, so braucht man vom Steinerschen Hilfskreise den Mittelpunkt nicht zu kennen. Was muß man zu dem Quadrate noch hinzufügen, damit es mit der hinzugefügten Figur zusammen dem Steinerschen Hilfskreise samt Mittelpunkt äquivalent ist?

9. An Stelle des Steinerschen Kreises könnte auch ein anderer Kegelschnitt gegeben sein, z. B. eine Ellipse. Von dieser Ellipse müßte man

noch den Mittelpunkt und einen Brennpunkt kennen; den Mittelpunkt zum Ziehen von parallelen Geraden, den Brennpunkt zum Fällen von Normalen.

136. Es sind einige der zuletzt behandelten Aufgaben durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu lösen, wenn eine Ellipse samt Mittelpunkt O und einem ihrer Brennpunkte gezeichnet vorliegt.

Zu jedem Durchmesser der Ellipse kann man leicht parallele Linien ziehen und daher den konjugierten Durchmesser bestimmen. Soll man zu der Geraden g die Parallele x durch O durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruieren, so zeichne man den Pol G von g; seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte ist die Polare u des unendlich fernen Punktes U der Geraden g, und die gesuchte Gerade x ist konjugiert zum Durchmesser u.

An Stelle des Mittelpunktes der Ellipse kann auch ein Parallelogramm gegeben sein. Ist ein Quadrat gegeben, so braucht man nur die Ellipse zu kennen, ihren Mittelpunkt und Brennpunkt jedoch nicht.

III. Abschnitt.

Konstruktionen, ausgeführt durch bloßes Schlagen von Kreisbogen (Mascheronische Konstruktionen*)).

§ 14. Hilfssatz.

1. Das einzige Zeichenhilfsmittel, welches in diesem Abschnitte gebraucht werden darf, ist der Zirkel; nur das Schlagen von Kreisbogen ist erlaubt; es darf in der Konstruktion nicht eine einzige gerade Linie gezeichnet werden. Zum Beweise der Konstruktionen werden wir uns aber der geraden Linie bedienen.

2. Wir wollen zunächst einen einfachen Satz entwickeln:

Ist ABC ein Dreieck, D die Mitte der Seite AB, ferner Winkel ADC gleich α, so folgt aus dem $\triangle ADC$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cos\alpha$$

und aus dem $\triangle BCD$:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\,\overline{BD}\cdot\overline{DC}\cos\alpha\,.$$

---

*) Mascheroni, „La geometria del compasso“, Pavia, 1797, ins Deutsche aus dem Französischen übersetzt von Gruson 1820. Der Inhalt des Mascheronischen Werkes ist dargestellt in dem Buche von Hutt, Die Mascheronischen Konstruktionen“, 1880. Frischauf hat in der Schrift: „Über die geometrischen Konstruktionen von L. Mascheroni und J. Steiner“, Graz 1869, auch den wesentlichen Inhalt der Konstruktionen gegeben.

Addiert man die beiden Gleichungen und beachtet, daß

$$\overline{AD} = \overline{BD},$$

so erhält man:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2.$$

Diese Gleichung drückt einen Satz aus, den wir wiederholt brauchen werden.

---

§ 15. Teilung des Kreises in eine Anzahl gleicher Teile.

1. Man kann einen Kreis mit Hilfe des Zirkels allein leicht in sechs gleiche Teile zerlegen (Fig. 71).

Um die Teilung des Kreises in eine andere Anzahl gleicher Teile zu erörtern, ist es vorteilhaft, zuvor zwei Hauptaufgaben zu lösen, nämlich:

Die Halbierung eines gegebenen Kreisbogens und die Konstruktion des eingeschriebenen Fünf- und Sechseckes.

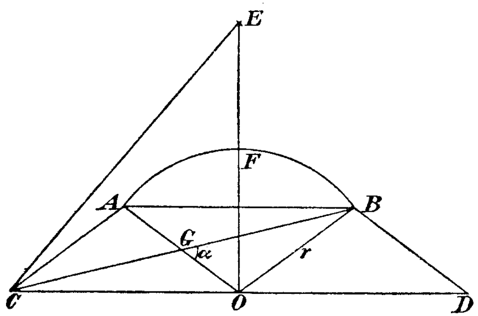

Fig. 70 a.

2. Die Halbierung des Kreisbogens AB (Fig. 70a, b):

Man konstruiere die Parallelogramme $ABOC$, $ABDO$ und ziehe die Linie CB (Fig. 70a).

Nach dem Satze in § 14 ist nun:

$$\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{AG}^2 + 2BG^2.$$

Bezeichnet man den Radius des Kreisbogens mit r und die Strecke AB mit d, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\overline{CB}^2 = 2\,d^2 + r^2 \,.$$

Aus dem Dreiecke COF folgt (wobei F den Bogen AB halbiert):

$$\overline{CF}^2 = d^2 + r^2 \,,$$

und aus dem Dreiecke COE

$$\overline{OE}^2 = d^2 + r^2 \,.$$

Es ist also $CF = OE$.

Hat man demnach den Bogen AB mit Hilfe des Zirkels allein zu halbieren, so geht man folgendermaßen vor (Fig. 70b):

Man setzt in den Endpunkten des Bogens A, B mit dem Radius r des Kreises ein, dann in O mit der Länge der Sehne d und erhält so die Punkte C und D. Durch Schlagen von Kreisbogen um C und D mit dem Radius CB erhält man den Punkt E. Der Halbierungspunkt F wird endlich erhalten, indem man den gegebenen Bogen AB mit einem der Kreise zum Schnitte bringt, welche man um C oder D mit dem Radius OE beschreiben kann.

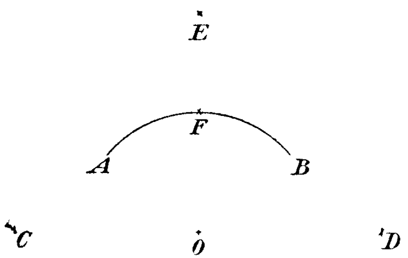

Fig. 70b.

3. Konstruktion der Fünf- und Zehneckseite.

Hat man (Fig. 71) die Seite des einem Kreise eingeschriebenen Fünf- oder Zehneckes zu konstruieren, so geht man folgendermaßen vor:

Man konstruiert zuerst die Punkte A, B, C, D, E des eingeschriebenen Sechseckes; hierauf sucht man den Punkt G als Schnitt der Kreise mit den Mittelpunkten in A resp. D und dem Radius $AC = BD$.

Setzt man nun in C resp. E mit dem Radius OG ein, schlägt zwei Kreise, welche sich in K schneiden, so ist schon OK die gesuchte Zehneck- und KH die gesuchte Fünfeckseite.

Beweis: Man ziehe die Hilfslinie CE, welche den Durchmesser AD in L schneiden möge, es ist dann

$$AC = r\sqrt{3}\,, \qquad OG = AH = r\sqrt{2} = CK\,, \qquad LC = \frac{r}{2}\sqrt{3}\,;$$

daraus folgt

$$KL = \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

und

$$KO = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = s_{10}\,.$$

OK ist daher die Länge der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes, und HK ist nach einem bekannten Satze ($s_5^2 = r^2 + s_{10}^2$) die Länge der Fünfeckseite.

137. Man zerlege einen Kreis in sechs, drei, zwei Teile; dann in fünf, zehn, vier Teile. (Nach den beiden Hauptaufgaben.)

138. Man zerlege einen Kreis in acht gleiche Teile.

Eine Lösung der Aufgabe erfolgt, indem man ein Viertel des Kreisumfanges konstruiert (137) und es halbiert.

Eine zweite Lösung ergibt sich aus folgendem:

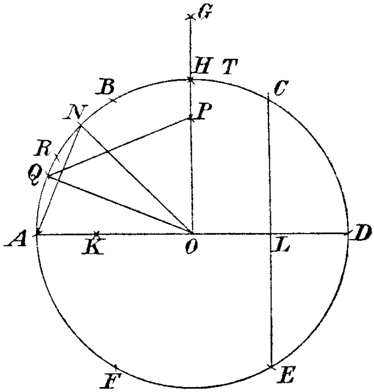

Fig. 71.

Macht man (Fig. 71) $GN = OA = r$, so ist der Bogen AH durch N halbiert; denn Dreieck ONG ist ein rechtwinklig gleichschenkliges, also Winkel AON gleich 45^0.

Konstruiert man (Fig. 71)

$$\overline{RH} = \overline{AO} \quad \text{und} \quad \overline{AP} = \overline{DP} = \overline{RG}\,,$$

so ist auch $\overline{OP}$ gleich der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes, also gleich AN.

Beweis: $\overline{OG} = r\sqrt{2}$; daher folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOP:

$$\overline{OP} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = s_8 \; .$$

139. Ein Kreis ist in sechzehn gleiche Teile zu zerlegen.

Man halbiere entweder den achten Teil des Umfanges gemäß der Hauptaufgabe 2, oder man gehe auf folgende Weise vor: Man bestimme den Punkt P (138, Fig. 70) und konstruiere den Punkt Q so, daß

$$\overline{QP} = \overline{AO} = r \; .$$

Dann ist $\overline{AQ}$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechzehneckes.

Beweis:

$$\triangle OQP \cong \triangle ANO \, ;$$

weil

$$\overline{AN} = \overline{OP}$$

und

$$\overline{AO} = \overline{NO} = \overline{QO} = \overline{QP} = r \; .$$

Nun ist:

$$\sphericalangle ANO = \sphericalangle QOP = \tfrac{3}{4} R \, ,$$

also

$$\sphericalangle AOQ = \tfrac{1}{4} R \; .$$

140. Man teile den Kreis in 12, 24, 48, 15, 20, 120, 240 gleiche Teile.

Man beachte:

$$\frac{u}{3} - \frac{u}{4} = \frac{u}{12} \, , \qquad \frac{u}{4} - \frac{u}{5} = \frac{u}{20} \, ,$$

$$\frac{u}{12} - \frac{u}{16} = \frac{u}{48} \, , \qquad 5\frac{u}{24} - \frac{u}{5} = \frac{u}{120} \, ,$$

$$\frac{u}{8} - \frac{u}{12} = \frac{u}{24} \, , \qquad 5\frac{u}{48} - \frac{u}{10} = \frac{u}{240} \; .$$

$$2\frac{u}{5} - \frac{u}{3} = \frac{u}{15} \, ,$$

§ 16. Vervielfachen und Teilen von Strecken.

141. Es sei die durch ihre Endpunkte A, B gegebene Strecke zu verdoppeln, zu vervielfachen.

Man schlage (Fig. 72) mit dem Radius AB einen Kreis um B und mache:

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE}.$$

Es ist dann

$$\overline{AE} = 2\overline{AB}.$$

Schlägt man den Kreis $E(B)$ *), so findet man ebenso:

$$\overline{AF} = 3\overline{AB}.$$

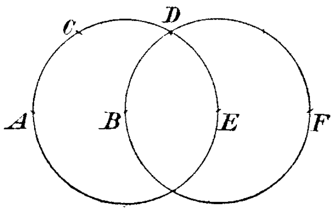

Fig. 72.

142. Eine durch ihre Endpunkte A, B gegebene Strecke s ist in n gleiche Teile zu zerlegen.

Mascheroni gibt zur Lösung dieser Hauptaufgabe zwei Methoden an, die sich übrigens aufeinander zurückführen lassen:

1. Methode. Man konstruiere (Fig. 73) $\overline{AC} = n \cdot \overline{AB}$, schlage dann die Kreise $A(B)$ und $C(A)$, wodurch man die Punkte D, D' erhält; die beiden Kreise $D(A)$ und $D'(A)$ schneiden sich in einem Punkte X, für welchen gilt:

$$\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB}.$$

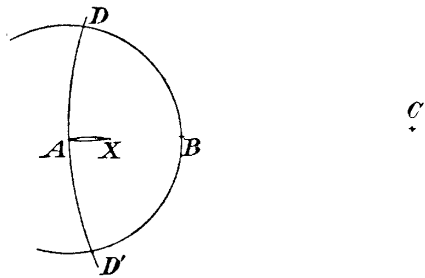

Fig. 73.

Beweis: X liegt, wie aus der Symmetrie der ganzen Figur ersichtlich, auf AC.

Die beiden gleichschenkligen Dreiecke AXD und ADC sind einander ähnlich, daher gilt:

$$\overline{AX} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AC}.$$

*) Einen Kreis, der M zum Mittelpunkt hat und durch den Punkt P geht, wollen wir mit $M(B)$ bezeichnen.

Da nun $\overline{AD}$ (gleich AB) gleich $\frac{1}{n}AC$ ist, so ist auch

$$\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB}.$$

2. Methode. Man mache wieder $\overline{AC}$ (Fig. 74) gleich $n \cdot \overline{AB}$; ferner zeichne man die Kreise $A(B)$, $A(C)$, $C(A)$ und $C(E)$ sämtlich mit dem Radius $\overline{AB}$. Zeichnet man nun um C den Kreis mit dem Radius $\overline{ED}$, so wird er von dem Kreise $D(A)$ im Punkte X geschnitten, so daß:

$$\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB}.$$

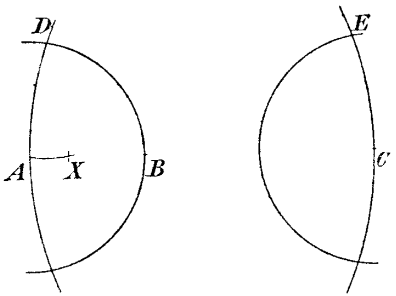

Fig. 74.

Beweis: Die Linie CX der Figur ist zur Linie DE parallel, also auch zur Linie AC; der Punkt X ist folglich der Schnittpunkt des Kreises $D(A)$ mit der geraden Linie AC, daher schon der Punkt X der früheren Methode.

Hat man AX gefunden, so kann man durch wiederholtes Auftragen von AX sämtliche Teilungspunkte der Strecke bestimmen.

143. Eine Strecke AB ist in zwei, vier, acht usw. gleiche Teile zu zerlegen.

Aus der vorigen Nummer ergibt sich, wie man eine Strecke in zwei, vier, acht usw. gleiche Teile zerlegen kann.

Mascheroni lehrt noch zwei andere sehr elegante Methoden zu diesem Zwecke:

1. Methode. Man verdopple die Strecke AB (Fig. 75), zeichne dann in bekannter Weise die Kreise $A(B)$, $C(A)$, $D(A)$, $D'(A)$ und erhalte so (142) den Mittelpunkt X der Strecke AB.

Macht man ferner

$$\overline{AF} = \overline{AF'} = \overline{BD},$$

so schneiden sich die Kreise $F(A)$ und $F'(A)$ in einem Punkte Y, welcher die Mitte der Strecke $\overline{XB}$ ist.

Konstruiert man weiter:

$$\overline{AG} = \overline{AG'} = \overline{BF},$$

so schneiden sich die Kreise $G(A)$ und $G'(A)$ in dem Mittelpunkte Z der Strecke $\overline{YB}$, usw.

Die Konstruktion kann ins Unbegrenzte fortgesetzt werden.

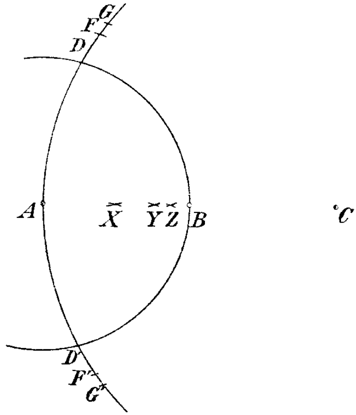

Fig. 75.

Beweis: X ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Nach dem in § 14 bewiesenen Satze ist daher (Fig. 75):

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AX}^2 + 2\overline{XD}^2.$$

Daraus folgt, wenn man $\overline{AB}$ gleich s setzt,

$$\overline{BD}^2 = \tfrac{3}{2} s^2.$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden gleichschenkligen Dreiecke AFY und ACF folgt nun:

$$\overline{AY} : \overline{AF} = \overline{AF} : \overline{AC}.$$

Da aber

$$\overline{AF}^2 = \overline{BD}^2 = \frac{3s^2}{2}$$

und

$$\overline{AC} = 2s,$$

so ergibt sich:

$$AY = \tfrac{3}{4} s,$$

d. h.

$$XY = \tfrac{1}{4} s.$$

Y ist also der Mittelpunkt der Strecke XB.

Berechnet man analog mittels desselben Hilfssatzes (§ 14)

$$\overline{BF} = \overline{AG},$$

so erhält man aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke AGZ und ACG für YZ den Wert $\frac{1}{8}s$, usw.

2. Methode. AB sei die zu teilende Strecke.

Man konstruiere $\overline{AC} = 2\overline{AB}$ (Fig. 76) mittels des Kreises $B(A)$ und zeichne dann die Kreise $A(B)$, $A(C)$, $C(D)$; auf diese Weise erhält man die Punkte E, E'.

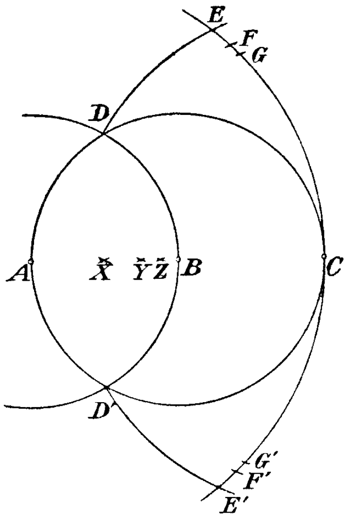

Fig. 76.

Macht man nun:

$$\overline{XE} = \overline{XE'} = \overline{CD},$$

so ist X die Mitte von $\overline{AB}$.

Ist ferner:

$$\overline{CF} = \overline{CF'} = \overline{BE}$$

und

$$\overline{FY} = \overline{F'Y} = \overline{BE},$$

so erhält man Y in der Mitte von $\overline{XB}$.

Ist weiter

$$\overline{CG} = \overline{CG'} = \overline{BF}$$

und

$$\overline{GZ} = \overline{G'Z} = \overline{BF},$$

so ist Z die Mitte der Strecke $\overline{YB}$ usw.

Beweis: Aus der Ähnlichkeit der beiden gleichschenkligen Dreiecke XEC (Fig. 76) und CAE folgt:

$$\overline{XC} : \overline{CE} = \overline{CE} : \overline{AC}.$$

Setzt man AB gleich s, so wird

$$\overline{CE} = \overline{CD} = s\sqrt{3}$$

und daraus

$$\overline{XC} = \tfrac{3}{2}s,$$

d. h. X ist die Mitte von AB.

Um die Eigenschaft des Punktes Y nachzuweisen, berechnen wir zunächst die Strecke $\overline{BE}$:

Mittels des Satzes § 14 ergibt sich

$$\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BE}^2 .$$

Beachtet man, daß

$$\overline{AE} = 2s, \quad \overline{CE} = \overline{DC} = s\sqrt{3},$$

so erhält man

$$\overline{BE}^2 = \overline{CF}^2 = \tfrac{5}{2}s^2 .$$

Nun betrachte man die beiden gleichschenkligen Dreiecke YFC und CAF; aus ihrer Ähnlichkeit folgt:

$$\overline{YC} : \overline{CF} = \overline{CF} : \overline{AC},$$

daher ist, wenn man den gefundenen Wert von $\overline{CF}$ einsetzt:

$$YC = \tfrac{5}{4}s,$$

d. h. Y ist die Mitte von XB.

Um die analoge Eigenschaft von Z nachzuweisen, berechne man zuerst $\overline{BF}$ mittels des Satzes § 14. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ZGC und CAG folgt dann, daß Z die Mitte von B ist usw.

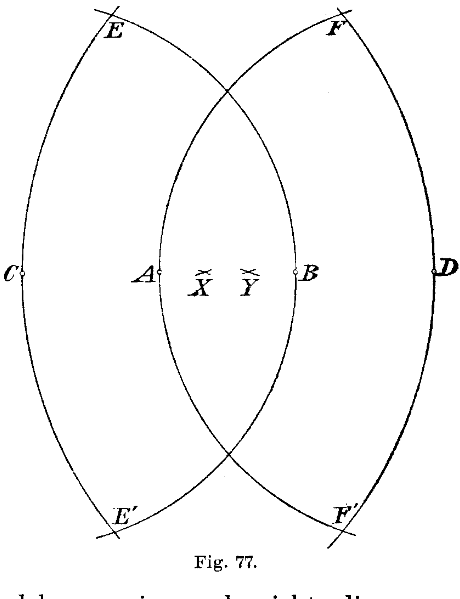

Fig. 77.

144. Eine Strecke ist in drei gleiche Teile zu zerlegen.

Auch für diesen Fall gibt Mascheroni noch eine elegante Konstruktion, welche von jener abweicht, die aus der allgemeinen Methode folgen würde:

Man konstruiere (Fig. 77) zunächst $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BD}$; dann die Kreise $C(B)$, $C(D)$, $D(C)$, $D(A)$. Man erhält dadurch die Punkte E, E' und F, F'. Macht man nun

$$\overline{XE} = \overline{XE'} = \overline{YF} = \overline{YF'} = \overline{CD},$$

so teilen X und Y die Strecken AB in drei gleiche Teile.

Beweis: Aus der Ähnlichkeit der beiden gleichschenkligen Dreiecke CXE und CDE folgt:

$$\overline{CX}:\overline{CE}=\overline{CE}:\overline{DC},$$

nun ist

$$\overline{CE}=2\overline{AB} \quad \text{und} \quad \overline{CD}=3\overline{AB},$$

daher

$$\overline{CX}=\tfrac{4}{3}\overline{AB}, \quad \text{also} \quad \overline{AX}=\tfrac{1}{3}\overline{AB}.$$

§ 17. Addition und Subtraktion von Strecken, Konstruktion von Parallelen und Normalen.

145. Eine gegebene Strecke um eine zweite gegebene Strecke zu verlängern oder zu verkürzen.

Gegeben seien (durch ihre Endpunkte) die Strecken AB und CD.

Mit CD als Radius schlage man um A den Kreis K (Fig. 78) und schneide ihn mit einem beliebigen Kreise K_1 um B; man erhält so die Punkte E und E'; halbiert man den Bogen $\widehat{EE'}$ in X und Y, so ist $\overline{BX}$ die Summe der Strecken und $\overline{BY}$ die Differenz der gegebenen Strecken.

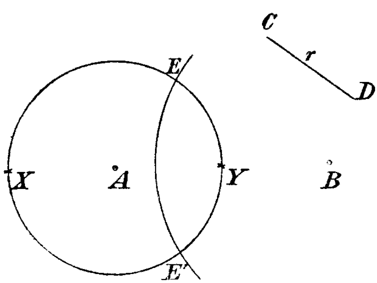

Fig. 78.

146. In dem Punkte A der durch ihre Endpunkte A, B gegebenen Strecke ist die Normale x auf die gegebene Strecke zu errichten, d. h. ein Punkt X dieser Normalen zu finden*).

*) Bei allen diesen Aufgaben, wie bei den vorhergehenden, dürfen nur Kreisbogen, nicht aber gerade Linien gezeichnel werden.

Man konstruiert zwei Kreise um A resp. B mit gleichem, sonst beliebigen Radius, L sei einer ihrer Schnittpunkte. Zeichnet man nun den Kreis $C(B)$ und verdoppelt die Strecke $\overline{BC}$, so erhält man schon einen Punkt X der gesuchten Normalen; denn X liegt auf dem Durchmesser des durch A und B gehenden Kreises $C(B)$.

Soll die gesuchte Normale die gegebene Länge s haben, so schlage man um A (Fig. 79) einen Kreis K mit dem Radius s, schneide denselben mit dem Kreise $B(A)$ in D und E. Konstruiert man nun jenen Punkt F des Kreises K, welcher mit A und E auf derselben Geraden liegt, so ist der Halbierungspunkt des Bogens FD der gesuchte Punkt X.

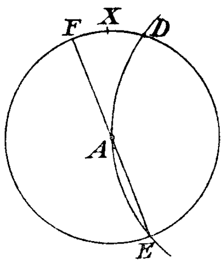

Fig. 79.

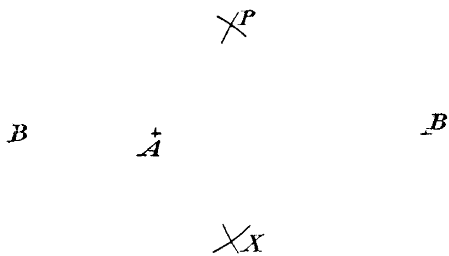

Fig. 80.

147. Von einem Punkte P ist auf eine Gerade AB die Normale zu fällen.

Man zeichne die Kreise $A(P)$ (Fig. 80) und $B(P)$. Der zweite Schnittpunkt X der beiden Kreise liegt auf der gesuchten Normalen und ist das Spiegelbild von P bezüglich AB.

148. Zu einer gegebenen Geraden ist durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu konstruieren.

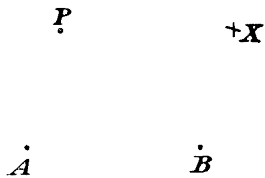

Fig. 81.

Die gegebene Gerade sei AB, der Punkt P. Man schlage aus P einen Kreisbogen mit dem Radius AB (Fig. 81) und aus B einen Kreisbogen mit dem Radius AP. Ihr Schnittpunkt X liegt auf der gesuchten Parallelen.

§ 18. Konstruktion der Proportionalen.

149. Zu drei Strecken a, b, c ist die vierte geometrische Proportionale zu konstruieren, also jene Strecke, welche mit den gegebenen Strecken die Proportion bildet:

$$a : b = c : x\,.$$

Diese Proportion kann mittels des Zirkels allein leicht gelöst werden, wie nachstehende Betrachtung zeigt:

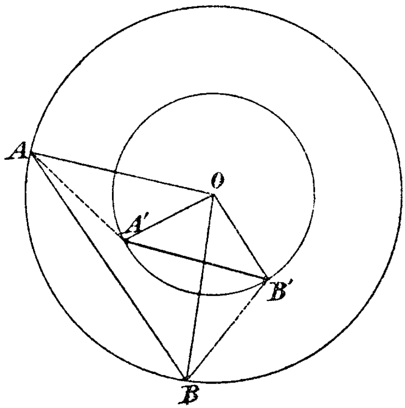

Fig. 82.

Man zeichne um O (Fig. 82) zwei konzentrische Kreise und mache:

$$\overline{AA'} = \overline{BB'}\,.$$

Es ist dann

$$\triangle AOA' \cong \triangle BOB'$$

und daher:

$$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'\,.$$

Demnach verhält sich

$$\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}\,.$$

Schlägt man also mit a und b konzentrische Kreise, macht $\overline{AB}$ gleich c und $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ (sonst aber beliebig), so ist schon $\overline{A'B'}$ jene Strecke x, welche obige Proportion befriedigt.

Sollte c zu groß sein, um als Sehne des Kreises $O(A)$ eingetragen werden zu können, so nehme man statt c die Strecke $\frac{c}{n}$, wobei n eine genügend große Zahl ist. Man erhält dann durch die Konstruktion nicht x sondern $\frac{x}{n}$.

150. Es ist zu zwei Strecken a und b die dritte Proportionale x aufzusuchen, also die Proportion zu lösen:

$$a : b = b : x .$$

Diese Aufgabe könnte einmal nach der vorigen Nummer gelöst werden. Mascheroni gibt aber noch eine Auflösung an, die wir jetzt darstellen wollen:

Man schlage um O mit a als Radius einen Kreisbogen (Fig. 83), nehme auf demselben den Punkt O_1 beliebig an und schlage hierauf um O_1 mit b als Radius den Kreis bogen ABC, wobei C so bestimmt werden soll, daß $\widehat{AC}$ ein Halbkreis wird.

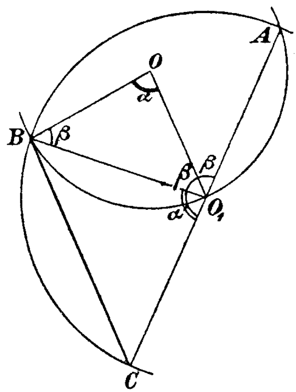

Fig. 83.

Es ergänzt sich dann jeder der Winkel α, α' der Fig. 83 mit 2β zu zwei Rechten; α und α' sind daher gleich. Daraus folgt aber:

$$\triangle CO_1B \sim \triangle BO_1O .$$

Es gilt demnach die Proportion:

$$\overline{O_1O} : \overline{BO_1} = \overline{BO_1} : \overline{BC}$$

oder

$$a : b = b : x .$$

$\overline{BC}$ ist also die dritte geometrische Proportionale zwischen a und b.

151. Konstruktion der mittleren geometrischen Proportionalen.

Es ist also die Proportion $a : x = x : b$ aufzulösen.

Mascheroni gibt zur Lösung dieser Aufgabe zwei verschiedene Methoden an:

1. Methode. Es sei (Fig. 84) $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = b$. Man suche den Mittelpunkt H der Strecke $\overline{BC}$, ferner den Punkt K so, daß $\overline{KA} = \overline{AH}$ wird.

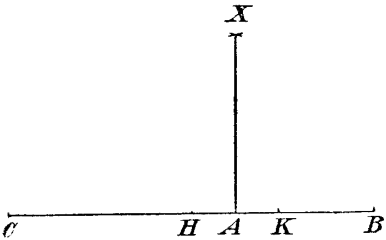

Fig. 84

Setzt man dann in H und K mit der Strecke $\overline{HB}$ ein, so schneiden sich die so erhaltenen Kreisbogen im Punkte X und die Strecke $\overline{XA}$ ist schon die gesuchte mittlere geometrische Proportionale der beiden Strecken a und b.

Den Beweis dafür ersieht man unmittelbar, da X auf dem Halbkreise liegt, welcher H als Mittelpunkt und $a + b$ als Durchmesser hat.

2. Methode. Man mache $\overline{AB} = a$ (Fig. 85) und $\overline{AC} = b$; ferner halbiere man die Strecke $\overline{AB}$ in H und konstruiere:

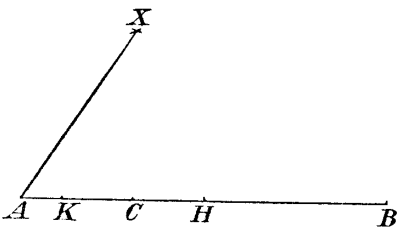

Fig. 85.

$$\overline{KC} = \overline{CH}.$$

Setzt man nun in H und K mit der Strecke $\overline{HA}$ ein und schlägt Kreisbogen, so schneiden sich dieselben in einem Punkte X.

Die Strecke $\overline{AX}$ ist das gesuchte geometrische Mittel; denn X liegt auf einem Halbkreise, welcher H als Mittelpunkt und $\overline{AB}$ als Durchmesser hat.

152. Es ist die Strecke $\overline{AB}$ nach dem goldenen Schnitt zu teilen.

Man schlage mit $\overline{AB}$ einen Kreis (Fig. 86) um B, suche die Eckpunkte C, D, E, F, G des eingeschriebenen Sechseckes und den Punkt H als Schnittpunkt der beiden Kreise $A(D)$, $E(C)$.

Konstruiert man nun den Punkt X so, daß

$$\overline{XD} = \overline{XF} = \overline{BH},$$

so teilt der Punkt X die Strecke $\overline{AB}$ nach dem goldenen Schnitte; denn $\overline{XB}$ ist (nach § 15, 2) die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

153. Ziehen von Quadratwurzeln.

Nimmt man ni Fig. 86 $\overline{AB} = 1$ an, so ist:

$$\overline{BH} = \sqrt{2},$$
$$\overline{AD} = \sqrt{3},$$
$$\overline{AE} = \sqrt{4} = 2.$$

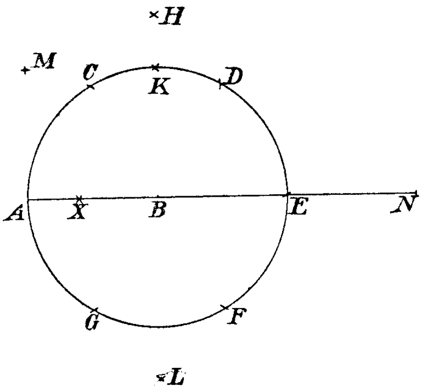

Fig. 86.

Sucht man ferner den Punkt M so, daß

$$\overline{MA} = \overline{MK} = \overline{AB},$$

so ist

$$\overline{ME} = \sqrt{5}.$$

Verlängert man die Strecke $\overline{AE}$ um $\overline{AB}$ bis N, so daß:

$$\overline{ND} = \overline{NF} = \overline{DA},$$

so ist

$$\overline{HN} = \sqrt{6},$$
$$\overline{CN} = \sqrt{7}.$$

Konstruiert man nun den Punkt L als Schnittpunkt der beiden Kreise $A(F)$ und $E(G)$, so ist

$$\overline{LH} = \sqrt{8},$$
$$\overline{AN} = \sqrt{9},$$
$$\overline{MN} = \sqrt{10}.$$

Bemerkung: Mittels der so gefundenen Wurzeln der Zahlen bis 10 kann man leicht die Wurzeln aller Zahlen bis 36 konstruieren:

Hat man z. B. $\sqrt{23}$ zu finden, so setze man

$$23 = 25 - 2,$$

also

$$(\sqrt{23})^2 = 5^2 - (\sqrt{2})^2.$$

Konstruiert man nun ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse 5 und eine Kathete $\sqrt{2}$ ist (welches man nach obigem erhalten kann), so ist damit schon $\sqrt{23}$ gefunden.

154. Wenn man die Wurzeln der Zahlen bis 36 kennt, so kann man die Wurzeln aller Zahlen bis 361 finden. (Dies ist analog dieser Bemerkung zu entwickeln.)

Hat man die Quadratwurzel aus einem Bruche zu ziehen, also z. B. $\sqrt{\frac{m}{n}}$ zu konstruieren, so setze man:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1 \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{n}} .$$

Man hat demnach die vierte geometrische Proportionale zwischen 1, $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$ zu suchen, um $\sqrt{\frac{m}{n}}$ zu erhalten.

§ 19. Schnitt von geraden Linien mit Kreisen und miteinander; Vervielfältigung und Teilung von Winkeln.

155. Es ist der Schnitt eines gezeichneten Kreises mit einer durch ihre Endpunkte gegebenen geraden Linie zu bestimmen. K sei der gegebene Kreis, AB die gegebene gerade Linie:

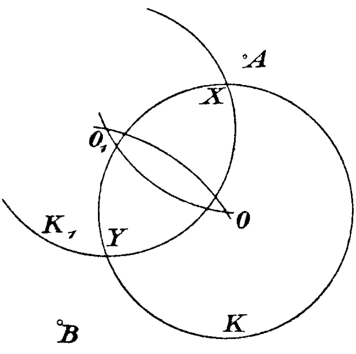

Fig. 87.

Man konstruiere (Fig. 87) zu K das Spiegelbild K_1 in bezug auf die Gerade AB; die Kreise K und K_1 schneiden sich in den gesuchten Punkten X, Y.

Geht die gegebene Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises K, so beschreibe man von dem Endpunkte A der Geraden mit einem beliebigen Radius einen Hilfskreis H, welcher den Kreis K in den Punkten B und B' schneidet. Halbiert man die Bogen $\widehat{BB'}$, so sind die Halbierungspunkte X, Y die gesuchten Schnittpunkte.

156. Es sind die Schnittpunkte zweier Geraden AB und CD zu bestimmen durch bloßes Schlagen von Kreisbögen. Die geraden Linien selbst sind durch ihre Endpunkte gegeben.

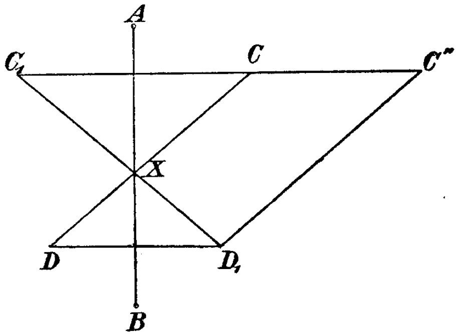

Fig. 88.

Man spiegle (Fig. 88) die Punkte C und D an der Geraden AB; man erhält dadurch eine Gerade C_1D_1, welche auch durch den gesuchten Punkt X geht. Bestimmt man nun den Punkt C'' so, daß

$$\overline{CC''} = \overline{DD_1}$$

und

$$\overline{D_1C''} = \overline{DC},$$

so ist $\overline{D_1C''}$ parallel $\overline{DC}$, daher gilt die Proportion

$$\overline{C_1X} : \overline{C_1D_1} = \overline{C_1C} : \overline{C_1C''}.$$

Sucht man nun die vierte geometrische Proportionale zu $\overline{C_1C''}$, $\overline{C_1C}$, C_1D_1 und trägt dieselbe von C_1 auf der Geraden C_1D_1 auf (Aufgabe 145), so erhält man den gesuchten Punkt X.

157. Ein Winkel ist zu übertragen.

Der Winkel α (Fig. 89) sei gegeben durch die drei Punkte A, B, C; außerdem seien die Punkte E und D gegeben. Ein Punkt X ist zu bestimmen, so daß

$$\sphericalangle XED = \sphericalangle CBA.$$

Die beiden Dreiecke ABC und DEX sind ähnlich; es gelten daher die folgenden Proportionen:

$$\overline{XD} : \overline{DE} = \overline{CA} : \overline{AB}$$

und

$$\overline{XE} : \overline{DE} = \overline{CB} : \overline{AB} .$$

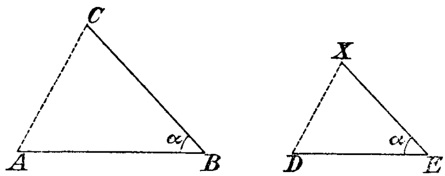

Fig. 89.

Die Strecken $\overline{XD}$ und $\overline{XE}$ sind also als vierte geometrische Proportionalen zu bestimmen. Daraus ergibt sich dann der Punkt X und der Winkel α.

158. Ein gegebener Winkel ist zu vervielfachen oder zu halbieren.

Der Winkel α sei wieder gegeben durch die drei Punkte A, B, C (Fig. 90). Man schlage die Kreisbogen $B(A)$, $B(C)$ und mache

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \ldots$$

Dann ist:

$$\sphericalangle DBA = 2\alpha ,$$

$$\sphericalangle EBA = 3\alpha ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

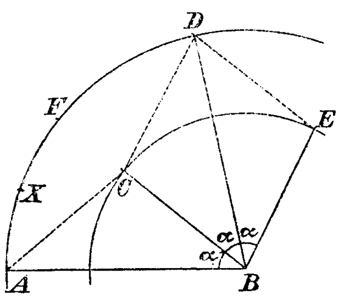

Fig. 90.

Zur Halbierung eines Winkels kann man verschiedene Wege einschlagen, z. B. den folgenden:

Man schlage wieder die beiden Kreise $B(A)$ und $B(C)$, bestimme den Punkt D, halbiere den Bogen $\widehat{AD}$ in F und den Bogen $\widehat{AF}$ in X.

§ 20. Anwendung des Prinzipes der reziproken Radien zur Lösung der geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mit Hilfe des Zirkels allein*).

Die von Mascheroni gegebenen Konstruktionen sind sehr elegant, aber oft auf so gekünsteltem Wege gefunden, daß beim Lesen des umfangreichen Mascheronischen Werkes, von dem das obige nur ein kurzer Auszug ist, der Wunsch rege wird, diese oder ähnliche Konstruktionen mit dem Zirkel allein durch ein allgemeines Prinzip zu erhalten.

Dies gelingt mit Hilfe des Prinzipes der reziproken Radien, wie im folgenden dargelegt werden soll:

1. Konstruktion inverser Punkte mit Hilfe des Zirkels allein.

Ist K ein Kreis der Ebene mit dem Radius r und P ein beliebiger Punkt der Ebene, so findet man bekanntlich (S. 38) den inversen Punkt P' als Schnitt der Zentralen PO mit der Polaren von P bezüglich K.

Es gilt dabei die Gleichung:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 .$$

Beschreibt der Punkt P eine gerade Linie, so beschreibt sein inverser Punkt P' einen Kreis, welcher durch den Mittelpunkt O des Kreises K geht; beschreibt P einen Kreis A, so beschreibt P' ebenfalls einen Kreis A', welcher zu A so liegt, daß O der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist.

Für unsere Zwecke ist es nötig, den Punkt P' aus P mit Hilfe des Zirkels allein zu konstruieren. Dies gelingt auf folgendem Wege:

Man schlage den Kreis $P(O)$ (Fig. 91), welcher K in den Punkten S_1 und S_2 treffen möge, die beiden Kreise $S_1(O)$ und $S_2(O)$ schneiden einander in einem Punkte P', welcher schon der inverse Punkt von P in bezug auf K ist.

---

*) A. Adler, „Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen“, Wiener Akademie, Bd. XCIX, Abt. IIa, 1890.

Wegen der Symmetrie der Figur liegt nämlich P' auf der Linie OP. Aus der Ähnlichkeit der beiden gleichschenkligen Dreiecke S_1OP' und PS_1O folgt außerdem, daß

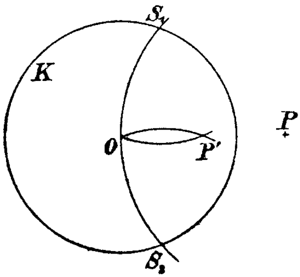

Fig. 91.

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Diese Konstruktion ist jederzeit anwendbar, solange P außerhalb des Kreises liegt; für Punkte innerhalb des Kreises nur dann, wenn der Abstand des Punktes vom Mittelpunkte größer als der Radius ist. Wie man sich in dem Falle helfen kann, wenn letzteres nicht zutrifft, soll erst später gezeigt werden.

2. Konstruktion des Mittelpunktes jenes Kreises, welcher einer gegebenen Geraden oder einem gegebenen Kreise in bezug auf K invers entspricht.

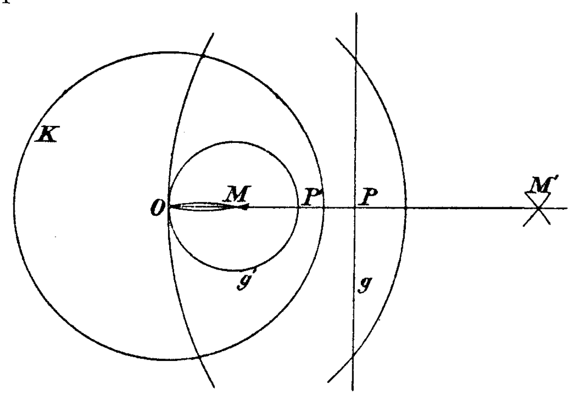

Fig. 92.

a) Der gesuchte Mittelpunkt M des Kreises G', welcher der Geraden g (Fig. 92) entspricht, wird gefunden, indem man zunächst das Spiegelbild M' von O bezüglich der Geraden g sucht und dann zu M' den inversen Punkt in bezug auf den Kreis K.

Beweis: Sind P und P' die zwei auf der Geraden OM liegenden Punkte von g resp. G', so ist

$$\overline{OM} = \tfrac{1}{2}\overline{OP'}$$

und folglich

$$\overline{OM'} = 2\overline{OP},$$

wie sich aus der Beziehung:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$$

sofort ergibt.

Von der Geraden g brauchen nur zwei Punkte gegeben zu sein, da man nach einer früheren Konstruktion (147) daraus das Spiegelbild M' von M finden kann.

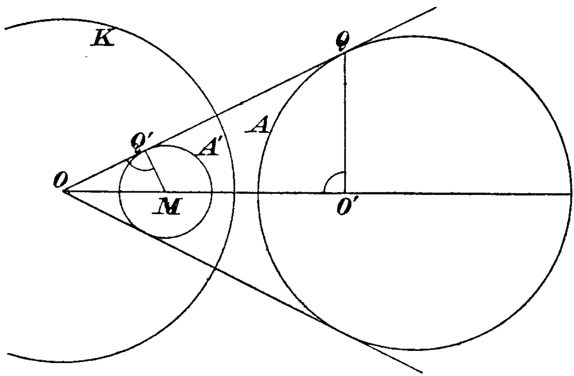

Fig. 93.

b) Sind A und A' inverse Kreise in bezug auf den Kreis K, und zieht man von O eine gemeinsame Tangente an die beiden Kreise, so müssen deren Berührungspunkte Q, Q' (Fig. 93) invers in bezug auf den Kreis K sein.

Zieht man nun $Q'M$ senkrecht auf diese Tangente und QO' senkrecht auf die Zentrale der Kreise, so sind die Dreiecke OQO' und $OQ'M$ einander ähnlich. Daraus folgt:

$$\overline{OM} : \overline{OQ} = \overline{OQ'} : \overline{OO'},$$

also

$$\overline{OM} \cdot \overline{OO'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2 .$$

Die Punkte O' und O sind demnach zueinander invers in bezug auf den Kreis K.

Nun ist, wie man aus der Figur erkennt, O' jener Punkt, welcher zu O in bezug auf den Kreis A invers ist, und M ist der Mittelpunkt des Kreises A'.

Um also M zu erhalten, suche man zu O den inversen Punkt O' in bezug auf den gegebenen Kreis A und zu dem so gefundenen Punkte O' den inversen Punkt M in bezug auf den Grundkreis K.

3. Allgemeine Methode zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben mit Hilfe des Zirkels allein.

Mit Hilfe des in Nummer 1 und 2 Erwähnten kann man nicht nur nachweisen, daß alle geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mit Hilfe des Zirkels allein lösbar sind, sondern auch eine Methode angeben, nach welcher dieses erreicht werden kann:

Jede ausgeführte Konstruktion zweiten Grades ist eine Figur, die aus geraden Linien und Kreisen besteht; ihre inverse Figur in bezug auf einen angenommenen Kreis K wird daher nur aus Kreisen bestehen, welche man nach Nummer 2 mit dem Zirkel allein konstruieren kann.

Da außerdem die Übergangskonstruktion vom Punkte P zu seinem inversen Bilde P' nach Nummer 1 mit Hilfe des Zirkels allein ausgeführt werden kann, so ist damit schon eine Methode angegeben, nach welcher man alle geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mit Hilfe des Zirkels allein lösen kann:

Soll man nämlich eine geometrische Aufgabe nur mit Hilfe des Zirkels durchführen, so denke man sich diese Aufgabe auf gewöhnlichem Wege gelöst, wodurch man vor dem geistigen Auge eine Figur F erhält, welche aus geraden Linien und Kreisen besteht.

Nun zeichne man möglichst passend den Grundkreis K, hierauf die zu F nach dem Prinzip der reziproken Radien gehörige Figur F'. Endlich konstruiere man zu dem Resultate der so erhaltenen Figur F' das inverse Bild, wodurch man dann das gewünschte Ergebnis erhält.

Alle dabei auftretenden Konstruktionen lassen sich mit Hilfe des Zirkels allein durchführen. Den Kreis K wird man dabei möglichst vorteilhaft wählen.

In den meisten Fällen wird es auch angezeigt sein, die ganze Aufgabe in mehrere Teile zu zerlegen, welche man dann nach obigem löst.

4. Bemerkungen.

a) Mit Hilfe des Auseinandergesetzten wollen wir die Aufgabe behandeln: Eine Strecke $\overline{AB}$ ist in n gleiche Teile zu teilen.

Zu diesem Zwecke ver-n-fachen wir die Strecke $\overline{AB}$, wodurch wir den Punkt C erhalten, und suchen hierauf zu C in bezug auf den Kreis $A(B)$ den inversen Punkt X. Dann muß:

$$\overline{AX} = \frac{1}{n} \overline{AB}$$

sein, denn es ist

$$\overline{AX} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2 .$$

Man bemerkt, daß diese Konstruktion genau dieselbe ist, welche Mascheroni zu demselben Zwecke angibt.

b) Wir müssen noch (§ 20, 1) zeigen, wie man zu einem Punkte P den inversen findet, wenn P innerhalb des Kreises K liegt und sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner als $\frac{r}{2}$ ist.

Zu diesem Zwecke multiplizieren wir zunächst die Strecke $\overline{OP}$ mit einer passend gewählten ganzen Zahl n so, daß der erhaltene Punkt P_1 von O weiter als $\frac{r}{2}$ entfernt ist. Nun konstruieren wir zu P_1 den inversen Punkt P_1' und multiplizieren OP_1 mit n. Der so gefundene Punkt P' ist dann der zu P inverse Punkt, wie aus der Gleichung:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OP_1} \cdot \overline{OP_1'}$$

folgt.

c) Die (§ 20, 1) vorgeführte Konstruktion inverser Punkte mit Hilfe des Zirkels allein ist einfacher als die gewöhnliche mit Hilfe der geraden Linie; sie zeigt so recht die fundamentale Bedeutung des Prinzipes der reziproken Radien für alles, was den Kreis betrifft:

Will man nämlich, wie dies Mascheroni in seinem Werke anstrebte, eine Geometrie des Zirkels schaffen, so muß man doch mit dem Zeichnen eines Kreises anfangen; hierauf ist es am einfachsten, einen Punkt P anzunehmen und den dadurch bestimmten Kreis zu zeichnen; unwillkürlich wird man auf unsere Konstruktion geführt als der einfachsten unter allen möglichen.

Nimmt man P auf dem Kreise selbst an (Fig. 94), so ergibt sich eine noch einfachere Konstruktion:

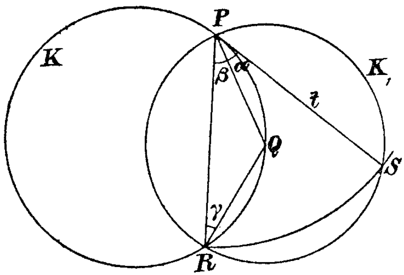

Fig. 94.

