

1/2010

# Merkmale zur Charakterisierung diskreter Stoffgemische

Julia Baltzer, Rainer Souren

Ilmenauer Schriften zur  
Betriebswirtschaftslehre

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übertragung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, bleiben vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© VERLAG proWiWi e. V., Ilmenau, 2010

Ilmenauer Schriften zur Betriebswirtschaftslehre  
[www.tu-ilmenau.de/is-ww](http://www.tu-ilmenau.de/is-ww)

Herausgeber:

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Norbert Bach, Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Gernot Brähler, Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Gerrit Brösel, Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Katja Gelbrich, Prof. Dr. rer. pol. David Müller, Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Rainer Souren

ISSN 1866-2145 (Druckausgabe)

ISSN 2192-4643 (Online)

ISBN 978-3-940882-20-2 (Druckausgabe)

URN urn:nbn:de:gbv:ilm1-2011200283

Ilmenauer Schriften zur  
Betriebswirtschaftslehre  
1/2010

Merkmale zur Charakterisierung diskreter Stoffgemische

Julia Baltzer<sup>1</sup>, Rainer Souren<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dipl.-Ök. Julia Baltzer, Wissenschaftliche Mitarbeiterin des Fachgebiets  
Produktionswirtschaft/Industriebetriebslehre an der TU Ilmenau

<sup>2</sup> Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Rainer Souren,  
Leiter des Fachgebiets Produktionswirtschaft/Industriebetriebslehre an der TU Ilmenau

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1 Begriffsabgrenzungen und Klassifikation von Gemischen . . . . .	2
2.2 Intuitive Vorüberlegungen zur Vermischung anhand eines einfachen Beispiels . . . . .	4
<b>3 Wirkungszusammenhänge und Erhebungsprobleme</b>	<b>10</b>
<b>4 Messung der verschiedenen Merkmale durch Kennzahlen</b>	<b>16</b>
4.1 Fraktionsanzahlorientierter Vermischungsgrad (FVG) . . . . .	16
4.2 Anteilsorientierter Vermischungsgrad (AVG) . . . . .	16
4.3 Wechselorientierter Vermischungsgrad (WVG) . . . . .	19
4.4 Konzentrationsorientierter Vermischungsgrad (KVG) . . . . .	20
4.5 Abstands- bzw. Zwischenraumorientierter Vermischungsgrad (ZVG) . . . . .	22
4.6 Integrierter Vermischungsgrad (IVG) . . . . .	26
<b>5 Resümee und Ausblick</b>	<b>28</b>
<b>Anhang A Bilderübersicht der Kartenspiele</b>	<b>29</b>
<b>Anhang B Berechnung der KVGe für ein Beispiel mit 12 Karten</b>	<b>31</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>34</b>

# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ....	Exponenten für die Gewichtung
$a, b$ .....	Positionswert (Koordinate)
$a_j$ .....	Merkmalsausprägungen
$AVG$ .....	Anteilsorientierter Vermischungsgrad
$C_j$ .....	relative kumulierte Häufigkeit mit $C_j = \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{n}$
$d$ .....	Distanz
$F$ .....	Anzahl Fraktionen
$f$ .....	Fraktionen $f = 1, \dots, F$
$FVG$ .....	Fraktionsanzahlorientierter Vermischungsgrad
$G$ .....	Gini-Koeffizient
$GA_f$ .....	Gruppenanzahl der Fraktion $f$
$GA_{ges}$ .....	Gesamtgruppenanzahl
$h_j$ .....	absolute Häufigkeit der Merkmalsausprägung $j$
$i$ .....	Laufindex für die Zwischenräume
$IVG$ .....	Integrierter Vermischungsgrad
$j$ .....	Laufindex der Merkmalsausprägungen $j = 1, \dots, k$ bzw. $j = 1, \dots, k$
$KVG$ .....	Konzentrationsorientierter Vermischungsgrad
$n_f$ .....	Anzahl Objekte der Fraktion $f$
$n_{fmax}$ .....	Anzahl Objekte der größten Fraktion, bestehend 50 % + 1 Stück oder mehr Objekten
$S_j$ .....	relative Summe der Beobachtungswerte bis zur Merkmalsausprägung $j$
$W_f$ .....	Anzahl Wechsel der Fraktion $f$
$WVG$ .....	Wechselorientierter Vermischungsgrad
$ZVG$ .....	Abstands- bzw. Zwischenraumorientierter Vermischungsgrad
$ZWR$ .....	Zwischenraum

# 1 Einführung

Die Wiederverwendung oder stoffliche Verwertung von Altprodukten, Verpackungen und Abfallstoffen ist oft nur dann ökonomisch und ökologisch sinnvoll, wenn diese in möglichst homogenen Objektsorten bzw. Materialfraktionen vorliegen. Dies erfordert entweder eine sortenreine Kollektion der Objekte schon durch die Abfallerzeuger und Sammelbetriebe oder eine Sortierung der Abfallgemische im Anschluss an die Kollektion. Obwohl viele Rückführsysteme (z. B. für den Hausmüll oder für Einwegverpackungsabfälle) eine separierte Einsammlung bestimmter Abfallgemische oder gar einzelner Abfallfraktionen (z. B. Altglas) vorsehen, reicht diese „Vorsortierung“ in Haushalten meist nicht aus. Betriebliche Sortierprozesse dienen dann der Aufteilung von Abfallgemischen in verschiedene Fraktionen (etwa bei der Sortierung von Leichtverpackungen aus gelben Säcken) oder der Negativlese störender Objekte (z. B. Altglas falscher Farbe aus Glascontainern oder fremde Flaschen in Mehrweggetränkästen). Während die abfalltechnische Literatur Sortierprozesse ausführlich analysiert,<sup>1</sup> behandelt die betriebswirtschaftliche Literatur solche Prozesse noch sehr stiefmütterlich.<sup>2</sup>