Ist nämlich P ein Punkt von K und beschreibt man den Kreis $Q(P) = K_1$, wobei Q ein beliebiger Punkt auf K ist, so erhält man den Punkt R; bringt man nun K_1 zum Schnitte mit dem Kreise $P(R)$, so ergibt sich ein Punkt S, und es läßt sich zeigen, daß SP die Tangente von K im Punkte P ist.

Die Linie PQ ist nämlich die Symmetrale der beiden Kreise K_1 und $P(R)$; daher ist

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta ,$$

da aber auch

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma ,$$

weil

$$\overline{PQ} = \overline{QR} ,$$

so ist schon:

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma ,$$

RS ist also die Tangente an den Kreis K im Punkte P.

Diese Konstruktion ist die einfachste, welche man mit Hilfe von Kreisen durchführen kann; sie erfordert außer dem gegebenen Kreise K nur das Schlagen von zwei Kreisbogen.

d) Man kann zur Auflösung der geometrischen Konstruktionsaufgaben mit Hilfe des Zirkels allein noch einen ganz anderen Weg einschlagen:

Steiner hat, wie wir wissen (Abschnitt II), gezeigt, daß man alle geometrischen Aufgaben durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen kann, sobald in der Ebene ein Kreis K samt Mittelpunkt O gezeichnet vorliegt.

Denkt man sich nun eine Aufgabe auf diesem Steinerschen Wege gelöst, so enthält die entstehende Figur außer dem Kreise K nur gerade Linien.

Nimmt man jetzt K als Inversionskreis und konstruiert zu der erhaltenen Figur die inverse, so besteht diese aus lauter Kreisen, welche sich mit Ausnahme des Kreises K in dem Punkte O schneiden.

Da der Übergang zwischen der Steinerschen Figur und der inversen Figur wieder mit Hilfe des Zirkels allein durchführbar ist, so sieht man folgendes ein:

Es ist nicht nur möglich, wie schon Mascheroni gezeigt hat, alle geometrischen Konstruktionen zweiten Grades mit alleiniger Zuhilfenahme des Zirkels zu zeichnen, sondern man kann noch die Bedingung hinzufügen, daß alle in der Konstruktion vorkommenden Kreise mit Ausnahme eines einzigen durch ein und denselben willkürlich anzunehmenden Punkt gehen sollen.

Man kann demnach jede geometrische Konstruktion nicht nur durch bloßes Ziehen von Kreisen ausführen, sondern man kann diesen Kreisen noch Bedingungen auferlegen.

Übungsaufgaben.

159. Konstruktion des Mittelpunktes X einer gezeichnet vorliegenden Kreislinie K.

1. Methode (nach Mascheroni).

Man nehme auf K den Punkt A an (Fig. 95), beschreibe mit einem beliebigen Radius $\overline{AB}$ den Kreis H und bestimme den Punkt C so, daß $\widehat{BC}$ ein Halbkreis wird.

Mit dem Radius $\overline{CD}$ schlage man um A und C Kreise, welche sich in E schneiden und konstruiere auf H den Punkt F so, daß

$$\overline{FE} = \overline{CD}$$

wird. $\overline{BF}$ ist dann der gesuchte Radius des Kreises K.

Beweis:

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACE + \sphericalangle AEC = \sphericalangle FAE + \sphericalangle FAB ,$$

weil

$$\triangle ACE \cong \triangle AFE .$$

Es ist also:

$$\sphericalangle FAB = \sphericalangle FEA ,$$

daher:

$$\triangle ABF \sim \triangle AFE ;$$

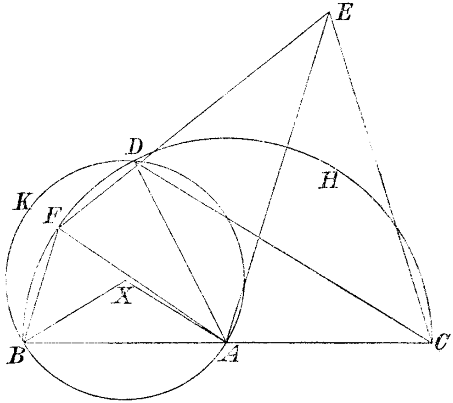

Fig. 95.

daraus ergibt sich:

$$\overline{BF} : \overline{AF} = \overline{AF} : \overline{AE} ,$$

oder:

$$\overline{BX} : \overline{AB} = \overline{AC} : \overline{CD} ,$$

wobei X dadurch gefunden wurde, daß man

$$\overline{BX} = \overline{AX} = \overline{BF}$$

konstruierte. Aus der letzten Proportion folgt, daß

$$\triangle ABX \sim \triangle ADC .$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BAD .$$

Hieraus schließt man endlich, daß:

$$\triangle BAX \cong AXD,$$

also:

$$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{DX}.$$

X ist daher der gesuchte Mittelpunkt des Kreises K.

2. Methode. Lösung mit Hilfe des Prinzipes der reziproken Radien.

Man nehme auf K das Inversionszentrum O an und schlage den Inversionskreis H mit beliebigem Radius so, daß er K in zwei Punkten A und B schneidet.

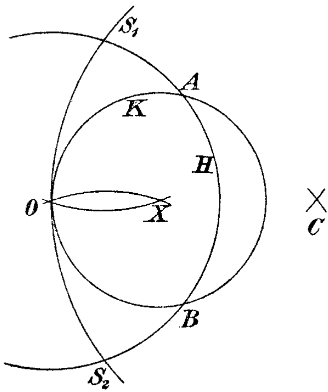

Fig. 96.

Der Geraden AB (Fig. 96) entspricht dann der gegebene Kreis K als Inversionsfigur bezüglich H.

Sucht man nach Aufgabe 147 zu O den symmetrischen Punkt C in bezug auf AB und zu C den inversen Punkt X in bezug auf H, so ist X der gesuchte Mittelpunkt von K.

160. Von einem Kreise kennt man drei Punkte A, B, C seines Umfanges; es ist der Mittelpunkt dieses Kreises zu konstruieren.

Man kann zur Lösung dieser Aufgabe nach demselben Prinzipe vorgehen wie bei der letzten Aufgabe:

Man verwandle den Kreis K durch Inversion in eine Gerade g und suche dann umgekehrt den Mittelpunkt jenes Kreises, welcher g in dieser Inversion entspricht.

Man nehme zu diesem Zwecke A als Inversionszentrum, den Kreis $A(B)$ als Inversionskreis H und konstruiere zunächst jenen Punkt D, welcher C in bezug auf H nach dem Prinzipe der reziproken Radien entspricht.

BD ist dann jene Gerade g, deren inverses Bild in bezug auf H der gegebene Kreis K ist. Nun suche man das Spiegelbild E von A bezüglich g und von E den inversen Punkt X in bezug auf H.

X ist dann der gesuchte Mittelpunkt des Kreises ABC.

161. Näherungsweise Rektifikation des Kreises. Mascheroni gibt zur näherungsweisen Rektifikation eines Viertelkreises, also zur näherungsweisen Bestimmung von $\frac{\pi}{2}$ eine Methode an, die einfach und praktisch sehr wertvoll ist.

Zeichnet man in Fig. 71

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AO}$$

und schlägt die beiden Kreise $A(C)$ und $D(B)$, so erhält man den Punkt G; macht man

$$\overline{BT} = \overline{BG}\,,$$

so ist $\overline{AT}$ näherungsweise gleich dem vierten Teile des Kreisumfanges.

Beweis: Ist $\overline{AO} = 1$, so ist $\overline{OG} = \sqrt{2}$; da nun $\overline{BC} = 1$, so folgt aus dem Dreiecke BGT, daß:

$$\overline{BG} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}\,.$$

In dem Dreiecke ABT ist $\sphericalangle ATB = 30^0$, die Seite $AB = 1$ und die Seite $BT = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$.

Bezeichnet man die Strecke $\overline{AT}$ mit x, so gilt die Gleichung:

$$1 = x^2 + (3 - \sqrt{6}) - 2x\sqrt{3 - \sqrt{6}}\cos 30^0$$

$$1 = x^2 + 3 - \sqrt{6} - x\sqrt{9 - 3\sqrt{6}}\,.$$

Daraus ergibt sich:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}}\right)$$
$$= 1{\cdot}5712\ldots$$

Da $\frac{\pi}{2} = 1{\cdot}5708\ldots$, so wurde der Viertelkreis bis auf drei Dezimalstellen genau gefunden.

Der Fehler zwischen dem konstruktiv gefundenen und dem berechneten Werte beträgt $\frac{4}{10.000}$ des Radius, daher

$\frac{1}{10}$ mm, wenn der Radius $\frac{1}{2}$ m groß ist; ein Resultat, welches für alle praktisch vorkommenden Fälle vollständig genügt.

§ 21. Konstruktionen mit einer Zirkelöffnung.

1. Wir haben oben gesehen, daß man alle geometrischen Konstruktionen, die man gewöhnlich mit Zirkel und Lineal ausführt, durch bloßes Schlagen von Kreisbogen streng lösen kann, und daß man sogar den zu suchenden Kreisen noch Bedingungen auferlegen kann.

Wir wissen auch, daß die Konstruktionen mit dem Zirkel allein ein besonderes praktisches Interesse haben, da der Zirkel ein viel genaueres Zeicheninstrument ist als das Lineal.

Für praktische Zwecke wäre es am vorteilhaftesten, wenn alle zu zeichnenden Kreise gleichen Radius hätten, wenn man also alle Konstruktionen mit einem Zirkel und mit einer Zirkelöffnung durchführen könnte.

2. Cantor sagt in seiner „Geschichte der Mathematik", S. 383, daß es keinem Zweifel unterliegt, daß bei den Griechen eine Geometrie mit einer Zirkelöffnung bekannt war; ferner erwähnt auch Cantor, daß ein großer Teil des Werkes „Buch der geometrischen Konstruktionen" des arabischen Mathematikers Abû'l Wafâ der Auflösung von Aufgaben bei Anwendung nur einer Zirkelöffnung gewidmet ist.

3. Versucht man die geometrischen Grundaufgaben mit Hilfe eines Zirkels mit konstanter Zirkelöffnung zu lösen, ohne eine einzige gerade Linie zu zeichnen, so erkennt man, daß sich Strecken wohl vervielfachen, nicht aber teilen lassen.

Es ist daher unmöglich, alle geometrischen Konstruktionen mit diesem beschränkten Hilfsmittel zu lösen, ohne eine einzige gerade Linie zu zeichnen.

Anders ist es aber, wenn man außer dem Zirkel mit konstanter Zirkelöffnung noch die gerade Linie zuläßt. Dann lassen sich alle Konstruktionen mit diesen beschränkten Hilfsmitteln lösen, denn nach dem Steinerschen Satze genügt schon ein Kreis, um durch bloßes Ziehen von geraden Linien alle quadratischen Konstruktionen zu lösen.

Eine Geometrie mit einer Zirkelöffnung kann demnach nur so verstanden werden, daß man auch gerade Linien zuläßt, sonst aber möglichst einfache Konstruktionen zeichnet.

162. Gesetzt, man hätte zwei Zirkel, jeden mit einer anderen, aber konstanten Öffnung; welche Aufgaben ist man damit imstande zu lösen durch bloßes Schlagen von Kreisbögen, ohne eine einzige gerade Linie zu ziehen?

IV. Abschnitt.

Konstruktionen mit Hilfe eines Parallellineales (zwei parallele Linien in konstantem Abstande); Konstruktionen mit Zuhilfenahme eines beweglichen rechten Winkels; Konstruktionen mit Hilfe eines beliebigen beweglichen Winkels; Konstruktionen mittels des Lineales und eines Eichmaßes; Konstruktionen mit Hilfe des Winkelhalbierers.

§ 22. Einleitung.

1. Strenge und näherungsweise Lösungen geometrischer Konstruktionsaufgaben.

Man sagt gewöhnlich: „Eine geometrische Aufgabe ist konstruktiv streng lösbar, wenn zu ihrer Lösung nur das Schlagen von Kreisbogen und das Ziehen von geraden Linien in endlicher Anzahl notwendig ist, und wenn bei Voraussetzung ideal vollkommener Zeichenhilfsmittel die Lösung genau erhalten wird.

Man sagt dagegen, eine Aufgabe sei näherungsweise gelöst, wenn selbst bei ideal vollkommenen Hilfsmitteln die Lösung der Aufgabe sich nicht mathematisch genau auf dem eingeschlagenen Wege ergibt oder, wenn ihre Lösung eine unbegrenzte Anzahl von Konstruktionen erfordert.

Diese Bemerkungen sind für das folgende wichtig:

Zur Lösung der Aufgabe: „In einer Geraden g ist ein Punkt X so zu finden, daß von X aus eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ unter einem rechten Winkel erscheint", könnte man auch in der Weise vorgehen, daß man einen beweglichen rechten Winkel (etwa aus Holz) durch A und B legt und ihn solange bewegt, bis der Scheitel dieses Winkels in die Gerade g zu liegen kommt.

Gewöhnlich löst man die Aufgabe auf anderem Wege; schlägt man aber den eben erwähnten Weg ein, so ist X dadurch keineswegs näherungsweise gefunden, denn bei vollkommener Beschaffenheit der verwendeten Zeichenhilfsmittel ergibt sich X vollkommen genau.

Man muß den rechten Winkel wohl einige Zeit lang verschieben, bis er in die gewünschte Lage kommt; dies macht aber die Konstruktion durchaus nicht zu einer näherungsweisen, denn man muß auch beim Verbinden zweier Punkte durch eine gerade Linie das verwendete Lineal einige Zeit lang verschieben, bis es in die brauchbare Lage kommt.

2. Grundoperationen.

a) Aus der Betrachtung der Steinerschen Konstruktionen (S. 85) wissen wir, daß man mittels der geraden Linie und des Kreises nur jede der folgenden sechs Grundoperationen direkt ausführen kann:

1. Gerade Linien ziehen, 2. den Schnittpunkt einer zu suchenden Geraden mit einer schon gezeichneten bestimmen, 3. die Schnittpunkte einer zu suchenden Geraden mit einem schon gezeichneten Kreis aufsuchen, 4. einen Kreisbogen beschreiben, 5. die Schnittpunkte eines zu suchenden Kreises mit einer schon gezeichneten Geraden bestimmen, 6. die Schnittpunkte eines zu suchenden Kreises mit einem schon gezeichneten Kreise aufsuchen.

Sind die Hilfsmittel beschränkt, so muß gezeigt werden, daß sich mit Hilfe derselben die obigen sechs Grundoperationen ausführen lassen.

b) In diesem Abschnitte wird es immer gestattet sein, gerade Linien zu zeichnen.

Die Aufgaben 1 und 2 werden daher ohne weiteres durchzuführen sein; die Lösung der Aufgabe 4 kann ohne Zirkel nur punktweise geschehen. Es bleiben also nur noch die Aufgaben 3, 5, 6 übrig, welche sich, wie früher gezeigt wurde (S. 86), auf eine einzige Hauptaufgabe zurückführen lassen, nämlich auf die Aufgabe:

A) „Gegeben ist eine Gerade, außerdem ein Kreis durch seinen Mittelpunkt und Radius; es sind die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise zu konstruieren."

Um zu beweisen, daß alle Konstruktionen mit einem vorgelegten Hilfsmittel durchführbar sind, hat man nur zu zeigen, daß sich die Hauptaufgabe A mit diesem Hilfsmittel lösen läßt.

c) Man könnte dann mit Hilfe unserer beschränkten Zeicheninstrumente jede beliebig vorgelegte Aufgabe in der Weise lösen, daß man Schritt für Schritt der Lösung folgt, welche man bei uneingeschränktem Gebrauche des Zirkels und des Lineales einschlagen würde, aber jede der vorkommenden Operationen mit dem gegebenen Hilfsmittel durchführt.

Ein derartiger Vorgang wäre aber in vielen Fällen unvorteilhaft, da sich viele der einfachsten und am häufigsten vorkommenden Konstruktionsaufgaben (sogenannte geometrische Elementaraufgaben) auf anderem Wege mit einem unserer Zeichenhilfsmittel leichter lösen lassen, nicht selten sogar leichter als mit Zirkel und der geraden Linie zusammen.

3. Elementaraufgaben.

Es ist daher vorteilhaft, sich zunächst mit der Auflösung dieser Elementaraufgaben zu befassen, um so mehr, als auf denselben die Lösung der Hauptaufgabe A beruht.

Diese Elementaraufgaben sind nach Steiner („Geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises") die folgenden:

a) „Parallele Gerade zu ziehen";

b) „der Größe nach gegebene Gerade beliebig zu vervielfachen oder in beliebig viele, gleiche Teile zu teilen";

c) „zueinander rechtwinklige Gerade zu ziehen";

d) „einen Winkel zu hälften oder beliebig zu vervielfachen";

e) „durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden einen Winkel einschließt, welcher einem der Größe und Lage nach gegebenen Winkel gleich ist";

f) „an einem gegebenen Punkte nach beliebiger Richtung eine Gerade anzulegen, welche einer der Größe und Lage nach gegebenen Geraden gleich ist“.

Wir werden in diesem Abschnitte immer so vorgehen, daß wir zunächst die Auflösung dieser Aufgaben zeigen und hierauf die der Hauptaufgabe A.

---

§ 23. Geometrische Konstruktionen, ausgeführt mit Hilfe eines Parallellineales (zwei parallele Geraden in konstantem Abstande a).

a) Als Resultat wird sich ergeben, daß man mit Hilfe eines Parallellineales alle geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades streng lösen kann und daß die dabei auftretenden Konstruktionen mitunter einfacher sind als die gebräuchlichen mittels Zirkel und Lineal.

b) Wir müssen zunächst mittels des Parallellineales allein die oben erwähnten Steinerschen Elementaraufgaben auflösen.

Bei diesen Konstruktionen werden wir oft den Satz über das Trapez (S. 76) anwenden.

163. „Parallele zu ziehen“ (geschieht ganz wie in Fig. 55).

164. „Der Größe nach gegebene Gerade zu vervielfachen oder zu teilen“ (wird analog gelöst wie in Fig. 56).

165. „Zueinander rechtwinklige Gerade zu ziehen.“

Gegeben sei die Gerade g und auf derselben der Punkt P; es ist in P die Normale auf g zu errichten.

Man ziehe durch P die Gerade h (Fig. 97), lege an h das Parallellineal zweimal an; nun lege man das Lineal so in die Zeichenebene, daß eine Kante desselben durch P und die andere Kante durch A (Fig. 97) geht. PB ist die gesuchte Normale.

Die Gerade h wird man passend wählen, so daß A in eine geeignete Entfernung von P kommt.

Die Konstruktion selbst ist nach § 22, 1 dieses Abschnittes keineswegs eine näherungsweise, denn bei idealer Vollkommenheit des verwendeten Hilfsmittels ist das Resultat vollkommen genau.

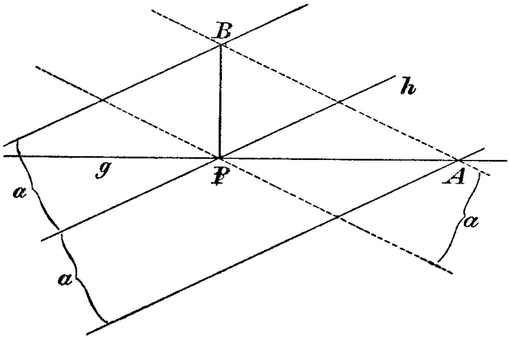

Fig. 97.

166. „Einen Winkel zu halbieren oder zu vervielfältigen."

Ist der Winkel MSN zu halbieren, so gehe man so vor, wie aus der Fig. 98 ersichtlich. ist. (a bedeutet immer die Breite des Parallellineales.)

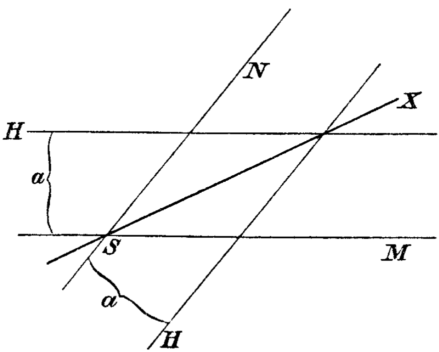

Fig. 98.

Die Konstruktion ist einfacher als die gewöhnliche mit Zirkel und Lineal.

Um den Winkel MSN (Fig. 99) zu verdoppeln, lege man das Parallellineal zuerst an SM, wodurch man den Punkt P erhält; nun lege man das Parallellineal durch die Punkte P und S (Fig. 99). $SQPR$ ist ein Rhombus.

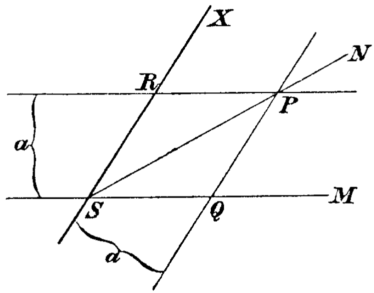

Fig. 99.

167. „Durch den Punkt P ist eine Gerade x zu ziehen, die mit der gegebenen Geraden l einen Winkel einschließt, welcher dem der Größe und Lage nach gegebenen Winkel ASB gleich ist.“

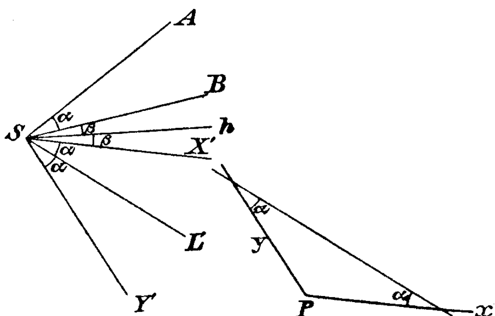

Fig. 100.

Man konstruiere SL' parallel l (Fig. 100) und die Halbierende h des Winkels ASL'; macht man dann

$$\sphericalangle X'Sh = \sphericalangle hSB = \sphericalangle\beta$$

und

$$\sphericalangle Y'SL' = \sphericalangle L'SX' = \sphericalangle\alpha\,,$$

so sind SY' und SX' parallel zu den gesuchten Geraden.

168. „Gegeben sind die Gerade g, der Punkt M auf g und die Strecke $\overline{AB}$; es ist ein Punkt X auf g so zu bestimmen, daß $\overline{MX} = \overline{AB}$ wird."

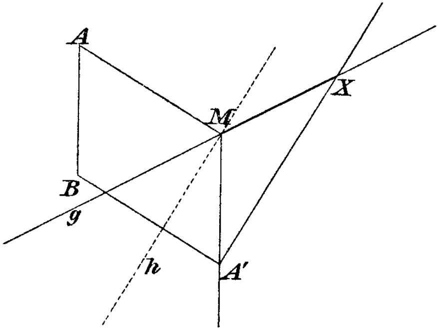

Fig. 101.

In Fig. 101 ist h die Halbierende des Winkels $A'Mg$; $A'X$ ist parallel zu h.

c) Nachdem wir die Elementarkonstruktionen ererledigt haben, zeigen wir die Lösung der Hauptaufgabe A:

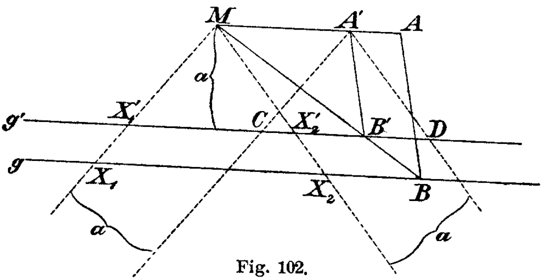

Fig. 102.

Gegeben sei die Gerade g (Fig. 102) und die Strecke $\overline{MA}$ parallel zu g; es sind die Schnittpunkte X_1 und X_2 der Geraden g mit jenem Kreise zu konstruieren, welcher M als Mittelpunkt und MA als Radius hat*).

*) Ist der Radius des Kreises durch eine beliebige Strecke gegeben, so kann man mit Zuhilfenahme der Aufgabe 167 den gegebenen Radius parallel zu g legen.

Man lege das Parallellineal an die Gerade MA, wodurch man die Gerade g' erhält (Fig. 102); nun ziehe man die beliebige Gerade MB, welche g in B und g' in B' schneidet, und konstruiere ferner $A'B'$ parallel zu AB.

Legt man nun das Lineal so in die Zeichenfläche, daß eine seiner Kanten durch M, die andere durch A' geht, was auf zwei verschiedene Arten möglich ist, so erhält man die gesuchten Schnittpunkte X_1 und X_2.

Beweis: $MA'DX_2'$ und $MA'CX_1'$ sind Rhomben. X_1' und X_2' sind die Schnittpunkte der Geraden g' mit dem Kreise $M(A')$, X_1 und X_2 daher die gesuchten Schnittpunkte mit dem konzentrischen Kreise $M(A)$.

d) Die Aufsuchung der Schnittpunkte zweier Kreise können wir ganz wie auf wie S. 86 auf die eben gelöste Aufgabe zurückführen.

e) Wir haben damit streng bewiesen, daß man mit Hilfe eines Parallellineales (zwei parallele Linien in konstantem Abstande) imstande ist, jede geometrische Konstruktionsaufgabe zweiten Grades zu lösen, und auch gesehen, daß die Lösungen durchaus nicht kompliziert, manchmal sogar recht einfach werden.

Diese Konstruktionen haben praktischen Wert namentlich für die Feldmeßkunde.

Übungsaufgaben.

169. Gegeben ist ein Dreieck; es sind die Mittelpunkte des dem Dreiecke ein- und umbeschriebenen Kreises mit dem Parallellineal allein zu finden.

170. Gegeben ist eine Strecke $\overline{AB}$, kleiner als der Abstand a der beiden Kanten des Parallellineales; es ist im Punkte A die Normale auf AB zu errichten. (Man vervielfältige die Strecke $\overline{AB}$).

171. Gegeben sind zwei Punkte A und B. Das zum Zeichnen vorliegende Parallellineal sei zu kurz, um die Verbindungslinie AB direkt zeichnen zu können; man konstruiere trotzdem einen Punkt X, welcher auf der Linie AB liegt.

Man zeichne durch B zwei gerade Linien a und b (Fig. 103). Die beiden Geraden a und b werden, eventuell durch wiederholtes Anlegen des Parallellineales, bis in die Nähe des Punktes A gezeichnet; zieht man nun durch A

die Geraden c, d, e und konstruiert e' parallel e, c' parallel c, d' parallel d, so ist X ein Punkt der Geraden AB.

Man kann also die Verbindungslinie AB auch mit einem kurzen Lineal zeichnen.

Überhaupt ist jede der obigen Aufgaben auch mit einem kurzen Parallellineal zu lösen.

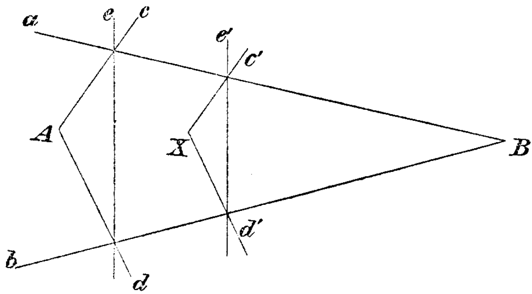

Fig. 103.

172. Eine bemerkenswerte Methode zur Lösung von geometrischen Aufgaben mit dem Parallellineale allein läßt sich aus den Steinerschen Konstruktionen herleiten, wie F. Enriques auf S. 267 seiner „Vorlesungen über projektive Geometrie" (deutsch herausgegeben von Dr. H. Fleicher, Leipzig 1903) lehrt.

a) Mit Hilfe eines Parallellineales, dessen Breite a ist, kann man gerade Linien ziehen; man kann aber auch leicht die Tangenten von dem beliebigen Punkte P an einen Kreis K zeichnen, wenn der Mittelpunkt M von K gegeben und sein Radius gleich a ist.

Mittels dieser beiden Zeichenoperationen allein ist man auch imstande, zu jeder Geraden ihren Pol bezüglich K und zu jedem Punkte seine Polare in bezug auf K zu konstruieren.

b) Löst man eine geometrische Aufgabe im Steinerschen Sinne, so erhält man eine Figur F, welche außer dem Steinerschen Kreise K nur gerade Linien enthält.

Sucht man nun zu F die polare Figur F' bezüglieh des durch M und a gegebenen Kreises K, so erfordert nach obigem das Konstruieren von F' außer dem Ziehen von geraden Linien nur noch das Zeichnen von Tangenten an K. Auch der Übergang von F zu F' und von F' zu F kann mittels dieser beiden Zeichenoperationen allein ausgeführt werden.

c) Man kann also sämtliche quadratische Aufgaben mit Hilfe des Parallellineales allein lösen und dem Gebrauche desselben noch eine Beschränkung auferlegen.

Man löse die Aufgaben dieses Paragraphes auf diesem angedeuteten Wege.

---

§ 24. **Konstruktionen mit Zuhilfenahme eines rechten Winkels.**

a) Das in diesem Abschnitte einzig verwendete Konstruktionshilfsmittel ist ein beweglicher rechter Winkel etwa aus Holz, z. B. ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse abgebrochen ist.

b) Es wird sich wieder als Resultat ergeben, daß wir mit diesem Hilfsmittel allein sämtliche Konstruktionen zweiten Grades durchführen können.

Wir werden später sogar sehen, daß der rechte Winkel ein viel mächtigeres Zeicheninstrument ist als der Zirkel, indem man mit zwei oder drei rechten Winkeln imstande ist, auch Gleichungen dritten Grades streng zu lösen, was bekanntlich auch mit mehreren Zirkeln zusammen nicht gelingt.

Wir wollen wieder die Elementaraufgaben (§ 22, Nr. 3) der Reihe nach betrachten. Die Lösung einzelner dieser Aufgaben ergibt sich ohne weiteres.

173. „Parallele ziehen mit einem rechten Winkel allein.“ (Man ziehe zuerst die Normale.)

174. „Strecken vervielfachen oder teilen.“

Es sei (Fig. 104) die Strecke AB zu verdreifachen. Man ziehe g beliebig durch A, h senkrecht darauf und verfahre, wie die Fig. 104 zeigt. Wie man eine Strecke AB halbiert, zeigt Fig. 105.

Die Teilung einer Strecke in mehrere gleiche Teile geschieht wie früher (S. 77) mit Hilfe zweier paralleler

Geraden oder mit Zuhilfenahme der früher gezeigten Brianchonschen Methode. ($ABba$ kann dabei als Rechteck angenommen werden.)

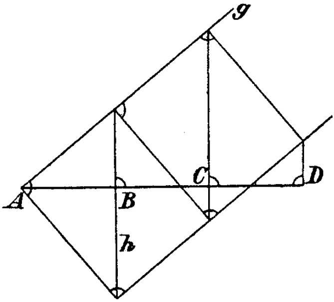

Fig. 104.

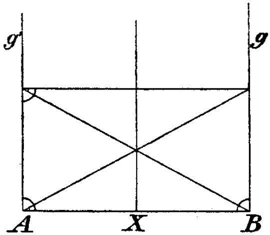

Fig. 105.

175. „Zueinander senkrechte Gerade ziehen.“ (Ist ohne weiteres lösbar.)

176. „Einen Winkel vervielfachen oder halbieren.“

Ist der Winkel ASB zu verdoppeln, so ziehe man nach Fig. 106 $AC \perp SB$ und mache $\overline{CD} = \overline{AC}$.

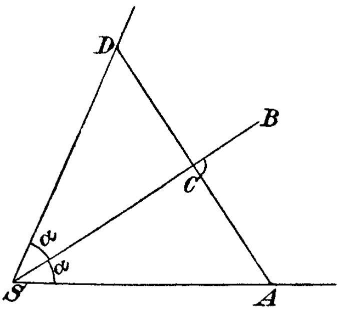

Fig. 106.

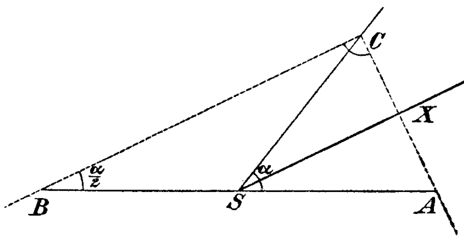

Fig. 107.

Ist der Winkel ASC zu halbieren, so gehe man auf folgende Weise vor: Man mache $\overline{BS} = \overline{AS}$ (Fig. 107), lege dann den rechten Winkel so in die Zeichenfläche, daß die Schenkel des rechten Winkels durch A und B gehen und sein Scheitel auf dem zweiten Schenkel des Winkels α liegt; x parallel zu BC ist schon die gesuchte Winkelsymmetrale. (Die Konstruktion ist nach § 22, Nr. 1 keineswegs eine näherungsweise.)

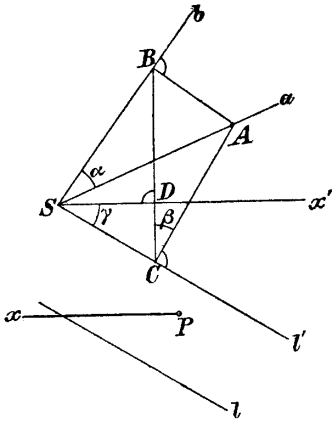

Fig. 108.

177. „Durch einen gegebenen Punkt P ist eine Gerade x zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden l einen Winkel einschließt, der einem der Größe und Lage nach gegebenen Winkel ASB (Fig. 108) gleich ist.“

Man ziehe durch S die Gerade l' parallel zu l, nehme auf a den Punkt A beliebig an und fälle die Normalen AB, AC auf l resp. l'; dann verbinde man die Punkte B, C und ziehe von S aus die Normale SD auf BC. Das gesuchte x ist parallel zu SD.

Beweis: $ABSC$ ist ein Kreisviereck; daher ist

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$$

als Peripheriewinkel über demselben Bogen; ferner ist

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \beta$$

als Normalwinkel, folglich ist

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha \,.$$

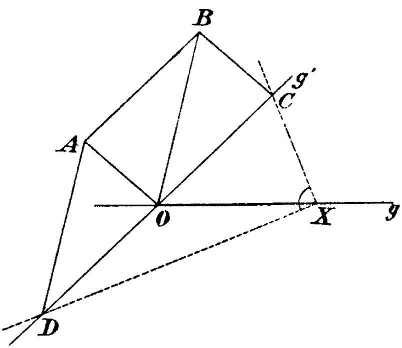

Fig. 109.

178. „Gegeben ist eine Gerade g, auf ihr der Punkt O, außerdem eine Strecke $\overline{AB}$; es ist auf g der Punkt X so zu bestimmen, daß $\overline{OX} = \overline{AB}$ wird.“

Man konstruiere durch Paralleleziehen (Fig. 109)

$$\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{AB}$$

und lege dann den rechten Winkel so in die Zeichenebene, daß seine Katheten durch C und D gehen und sein Scheitel auf g liegt. (Die Konstruktion ist keineswegs eine näherungsweise.)

179. Hauptaufgabe A: „Gegeben ist eine gerade Linie g und eine dazu parallele Strecke $\overline{MA}$; es sind die Schnittpunkte X_1, X_2 der geraden Linie g mit jenem Kreise zu konstruieren, welcher M als Mittelpunkt und $\overline{MA}$ als Radius hat."

Man verlängere $\overline{MA}$ über M um sich selbst, wodurch man einen Punkt B erhält; nun lege man den rechten Winkel so in die Zeichenfläche, daß seine Schenkel durch A und B gehen und sein Scheitel auf g liegt.

180. Gegeben ist ein Dreieck ABC; man konstruiere den Mittelpunkt O des dem Dreiecke umschriebenen Kreises mit Hilfe des rechten Winkels allein.

Man ziehe in A die Normale auf AC und in B die Normale auf BC; die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Punkte C geht durch den gesuchten Punkt O.

§ 25. Konstruktionen, ausgeführt mit Hilfe eines beliebigen Winkels.

a) Als einziges Zeichenhilfsmittel setzen wir in diesem Paragraphen einen beweglichen Winkel α (etwa aus Holz) voraus; α kann jeden beliebigen Wert, mit Ausnahme von 180^0, haben.

Es wird sich als Resultat herausstellen, daß man mit Hilfe dieses Instrumentes allein alle geometrischen Aufgaben zweiten Grades streng lösen kann.

b) Um dies zu beweisen, müssen wir die Lösung der sechs Elementaraufgaben und dann der Hauptaufgabe des § 22 mit unserem Hilfsmittel zeigen:

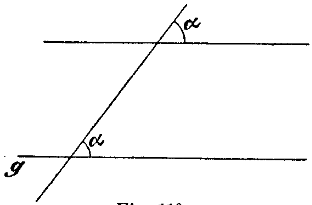

Fig. 110.

181. „Parallele ziehen.“ (Erkennt man aus Fig. 110 ohne weiteres.)

182. „Strecken vervielfachen oder teilen.“

Fig. 111 zeigt, wie man mit Hilfe des beweglichen Winkels α eine Strecke AB verdreifacht: Man bestimmt durch Anlegen des Winkels α in A und B den Punkt P, zieht durch diesen die Parallele zu AB und sucht dann die Punkte P', C, P'', D.

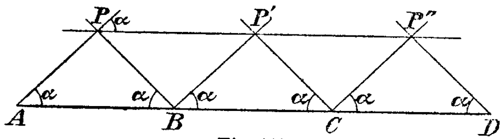

Fig. 111.

Fig. 112 zeigt, wie man eine Strecke $\overline{AB}$ halbiert.

Die Teilung einer Strecke in mehrere gleiche Teile geschieht wie S. 77.

183. „Fällen von Normalen.“ (Ergibt sich aus Fig. 112.)

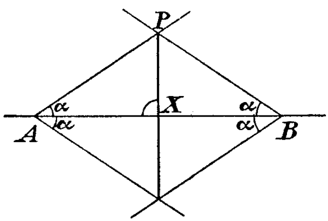

Fig. 112.

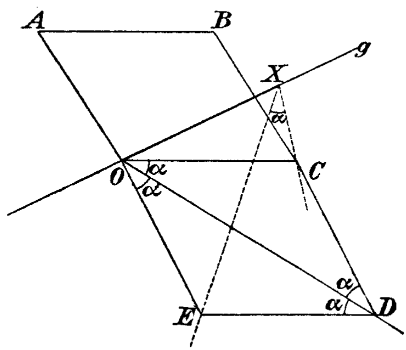

Fig. 113

184. „Gegeben ist die Gerade g, auf derselben ein Punkt O und außerdem eine Strecke AB; es ist auf g ein Punkt X so zu bestimmen, daß $\overline{OX} = \overline{AB}$ wird.“

Man bestimme nach Fig. 113 die Punkte C, D und E; nun lege man den Winkel α so in die Zeichenfläche, daß seine Schenkel durch E und C gehen und sein Scheitel auf g liegt.

Beweis: C, E und X liegen auf dem Kreise mit O als Mittelpunkt und AB als Radius.

185. „Einen Winkel zu halbieren oder zu vervielfachen."

Das Halbieren des Winkels ASB geschieht nach Fig. 114, wobei vorher $\overline{SA} = \overline{SB}$ gemacht wurde.

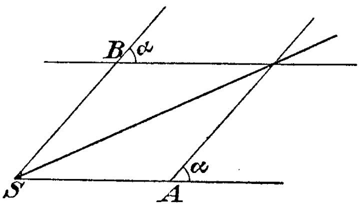

Fig. 114.

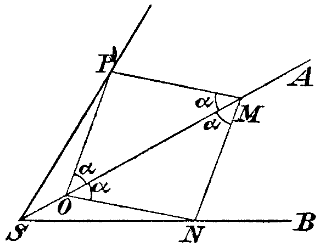

Fig. 115.

Das Verdoppeln eines Winkels zeigt Fig. 115. Man nehme auf dem Schenkel SA einen Punkt M an und bestimme daraus durch wiederholtes Anlegen des Winkels die Punkte N, O, P.

186. „Einen gegebenen Winkel übertragen."

187. Hauptaufgabe A: „Gegeben ist eine gerade Linie g und eine Strecke $\overline{MA}$ parallel zu g; es sind die Schnittpunkte X_1, X_2 von g mit jenem Kreise zu suchen, welcher M als Mittelpunkt und $\overline{MA}$ als Radius hat.

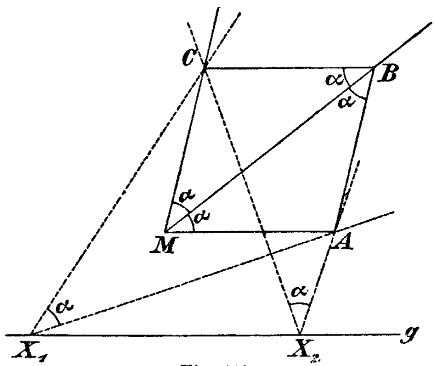

Fig. 116.

Man konstruiere (Fig. 116) den Rhombus $MABC$ durch wiederholtes Anlegen des Winkels α; legt man nun den Winkel α so in die Zeichenfläche, daß seine Schenkel durch die Punkte A und C gehen und sein Scheitel auf g zu liegen kommt, so sind X_1, X_2 die gesuchten Schnittpunkte von g mit dem Kreise; denn X_1, X_2, A und C liegen auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte in M.

Bemerkung: Zirkel, Lineal, rechter und spitzer Winkel sind die gewöhnlichen Zeichenhilfsmittel eines jeden Zeichners.

Es wurde bewiesen, daß man imstande ist, mit jedem dieser Zeichenhilfsmittel allein sämtliche Konstruktionsaufgaben zweiten Grades zu lösen.

§ 26. Konstruktionen mittels der geraden Linie und eines Eichmaßes*).

1. In diesem Abschnitte sind erlaubte Zeichenoperationen: Das Ziehen von geraden Linien und das Übertragen einer Strecke.

Das Übertragen der Strecke kann mittels des Eichmaßes geschehen, d. h. mittels eines Instrumentes, welches das Übertragen einer ganz bestimmten Strecke, z. B. der Einheitsstrecke gestattet (etwa ein Papierstreifen von bestimmter Länge).

Die zu übertragende Strecke darf dabei nur auf einer schon gezeichneten Geraden von einem gegebenen Punkte aus aufgetragen werden.

Eine nicht erlaubte Zeichenoperation ist es also, den einen Endpunkt des Eichmaßes auf einen gegebenen Punkt der Zeichenfläche zu legen und das Eichmaß um den festgehaltenen Endpunkt so lange zu drehen, bis der andere Endpunkt in eine gegebene Gerade fällt; mit anderen Worten, es ist nicht erlaubt, auf diese Weise

*) Hilbert, „Grundlagen der Geometrie", 2. Auflage 1903, Feldblum, „Über elementargeometrische Konstruktionen", Inauguraldissertation, Göttingen 1899.

ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von dem eine Kathete bekannt und die Hypotenuse gleich der Länge des Eichmaßes ist.

2. Wir müssen zunächst die Steinerschen Elementaraufgaben (S. 125) mit diesen beschränkten Hilfsmitteln der Reihe nach lösen:

188. „Parallele ziehen.“ (Geschieht nach S. 76, da man auf jeder Geraden das Eichmaß zweimal hintereinander auftragen und dadurch zwei gleiche Strecken erhalten kann.)

189. „Strecken vervielfachen oder teilen“ (nach S. 77).

190. „Normale fällen.“

Auf der Geraden a (Fig. 117) ist eine Senkrechte zu errichten; man nehme A auf a beliebig an, konstruiere:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE} = 1$$

$=$ Länge des Eichmaßes

und ziehe BD und CE; FH steht auf a senkrecht, denn BE und CD sind die Höhen des Dreieckes BCH.

191. „Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade anzulegen.“

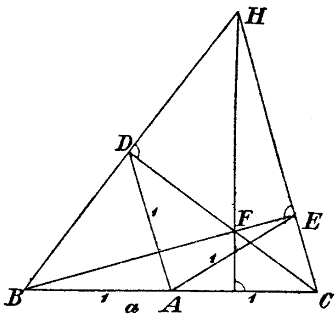

Fig. 117.

Gegeben sei die Gerade l, der Winkel $BAD = \alpha$ und der Punkt P; es ist durch P eine Gerade zu ziehen, welche l unter dem Winkel α schneidet.

Man ziehe l' parallel zu l, nehme B beliebig auf einem Schenkel des Winkels α an und fälle die Normalen BD und BC; zieht man nun AE senkrecht auf CD, so ist nach S. 134

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle \alpha;$$

x ist dann parallel x'.

192. „Eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden von einem gegebenem Punkte aus aufzutragen.“

Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$, die Gerade g und auf derselben der Punkt P; es ist jener Punkt X auf g zu bestimmen, für welchen $\overline{XP} = \overline{AB}$ wird; das Eichmaß, welches der Strecke $\overline{AB}$ nicht gleich zu sein braucht, ist dabei (Fig. 118) gleich 1 gesetzt.

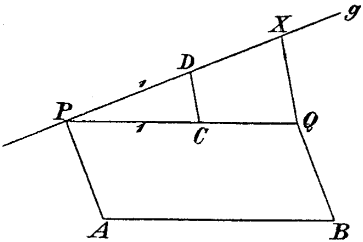

Fig. 118.

Man ziehe nach Aufgabe 188 PQ parallel zu AB (Fig. 118), bestimme mittels des Eichmaßes die Punkte C, D und konstruiere QX parallel zu CD; dann ist PX gleich AB.

Das Übertragen einer beliebigen Strecke gelingt also durch Anwendung eines ein- für allemal gegebenen Eichmaßes*).

193. „Winkel halbieren und vervielfachen."

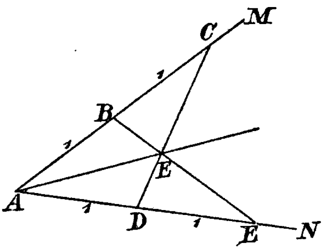

Fig. 119.

Der Winkel MAN ist zu halbieren.

Konstruiert man (Fig. 119)

$$\overline{BA} = \overline{BC} = \overline{DA} = \overline{DE} = 1,$$

so ist AF die gesuchte Winkelsymmetrale.

Will man einen Winkel verdoppeln, so fälle man von einem beliebigen Punkte des einen Schenkels die Normale auf den anderen Schenkel und verlängere dieselbe über den Fußpunkt hinaus um sich selbst.

3. Die Steinerschen Elementaraufgaben sind also mit unseren beschränkten Hilfsmitteln streng lösbar.

Um nun zu zeigen, daß alle Aufgaben, die man gewöhnlich mit Zirkel und Lineal löst, durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Übertragen von Strecken gelöst werden können, hätte man noch die Aufgabe A zu lösen (S. 25), welche die Aufsuchung der Schnittpunkte einer

*) J. Kürschak, „Das Streckenübertragen", Math. Ann. Bd. 55, 1902.

gezeichneten Geraden mit einem Kreise von gegebenem Mittelpunkte und gegebenem Radius verlangt, nachdem auch bei unseren beschränkten Hilfsmitteln die Zurückführung der Aufgabe „es sind die Schnittpunkte zweier Kreise zu bestimmen" auf dieselbe Weise gelingt, wie dies früher (S. 96) gezeigt wurde.

Diese Hauptaufgabe A ist aber mit unseren beschränkten Hilfsmitteln nicht lösbar.

Wir sind nämlich nicht imstande, die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes zu finden, von dem man die Hypotenuse und eine Kathete kennt.

Der strenge Beweis dafür wird erst in einem der folgenden Abschnitte gegeben werden.

4. Welche Aufgaben sind mit diesen beschränkten Hilfsmitteln lösbar?

Diese Frage läßt sich vollständig beantworten:

a) Sind $a, b, c, \ldots$ gegebene Strecken, so können wir nach obigem durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Übertragen von Strecken folgende Ausdrücke finden:

$$a + b, \quad a - b, \quad \frac{a \cdot b}{c}$$

durch Streckenauftragen und Paralleleziehen allein und

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

durch Konstruktion des rechten Winkels und Auftragen von Strecken.

Aber auch kompliziertere Ausdrücke*), wie z. B.

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

kann man konstruieren, indem man zuerst

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und dann

$$w = \sqrt{u^2 + z^2}$$

sucht.

Auch $v = a\sqrt{n}$, wobei a eine gegebene Strecke und n eine ganze Zahl ist, läßt sich mit den vorliegenden beschränkten Hilfsmitteln konstruieren; denn es ist:

$$v = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2 + \ldots + a^2},$$

*) Feldblum a. a. O.

v ist also durch Fällen von Normalen und Streckenabtragen konstruierbar.

Man kann z. B. auch folgenden Ausdruck konstruieren:

$$x = a\sqrt{33 - 12\sqrt{2}}\,,$$

denn es ist:

$$x = \sqrt{(4\,a)^2 + \left(2\,a\sqrt{2} - 3\,a\right)^2}\;;$$

man suche nun zuerst $2\,a\sqrt{2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten $2\,a$ und dann x als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten $4\,a$ und $(2\,a\sqrt{2} - 3\,a)$.

b) Man kann also alle Ausdrücke konstruieren, welche aus den gegebenen Strecken durch wiederholtes Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Quadratwurzelziehen aus einer Summe von Quadraten hervorgehen.

Kommt man daher bei der rechnerischen Behandlung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe schließlich auf einen Ausdruck, welcher außer den rationalen Operationen nur Quadratwurzeln aus Summen von Quadraten enthält, so kann man diese Aufgabe mit unseren beschränkten Hilfsmitteln lösen.

So z. B. kommt man bei der Lösung des Malfattischen Problemes (S. 11) auf Ausdrücke, in welchen außer den rationalen Operationen nur Quadratwurzeln aus der Summe von Quadraten vorkommen. Diese Aufgabe wird sich daher mit unseren beschränkten Hilfsmitteln lösen lassen.

Ist s die Seite eines regelmäßigen Dreieckes, so ist seine Höhe

$$h = \frac{s}{2}\sqrt{3}\;;$$

daher wird sich auch ein regelmäßiges Dreieck mit unseren beschränkten Hilfsmitteln konstruieren lassen.

Ist r der Radius eines Kreises, so sind:

$$s_{10} = \tfrac{1}{2}\,r\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

und

$$s_5 = \sqrt{s_{10}^2 + r^2}\,,$$

wobei s_{10} und s_5 die Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen Zehn- und Fünfeckes bedeuten. Beide Polygone werden sich daher durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken lösen lassen.

5. a) Man kann aber, wie später streng nachgewiesen werden soll, $\sqrt{a^2 - b^2}$ und daher $\sqrt{ab}$ mit diesen beschränkten Hilfsmitteln allein nicht lösen.

Man kann daher alle Aufgaben nicht lösen, welche, rechnerisch behandelt, auf ein Resultat führen, das Wurzeln aus der Differenz zweier Quadrate oder aus Produkten zweier Strecken enthält.

b) Es sei z. B. eine Gerade g gegeben und zwei außerhalb derselben liegende Punkte A und B; es ist ein Kreis zu zeichnen, welcher durch A und B geht und g berührt.

Nennen wir den Schnittpunkt der Geraden AB mit g C und den gesuchten Berührungspunkt X, so ist bekanntlich:

$$\overline{CX} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}.$$

Es ist nun mit unseren beschränkten Hilfsmitteln unmöglich, $\sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}$ zu konstruieren, und es ist daher auch sicher, daß man diese Aufgabe mittels der vorgelegten beschränkten Hilfsmittel weder auf diesem noch auf anderem Wege lösen kann.

c) Überhaupt läßt sich das Apollonische Berührungsproblem mit diesen beschränkten Hilfsmitteln nicht lösen.

Natürlich dürfen die drei Kreise, welche bei diesem Probleme gegeben sind, nicht zur Benutzung gezeichnet vorliegen; denn dann könnte man diese Aufgabe nach Steiner durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen. Die Kreise müssen durch ihre Mittelpunkte und ihre Radien gegeben sein. Dann ist aber die Aufgabe mit unseren beschränkten Hilfsmitteln nicht durchführbar.

§ 27. Konstruktionen mittels des Winkelhalbierers.

Feldblum*) hat ein Instrument angegeben, mittels dessen man Winkel halbieren kann. Er hat dann die Konstruktionen untersucht, die man durch bloßes Ziehen

*) Feldblum, „Über elementargeometrische Konstruktionen". Inauguraldissertation, Göttingen 1899.

von geraden Linien und durch Winkelhalbieren mittels dieses Instrumentes lösen kann, und gefunden, daß nicht alle geometrischen Konstruktionen zweiten Grades damit lösbar sind, sondern nur jene, welche sich durch Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken lösen lassen:

1. Dieser Winkelhalbierer (Fig. 120) ist ein Instrument, das die Form eines Rhombus hat, in allen Ecken beweglich ist, und von dem zwei Seiten und eine Diagonale verlängert wurden.

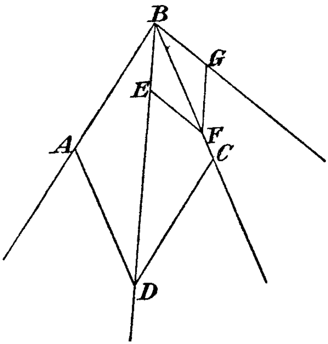

Fig. 120.

Nähert man in diesem Instrumente die Punkte A und C, so entfernen sich die Punkte B und D voneinander und umgekehrt; jederzeit aber halbiert die Linie BD den Winkel ABC.

Feldblum verwendet dieses Instrument nur zum Winkelhalbieren, nicht aber zum Verdoppeln eines Winkels. Daher bietet auch die folgende Aufgabe einige Schwierigkeiten:

2. Gegeben ist eine gerade Linie g und auf ihr ein Punkt A; es ist in A die Normale auf g zu konstruieren.

Um die Lösung zu zeigen, welche Feldblum angibt, brauchen wir zwei Sätze aus den Grundlehren der projektiven Geometrie:

a) „Sind a, b, c und a', b', c' entsprechende Strahlen in zwei projektiven Strahlenbüscheln, so läßt sich zu dem beliebigen Strahle d des ersten Büschels der entsprechende Strahl d' des zweiten Büschels durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden."

b) Betrachtet man irgend zwei aufeinander normale Strahlen eines und desselben Büschels als entsprechende, so sind die Strahlen des Büschels involutorisch gepaart.

Sind also a, b, c, a', b', c' gegeben, wobei a' auf a, b' auf b, c' auf c senkrecht steht, so kann man zu jedem d das normale d' durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruieren.

c) Nun kehren wir zu unserer Aufgabe zurück. Man ziehe durch A eine beliebige Gerade h, suche mittels des Winkelhalbierers die Halbierende a von hg und die Halbierende a' seines Nebenwinkels; a' steht auf a senkrecht.

Zieht man durch A eine zweite Gerade k und halbiert wieder $\sphericalangle kg$ und seinen Nebenwinkel, so erhält man zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade b, b'; analog erhält man noch ein drittes Paar normaler Geraden c, c'.

Die gesuchte, zu g senkrechte Gerade wird nach obigem aus folgender Bedingung gefunden:

$$(a'b'c'g') \barwedge (a\,b\,c\,g)\,.$$

Bemerkung: Würde man sich gestatten, mittels des Winkelhalbierers auch Winkel zu verdoppeln, so würde sich diese Aufgabe viel einfacher lösen lassen.

3. Das Verdoppeln und Vervielfachen einer Strecke.

Soll die Strecke $\overline{AB}$ (Fig. 121) verdoppelt werden, so ziehe man $AC \perp AB$, $BE \perp AB$, halbiere ferner den Winkel A und konstruiere $EX \perp AE$; dann ist $\overline{AX} = 2\overline{AB}$.

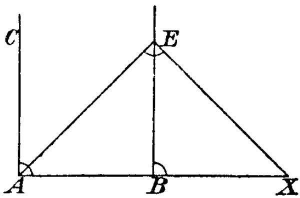

Fig. 121.

4. Das Paralleleziehen geschieht mit Zuhilfenahme der Aufgabe 3.

5. Eine Strecke um ihren Endpunkt drehen.

Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$ und die Gerade g, welche durch einen Endpunkt der Strecke $\overline{AB}$ gehen möge; es ist der Punkt C auf g so zu bestimmen, daß $\overline{AC} = \overline{AB}$ wird.

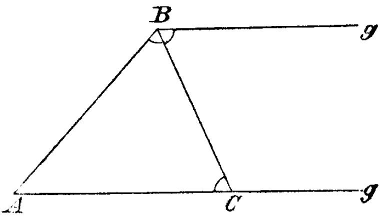

Fig. 122.

Man ziehe g' parallel zu g durch B (Fig. 122) und halbiere den Winkel bei B.

6. Eine gegebene Strecke auf eine gegebene Gerade von einem bestimmten Punkte aus abzutragen.

Man verschiebe die Strecke parallel zu sich selbst, bis einer ihrer Endpunkte mit dem gegebenen Punkte zusammenfällt, und drehe sie dann um diesen Punkt so, daß sie in die gegebene Gerade fällt.

d) Bemerkung: Mittels des Winkelhalbierers kann man durch bloßes Ziehen von geraden Linien Strecken beliebig übertragen. Da man anderseits durch Übertragen von Strecken und Ziehen von geraden Linien jeden Winkel halbieren kann, so sind der Winkelhalbierer und das Eichmaß in gewissem Sinne einander äquivalent.

Jede Aufgabe, welche mittels des Eichmaßes und mittels Ziehen von geraden Linien lösbar ist, wird auch mit Hilfe des Winkelhalbierers und Ziehen von geraden Linien lösbar sein und umgekehrt.

Ist jedoch eine Aufgabe durch Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken nicht streng lösbar, so wird sie es auch nicht sein durch Ziehen von geraden Linien und Winkelhalbieren.

V. Abschnitt.

Aufgaben ersten und zweiten Grades.

§ 28. Hilfssätze aus der projektiven Geometrie.

Für das Folgende ist die Kenntnis einiger Sätze aus der projektiven Geometrie unentbehrlich. Wir wollen davon das später Nötige hier in der Einleitung zusammenstellen.

1. Doppelverhältnis, harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel, Involution auf einer geraden Linie.

a) Sind A, B, C, D vier Punkte einer Geraden, so nennt man den Ausdruck:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD)$$

das Doppelverhältnis dieser vier Punkte.

Dieses Doppelverhältnis ändert sich bekanntlich nach dem Satze von Pappus beim Projizieren nicht, d. h. projiziert man diese vier Punkte auf eine andere Gerade, so ist das analog gebildete Doppelverhältnis der entstehenden Punkte gleich dem Doppelverhältnis der gegebenen Punkte.

Unter dem Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels versteht man das Doppelverhältnis der vier Punkte, welche von irgend einer Geraden aus dem Büschel herausgeschnitten werden.

Haben vier Punkte das Doppelverhältnis gleich -1, so nennt man sie vier harmonische Punkte.

Vier Strahlen eines Büschels nennt man vier harmonische, wenn sie von irgend einer Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

b) Sind A und A' zwei Punkte einer Geraden, so kann man unendlich viele Punktepaare B, B' derselben Geraden finden, welche mit A, A' zusammen vier harmonische Punkte bilden so, daß A, A' durch B, B' getrennt werden.

Bewegt sich B auf der Geraden, so bewegt sich (bei festgehaltenen A und A') auch der Punkt B'. Fällt insbesondere B in den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA'}$, so kommt der Punkt B' unendlich weit zu liegen.

Sind a und a' die Schenkel eines Winkels und b, b' die Halbierenden des Winkels und seines Nebenwinkels, so bilden diese vier Strahlen ein harmonisches Strahlenbüschel.

c) Es seien wieder die Punkte A und A' gegeben. Die Gesamtheit aller unendlich vielen Punktepaare, welche durch A, A' harmonisch getrennt sind, nennt man eine Involution.

Ist auf derselben Geraden AA' noch ein zweites Punktepaar M, M' gegeben, so bilden die durch M, M' harmonisch getrennten Punktepaare eine zweite Involution auf demselben Träger.

Es läßt sich unschwer beweisen, daß diese beiden Involutionen ein und nur ein Punktepaar gemein haben, welches auch imaginär sein kann.

Sind also A, A' und M, M' zwei Punktepaare auf demselben Träger, so gibt es nur ein einziges Punktepaar X, X', welches sowohl durch A, A' als auch durch M, M' harmonisch getrennt wird.

Es seien ferner a und a' zwei beliebige gerade Linien einer Ebene und S ihr Schnittpunkt; die Punkte B und B' derselben Ebene mögen eine solche Lage haben, daß ihre Verbindungslinien b und b' mit S durch a und a' harmonisch getrennt werden. Man sagt dann: „Die beiden Geraden a, a' sind durch die beiden Punkte harmonisch getrennt.

Sind insbesondere a, a', m, m' vier Strahlen ein und desselben Büschels und g eine beliebige Gerade der Ebene, so gibt es nach obigem auf dieser Geraden ein einziges Punktepaar X, X', durch welches sowohl a, a' als auch m, m' harmonisch getrennt wird.

2. Perspektive Raumanschauung.

a) Durch Projizieren und Schneiden, also durch die zwei Grundoperationen der projektiven Geometrie, wird man zu Annahmen über das Unendlichferne geführt, welche von großem Werte für das Folgende sind und daher auseinandergesetzt werden sollen:

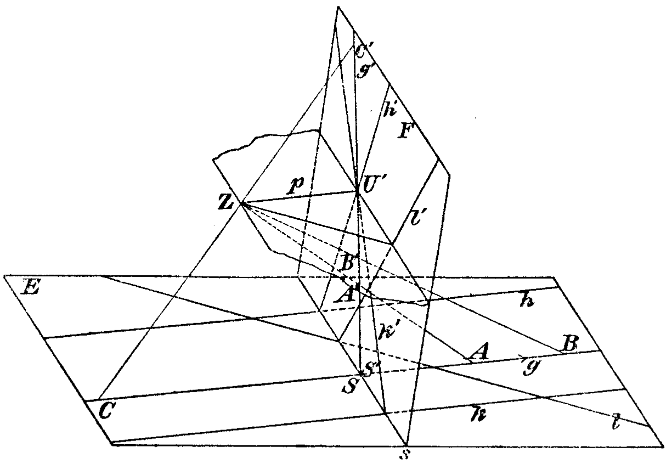

Fig. 123.

E sei eine beliebige Ebene, F eine zweite, s die Schnittlinie der beiden Ebenen und Z ein beliebiger Punkt des Raumes (Fig. 123).

Wir denken uns nun die Punkte und Geraden der Ebene E aus Z auf F projiziert.

Es sei g eine beliebige Gerade in der Ebene E (Fig. 123); man findet ihre Projektion g' auf F, indem man auf g zwei Punkte A und B annimmt und deren Projektionen auf F bestimmt; g' muß sich mit g in einem Punkte S von s schneiden.

b) Läßt man den Punkt B auf g immer weiter hinausrücken im Sinne des Pfeiles, so wird auch der Punkt B' seinen Ort ändern; wenn insbesondere der Punkt B unendlich fern zu liegen kommt, so wird sein Bild B' in jenen Punkt U' der Geraden g' fallen, in welchem die Parallele p zu g die Ebene F trifft (Fig. 123).

Läßt man den Punkt B die Gerade g nochmals durchlaufen, aber in entgegengesetztem Sinne, so wird sich auch sein Bild bewegen und wieder mit U' zusammenfallen, sobald sich der Punkt B unendlich weit entfernt hat.

Das Unendlichferne einer Geraden g bildet sich demnach als ein Punkt U' ab; wir werden daher zu der Annahme geführt, daß die Gerade einen unendlich fernen Punkt hat. Man spricht in diesem Sinne von dem unendlich fernen oder uneigentlichen Punkte der Geraden g.

Das Bild g' der Geraden g können wir auch bestimmen, indem wir durch Z den Parallelstrahl p ziehen, ihn mit F in U' zum Schnitte bringen und U' mit S verbinden; denn U' ist das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden g und S das Bild des Spurpunktes der Geraden g auf der Bildebene F.

Sind nun in der Ebene E mehrere parallele Gerade g, h, k gegeben, so haben sie ein und denselben Parallelstrahl durch Z; ihre Bilder gehen daher durch ein und denselben Punkt.

Wir werden dadurch zu der Annahme geführt, daß parallele Gerade sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden.

c) Man nehme in der Ebene noch eine Gerade l und suche das Bild des unendlich fernen Punktes derselben; man hat zu diesem Zwecke durch Z den Parallelstrahl zu l zu ziehen und mit F zum Schnitte zu bringen (Fig. 123).

Ändert sich l, so ändert sich auch der Parallelstrahl durch Z, liegt aber immer in jener Ebene, welche man durch Z parallel zu E legen kann.

Die Bilder der unendlich fernen Punkte aller Geraden der Ebene werden daher in einer ganz bestimmten Geraden u von F liegen; diese Gerade wird erhalten, wenn man durch Z eine Ebene parallel zu E legt und dieselbe mit F zum Schnitte bringt.

Alles unendlich Ferne der Ebene bildet sich also als gerade Linie ab.

Bildet sich irgend eine im Endlichen gelegene Figur als gerade Linie ab, so muß sie selbst eine Gerade sein. Wir werden daher zur Annahme geführt:

„Die Ebene E hat eine unendlich ferne oder uneigentliche Gerade."

Durch analoge Betrachtungen im Raume kommt man dazu, zu sagen: „Parallele Ebenen haben eine unendlich ferne Gerade; alles unendlich Ferne im Raume liegt in einer Ebene."

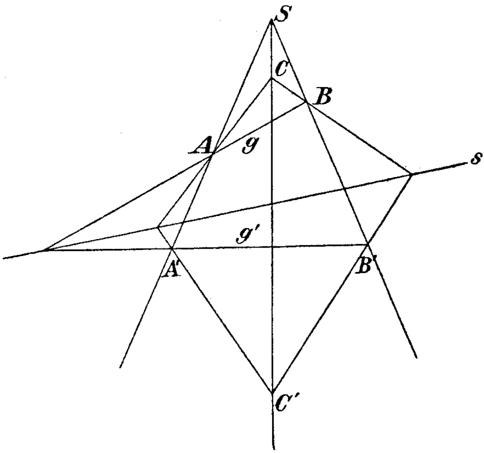

Fig. 124.

3. Zentralkollineation in der Ebene oder Homologie*).

In einer Ebene seien gegeben: Der Punkt S, die Gerade s, die auch durch S gehen kann, und zwei Punkte A, A' auf ein und demselben Strahle aus S (Fig. 124).

Ist B ein beliebiger weiterer Punkt der Ebene, so wollen wir ihn mit A durch die Gerade g verbinden, die so erhaltene Gerade mit s zum Schnitte bringen, diesen Schnittpunkt mit A' verbinden und die dadurch erhaltene Gerade g' mit der Geraden SB in B' schneiden (Fig. 124).

*) F. Enriques, „Vorlesungen über projektive Geometrie". Deutsch herausgegeben von Dr. Hermann Fleischer, Leipzig 1903.

Zwei so erhaltene Punkte B, B' wollen wir entsprechende Punkte nennen.

Ist nun ein dritter Punkt C gegeben, so kann man seinen entsprechenden Punkt C' entweder mit Hilfe des Punktepaares AA' oder mit Hilfe des Punktepaares BB' bestimmen.

Beide Male gelangt man zufolge des Satzes über perspektiv liegende Dreiecke (S. 61) zu demselben Punkte C'; sind D, E, F, ... weitere Punkte der Ebene, so erhält man ihre entsprechenden aus irgend einem Paare entsprechender Punkte.

Zwei gerade Linien wie gg', hh' oder kk' der Fig. 124 heißen einander entsprechend.

Irgend zwei entsprechende Punkte liegen also auf einer Geraden durch S und irgend zwei entsprechende Gerade schneiden sich in einem Punkte von s. Jeder Punkt von s entspricht sich selbst; jede Gerade aus S entspricht sich auch selbst. Der Punkt S fällt mit seinem entsprechenden Punkte zusammen; ebenso fällt die Gerade s mit ihrer entsprechenden zusammen.

Beschreibt ein Punkt P eine Gerade g, so beschreibt der Punkt P' die entsprechende Gerade g'; dreht sich die Gerade g um einen Punkt Q, so dreht sich die entsprechende Gerade g' um den entsprechenden Punkt Q'.

Man nennt die Beziehung, die zwischen den Punkten und Geraden der Ebene auf diese Weise hergestellt ist, eine zentrale Kollineation oder Homologie; sie kommt bekanntlich in der darstellenden Geometrie und bei geometrischen Aufgaben sehr häufig vor.

S nennt man das Kollineationszentrum, s die Kollineationsachse.

Die angenommenen Elemente S, s und A, A' können verschiedene Lagen zueinander annehmen; es entstehen dadurch spezielle Fälle der Homologie.

Die für uns später wichtigen wollen wir hier erwähnen.

a) Die Kollineationsachse s möge im Endlichen liegen (Fig. 125); die Verbindungslinie AA' soll auf s senkrecht stehen und von s halbiert werden; außerdem soll das Kollineationszentrum S, welches auf der Linie AA' liegen muß, unendlich fern angenommen werden.

Zwei entsprechende Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Fig. 125) sind dann **kongruent, aber invers gelegen;**

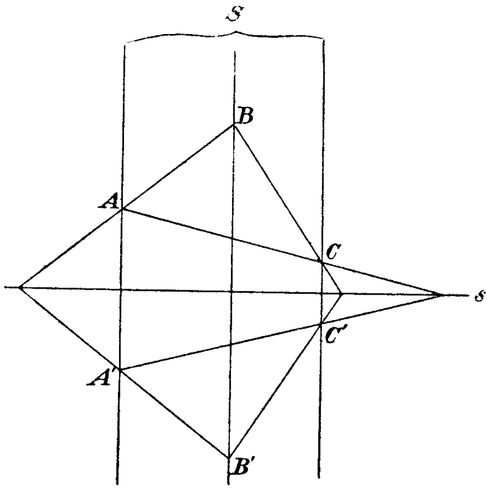

Fig. 125.

die eine Figur wird mit der anderen durch Umklappung der ersten Figur um die Kollineationsachse zur Deckung gebracht.

Die beiden Figuren sind symmetrisch gelegen in bezug auf die Kollineationsachse s; diese Symmetrie ist also ein spezieller Fall der Homologie.

Durch Projektion zweier axial symmetrisch liegender Figuren auf eine neue Ebene erhält man den allgemeinen Fall der Homologie.

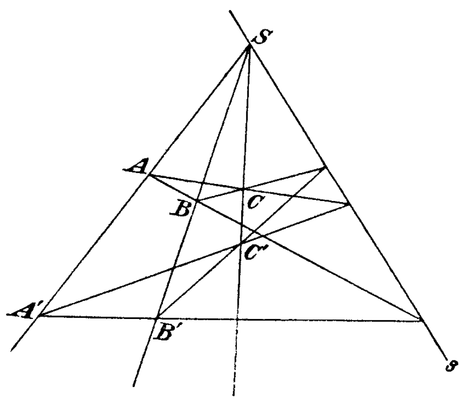

Fig. 126.

b) **Die Kollineationsachse möge durch S gehend angenommen werden.**

Die Konstruktion entsprechender Punkte und Geraden erfolgt dann wie im allgemeinen Fall (Fig. 126).

c) Nehmen wir S und s unendlich fern an, ist also die Kollineationsachse die unendlich ferne Gerade unserer Ebene und S ein Punkt derselben, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel, und außerdem sind entsprechende Gerade parallel (Fig. 127).

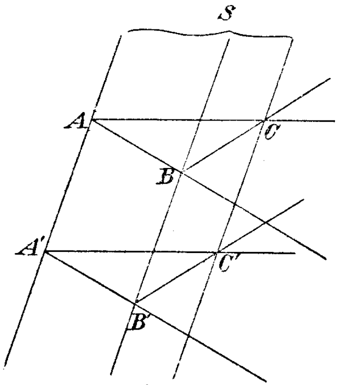

Fig. 127.

Zwei entsprechende Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent und können durch Parallelverschiebung miteinander zur Deckung gebracht werden.

Die Parallelverschiebung ist daher auch ein spezieller Fall der Homologie und geht durch Projektion in den allgemeinen Fall über.

4. Imaginäre Kreispunkte, absolute Involution.

a) Es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben.

Dann läßt sich die Gleichung jedes Kreises der Ebene in der Form schreiben:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0\,,$$

wobei a, b, c für jeden gegebenen Kreis gegebene Zahlen sind. Wir wollen die Schnittpunkte J_1, J_2 dieses Kreises mit der unendlich fernen Geraden bestimmen. Zu diesem Zwecke setzen wir $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$ und erhalten die Kreisgleichung in homogenen Koordinaten*)

$$x'^2 + y'^2 + a\,x'\,t + b\,y'\,t + c\,t^2 = 0\,.$$

Für unendlich ferne Punkte muß $t = 0$ sein, daher:

$$x'^2 + y'^2 = 0\,,$$

*) M. Simon, „Analytische Geometrie der Ebene". S. S. VIII.

also

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = \pm i ,$$

d. h. die Linien OJ_1, OJ_2 schließen mit der X-Achse Winkel ein, deren Tangenten $+i$ und $-i$, also unabhängig von a, b, c sind.

Demnach schneiden alle Kreise der Ebene die unendlich ferne Gerade in zwei ganz bestimmten Punkten J_1, J_2 den imaginären Kreispunkten.

Ein Kreis kann daher als ein Kegelschnitt betrachtet werden, welcher durch die imaginären Kreispunkte der Ebene geht. Deshalb ist auch ein Kreis schon durch drei Punkte bestimmt.

b) Von den vielen Beziehungen, die sich für die imaginären Kreispunkte aufstellen lassen, wollen wir nur jene angeben, die wir später brauchen werden.

Zuerst soll folgender wichtiger Satz bewiesen werden:

„Sind a und b zwei aufeinander senkrechte Gerade, so werden sie durch die imaginären Kreispunkte harmonisch getrennt, umgekehrt stehen zwei Gerade aufeinander senkrecht, wenn sie durch die beiden Kreispunkte harmonisch getrennt werden.“

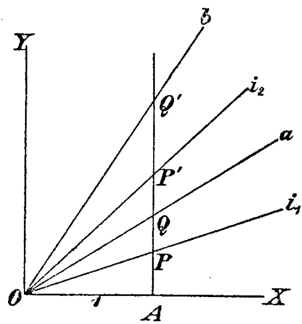

Fig. 128.

Beweis: Es sei (Fig. 128) XOY ein rechtwinkliges Koordinatensystem, a, b zwei beliebige Gerade und i_1, i_2, jene Geraden, welche O mit den imaginären Kreispunkten verbinden. Die Gleichungen der beiden imaginären Geraden i_1, i_2 sind nach a:

$$i_1 \ldots y = i x$$

$$i_2 \ldots y = -i x .$$

Die Gleichungen der beiden Geraden a, b durch O seien:

$$a \ldots y = m x$$
$$b \ldots y = n x .$$

Nun nehmen wir den Punkt A in der Entfernung 1 auf der X-Achse an, ziehen durch A die Parallele zur Y-Achse und bringen sie mit den vier Geraden i_1, i_2, a, b zum Schnitte.

Das Doppelverhältnis der vier Strahlen ist dann gleich dem Doppelverhältnisse der Schnittpunkte, also:

$$(i_1 \, i_2 \, a \, b) = (P P' Q Q') = \frac{PQ}{P'Q} : \frac{PQ'}{P'Q'} .$$

Nun ist:

$$AP = +i$$
$$AP' = -i$$
$$AQ = m$$
$$AQ' = n ,$$

daher:

$$(P P' Q Q') = \frac{-i + m}{+i + m} : \frac{-i + n}{+i + n} .$$

Wenn die beiden Geraden a, b aufeinander senkrecht stehen, so besteht bekanntlich die Gleichung:

$$n = -\frac{1}{m} ;$$

es ist dann

$$(P P' Q Q') = \frac{-i + m}{+i + m} : \frac{-i - \frac{1}{m}}{+i - \frac{1}{m}} ,$$

woraus folgt:

$$(P P' Q Q') = -1 ,$$

womit die erste Aussage des Satzes bewiesen ist.

Ist nun umgekehrt:

$$(P P' Q Q') = -1 ,$$

also

$$\frac{-i + m}{i + m} = \frac{+i - n}{+i + n} ,$$

so folgt daraus

$$n = -\frac{1}{m},$$

womit der Satz bewiesen ist.

c) Wir wollen noch eine sehr wichtige Formel ableiten, welche die projektive Darstellung des Winkels gestattet: die Laguerresche Formel.

Wir bilden wieder das Doppelverhältnis der vier Strahlen i_1, i_2, a, b, wobei i_1, i_2 jene Linien sind, welche O mit den imaginären Kreispunkten verbinden und die Geraden a, b zwei beliebige Strahlen durch O bedeuten (Fig. 128).

Dann ist

$$(i_1 i_2 ab) = (PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i+n}{+i+n}.$$

Es ist nun $m = \operatorname{tg}\alpha$ und $n = \operatorname{tg}\beta$, daher

$$(PP'QQ') = \frac{-i\cos\alpha + \sin\alpha}{+i\cos\alpha + \sin\alpha} : \frac{-i\cos\beta + \sin\beta}{+i\cos\beta + \sin\beta}$$

$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} : \frac{\cos\beta + i\sin\beta}{\cos\beta - i\sin\beta}.$$

Nun ist bekanntlich (Eulersche Formel):

$$\cos z + i\sin z = e^{iz};$$

setzen wir für z die entsprechenden Werte ein, so erhalten wir:

$$(PP'QQ') = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} : \frac{e^{i\beta}}{e^{-i\beta}}$$

$$= e^{2i\alpha} : e^{2i\beta}$$

$$= e^{2i(\alpha-\beta)},$$

daraus folgt

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2i} lDV,$$

wobei DV das Doppelverhältnis der vier Strahlen i_1, i_2, a, b, also das Doppelverhältnis der Schenkel des Winkels mit den durch seinen Scheitel gehenden Minimalgeraden (isotrope Geraden) ist.

Zwei Winkel sind demnach gleich, wenn das Doppelverhältnis, welches die Schenkel des ersten Winkels mit den imaginären Kreispunkten bilden, dasselbe ist, wie das Doppelverhältnis, welches die Schenkel des zweiten Winkels mit den imaginären Kreispunkten bilden.

5. Visuelle und metrische Eigenschaften der geometrischen Figuren*).

a) Die Eigenschaften einer Figur können in zwei verschiedene Kategorien gehören:

α) Sie können visuelle Eigenschaften sein (Eigenschaften der Lage, graphische Eigenschaften, deskriptive Eigenschaften); dieselben beziehen sich nur auf die Begriffe Punkt, Gerade, Kegelschnitt usw. und geben nur Aussagen über Lagenbeziehungen dieser Elemente.

Schneiden sich z. B. drei Gerade in einem Punkte, liegen in der Figur mehrere Punkte auf einer Geraden, berührt eine Gerade einen Kegelschnitt der Figur, oder entsprechen zwei Figuren einander in einer Homologie, so sind dies visuelle Eigenschaften.

β) Sie können metrische Eigenschaften sein und beziehen sich dann auf die Begriffe Länge einer Strecke, Größe eines Winkels.

Eine metrische Eigenschaft der Figur ist es, wenn in ihr z. B. zwei gleiche Strecken oder Winkel, rechte Winkel, Winkel von 60^0 vorkommen, oder wenn ein Kegelschnitt derselben ein Kreis ist usw.

γ) Man kann auch von projektiven Eigenschaften einer Figur sprechen.

Man nennt eine Eigenschaft einer Figur projektiv, wenn sie sich bei beliebigem Projizieren auf eine andere Ebene nicht ändert, d. h. in eine wörtlich gleichlautende Eigenschaft der transformierten Figur übergeht.

Jede visuelle Eigenschaft ist auch projektiv, d. h. sie bleibt beim Projizieren erhalten; aber nicht jede projektive Eigenschaft ist eine visuelle.

Haben z. B. vier Punkte einer Geraden das Doppelverhältnis zwei, so bleibt diese Eigenschaft beim Pro-

*) F. Enriques, „Vorlesungen über projektive Geometrie". Leipzig 1903.

jizieren erhalten; denn die vier Punkte gehen wieder in vier Punkte mit demselben Doppelverhältnisse über (S. 145).

Diese Eigenschaft ist also eine projektive; aber sie ist keine visuelle, da der Wert eines Doppelverhältnisses nur durch Messen (Vergleichen zweier Strecken) bestimmt werden kann.

Haben dagegen z. B. zwei Strahlenbüschel $abcd$ und $a'b'c'd'$ dasselbe Doppelverhältnis, so ist diese Eigenschaft eine visuelle, denn es läßt sich dann bekanntlich ein drittes Strahlenbüschel konstruieren, welches zu beiden perspektiv liegt.

Um sagen zu können, daß zwei Strahlenbüschel dasselbe Doppelverhältnis haben, braucht man nämlich nicht das Doppelverhältnis von jedem der Strahlenbüschel zu bestimmen, sondern nur nachzusehen, ob sich zu beiden ein perspektives Strahlenbüschel konstruieren läßt.

b) Sind zwei Winkel einer Figur einander gleich, so ist dies eine metrische Eigenschaft der beiden Figuren.

Wir haben aber oben gesehen, daß jeder von zwei gleichen Winkeln mit den imaginären Kreispunkten der Ebene dasselbe Doppelverhältnis bildet.

Die Aussage, daß zwei Doppelverhältnisse einer Figur gleich sind, ist aber eine visuelle Eigenschaft der Figur.

Wir können demnach obige metrische Eigenschaft auch als visuelle Eigenschaft betrachten, wenn wir die beiden imaginären Kreispunkte hinzufügen.

Andere Beispiele lassen sich leicht geben:

Ist M z. B. der Mittelpunkt der Strecke AB, so ist diese Aussage eine metrische Eigenschaft. Nun ist M von dem unendlich fernen Punkte der Geraden AB durch die Punkte A, B harmonisch getrennt; wenn daher dieser unendlich ferne Punkt gegeben ist, so gibt die bestehende Beziehung eine visuelle Eigenschaft an.

Die Halbierende eines Winkels (a, b) und seines Nebenwinkels stehen, um ein anderes Beispiel zu geben, aufeinander senkrecht; sie sind also jene Geraden des Büschels a, b, welche von a, b und von den imaginären Kreispunkten harmonisch getrennt werden, und sind demnach durch visuelle Eigenschaften, Lagenbeziehungen, bestimmt, wenn die imaginären Kreispunkte gegeben sind.

7. Wir wollen nun allgemein zeigen, daß man durch Hinzufügung der unendlich fernen Geraden und der imaginären Kreispunkte, welche man zusammen auch das Absolute der Zeichenebene nennt, jede metrische Eigenschaft der Figur als eine visuelle darstellen kann:

a) Alle metrischen Eigenschaften der Figur führen auf zwei Begriffe zurück, auf den Begriff der Gleichheit zweier Strecken und auf den Begriff der Gleichheit zweier Winkel.

Um den obigen Satz zu beweisen, werden wir also nur gezwungen sein, die Gleichheit zweier Strecken als visuelle Eigenschaft hinzustellen, nachdem wir schon (S. 159) die Gleichheit zweier Winkel als visuelle Eigenschaft der Figur definiert haben, wenn das Absolute der Ebene gegeben ist.

b) Sind nun $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ zwei gleiche Strecken (Fig. 129), so kann man die Strecke $\overline{AB}$ mit der zweiten Strecke zur Deckung bringen, indem man $\overline{AB}$ zuerst parallel verschiebt und ferner die so erhaltene Strecke an der Winkelhalbierenden f (Fig. 129) spiegelt.

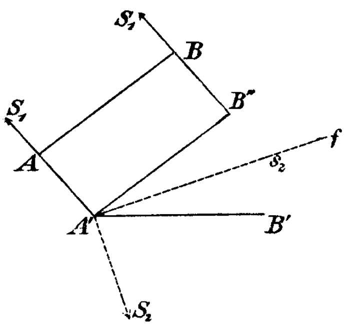

Fig. 129.

Die Parallelverschiebung ist aber ein spezieller Fall der Homologie; die Achse s_1 der Homologie ist dabei die unendlich ferne Gerade der Ebene und das Zentrum S_1 der unendlich ferne Punkt der Geraden AA' (§ 28).

Die Spiegelung ist ebenfalls ein spezieller Fall der Homologie; die Kollineationsachse s_2 fällt dabei auf die Winkelhalbierende f, und das Kollineationszentrum S_2 in die dazu senkrechte Richtung von g.

Ist nun das Absolute der Ebene gegeben, so ist damit s_1, S_1 gegeben, und s_2, S_2 kann ohne Zuhilfenahme des Maßes durch Aufsuchen derjenigen Geraden f, g bestimmt werden, welche von $A'B'$ und $A'B''$ einerseits und von den imaginären Kreispunkten andererseits harmonisch getrennt sind.

Fügt man demnach das Absolute der Ebene hinzu, so kann man auch die Gleichheit zweier Strecken als eine visuelle Eigenschaft betrachten.

8. Es soll die Darstellung metrischer Eigenschaften durch visuelle noch an einigen Beispielen erläutert werden:

a) Stehen zwei Gerade aufeinander senkrecht, so kann man diese metrische Eigenschaft visuell ausdrücken, indem man sagt: „Die beiden Geraden sind durch die imaginären Kreispunkte harmonisch getrennt."

b) Wenn ein gegebenes Viereck ein Parallelogramm ist, so kann man unter Zuhilfenahme der unendlich fernen Geraden auch sagen: „Die Gegenseiten schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden." Diese Aussage ist dann eine visuelle.

c) Ist eine Figur ein Quadrat, so kann man diese Eigenschaft unter Zuhilfenahme des Absoluten der Ebene visuell ausdrücken, indem man sagt: „Die Gegenseiten schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden in Punkten, welche durch die imaginären Kreispunkte harmonisch getrennt sind; die Diagonalen sind auch durch die imaginären Kreispunkte harmonisch getrennt."

d) Ein Dreieck ist ein gleichseitiges, wenn je zwei Paare seiner Seiten mit den imaginären Kreispunkten gleiche Doppelverhältnisse bilden.

e) Die Summe der Winkel in einem Dreiecke beträgt 180^0; wie kann man diesen Satz als eine visuelle Eigenschaft des Dreieckes ausdrücken?

f) Ein Winkel einer Figur betrage 60^0; wie kann man dies als visuelle Eigenschaft ausdrücken?

§ 29. Klassifikation der geometrischen Konstruktionsaufgaben.

Die geometrischen Konstruktionsaufgaben können von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet und darnach in Klassen gebracht werden:

a) Einmal kann man sie nach obigem in visuelle und in metrische Konstruktionsaufgaben einteilen.

Jede geometrische Konstruktionsaufgabe verlangt nämlich die Zeichnung einer Figur, welche gegebene Eigenschaften besitzen soll.

Sind diese Eigenschaften sämtlich visuell, so nennt man die Aufgabe eine visuelle Konstruktionsaufgabe.

Sind jedoch die zu erfüllenden Eigenschaften auch nur zum Teile metrisch, so heißt die Aufgabe eine metrische.

Die visuellen Aufgaben ändern ihren Wortlaut nicht, wenn sie aus irgend einem Zentrum auf eine zweite Ebene projiziert werden, d. h. projiziert man die gegebenen Elemente, so erfordert das Aufsuchen der Projektion des Resultates wortgetreu dieselben Operationen in der zweiten Ebene, welche nötig sind, um in der ersten Ebene zu den gegebenen Elementen die gesuchten zu finden.

Visuelle Aufgaben müssen daher immer lösbar sein durch bloßes Projizieren und Schneiden von Geraden, Kegelschnitten usw. untereinander.

Eine metrische Aufgabe erfordert zu ihrer Lösung außer dem Ziehen von geraden Linien das Vergleichen und Übertragen von Strecken und Winkeln, das Schlagen von Kreisbogen oder das Verzeichnen von höheren Kurven.

Wir wissen, daß jede metrische Eigenschaft einer Figur immer als visuelle Eigenschaft betrachtet werden kann, wenn man der Figur noch das Absolute der Ebene hinzufügt.

Man kann daher auch sagen: „Jede metrische Aufgabe kann durch Hinzufügen des Absoluten der Ebene in eine visuelle Aufgabe verwandelt werden.

Wir nennen eine Aufgabe projektiv, wenn sie ihren Wortlaut durch Projektion nicht ändert.

Die Aufgabe: „Zu drei Strahlen eines Büschels den vierten zu suchen, welcher mit den drei Strahlen das

Doppelverhältnis zwei bildet," ist z. B. eine projektive Aufgabe; aber sie ist keine visuelle Aufgabe, da in ihr von einem Maße die Rede ist.

b) Ein anderes wichtiges Einteilungsprinzip der geometrischen Konstruktionsaufgaben ergibt sich, wenn man die Aufgaben auf rechnerischem Wege löst.

Die Aufgaben werden dann nach der Art der dazu notwendigen Rechenoperationen und nach dem Grade der Gleichungen, auf welche die Lösung führt, eingeteilt.

Zunächst teilt man sie in algebraische und in transzendente ein, je nachdem ihre Lösung von algebraischen oder transzendenten Gleichungen abhängt.

So ist z. B. die Quadratur des Zirkels eine transzendente Konstruktionsaufgabe.

Die algebraischen Konstruktionsaufgaben teilt man weiter in solche ersten, zweiten, dritten, vierten Grades, entsprechend dem höchsten Grade der bei ihrer Lösung vorkommenden Gleichungen.

c) Man kann die geometrischen Konstruktionsaufgaben auch einteilen nach der Art der Kurven, welche man zu ihrer Lösung verzeichnen muß oder nach der Beschaffenheit des Instrumentes, welches man zum Zeichnen der Kurve und damit zur Lösung der Aufgabe verwendet.

So kann man, wie wir wissen, von geometrischen Konstruktionsaufgaben sprechen, die durch bloßes Ziehen von geraden Linien (S. 74) oder durch bloßes Schlagen von Kreisbogen (S. 92 f.) gelöst werden können.

Man kann von Aufgaben sprechen, welche z. B. durch bloßes Ziehen von geraden Linien, Kreisen und einer Konchoide lösbar sind.

Man kann auch von einer Geometrie der geraden Linie, des Zirkels, des Ellipsenzirkels usw. reden.

d) Jede geometrische Aufgabe, für welche überhaupt eine Lösung existiert, ist auch konstruktiv lösbar, aber nicht mit jedem Hilfsmittel.

Die Dreiteilung des Winkels z. B. ist mit dem Zirkel und dem Lineal allein nicht streng durchführbar, aber, wie wir bald beweisen werden, mit höheren Hilfsmitteln.

Es gibt daher keine unlösbaren Aufgaben, sondern nur relativ unlösbare Aufgaben*).

Die Griechen ließen als alleinige Zeichenhilfsmittel den Zirkel und das Lineal zu; daher waren viele Aufgaben unlösbar, wie z. B. die berühmten Aufgaben der Dreiteilung des Winkels, Verdopplung des Würfels, Quadratur des Zirkels.

Alle diese Aufgaben sind aber konstruktiv lösbar, auch die Quadratur des Zirkels, welche darauf hinauskommt, eine gerade Linie zu zeichnen, die so lang als der Umfang eines gegebenen Kreises ist. Diese Aufgabe ist aber mittels des Zirkels und des Lineales nicht streng lösbar, auch nicht mit Hilfe des Ellipsenzirkels, sondern erst mit einem Instrumente, welches transzendente Kurven zeichnet, wie z. B. der Integraph von Abdank-Abahanowicz.

---

§ 30. Visuelle Aufgaben ersten und zweiten Grades.

A) Visuelle Aufgaben ersten Grades.

1. Dies sind Konstruktionsaufgaben, welche durch Projektion ihren Wortlaut nicht ändern, kein Messen von Strecken oder Winkeln erfordern und rechnerisch behandelt auf Gleichungen ersten Grades führen.

Aus letzterem Grunde haben sie jedesmal eine Lösung, wenn sie nicht in eine Reihe anderer linearer Aufgaben zerfallen.

Ihre Ausführung erfordert nur die Operationen des Projizierens und Schneidens; sie sind daher durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösbar, denn das Verwenden eines Kegelschnittes würde sicher zwei Lösungen zur Folge haben.

Umgekehrt kann man von jeder geometrischen Konstruktionsaufgabe, die nur eine Lösung hat und visuell ist, also durch Projizieren ihren Wortlaut nicht ändert und kein Messen erfordert, behaupten,

*) F. Enriques a. a. O. S. 268.

daß sie durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösbar ist.

2. Die neuere Geometrie kennt viele visuelle Aufgaben ersten Grades.

Z. B. die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen Punkten; die Vervollständigung zweier projektiver Punktreihen oder Strahlenbüschel, wenn drei Paare entsprechender Elemente gegeben sind; die Vervollständigung projektiver ebener Systeme, wenn vier Paare entsprechender Elemente gegeben sind; die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden, welche durch einen schon bekannten Punkt eines durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnittes geht; die Bestimmung des vierten Schnittpunktes von zwei Kegelschnitten, wenn man bereits drei Schnittpunkte kennt.

Alle diese Aufgaben sind visuell, haben nur eine Lösung und können daher durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden.

Bemerkt sei, daß aber nicht jede projektive Aufgabe (S. 162), die nur eine Lösung hat, auch durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösbar ist:

Es seien z. B. drei Punkte einer Punktreihe gegeben; man soll einen vierten Punkt der Punktreihe so bestimmen, daß sein Doppelverhältnis mit den drei gegebenen Punkten zwei ist.

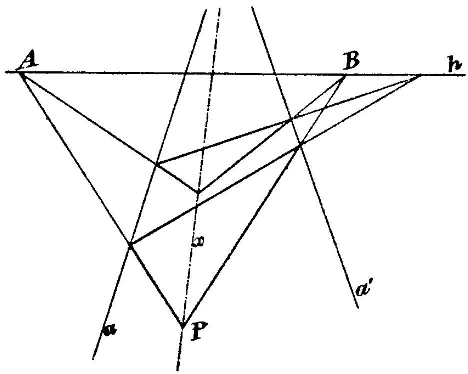

Fig. 130.

Diese Aufgabe ist projektiv, aber nicht visuell; sie ist durch bloßes Ziehen von geraden Linien nicht lösbar, wenn das Absolute der Ebene nicht gegeben ist.

3. Auf die Auflösung der linearen visuellen Aufgaben soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie in die projektive Geometrie gehören. Es sollen nur einige

dieser **Aufgaben** betrachtet und ihre Lösung angedeutet werden.

Dieselbe beruht bei sämtlichen Aufgaben auf dem Satze über perspektiv liegende Dreiecke (S. 61).

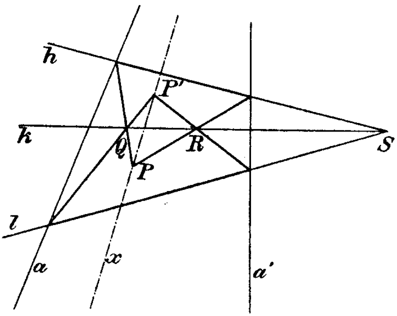

Fig. 131.

194. Gegeben sind zwei gerade Linien und ein Punkt P; es ist durch P und den unzugänglichen Schnittpunkt der beiden geraden Linien eine Gerade x zu ziehen.

Die Lösung geschieht nach Fig. 130 oder Fig. 131. In der ersten Figur sind die Linie h und die Punkte A, B beliebig; in der zweiten Figur sind die Linien h, k, l und der Punkt S beliebig.

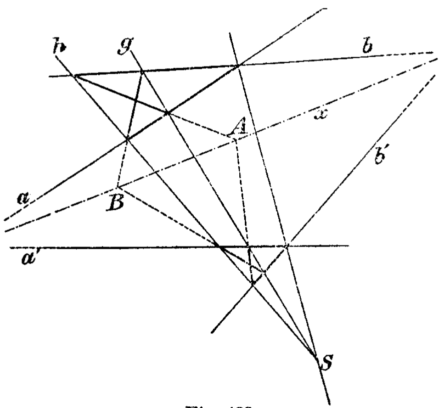

Fig. 132.

195. Gegeben sind zwei Paare von Linien $a a'$, $b b'$ so, daß die Schnittpunkte $a \times a'$, $b \times b'$ außerhalb der Zeichenfläche fallen (Fig. 132); es ist die Verbindungslinie x dieser beiden Punkte zu konstruieren:

Man nehme zu dem Zwecke auf der zweiten Diagonale des Vierseites $a a' b b'$ den Punkt S willkürlich an, ziehe durch ihn die beiden Geraden h, g und betrachte die entstehenden, perspektiv liegenden Dreiecke.

Die Punkte A und B liegen auf der gesuchten Geraden x.

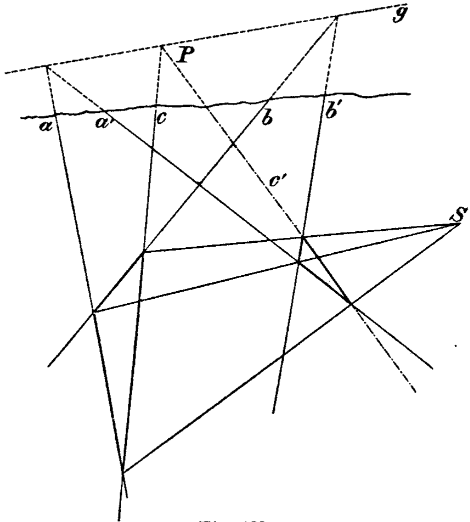

Fig. 133.

196. Gegeben sei eine außerhalb der Zeichenfläche liegende Gerade g durch zwei Paare von Geraden $a\,a'$, $b\,b'$ (Fig. 133), außerdem eine Gerade c, welche die Gerade g in einem außerhalb der Zeichenfläche liegenden Punkte P schneidet; es ist eine zweite Gerade c' zu konstruieren, welche durch P geht. Man verbinde die Punkte $a \times b$ mit $a' \times b'$ (Fig. 133), nehme auf dieser Geraden den Punkt S beliebig an und konstruiere c als Seite eines Dreieckes, welches zu dem Dreiecke $a\,b\,c$ bezüglich S perspektiv liegt.

B) **Visuelle Aufgaben zweiten Grades.**

1. Dieselben sind Aufgaben, welche nur die Herstellung von Lagenbeziehungen der zu konstruierenden Figur fordern, und welche rechnerisch behandelt auf Gleichungen vom ersten und zweiten Grade führen; sie ändern durch Pro-

jektion ihren Wortlaut nicht und verlangen kein Messen von Strecken oder Winkeln.

Da jede Gleichung zweiten Grades zwei Auflösungen hat, so hat jede Aufgabe zweiten Grades, wenn sie sich nicht in mehrere Aufgaben zweiten Grades zerlegen läßt, nur zwei Auflösungen, welche aber auch zusammenfallen oder imaginär sein können.

Man sagt demnach auch: „Die geometrischen Aufgaben zweiten Grades haben zwei, eine oder gar keine Lösung.

Visuelle Aufgaben zweiten Grades sind z. B.: die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einem durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt; das Zeichnen der Tangenten von einem Punkte aus an einen durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt; das Aufsuchen der übrigen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, wenn zwei ihrer gemeinsamen Punkte bekannt sind; die Konstruktion der Doppelpunkte einer durch drei Paare entsprechender Punkte gegebenen Projektivität auf einer Geraden; die Konstruktion der Doppelpunkte einer Involution, welche durch zwei ihrer Punktepaare gegeben ist, oder (anders ausgesprochen) die Bestimmung jenes Punktepaares einer Geraden, welches durch zwei Punktepaare derselben Geraden harmonisch getrennt ist usw.

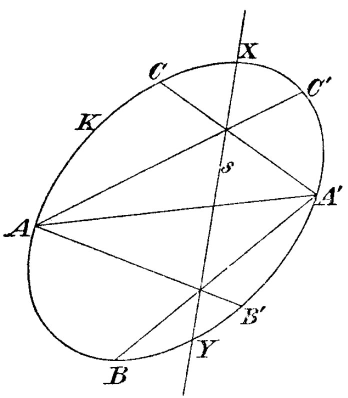

Fig. 134.

2. Sämtliche visuelle quadratische Konstruktionsaufgaben kann man auf folgende Aufgabe zurückführen (wie wir beweisen werden):

Auf dem gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte K (Fig. 134) sei eine Projektivität durch drei Paare entsprechender Punkte AA', BB', CC' gegeben; es sind die Doppelelemente X und Y (die sich selbst entsprechenden Punkte) dieser Projektivität zu bestimmen.

Zur Bestimmung dieser Punkte projiziert man bekanntlich die beiden auf K liegenden Punktreihen aus A resp. A' und erhält dadurch zwei projektive Strahlenbüschel, die perspektiv liegen, weil sie den Strahl AA' entsprechend gemein haben.

Die entsprechenden Strahlen dieser beiden Strahlenbüschel schneiden einander daher in Punkten einer Geraden s, welche auch zur Vervollständigung der beiden Punktreihen mit Vorteil zu benutzen ist.

Man bemerkt, daß die Schnittpunkte von s mit K die gesuchten Doppelpunkte X und Y sind.

Auf die eben gelöste Aufgabe führt man bekanntlich die Bestimmung der Doppelelemente von zwei auf einer Geraden liegenden projektiven Punktreihen zurück, daher auch die Bestimmung der Schnittpunkte einer geraden Linie mit einem durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitt.

Auch die früher erwähnten Aufgaben lassen sich auf diese Aufgabe zurückführen.

3. Jede visuelle quadratische Aufgabe muß sich nämlich durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen lassen, wenn in der Ebene ein fester Kegelschnitt K gezeichnet vorliegt.

Bei der Ausführung jeder visuellen quadratischen Aufgabe kann man ja nur Gerade ziehen, Kegelschnitte bestimmen, die Schnittpunkte von Geraden mit Geraden und Kegelschnitten aufsuchen, die Operationen des Projizierens und Schneidens ausführen.

Nun läßt sich aber die Aufsuchung der Schnittpunkte einer Geraden mit einem durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitte immer auf die Hauptaufgabe in Nr. 2 zurückführen und unter Benutzung des Kegelschnittes K und durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen.

Daher kann man jede quadratische visuelle Aufgabe durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen, wenn in der Ebene ein Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, z. B. auch ein Kreis, von dem man aber den Mittelpunkt nicht zu kennen braucht. (Vgl. S. 88.)

4. **Jede visuelle Aufgabe zweiten Grades läßt sich also schließlich auf die Bestimmung der Doppelpunkte zweier projektiver Punktreihen auf demselben Träger zurückführen.**

Daraus ergibt sich eine sehr allgemeine Methode, derlei Aufgaben zu lösen, die sogenannte „Methode der Versuche".

Wir wollen dieselbe an einem Beispiele erläutern:

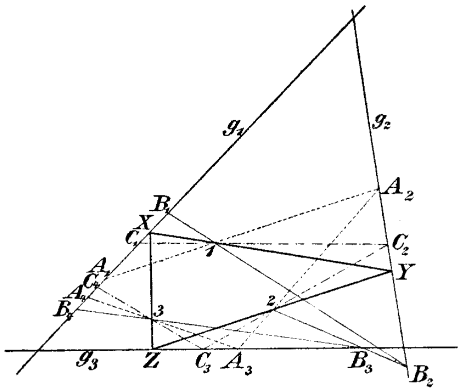

Fig. 135.

Es seien drei gerade Linien g_1, g_2, g_3 und drei Punkte *1*, *2*, *3* gegeben (Fig. 135); es ist ein Dreieck XYZ so zu zeichnen, daß seine Ecken auf g_1 resp. g_2 und g_3 liegen und seine Seiten durch *1* resp. *2* und *3* gehen.

Man nehme auf g_1 den Punkt A_1 beliebig an, projiziere ihn aus *1* auf g_2 in A_2, ferner A_2 aus *2* auf g_3 in A_3 und A_3 aus *3* auf g_1 in A_4.

Durchläuft nun A_1 die Gerade g_1, so beschreibt A_2 eine zu g_1 perspektive Punktreihe auf g_2, A_3 eine zu g_2 perspektive Punktreihe g_3 und A_4 eine zu g_3 perspektive Punktreihe auf g_1.

Die Punktreihen, welche A_1 und A_4 auf g_1 beschreiben, sind demnach projektiv; die gesuchten Punkte X sind die Doppelpunkte dieser Projektivität, denn wenn A_1 mit A_4 zusammenfällt, so folgt daraus eine Lösung der Aufgabe.

Übungsaufgaben.

197. Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und DEF; es ist ein neues Dreieck XYZ zu konstruieren, welches dem Dreiecke ABC eingeschrieben und dem Dreiecke DEF umgeschrieben ist.

198. Gegeben sind ein Kegelschnitt und drei Punkte; es ist dem Kegelschnitte ein Dreieck so einzuschreiben, daß seine Seiten durch die gegebenen Punkte gehen.

199. Gegeben sind ein Kegelschnitt und drei gerade Linien; es ist jenes Dreieck zu konstruieren, welches dem Kegelschnitte umgeschrieben ist und dessen Ecken auf den gegebenen Geraden liegen.

Anmerkung. Mit Hilfe eines gezeichneten Kegelschnittes kann man wohl jede visuelle quadratische Aufgabe durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen, aber keine einzige metrische Aufgabe.

So z. B. ist man unter diesen Voraussetzungen nicht imstande, eine Strecke zu halbieren, Parallele zu ziehen, Normale zu fällen.

---

§ 31. Metrische Aufgaben ersten und zweiten Grades.

1. Es sind dies geometrische Konstruktionsaufgaben, welche bei rechnerischer Behandlung auf Gleichungen ersten, resp. zweiten Grades führen und in welchen auch vom Maße die Rede ist.

Lineare metrische Aufgaben sind z. B. folgende:

„Eine Strecke zu halbieren; zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen; Normale zu fällen“ usw.

Diese Aufgaben haben nur eine Lösung, da sie von einer linearen Gleichung abhängen. Sie sind aber durch bloßes Ziehen von geraden Linien nicht lösbar, solange das Absolute der Ebene nicht gegeben ist.

Metrische Aufgaben zweiten Grades sind z. B. folgende:

„Das Halbieren eines Winkels; das Übertragen einer Strecke; die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise, von dem man Mittelpunkt und Radius kennt“ usw.

Diese Aufgaben haben sämtlich zwei Lösungen, welche auch zusammenfallen oder imaginär werden können, da sie von quadratischen Gleichungen abhängen; sie sind, bei Zugrundelegung eines gezeichneten Kegelschnittes, durch bloßes Ziehen von geraden Linien nicht lösbar, solange das Absolute der Ebene nicht gegeben ist.

2. Man kann aber nach § 28 jede metrische Eigenschaft als eine visuelle betrachten, indem man das Absolute der Ebene in Beziehung zur Figur bringt.

Zwei parallele Linien bestimmen einen unendlich fernen Punkt, zwei Paare paralleler Linien (ein Parallelogramm) bestimmen die unendlich ferne Gerade.

Liegt ein Quadrat gezeichnet vor, so ist dadurch die unendlich ferne Gerade bestimmt, außerdem aber noch die imaginären Kreispunkte gegeben. Dieselben sind nämlich durch je zwei in einer Ecke zusammenstoßende Seiten des Quadrates und auch durch die Diagonalen harmonisch getrennt; sie sind also vollständig bestimmt.

Ein gezeichnet vorliegendes Quadrat bestimmt daher die unendlich ferne Gerade und die imaginären Kreispunkte, also das Absolute der Ebene.

Ist daher ein Quadrat gegeben, so kann man jede lineare metrische Aufgabe als visuelle lineare Aufgabe betrachten und sie durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen (§ 12).

Liegt ein Kreis samt Mittelpunkt gezeichnet vor, so ist dadurch das Absolute der Ebene gegeben; die unendlich ferne Gerade ist nämlich die Polare des Mittelpunktes bezüglich des Kreises, und die imaginären Kreispunkte sind die Schnittpunkte des Kreises mit der so bestimmten unendlich fernen Geraden.

Ein gezeichneter Kreis ohne Mittelpunkt genügt nach § 30, um jede visuelle Aufgabe zweiten Grades durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu lösen; ist außer dem Kreise noch der Mittelpunkt gegeben, so kann man jede metrische Aufgabe zweiten Grades als visuelle betrachten und sie daher durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen, ein Resultat, welches wir schon früher im II. Abschnitte eingehender kennen gelernt haben.

Liegt ein Kegelschnitt und ein Quadrat gezeichnet vor, so kann man jede visuelle und metrische Aufgabe zweiten Grades durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen; dasselbe erreicht man auch mittels eines gezeichneten Kegelschnittes, wenn man von demselben den Mittelpunkt und einen Brennpunkt kennt (§ 13).

Übungsaufgaben.

200. Gegeben sind zwei parallele Linien a, a' und ein Punkt P; man konstruiere die Parallele zu a, a' durch den Punkt P durch bloßes Ziehen von geraden Linien. (Vgl. Fig. 130, 131.) (Der unendlich ferne Punkt wird als ein außerhalb der Zeichenfläche liegender Punkt angesehen.)

201. Gegeben sind zwei Paare paralleler Linien aa', bb', also ein Parallelogramm, außerdem die Gerade c und der Punkt P; man konstruiere durch P die Parallele c' zu c durch bloßes Ziehen von geraden Linien. (Vgl. Fig. 133.) (Die unendlich ferne Gerade wird als eine außerhalb der Zeichenfläche liegende Gerade betrachtet.)

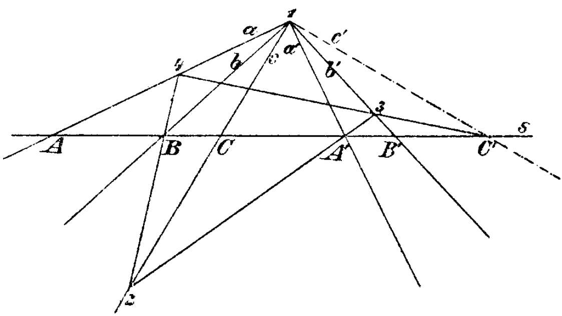

Fig. 136.

202. Nach einem bekannten Satze der projektiven Geometrie schneiden die drei Paare Gegenseiten eines vollständigen Viereckes $1\,2\,3\,4$ jede Gerade s in drei Punktepaaren AA', BB' und CC' einer Involution (Fig. 136). Andererseits ist folgendes bekannt:

„Weist man je zwei aufeinander senkrechte Strahlen aa', bb', cc' eines Strahlenbüschels einander zu, so sind die Strahlen des Büschels involutorisch gepaart.“

Eine Involution ist aber durch zwei ihrer Elementenpaare bestimmt; ist daher a senkrecht auf a', b senkrecht auf b', so kann man nach Fig. 136 den Strahl c' senkrecht auf c linear konstruieren.

(Man nehme die Gerade s und den Punkt 2 auf c beliebig an und konstruiere daraus die Punkte 3, 4.) (Vgl. § 27.)

203. Gegeben ist ein Quadrat, eine Gerade g und außerhalb ein Punkt P; man fälle durch P die Normale auf g durch bloßes Ziehen von geraden Linien. (Vermittels vorhergehender Aufgabe. Vgl. § 12.)

204. Gegeben sind ein Quadrat, drei Punkte A, B, C und eine gerade Linie g, welche durch A geht; man bestimme durch bloßes Ziehen von geraden Linien den zweiten Schnittpunkt der Geraden g mit dem Kreise, welcher durch die Punkte A, B, C geht.

---

§ 32. Graphische Auflösung der Gleichungen zweiten Grades.

Jede geometrische Aufgabe zweiten Grades erfordert, rechnerisch behandelt, die Auflösung von Gleichungen zweiten Grades, deren Koeffizienten aus den bekannten Größen durch rationale Operationen und durch Wurzelziehen entstehen.

Kommt man bei rechnerischer Behandlung einer geometrischen Aufgabe auf eine quadratische Gleichung

$$x^2 + mx + n = 0\,, \tag{1}$$

so muß m eine bekannte Strecke und n das Quadrat einer Strecke sein, oder Zahlen, wenn eine Strecke als Einheit angenommen wurde; x selbst wird als Strecke gefunden, und zwar durch Konstruktion des Ausdruckes:

$$x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}\,. \tag{2}$$

Liegt ein Zirkel oder ein Parallellineal (zwei parallele Linien in konstantem Abstande) als einzig gegebenes Hilfsmittel zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung (1) vor, so gehe man so vor, daß man den gefundenen Wert von x mit diesen Hilfsmitteln allein nach den früher gegebenen Regeln konstruiert.

Wir wollen diese beiden Fälle hier nicht näher erörtern, dafür aber die Auflösung einer quadratischen Gleichung mittels des Steinerschen Kreises und die Auflösung derselben Gleichung mittels des rechten Winkels eingehender behandeln.

1. **Auflösung einer quadratischen Gleichung durch bloßes Ziehen von geraden Linien bei Benutzung eines gezeichneten Kreises.**

Es sei die Gleichung

$$x^2 - p\,x + q = 0 \tag{3}$$

aufzulösen, p und q sollen rationale Zahlen sein. Wir ziehen in dem gegebenen Hilfskreise K mit dem Radius 1 (Fig. 137) einen Durchmesser AB, legen in dessen Endpunkten die Tangenten an K und bestimmen auf denselben die Punkte C und D so, daß $\overline{AC} = \frac{4}{p}$ und $\overline{BD} = \frac{q}{p}$ dem Werte und Vorzeichen nach wird, wobei wir die positive Richtung der beiden Tangenten gemeinschaftlich wählen.

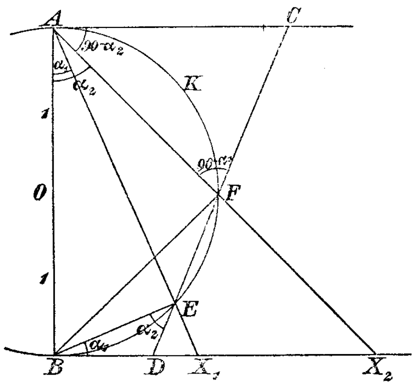

Fig. 137.

Die Linie CD (Fig. 137) schneidet dann den Kreis in zwei Punkten E und F, welche, aus A projiziert, zwei Punkte X_1 und X_2 ergeben; wir werden beweisen, daß $BX_1 = x_1$, $BX_2 = x_2$ die gesuchten Wurzeln der Gleichung (3) sind.

Beweis: Wir nehmen die Wurzeln x_1, x_2, also auch die Punkte X_1, X_2 als gegeben an, und bestimmen daraus die Strecken $\overline{AC}$ resp. $\overline{BD}$ unserer Figur.

Aus derselben folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{x_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{x_2}{2}.$$

In dem Dreiecke AFC sind

$$\sphericalangle A = 90 - \alpha_2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle F = 90 - \alpha_1 ,$$

daher

$$\overline{AC} = \frac{AF \cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Aus dem Dreiecke AFB ergibt sich

$$\overline{AF} = 2\cos\alpha_2 ;$$

demnach ist

$$\overline{AC} = \frac{2\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{2}{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2}$$
$$= \frac{4}{x_1 + x_2}.$$

Analog folgt aus dem Dreiecke BED, in welchem

$$\sphericalangle B = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle E = \alpha_2$$

ist,

$$\overline{BD} = \frac{BE \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$
$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Nun sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - px + q = 0 ;$$

es ist daher

$$x_1 + x_2 = p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q ,$$

also

$$\overline{AC} = \frac{4}{p} \quad \text{und} \quad \overline{BD} = \frac{q}{p},$$

was zu beweisen war.

Bemerkung. Mit Hilfe des Steinerschen Kreises kann man bekanntlich (Abschnitt II) Strecken vervielfachen und teilen durch bloßes Ziehen von geraden Linien.

Sind daher p und q rationale Zahlen, so können die Strecken $\frac{4}{p}$ und $\frac{q}{p}$ durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruiert werden.

Die Wurzeln der Gleichung wurden durch die Strecken $\overline{BX_1}$ und $\overline{BX_2}$ gefunden. Will man ihre Zahlenwerte bestimmen, so muß man das Verhältnis dieser Strecken zum Radius des Kreises suchen.

Dies geschieht, indem man zuerst untersucht, wie oft sich der Radius des Kreises auf BX_1 auftragen läßt, hierauf den Radius des Kreises in zehn gleiche Teile zerlegt und nachsieht, wie oft sich $\frac{1}{10}$ des Radius auftragen läßt, eventuell noch untersucht, wie oft sich $\frac{1}{100}$ des Radius auftragen läßt.

2. **Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit Hilfe des rechten Winkels.**

Die aufzulösende Gleichung sei:

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0\,, \tag{4}$$

wobei a_1, a_2, a_3 ganze Zahlen (und a_1 insbesondere eine positive ganze Zahl) sein sollen.

a) Wir wollen zunächst zwei Fälle unterscheiden:

α) Der Koeffizient a_3 sei positiv, habe also dasselbe Vorzeichen wie a_1.

Man zeichnet dann den rechtwinklig gebrochenen Linienzug $ABCD$ (Fig. 138), dessen Seiten der Reihe nach den Koeffizienten a_1, a_2, a_3 proportional sind und CD entgegengesetzte Richtung zu AB hat.

Zieht man nun die Gerade AE, unter dem beliebigen Winkel ω gegen AB geneigt, und EF normal zu AE, so ist, wenn $\operatorname{tg}\omega = x$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\overline{BE} &= a_1 x\,,\\
\overline{CE} &= a_1 x + a_2\,,\\
\overline{CF} &= (a_1 x + a_2)x\,,\\
\overline{FD} &= a_1 x^2 + a_2 x + a_3\,.
\end{aligned}$$

Fällt F mit D zusammen, so ist

$$\overline{FD} = 0\,,$$

also $\operatorname{tg}\omega$ eine Wurzel der Gleichung.

In der Figur sind $\operatorname{tg}\omega_1$ und $\operatorname{tg}\omega_2$ (negativ genommen) Wurzeln der Gleichung, da die rechtwinkligen Linienzüge AX_1D, AX_2D in D enden.

Einen solchen auflösenden Linienzug findet man nun leicht mit Hilfe eines rechten Winkels:

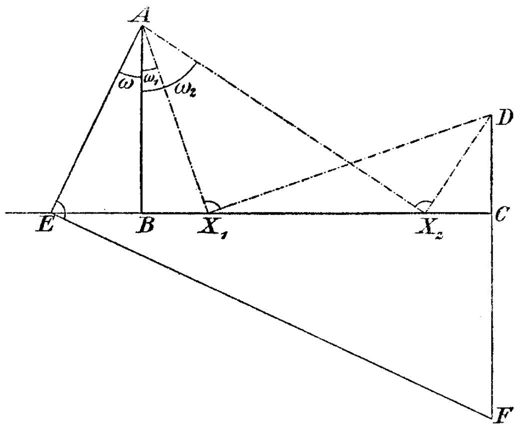

Fig. 138.

Man lege denselben so in die Zeichenfläche, daß seine beiden Schenkel durch A resp. D gehen und sein Scheitel auf der Linie BC (eventuell auf ihrer Verlängerung) zu liegen kommt. Es sind dann die Wurzeln der Gleichung:

$$x_1 = -\frac{BX_1}{AB}, \qquad x_2 = -\frac{BX_2}{AB}.$$

β) Das absolute Glied a_3 der aufzulösenden Gleichung sei negativ, habe also das entgegengesetzte Vorzeichen von a_1.

Man zeichnet dann einen rechtwinklig gebrochenen Linienzug, dessen Seiten gleich a_1 resp. a_2 und a_3 sind, nimmt aber a_1 und a_3 gleich gerichtet an (Fig. 139).

Trägt man nun an AB einen beliebigen Winkel ω auf und zieht FE senkrecht zu AE, so ergibt sich, wenn wieder $\tan\omega = x$ gesetzt wird:

$BE = a_1 x$, $\quad CE = a_1 x + a_2$, $\quad FD = a_1 x^2 + a_1 x + a_3$

(die Zahl a_3 ist negativ).

Die Bestimmung der Wurzeln der Gleichung erfordert das Aufsuchen der auflösenden Linienzüge. Man findet dieselben, indem man das rechtwinklige Dreieck so in die Zeichenfläche legt, daß seine Schenkel durch A resp. D gehen und sein Scheitel auf der unbegrenzten Geraden BC zu liegen kommt.

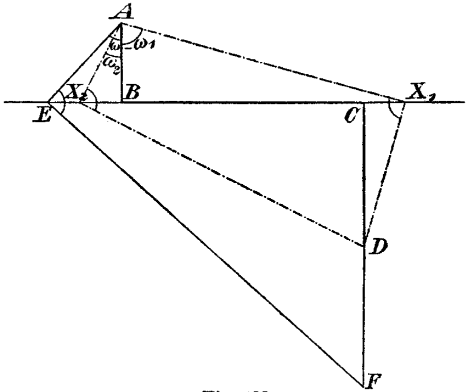

Fig. 139.

b) Beide Fälle α) und β) kann man in eine Regel zusammenfassen:

„Man zeichne einen gebrochenen Linienzug, dessen Seiten gleich den Koeffizienten der aufzulösenden Gleichung sind (eine passende Strecke als Einheit angenommen); die beiden ersten Seiten stehen aufeinander senkrecht, können sonst in beliebiger Lage zueinander angenommen werden; die dritte Seite des Linienzuges muß mit der zu ihr parallelen ersten Seite gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sein, je nachdem die Koeffizienten a_1 und a_3 der aufzulösenden Gleichung ungleiches oder gleiches Vorzeichen haben.

Sind die auflösenden Linienzüge gefunden, so erfordert die Bestimmung des Vorzeichens der gefundenen Werte noch Aufmerksamkeit:

Der Winkel ω muß von AB aus in einem derartigen Sinne als positiv gezählt werden, daß erst der Winkel

$\omega = 270^0$ der positiven Richtung der Geraden BC entspricht, wobei diese positive Richtung durch BC resp. CB gegeben ist, je nachdem a_2 positiv oder negativ ist.

Bemerkung. Wenn man den rechten Winkel als alleiniges Zeichenhilfsmittel benutzt, so kann man bekanntlich Parallele ziehen, Normale fällen, Strecken vervielfachen und teilen (§ 24).

Man kann daher den Linienzug $ABCD$, welcher das Trinom $a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ „repräsentiert", mit diesem Hilfsmittel allein zeichnen, sobald a_1, a_2, a_3 rationale Zahlen sind.

Die auflösenden Linienzüge findet man wieder durch alleinige Benutzung des rechten Winkels. Die ziffernmäßige Bestimmung der Wurzeln kann ebenfalls mit dem rechten Winkel allein geschehen.

VI. Abschnitt.

Unmöglichkeitsbeweise.

§ 33. Einleitung.

1. In den früheren Abschnitten haben wir mehrmals von der Unmöglichkeit gesprochen, eine Konstruktion mit gegebenen Hilfsmitteln auszuführen.

Wir erwähnten z. B., daß zur Lösung quadratischer Konstruktionsaufgaben mit Hilfe eines festen Kreises und der geraden Linie nicht nur dieser Kreis, sondern auch sein Mittelpunkt unumgänglich notwendig ist, und daß es insbesondere unmöglich ist, durch bloßes Ziehen von geraden Linien auch nur eine Strecke zu halbieren, oder eine Parallele zu ziehen, wenn der Mittelpunkt des Steinerschen Kreises nicht gegeben ist.

Wir erwähnten, daß es auch unmöglich sei, den unbekannten Mittelpunkt eines gezeichnet vorliegenden Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu bestimmen.

Wir haben ferner (§ 26) erwähnt, daß sich nicht alle geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken lösen lassen, daß es z. B. unmöglich ist, damit den Ausdruck $\sqrt{a^2 - b^2}$ zu konstruieren, wobei a und b gegebene Strecken sind.

2. Der strenge Beweis aller dieser Aussagen ist eine dringende Forderung des Erkenntnistriebes, denn unsere Erkenntnis ist erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung eines Problemes oder der strenge Be-

weis eines Satzes gelingt oder der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Mißlingens von uns klar erkannt wird*).

Wir werden daher in diesem Abschnitte die Fragen erledigen, welche wir eben erwähnt haben, und dann noch beweisen, daß jede Aufgabe, welche rechnerisch behandelt auf irreduktible Gleichungen dritten Grades führt (wie z. B. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels und die Verdoppelung des Würfels), durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Schlagen von Kreisbogen nicht streng zu lösen ist.

---

§ 34. Über die Unmöglichkeit, durch visuelle Zeichenoperationen das Absolute der Ebene zu bestimmen.

1. Unter einer visuellen Zeichenoperation versteht man das Ziehen von geraden Linien, das Schneiden von Geraden miteinander oder mit anderen gegebenen Figuren, die auch Kurven sein können, z. B. Kegelschnitte usw.; ausgeschlossen ist jede Art des Messens.

Wir setzen dabei auch voraus, daß die gezeichnet vorliegenden Kurven nicht das Absolute der Ebene bestimmen, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein Kreis samt Mittelpunkt vorliegt.

2. Durch Ziehen von geraden Linien, durch Schneiden und Projizieren ist man nicht imstande, die unendlich ferne Gerade und die absolute Involution auf ihr (mit den Kreispunkten als Doppelpunkten) zu bestimmen:

Wäre man nämlich imstande, das Absolute der Ebene oder wenigstens die unendlich ferne Gerade durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu bestimmen, so könnte man die ganze so ausgeführte Zeichnung auf eine zweite Ebene derart projizieren, daß die unendlich ferne Gerade in eine ganz beliebige Gerade g und die absolute Involution J_1, J_2 in eine gegebene (imaginäre Involution) auf g übergeht.

Durch dieselben Operationen, mit deren Hilfe man die unendlich ferne Gerade in der ersten Zeichnung

---

*) Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“ S. 82.

findet, müßte man die ganz beliebige Gerade g finden können; man müßte also imstande sein, durch eine gegebene Operation nicht nur eine bestimmte, sondern eine beliebige Gerade der Ebene zu finden, was unmöglich ist.

3. Die unendlich ferne Gerade hat in der reinen Geometrie der Lage, welche nur von Lagenbeziehungen und nicht von Maßeigenschaft handelt, keine ausgezeichnete Stellung; sie ist eine Gerade wie jede andere, da sie durch Projektion in jede andere Gerade übergeführt werden kann.

Die unendlich ferne Gerade läßt sich durch Projizieren und durch Schneiden ohne jede Maßbenutzung gar nicht definieren, sie läßt sich in keine visuellen Beziehungen zu Figuren bringen, welche kein Maß enthalten.

4. Es ist daher auch unmöglich, eine Strecke durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu halbieren, denn man könnte in diesem Falle die unendlich ferne Gerade durch visuelle Operationen bestimmen, was nach eben Gesagtem nicht möglich ist.

Ebenso ist es unmöglich, den Mittelpunkt eines gezeichnet vorliegenden Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu finden, denn dann würde das Absolute der Ebene gefunden sein durch visuelle Operationen, was nicht sein kann.

5. Liegt ein Kegelschnitt gezeichnet vor, so kann man wohl sämtliche visuelle Aufgaben zweiten Grades durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen (S. 169), aber keine einzige metrische Aufgabe, auch z. B. das Halbieren einer Strecke nicht, denn in diesem Falle würde durch visuelle Operationen das Absolute der Ebene bestimmt sein. Dieses Absolute der Ebene läßt sich aber in keine visuellen Beziehungen zu einem Kegelschnitte, von dem nur der Umriß gegeben ist, bringen.

Kennt man aber außer dem Kreise noch seinen Mittelpunkt oder ein Quadrat, oder kennt man von dem Kegelschnitte den Mittelpunkt und einen Brennpunkt, so ist damit das Absolute der Ebene gegeben und jede Aufgabe ersten und zweiten Grades durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösbar (S. 172).

§ 35. Beweis der Unmöglichkeit, durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken jede Konstruktionsaufgabe zweiten Grades zu lösen*).

1. Das Abtragen der Strecken geschieht in diesem Paragraphen durch Benutzung eines Eichmaßes (einer Strecke von gegebener Länge, welche wir als Einheit annehmen können) (§ 26).

Es wird bewiesen werden, daß man mit diesen beschränkten Hilfsmitteln nicht jede quadratische Aufgabe lösen kann.

Zunächst aber muß die Frage nach jenen Aufgaben, welche sich mit den jetzt vorliegenden Hilfsmitteln lösen lassen, beantwortet werden.

2. Analytische Darstellung der Koordinaten von Punkten, welche durch Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken konstruiert werden können.

a) Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde und beziehen alle gegebenen Punkte durch Koordinaten auf dasselbe.

Sind P_1, P_2 resp. P_3, P_4 zwei beliebige gegebene Punktepaare, so haben die Verbindungslinien dieser Punktepaare die Gleichungen:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \; ,$$

resp.

$$y - y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}(x - x_3) \; .$$

Sucht man die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden, so bemerkt man, daß dieselben aus den Koordinaten der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 nur durch rationale Operationen erhalten werden.

Verbindet man diesen Schnittpunkt mit einem anderen gegebenen Punkte und bringt diese Verbindungslinie mit irgend einer durch die gegebenen Punkte bestimmten Geraden zum Schnitt usw., so bemerkt man, daß die Koordinaten sämtlicher Punkte, welche man durch

*) Hilbert, „Grundlagen der Geometrie". 2. Auflage, S. 76, 77.

dieses Ziehen von geraden Linien aus den gegebenen Punkten erhalten kann, Zahlen sind, die durch rationale Operationen aus den Koordinaten der gegebenen Punkte ableitbar sind.

Auch die Richtungskonstanten, z. B. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dieser Geraden sind aus den Koordinaten der gegebenen Punkte auf dieselbe Weise herstellbar.

Zieht man daher durch einen der gegebenen Punkte oder durch einen der bereits konstruierten Punkte eine Parallele zu einer bereits gezeichneten Geraden, bringt dieselbe mit einer anderen bereits gezeichneten Geraden zum Schnitt, so erhält man als Koordinaten der Schnittpunkte immer Zahlen, welche nur durch rationale Operationen aus den Koordinaten der gegebenen Punkte zu erhalten sind.

b) Das Übertragen einer Strecke kann durch Parallelverschieben derselben und durch darauffolgendes Drehen um einen Endpunkt ersetzt werden.

Das Parallelverschieben erfordert die Bestimmung des Schnittpunktes paralleler Linien, also nur rationale Operationen der gegebenen Koordinaten.

c) Wir wollen nun das Drehen einer Strecke näher betrachten.

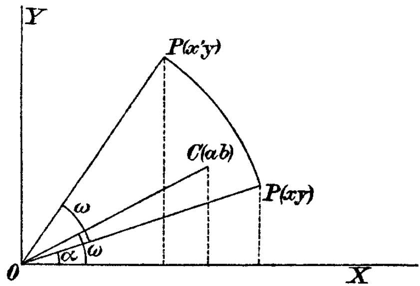

Fig. 140.

Es sei in dem rechtwinkligen Koordinatensysteme XOY (Fig. 140) der Winkel ω durch den Punkt C mit den Koordinaten a, b, außerdem ein Punkt P mit den Koordinaten x, y gegeben.

Dieser Punkt soll nun um O um den Winkel ω gedreht werden; es sind die Koordinaten x', y' des so erhaltenen Punktes P' zu bestimmen:

Es ist

$$x' = r\cos(\alpha + \omega) = r\cos\alpha\cos\omega - r\sin\alpha\sin\omega\,.$$

Da nun

$$\cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

und

$$r\cos\alpha = x\,, \quad r\sin\alpha = y$$

sind, so ist

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y\,.$$

Analog findet man

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y\,;$$

wobei die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Daraus erkennt man, daß die Koordinaten x', y' des gesuchten Punktes P' aus den Koordinaten der gegebenen Punkte C, P durch rationale Operationen und durch Wurzelziehen aus der Summe zweier Quadrate erhalten werden.

d) Sind also M und N zwei Punkte, welche durch Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken konstruiert wurden, so kann man ihre Koordinaten aus den Koordinaten der gegebenen Punkte immer durch rationale Operationen und durch Quadratwurzelziehen aus der Summe zweier Quadrate finden. Für die Entfernung $\overline{MN}$ gilt daher dasselbe.

Wir können folglich den Satz aussprechen:

„Ist eine geometrische Figur mit Hilfe der geraden Linie und des Eichmaßes entworfen worden, so müssen die Koordinaten der gefundenen Punkte solche Funktionen der Koordinaten der gegebenen Punkte sein, deren Herstellung nur rationale Operationen, ferner die Operation des Ziehens der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate und zwar diese fünf Operationen in endlicher Anzahl erfordert.

3. Es soll jetzt bewiesen werden, daß nicht jede geometrische Konstruktionsaufgabe mit unseren beschränkten Hilfsmitteln lösbar ist.

Wir konstruieren zu diesem Zwecke einen gewissen Bereich Ω von algebraischen Zahlen.

Wir gehen von der Zahl 1 aus und wenden auf sie und alle entstehenden Zahlen die vier rationalen Operationen und die fünfte Operation $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$ an, wobei ω jedesmal eine vermöge der fünf Operationen erhaltene Zahl bedeutet. Die Wurzel selbst nehmen wir immer nur positiv.

Dieser Zahlenbereich enthält offenbar die Koordinaten und Entfernungen sämtlicher Punkte, die man aus den zwei Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ eines rechtwinkligen Koordinatensystemes durch Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken erhalten kann.

Er enthält insbesondere die Strecke $\sqrt{2}$, aber nicht die Strecke

$$s = \sqrt{2\left|\sqrt{2}\right| - 2}\,.$$

Unser Bereich enthält nämlich nur reelle Zahlen, da wir ja von einer reellen Zahl ausgehen und eine imaginäre Zahl aus reellen Zahlen durch unsere Operationen gar nicht entstehen kann.

Ist ferner ω irgend eine Zahl des Bereiches, so muß auch die zu ω konjugierte algebraische Zahl dem Zahlenbereich angehören, wie sich aus der Definition des Zahlenbereiches sofort ergibt.

Unser Zahlenbereich Ω enthält daher nur solche Zahlen, welche reell sind und deren konjugierte Zahlen auch reell sind.

Nun ist die zu s konjugierte Zahl

$$s' = \sqrt{-2\left|\sqrt{2}\right| - 2}\,.$$

Dieselbe ist imaginär; demnach ist s' und also auch die Zahl s im Bereiche Ω nicht enthalten.

Wir stellen nun folgende Aufgabe:

Bei einem rechtwinkligen Dreiecke sei die Hypotenuse $c = 1$ und eine Kathete $a = \left|\sqrt{2}\right| - 1$; es ist die zweite Kathete mit unseren beschränkten Hilfsmitteln zu konstruieren.

Die beiden Zahlen a und c sind in dem Bereiche Ω enthalten. Die gesuchte Kathete ist $\sqrt{2\left|\sqrt{2}\right| - 2}$; diese Zahl ist in unserem Bereiche Ω aber nicht enthalten.

Die Aufgabe ist daher mit unseren Hilfsmitteln unlösbar, während sie bei unbeschränktem Gebrauche des Zirkels und Lineals leicht lösbar ist.

---

§ 36. Beweis der Unmöglichkeit, eine geometrische Aufgabe, welche auf eine irreduzible Gleichung dritten Grades führt, durch Ziehen von geraden Linien und Schlagen von Kreisbogen streng zu lösen.

In diesem Paragraphen wird bewiesen werden, daß es unmöglich ist, geometrische Aufgaben, welche rechnerisch behandelt, auf irreduzible Gleichungen dritten Grades führen, mit Zirkel und Lineal streng zu lösen.

Um diesen Beweis führen zu können, muß zunächst an einige wichtige Begriffe der Algebra erinnert werden:

1. Rationalitätsbereich.

Auf die gegebene Zahl a und alle entstehenden Zahlen sollen die rationalen Operationen und nur diese angewendet, also die Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. (Mit Ausnahme der Division durch Null.)

Man erhält auf diesem Wege unbegrenzt viele Zahlen. Die Gesamtheit aller dieser Zahlen, welche auf diese Weise aus der gegebenen Zahl a entstehen, nennt man einen Rationalitätsbereich.

Darunter versteht man also ein Zahlengebiet, (Zahlenkörper), in welchem man die rationalen Rechenoperationen zwischen den Zahlen des Bereiches ausführen kann, ohne auf Zahlen zu kommen, die in dem Körper nicht enthalten sind.

Ist insbesondere a eine rationale Zahl, so erhält man durch obige Operationen alle rationalen Zahlen, also den Körper der Rationalzahlen.

2. Es sei R_1 die Gesamtheit aller rationalen Zahlen und a eine bestimmte rationale Zahl.

Verbindet man alle Zahlen von R_1 mit $\sqrt{a}$ durch rationale Operationen und alle dadurch entstehenden Zahlen wieder durch rationale Operationen, so erhält man einen neuen Rationalitätsbereich R_2, welcher R_1 als Teil enthält.

In R_2 kommt die Zahl $z_1 = m_1 + n_1\sqrt{a}$ vor, wobei m_1 und n_1 rationale Zahlen sind; denn die Zahl z_1 kann durch rationale Operationen aus m_1, n_1 und $\sqrt{a}$ erhalten werden.

Alle Zahlen, welche in dem Bereiche R_2 vorkommen, werden aber auch die Form haben $M + N\sqrt{a}$, wobei M und N bereits dem Bereiche R_1 angehören, also rationale Zahlen sind.

Sämtliche Zahlen von R_2 werden nämlich erhalten, indem man zuerst $\sqrt{a}$ mit den Zahlen von R_1 und hierauf die so erhaltenen Zahlen untereinander rational verbindet.

Es seien nun z_1 und z_2 zwei Zahlen, welche auf die erste Weise entstehen; sie müssen die Form haben:

$$z_1 = m_1 + n\sqrt{a}\,, \quad z_2 = m_2 + n_2\sqrt{a}\,.$$

Addiert oder subtrahiert man z_1 und z_2, so erhält das Resultat die Form $M + N\sqrt{a}$; bildet man das Produkt $z_1 \cdot z_2$, so erhält dieses wieder dieselbe Form. Bildet man endlich den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$, indem man den Nenner rational macht und den so entstehenden Zähler durch den Nenner dividiert, so erhält der Quotient wieder die Form $M + N\sqrt{a}$, wobei M und N Zahlen des Bereiches R_1 sind.

Man kann also sagen: „Fügt man dem Bereiche der rationalen Zahlen eine neue Zahl $\sqrt{a}$ hinzu (adjungiert man $\sqrt{a}$), wobei a eine rationale Zahl sein muß, so erhält man einen neuen Rationalitätsbereich und jede Zahl dieses erweiterten Rationalitätsbereiches läßt sich auf die Form bringen $M + N\sqrt{a}$, wobei M und N rationale Zahlen sind, also dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche angehören, übrigens auch Null sein können.

3. R_1 sei wieder der Bereich der rationalen Zahlen.

Adjungiert man z. B. $\sqrt{3}$, so erhält man einen neuen Bereich R_2, dessen sämtliche Zahlen in der Form

$m + n\sqrt{3}$ geschrieben werden können, wobei m und n rationale Zahlen sind.

Der Bereich R_2 enthält aber nicht die Zahl $\sqrt{5}$; denn für diesen Fall wäre:

$$m + n\sqrt{3} = \sqrt{5},$$

wobei m und n rationale Zahlen sind, was unmöglich ist.

Adjungiert man zu dem Bereiche R_2 die Zahl $\sqrt{5}$, so erhält man einen neuen Bereich R_3. Sämtliche Zahlen dieses neuen Bereiches lassen sich (Nr. 2) auf die Form $k + l\sqrt{5}$ bringen, wobei k und l Zahlen sind, welche dem Bereiche R_2 angehören, also auch $\sqrt{3}$ enthalten können.

4. Wir gehen wieder von dem Bereiche R_1 der rationalen Zahlen aus, adjungieren die Zahl $\sqrt{a_1}$, wobei a_1 rational ist, und erhalten dadurch den Bereich R_2; zu demselben adjungieren wir $\sqrt{a_2}$, wobei a_2, nicht aber $\sqrt{a_2}$ dem Bereiche R_2 angehören soll, und erhalten so den Rationalitätsbereich R_3. Diesem Bereiche adjungieren wir $\sqrt{a_3}$, wobei a_3 schon dem Bereiche R_3 angehören soll usw.

Schließlich erhalten wir durch Adjunktion von $\sqrt{a_{n-1}}$ den Bereich R_n und durch nochmalige Adjunktion von $\sqrt{a_n}$ den Bereich R_{n+1}.

Jede Zahl dieses letzten Bereiches hat dann die Form $p + q\sqrt{a_n}$, wobei p, q, a_n schon dem vorletzten Bereiche angehören.

5. Es sei eine Zahl z gegeben, welche aus anderen gegebenen Zahlen durch rationale Operationen und durch Wurzelziehen ableitbar sei, sonst aber eine ganz beliebige Form habe.

Es sei z. B. $z = \dfrac{\sqrt{a + \sqrt{b} - \sqrt{c}}}{\sqrt{m - \sqrt{n}}}$, wobei a, b, c, m und n rationale Zahlen sein mögen.

Man ist durch sukzessive Adjunktion von Quadratwurzeln imstande, aus dem Bereiche der rationalen Zahlen einen Bereich zu bilden, in dem z enthalten ist:

Adjungieren wir zu dem Bereiche R_1 der rationalen Zahlen die Zahl $\sqrt{b}$, so enthält der neue Bereich R_2 die

Zahl $a+\sqrt{b}$; adjungieren wir nun zu R_2 die Zahl $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ und zu dem so erhaltenen Bereiche R_3 die Zahl $\sqrt{c}$, so erhalten wir den Bereich R_4, in welchem der Zähler von z vorkommt. Adjungieren wir ferner zu R_4 die Zahl $\sqrt{n}$, so ist in diesem Bereiche R_5 auch $m-\sqrt{n}$ enthalten; adjungieren wir endlich zu R_5 die Zahl $\sqrt{m-\sqrt{n}}$, so erhalten wir einen Bereich R_6, in welchem Zähler und Nenner der Zahl z und daher auch die Zahl z selbst vorkommt.

Wir haben also von den rationalen Zahlen ausgehend einen Rationalitätsbereich konstruiert, in welchem die Zahl z enthalten ist.

6. Jetzt sind wir imstande, zu beweisen, daß eine Gleichung dritten Grades, die keine rationalen Wurzeln hat, nicht durch Quadratwurzeln lösbar ist.

A) Gegeben sei die Gleichung:

$$x^3+ax=b\,, \tag{1}$$

wobei a und b rationale Zahlen sein mögen. Diese Gleichung hat bekanntlich drei Wurzeln x_1, x_2, x_3; der Koeffizient von x^2 ist Null, daher muß folgende Gleichung bestehen:

$$x_1+x_2+x_3=0\,. \tag{2}$$

Wir wollen nun annehmen, daß keine dieser Wurzeln rational sei und beweisen, daß dann keine der Wurzeln durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellbar ist.

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, eine der drei Wurzeln, z. B. x_1, sei durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellbar.

Es läßt sich dann nach 5. ein Rationalitätsbereich durch Adjunktion von Quadratwurzeln konstruieren, in welchem x_1 enthalten ist. Ist $\sqrt{l}$ die letzte der dabei zu adjungierenden Quadratwurzeln, so muß:

$$x_1=m+n\sqrt{l}\,, \tag{3}$$

wobei m, n und l nach 5. dem vorletzten Rationalitätsbereiche angehören müssen.

Setzt man diesen Wert von x_1 in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$M + N\sqrt{l} = 0 , \tag{4}$$

dabei sind:

$$M = m^3 + 3mn^2l + am - b , \qquad N = 3m^2n + n^3l + an .$$

M, N, l gehören also dem vorletzten Rationalitätsbereich an, nicht aber $\sqrt{l}$; daher kann $\sqrt{l}$ nicht gleich $-\frac{M}{N}$ sein.

Die Gleichung (3) kann demnach nur bestehen, wenn $M = 0$ und $N = 0$ sind. Ist dies aber der Fall, so genügt der Gleichung (1) auch der Wert

$$x_2 = m - n\sqrt{l} , \tag{5}$$

wie man sich durch Nachrechnen überzeugt.

Aus Gleichung (2) folgt weiter:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2m . \tag{6}$$

Dieses Resultat kann man so aussprechen:

Läßt sich eine Wurzel der Gleichung (1) durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellen, so läßt sich durch Adjunktion von Quadratwurzeln ein Bereich bilden, dem x_1 angehört, demselben Bereiche muß noch eine zweite Wurzel der Gleichung angehören; die dritte Wurzel x_3 gehört dann dem vorletzten Bereiche an.

Da aber x_3 dem vorletzten Bereiche angehört, so folgt durch analogen Schluß, daß x_1 oder x_2 dem vorletzten Bereiche und die übrig bleibende Wurzel dem drittletzten Bereiche angehört usw. Schließlich kommt man so auf den Bereich der rationalen Zahlen.

Man bemerkt also, daß die Annahme, eine der Wurzeln der Gleichung sei durch Quadratwurzeln darstellbar, nicht erlaubt ist, wenn die Gleichung keine rationale Wurzeln haben darf, wie vorausgesetzt wurde.

Damit ist gezeigt, daß die kubische Gleichung (1) nicht durch Quadratwurzeln lösbar ist, falls sie keine rationalen Wurzeln hat.

B) Die allgemeine kubische Gleichung

$$(1) \qquad z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

läßt sich durch die Substitution:

$$(2) \qquad z = x - \frac{A}{3}$$

auf die Form bringen:

$$(3) \qquad x^3 + ax = b\,.$$

Die allgemeine Gleichung dritten Grades läßt sich also ohne Anwendung von Quadratwurzeln auf die reduzierte Form (3) bringen.

Daher haben die allgemeine Gleichung und die daraus erhaltene reduzierte Form entweder beide gleichzeitig rationale Wurzeln oder beide keine rationalen Wurzeln.

Der früher erhaltene Satz kann jetzt also allgemein so ausgesprochen werden: „Eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, welche keine rationalen Wurzeln hat, kann nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln gelöst werden."

C) Es ist noch nötig zu zeigen, wie man erkennt, ob eine Gleichung dritten Grades mit rationalen Koeffizienten rationale Wurzeln hat oder nicht.

Dies geschieht mit Hilfe eines leicht beweisbaren Satzes der Algebra, welcher lautet: „Hat eine Gleichung lauter ganzzahlige Koeffizienten und ist der Koeffizient der höchsten Potenz der Unbekannten $+1$, so muß jede rationale Wurzel dieser Gleichung eine ganze Zahl sein, welche in dem absoluten Gliede ohne Rest enthalten ist."

Beweis: Gegeben sei die Gleichung

$$(1) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0\,,$$

wobei $a_1, a_2 \ldots a_n$ ganze Zahlen sind.

Es sei nun die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ eine Wurzel der Gleichung, wobei p und q als relativ prime ganze Zahlen vorausgesetzt werden können. Dann muß die Gleichung bestehen:

$$(2) \qquad p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0\,.$$

Daraus erhält man durch Division von q

$$(3) \qquad \frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p\, q^{n-2} + a_n q^{n-1} = 0\,.$$

Alle Glieder bis auf das erste sind ganze Zahlen, daher muß auch das erste Glied eine ganze Zahl sein; da aber p und q teilerfremde Zahlen sind, so ist dies nur möglich, wenn $q = 1$.

Jede rationale Wurzel der Gleichung (1) ist also eine ganze Zahl.

Aus Gleichung (2) folgt nun durch Division durch p und unter Berücksichtigung, daß q gleich 1 ist

$$(4) \qquad p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{p} = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß auch das letzte Glied eine ganze Zahl sein muß; p ist daher ein Teiler von a_n.

Daraus ergibt sich: „Liegt eine Gleichung vor, bei welcher der Koeffizient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich 1 ist und deren übrige Koeffizienten ganze Zahlen sind, so ist man unschwer imstande zu entscheiden, ob diese Gleichung rationale Wurzeln hat oder nicht. Man hat zu diesem Zwecke nur sämtliche Teiler des absoluten Gliedes aufzusuchen und nachzusehen, ob sie positiv oder negativ genommen, der Gleichung genügen. Ist dies nicht der Fall, so hat die Gleichung keine rationalen Wurzeln."

D) Es sei z. B. die Gleichung $x^3 - 2 = 0$ gegeben, eine Gleichung, auf welche man bei dem Probleme der Verdoppelung des Würfels kommt.

Die Zahl 2 hat die Teiler 1 und 2; beide befriedigen positiv oder negativ genommen die Gleichung nicht.

Diese Gleichung hat also keine rationalen Wurzeln und ist daher durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar.

Gegeben seien weiter die Gleichungen

$$y^3 + y - 2y - 1 = 0\,,$$

und

$$y^3 - 3y + 1 = 0\,.$$

Beide Gleichungen können nach C) nur die rationalen Wurzeln $+1$ oder -1 haben; da dies aber nicht der

Fall ist, so haben sie überhaupt keine rationalen Wurzeln und sind daher durch Quadratwurzeln nicht lösbar.

7. Jede Aufgabe, die, rechnerisch behandelt, durch Quadratwurzeln unlösbar ist, ist durch Ziehen von geraden Linien und Schlagen von Kreisbogen, also mit Hilfe des Zirkels und Lineals allein unlösbar.

a) Jede mit diesen Hilfsmitteln ausgeführte Figur besteht nämlich aus geraden Linien und aus Kreisen.

Man lege der ganzen Figur ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde. Die rechnerische Bestimmung der Schnittpunkte von Geraden miteinander führt dann auf lineare Gleichungen; die Bestimmung der Schnittpunkte einer geraden Linie mit einem Kreise oder der Schnittpunkte von zwei Kreisen führt auf quadratische Gleichungen.

Bei rechnerischer Behandlung dieser Figur kommt man daher nur auf lineare Gleichungen und auf Gleichungen zweiten Grades. Die Koordinaten sämtlicher Punkte müssen daher aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch rationale Operationen und durch Quadratwurzelziehen ableitbar sein.

b) Ist umgekehrt ein Ausdruck gegeben, der nur rationale Operationen und Quadratwurzeln enthält, so ist er mit Zirkel und Lineal lösbar, indem man die Konstruktion der Addition und Subtraktion von Strecken, der vierten geometrischen Proportionalen, mittleren geometrischen Proportionalen und den Pythagoreischen Lehrsatz wiederholt anwendet.

c) Führt daher eine Aufgabe bei rechnerischer Behandlung auf eine Gleichung dritten Grades, welche nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar ist, so ist es unmöglich, diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu lösen.

---

§ 37. Über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, eine geometrische Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu lösen.

1. Es kommt nicht selten vor, daß eine scheinbar einfache Aufgabe allen Versuchen zu ihrer Lösung mittels Zirkel und Lineal trotzt.

Der Grund kann einmal darin liegen, daß der richtige Weg schwer zu finden ist, er kann aber auch darin liegen, daß diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal überhaupt nicht lösbar ist.

Es ist daher sehr wichtig, einfache Mittel zu haben, um entscheiden zu können, ob eine vorgelegte geometrische Aufgabe zu den lösbaren oder nichtlösbaren gehört (vgl. §29).

Am Schlusse des vorigen Paragraphen haben wir einen Weg kennen gelernt: Man führe die Aufgabe rechnerisch durch; kommt man dabei auf Gleichungen von höchstens zweitem Grade, so ist die Aufgabe lösbar; kommt man dagegen auf irreduzible Gleichungen dritten oder vierten Grades, so ist die Aufgabe mit Zirkel und Lineal unlösbar.

Für Gleichungen dritten Grades haben wir dies nachgewiesen. Bekanntlich gilt dasselbe auch für die Gleichungen vierten Grades, da die Auflösung jeder Gleichung vierten Grades abhängt von der Lösung einer Gleichung dritten Grades (§ 47, 1), ihrer sogenannten Resolvente, und durch Quadratwurzeln lösbar ist oder nicht, je nachdem diese Resolvente durch Quadratwurzeln lösbar ist oder nicht.

Für Gleichungen höheren Grades ist auch folgender Satz der Algebra oft von Vorteil:

„Einer irreduziblen Gleichung von ungeradem Grade genügt sicher nicht ein Ausdruck, der aus Quadratwurzeln aufgebaut ist."

2) Einfachere Hilfsmittel, mit denen man ohne umständliche Rechnung untersuchen kann, ob eine vorgelegte Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist oder nicht, gehen aus folgender Betrachtung hervor:

Kennt man von einem Kegelschnitte fünf Bestimmungsstücke, z. B. fünf Punkte, so kann man seine Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösen (§ 30).

Korrelativ ist die Konstruktion der Tangenten von einem gegebenen Punkte an einen durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitt auch eine quadratische Aufgabe.

In der Algebra werden nun die folgenden Umkehrungen dieser Sätze streng bewiesen:

a) Wenn die Bestimmung der Schnittpunkte einer Kurve mit einer beliebigen Geraden mittels Zirkel und Lineal gelingt, so ist die Kurve ein Kegelschnitt.

b) Die einzige Kurve, an die man von jedem beliebigen Punkte aus die Tangenten mittels Zirkel und Lineal konstruieren kann, ist ein Kegelschnitt.

c) Der Kreis und die gerade Linie sind die einzigen Kurven, deren Schnittpunkte mit einem beliebigen Kreise mittels Zirkel und Lineal gefunden werden können.

Es gibt auch höhere Kurven, für welche man die Schnittpunkte mit bestimmten Geraden oder Kreisen mit Hilfe von Zirkel und Lineal finden kann; so lassen sich z. B. bei der Pascalschen Schnecke (§ 46) die weiteren Schnittpunkte einer durch den Doppelpunkt der Kurve gehenden Geraden mittels Zirkel und Lineal leicht finden. Die Gerade muß aber durch den Doppelpunkt gehen, sie darf also keine beliebige Gerade sein.

Die Schnittpunkte der Pascalschen Schnecke mit einer beliebigen Geraden lassen sich dagegen mit Zirkel und Lineal nicht streng finden.

4. Diese angeführten Sätze wollen wir dazu benutzen, um zu entscheiden, ob die folgende Aufgabe mittels Zirkel und Linear lösbar ist oder nicht:

205. Gegeben seien zwei gerade Linien g_1, g_2, ein beliebiger Punkt P und eine beliebige Strecke s; es ist durch P eine Gerade so zu ziehen, daß auf ihr die Strecke s von den beiden Geraden g_1 und g_2 abgeschnitten wird.

Versuche, diese scheinbar einfache Aufgabe mittels Zirkel und Lineal zu lösen, gelingen nicht, sie können auch nicht gelingen, denn diese Aufgabe ist mittels Zirkel und Lineal überhaupt nicht lösbar.

Um dies zu beweisen, lassen wir zunächst die Gerade g_2 weg, ziehen durch P eine beliebige Gerade und tragen auf derselben von ihrem Schnittpunkte mit g_1 aus die Strecke s auf.

Die so erhaltenen Punkte X werden eine Kurve c erfüllen; die Schnittpunkte dieser Kurve c mit g_2 geben mit P verbunden die gesuchten Geraden.

Die gerade Linie g_2 selbst ist eine ganz beliebige Gerade der Ebene; sollen daher ihre Schnittpunkte mit c mittels Zirkel und Lineal konstruierbar sein, so muß c ein Kegelschnitt sein.

Nun ist aber c kein Kegelschnitt, sondern eine Konchoide, wie man aus der Entstehung dieser Kurve sofort erkennt (§ 45).

Unsere Aufgabe ist also mit Zirkel und Lineal unlösbar.

4. Ganz ähnlich, wie bei der eben behandelten Aufgabe, kann man bei vielen Aufgaben vorgehen, um zu entscheiden, ob dieselben vom zweiten oder von höherem Grade sind:

Man fasse die Aufgabe so, daß bei ihr ein Punkt X zu suchen ist, welcher auf einer gegebenen Geraden g oder auf einem gegebenen Kreise k zu liegen kommt. Nun lasse man g resp. k weg; die Aufgabe wird dann nicht eine Lösung, sondern unzählig viele haben. Für den Punkt X entsteht ein geometrischer Ort.

Soll nun X auf der Geraden g liegen, so muß dieser geometrische Ort entweder eine gerade Linie, ein Kreis oder ein Kegelschnitt sein, falls die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar sein soll.

Soll aber X auf Kreis k fallen, so darf der gefundene geometrische Ort nur eine gerade Linie oder ein Kreis sein, falls die Aufgabe nicht von höherem als zweiten Grade sein soll, vorausgesetzt, daß ganz allgemeine gegenseitige Lagen vorkommen.

5. Manche Aufgaben lassen sich auf das Aufsuchen von Geraden x zurückführen, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen oder einen bestimmten Kreis K oder Kegelschnitt S berühren.

Läßt man P, K oder S weg, so erhält man für x einen geometrischen Ort, und man kann mit Zuhilfenahme der Sätze a), b), c) wieder entscheiden, ob die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist oder nicht.

6. Bemerkung. Aus dem zuletzt Gesagten folgt auch eine allgemeine Methode zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben:

Man führe die Aufgabe auf das Aufsuchen eines Punktes X zurück, welcher auf einer gegebenen Geraden g liegen soll. Nun lasse man g weg und konstruiere den

Ort, welchen dann X erfüllt; derselbe muß ein Kegelschnitt sein, falls die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar sein soll. Seine Schnittpunkte mit g liefern schon die gesuchten Punkte.

206. Gegeben ist ein Kreis K mit dem Mittelpunkte O und zwei Punkte A, B in beliebiger Lage zu O; auf K ist ein Punkt X so zu bestimmen, daß der Winkel AXB von der Tangente des Kreises im Punkte X halbiert wird.

Ist diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar oder nicht? Welche Lagen müssen A und B annehmen, damit die Aufgabe eine quadratische ist? (Vgl. § 6.)

VII. Abschnitt.

Kreisteilung. (Konstruktion regelmäßiger Polygone.)

§ 38. Einleitung.

1. Man kann bekanntlich mit Zirkel und Lineal allein eine Reihe regelmäßiger Polygone zeichnen, oder was dasselbe ist, einen gegebenen Kreis in gleiche Teile zerlegen. Man kann ein regelmäßiges Sechseck, Dreieck, Zwölfeck, Zehneck und Fünfeck konstruieren.

Man kann aber mit Zirkel und Lineal allein nicht ein regelmäßiges Siebeneck oder Neuneck konstruieren, dagegen, wie wir später sehen werden, ein regelmäßiges Siebzehneck.

Fragen dieser Art sollen im folgenden behandelt werden.

2. Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius 1, wie im folgenden immer angenommen werden soll; s_n sei die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes.

Aus den entstehenden gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecken ergibt sich:

$$s_n = 2\sin\frac{\pi}{n}\,.$$

Aus der n-Eckseite kann man die $2n$-Eckseite s_{2n} berechnen, welche gleich $2\sin\frac{\pi}{2n}$ ist. Zu diesem Zwecke geht man von der Formel aus:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n},$$

oder

$$2 - \sqrt{4 - s_n^2} = s_{2n}^2,$$

oder

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Aus der Seckseckseite kann man demnach die Länge der 12-Eck-, 24-Eck-, 48-Eckseite usw. berechnen.

Aus den Seiten der eingeschriebenen Polygone kann man auch die Seiten der umgeschriebenen Polygone bestimmen. Auf diesem Wege hat bekanntlich Archimedes die Zahl π bestimmt.

---

§ 39. Geometrische Darstellung imaginärer Zahlen.

Wir müssen zuerst über die Gaußsche Darstellung imaginärer Zahlen sprechen, da dieselbe mit der Konstruktion der regelmäßigen Polygone in innigem Zusammenhange steht. Wir wollen davon nur soviel entwickeln, als wir für das Folgende brauchen.

1. Gegeben sei die komplexe Zahl $\zeta = a + bi$.

a) Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, tragen a und b ihrem Werte und Vorzeichen nach als Abszisse resp. Ordinate auf (Fig. 141) und erhalten einen Punkt mit den Koordinaten a, b.

Zu jeder Zahl ζ gehört ein einziger Punkt der Ebene und zu jedem Punkt der Ebene gehört eine einzige Zahl $\zeta = a + bi$. Man kann daher den Punkt als das Bild der komplexen Zahl betrachten; die imaginären Zahlen sind damit auf die Ebene abgebildet.

Zwei Punkte der Ebene fallen nur dann aufeinander, wenn ihre beiden Koordinaten gleich sind. Sind demnach zwei komplexe Zahlen $\zeta = a + bi$ und $\zeta' = a' + b'i$ einander gleich, so muß $a' = a$ und $b' = b$ sein.

b) Von dieser Abbildung aus wird man auf eine wichtige Darstellung der komplexen Zahlen geführt:

Man bezeichnet die Strecke $O\zeta$ (Fig. 141) mit r, nimmt dieselbe immer positiv und nennt r den **absoluten Wert** der komplexen Zahl; den Winkel φ (Fig. 142), welcher auch durch die komplexe Zahl gegeben ist, nennt man φ ihre **Phase** (**Amplitude**). Aus der Figur folgt:

$$a = r\cos\omega\,,\quad b = r\sin\omega\,.$$

Man kann daher die Zahl ζ auch in der Form schreiben:

$$\zeta = r(\cos\omega + i\sin\omega)\,.$$

Diese Darstellungsweise ist besonders wichtig wegen des **Moivreschen** Satzes:

$$\zeta^n = r^n(\cos n\,\omega + i\sin n\,\omega)\,.$$

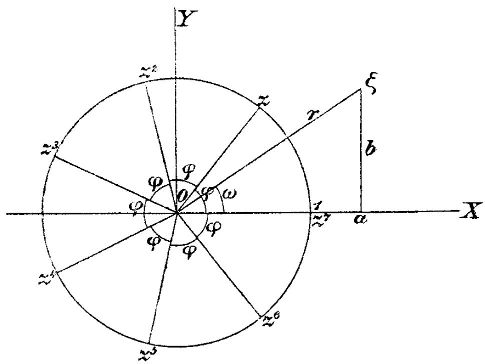

Fig. 141.

Ist n eine ganze Zahl, und nur diesen Fall werden wir im folgenden brauchen, so läßt sich diese Formel leicht beweisen.

2. Wir betrachten im folgenden nur **komplexe Zahlen, deren absoluter Wert gleich 1** ist; z sei eine solche Zahl. Dann ist

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Nach dem **Moivreschen** Satze ist

$$\begin{aligned}
z^2 &= \cos 2\,\varphi + i\sin 2\,\varphi \\
z^3 &= \cos 3\,\varphi + i\sin 3\,\varphi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z^n &= \cos n\,\varphi + i\sin n\,\varphi\,.
\end{aligned}$$

Die Bilder dieser Potenzen von z liegen auf einem Kreise mit dem Radius *1* (Fig. 141). Die Phase von z^2 ist gleich 2φ, jene von z^3 gleich 3φ und die Phase von z^n gleich $n\varphi$.

In der Figur fällt z^7 auf 1; es ist also $z^7 = 1$; z ist eine Wurzel dieser Gleichung. Man sagt, z ist eine siebente Einheitswurzel.

Man bemerkt, daß die Teilung eines Kreises in n gleiche Teile darauf hinauskommt, die Wurzeln der Gleichung $z^n - 1 = 0$ zu bestimmen. Diese Gleichungen führen daher auch den Namen Kreisteilungsgleichungen.

Die Teilung eines Kreises in n gleiche Teile ist dann und nur dann möglich, wenn sich die Wurzeln der Gleichung $z^n - 1 = 0$ durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellen lassen.

---

§ 40. Einheitswurzeln.

1. Wir erkannten in dem vorigen Paragraphen, daß die Teilung des Kreises in n Teile von der Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ abhängt.

Wir wollen jetzt die Auflösung derselben behandeln. Aus der Gleichung folgt:

$$x = \sqrt[n]{1} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

wobei r und φ zu bestimmende Größen sind. Durch Potenzieren ergibt sich:

$$1 = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,.$$

Daraus folgt

$$r^n = \cos n\varphi = 1\,, \quad r^n = \sin n\varphi = 0\,.$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man:

$$r = \sqrt[n]{1} = 1\,,$$

da r positiv sein muß, und 1 die einzige positive Zahl ist, deren n^{te} Potenz wieder 1 ist. Zur Bestimmung von φ ergeben sich die Gleichungen:

$$\cos n\varphi = 1\,, \quad \sin n\varphi = 0\,.$$

Daraus folgt

$$n\varphi = 0\,, \quad 2\pi\,, \quad 4\pi \text{ usw.}$$

$$\varphi = 0\,, \quad \frac{2\pi}{n}\,, \quad \frac{4\pi}{n} \ldots \frac{2k\pi}{n} \ldots .$$

Damit ist die Lösung der Aufgabe in transzendenter Form gegeben. Jede Wurzel der obigen Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat also die Form:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\,,$$

Setzt man in diesen Ausdruck $k = n$, so erhält man dieselbe Zahl wie für $k = 0$, nämlich die Wurzel 1. Setzt man $k = n + m$, wobei $m < n$, so erhält man dieselbe Wurzel wie für $k = m$.

Man erkennt daher, daß man nur für die Werte $k = 0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ verschiedene Wurzeln erhält. Man kann also sagen: Die Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat n Wurzeln, die sogenannten n^{ten} Einheitswurzeln; dieselben haben die Form

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots n-1\,.$$

Wir setzen

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\,;$$

es ist dann

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\,,$$

d. h.: Ist ε eine n^{te} Einheitswurzel, so ist jede positive ganze Potenz von ε auch eine n^{te} Einheitswurzel. Die n^{ten} Einheitswurzeln können also dargestellt werden durch

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^{n-1},\ 1\,.$$

Da $\varepsilon^n = 1$, so ist

$$\varepsilon^{n-k} = \varepsilon^{-k} = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\,,$$

eine Gleichung, von der wir Gebrauch machen werden.

Die n^{ten} Einheitswurzeln $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{n-1}$ sind sämtlich voneinander verschieden, wie man aus ihrer bildlichen Darstellung sofort erkennt. Ihre Bilder sind nämlich die Eckpunkte des regelmäßigen n-Eckes, welches dem Kreise mit dem Radius 1 eingeschrieben ist, wobei der Punkt mit der Zahl 1 ein Eckpunkt ist.

2. Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln.

Die Konstruktion des regelmäßigen n-Eckes kommt also auf die Bestimmung der n^{ten} Einheitswurzel ε zurück, d. h. einer Zahl, welche der Gleichung $x^n - 1 = 0$ genügt; nun ist

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)\,.$$

Daraus folgt, daß 1 immer eine Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$ ist und daß jede andere Wurzel ε der Gleichung genügt

$$\boldsymbol{\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = -1}\,.$$

Die Konstruktion eines regelmäßigen n-Eckes ist dann und nur dann mit Zirkel und Lineal durchführbar, wenn die Wurzeln dieser Gleichung durch eine Kette von Quadratwurzeln bestimmbar sind.

---

§ 41. Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes und des Zehneckes.

1. Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes hängt von den fünften Einheitswurzeln ab, welche der Gleichung genügen müssen:

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1\,. \tag{1}$$

Da $\varepsilon^5 = 1$, so ist nach obigem $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3 = \varepsilon^{-2}$; die Gleichung (1) geht daher über in:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1\,. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist durch Quadratwurzeln lösbar; setzt man nämlich:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y\,,$$

so wird

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2\,, \tag{3}$$

und man erhält für y die Gleichung

$$(4) \qquad y^2 + y - 1 = 0 .$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$y_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

und

$$y_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} .$$

Durch Substitution von y_1 in die Gleichung (3) erhält man

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right) .$$

Die Aufgabe ist algebraisch gelöst.

2. Wir wollen zunächst die geometrische Bedeutung von y_1 erörtern. Es ist bekanntlich

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} ,$$

also

$$\varepsilon^{-1} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} ,$$

daher

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\frac{\pi}{10} = s_{10} ;$$

die Gleichung (4) hat zwei Wurzeln, eine positive und eine negative, die positive ist also die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Zehneckes. Aus dem regelmäßigen Zehneck konstruiert man leicht das Fünfeck.

Man kann aber auch s_5 unschwer berechnen mittels der Formel (§ 38, 2)

$$2 - \sqrt{4 - s_5^2} = s_{10}^2 .$$

Man findet daraus die bekannte Beziehung:

$$s_5^2 = \tfrac{1}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) = 1 + s_{10}^2 .$$

3. Zum Zwecke der Konstruktion des regelmäßigen Zehneckes und damit auch des regelmäßigen Fünfeckes haben wir also die Gleichung

$$(4) \qquad y^2 + y - 1 = 0$$

geometrisch aufzulösen.

Wir wollen die Lösung dieser Gleichung mit verschiedenen Hilfsmitteln durchführen.

a) **Auflösung der Gleichung (4) mit Zirkel und Lineal.** Wir konstruieren dann die Wurzel

$$y = s_{10} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,.$$

Der Radius des Kreises ist gleich 1. Man schlage die beiden Kreise $A(O)$ und $C(B)$ (Fig. 142). OE ist dann gleich der Zehneckseite und BE gleich der Fünfeckseite.

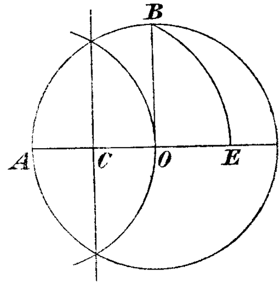

Fig. 142.

Bemerkung. Diese Konstruktion enthät auch die Dreieck-, Viereck- und die Sechseckseite.

Die Gleichung $y^2 + y - 1 = 0$ kann man auch schreiben in der Form

$$y : (1 - y) = 1 : y\,,$$

d. h. y ist der größere Teil des nach dem goldenen Schnitte geteilten Radius.

b) **Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes durch bloßes Ziehen von geraden Linien bei Zugrundelegung des Steinerschen Hilfskreises.**

Zu diesem Zweck müssen wir die Gleichung $y^2 + y - 1 = 0$ nach der auf S. 175 erörterten Methode auflösen.

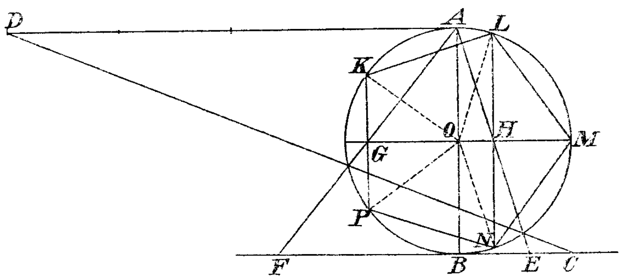

Fig. 143.

In unserem Falle ist $p = -1$ und $q = -1$; man hat daher auf den Tangenten in den Punkten A resp. B die Strecken -4 resp. $+1$ aufzutragen (Fig. 143). Verbindet man die so erhaltenen Punkte miteinander und projiziert die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit dem Kreise aus A auf die untere Tangente, so erhält man die gesuchten Wurzeln der Gleichung. Es ist also (Fig. 143) $\overline{BE}$ gleich $y_1 = s_{10}$; die Fünfeckseite ist gleich der Strecke $\overline{EO}$; die Aufgabe gelöst.

von Staudt zeigte in sehr eleganter Weise, wie man auch die Ecken des regelmäßigen Fünfecks mit Hilfe der Punkte G, H (Fig. 144) finden kann, wobei OM senkrecht auf AB steht.

In § 41, 2 bewiesen wir die Formel $2\cos\frac{2\pi}{5} = s_{10}$, daher ist

$$OH = \frac{EB}{2} = \frac{s_{10}}{2} = \cos\frac{2\pi}{5},$$

folglich

$$\sphericalangle LOM = MON = \frac{2\pi}{5}.$$

Durch analoge Betrachtungen findet man $OG = \cos\frac{\pi}{5}$, daher $\sphericalangle POG = \frac{\pi}{5}$, womit die von Staudtsche Konstruktion bewiesen ist.

c) Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes mit dem **Zirkel allein** gaben wir schon in § 15.

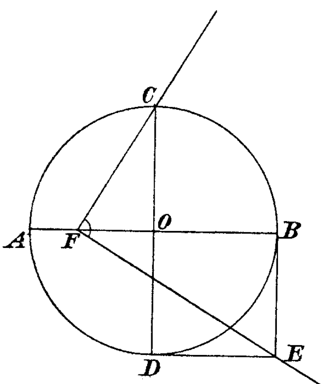

Fig. 144.

d) Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes mit dem Lineal allein gelingt durch Konstruktion des Wurzelausdruckes mit diesem Zeichenhilfsmittel allein; man führe dieselbe durch.

e) **Die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfeckes mit Hilfe eines beweglichen rechten Winkels allein** gestaltet sich besonders einfach.

Wir haben zu diesem Zwecke die Gleichung $y^2 + y - 1 = 0$ durch alleinige Benutzung eines rechten Winkels zu lösen; dies gelingt nach der in § 32 angegebenen Methode.

Man gelangt zu folgender Konstruktion: Man ziehe in dem Kreise, welchem ein regelmäßiges Fünfeck oder Zehneck eingeschrieben werden soll, zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AB, CD (Fig. 144) und bestimme den Punkt E so, daß $EB \perp OB$ und $ED \perp OD$ ist; legt man dann den rechten Winkel so in die Zeichenfläche, daß seine Schenkel durch C und E gehen und sein Scheitel auf AB zu liegen kommt, so ist $\overline{OF}$ gleich s_{10} und $\overline{FC} = s_5$.

§ 42. Regelmäßiges Sieben- und Neuneck.

1. Regelmäßiges Siebeneck.

Bei der Siebenteilung des Kreises handelt es sich nach obigem um die Auflösung der Gleichung:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 = -1 .$$

Da $\varepsilon^7 = 1$, so ist $\varepsilon^6 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^5 = \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-3}$; man erhält daher die Gleichung

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = -1 .$$

Setzt man zur Auflösung dieser Gleichung:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y ,$$

so wird:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2$$

und

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y ;$$

zur Bestimmung von y erhält man die kubische Gleichung:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 .$$

Von dieser Gleichung hängt also die Konstruktion des regelmäßigen Siebeneckes ab. Diese Gleichung ist aber (§ 36) durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar. Die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecke**s** kann daher mittels Zirkel und Lineal nicht durchgeführt werden.

Es soll noch die geometrische Bedeutung von y angegeben werden:

Es ist

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{7}\,.$$

Verbindet man demnach zwei Ecken des Siebeneckes, welche durch eine Ecke desselben voneinander getrennt sind, so hat diese Sehne vom Mittelpunkte den Abstand $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{y}{2}$.

2. Regelmäßiges Neuneck.

Das regelmäßige Neuneck erfordert eine etwas andere Behandlung. Es kann nämlich konstruiert werden, wenn man zuerst den Kreis in drei gleiche Teile und dann jedes Drittel wieder in drei gleiche Teile zerlegt.

Ist also ε eine neunte Einheitswurzel, so ist ε^3 eine dritte Einheitswurzel. Für die neunten Einheitswurzeln gilt daher die Gleichung:

$$(\varepsilon^3)^2 + \varepsilon^3 + 1 = 0$$

oder:

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0\,. \tag{1}$$

Da aber $\varepsilon^9 = 1$, so ist $\varepsilon^6 = \varepsilon^{-3}$; die letzte Gleichung geht also über in:

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 1 = 0\,. \tag{2}$$

Setzt man

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y\,,$$

so wird:

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y$$

und es ergibt sich für y die Gleichung

$$y^3 - 3y + 1 = 0\,. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist nach § 36 durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar. **Die Konstruktion des regelmäßigen Neuneckes ist daher mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar.**

Die Gleichung (3) hat die Wurzeln:

$$y_1 = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{9},$$

$$y_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = \left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{9} - i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$= 2\cos\frac{4\pi}{9},$$

und

$$y_3 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = \left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{9} - i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$= 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9},$$

wie man durch Einsetzen der Wurzelwerte $y_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}$ und $y_3 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}$ in die Gleichung (3) und Benutzung von Gleichung (2) sofort erkennt.

Die Gleichung (3) hat also drei reelle Wurzeln, zwei positive und eine negative; y_1 ist dabei die größere der positiven Wurzeln.

Die Wurzeln y_1 und y_2 haben geometrische Bedeutungen, welche bei der Konstruktion des regelmäßigen Neuneckes mit Vorteil angewendet werden können:

Es ist nämlich

$$\frac{y_1}{2} = \cos\frac{2\pi}{9},$$

gleich also dem Mittelpunktsabstande jener Kreissehne, die zwei Ecken des Neuneckes miteinander verbindet, welche durch eine Ecke voneinander getrennt sind.

Ferner ist

$$y_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{9}\right) = 2\sin\frac{\pi}{18}$$

gleich der Seite des regelmäßigen Achtzehneckes.

14*

§ 43. Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes.

1. Gauß hat bewiesen, daß diese Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchführbar ist.

Die Aufgabe selbst hängt von der Auflösung der Gleichung

$$x^{17} - 1 = 0$$

ab, welche, wie gezeigt werden soll, durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar ist.

Setzt man:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17},$$

so sind (§ 40) die 17ten Einheitswurzeln:

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{16}$$

oder auch

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^8, \varepsilon^{-8}, \varepsilon^{-7} \ldots \varepsilon^{-1},$$

weil

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{-k}.$$

Die Gleichung, aus welcher man die 17ten Einheitswurzeln bestimmen muß, ist bekanntlich:

$$(1) \quad \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \ldots \varepsilon^{-1} = -1.$$

2. Zum Zwecke der Auflösung dieser Gleichung setzt man:

$$(2) \begin{cases} \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} = \eta \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{+7} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} = \eta_1. \end{cases}$$

Beide Gleichungen zusammen enthalten sämtliche komplexe 17te Einheitswurzeln. Die linken Seiten der Gleichungen befolgen das Gesetz, daß jedes ihrer Glieder das Quadrat des vorangehenden ist.

Bildet man die Summe der beiden Gleichungen, so muß dieselbe -1 sein (Gleichung (1)), also

$$\eta + \eta_1 = -1.$$

Bildet man das Produkt der beiden Gleichungen, so erhält man jede Potenz von ε vier- und nur viermal, wie man sich durch Nachrechnen überzeugen kann; es ist daher (Gleichung (1)):

$$\eta \cdot \eta_1 = -4.$$

Daraus folgt, daß η und η_1 die Wurzeln folgender Gleichung sind:

$$x^2 + x - 4 = 0\,. \tag{3}$$

Es ist also $\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ und $\eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Nun setzt man:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} &= z \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} &= z_1 \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 &= z_2 \\ \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} &= z_3\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Diese vier Gleichungen enthalten wieder sämtliche komplexe 17te Einheitswurzeln. Man bemerkt, daß jedes ihrer Glieder die vierte Potenz des vorhergehenden Gliedes ist.

Durch Addition und Multiplikation dieser Gleichungen überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$z + z_1 = \eta\,,$$

$$z \cdot z_1 = -1\,,$$

z und z_1 sind also Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - \eta x - 1 = 0\,. \tag{5}$$

Aus dem Gleichungssystem (4) erhält man auch die Gleichungen

$$z_2 + z_3 = \eta_1$$

und

$$z_2 \cdot z_3 = -1\,,$$

z_2 und z_3 sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0\,. \tag{6}$$

Endlich setze man

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon^{-1} &= y \\ \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} &= y_1\,; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

daraus erhält man

$$y + y_1 = z\,,$$

wobei z die positive Wurzel der Gleichung (5) ist und

$$y_1 \cdot y = z_2\,,$$

wobei z_2 die positive Wurzel der Gleichung (6) ist.

y und y_1 sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - zx + z_2 = 0\,; \tag{8}$$

y ist größer als y_1.

Setzt man endlich den Wert von y in die Gleichung $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$ ein, so erhält man eine Gleichung, aus welcher ε berechnet werden kann:

Es ist

$$\varepsilon = \frac{y}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}\,.$$

Damit ist bewiesen, daß die 17ten Einheitswurzeln durch eine Kette von Quadratwurzeln gefunden werden können.

Wir wollen noch die geometrische Bedeutung von y_1 (die kleinere Wurzel der Gleichung (8)) auseinander setzen.

$$\begin{aligned} y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} &= \left(\cos\frac{8\pi}{17} + i\sin\frac{8\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{17} - i\sin\frac{8\pi}{17}\right) \\ &= 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34}\,, \end{aligned}$$

y_1 ist also die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 34-Eckes.

3. Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks.

a) Man hat zu diesem Zwecke folgende zusammenhängende quadratische Gleichungen konstruktiv aufzulösen.

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l} x^2 + x - 4 = 0 \text{ mit den Wurzeln } \eta\,,\ \eta_1 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}\,, \\ \qquad \eta > 0\,,\quad \eta_1 < 0 \\ x^2 - \eta x - 1 = 0 \text{ mit den Wurzeln } z\,,\ z_1 = \dfrac{\eta}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\eta^2 + 4}\,, \\ \qquad z > 0\,,\quad z_1 < 0 \\ x^2 - \eta_1 x - 1 = 0 \text{ mit den Wurzeln } z_2\,,\ z_3 = \dfrac{\eta_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\eta_1^2 + 4}\,, \\ \qquad z_2 > 0\,,\quad z_3 < 0 \\ x^2 - zx + z_2 = 0 \text{ mit den Wurzeln } y\,,\ y_1 = \dfrac{z}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4z_2}\,, \\ \qquad y > y_1\,. \end{array}\right.$$

y_1 ist die Seite des eingeschriebenen 34-Eckes; ferner ist $y = \varepsilon^1 + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, folglich $\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17}$ gleich dem Mittelpunktabstande jener Kreissehne, welche zwei, durch einen Eckpunkt voneinander getrennte, Eckpunkte des Siebzehneckes miteinander verbindet.

Die Auflösung dieses Systemes quadratischer Gleichungen soll auf vier verschiedenen Wegen gegeben werden: A) bei unbeschränktem Gebrauche von Zirkel und Lineal (Konstruktionen Serret-Bachmann, H. Schubert), B) durch bloßes Ziehen von geraden Linien unter Zuhilfenahme des Steinerschen Kreises (Konstruktion von v. Staudt), C) Konstruktion mit Hilfe des Zirkels allein (Gérardsche Konstruktion), D) Konstruktion mit Hilfe eines rechten Winkels.

A) **Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes mit Zirkel und Lineal.**

1. Man konstruiere der Reihe nach die Wurzeln des Systemes S.

Man zeichne zu dem Zwecke ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 2 und $\frac{1}{2}$; dann ist die Hypotenuse dieses Dreieckes $\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Schlägt man um den Schnittpunkt der Kathete $\frac{1}{2}$ mit der Hypotenuse einen Halbkreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$, so erhält man auf der Hypotenuse die Werte η und η_1, wobei η_1 negativ zu nehmen ist.

Konstruiert man ferner rechtwinklige Dreiecke mit $\frac{\eta}{2}$ $\left(\text{resp. } \frac{\eta_1}{2}\right)$ als die eine Kathete und mit der Einheit als die andere Kathete, so erhält man auf den Hypotenusen dieser Dreiecke, nachdem man einen Halbkreis mit dem Radius $\frac{\eta}{2}$ $\left(\text{resp. } \frac{\eta_1}{2}\right)$ geschlagen hat, die Wurzeln z, z_1, (z_2, z_3), wobei z_1 und z_3 negativ zu nehmen sind.

Zeichnet man endlich ein Dreieck mit den Katheten $\frac{z}{2}$ und z_2, so erhält man daraus die gesuchten Werte y und y_1.

Trägt man nun auf einem Halbmesser des Kreises mit dem Radius *1* vom Mittelpunkte die Strecke $\frac{y}{2}$ auf und errichtet in dem so erhaltenen Punkte die Senkrechte, so schneidet dieselbe den Kreis in zwei Eckpunkten des regelmäßigen Siebzehneckes, welche durch einen Eckpunkt des Siebzehneckes voneinander getrennt sind.

Zur Auflösung hat man also vier rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren. Legt man diese passend zusammen, so kann man einige Linien ersparen.

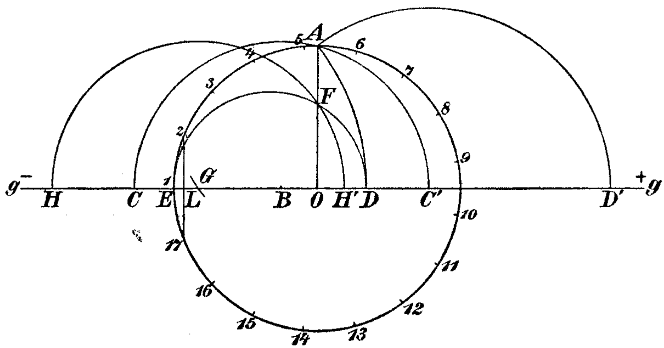

Fig. 145.

Eine derartige Konstruktion ist die von Serret-Bachmann.

2. Es sei $\overline{OA} = 1$ der Radius des gegebenen Kreises, welcher in 17 gleiche Teile geteilt werden soll (Fig. 145). Senkrecht zu OA ziehe man die Gerade g und nehme auf derselben die positive Richtung an.

Man konstruiere:

$$\overline{OB} = -\tfrac{1}{4};$$

dann ist:

$$\overline{BA} = \tfrac{1}{4}\sqrt{17}\,.$$

Nun schlage man die Kreise $B(A)$, $C(A)$ und $C'(A)$; es gelten dann folgende Beziehungen:

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{\eta_1}{2},$$

$$\overline{OC'} = \overline{OB} + \overline{BC'} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{\eta}{2},$$

$$\overline{OD'} = \overline{OC'} + \overline{C'D'} = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = z,$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1} = z_2.$$

Man mache ferner

$$\overline{OE} = -1,$$

konstruiere über ED als Durchmesser einen Halbkreis und zeichne

$$\overline{FG} = \tfrac{1}{2}\overline{OD'}.$$

Schlägt man den Kreis $G(F)$, so erhält man die Punkte H und H'; es muß sein:

$$-\overline{OH} + \overline{OH'} = \overline{HH'} = 2\,\overline{GH'} = \overline{OD'} = z,$$

$$-\overline{OH} \cdot \overline{OH'} = \overline{OF}^2 = -\overline{OE} \cdot \overline{OD} = z_2,$$

weil

$$-\overline{OE} = 1.$$

Die Summe der beiden Strecken $-\overline{OH}$ und $\overline{OH'}$ ist also gleich z, ihr Produkt ist gleich z_2. Diese Strecken sind daher die Wurzeln y, y_1 der Gleichung:

$$x^2 - z\,x + z_2 = 0.$$

Dabei ist $y = \overline{HO}$ und $y_1 = \overline{OH'}$.

Nach obigem ist also:

$$\frac{y}{2} = \cos\frac{e\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\,HO,$$

und OH' ist die Seite des regelmäßigen 34-Eckes.

Man konstruiere endlich:

$$\overline{OL} = \tfrac{1}{2}\overline{OH}$$

und errichte in L die Normale auf OH; diese Normale schneidet den gegebenen Kreis in den Punkten 2, 17 des gesuchten Siebzehneckes.

3. H. Schubert gibt in seiner „Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis“ ebenfalls eine einfache Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckos; das Gleichungssystem S wird dabei wieder mittels rechtwinkliger Dreiecke gelöst, welche zueinander in möglichst vorteilhafte Lage gebracht wurden.

B) Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes nach „v. Staudt“.

1. Die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes gelingt durch bloßes Ziehen von geraden Linien unter Zuhilfenahme eines gezeichneten Kreises.

Als diesen Hilfskreis können wir jenen Kreis betrachten, der in siebzehn gleiche Teile geteilt werden soll.

Die Lösung dieser Aufgabe geschieht in der Weise, daß wir die Gleichungen des Systemes S graphisch lösen, aber mit unserem jetzigen Hilfsmittel.

In § 32, 1 wurde gezeigt, wie man die Wurzel einer quadratischen Gleichung durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden kann, wenn ein gezeichneter Kreis vorliegt.

Auf diese Art müssen wir hier vorgehen. Um aber in der späteren Entwickelung nicht gehemmt zu sein, müssen wir noch zwei Hilfssätze erörtern, die im folgenden von Wert sein werden.

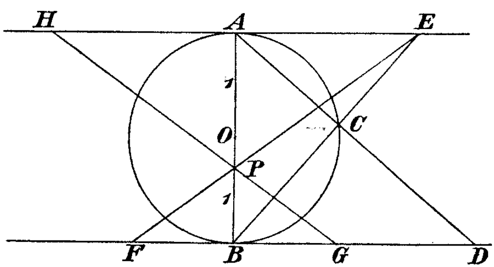

Fig. 146.

1. Hilfssatz. Es seien AB ein Durchmesser des Kreises K mit dem Radius 1 und C ein beliebiger Punkt von K (Fig. 146); die Dreiecke EAB und ABD sind einander ähnlich, also

$$AE : AB = AB : BD\,,$$

daher

$$AE \cdot BD = 4\,.$$

2. Hilfssatz. EF und GH (Fig. 146) seien zwei beliebige Gerade, die sich in einem Punkte P von AB schneiden; dann ist:

$$AE : BF = AP : BP = AH : BG\,,$$

daher

$$AE \cdot BG = BF \cdot AH\,,$$

dem Werte und Vorzeichen nach.

Wir wenden uns jetzt zur graphischen Auflösung der Gleichungen des Systemes S.

2. Es handelt sich also zunächst um die Auflösung der Gleichung:

$$x^2 + x - 4 = 0\,.$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der in Fig. 137 gelösten Gleichung:

$$x^2 - p\,x + q = 0\,,$$

und bemerken, daß

$$p = -1\,, \quad q = -4\,.$$

Wir tragen daher auf den Tangenten in A und B (Fig. 147) die Strecken

$$\frac{4}{p} = -4 \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = +4$$

auf, verbinden diese Punkte und projizieren die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit dem Kreise aus A auf die Tangente t_2, wodurch wir die Wurzeln η und η_1 erhalten.

Nun haben wir folgende Gleichung aufzulösen:

$$x^2 - \eta\,x - 1 = 0\,.$$

Für dieselbe ist:

$$p = \eta \quad \text{und} \quad q = -1\,.$$

Es sind jetzt auf t_1 resp. t_2 von A und B aus die Strecken:

$$\frac{4}{p} = \frac{4}{\eta} \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = -\frac{1}{\eta}$$

aufzutragen. Das Auftragen dieser beiden Strecken gelingt mittels der beiden Hilfssätze (Fig. 146) in überraschend einfacher Weise.

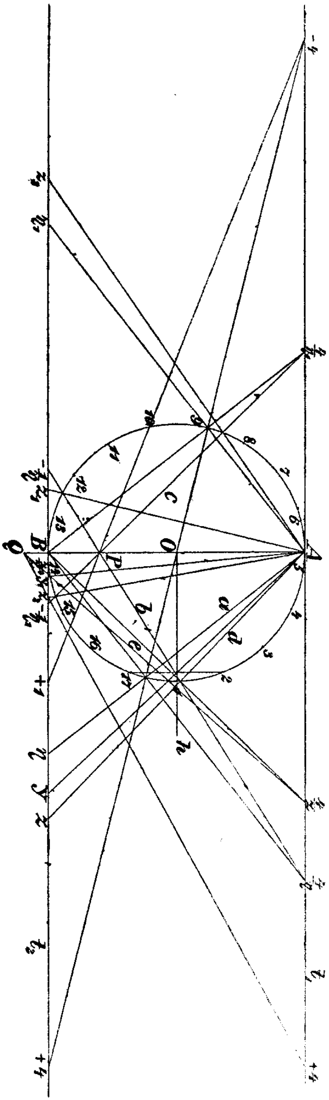

Fig. 147.

Projiziert man nämlich den Schnittpunkt der Geraden a mit dem Kreise K aus B auf t_1, so erhält man (nach dem ersten Hilfssatze) auf t_1 bereits die Strecke $\frac{4}{\eta}$.

Verbindet man die Punkte $+1$ und -4 miteinander, ferner den so erhaltenen Punkt P von $\overline{AB}$ mit dem eben konstruierten Punkte $\frac{4}{\eta}$ von t_1, so erhält man nach dem zweiten Hilfssatze die Strecke $-\frac{1}{\eta}$ auf t_2.

Nun ist aber:

$$\frac{4}{\eta} = \frac{4}{p} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\eta} = \frac{q}{p}.$$

Projiziert man daher die Schnittpunkte der Linie b (Fig. 147) mit dem Kreise K aus A auf t_2, so erhält man die Wurzeln z und z_1.

Um jetzt die Gleichung:

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$$

aufzulösen, hat man die Strecken

$$\frac{4}{p} = \frac{4}{\eta_1} \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = -\frac{1}{\eta_1}$$

aufzutragen.

Dies geschieht genau so wie bei der Auflösung der vorhergehenden Gleichung.

Projiziert man die Schnittpunkte der dabei erhaltenen Geraden c (Fig. 147) mit dem Kreise K aus A, so erhält man die Wurzeln z_2 und z_3 auf t_2.

Schließlich ist noch die Gleichung

$$x^2 - zx + z_2 = 0$$

aufzulösen. Für dieselbe ist

$$p = z \quad \text{und} \quad q = z_2 .$$

Es sind also auf t_1 und t_2 die Strecken $\frac{4}{z}$ resp. $\frac{z_2}{z}$ aufzutragen.

Zu diesem Zwecke projiziert man den Schnittpunkt der Geraden d (Fig. 147) mit dem Kreise K aus B und erhält (nach dem ersten Hilfssatze) auf t_1 die Strecke $\frac{4}{z}$ dem Werte und Vorzeichen nach aufgetragen.

Verbindet man den Punkt $+4$ auf t_1 mit dem Punkte z_2 von t_2 und den dadurch erhaltenen Punkt Q von $\overline{AB}$ mit $\frac{4}{z}$ von t_1, so schneidet diese Linie e (Fig. 147) (nach dem zweiten Hilfssatze) die Strecke $\frac{z_2}{z}$ auf t_2 aus. (Dies erkennt man auch sofort aus der Proportionalität der entstehenden Strecken, denn es besteht die Proportion $4 : \frac{4}{z} = z_2 : \frac{z_2}{z}$.)

Nun ist aber

$$\frac{4}{z} = \frac{4}{p} \quad \text{und} \quad \frac{z_2}{z} = \frac{q}{p} .$$

Projiziert man demnach die Schnittpunkte der Linie e mit dem Kreise K aus A auf t_2, so erhält man die Wurzeln y und y_1 der letzten Gleichung.

y_1 ist bekanntlich die Seite des regelmäßigen 34-Eckes; daraus kann man die Siebzehneckseite konstruieren.

Auch aus y kann man die Seite des regelmäßigen Siebzehneckes bestimmen; es ist bekanntlich (§ 43, 2):

$$y = 2 \cos \frac{2\pi}{17} .$$

Zieht man also durch O die Gerade h parallel zu t_1 und bringt sie zum Schnitt mit der Geraden Ay im Punkte L, so schneidet die Normale zu h im Punkte L den Kreis K in den Eckpunkten *2* und *17* des regelmäßigen Siebzehneckes (Fig. 148).

C) **Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes mit Hilfe des Zirkels allein.**

Es handelt sich um die Auflösung des Gleichungssystemes S (S. 214) mit diesem beschränkten Zeichenhilfsmittel, also um die Konstruktion von Wurzelausdrücken, welche man in folgender Weise schreiben kann:

$$\frac{\eta}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$\frac{\eta_1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1},$$

$$z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1},$$

$$y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}.$$

Um diese Ausdrücke mit Hilfe des Zirkels allein zu finden, geht man nach Gérard auf folgende Weise vor:

Gegeben sei der Kreis $\mathfrak{K}$ (Fig. 148) mit dem Radius r gleich 1. Man nehme den Punkt A auf dem gegebenen Kreise beliebig an, konstruiere:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1,$$

und beschreibe die Kreise $A(C)$, $D(B)$; dann ist:

$$\overline{OE} = \sqrt{2}.$$

Man schlage um D einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{2}$, wodurch man die Punkte F, F' erhält und die Kreise $G(D)$, $G'(D)$, welche sich in H schneiden, dabei sind die Punkte G, G' die Schnittpunkte der Kreise $A(D)$ und $D(B)$; es ist dann:

$$\overline{OH} = \overline{HA}.$$

Um den so erhaltenen Punkt H konstruiere man einen Kreis mit dem Radius 1, welcher den gegebenen Kreis in K und K' schneidet.

Nun denke man sich der ganzen Figur ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt. (Fig. 148).

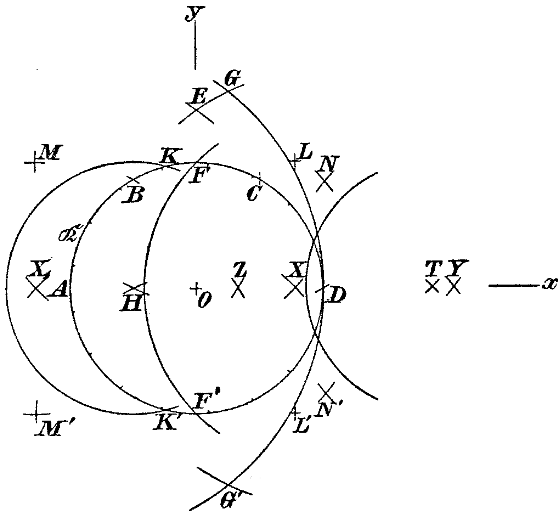

Fig. 148.

Die Koordinaten des Punktes K sind:

$$-\tfrac{1}{4}, \quad \sqrt{1-\tfrac{1}{16}}\,.$$

Schlägt man um K und K' Kreise mit dem Radius $\sqrt{2}$, so schneiden sich diese beiden Kreise in zwei Punkten der X-Achse, welche wir mit X und X_1 bezeichnen wollen.

Die Entfernung des Punktes X von der Linie KK' ist gleich $\frac{1}{4}\sqrt{17}$, wie man aus dem entstehenden rechtwinkligen Dreiecke leicht findet. Die Strecke OX selbst ist daher

$$\overline{OX} = \tfrac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4} = \frac{\eta}{2}\,;$$

ebenso findet man:

$$\overline{OX_1} = \frac{\eta_1}{2}\,,$$

dem Werte und Vorzeichen nach.

Nun konstruiere man durch bloßes Schlagen von Kreisbogen die Punkte L, L' mit der Abszisse $\frac{\eta}{2}$ und den Ordinaten ± 1, außerdem bestimme jenen Punkt Y, für welchen die Beziehung gilt:

$$\overline{LY} = \overline{L'Y} = \overline{XE}\,.$$

Es ist dann:

$$\overline{OY} = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = z\,,$$

denn es ist:

$$\overline{XE} = \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 2}$$

und:

$$\overline{XY} = \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}\,.$$

Um z_2 zu bestimmen, konstruiere man zunächst die Punkte M, M' mit den Koordinaten $\frac{\eta_1}{2}$, ± 1 und bestimme endlich den Punkt Z so, daß:

$$\overline{MZ} = \overline{M'Z} = \overline{X_1E}$$

wird. Dann ist:

$$\overline{OZ} = z_2\,,$$

denn:

$$\overline{X_1E} = \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 2}\,,$$

daher:

$$\overline{OZ} = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}\,,$$

wobei zu beachten ist, daß η_1 negativ ist.

Man hat nur noch y zu konstruieren.

Zu diesem Zwecke bestimme man die Punkte N, N' so, daß

$$\overline{ON} = \overline{ON'} = \overline{NY} = \overline{N'Y} = \overline{AZ}$$

wird. Die Abszisse der Punkte N, N' ist gleich $\frac{z}{2}$. Die Ordinaten von N, N' sind gleich $\pm\sqrt{(1+z_2)^2 - \frac{z^2}{4}}$, wie man aus dem entstehenden rechtwinkligen Dreiecke erkennt.

Nun bestimme man endlich den Punkt T so, daß:

$$\overline{NT} = \overline{N'T} = \overline{ZB}$$

wird. Dann ist:

$$\overline{OT} = y_1 \ .$$

Die Koordinaten von B sind nämlich $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, jene von Z (z_2, O). Daher ist

$$\overline{BZ} = \sqrt{1 + z_2 + z_2^2}$$

und:

$$\overline{OT} = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2} = y_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} \, ,$$

gleich der Seite des eingeschriebenen 34-Eckes.

Nun beschreibe man um T mit dem Radius 1 einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in den zwei Punkten *2* und *17* des regelmäßigen Siebzehneckes schneidet; denn

$$\frac{OT}{2} = \cos\frac{2\pi}{17} \, .$$

2. Man könnte übrigens auf mehreren anderen Wegen vorgehen, um mit dem Zirkel allein das Siebzehneck zeichnen zu können.

Wir haben in Abschnitt III gezeigt, wie man mit Hilfe des Zirkels allein alle geometrischen Konstruktionen durchführen kann, indem man jene Figur, welche man bei ungeschränktem Gebrauche des Zirkels und Lineals zu entwerfen nötig hätte, durch Inversion an einem passend gewählten Grundkreise in eine Figur verwandelt, welche nur aus Kreisen besteht.

Auf Seite 218 wurde die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes mit Hilfe des Steinerschen Kreises gezeigt. Diese Konstruktion kann, sobald der Kreis samt Mittelpunkt gegeben ist, durch bloßes Ziehen von geraden Linien ausgeführt werden, da man auch die Tangenten an den Kreis und die Strecken *1*, *4* durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden kann (nach Abschnitt II).

Denkt man sich nun die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes auf diese Weise durchgeführt und zu der so gefundenen Figur die inverse gezeichnet, so besteht dieselbe aus lauter Kreisen, die durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehen.

207. Man versuche bei Beachtung des im Abschnitte III Erörterten das Siebzehneck auf diesem Wege mit Hilfe des Zirkels allein zu konstruieren.

208. In § 43, A) haben wir die Konstruktion des Siebzehneckes mit Hilfe des Zirkels und Lineals gezeigt. Die Konstruktion selbst enthält außer den Kreisen nur zwei gerade Linien. (Fig. 145).

Nach Abschnitt III kann man die Schnitte von geraden Linien mit Kreisen durch Schlagen von Kreisbögen allein bestimmen. Man versuche die Konstruktion § 43, A) ohne gerade Linien zu zeichnen. Man führe diese Konstruktion durch und vergleiche sie mit der gegebenen Konstruktion von Gérard.

D) **Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes mit Hilfe des rechten Winkels.**

Es handelt sich wieder um die Auflösung folgender Gleichungen:

$x^2+x-4=0$ mit den Wurzeln η, η_1, wobei $\eta>0, \eta_1<0$

$x^2-\eta x-1=0$ „ „ „ z, z_1, „ $z>0, z_1<0$

$x^2-\eta_1 x-1=0$ „ „ „ z_2, z_3, „ $z_2>0, z_3<0$

$x^2-z x+z_2=0$ „ „ „ y, y_1, „ $y>y_1$.

Die Auflösung dieser Gleichungen mit Hilfe des rechten Winkels kann nach § 32 geschehen:

Man zeichne zuerst den Linienzug $ABCD$ (Fig. 149), wobei

$$\overline{AB}=\overline{BC}=1$$

und

$$\overline{CD}=4.$$

Nun lege man den rechten Winkel so in die Zeichenfläche, daß seine Schenkel durch A und D gehen und sein Scheitel auf der Linie BC zu liegen kommt. Man erhält dadurch die Wurzeln η und η_1.

Zieht man nun in η und η_1 (Fig. 149) die Linien

$$\overline{\eta E}=1, \quad \overline{\eta_1 F}=1,$$

so repräsentiert der Linienzug $AB\eta E$ das Trinom $x^2-\eta x-1$ und der Linienzug $AB\eta_1 F$ das Trinom $x^2-\eta_1 x-1$.

Zur Bestimmung von z und z_2 (z_1 und z_3 wurden in der Figur nicht gezeichnet) lege man den rechten Winkel so in die Zeichenebene, daß seine Schenkel einmal durch A und E, das andere Mal durch A und F gehen, und daß sein Scheitel beide Male auf BC zu liegen kommt. Man erhält die Wurzeln z und z_2.

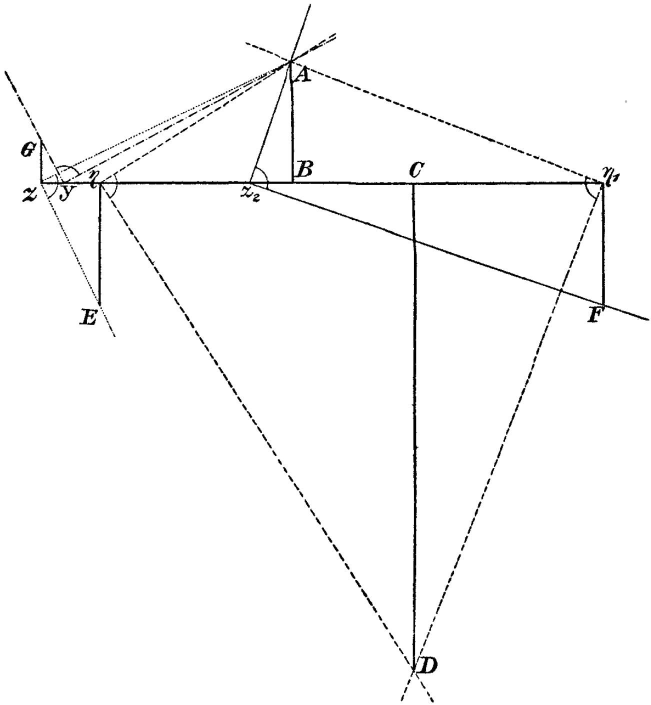

Fig. 149.

Nun errichte man in z senkrecht auf BC die Strecke:

$$\overline{zG} = \overline{Bz_2}$$

(Fig. 149). Der so entstehende Linienzug $AB = G$ stellt das Trinom $x^2 - zx + z_2$ dar.

Legt man nun den rechten Winkel so in die Zeichenebene, daß seine Schenkel durch A und G gehen und sein Scheitel auf BC zu liegen kommt, was auf zwei verschiedene Weisen möglich ist, so erhält man die Wurzeln y, y_1.

Die größere derselben y wurde gezeichnet; aus ihr folgt sofort die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehneckes, denn

$$\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17} \quad \text{usw.}$$

§ 44. Sätze über die Konstruierbarkeit regelmäßiger Polygone.

1. Die Teilung des Kreises in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 gleiche Teile kannte man bereits im Altertum, ebenso die Zerlegung eines beliebigen Bogens in zwei gleiche Teile, daher auch die Konstruierbarkeit des 24-Eckes aus dem 12-Eck usw.

Auch die Teilung des Kreises in 15 Teile war bekannt; es ist nämlich

$$\tfrac{1}{15} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{5}\,.$$

Man erhält demnach $\frac{1}{15}$ des Kreisumfanges, indem man von $\frac{2}{3}$ des Umfanges $\frac{3}{5}$ desselben abzieht.

Es gilt allgemeiner der Satz: „Ist n das Produkt der beiden teilerfremden Zahlen a und b, so ist

$$\frac{1}{n} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\,,$$

wobei x und y ganze positive Zahlen sind."

Denn die unbestimmte Gleichung

$$ay - bx = 1$$

ist immer durch positive ganze Zahlen lösbar, wenn a und b relativ-prime Zahlen sind.

2. Erst Gauß erweiterte in seinen berühmten „Disquisitiones arithmeticae" die uns von den Alten überlieferten Kenntnisse betreffs der Möglichkeit der Teilung des Kreises in gleiche Teile, indem er folgenden Satz bewies:

„Ist p eine Primzahl von der Form $p = 2^{2^n} + 1$, so ist die Teilung des Kreises in p Teile möglich; für jede andere Primzahl aber und für jede Primzahlpotenz, deren Basis größer als zwei ist, ist die Teilung des Kreises mittels Zirkel und Lineal unmöglich.

Setzt man, um diesen Satz näher zu betrachten, $n=0$, so wird $p=2^1+1=3$, also eine Primzahl; setzt man $n=1$, so wird $p=2^2+1=5$ wieder eine Primzahl; setzt man $n=2$, so wird $p^{2^2}+1=17$.

Die Teilung des Kreises in 17 Teile ist dem Gaußschen Satze gemäß möglich. Wir haben sie oben gegeben.

Ist $n=3$, so wird $p=2^{2^3}=257$. Da 257 eine Primzahl ist, so ist die Teilung des Kreises in 257 gleiche Teile durch Zirkel und Lineal möglich.

Richelot hat darüber im Crelle-Journal Bd. 9, 1832 im Anschluß an das Gaußsche Werk eine umfangreiche Arbeit veröffentlicht.

Setzt man $n=4$, so wird $p=2^{2^4}+1=65537$. Diese Zahl ist wieder eine Primzahl; die Gleichung $x^{65537}-1=0$ ist daher durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar, wozu Gauß die nötige Methode angibt.

Für $n=5, 6, 7$ wird $p=2^{2^n}+1$ keine Primzahl; für $n=8$ kommt eine Zahl heraus, von der noch nicht untersucht ist, ob sie eine Primzahl ist oder nicht.

Aus dem Gaußschen Satze folgt auch, daß die Teilung eines Kreises für jede Primzahlpotenz unmöglich ist, sobald die Primzahl größer ist als zwei.

Es ist daher unmöglich, den Kreis z. B. in 9, 25, 27 Teile zu teilen.

3. Die Teilung des Kreises ist also möglich in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24 $(\frac{1}{24}=\frac{2}{3}-\frac{5}{8})$, 30 gleiche Teile; sie ist unmöglich in 7, 11, 13, 19, 23, 29 Teile, weil diese Zahlen sämtlich Primzahlen sind, welche nicht auf die Form $2^{2^n}+1$ gebracht werden können; ebenso ist es unmöglich, den Kreis in 9, 25, 27 Teile zu teilen, weil 9, 25, 27 Potenzen von Primzahlen sind.

Es ist ferner unmöglich, den Kreis in 14, 21, 28, 18, 22 gleiche Teile zu teilen, denn wäre z. B. der Kreis in 14 Teile teilbar, so müßte er auch in 7 Teile teilbar sein, was aber nicht der Fall ist. Analog ist der Kreis nicht in 18 resp. 22 gleiche Teile teilbar, weil es unmöglich ist, den Kreis in 9 resp. 11 Teile zu teilen.

VIII. Abschnitt.

Geometrische Konstruktionen dritten und vierten Grades.

§ 45. Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem).

Ist s die Seite des gegebenen Würfels, S die gesuchte Seite des Würfels von doppeltem Inhalte, so ist

$$S^3 = 2 s^3,$$

also

$$S = s\sqrt[3]{2}.$$

Die berühmte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels führt also auf die Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$.

Diese Aufgabe ist ein spezieller Fall der folgenden, von den Alten auch viel behandelten, Aufgabe:

Gegeben sind zwei Strecken a und b; es sind zwei mittlere Proportionale x und y, also zwei Strecken, zu suchen, welche den Gleichungen

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

genügen.

Aus diesen Gleichungen folgt nämlich:

$$x = \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$y = \sqrt[3]{b^2 a},$$

und ist insbesondere:

$$a = 1, \quad b = 2,$$

so ist:

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{4}.$$

Die Verdoppelung des Würfels fordert die Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ oder die konstruktive Bestimmung der Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2 = 0 .$$

Diese Gleichung dritten Grades hat keine rationalen Wurzeln und ist daher durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar (§ 36). Der Ausdruck $\sqrt[3]{2}$ ist also mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Zur Auflösung dieser Aufgabe sind Kegelschnitte oder noch höhere Kurven nötig, welche punktweise oder mittels Instrumenten verzeichnet werden müssen.

1. **Konstruktive Lösung mittels Kegelschnitten.**

α) Bringt man die beiden Parabeln

$$x^2 = a\,y ,$$
$$y^2 = b\,x$$

miteinander zum Schnitt, so sind die Koordinaten ihres (nicht mit dem Ursprunge zusammenfallenden) Schnittpunktes:

$$\xi = \sqrt[3]{a^2\,b} , \quad \eta = \sqrt[3]{a\,b^2} .$$

β) Konstruiert man die beiden Kegelschnitte

$$x^2 = a\,y ,$$
$$x\,y = a\,b ,$$

so hat ihr nicht mit dem Anfangspunkte zusammenfallender Schnittpunkt die Koordinaten:

$$\xi = \sqrt[3]{a^2\,b} , \quad \eta = \sqrt[3]{a\,b^2} .$$

γ) Bringt man den Kreis:

$$x^2 + y^2 - b\,x - a\,y = 0$$

und die Parabel

$$y^2 = b\,x$$

miteinander zum Schnitte, so hat ihr Schnittpunkt die Koordinaten

$$\xi = \sqrt[3]{a^2\,b} , \quad \eta = \sqrt[3]{a\,b^2} .$$

In allen drei Fällen kann man also die beiden mittleren Proportionalen dadurch finden, daß man zwei Kegelschnitte miteinander zum Schnitte bringt.

Ist insbesondere $a = m$, $b = 1$, so wird

$$\xi = \sqrt[3]{m^2}, \quad \eta = \sqrt[3]{m}.$$

Zur Bestimmung der $\sqrt[3]{m}$ kann man also eine der drei Methoden α), β), γ) anwenden.

Für $b = 1$ ist die dritte Methode die praktisch vorteilhafteste. Die Gleichung der Parabel lautet nämlich für diesen Fall

$$y^2 = x,$$

sie ist also unabhängig von m und kann daher ein für allemal gezeichnet werden.

Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind dann

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a}{2} = \frac{m}{2}.$$

Da der Kreis durch den Ursprung geht, so ist es nicht nötig, seinen Radius zu berechnen.

Hätte man eine größere Anzahl von dritten Wurzeln graphisch zu bestimmen, so würde sich demnach folgender Vorgang als praktisch erweisen:

Man verzeichne auf einem quadrierten Millimeterpapiere, welches in der korrektesten Ausführung zu haben ist, die Parabel $P(y^2 = x)$, suche den Punkt M mit der Abszisse $\frac{1}{2}$ und der Ordinate $\frac{m}{2}$, setze in M mit einem Stechzirkel ein und spanne denselben bis zum Ursprunge. Hierauf suche man den Schnittpunkt jenes Kreises, welcher durch den Ursprung geht, mit der Parabel zu bestimmen.

Dies ist mit dem Stechzirkel in aller Schärfe möglich, ohne den Kreis selbst zu verzeichnen. Die ohne weiteres abzulesende Ordinate des Schnittpunktes ist schon die dritte Wurzel aus m.

2. **Lösung mittels der Konchoide des Nikomedes** (ca. 150 vor Chr.).

a) Nikomedes fand eine einfach zu konstruierende höhere Kurve, welche nicht nur zur konstruktiven Verdoppelung des Würfels, sondern auch zur Dreiteilung des Winkels und zur graphischen Lösung von Gleichungen dritten Grades benutzt werden kann.

Die Kurve selbst entsteht auf folgendem Wege:

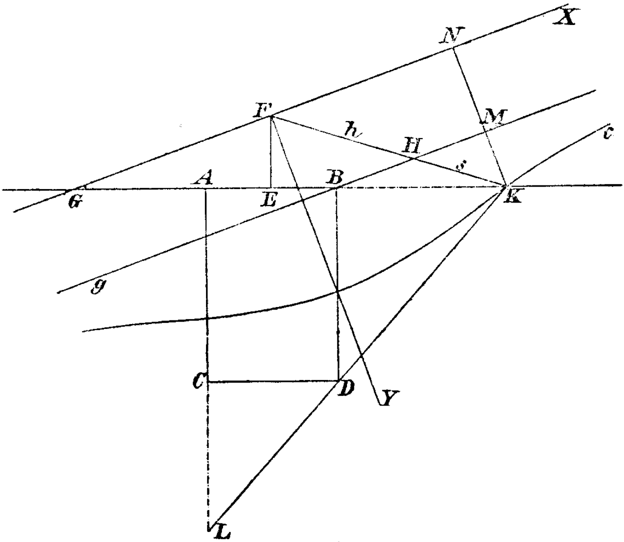

Fig. 150.

Gegeben sei der Punkt F (Fig. 150), die Gerade g und die Strecke s. Man ziehe durch F eine beliebige Gerade h und trage auf derselben von ihrem Schnittpunkte H mit g die Strecke s auf. Die so erhaltenen Punkte erfüllen bei veränderlichem h eine Kurve c: die Konchoide des Nikomedes.

F nennt man den Pol der Kurve, g die Basis und s das Intervall.

Es fällt nicht schwer, einen Mechanismus zu konstruieren, welcher eine derartige Kurve zeichnen kann.

Nikomedes konstruierte schon einen solchen; derselbe ist wohl nächst dem Zirkel das älteste Instrument zum Zeichnen krummer Linien.

b) Wir wollen zunächst die Gleichung dieser Kurve ableiten.

Aus den ähnlichen Dreiecken KHM und KFN (Fig. 150) folgt:

$$\frac{KF}{KH} = \frac{KN}{KM}$$

oder

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{s} = \frac{y}{y - p}.$$

Die Lage des Koordinatensystemes ist dabei aus der Fig. 150 ersichtlich und p ist der Abstand des Poles F von der Basis g.

Aus der Gleichung ersieht man, daß die Kurve von der vierten Ordnung ist, F zum Doppelpunkt hat und aus zwei Teilen besteht, welche die Basis g zur gemeinsamen Asymptote haben. Die Kurve geht insbesondere durch die imaginären Kreispunkte.

c) Es soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe dieser Kurve die beiden mittleren Proportionalen zwischen den zwei Strecken a und b bestimmt:

Die beiden aufeinander senkrechten Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ (Fig. 150) seien gleich a resp. b; ferner sei

$$\overline{AG} = a,$$

E der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und FE die Normale zu AB, also

$$\overline{FE} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Nun ziehe man die Linie FG und parallel zu ihr durch B die Gerade g. Konstruiert man hierauf jene Konchoide c, welche F als Pol, g als Basis und $\frac{b}{2}$ als Intervall s hat, so schneidet dieselbe die Gerade AB in einem Punkte K, aus welchem sich sofort der Punkt L vermittels des vierten Eckpunktes D des Rechteckes $ABCD$ ergibt.

Es läßt sich nun durch Rechnung unschwer beweisen, daß $\overline{BK}$ und $\overline{CL}$ die beiden mittleren Proportionalen zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind. Wir wollen hier auf den Beweis der Kürze halber nicht eingehen*).

*) Siehe F. Enriques, „Questioni Riguardanti La Geometria Elementare“, Bologna 1900, Seite 423—427.

Sind insbesondere

$$a = 1\,, \quad b = 2\,,$$

so ist

$$\overline{CL} = \sqrt[3]{2}\,, \quad \overline{BK} = \sqrt[3]{4}\,.$$

d) Will man die beiden mittleren geometrischen Proportionalen bestimmen, so ist es nicht nötig, die ganze Kurve zu konstruieren; es genügt, jenen Teil der Kurve zu verzeichnen, in welchem man den Schnittpunkt vermutet.

Den Schnittpunkt selbst findet man praktisch vorteilhaft mittels eines Papierstreifens, auf dem die Strecke $s = \frac{b}{2}$ aufgetragen ist, indem man denselben passend bewegt.

Es verdient dabei hervorgehoben zu werden, daß diese Bestimmung mittels des Papierstreifens von $\sqrt[3]{2}$ keineswegs eine näherungsweise Lösung ist (§ 22).

3. **Lösung mittels der Kissoide des Diocles** (ca. 150 vor Chr.).

a) Diocles erfand zur Lösung der in Rede stehenden Aufgabe eine Kurve, welche sich zwar nicht durch einen so einfachen Mechanismus konstruieren läßt, wie die Konchoide, welche aber viel inniger mit der zu lösenden Aufgabe zusammenhängt.

$\overline{AB}$ (Fig. 151) sei eine Strecke von der Länge 1. Wir ziehen durch ihre Endpunkte die Normalen g_1 und g_2 und nehmen auf g_1 den Punkt P_1 beliebig an. Diesem Punkte P_1 weisen wir auf g_2 jenen Punkt P_2 zu, für welchen

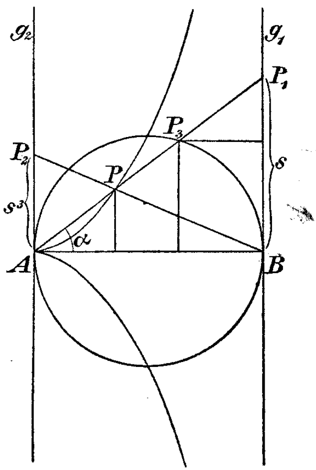

Fig. 151.

$$\overline{AP_2} = \overline{BP_1}^3$$

($\overline{AB}$ als Einheit angenommen). Setzt man also $\overline{BP_1} = s$, so ist

$$\overline{AP_2} = s^3\,.$$

Nun ziehe man die Linien AP_1 und PB_2; dieselben schneiden einander in einem Punkte P, welcher bei veränderlichem s eine Kurve erfüllt, die Kissoide des Diocles.

b) Wir wollen zuerst die Gleichung dieser Kurve aufstellen (Fig. 151).

Die Gleichung der Geraden AP_1 ist

$$y = sx ,$$

die Gleichung der Geraden BP_2

$$y = -s^3(x-1) .$$

Durch Elimination von s aus beiden Gleichungen erhalten wir:

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}$$

als Gleichung der Kissoide.

c) Es soll noch eine Eigenschaft dieser Kurve abgeleitet werden, welche zu ihrer Konstruktion benutzt werden kann:

Wir schlagen zu diesem Zwecke über $\overline{AB}$ einen Halbkreis und nennen den Winkel $BAP_1 = \alpha$ (Fig. 151); die Gerade AP_1 möge den Halbkreis außer in A in einem Punkte P_3 schneiden; es ist dann $\overline{AP} = \overline{P_3P_1}$.

Um dies nachzuweisen, ist nur zu zeigen, daß beide Strecken gleich lange Projektionen auf AB haben.

Die Projektion von $\overline{P_3P_1}$ auf $\overline{AB}$ ist:

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha .$$

Die Projektion von $\overline{AP}$ (gleich der Abszisse von P) findet man, indem man in die Gleichung der Kissoide $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ setzt und x daraus berechnet.

Man erhält:

$$x = \sin^2\alpha ,$$

womit der Satz bewiesen ist.

4. **Lösung von Apollonius** (ca. 200 v. Chr.).

AB, AC seien zwei zusammenstoßende Seiten des Rechteckes $ABCD$ und E der Mittelpunkt desselben.

Bestimmt man auf den Verlängerungen der Seiten AB und AC zwei Punkte X, Y so, daß sie von E denselben

Abstand haben und ihre Verbindungslinie durch D geht, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{AC}{BY} = \frac{BY}{CX} = \frac{CX}{AB}\,.$$

Wir gehen auf den Beweis dieser beiden Gleichungen der Kürze halber nicht ein*), und bemerken nur, daß X und Y auf den Verlängerungen der Rechteckseiten AB und AC über C resp. B hinaus liegen müssen.

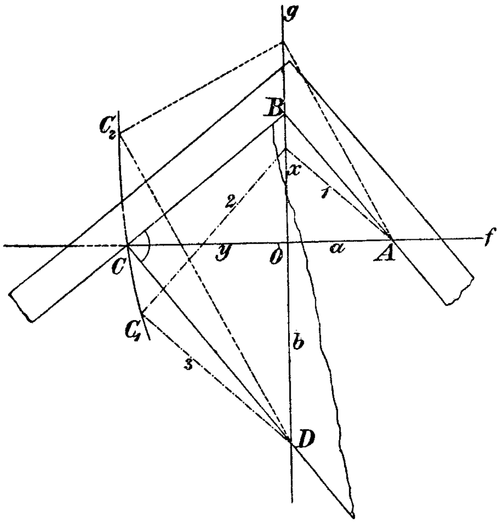

Fig. 152.

5. **Lösung mittels zweier rechtwinkliger Dreiecke** (Plato, ca. 400 v. Chr.).

Es seien zwei aufeinander senkrechte Gerade f und g gegeben; A sei ein beliebiger Punkt auf f und $ABCD$ ein rechtwinklig gebrochener Linienzug, so beschaffen, daß A und C auf f, B und D auf g fallen. (Fig. 152). Es ist dann

$$a : x = x : y = y : b\,,$$

d. h. x und y sind die beiden mittleren geometrischen Proportionalen von a und b.

*) F. Enriques, a. a. O., Seite 435—437.

a) Sind a und b gegeben, so läßt sich x und y nach obigem bestimmen, indem man den rechtwinklig gebrochenen Linienzug $ABCD$ konstruiert. Von demselben sind die Punkte A, D gegeben und die Punkte B, C zu suchen.

Dies kann näherungsweise geschehen, indem man für B oder C eine Fehlerkurve konstruiert (Fig. 152):

Man ziehe zu dem Zwecke von A aus die Gerade 1 beliebig, ziehe in deren Schnittpunkte mit g darauf die Senkrechte 2 und fälle von D aus auf 2 die Normale. Der Schnittpunkt C_1 derselben mit 2 ist ein Punkt der Fehlerkurve. Analog bestimme man einen zweiten Punkt C_2.

Es wird immer möglich sein, die Punkte C_1 und C_2 so zu bestimmen, daß sie in der Nähe der geraden Linie f zu liegen kommen. Die Fehlerkurve wird dann in dieser kurzen Entfernung fast als gerade Linie zu betrachten sein.

b) Hat man zwei bewegliche rechte Winkel zur Verfügung, so kann man die Aufgabe streng lösen.

Man muß nur die beiden rechten Winkel so in die Zeichenfläche legen, daß sie längs einer Kathete zusammenstoßen (Fig. 152) und daß die andere Kathete des ersten Winkels durch A, jene des zweiten Winkels durch D geht; ferner muß der Scheitel des ersten Winkels auf g und der Scheitel des zweiten Winkels auf f zu liegen kommen.

Die richtige Lage wird man nach kurzem Probieren erreichen und dadurch eine strenge Lösung der gesuchten Aufgabe erhalten (§ 22).

Ist insbesondere:

$$a = 1\,,$$

so ist:

$$x = \sqrt[3]{b}\,, \quad y = \sqrt[3]{b^2}\,.$$

Ist also:

$$a = 1\,, \quad b = 2\,,$$

so ist

$$x = \sqrt[3]{2}\,.$$

6. **Näherungsmethode von Buonafalce*).**

Es sei ABC ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten AB und AC; man teile die

*) Enriques, „Questioni Riguardanti La Geometrica Elementare“, Seite 439.

Hypotenuse in sechs gleiche Teile und suche auf der Kathete AC von C gegen A hin den Punkt D so, daß

$$\overline{CD} = \tfrac{1}{6}\overline{BC}\,.$$

Dann ist $\overline{BD}$ nahezu gleich $\overline{AB}\sqrt[3]{2}$.

Beweis. Es sei $AB = 1$; dann ist

$$\overline{BC} = \sqrt{2}$$

und

$$\overline{AD} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\,,$$

daher

$$BD = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{37 - 6\sqrt{2}}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{37 - 6\sqrt{2}}$$
$$= 1{\cdot}25863\,,$$

während

$$\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}2599\,.$$

BD ist also nahezu $\sqrt[3]{2}$; der Fehler beträgt weniger als $\frac{2}{1000}$.

7. Beim praktischen Zeichnen kommt es nicht selten vor, daß man $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren hat.

Die Methoden der letzten zwei Nummern lassen sich dann recht vorteilhaft anwenden.

---

§ 46. Trisektion des Winkels.

1. **Die Gleichung, auf welche die Dreiteilung des Winkels α führt.**

Wir entwickeln zu diesem Zwecke den Ausdruck

$$\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3,$$

zuerst nach dem Moivreschen Satze, hierauf nach dem Binomialsatze und erhalten

$$\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3 = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
$$= \left(\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}\sin^2\frac{\alpha}{3}\right) + i\left(3\cos^2\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\alpha}{3} - \sin^3\frac{\alpha}{3}\right).$$

Daraus folgt

$$(1) \qquad \cos\alpha = \cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}\sin^2\frac{\alpha}{3} = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}\,.$$

Es sei nun α der gegebene Winkel und eine beliebige Strecke die Einheit; dann kann man $\cos\alpha$ als eine gegebene, $\cos\frac{\alpha}{3}$ als zu findende Strecke betrachten. Man setze:

$$2\cos\alpha = a\,,$$

$$2\cos\frac{\alpha}{3} = x\,,$$

und erhält dann aus (1) die Gleichung

$$(2) \qquad x^3 - 3x - a = 0\,.$$

Läßt sich nun diese Gleichung für ein gegebenes a durch Quadratwurzeln lösen, so ist die Dreiteilung des zugehörigen Winkels mittels Zirkel und Lineal möglich; und umgekehrt: Läßt sich für einen gegebenen Winkel die Kreisteilung ausführen, so muß die zugehörige Gleichung (2) reduzibel sein.

Dies soll näher betrachtet werden:

A) Winkel, deren Dreiteilung mit Hilfe von Zirkel und Lineal möglich ist.

a) Solche Winkel sind z. B. die Winkel 90^0 und $45^0\left(=\frac{90^0}{2}\right)$; für diese Winkel ist a in der Gleichung (2) Null, resp. $\sqrt{2}$.

Die Gleichung selbst geht über in

$$x^3 - 3x = 0\,,$$

resp.

$$x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0\,.$$

Die erste Gleichung hat die Wurzeln 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ und die zweite Gleichung die Wurzeln $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$, was mit der Dreiteilung der Winkel 90^0 und 45^0 vollständig übereinstimmt.

b) Es lassen sich leicht noch unendlich viele Winkel angeben, deren Dreiteilung mit Zirkel und Lineal möglich ist:

Halbiert man nämlich den Winkel von 45^0, so erhält man wieder einen Winkel, dessen Dreiteilung möglich ist; dasselbe gilt für den Winkel $\frac{45^0}{2}$ usw. Allgemein ist die Dreiteilung jeden Winkels von der Form $\frac{\pi}{2^n}$ möglich, wobei n eine ganze positive Zahl ist.

Man kann noch andere Winkel finden, deren Dreiteilung mit Zirkel und Lineal gelingt:

Es sei s eine Strecke, welche sich aus der Einheit durch eine übrigens ganz beliebige Konstruktion mittels Zirkel und Lineal ableiten läßt. Setzt man

$$2\cos\alpha = a = s^3 - 3s\,,$$

so ist $\cos\alpha$ und damit auch der Winkel α konstruierbar.

Die zugehörige Gleichung

$$x^3 - 3x - a = 0$$

hat die Wurzel s; es ist daher:

$$\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{s}{2}\,,$$

d. h. die Dreiteilung dieses Winkels ist mit Zirkel und Lineal möglich.

B) Winkel, deren Dreiteilung mit Zirkel und Lineal unmöglich ist.

Derlei Winkel lassen sich unbegrenzt viele angeben.

Es sei z. B. $a = 1$, also

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha = 60^0\,;$$

die zugehörige Gleichung

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

hat keine rationale Auflösungen, denn dieselben könnten nur $+1$ oder -1 sein (§ 36); die Gleichung ist daher durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar (§ 36).

Der Winkel von 60^0 läßt sich also mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht in drei gleiche Teile zerlegen; der Winkel von 20^0 (und somit auch der Winkel von 40^0) ist mit diesen Hilfsmitteln nicht konstruierbar.

Dies stimmt auch mit einem früher (§ 42) gegebenem Resultate überein: Der Zentriwinkel, welcher zur Seite des regelmäßigen Neuneckes gehört, ist nämlich 40^0 und daher ebenso unkonstruierbar, wie die Neuneckseite selbst.

Es lassen sich noch unbegrenzt viele Werte von a angeben, für welche die zugehörige Gleichung durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar ist. Es gibt daher unendlich viele Winkel, deren Dreiteilung mit Zirkel und Lineal unmöglich ist.

2. **Dreiteilung eines Winkels mittels Kegelschnitte.**

Die Dreiteilung des Winkels gelingt durch das Zeichnen eines Kegelschnittes und Aufsuchen der Schnittpunkte desselben mit einem Kreise.

Es sollen zwei derartige Methoden hier gegeben werden.

a) Methode von Chasles.

Der Winkel AOB (Fig. 153) sei in drei gleiche Teile zu zerlegen.

α) Man schlage um O den Kreis K mit einem beliebigen Radius und ziehe in A die Tangente t. Nun trage man von O an OB den beliebigen Winkel ω (Fig. 153) und von A an t denselben Winkel ω aber im entgegengesetzten Sinne auf.

Die auf diese Weise bei veränderlichem ω erhaltenen Schnittpunkte P (Fig. 153) erfüllen eine Kurve, die Chaslessche Hyperbel h.

Ist X einer der Schnittpunkte der Hyperbel h mit dem Kreise K, so ist

$$\sphericalangle BOX = \tfrac{1}{3} \sphericalangle BOA ;$$

sind nämlich P_1 und P_2 die zum Punkte P gehörigen Punkte von K, so ist immer (Fig. 153)

$$\sphericalangle AOP_2 = 2 \sphericalangle BOP_1 .$$

Fällt nun P_1 mit P_2 in X zusammen, so ist

$$\sphericalangle AOX = 2 \sphericalangle BOX .$$

β) Wir wollen die Kurve h näher untersuchen:

Sie ist das Erzeugnis der beiden Büschel O und A. Jeder Strahl aus A bestimmt einen Winkel ω, und es entspricht ihm daher ein ganz bestimmter Strahl aus O und umgekehrt.

Dem Strahle s von $O(\omega = 0)$ insbesondere entspricht der Strahl t von A; dem Strahle g von $A(\omega = 90^0)$ entspricht jener Strahl l des Büschels O, welcher auf s senkrecht steht. Rechnet man aber g zum Büschel O, so entspricht ihm ein Strahl m von A und es muß m parallel zu l sein.

Die Halbierungslinien des Winkels Q (Fig. 153) mögen h_1 und h_2 heißen; h_1 möge mit s (und mit t) den Winkel α einschließen.

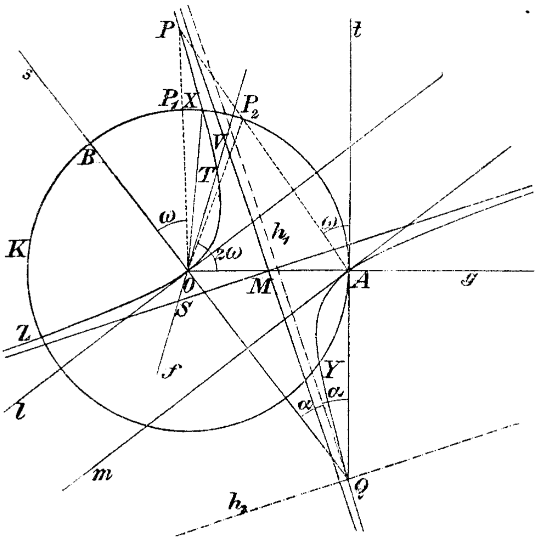

Fig. 153.

Konstruiert man nun jenen Strahl von O, welcher mit s den Winkel α einschließt, so ist der zugehörige Strahl von A zu ihm parallel, ihr Schnittpunkt fällt ins Unendliche; dasselbe tritt ein, wenn der angenommene Strahl von O parallel zur Halbierungslinie h_2 ist.

Die beiden Strahlenbüschel um O und A sind kongruent, also auch projektiv, haben aber entgegengesetzten Sinn. Die beiden Büschel erzeugen daher eine gleichseitige Hyperbel, welche durch OAQ hindurch geht, in O die Tangente l und in A die Tangente m hat.

Da l parallel zu m ist, so ist der Mittelpunkt M der Strecke OA auch Mittelpunkt der Hyperbel.

Die Asymptoten der Hyperbel sind parallel zu den Linien h_1 und h_2.

γ) Für die praktische Ausführung der Konstruktion empfiehlt es sich, zunächst den Punkt M und die beiden Asymptoten zu konstruieren. Zur Bestimmung der Punkte X, Y, Z ist es vorteilhaft, folgende Eigenschaft der Hyperbel zu benutzen: „Für die Schnittpunkte einer Geraden f (Fig. 153) mit der Hyperbel und den Asymptoten gilt die Beziehung:

$$\overline{TV} = \overline{OS}\,.\text{“}$$

Es ist ferner nicht notwendig, die ganze Hyperbel zu konstruieren; es genügt, sie nur in der Nähe ihres voraussichtlichen Schnittpunktes mit dem Kreise k zu verzeichnen; dies gelingt mittels eines geteilten Lineales (eines Maßstabes) rasch und sicher.

Die Hyperbel schneidet den Kreis außer in A in drei Punkten X, Y, Z; dieselben bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes, wie man leicht erkennt. Daher ist auch

$$3 \sphericalangle BOY = 3 \sphericalangle BOX + 360^0 = \sphericalangle BOA + 360^0.$$

δ) In dem Winkel AOB gehören übrigens zwei Chasles-sche Hyperbeln. Die eine haben wir gefunden, indem wir im Punkte A die Tangente an den Kreis zeichneten. Legt man im Punkte B die Tangente an den Kreis und verfährt dann wie früher, so erzeugen die beiden Strahlenbüschel O und B die zweite gleichseitige Hyperbel.

b) Wir wollen noch eine Methode zur Dreiteilung eines Winkels mittels eines Kegelschnittes und des Kreises erwähnen, ihre nähere Ausführung aber nur andeuten*).

Wir brauchen dazu einen bekannten, leicht zu beweisenden Satz:

„Es sei l eine gegebene Gerade und A ein gegebener Punkt, welcher nicht auf l liegen möge.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche der Abstand von A doppelt so groß ist, als der Abstand

*) F. Enriques, Questioni . . ., Seite 451—453.

von l, ist eine Hyperbel, welche A zum Brennpunkte, l zur Direktrix hat, und von welcher man den zweiten Brennpunkt, Mittelpunkt und die Asymptoten leicht finden kann".

Es sei AOB der zu teilende Winkel. Man denke sich jene beiden Geraden durch O, welche den Winkel in drei gleiche Teile zerlegen, schon gefunden.

Beschreibt man um O einen Kreis und bringt ihn mit diesen vier geraden Linien aus O zum Schnitte, so erhält man Punkte, welche wir der Reihe nach mit A, C, D, B, bezeichnen. Es sei nun l die Halbierungslinie des Winkels AOB.

Aus der entstehenden Figur ersieht man, daß der zu findende Punkt C von A doppelt so weit entfernt ist als von l. Der Punkt C liegt demnach auf einer Hyperbel und ist der Schnitt dieser Hyperbel mit dem Kreise.

3. **Dreiteilung eines Winkels mittels eines Papierstreifens.** Es sei (Fig. 154)

$$\overline{AB} = \overline{BO} = \overline{OC} = \overline{BD} = r$$

und

$$\sphericalangle BAO = \alpha;$$

dann ist

$$\sphericalangle OBC = 2\alpha, \quad \sphericalangle COE = 3\alpha;$$

(nebenbei ist

$$\sphericalangle ODB = 90 - \alpha, \quad \text{d. h. } \overline{OD} \text{ ist normal zu } AO).$$

Aus dieser Betrachtung ergibt sich eine einfache Methode zur Dreiteilung des Winkels COE, die sich am einfachsten mit Hilfe eines Papierstreifens durchführen läßt:

Gegeben sei der Winkel COE (Fig. 154). Man beschreibe um O mit einem beliebigen Radius r den Kreis K, welcher die Schenkel des Winkels in den Punkten C und E schneidet.

Man trage nun auf der Kante eines Papierstreifens die Strecke $\overline{AB} = r$ auf und lege den Papierstreifen so in die Zeichenebene, daß seine Kante durch C geht, der Punkt A auf g und der Punkt B auf K zu liegen kommt. Dann ist schon:

$$\sphericalangle CAE = \tfrac{1}{3} COE.$$

Die Auffindung der richtigen Lage des Papierstreifens wird sich nach kurzem Bewegen desselben in aller Schärfe ergeben.

Die Dreiteilung des Winkels ist auf diesem Wege (§ 22) streng gelöst.

Die Methode ist aber nicht nur praktisch brauchbar, sondern bietet auch theoretisches Interesse, da sich aus ihr eine ganze Reihe von Methoden ableiten lassen, welche zur Dreiteilung des Winkels angegeben wurden.

Dieselben sollen hier dargestellt werden:

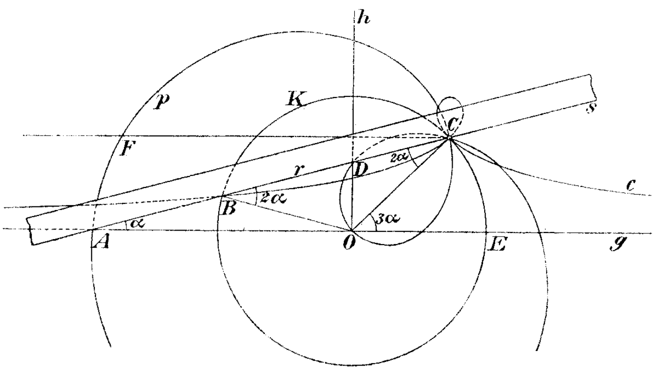

Fig. 154.

4. **Dreiteilung des Winkels mittels der Konchoide des Nikomedes oder mit Hilfe der Pascalschen Schnecke.**

a) Um den Papierstreifen s (Fig. 154) in die richtige Lage zu bringen, kann man auf folgende Weise vorgehen:

Man lege seine Kante durch C, seinen Punkt A auf g und bewege den Papierstreifen so lange, bis B auf K zu liegen kommt. Bei dieser Bewegung wird der Punkt B eine Konchoide c beschreiben, von welcher C der Pol, g die Basis und r das Intervall ist (§ 45).

Der Schnittpunkt von c und K ist der gesuchte Punkt B. Man ersieht daraus, wie man die Konchoide zur Dreiteilung eines Winkels benutzen kann:

Man zeichne in der Fig. 154 noch die Linie FC parallel zu g.

Gegeben sei nun ein beliebiger Winkel $FCO = 3\alpha$.

Man trage auf dem Schenkel CO die beliebige Strecke r auf, wodurch man den Punkt O erhält und ziehe g durch O parallel zu FC.

Nun schlage man den Kreis K mit O als Mittelpunkt, r als Radius und konstruiere jene Konchoide, welche C als Pol, g als Basis und r als Intervall hat. Der Schnittpunkt B dieser Konchoide mit dem Kreise K liefert das gesuchte Drittel des Winkels 3α.

Man bemerkt, daß man für jeden gegebenen Winkel eine Konchoide zeichnen muß, weshalb diese Methode wohl bloß historisches Interesse besitzt.

b) Wir denken uns jetzt den Papierstreifen so in die Zeichenebene gelegt, daß seine Kante durch C geht und sein Punkt B auf K zu liegen kommt; dies ist auf unendlich viele Arten möglich. Der Punkt A beschreibt dabei eine Kurve p, eine sogenannte Pascalsche Schnecke (Fig. 155).

Aus der Figur ersieht man, daß man umgekehrt mittels einer Pascalschen Schnecke einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zerlegen kann:

Es sei die Pascalsche Schnecke p gezeichnet gegeben, außerdem der Punkt O auf ihr.

Ist ein Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, so ziehe man die Linie FC (Fig. 154) so, daß Winkel FCO gleich dem gegebenen Winkel ist. Zieht man nun durch O die Gerade g parallel zu CF, so schneidet g die Pascalsche Schnecke p in einem Punkte A und es ist, wie man aus der Figur ersieht:

$$\sphericalangle FCA = \tfrac{1}{3} \sphericalangle FCO .$$

Mittels einer ein für allemal gezeichneten Pascalschen Schnecke kann man daher jeden beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu zerlegen.

Man erreicht dasselbe, wenn die Pascalsche Schnecke z. B. aus Holz geschnitten vorliegt oder auf einem durchsichtigen Stoffe verzeichnet ist.

5. **Instrumente zur Dreiteilung des Winkels.**

Zur Ausführung dieser Aufgabe sind mehrere Instrumente erdacht worden. Eines derselben ist jenes, welches Nikomedes zum Verzeichnen seiner Konchoide benutzte (§ 45).

Ein anderes brauchbares Instrument wäre jenes, welches eine Pascalsche Schnecke verzeichnet, was leicht durchführbar wäre.

Es sollen noch einige derartige Instrumente kurz angegeben werden:

a) Trägt man in Fig. 154 den Punkt D so ein, daß $BD = r$ ist, dann liegt, wie wir aus Nr. 3 wissen, D auf jener Geraden h, welche man in O auf g normal zeichnen kann.

Aus dieser Bemerkung ergeben sich zwei verschiedene Methoden, nach denen man die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe eines Papierstreifens durchführen könnte.

α) Man könnte einmal auf dem Papierstreifen die Strecke

$$\overline{BD} = r$$

auftragen und den Papierstreifen so in die Zeichenfläche legen, daß seine Kante durch C geht, der Punkt B des Papierstreifens auf K und der Punkt D des Streifens auf h zu liegen kommt.

β) Man könnte aber auch auf den Papierstreifen die Strecke

$$\overline{AD} = 2r$$

auftragen und den Papierstreifen so in die Zeichenebene legen, daß seine Kante durch C geht, sein Punkt A auf g und sein Punkt D auf h zu liegen kommt.

In beiden Fällen würde man den dritten Teil des Winkels COE gefunden haben.

Auf der zuletzt erwähnten Methode beruht ein Instrument zur Dreiteilung des Winkels, welches von Amadori*) angegeben wurde.

Das Instrument ist aus Metall, enthält den Kreis K, die Linien g, h und einen Metallstreifen, auf welchem die Punkte A und D in der Entfernung $2r$ hervorgehoben sind; A kann sich nur auf der Geraden und D nur in der Geraden h bewegen.

Der Gebrauch des Instrumentes ergibt sich aus der Fig. 154 ohne weiteres.

---

*) Enriques, „Questioni . . .“, Seite 457—459.

Wir gehen darauf nicht näher ein, da Instrumente zur Dreiteilung eines Winkels doch nur theoretisches Interesse besitzen.

b) Feldblum*) hat ein Instrument zur Dreiteilung des Winkels angegeben, welches aus dem in § 27 angegebenen Instrumente zur Winkelhalbierung hervorgeht. Es ist (Fig. 120)

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}\,,$$

ferner

$$\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GB}\,.$$

Die in der Figur vorkommenden Linien denke man sich aus Holz oder Metall und in allen bezeichneten Punkten drehbar.

Dann ist immer BD die Halbierende des Winkels ABC und CB die Halbierende des Winkels DBG, daher

$$\sphericalangle ABD = \tfrac{1}{3} \sphericalangle DBG\,.$$

Das Instrument kann zur Dreiteilung eines beliebig gegebenen Winkels benutzt werden.

Durch Hinzufügen neuer Rhomben kann man ein Instrument herstellen, welches zur 4-Teilung, 5-Teilung ..., n-Teilung eines jeden Winkels benutzt werden kann.

c) Es sei ADB ein Halbkreis, t die Tangente desselben in A und

$$\overline{CA} = \overline{AO} = \overline{OB} = r\,.$$

Nimmt man nun auf t den Punkt P beliebig an (Fig. 155), verbindet ihn mit C und zieht von ihm aus die Tangente PD an den Halbkreis, so ist

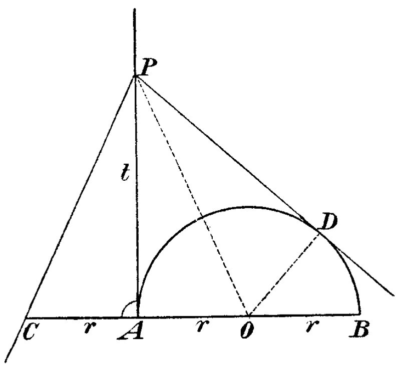

Fig. 155.

$$\sphericalangle CPA = \sphericalangle OPA = \sphericalangle OPD = \tfrac{1}{3} \sphericalangle CPD\,.$$

*) Feldblum, „Inaugural-Dissertation ...“, Göttingen 1899.

Bei dem darauf beruhenden Instrumente ist der Halbkreis, die Tangente t und die Strecke $\overline{CA}$ aus Holz und alles in fester Verbindung.

Ist nun ein beliebiger, jedoch nicht zu großer Winkel CPD in drei gleiche Teile zu teilen, so lege man das Instrument so in die Zeichenfläche, daß t durch P geht, C auf dem einen Schenkel zu liegen kommt und der zweite Schenkel den Halbkreis in D berührt.

Dann ist Winkel CAP das gesuchte Drittel.

---

§ 47. Graphische Auflösungen der Gleichungen dritten und vierten Grades.

Eine geometrische Aufgabe dritten oder vierten Grades führt auf eine Gleichung dritten oder vierten Grades. Die geometrische Lösung der Aufgabe ist daher auch die graphische Lösung einer Gleichung dritten oder vierten Grades.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen mit der graphischen Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades beschäftigen.

1. **Reduktion einer biquadratischen Gleichung auf eine kubische.**

Die Auflösung einer Gleichung vierten Grades läßt sich bekanntlich auf die einer Gleichung dritten Grades zurückführen:

Es sei die Gleichung

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0 \tag{1}$$

aufzulösen. Man setzt zunächst:

$$x = y - \frac{a}{4}$$

und verwandelt dadurch die Gleichung (1) in die Gleichung

$$y^4 + A y^2 + B y + C = 0 \,. \tag{2}$$

Nun setzt man:

$$2y = u + v + w \,,$$

wobei u, v, w noch näher zu bestimmende Größen sind. Man kann denselben die zwei Bedingungen:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2A,$$
$$uvw = -B$$

auferlegen und findet dann u^2, v^2, w^2 als die Wurzeln der Gleichung

(3) $$z^3 + 2Az^2 + (A - 4C)z - B^2 = 0 .$$

Sind z_1, z_2, z_3 die Wurzeln dieser Gleichung, welche die Resolvente der biquadratischen Gleichung (1) heißt, so gilt für die Wurzeln der Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
2x_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\
2x_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
2x_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
2x_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.
\end{aligned}$$

Aus den Wurzeln der Resolvente können also die Wurzeln der Gleichung (1) durch rationale Operationen und durch die Operation des Quadratwurzelziehens abgeleitet werden.

Die allgemeine Gleichung (1) ist daher durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar oder nicht, je nachdem ihre Resolvente (3) durch Quadratwurzeln gelöst werden kann oder nicht.

2. **Auflösung mittels Kegelschnitte.**

Hier sollen nur die wichtigsten Methoden zur graphischen Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades gegeben werden.

Man kann zu diesem Zwecke zwei verschiedene Wege einschlagen: Einmal sucht man zu der gegebenen Gleichung die auflösenden Kegelschnitte, das andere Mal geht man von zwei Kegelschnitten aus und sucht die durch sie lösbaren Gleichungen.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern:

1. Beispiel. Es sei die Gleichung gegeben:

(1) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Zwei Kegelschnitte, welche diese Gleichung lösen, sind:

$$x^2 = y \tag{2}$$

und

$$xy + ay + bx + c = 0\,, \tag{3}$$

denn durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen (2) und (3) erhält man die Gleichung (1).

Die Gleichung (2) stellt in rechtwinkligen Koordinaten eine Parabel vom Parameter 1 dar, also eine Parabel, welche unabhängig ist von den Koeffizienten der aufzulösenden Gleichung und daher ein für allemal gezeichnet werden kann.

Die Gleichung (3) stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, deren Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen sind; der Mittelpunkt der Hyperbel hat die Koordinaten $-a$, $-b$.

Zur Auflösung von Gleichungen dritten Grades kann man demnach auf folgende Weise vorgehen:

Man zeichne die Parabel mit dem Parameter 1, am vorteilhaftesten auf einem quadrierten Millimeterpapiere, ferner die Asymptoten der Hyperbel und außerdem noch einen Punkt der Hyperbel, z. B. den Schnittpunkt, mit der x- oder y-Achse. Hierauf kann man schon mit aller Schärfe den Schnittpunkt der Hyperbel mit der Parabel finden, ohne die Hyperbel ganz ausziehen zu müssen. (Vgl. § 46, S. 244.)

2. Beispiel. Wir gehen jetzt von zwei Kegelschnitten aus, von dem Kreise K:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \tag{4}$$

und der Parabel P:

$$y^2 + x = 0\,. \tag{5}$$

Durch Elimination von x aus beiden Gleichungen erhält man

$$y^4 + (1 + 2m)\,y^2 - 2ny + (m^2 + n^2 - r^2) = 0\,. \tag{6}$$

Wir können also mittels dieser beiden Kegelschnitte Gleichungen auflösen von der Form

$$z^4 + az^2 + bz + c = 0\,. \tag{7}$$

Wir haben zu diesem Zwecke nur

$$1 + 2m = a\,,$$
$$-2n = b\,,$$
$$m^2 + n^2 - r^2 = c$$

zu setzen.

Die Parabel (5) ist unabhängig von den Koeffizienten der aufzulösenden Gleichung, kann also ein für allemal auf einem Millimeterpapiere gezeichnet werden. Die Koordinaten des Mittelpunktes M von K sind:

$$m = \frac{a-1}{2}\,, \quad n = -\frac{b}{2}\,,$$

und für den Radius gilt:

$$r^2 = m^2 + n^2 - c\,.$$

Mittelpunkt und Radius können demnach leicht gefunden werden, namentlich mit Zuhilfenahme der Millimetereinteilung des Papieres.

Es wird auch vorteilhaft sein, den Kreis K nicht auszuziehen, sondern sich zur Bestimmung der Schnittpunkte von P mit K des Stechzirkels zu bedienen.

Die unmittelbar ablesbaren Ordinaten der Schnittpunkte sind die Wurzeln der Gleichung (7).

Diese Methode muß als eine praktisch verwendbare bezeichnet werden. Sie hat aber auch theoretisches Interesse:

Die Bestimmung der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (7) (auf die Form (7) kann jede vollständige biquadratische Gleichung durch rationale Operationen gebracht werden) erfordert außer der festen Parabel nur den Gebrauch des Zirkels und Lineales. Wir benötigen daher zur Lösung einer biquadratischen Gleichung nur einen festen Kegelschnitt und außer diesem nur Kreise und Gerade.

Die Gleichung (7) kann auch spezielle Formen annehmen. Ist z. B.

$$c = 0\,,$$

so geht (7) in die Gleichung über:

$$z^3 + az + b = 0\,;$$

auch die Auflösung dieser Gleichung kann nach obiger Methode geschehen. Man erspart dabei sogar das Berechnen von r, denn der Kreis K muß durch den Ursprung des Koordinatensystemes gehen.

Ist ferner:

$$a = 0 ,$$

so erhält die Gleichung (7) die Form:

$$z^3 + b = 0 .$$

Die Wurzeln dieser Gleichung kann man auch mittels der Parabel und dem Stechzirkel finden. Analog kann man quadratische Gleichungen auflösen, Quadratwurzeln bestimmen usw.

3. **Konstruktive Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades mittels eines beliebigen, gezeichnet vorliegenden, Kegelschnittes.**

Hier soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe eines beliebig gegebenen Kegelschnittes die Wurzeln jeder Gleichung dritten und vierten Grades finden kann, indem man dabei der Methode folgt, welche Chasles (Comptes rendues, 1880) angegeben hat.

Zu diesem Zwecke müssen wir zuvor einige Bemerkungen machen, welche mit der neueren Geometrie und mit dem graphischen Rechnen zusammenhängen.

a) Es sei K ein gezeichnet vorliegender Kegelschnitt.

Man nehme in der Ebene von K eine gerade Linie g und auf derselben eine gewöhnliche Zahlenreihe an, so zwar, daß jedem Punkte von g eine positive oder negative Zahl entspricht, nämlich die Maßzahl der Entfernung dieses Punktes von einem beliebig gewählten Anfangspunkte auf g.

Nun nehme man auf K den Punkt O beliebig an und denke sich zu jedem Punkte P von K jene Zahl hinzugeschrieben, welche bei dem Punkte steht, in welchem der Strahl PO die Gerade g trifft.

Jedem Punkte P von K entspricht dann eine ganz bestimmte Zahl, und umgekehrt entspricht jeder Zahl ein einziger Punkt von K; insbesondere entspricht dem Punkte O auf K diejenige Zahl, welche zum Schnittpunkte von g mit der Tangente in O gehört. Die Zahl Unendlich steht bei dem Schnittpunkte jener Geraden mit K, welche man durch O parallel zu g ziehen kann.

Man kann auch sagen, man habe die Zahlenreihe g aus O auf den Kegelschnitt projiziert.

Im folgenden wollen wir uns zwei solche Punktreihen auf K denken. Die Punkte resp. Zahlen der ersten Punktreihe sollen immer mit ξ, jene der zweiten Reihe mit η bezeichnet werden.

Übereinander liegenden Punkten beider Reihen entsprechen dieselben Zahlen.

b) Mit Hilfe dieses festen Kegelschnittes K sei nun folgende Gleichung zu lösen:

$$x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0\,. \tag{1}$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke jene Beziehung zwischen den Punkten beider Reihen auf K, welche durch die Gleichung

$$(\eta^2 + a\,\eta)\,\xi^2 + (b\,\eta^2 + c\,\eta + d) = 0 \tag{2}$$

dargestellt wird.

Zu jeder Zahl ξ gehören, wie aus der Gleichung (2) folgt, zwei Zahlen η und umgekehrt zu jeder Zahl η zwei Zahlen ξ.

Jedem Punkte ξ der ersten Punktreihe auf K entsprechen daher zwei Punkte η der zweiten Punktreihe, und jedem Punkte η der zweiten Punktreihe auf K entsprechen zwei Punkte ξ der ersten Punktreihe.

Es wird auch vorkommen, daß einem Punkte der ersten Punktreihe infolge (2) jener Punkt der zweiten Punktreihe entspricht, welcher mit ihm zusammenfällt, welcher also die gleiche Zahl trägt.

Man findet diese Doppelpunkte, indem man in Gleichung (2)

$$\xi = \eta = x$$

setzt. Man erhält dann aus Gleichung (2) die Gleichung (1) und erkennt, daß es vier solcher Doppelpunkte gibt, und daß die zugehörigen Zahlen die gesuchten Wurzeln der Gleichung (1) sind.

Die Auflösung der Gleichung (1) kommt also darauf hinaus, diese Doppelpunkte zu konstruieren.

Zu diesem Zwecke müssen wir aber die durch die Gleichung (2) festgelegte Verwandtschaft der beiden Punktreihen auf K noch näher studieren.

c) Es seien η' ein beliebiger Punkt der zweiten Punktreihe auf K und ξ' und ξ'' die ihm entsprechenden Punkte der zweiten Punktreihe (resp. deren Zahlen).

Dann folgt aus Gleichung (2), daß

$$\xi'' = -\xi' .$$

Dem Punkte ξ' entspricht nicht nur Punkt η', sondern vermöge der Gleichung (2) noch ein zweiter Punkt η''. Ebenso entspricht dem Punkte ξ'' außer η' noch ein zweiter Punkt der η-Reihe, und zwar muß dies ebenfalls η'' sein, da die Gleichung (2) nur ξ^2 enthält, und daher für ξ' und ξ'', die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, dieselbe wird.

Zwei Punkte ξ' und ξ'' der ersten Reihe, welche einem Punkte η' der zweiten Reihe entsprechen, entsprechen daher auch ein und demselben zweiten Punkte η''.

Ebenso sieht man ein, daß zwei Punkte η' und η'', welche einem Punkte ξ' entsprechen, auch noch ein und demselben ξ'' entsprechen müssen.

Durch die Gleichung (2) ist daher nicht nur eine Verwandtschaft zwischen der Punktreihe ξ und der Punktreihe η hergestellt, sondern auch eine Verwandtschaft zwischen den Punkten der Punktreihe ξ und eine zweite Verwandtschaft zwischen den Punkten der Punktreihe η.

Und zwar entsprechen zwei Punkte ξ' und ξ'' der Punktreihe ξ einander, wenn sie ein und demselben Punkte η der zweiten Punktreihe entsprechen.

Da aber zwischen diesen beiden Punkten ξ' und ξ'' die Beziehung bestehen muß

$$\xi'' = -\xi' ,$$

so ist die Beziehung eine involutorische, d. h. die Verbindungslinien sämtlicher Punkte ξ' und ξ'' gehen durch ein und denselben festen Punkt S.

Zwei Punkte η' und η'' der Punktreihe η entsprechen einander, wenn sie ein und demselben Punkte ξ der anderen Punktreihe entsprechen. Aus der Gleichung (2) erkennt man sofort, daß auch die Verwandtschaft zwischen η' und η'' eine involutorische ist, daß daher die Verbindungslinien der Punkte η' und η'' durch einen festen Punkt S' hindurchgehen.

d) Durch die Gleichung (2) sind also in der Ebene von K zwei Strahlenbüschel S und S' festgelegt:

Jeder Strahl s aus S schneidet K in zwei Punkten ξ' und ξ'', welche ein und demselben η' der Punktreihe η entsprechen. Sie entsprechen aber auch (nach früherem) ein und demselben Punkte η'' der anderen Punktreihe; η' und η'' liegen auf dem Strahle s' aus S'.

Man erkennt, daß jedem Strahle von S ein einziger Strahl von S' zugewiesen ist und umgekehrt. Die beiden Strahlenbüschel sind in Verwandtschaft gesetzt, und zwar erkennt man aus der Gleichung (2), daß sie zueinander projektiv sind.

Die beiden Strahlenbüschel S und S' erzeugen daher einen Kegelschnitt K_1, der K in vier Punkten schneidet, welche die gesuchten Doppelpunkte der zweizweideutigen Verwandtschaft zwischen den Punktreihen ξ und η auf K sind.

e) Zur Bestimmung von K_1 gehe man folgendermaßen vor: Man setze in die Gleichung (2) für η' einen bestimmten Wert, z. B. 0 ein; dadurch erhält man zwei Werte ξ' und ξ'', deren Verbindungslinie s ein Strahl des Büschels S ist. Nun setze man ξ' in die Gleichung ein und bestimme daraus den Wert η''.

Verbindet man η' mit η'', so erhält man den entsprechenden Strahl s' des Büschels S'. Auf dieselbe Weise bestimmt man noch zwei Strahlen des Büschels S und ihre entsprechenden im Büschel S'.

f) Damit ist gezeigt, wie man eine allgemeine Gleichung vierten Grades mit Zuhilfenahme eines einzigen, gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes auflösen kann.

Die Schnittpunkte von K_1 mit K kann man dadurch bestimmen, daß man K_1 punktweise konstruiert oder indem man einen Weg einschlägt, der in der nächsten Nummer erwähnt werden wird.

4. **Resultate der Arbeiten von Kortum und Smith über die geometrischen Konstruktionsaufgaben dritten und vierten Grades.**

Kortum und Smith haben in zwei, von der Berliner Akademie mit dem Steiner-Preise 1866 gekrönten Arbeiten gezeigt, daß man jede geometrische Aufgabe dritten und vierten Grades durch Schlagen von Kreisbogen und Ziehen von geraden Linien streng lösen kann, wenn in der Ebene ein Kegelschnitt, der aber kein Kreis sein darf, gezeichnet vorliegt.

Wir können auf die Darlegung dieser Arbeiten der Kürze halber hier nicht eingehen und nur folgendes erwähnen:

Diese beiden Arbeiten haben deshalb ein so hohes theoretisches Interesse, weil sie die direkte Fortsetzung eines von Steiner betretenen Weges sind. Steiner hat nämlich (II. Abschnitt) gezeigt, daß man alle quadratischen Konstruktionen mit Hilfe der geraden Linie lösen kann, wenn ein Kreis samt Mittelpunkt zur Benutzung gezeichnet vorliegt. Steiner hat also die zur Lösung der quadratischen Aufgaben notwendigen höheren Hilfsmittel auf das Minimum reduziert.

Zur Lösung von Aufgaben dritten und vierten Grades kommt man, wie wir wissen, mit dem Kreise allein nicht aus, denn die Bestimmung der Schnittpunkte von Kreisen führt nur auf Gleichungen zweiten Grades.

Zur Lösung von derlei Aufgaben sind Kegelschnitte oder höhere Kurven nötig, und es fragt sich wieder um das Minimum der notwendigerweise hinzutretenden Kurven.

Kortum und Smith haben nun gezeigt, daß nur ein einziger, gezeichnet vorliegender Kegelschnitt zur Lösung sämtlicher Aufgaben dritten und vierten Grades nötig ist.

In der vorigen Nummer kamen wir auf eine solche Aufgabe. Es war nämlich ein Kegelschnitt K gezeichnet gegeben und ein zweiter Kegelschnitt K_1 durch fünf Punkte (oder zwei $\overline{\wedge}$ Strahlenbüschel); es waren die Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte zu suchen. Zu diesem Zwecke braucht man K_1 nicht punktweise zu bestimmen; nach Kortum und Smith kann man die Schnittpunkte durch bloßes Schlagen von Kreisen und Ziehen von geraden Linien erhalten, indem man den gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt benutzt.

Übrigens haben wir schon auf S. 253 gesehen, daß man alle Aufgaben dritten und vierten Grades mit Hilfe eines einzigen Kegelschnittes durch bloßes Schlagen von Kreisen und Ziehen von geraden Linien lösen kann.

Die Parabel P auf S. 253 war ganz unabhängig von der aufzulösenden Gleichung vierten Grades; die Auflösung der Gleichung selbst geschieht dort durch Hinzufügen eines Kreises und der geraden Linien zu P.

---

§ 48. Auflösung der Gleichungen dritten Grades mittels zweier rechter Winkel.

1. Gegeben sei die Gleichung

(1) $$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0\,,$$

wobei a_0, a_1, a_2, a_3 rationale Zahlen sein sollen. Wir zeichnen den rechtwinklig gebrochenen Linienzug $ABCDE$, dessen Seiten der Reihe nach gleich a_0, a_1, a_2, a_3 sind.

Die ersten zwei Seiten a_0, a_1 müssen aufeinander senkrecht stehen, können aber sonst ganz beliebig angenommen werden. Für die folgenden Seiten muß nachstehende Regel beachtet werden:

„Zwei parallele Seiten des Linienzuges sind gleich gerichtet oder nicht, je nachdem die entsprechenden Koeffizienten der Gleichung ungleiches oder gleiches Vorzeichen haben.“

In Fig. 157 sind AB und CD gleich gerichtet, a_0 und a_2 haben daher verschiedenes Vorzeichen. Ebenso sind BC und DE gleich gerichtet; daraus kann geschlossen werden, daß a_1 und a_3 verschiedenes Vorzeichen haben.

Den Linienzug $ABCDE$ nennt man den die linke Seite der Gleichung repräsentierenden Linienzug*).

---

*) Cremona, „Graph. Calcul“.

Wir nehmen im folgenden, um die Vorstellung zu fixieren, a_0 und a_1 positiv an; a_2 und a_3 sind dann, der Figur entsprechend, negativ.

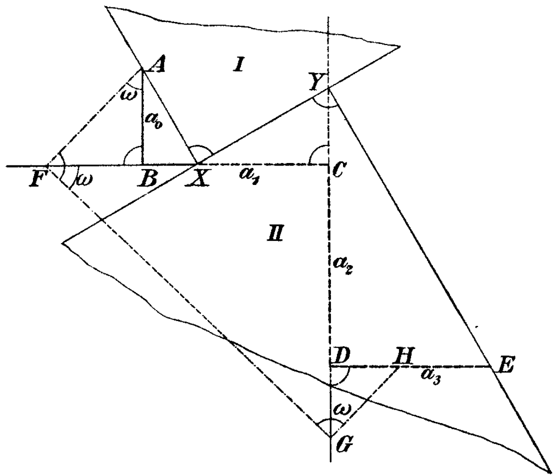

Fig. 156.

2. Man trage nun in A den beliebigen Winkel ω auf (Fig. 156) und zeichne den neuen rechtwinkligen Linienzug $AFGH$; es ist dann:

$$FB = a_0 \operatorname{tg} \omega = a_0 x \, ,$$

wenn:

$$\operatorname{tg} \omega = x$$

gesetzt wird. Ferner ist:

$$\overline{FC} = a_0 x + a_1 \, ,$$
$$\overline{CG} = (a_0 x + a_1) x \, ,$$
$$\overline{DG} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

(a_2 ist eine negative Zahl). Endlich ist:

$$\overline{EH} = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_3 \, .$$

Fällt der Punkt H auf E, so ist

$$\overline{EH} = 0 \, ,$$

also

$$x = \operatorname{tg} \omega$$

eine Wurzel der aufzulösenden Gleichung.

Aus dieser Betrachtung erkennt man, wie man die Gleichung (1) aufzulösen hat: man braucht nur den Winkel ω so zu bestimmen, daß der Linienzug $AFGH$ in E endet.

Einen derartigen auflösenden Linienzug kann man aber mit Hilfe von zwei rechtwinkligen Dreiecken I und II (Fig. 156) leicht finden, wie aus der Figur ersichtlich.

An Stelle des einen rechtwinkligen Dreieckes muß in manchen Fällen ein rechter Winkel treten, wie z. B. in Fig. 157.

3. Ist mit Hilfe der beiden rechtwinkligen Dreiecke ein auflösender Linienzug gefunden, so ist noch zu untersuchen, ob $+\operatorname{tg}\omega$ oder $-\operatorname{tg}\omega$ der Gleichung genügt, d. h. es ist zu untersuchen, in welchem Sinne $\sphericalangle\omega$ positiv gezählt werden muß. Es läßt sich wohl dafür eine Regel aufstellen, doch ist es vorteilhafter, in jedem speziellen Falle durch eine kleine Überlegung festzustellen, ob das gefundene x positiv oder negativ genommen werden muß.

Ist

$$a_0 = 1 ,$$

so ist die Wurzel x durch eine Strecke $\overline{XB}$ gefunden.

Bemerkung. Damit wurde gezeigt, wie man jede Gleichung dritten Grades und somit auch jede Gleichung vierten Grades durch Zuhilfenahme von zwei rechten Winkeln lösen kann.

Die Lösung selbst ist keineswegs eine näherungsweise, sondern eine strenge (§ 22).

Man bemerkt, daß der rechte Winkel das mächtigste der gewöhnlichen Zeichenhilfsmittel ist, mächtiger als der Zirkel; denn selbst mit Hilfe mehrerer Zirkel ist man nicht imstande, höhere Aufgaben als zweiten Grades zu lösen.

Beim Zeichnen hat man nicht selten Aufgaben dritten und vierten Grades zu lösen. Um dieselben streng durchführen zu können, hat man oft vorgeschlagen, den gebräuchlichen Zeichenhilfsmitteln noch ein höheres, z. B. eine Parabel ($y^2 + x = 0$) beizufügen. Man sieht aber aus obigem, daß dies nicht nötig ist.

§ 49. Konstruktion des regelmäßigen Siebeneckes und Neuneckes mit Hilfe von zwei rechten Winkeln.

1. Konstruktion des regelmäßigen Siebeneckes. Die Konstruktion des regelmäßigen Siebeneckes erfordert die Lösung der Gleichung (§ 42, 1)

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 . \tag{1}$$

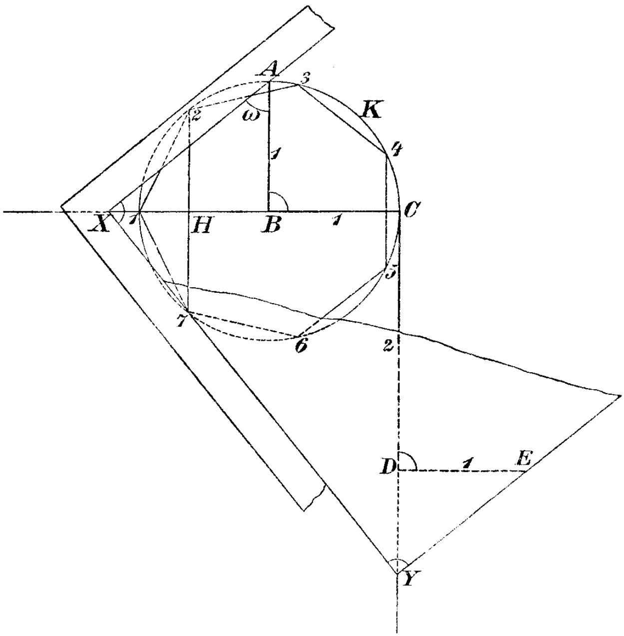

Fig. 157.

Man zeichne jenen Linienzug $ABCDE$ (Fig. 157), welcher die Gleichung (1) repräsentiert, und suche nach vorigem den auflösenden Linienzug $AXYE$. Dann ist schon:

$$\overline{XB} = y .$$

Nun suche man (§ 42, 1) den Mittelpunkt H der Strecke XB und errichte in H die Normale. Dieselbe schneidet den Kreis K in den Punkten 2 und 7 des eingeschriebenen Siebeneckes (Fig. 157).

2. Konstruktion des regelmäßigen Neuneckes. Die Konstruktion des regelmäßigen Neuneckes hängt ab von der Lösung der Gleichung (§ 42, 2):

$$y^3 - 3y + 1 = 0 . \tag{2}$$

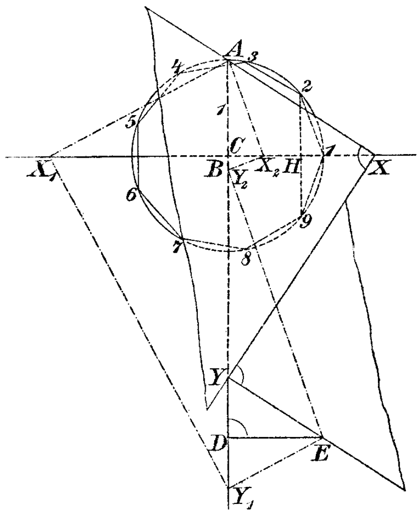

Fig. 158.

Diese Gleichung hat bekanntlich zwei positive und eine negative Wurzel, die größere der beiden positiven Wurzeln ist:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9} > 1 .$$

Zur Lösung der Gleichung (2) zeichne man (Fig. 158) den repräsentierenden Linienzug $ABCDE$ und jenen auflösenden Linienzug $AXYE$, für welchen

$$y = BX > 1 .$$

Aus dem Mittelpunkt H der Strecke $\overline{BX}$ findet man, wie früher, die Punkte 2 und 9 des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Neuneckes (Fig. 158).

§ 50. Visuelle Aufgaben dritten und vierten Grades.

Dies sind Aufgaben welche kein Maß enthalten, also auch durch Projektion auf eine beliebige Ebene ihren Wortlaut nicht ändern und welche, rechnerisch behandelt, auf Gleichungen dritten oder vierten Grades führen.

Die neuere Geometrie kennt zahlreiche visuelle Aufgaben dritten und vierten Grades. Eine Fundamentalaufgabe vierten Grades ist folgende:

„Gegeben sind zwei Kegelschnitte durch je fünf Bestimmungsstücke; es sind ihre Schnittpunkte zu bestimmen."

Diese Aufgabe läßt sich bekanntlich auf die Aufgabe dritten Grades zurückführen:

„Von zwei Kegelschnitten kennt man einen gemeinsamen Punkt und außerdem je vier weitere Punkte; die noch fehlenden drei Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte sind zu bestimmen."

Letztere Aufgabe ist die Fundamentalaufgabe dritten Grades.

Alle visuellen Aufgaben dritten und vierten Grades lassen sich auf diese beiden Aufgaben zurückführen.

Eine wichtige Aufgabe dritten Grades ist die Bestimmung der Doppelpunkte einer ebenen Kollineation, welche durch je vier Paar entsprechender Punkte gegeben ist; sie läßt sich auf die Fundamentalaufgaben zurückführen.

Jede Aufgabe dritten Grades hat wenigstens eine reelle Lösung und höchstens drei, gerade so wie jede Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten immer eine und höchstens drei reelle Lösungen hat.

Die Resultate der Arbeiten von Kortum-Smith lassen sich auch auf die visuellen Aufgaben dritten und vierten Grades anwenden. Wir können aber auf diese Aufgaben hier nicht näher eingehen, sondern müssen auf die Lehrbücher der neueren Geometrie verweisen.

IX. Abschnitt.

Geschichtliche Bemerkungen über die Quadratur des Zirkels; näherungsweise Rektifikation des Kreises; Regeln für genaues Konstruieren.

§ 51. Geschichtliche Bemerkungen über die Quadratur des Zirkels.

1. Die Quadratur des Zirkels fordert die Konstruktion eines Quadrates, welches einem gegebenen Kreise inhaltsgleich ist.

Man findet dasselbe, indem man ein Rechteck zeichnet, welches den halben Umfang des Kreises als Grundlinie, den Radius desselben als Höhe hat, und dieses Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt.

Es kommt also nur darauf an, den halben Umfang des Kreises zu konstruieren, den Halbkreis zu rektifizieren. Ist der Radius des Kreises gleich 1, so ist der halbe Umfang gleich π; die Aufgabe kommt daher auch darauf hinaus, eine Strecke zu zeichnen, welche genau gleich π ist.

Die Lösung dieser Aufgabe ist ein altberühmtes Problem. Schon in dem „Papyrus Rhind“ 2000 v. Chr. wird die Aufgabe behandelt, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln und zu diesem Zwecke folgende Vorschrift gegeben:

„Man nehme $\frac{8}{9}$ des Durchmessers als Seite des zu errichtenden Quadrates.“

Da

$$\tfrac{8}{9}\,d = \tfrac{16}{9}\,r \quad \text{und} \quad \left(\tfrac{16}{9}\right)^2 = 3{\cdot}16$$

ist, so bemerkt man, daß diese Vorschrift gar nicht so ungenau ist, jedenfalls für alle Zwecke des Feldmessens ausreicht.

Bei den Griechen ist die Quadratur des Zirkels und damit die Berechnung von π eine oft behandelte Aufgabe. Zu ihrer Lösung wurden auch wiederholt Kurven erdacht.

Archimedes berechnete die Zahl π mit Hilfe der dem Kreise eingeschriebenen und der ihm umschriebenen Vielecke. Seine Methode wurde von Huyghens ausgebaut. Um dieselbe Zeit (1600) berechnete Rudolf van Ceulen die Zahl π auf 20 Stellen; sie trägt auch seither seinen Namen.

Ein Jahrhundert später werden beim Ausbau der Differential- und Integralrechnung viele Entwickelungen und Reihen zur Berechnung von π angegeben.

Besonders merkwürdig ist die Wallissche Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

und die Leibnizsche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\cdots$$

Es wurden auch Reihen angegeben, welche gestatten, π leicht zu berechnen. Gegenwärtig ist π bis auf 700 Dezimalstellen berechnet.

Die ersten zehn Dezimalstellen von π sind:

$$\pi = 3{\cdot}1415926535\ldots$$

Lambert zeigte, daß π irrational ist; Legendre bewies, daß auch π^2 irrational ist*).

---

*) F. Rudio, „Archimedes, Hugghens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung“, Leipzig 1892.

Aber erst der jüngsten Zeit war es vorbehalten, die Natur der Zahl π zu erkennen und damit das Problem der Quadratur des Zirkels vollständig zu erledigen.

2. Man unterscheidet nämlich algebraische und transzendente Zahlen. Eine Zahl ist algebraisch, wenn sie die Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist.

Kann eine Zahl nicht als Wurzel einer solchen Gleichung dargestellt werden, so nennt man sie eine transzendente Zahl.

Lionville hat 1844 zuerst die Existenz transzendenter Zahlen nachgewiesen. Georg Cantor hat in einer grundlegenden Arbeit „Über die Eigenschaften des Inbegriffs algebraischer Zahlen" (Crelle J. Bd. 77, 1873) die Existenz transzendenter Zahlen auf bedeutend einfacherem Wege gezeigt.

Es lag die Mutmaßung nahe, daß π eine solche transzendente Zahl sei.

Hermite (Compt. r. 1873) bewies, daß e eine transzendente Zahl sei. Lindemann bewies in der Arbeit „Über die Zahl π" (Math. Ann. 20, 1882) auf Grund der Hermiteschen Arbeit zum ersten Male, daß auch π eine transzendente Zahl sei.

Die Entwickelungen von Lindemann wurden bedeutend vereinfacht zuerst von Weierstraß, dann von Hilbert, Hurwitz, Gordan (Math. Ann. 43), so daß gegenwärtig der Beweis ganz elementar gegeben werden kann.

Mit diesen Arbeiten ist das Problem der Quadratur des Zirkels vollständig erledigt, d. h. es ist streng nachgewiesen, daß die Lösung konstruktiv unmöglich ist.

Es ist aber damit nicht nur nachgewiesen, daß es unmöglich ist, mit Hilfe von Zirkel und Lineal eine gerade Linie zu zeichnen, welche dem Umfange eines gegebenen Kreises gleich ist, sondern es ergibt sich, daß diese Aufgabe auch unmöglich ist mittels eines Ellipsenzirkels, Konchoidenzirkels oder überhaupt eines Instrumentes, welches algebraische Kurven zeichnet.

Seine Lösung gelingt nur mittels eines Instrumentes, welches transzendente Kurven zeichnet.

Es fällt nicht schwer, einen Apparat zu ersinnen, welcher dazu brauchbare transzendente Kurven (z. B. $y = \arcsin x$) zeichnet und damit π konstruiert.

Ein Apparat, der zu diesem und noch manchem anderen Zwecke dient, ist der besonders sorgfältig ausgeführte Integraph von Abdank Abakanowitz. Er gestattet, zu einer gegebenen Kurve

$$y = f(x)$$

(der sogenannten Differentialkurve) die Integralkurve

$$y = \int f(x)\,dx$$

zu zeichnen.

---

§ 52. Näherungsweise Rektifikation des Kreises.

Für praktische Zwecke ist es wichtig, Methoden zu haben, welche auf einfachem Wege Strecken konstruieren, die dem Umfange eines vorgelegten Kreises nahezu gleich sind.

Derlei Methoden wurden auch in großer Anzahl gegeben. Es sollen im folgenden einige der wichtigsten dargelegt, früher aber eine Bemerkung eingeschaltet werden.

1. **Über die Genauigkeit einer ausgeführten Konstruktion.**

a) Keines der verwendeten Zeichenhilfsmittel ist vollkommen.

Beim Einsetzen der Zirkelspitze in einem gegebenen Punkte, beim Anlegen des Lineales an einem gegebenen Punkte, beim Schlagen eines Kreisbogens, beim Zeichnen einer geraden Linie werden selbst bei größter Sorgfalt Fehler in die Konstruktion hereingebracht.

Es ist zu bemerken, daß man beim Schlagen eines Kreisbogens einen kleineren Zeichenfehler begeht als beim Ziehen einer geraden Linie. Das verwendete Lineal ist nämlich in seinem ganzen Verlaufe niemals genau geradlinig; der Zeichenstift wird beim Ziehen der geraden Linie auch nicht immer in derselben Entfernung vom Lineal gehalten, einmal wegen der Abnutzung des

Zeichenstiftes, dann wegen der unvermeidlichen Drehung des Stiftes um seine Achse während des Zeichnens der geraden Linie.

b) Jeder Punkt einer Konstruktion wird bestimmt durch den Schnitt von zwei Linien; dieselben haben aber eine endliche Breite, so daß der mathematische Punkt innerhalb eines Parallelogrammes, welches als Rhombus angenommen werden kann, zu liegen kommt. Daraus entstehen beim Anlegen des Lineales an diesen Punkt und beim Einsetzen der Zirkelspitze in demselben wieder Zeichenfehler.

c) Man kann wohl annehmen, daß beim Zeichnen $\frac{1}{10}$ mm eine noch meßbare und unterscheidbare Strecke ist und daß demnach der Fehler beim Einsetzen der Zirkelspitze in einen schon konstruktiv gefundenen Punkt (Fleck) oder beim Anlegen des Lineales an einen solchen Fleck, daß endlich die Breite einer dünnen Konstruktionslinie (Strichbreite) und der Durchmesser eines Fleckes höchstens 0,1 mm betragen; sorgfältiges Zeichnen vorausgesetzt.

d) Es wäre für das praktische Zeichnen sehr wichtig zu untersuchen, in welcher Weise der Fehler des Resultates einer Konstruktion von den Zeichenfehlern der einzelnen angewendeten Grundkonstruktionen abhängt, und wie die ganze Zeichnung angelegt werden müßte, damit der wahrscheinliche Zeichenfehler möglichst klein, die Genauigkeit des Resultates möglichst groß wird.

Derartige Untersuchungen, welche auf Grund der Erfahrung nach der Methode der kleinsten Quadrate geschehen müssen, wurden zuerst von Chr. Wiener in seiner „Darstellenden Geometrie" (Bd. 1, S. 187—190) in einem speziellen Falle ausgeführt. Von F. Klein wurde (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, S. 358 ff.) auf die Wichtigkeit einer Fehlertheorie für die zeichnende Geometrie eindringlich hingewiesen.

Anschließend daran sind in jüngster Zeit Arbeiten erschienen, welche sich mit dieser Fehlertheorie beschäftigen; es sind die Inaugural-Dissertationen von: F. Geuer (Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen, behandelt nach dem Gaußschen Ausgleichungsverfahren, Freiburg 1902), P. Böhmer (Über geometrische Approximationen, Göttingen 1904), K. Nitz (Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Königsberg 1905). Letztere Arbeit enthält die eingehendere Literatur der ganzen Frage.

2. Wir wollen diese Betrachtungen auf die **Näherungskonstruktionen für die Rektifikation des Kreises anwenden.**

Da es unmöglich ist, eine Strecke zu zeichnen, welche dem Umfange des Kreises, streng genommen, gleich ist, so ist jede Konstruktion, welche diesen Zweck verfolgt, eine näherungsweise, und das mittels derselben gefundene Resultat würde sich auch bei ideal vollkommenen Zeichenhilfsmitteln von dem gesuchten Resultate um eine Strecke f_1 unterscheiden, welche sich berechnen läßt.

Außer diesem theoretischen Fehler f_1 tritt bei der Ausführung der Konstruktion selbst noch ein Zeichenfehler f_2 hinzu. Der gesamte Fehler f ist also

$$f = f_1 + f_2 .$$

Soll f ein Minimum werden, so genügt es nicht, f_1 allein möglichst klein zu machen, es muß auch f_2 wahrscheinlich klein werden; f_2 ist im allgemeinen um so größer, je größer die Anzahl der verwendeten Zeichenoperationen ist.

Es gibt nun Näherungskonstruktionen, welche π bis auf zehn Dezimalstellen theoretisch genau geben, so daß also f_1 kleiner ist als eine Einheit der zehnten Dezimalstelle. Da aber diese Konstruktionen sehr kompliziert sind, so wird f_2 vielleicht schon eine Einheit der zweiten Dezimalstelle ausmachen. Eine derartige Konstruktion hat daher keinen praktischen Wert.

Eine Näherungskonstruktion wird dann praktischen Wert haben, wenn sie möglichst wenig Zeichenoperationen erfordert; es genügt dabei, wenn f_1 kleiner als 0·1 mm wird.

a) Eine praktisch meist ausreichende Näherungskonstruktion folgt aus dem Satze, daß der Umfang des Kreises nahezu $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers ist.

Da

$$3\tfrac{1}{7} = 3{\cdot}14286\,,$$

so muß man noch

$$f_1 = -0{\cdot}0013$$

hinzufügen, um

$$\pi = 0{\cdot}1416$$

zu erhalten. Ist der Durchmesser des Kreises 10 cm, so ist also f_1 ungefähr $\frac{1}{8}$ mm, d. h. für alle Kreise, deren Radien kleiner als 5 cm sind, ist diese Konstruktion vollständig ausreichend.

b) Eine zweckmäßige Methode zur Rektifikation eines Kreisbogens besteht auch in dem Abtragen kleiner, gleicher Sehnen auf dem Kreisbogen und auf einer Geraden.

Man begeht dabei wieder zwei Fehler, den theoretischen f_1, welcher aus dem Unterschiede zwischen Sehne und Bogen hervorgeht, und einen Zeichenfehler f_2, welcher von der Ungenauigkeit des Übertragens abhängt und mit der Anzahl der Operationen zunimmt.

Es wird sich nicht empfehlen, zu kleine Strecken aufzutragen, sondern für einen Kreis mit dem Radius 5 cm z. B. eine Sehne von ungefähr 5 mm, also eine Sehne, welche sich auf dem Kreise 20- bis 25mal auftragen läßt.

c) Außer diesen Näherungskonstruktionen gibt es noch einige besonders bemerkenswerte Konstruktionen, welche den ganzen oder halben Umfang oder den vierten Teil des Umfanges direkt als Strecke näherungsweise liefern.

Wir erinnern zunächst an die Konstruktion von Mascheroni (§ 20). Sie gestattet, mit dem Zirkel allein eine Strecke s zu finden, welche gleich 1·5711996 ist, welche also dem vierten Teile des Kreises

$$\frac{\pi}{2} = 1{\cdot}5707963$$

nahe kommt.

Der theoretische Fehler f_1 beträgt dabei $\frac{4}{10000}$; die Konstruktion ist daher völlig ausreichend für Kreise, deren Radien kleiner als 50 cm sind.

Da sie mit Hilfe des Zirkels allein in einfacher Weise ausgeführt werden kann, so dürfte sie zu den besten bekannten Rektifikationsmethoden zählen.

d) Specht gibt (in Crelle J. Bd. 3) eine Methode an, die sehr genaue Resultate liefert:

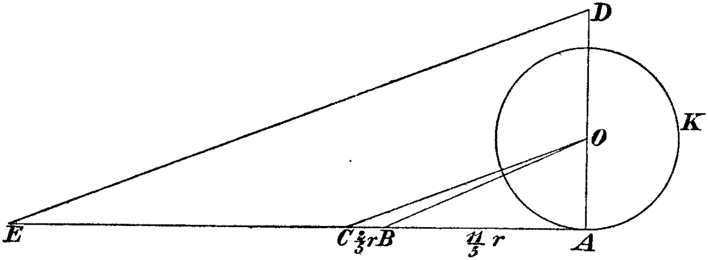

Fig. 159.

Es sei der Kreis K mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r gegeben. Man ziehe den Durchmesser OA (Fig. 159), in A die Tangente und konstruiere die Punkte B und C auf dieser Tangente so, daß

$$\overline{AB} = \tfrac{11}{5} r\,,$$
$$\overline{BC} = \tfrac{2}{5} r$$

ist. Nun bestimme man auf dem Durchmesser OA jenen Punkt D, für welchen

$$\overline{AD} = \overline{OB}$$

ist, und ziehe durch D die Parallele zu OC.

Die Strecke AE ist nahezu gleich dem Umfange des Kreises.

Es ist nämlich

$$\overline{OB} = \frac{r}{5}\sqrt{146}\,,$$

$$\overline{AC} = \tfrac{13}{5} r\,.$$

Daher

$$AE = \frac{13\,r}{25}\sqrt{146} = r \cdot 6{\cdot}283184\,,$$

während der berechnete Umfang

$$u = r \cdot 6{\cdot}283185$$

beträgt.

Der theoretische Fehler f_1 ist folglich $\frac{r}{10^6}$. Diese Methode besitzt, theoretisch genommen, eine sehr große Genauigkeit; erst bei einem Radius von 100 m würde $f_1 = \frac{1}{10}$ mm sein.

e) Es soll noch eine einfache Näherungskonstruktion gegeben werden.

K sei der zu rektifizierende Kreis und AB ein Durchmesser desselben (Fig. 160).

Man ziehe in A die Tangente an den Kreis, bestimme den Punkt C so, daß

$$\sphericalangle COA = 30^0$$

ist, ferner auf der Tangente jenen Punkt D, für welchen

$$\overline{CD} = 3\,r$$

beträgt.

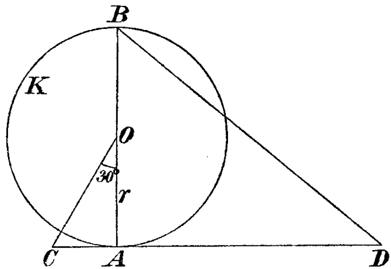

Fig. 160.

Dann ist $\overline{BD}$ nahezu der halbe Umfang des Kreises.

Es ist nämlich

$$\overline{AC} = \frac{r}{3}\sqrt{3}\,,$$

daher

$$\overline{AD} = 3\,r - \frac{r}{3}\sqrt{3}$$

und

$$\overline{BD} = r\sqrt{4 + \frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}} = \frac{r}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$$

$$= r \cdot 3{\cdot}141533\,,$$

während

$$\frac{u}{2} = r \cdot 3{\cdot}141593 \, .$$

Der theoretische Fehler f_1 ist daher gleich $\frac{6}{1000000}$; also erst für einen Radius von 2 m beträgt $f_1 = \frac{1}{10}$ mm.

---

§ 53. Regeln für genaues Konstruieren.

1. Die beiden Punkte A und B einer Konstruktion seien durch eine gerade Linie g zu verbinden (Fig. 161); A und B sind dabei (S. 269, b) durch den Schnitt von je zwei Linien von endlicher gleicher Breite gegeben.

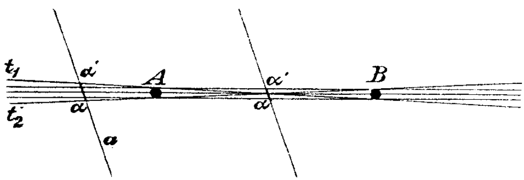

Fig. 161.

A und B liegen demnach je in einem Bereiche, der für unseren Zweck als Kreis angesehen werden kann.

Beim Anlegen des Lineales an beide Punkte kann man demselben nicht nur eine Lage geben, sondern sehr viele; man kann es in einem Bereiche bewegen, welcher durch die beiden Kreistangenten t_1, t_2 zum großen Teile begrenzt wird, wobei t_1 und t_2 als Streifen von der Breite 0·1 mm angenommen werden können.

Sucht man den Schnitt einer zweiten Geraden a mit dieser gezeichneten Geraden g, so wird derselbe innerhalb einer Strecke $\alpha\alpha'$ liegen, wenn die Gerade a für den Augenblick als unendlich dünn angenommen wird.

Man erkennt aus diesen Überlegungen die Richtigkeit folgender zwei Regeln, welche bei genauem Konstruieren beachtet werden müssen (Wiener, „Darstellende Geometrie", 1. Bd. S. 190).

a) Soll eine Gerade g in ihrem ganzen Verlaufe möglichst sicher bestimmt sein, so ist es angezeigt, die sie bestimmenden Punkte A und B tunlichst weit voneinander entfernt anzunehmen.

b) Soll der Schnittpunkt S von zwei Geraden g und a möglichst sicher bestimmt werden, so empfiehlt es sich, beide Gerade durch Punkte zu bestimmen, welche möglichst nahe dem gesuchten Schnittpunkte S zu liegen kommen.

2. Gegeben seien zwei gezeichnete Gerade g_1 und g_2; ihr Schnittpunkt S liegt in einem Rhombus von der Breite der gezeichneten Linien.

Schneiden sich die beiden Geraden rechtwinklig, so geht dieser Rhombus in ein Quadrat über; schneiden sie sich unter einem sehr spitzen Winkel, so wird dieser Rhombus eine sehr gestreckte Figur sein.

Will man diesen Schnittpunkt mit einem weiteren Punkte P verbinden, so bemerkt man, daß diese Verbindungslinie sich für beliebige Lagen des Punktes P nur dann sicher bestimmen läßt, wenn der Winkel $g_1 g_2$ nahezu ein rechter ist; ist dagegen der Winkel $g_1 g_2$ ein sehr spitzer, so ist die Verbindungslinie PS nur dann scharf zu zeichnen, wenn P innerhalb des spitzen Winkels liegt.

Daraus ergibt sich eine Regel, welche auch bei genauem Konstruieren zu beachten ist.

c) Soll der Schnittpunkt S von zwei geraden Linien g_1 und g_2 zur genauen Bestimmung beliebig weiterer Geraden dienen, so müssen sich g_1 und g_2 unter einem Winkel schneiden, der wenig von einem rechten Winkel abweicht. Zwei gerade Linien g_1 und g_2, die sich unter einem spitzen Winkel schneiden, können aber auch zur sicheren Bestimmung von geraden Linien dienen, wenn dieselben nur kleine Winkel mit g_1 und g_2 bilden.

Man kann mit Wiener a. a. O. noch eine zu beachtende Zeichenregel aufstellen.

d) Man konstruiere nur mit Zirkelöffnungen, welche kleiner als 60^0 sind, da bei größerer Zirkelöffnung durch das Federn der Zirkelspitze Ungenauigkeiten in das Resultat kommen.

3. Auf Grund dieser Regeln führt Wiener a. a. O. einige Elementarkonstruktionen aus. Wir wollen nur eine derselben wiedergeben:

„Die Strecke AB sei möglichst genau zu halbieren."

Man nehme eine Strecke, welche wenig größer als $\frac{1}{2}\overline{AB}$ ist, schlage damit Kreise um A und B und verbinde die so erhaltenen Schnittpunkte S_1 und S_2.

Die Punkte S_1 und S_2 liegen nahe aneinander; ihre Verbindungslinie wird daher im weiteren Verlaufe nicht scharf bestimmt sein; aber ihr Schnittpunkt mit der Strecke AB wird sich in aller Schärfe ergeben (Regeln b und c).

X. Abschnitt.

Geometrographie.

§ 54. Die Annahmen von Lemoine.

1. Am Schlusse des vorigen Abschnittes wurden einige Regeln über genaues Konstruieren gegeben und vorher einiges über den wahrscheinlichen Fehler einer tatsächlich durchgeführten Konstruktion gesagt.

Es wurde dabei erwähnt, daß letztere praktisch so wichtige Frage erst in jüngster Zeit untersucht wurde, trotz der großen Reihe von Jahren, in der man schon geometrische Konstruktionen erörtert.

Dies hat seinen Grund hauptsächlich darin, daß man sich immer an die von den Alten überlieferte Weise hielt, wonach eine Konstruktion als gelöst betrachtet wird, sobald nachgewiesen wurde, durch welche Mittel sie sich auf andere vorher durchgenommene Aufgaben zurückführen läßt; die Konstruktion selbst wurde in vielen Fällen gar nicht durchgeführt. Einfachheit und Genauigkeit einer geometrischen Lösung spielten daher gar keine Rolle.

Jakob Steiner war wohl der erste, der in seinem Werke („Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises") ausdrücklich darauf hinwies, daß es etwas ganz anderes ist, die Konstruktionen in der Tat, d. h. mit den Instrumenten in der Hand oder bloß, wie er sagt, mit der Zunge auszuführen.

Er sagt: „Es läßt sich gar leicht sagen, ich tue das und das und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen die Unmöglichkeit, Konstruktionen, welche in höherem Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, daß man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welche von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung die einfachste sei, wie viel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu ersparen oder die größte Genauigkeit zu erreichen.

Es kommt also mit einem Worte darauf an, zu untersuchen, auf welche Weise geometrische Aufgaben theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten und am sichersten konstruiert werden können."

Ein Teil seines Wunsches ist in Erfüllung gegangen.

Die Theorie der Zeicheninstrumente, d. h. die Fragen: welche Aufgaben kann man mit dem Zirkel allein, mit dem Lineal allein, mit dem rechten Winkel allein lösen, ist, wie wir in den früheren Abschnitten gesehen haben, zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Die Frage der Einfachheit einer Konstruktion soll in diesem Abschnitte erörtert werden.

2. Gesetzt, es sei möglich, ein und dieselbe Aufgabe auf mehreren Wegen konstruktiv durchzuführen; es liegt dann die Frage nahe, welcher von diesen Wegen der einfachste sei.

Man wird darauf sofort antworten: Derjenige, welcher bei der tatsächlichen Ausführung weniger Linien enthält.

Es ist auch vielfach gebräuchlich (Wiener, Darstellende Geometrie 1. Bd.), bei gelösten Aufgaben die Anzahl der gezeichneten Kreise und Geraden anzugeben.

Lemoine geht etwas weiter; er bestimmt nicht nur die Anzahl der gezeichneten Linien, sondern zählt dazu noch die vorbereitenden Operationen, worunter er das Anlegen eines Lineales an einen Punkt und das Einsetzen des Zirkels in einem gegebenen Punkte versteht.

Er nimmt an: Jede mittels Zirkel und Lineal zu zeichnende Konstruktion setzt sich aus vier Elementaroperationen zusammen.

Diese Elementaroperationen sind die folgenden:

1. Das Anlegen des Lineales an einen gegebenen Punkt.

Lemoine bezeichnet dies mit: Operation R_1 oder kurz: op: (R_1). Das Anlegen des Lineales an zwei gegebene Punkte bezeichnet er demgemäß mit: op: $(2R_1)$.

2. Das Einsetzen einer Zirkelspitze in einem gegebenen Punkte oder in einem beliebigen Punkte einer gegebenen geraden Linie.

Er bezeichnet dies mit: op: (C_1). Das Einsetzen der beiden Zirkelspitzen in zwei gegebenen Punkten bezeichnet er also mit: op: $(2C_1)$.

3. Das Ziehen einer geraden Linie längs des Lineales.

Er bezeichnet dies mit: op: (R_2).

4. Das Beschreiben eines Kreises oder eines Kreisbogens.

Lemoine bezeichnet dies mit: op: (C_2).

Zu jeder ausgeführten Konstruktion gehört dementsprechend ein Ausdruck

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 .$$

Lemoine nennt diesen Ausdruck das Symbol der Konstruktion.

Außerdem setzt Lemoine die Summe

$$l_1 + l_2 + m_1 + m_2 = S ,$$

die Summe

$$l_1 + m_1 = E$$

und nennt S (Simplicité) den Koeffizienten der Einfachheit oder auch den Grad der Einfachheit oder kurz die Einfachheit der Konstruktion und E (Exactitude) kurz die Genauigkeit der Konstruktion.

3. Wir wollen die Lemoineschen Annahmen an einer Aufgabe erläutern.

„Ein Winkel sei durch seine beiden Schenkel gegeben; es ist die Halbierende desselben zu zeichnen."

Man schlägt zu diesem Zwecke gewöhnlich folgenden Weg ein: Man setzt mit einer Zirkelspitze im Scheitel O ein $(1C_1)$ und beschreibt einen Kreis mit einem beliebigen Radius $(1C_2)$, welcher die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B schneidet. Nun setzt man in A mit derselben Zirkelöffnung ein $(1C_1)$, schlägt einen Kreisbogen ($1\,C_2$), setzt hierauf mit derselben Zirkelöffnung in B_1 ein ($1\,C_1$) und zeichnet einen Kreisbogen ($1\,C_2$), welcher den Kreis mit dem Mittelpunkte A im Punkte D schneidet. Schließlich legt man das Lineal in O und D an ($2\,R_1$) und zieht die Linie OD ($1\,R_2$).

Das Lemoinesche Symbol für diese Konstruktion ist also:

op: $(2\,R_1 + R_2 + 3\,C_1 + 3\,C_2) = (9;\,5)$ (1 Gerade, 3 Kreise).

Das Symbol gibt die Gesamtheit der verwendeten Elementaroperationen an, nicht aber die Reihenfolge, in welcher sie angewendet wurden.

Die Zahl 9, welche der Gesamtheit der verwendeten Elementaroperationen gleich ist, nennt Lemoine die Einfachheit der Konstruktion. Die Zahl 5, welche die Summe der vorbereitenden Operationen, also die Summe der Koeffizienten von R_1 und C_1 ist, bezeichnet Lemoine als die Genauigkeit dieser Konstruktion.

4. Bei jeder Konstruktion gibt Lemoine das Symbol, die Zahlen S und E, ferner die Anzahl der gezeichneten Geraden und die Anzahl der gezeichneten Kreise an.

Wenn eine Aufgabe auf mehreren Wegen konstruktiv lösbar ist, so nennt Lemoine diejenige Lösung, welcher die kleinste Zahl S zukommt, die geometrographische. Das Aufsuchen derartiger Lösungen bildet die Hauptaufgabe der Geometrographie Lemoines*).

§ 55. Kritik der Lemoineschen Annahmen und Erweiterung derselben.

1. Lemoine nennt die Summe S sämtlicher Elementaroperationen, welche bei einer ausgeführten Konstruktion vorkommen, die Einfachheit der Konstruktion.

Dies setzt voraus, daß obige Elementaroperationen als gleichwertig anzusehen sind, was ihre Einfachheit anbelangt; darüber kann man aber verschiedener Ansicht sein.

*) E. Lemoine, „Géométrographie ou art des constructions géométriques, Paris, Sammlung Scientia Nr. 18.

Die meisten Zeichner dürften z. B. das Ziehen einer geraden Linie für weniger einfach halten als das Anlegen des Lineales an einen Punkt.

Aus der Erfahrung läßt sich nicht entscheiden, welche von vier Operationen (S. 279) die einfacheren sind, so daß man sie mit Lemoine als gleichwertig annehmen kann.

Man kann daher die Zahl S insofern mit der Einfachheit in Beziehung bringen, als man behaupten kann: „Von zwei konstruktiven Lösungen derselben Aufgabe ist diejenige die einfachere, für welche die zugehörige Zahl S die kleinere ist.“

2. Die Summe E der vorbereitenden Konstruktionen, also die Summe der Koeffizienten von R_1 und C_1 in dem Symbol nennt Lemoine die Genauigkeit der Konstruktion.

Diese Annahme läßt sich keineswegs rechtfertigen. Durch dieselbe wird die Genauigkeit der Konstruktion nur in Abhängigkeit gebracht von dem Anlegen des Lineales an einen Punkt und dem Einsetzen der Zirkelspitze in einem Punkte; es wird also angenommen, daß nur durch diese beiden Operationen Fehler in die Zeichnung hineinkommen und daß die weiteren, ausführenden Operationen, das Zeichnen von geraden Linien und das Schlagen von Kreisbogen, keine Fehler hervorbringen.

Nun wissen wir aber nach früherem, daß besonders das Zeichnen der geraden Linie aus mehreren Gründen Zeichenfehler in die Konstruktion hineinbringt, die größer sind als jene, welche das Schlagen von Kreisbogen erzeugt, und wahrscheinlich auch größer als jene, welche aus dem Anlegen des Lineales an einen Punkt und aus dem Einsetzen der Zirkelspitze in einem gegebenen Punkte resultieren.

Die Zahl E kann daher mit der Genauigkeit der Konstruktion nicht in Beziehung gebracht werden; sie hat keinen praktischen Wert für die Konstruktion. Wir wollen sie im folgenden immer weglassen.

3. Lemoine unterscheidet für das Zeichnen mit dem Zirkel zwei vorbereitende Operationen:

1. Das Einsetzen der Zirkelspitze in einem gegebenen Punkte.

2. Das Einsetzen der Zirkelspitze in einem beliebigen Punkte einer Geraden.

Er unterscheidet beide Operationen durch besondere Zeichen.

Wir haben sie der Einfachheit halber durch dasselbe Zeichen C_1 bezeichnet*).

4. Oben wurde erwähnt, daß es schon lange üblich ist, die Anzahl der gezeichneten Linien als Maßstab für die Einfachheit einer Konstruktion zu betrachten.

Man muß aber zugestehen, daß erst infolge der Anregungen Lemoines ein allgemeines Interesse an derartigen Fragen der Geometrie entstand, die Lösungen der Aufgaben wirklich durchgezeichnet, ihre Symbole aufgestellt, ihre Einfachheit aufgesucht wurden und darnach gestrebt wurde, einfachere Konstruktionen zu erhalten.

Dabei bestätigte sich das oben zitierte Steinersche Wort, daß es etwas ganz anderes sei, die Konstruktion tatsächlich oder bloß mit dem Munde durchzuführen.

Es stellte sich heraus, daß selbst die uns überlieferten fundamentalen, planimetrischen Konstruktionen zu vereinfachen oder sogar durch einfachere zu ersetzen sind, natürlich nur unter der Voraussetzung, daß das Wort Einfachheit in dem oben definierten Lemoineschen Sinne genommen wird.

Auch bei komplizierteren Konstruktionen ergab sich, daß nicht selten Konstruktionen, die allgemein als die einfachsten und elegantesten Lösungen der Aufgabe galten, bei ihrer tatsächlichen Ausführung und nach der genauen Bestimmung des Symboles der Durchführung hinter Konstruktionen zurücktraten, welche als weniger einfach und elegant galten, was ihre Einfachheit anbelangt.

So z. B. gilt die in § 7 gegebene Gergonnesche Methode allgemein als die eleganteste und einfachste Lösung des Apollonischen Berührungsproblemes. Führt man die Konstruktion durch, so bemerkt man jedoch,

*) Ebenso J. Reusch, „Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung", Leipzig 1904.

daß die ihr zugehörige Zahl S größer wird als die, welche aus scheinbar weniger einfachen Lösungen dieses Problemes resultieren*).

5. Außer dem Zirkel und dem Lineale werden beim Zeichnen noch das Parallellineal (zwei parallele Linien in konstantem Abstande) und der bewegliche rechte Winkel (etwa aus Holz) verwendet. Soll man z. B. zwei parallele, sonst aber beliebige Gerade ziehen, so wird man dieselben nicht konstruieren, sondern einfach längs der beiden Kanten des vorhandenen Parallellineales gerade Linien ziehen und damit das Gewünschte erhalten.

Soll man, um ein anderes Beispiel zu geben, in dem Punkte P einer gezeichneten Geraden g die Normale auf g errichten, so wird man diese Konstruktion nicht mit dem Zirkel und der geraden Linie durchführen, sondern man wird den beweglichen Winkel (das rechtwinklige Dreieck) richtig anlegen und die gesuchte Gerade sofort erhalten.

Das Lineal und der rechte Winkel müssen dabei möglichst korrekte Zeicheninstrumente sein, um genaue Resultate zu erhalten; dieselbe Forderung muß aber für jedes Zeicheninstrument gestellt werden.

Sowohl das Parallellineal als auch der rechte Winkel genügen jedes für sich allein, um jede quadratische Konstruktionsaufgabe zu lösen, wie im IV. Abschnitte auseinandergesetzt wurde. Die Konstruktionen mit dem Parallellineal haben für viele Zwecke, z. B. für die Feldmeßkunst, besonderen Wert, und der rechte Winkel ist, wie wir in § 48 gesehen haben, sogar ein sehr mächtiges Zeicheninstrument, da man mit mehreren rechten Winkeln zusammen auch Aufgaben dritten Grades streng konstruktiv lösen kann.

*) Was die Literatur dieses Gegenstandes anbelangt, so sind außer der schon erwähnten Originalarbeit von Lemoine und der zusammenfassenden auch schon angegebenen Arbeit von Reusch noch zu nennen: R. Güntsche, Beiträge zur Geometrographie, Archiv f. M. u. Ph. 3. Reihe, 3. u. 6. Bd.; Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, 1902; Zeitschrift f. math. und naturw. Unterricht 1903; Unterrichtsblätter für Math. und Nat. 1902; H. Bodenstedt, Unterrichtsblätter für Math. und Nat. 1904.

Es empfiehlt sich daher, die Grundoperationen nicht auf die gerade Linie und den Kreis zu beschränken, sondern sie auch auf das Parallellineal und den beweglichen rechten Winkel zu erweitern, da diese Instrumente beim tatsächlichen Konstruieren auch verwendet werden.

Wir wollen demnach die Lemoineschen Elementaroperationen durch folgende erweitern:

A) Mit dem Parallellineal (zwei parallele Linien in konstantem Abstande) kann man folgende zwei neue Elementaroperationen vornehmen:

a) Man kann das Parallellineal so in die Zeichenfläche legen, daß eine seiner Kanten mit einer schon gezeichneten Geraden zusammenfällt. (Siehe Aufgabe 166, Fig. 98.)

Wir wollen diese Operation als gleichwertig mit dem Anlegen des Lineales an zwei gegebene Punkte annehmen und sie daher mit: op: $(2R_1)$ bezeichnen.

b) Bei manchen Konstruktionen (siehe Aufgabe 165) ist es nötig, das Parallellineal so in die Zeichenfläche zu legen, daß eine seiner Kanten durch einen gegebenen Punkt geht, während die zweite seiner Kanten durch einen zweiten gegebenen Punkt geht.

Diese Operation betrachten wir auch als gleichwertig mit dem Anlegen des Lineales an zwei gegebene Punkte und bezeichnen sie daher mit: op: $(2R_1)$.

B) Mit einem rechten Winkel (etwa aus Holz) kann man folgende drei neue Elementaroperationen vornehmen:

a) Man kann den rechten Winkel so legen, daß einer seiner Schenkel auf eine schon gezeichnete gerade Linie zu liegen kommt: op: $(2R_1)$.

b) Bei manchen Aufgaben muß man den rechten Winkel so in die Zeichenfläche legen, daß jeder seiner Schenkel durch gegebene Punkte hindurchgeht: op: $(2R_1)$.

c) Manche Aufgaben (siehe Aufgabe 176) fordern, den Winkel so zu legen, daß sein Scheitel auf eine gezeichnet vorliegende Linie zu liegen kommt.

Wir bezeichnen dies mit: op: (W_1).

Legt man den rechten Winkel so in die Zeichenfläche, daß sein Scheitel auf dem gegebenen Punkte P der gegebenen Geraden g fällt und einer seiner Schenkel auf g zu liegen kommt, so ist diese Operation demnach op: $(R_1 + W_1)$.

C) Wir nehmen endlich an, es sei nötig, den rechten Winkel so zu legen, daß sein Scheitel auf einer geraden oder krummen Linie sich befindet, außerdem sei die Lage des Scheitels durch einen hinzugefügten Punkt zu markieren.

Wir bezeichnen diese Operation durch: op: (P_1).

4. Ein Beispiel soll diese Annahmen erläutern:

Zum Zwecke der Lösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe (Aufgabe 176 z. B.) sei der rechte Winkel so in die Zeichenfläche gelegt worden, daß einer seiner Schenkel durch den gegebenen Punkt A, der andere durch den gegebenen Punkt B hindurchgeht, außerdem sein Scheitel auf der geraden Linie g zu liegen kommt und daß die Lage des Scheitels markiert werden mußte.

Das Symbol dieser Konstruktion ist dann:

$$\text{op: } (2\,R_1 + W_1 + P_1)\,.$$

5. Wir wollen nun diese (Nr. 3) Elementarkonstruktionen jenen von Lemoine hinzufügen, ferner wollen wir sie sämtlich als gleichwertig und ihre Summe S als maßgebend für die Einfachheit der ausgeführten Konstruktion annehmen.

Bemerkung. Es ist nicht möglich, die Gleichwertigkeit dieser Operationen nachzuweisen, man kann diese Gleichwertigkeit nur annehmen.

Wir sind bei der Aufstellung der Bezeichnung der Elementaroperationen von dem Standpunkte ausgegangen, möglichst wenig neue Symbole einzuführen.

Vorausgesetzt wird auch hier, daß alle benutzten Zeichenhilfsmittel für jede vorliegende Konstruktion die passende Größe haben, also weder zu groß noch zu klein sind. Dieselben Annahmen macht auch Lemoine von seinen Zeichenhilfsmitteln.

Nicht selten ist jedoch die tatsächliche Ausführung einer Konstruktion nach der gewöhnlichen angewendeten

(„normalen") Methode durch ungünstige Lageverhältnisse erschwert oder unmöglich gemacht; wie man sich in diesen Fällen helfen kann, haben: A. Wittihg, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene (Progr. Nr. 564, Gymn. z. h. Kreuz, Dresden 1899) und Paul Zühlke, Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen (Progr. Nr. 150, Oberrealschule zu Charlottenburg, Ostern 1906) gezeigt.

---

§ 56. Beispiele und Übungsaufgaben.

1. In den folgenden Beispielen und Übungsaufgaben sollen nicht nur der Zirkel und das Lineal, sondern auch das Parallellineal und der rechte Winkel als gleichwertige Zeicheninstrumente angesehen werden, wie es ja in der Praxis der Fall ist.

Es entsteht folgende zu lösende Hauptaufgabe.

„Es sind sämtliche einfache und wichtige Konstruktionen durchzuzeichnen unter Benutzung sämtlicher Zeicheninstrumente; es ist jedesmal das Symbol und die Einfachheit der Konstruktion anzugeben, und insbesondere sind jene Konstruktionen zu suchen, deren Einfachheitsgrad möglichst klein ist."

Derartige geometrographische Konstruktionen werden wirklichen praktischen Wert haben.

2. Im folgenden sollen nur einige der einfachsten Konstruktionen durchgeführt werden unter Benutzung sämtlicher Zeichenhilfsmittel, es soll ihr Symbol und insbesondere ihr Einfachheitsgrad S bestimmt werden.

Die Zahl S_1, welche bei einigen dieser Aufgaben steht, bedeutet den geringsten Einfachheitsgrad, welcher bisher bei diesen Konstruktionen erreicht wurde, wenn man mit Lemoine nur Zirkel und Lineal als Zeichenhilfsmittel zuläßt.

3. Hilfskonstruktionen.

209. Zwei aufeinander senkrechte, sonst aber beliebige Gerade sind zu konstruieren.

Die Lösung erfolgt mittels eines rechten Winkels op: $(2R_2)$, $S = 2(S_1{}^{*)} = 8)$.

210. Gegeben sind die Gerade g und auf ihr der Punkt P; es ist durch P die Normale x auf g zu zeichnen.

Dies geschieht mittels des rechten Winkels

$$\text{op}: (R_1 + R_2 + W_1)\,, \quad S = 3(S_1{}^{*)} = 8)\,.$$

211. Gegeben ist die Strecke AB; es ist ihre Symmetrale zu konstruieren.

Klassische Konstruktion. Man schlage die Kreise $A(r)$ **), $B(r)$ und verbinde die so erhaltenen Schnittpunkte C und D.

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2)\,, \quad S = 7\,.$$

Diese uns überlieferte, sogenannte klassische*), Konstruktion ist auch gleichzeitig jene mit dem kleinsten Einfachheitsgrade.

(Wir haben in § 23 gezeigt, wie man eine Strecke mit Hilfe des Lineales halbiert und in § 24, wie man die Strecke mit Hilfe des rechten Winkels halbiert; man stelle das Symbol für diese beiden Konstruktionen auf und bestimme ihre Einfachheit.)

212. Gegeben sind eine Gerade g und außerhalb der Punkt P; es ist von P aus die Normale x auf g zu fällen.

Die Lösung geschieht mit Hilfe des rechten Winkels: Man lege denselben an g an, verschiebe ihn solange, bis sein zweiter Schenkel durch P geht und ziehe dann die gesuchte Normale.

$$\text{op}: (3R_1 + R_2)\,, \quad S = 4(S_1{}^{*)} = 9)\,.$$

213. Es sind zwei parallele, sonst aber ganz beliebige Gerade zu ziehen. Dies geschieht mit Hilfe des Parallellineales.

$$\text{op}: (2R_2)\,, \quad S = 2(S_1{}^{*)} = 8)\,.$$

---

*) Reusch a. a. O.

**) $A(r)$ bedeutet den Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius r.

214. Gegeben sei die Strecke d und die Gerade g; es ist eine Gerade x parallel zu g im Abstande d von g zu konstruieren.

Man ziehe mit Hilfe des rechten Winkels auf g eine beliebige Normale $(2R_1 + R_2)$, trage vom Schnittpunkte derselben mit g die Strecke d mittels des Zirkels auf $(3C_1 + C_2)$ und zeichne mit Hilfe des rechten Winkels in dem so erhaltenen Punkte die gesuchte Parallele $x(W_1 + R_1 + R_2)$; zusammen also:

$$\text{op: } (3R_1 + 2R_2 + 3C_1 + C_2 + W_1)\,, \quad S = 10(S_1{}^{*)} = 15)\,.$$

215. Gegeben sind die Gerade g und der Punkt P; es ist durch P die Parallele zu g zu konstruieren.

Wir wollen zunächst zwei Konstruktionen anführen, welche bisher geometrographisch waren*):

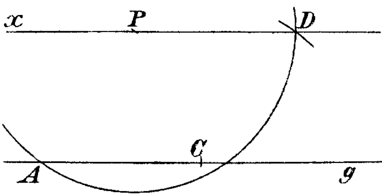

Fig. 162.

a) Man beschreibe um P den Kreis $P(r)$ mit nicht zu kleinem Radius (Fig. 162), außerdem den Kreis $A(r)$, wodurch man den Punkt C erhält. Schlägt man den Kreis $C(r)$, welcher den Kreis $P(r)$ in dem Punkte D schneidet, so ist PD die gesuchte Linie x.

$$\text{op: } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 9\,.$$

b) Man schlage einen beliebigen durch P gehenden Kreis K (Fig. 163), welcher g in A und B schneidet; macht man nun mit dem Zirkel

$$\widehat{BC} = \widehat{AP}\,,$$

so ist PC die gesuchte Gerade x.

$$\text{op: } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2)\,, \quad S = 9\,.$$

Mit Zuhilfenahme des rechten Winkels schlägt man folgenden Weg ein:

Man legt den Winkel so in die Zeichenfläche, daß einer seiner Schenkel mit g zusammenfällt und der andere

*) Reusch a. a. O.

Schenkel durch P geht $(3R_1)$, zieht durch P die Normale n auf $g(R_2)$, legt ferner den rechten Winkel so an n, daß sein Scheitel auf P liegt und zeichnet x.

$$\text{op: } (4R_1 + 2R_2 + W_1)\,, \quad S = 7\,.$$

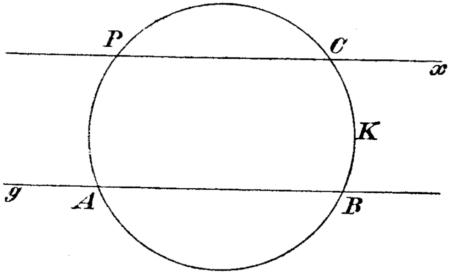

Fig. 163.

216. Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr der Punkt P; durch P ist eine Gerade zu ziehen, welche mit g den Winkel von 30^0 oder 45^0 einschließt.

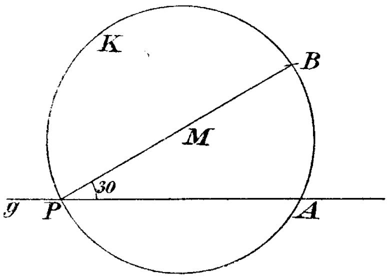

Fig. 164.

a)*) Man zeichne durch P einen Kreis K mit beliebigem Radius r und ferner den Kreis $A(r)$, wodurch man den Punkt B erhält (Fig. 164); dann ist

$$\sphericalangle\, BPA = 30^0$$

$$\text{op: } (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2)\,, \quad S = 7\,.$$

*) Reusch a. a. O.

b) Man zeichne mittels des rechten Winkels eine Gerade n (Fig. 165) normal zu g in beliebigem Abstande von P, $(2R_1 + R_2)$; nun setze man in O mit dem Zirkel ein und beschreibe den Kreis $O(P)$, $(2C_1 + C_2)$; die Linie AP schließt mit g den verlangten Winkel von 45° ein.

op: $(4R_1 + 2R_2 + 2C_1 + C_2)$, $S = 9$ (bisher S_1*) $= 13$).

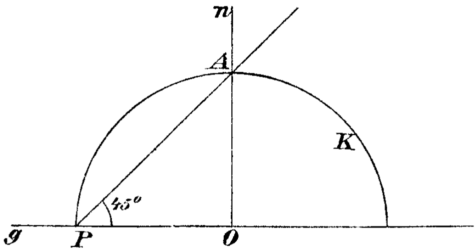

Fig. 165.

217. Es sei die Gerade g und außerhalb derselben der Punkt P gegeben; durch P ist jene Gerade x zu ziehen, welche mit g den Winkel von 30° einschließt.

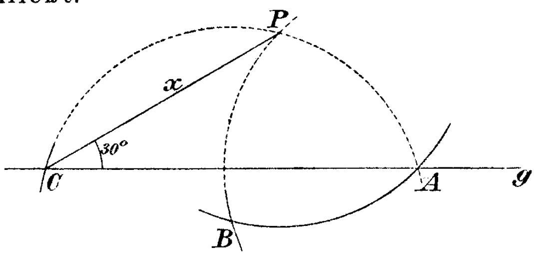

Fig. 166.

Man beschreibe den Kreis $P(r)$ mit beliebigem, aber hinreichend großem Radius (Fig. 166), ferner den Kreis $A(r)$, welcher $P(r)$ in B schneidet und den Kreis $B(r)$, wodurch man den Punkt C erhält; PC ist die gesuchte Gerade x.

op: $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2)$, $S = 9$*).

*) Reusch a. a. O.

(Man löse die Aufgabe für den Fall, daß die Gerade x mit g einen Winkel von 45^0 oder 60^0 einschließen soll bei Benutzung sämtlicher Zeichenhilfsmittel.)

218. Gegeben sei der Winkel α, außerdem eine Gerade g und auf ihr der Punkt S; durch S ist eine Gerade x so zu ziehen, daß der Winkel (xg) gleich α wird.

Die klassische Konstruktion ist hier auch die geometrographische; sie hat das Symbol

$$\text{op: } (2\,R_1 + R_2 + 5\,C_1 + 3\,C_1)\,, \quad S = 11\,.$$

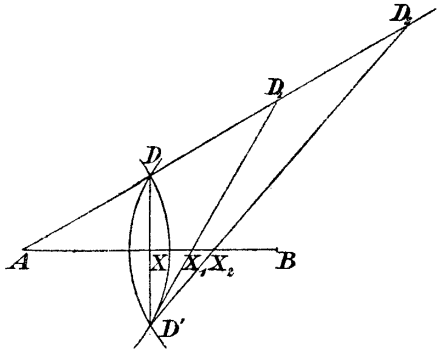

Fig. 167.

219. Gegeben sei die Strecke AB; es ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ... der Strecke zu bestimmen*).

Man beschreibt (Fig. 167) die Kreise $A(r)$, $B(r)$ mit beliebigem, aber nicht zu kleinem Radius und erhält dadurch die Punkte D und D'. Nun zeichnet man die Linie AD und auf derselben die Punkte D_1, D_2, D_3 ... so, daß

$$\overline{AD} = \overline{DD_1} = \overline{D_1 D_2} = \overline{D_2 D_3} = \ldots$$

Daraus erhält man die Punkte X_1, X_2 ... durch Verbinden des Punktes D' mit D_1 respektive D_2 ...; es ist

$$XB = \tfrac{1}{2}\,AB\,, \quad X_1 B = \tfrac{1}{3}\,AB\,, \quad X_2 B = \tfrac{1}{4}\,AB\ \ldots$$

---

*) Reusch a. a. O.

Man stelle das Symbol für die Konstruktion der aufeinanderfolgenden Punkte X_1, X_2, X_3 ... auf; man vergleiche diese Konstruktion mit der in Aufgabe 110 (Fig. 57) gezeigten.

220. Gegeben sind eine Strecke AB und zwei beliebige Strecken m und n; es sind jene Punkte X und Y der Geraden AB zu konstruieren, für welche die Proportion gilt:

$$AX : XB = m : n ,$$

oder

$$AY : BY = m : n .$$

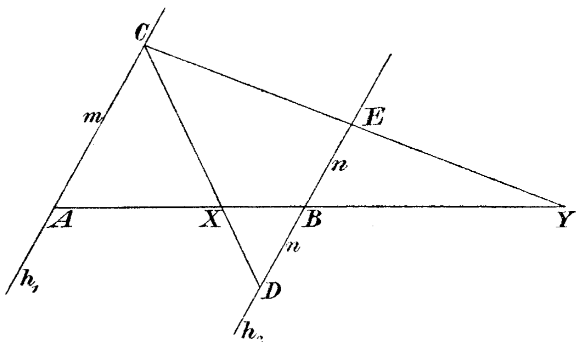

Fig. 168.

Mit Hilfe des Parallellineales ziehe man durch A und B zwei zueinander parallele, sonst aber beliebige Gerade h_1 und h_2 (Fig. 168); $(2R_1 + 2R_2)$. Nun trage man mit Hilfe des Zirkels die Strecken m und n (letztere zweimal) auf, wodurch man die Punkte C, D, E erhält; $(6C_1 + 2C_2)$. Endlich ziehe man die Linien CD und CE, womit die Punkte X und Y gefunden sind.

op: $(6R_1 + 4R_2 + 6C_1 + 2C_2)$, $S = 18\,(S_1 = 20)$ *).

221. Gegeben sind drei Punkte A, X, B einer geraden Linie; es ist jener Punkt Y zu konstruieren, welcher von X durch A und B harmonisch getrennt ist.

*) Reusch a. a. O.

Bisher wurde der Einfachheitsgrad $S_1 = 13$ *) erreicht. Man trachte diesen Grad noch herabzusetzen bei Benutzung sämtlicher Zeichenhilfsmittel.

222. Zu drei gegebenen Strecken m, n, p ist die vierte Proportionale zu konstruieren.

Es sei dabei vorausgesetzt, daß

$$n > p \quad \text{ist.}$$

A) Wir wollen zunächst die bisher geometrographischen Lösungen angeben, also jene, welche nur mit dem Zirkel und dem Lineale ausgeführt werden.

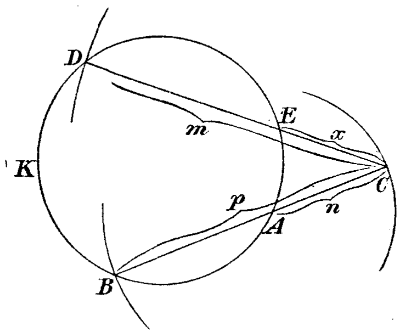

Fig. 169.

1. Konstruktion. Man zeichne einen beliebigen, aber hinreichend großen Kreis K (Fig. 169), nehme auf K den Punkt A beliebig an und beschreibe die Kreise $A(n)$, $A(p-n)$, wobei $p-n$ aus den gegebenen Strecken p und n mit Hilfe des Zirkels bestimmt wurde. Den Schnittpunkt B des Kreises $A(n-p)$ mit K verbinde man mit A, wodurch man auf dem Kreise $A(n)$ den Punkt C erhält. Nun suche man auf K jenen Punkt, für welchen

$$\overline{CD} = m$$

ist, und ziehe die Linie CD, welche K in einem zweiten Punkte E schneidet. Dann ist:

$$\overline{EC} = x\,,$$

denn nach dem Sekantensatze ist:

$$m \cdot x = n \cdot p\,.$$

$$\text{op: } (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2)\,, \quad S = 21\,.$$

---

*) Reusch a. a. O.

2. Konstruktion.

Dieselbe beruht auf folgendem Satze: ABC sei ein dem Kreise K eingeschriebenes Dreieck (Fig. 170); ferner sei AD parallel BC und AX eine beliebige durch A gehende Gerade, welche K außerdem in dem Punkte Y trifft. Dann ist:

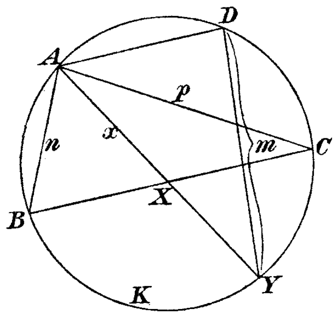

Fig. 170.

$$AX \cdot DY = AB \cdot AC\,.$$

(Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken DBY und ABX.)

Zur Konstruktion von x zeichne man darnach den Kreis K (Fig. 170), nehme A an und konstruiere:

$$\overline{AB} = n\,, \quad \overline{AC} = p\,, \quad \overline{CD} = \overline{AB}\,, \quad \overline{DY} = m\,.$$

Zieht man nun AY, so ist AX die gesuchte vierte Proportionale.

$$\text{op: } (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2)\,, \quad S = 21\,.$$

Bemerkt sei, daß beide Konstruktionen dasselbe Symbol S haben.

B) Läßt man noch das Parallellineal (zwei parallele Linien in konstantem Abstande) als Zeichenhilfsmittel zu, so läßt sich diese Zahl S herabdrücken:

Man ziehe mit dem Lineale zwei parallele, sonst aber beliebige gerade Linien ($2R_2$), nehme auf einer derselben den Punkt A an (Fig. 171) und bestimme mit Hilfe des Zirkels den Punkt B so, daß AB gleich n wird; hierauf ziehe man die Linie AB und konstruiere (wieder mit dem Zirkel) BC gleich m und CD gleich p.

Verbindet man endlich C mit D und bringt diese Linie mit der Parallelen durch A zum Schnitt, so ist DE das gesuchte x.

$$\text{op: } (4R_1 + 4R_2 + 9C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 20\,.$$

Man bemerkt, daß es mit diesen Zeichenhilfsmitteln gelungen ist, S um 1 herabzudrücken.

(Man trachte mit den erweiterten Zeichenhilfsmitteln Konstruktionen zu finden, bei welchen S noch kleiner wird.)

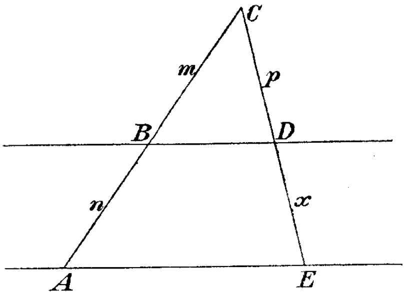

Fig. 171.

C) Zur Konstruktion der vierten Proportionalen x zu m, n, p sind ferner Methoden angegeben worden, die sehr einfach sind und nur den einen Übelstand haben, daß sie verlangen, $2m$ sei größer als selbst das größere der beiden inneren Glieder der Proportion:

$$m : n = p : x .$$

Wir wollen diese Methoden jetzt darstellen:

1. Zunächst erinnern wir an die in § 18 gegebene Mascheronische Konstruktion zur Bestimmung der vierten Proportionalen. Dieselbe hat das Symbol

$$\text{op: } (9C_1 + 5C_2) , \quad S = 14 .$$

2. Eine andere Konstruktion mit alleiniger Benutzung des Zirkels hat Lemoine aus folgendem Satze abgeleitet:

„In jedem Dreiecke ist das Produkt aus zwei Seiten gleich dem Produkte aus der doppelten Höhe auf die dritte Seite und dem Radius des umgeschriebenen Kreises."

(Dieser Satz ist ein spezieller Fall desjenigen Satzes, welcher bei der zweiten Konstruktion (S. 294) benutzt wurde.)

Zur Konstruktion der vierten Proportionalen zu m, n, p schlägt man darnach folgenden Weg ein:

Man zeichnet einen Kreis mit dem Radius m und nimmt auf demselben den Punkt A beliebig an (Fig. 172). Nun schlägt man den Kreis $A(n)$, welcher K in B schneidet, und den Kreis $B(p)$, welcher K in C trifft. Konstruiert man endlich den Kreis $C(p)$, welcher den Kreis $A(n)$ in D schneidet, so ist

$$\overline{AD} = x,$$

denn $\overline{BD}$ ist die doppelte Höhe des Dreieckes ABC.

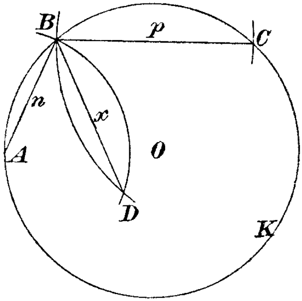

Fig. 172.

$$\text{op:}\ (9C_1 + 4C_2),\quad S = 13.$$

Die geraden Linien n, p, x der Figur brauchen nicht ausgezogen zu werden; man bemerkt, daß daher die ganze Figur mit dem Zirkel allein ausgeführt werden kann. Sie verlangt aber, daß $2m > p$ sei.

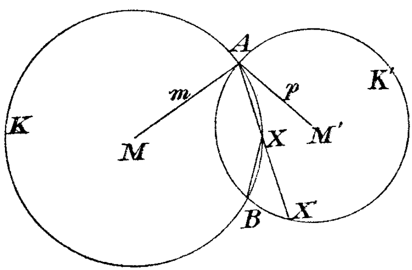

Fig. 173.

3. Güntsche gibt a. a. O. eine bemerkenswerte konstruktive Lösung der in Rede stehenden Aufgabe. Sie beruht auf folgendem Satze:

„Sind K und K' (Fig. 173) zwei Kreise mit den Radien m resp. p und zieht man durch einen gemeinsamen Punkt A der beiden Kreise eine beliebige Gerade, welche K in X und K' in X' schneidet, so ist immer:

$$BX : BX' = m : p\,,$$

wobei B der zweite gemeinsame Punkt der beiden Kreise ist.

($\sphericalangle BAX$ ist Peripheriewinkel in beiden Kreisen; daher ist Dreieck BMX ähnlich dem Dreiecke $BM'X'$.)

Die aus dieser Eigenschaft folgende Konstruktion hat das Symbol:

$$\text{op:}\ (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 13\,.$$

Man führe die Konstruktion durch.

223. Gegeben sind zwei Strecken m und n; es ist die dritte Proportionale x der beiden Strecken zu bestimmen; x muß also folgende Proportion befriedigen:

$$m : n = n : x\,.$$

Man wende die in der vorigen Nummer gezeigten Methoden zur Lösung dieser Aufgabe an und suche die geometrographische Konstruktion.

224. Gegeben sind zwei Strecken m und n; es ist die mittlere Proportionale dieser beiden Strecken zu bestimmen. Es ist also die Proportion

$$m : x = x : n$$

konstruktiv aufzulösen.

Man kann immer $m > n$ voraussetzen.

Wir wollen zunächst die bisher geometrographischen Konstruktionen angeben; die zweite derselben ist eine einfache Umänderung der ersten.

1. Konstruktion.

Man ziehe die Gerade g, nehme auf derselben den Punkt A beliebig an (Fig. 174) und beschreibe den Kreis $A(m)$, welcher g in B treffen möge. Nun bestimme man mit dem Zirkel den Punkt C so, daß $\overline{BC}$ gleich n wird und suche dann jenen Punkt D, für welchen CD gleich m ist. Beschreibt man endlich den Kreis $D(C)$, so ist $\overline{CE}$ (oder $\overline{BE}$) das gesuchte x.

Dabei ist folgende Bemerkung nicht unwichtig: Beim Konstruieren des Punktes C befindet sich die eine Zirkelspitze in B; hierauf ist der Punkt D zu bestimmen, zu diesem Zwecke hält man gleich die Zirkelspitze in C fest und setzt die zweite Zirkelspitze in A ein; auf diesem Wege wird eine Elementaroperation erspart.

Die Konstruktion hat das Symbol

$$\text{op}: (R_2 + 9C_1 + 4C_2)\,, \quad S = 14\,.$$

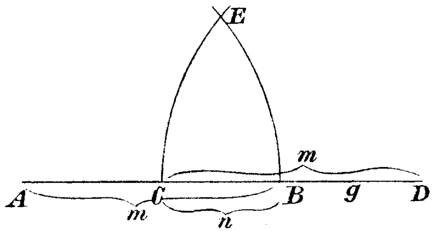

Fig. 174.

Beweis des angewendeten Satzes:

Der Abstand a des Punktes E der Figur von der Geraden g ist

$$a = \sqrt{mn - \frac{n^2}{4}}\,;$$

daher ist

$$\overline{CE} = \sqrt{a^2 + \frac{n^2}{4}} = \sqrt{mn}\,.$$

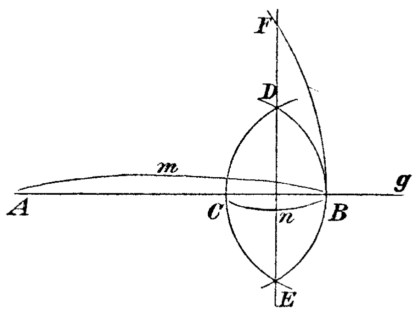

Fig. 175.

2. Konstruktion.

Man ziehe wieder die Gerade g, nehme auf derselben den Punkt A beliebig an (Fig. 175) und zeichne den Kreis $A(m)$, welcher g in B treffen möge; nun beschreibe man die Kreise $B(n)$, $C(n)$ und verbinde die entstehenden Punkte D, E miteinander. Die Strecke BF ist dann x.

$$\text{op: } (2R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 14\,.$$

225. Konstruktion inverser Punkte bezüglich eines Kreises.

Gegeben sei der Kreis K (Fig. 176) und ein Punkt P, etwa außerhalb von K. Sucht man die Polare p von P bezüglich K und bringt sie mit der Zentralen OP zum Schnitt, so ist der erhaltene Punkt P' der zu P bezüglich K inverse Punkt (§ 20).

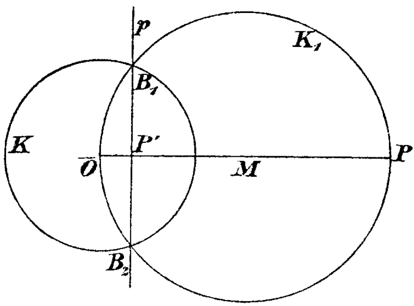

Fig. 176.

a) Klassische Konstruktion.

Man ziehe OP, halbiere diese Strecke in M, beschreibe den Kreis $M(O)$ und verbinde die so erhaltenen Schnittpunkte B_1 und B_2 (Fig. 176).

$$\text{op: } (6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 16\,.$$

b) Man kann die Konstruktion mit Hilfe des Zirkels allein durchführen (§ 20, 1).

Das Symbol wird dann:

$$\text{op: } (5C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 8\,.$$

c) Konstruktion mit Hilfe des rechten Winkels.

Man lege den rechten Winkel so in die Zeichenfläche, daß seine Schenkel durch O und P gehen, sein Scheitel auf K zu liegen kommt und markiere diesen Scheitelort; diese Konstruktion führe man zweimal durch.

Die Verbindungslinie der markierten Punkte ist die Polare p; ihr Schnittpunkt mit der Zentralen ist daher der gesuchte Punkt P'.

$$\text{op: } (8R_1 + 2R_2 + 2W_1 + 2P_2)\,, \quad S = 14\,.$$

Die Konstruktion ist keineswegs eine näherungsweise, sondern eine strenge. (Vergl. § 22, 1.)

Auch mit dem Parallellineal allein kann man zu dem gegebenen Punkte P den inversen Punkt P' bestimmen. Man suche diese Konstruktion.

Man findet, daß die Konstruktion mit Hilfe des Zirkels allein die geometrographische ist, auch dann, wenn man Parallellineal und rechten Winkel als Zeichenhilfsmittel zuläßt.

226. Konstruktion der Polaren eines Punktes P bezüglich eines Kreises K.

a) Klassische Konstruktion.

Die Lösung erfolgt ganz wie in der vorigen Aufgabe (Fig. 176)

$$\text{op: } (6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2)\,, \quad S = 16\text{ *)}.$$

b) Konstruktion der Polaren mit Hilfe des rechten Winkels.

Man geht ganz so vor wie in der vorhergehenden Nummer, nur erspart man sich das Zeichnen der Zentralen.

$$\text{op: } (6R_1 + R_2 + 2W_1 + 2P_1)\,, \quad S = 11\,.$$

227. Konstruktion der Ähnlichkeitspunkte von zwei Kreisen.

Lemoine findet dafür als kleinste Zahl S die Zahl 17. Dieselbe läßt sich bei Benutzung des Parallellineales (zwei parallele Linien in konstantem Abstande) vermindern:

Es seien die beiden Kreise K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten O_1 resp. O_2 gegeben. Man ziehe zunächst die Zentrale der beiden Kreise; dann lege man das Lineal so in die Zeichenfläche, daß eine seiner Kanten durch O_1, die andere durch O_2 geht, und ziehe die parallelen Linien h_1 und h_2 längs der Kanten des Parallellineales. Diese beiden

*) Vergleiche Reusch a. a. O.

Linien schneiden die Kreise in Punkten, welche richtig miteinander verbunden (Fig. 177) die gesuchten Ähnlichkeitspunkte liefern.

$$\text{op: } (8R_1 + 5R_2)\,, \quad S = 13\,.$$

228. Hauptaufgabe.

Aus den wenigen vorgeführten Beispielen ersieht man, daß bei Benutzung des rechten Winkels und Parallellineales andere und oft einfachere Konstruktionen gefunden werden als mit Hilfe des Zirkels und der geraden Linie allein.

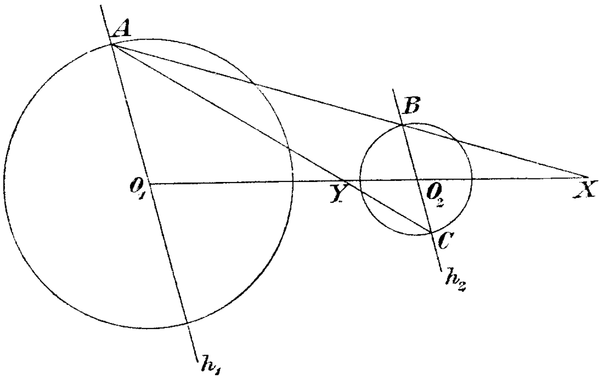

Fig. 177.

Da aber der rechte Winkel und das Parallellineal in der Praxis als Zeichenhilfsmittel gebraucht werden wie der Zirkel und die gerade Linie und die Untersuchungen dieses Abschnittes überhaupt nur dann einen Wert haben, wenn sie mit dem tatsächlichen Konstruieren in Beziehung stehen, so entsteht die Aufgabe:

„Es sind sämtliche einfache oder wichtige Konstruktionen nochmals mit Benutzung sämtlicher Zeichenhilfsmittel durchzuführen, ihr Symbol nach den obigen, erweiterten Annahmen aufzustellen, ihr Einfachheitsgrad zu bestimmen; insbesondere sind die geometrographischen Lösungen zu suchen.“