Am Fachgebiet für Produktionswirtschaft und Industriebetriebslehre der Technischen Universität Ilmenau sollen in Zukunft verstärkt produktionswirtschaftliche Analysen von Sortierprozessen durchgeführt und somit erste konzeptionelle Ansätze aus der Mitte der 1990er Jahre<sup>3</sup> weiterentwickelt werden. Ziel des vorliegenden Arbeitsberichts ist es, die Vermischung von Abfallgemischen näher zu charakterisieren.<sup>4</sup> Durch sie wird die Qualität des Sortierprozessinputs charakterisiert und somit eine wesentliche Einflussgröße auf die Prozessgestaltung und seine wertmäßigen Auswirkungen beschrieben.

Kapitel 2 definiert zunächst grundlegende Begriffe und stellt anschließend einige intuitive Vorüberlegungen zur Vermischung von Stoffgemischen vor. Hier wie auch im weiteren Verlauf des Arbeitsberichts werden dabei nur diskrete, eindimensionale Stoffgemische analysiert. Ausgehend von den Vorüberlegungen werden in Kapitel 3 die Wirkungszusammenhänge von sechs Merkmalen zur Kennzeichnung der Vermischung (Fraktionsanzahl und -anteile, Wechsel- und Gruppenanzahl, Gruppengrößen und -abstände) und Probleme bei ihrer Erhebung vorgestellt. In Kapitel 4 werden dann fünf Kennzahlen (fraktionsanzahl-, anteils-, wechsel-, konzentrations- und abstandsorientierter Vermischungsgrad) zur Messung der Stoffvermischung definiert; abschließend wird diskutiert, ob sie sich zu einer gesamthaften Kennzahl aggregieren lassen. Kapitel 5 schließt den Arbeitsbericht mit einem kurzen Resümee und einem Ausblick auf weitere Forschungsfragen ab.

<sup>1</sup> Vgl. exemplarisch Bilitewski/Härdtle/Marek (2000), Pascoe (2000) und Schubert (2003).

<sup>2</sup> Als ein Beitrag des internationalen Schrifttums sei Sodhi/Young/Knight (1999) genannt, die im Rahmen einer Reihenfolgeplanung für Materialseparationen im Schüttgutrecycling auch Überlegungen zu Sortierprozessen integrieren. Vgl. Souren (1996) und Souren (1997).

<sup>4</sup> Grundlegende ökonomische Überlegungen zur Vermischung von (insbesondere stetigen) Stoffgemischen finden sich bei Behrens (1998).

## 2 Grundlagen

### 2.1 Begriffsabgrenzungen und Klassifikation von Gemischen

Materie lässt sich unterteilen in reine Stoffe und Stoffgemische, deren charakteristische Eigenschaften jeweils unabhängig von der äußeren Form sind.<sup>5</sup> Reine Stoffe sind einzelne chemische Elemente (z. B. Fe: Eisen) oder chemische Verbindungen (z. B. H<sub>2</sub>O: Wasser).<sup>6</sup> Ein Stoffgemisch (auch Stoffgemenge oder Konglomerat) setzt sich hingegen aus mindestens zwei verschiedenen Stoffen<sup>7</sup> zusammen. Im Weiteren sollen als Bezeichnung für die Bestandteile eines Gemisches die Ausdrücke „Komponenten“ oder „Fraktionen“ verwendet werden. Die Komponenten eines Gemisches können einzelne Stoffe, aber ihrerseits auch wieder Stoffgemische sein.

Stoffgemische lassen sich unterteilen in *homogene* und *heterogene* Gemische. Homogene Gemische weisen in allen Teilen die gleiche Beschaffenheit auf.<sup>8</sup> Die einzelnen Komponenten des Gemisches haben sich gleichmäßig miteinander vermischt, und eine (optische) Abgrenzung einzelner Komponenten ist somit nicht möglich.<sup>9</sup> Heterogene Gemische bestehen dagegen aus mindestens zwei sogenannten Phasen. Eine Phase ist ein optisch identifizierbarer Teil eines Gemisches, der in sich homogen ist. Zwischen zwei Phasen liegt eine eindeutige Trennung entlang der Grenzflächen vor.<sup>10</sup> Abbildung 1 auf der folgenden Seite fasst die bisher vorgestellten Begriffe in einer Gesamtschau zusammen. Sie verdeutlicht zudem, dass Gemische mittels physikalischer Trennverfahren in ihre Komponenten zerlegt werden können. Hierbei bleiben die chemischen Verbindungen der innerhalb einer Komponente enthaltenen Stoffe erhalten. Diese lassen sich jedoch durch chemische Trennprozesse in die einzelnen Elemente zerlegen.<sup>11</sup>

Stoffe können in drei Aggregatzuständen vorliegen: fest, flüssig oder gasförmig. Gemische können ebenfalls diese drei Zustände aufweisen. So stellt Bauschutt oder der Inhalt eines gelben Sacks eine Vermischung fester Komponenten dar.<sup>12</sup> Ein Gemisch kann aber auch eine Kombination von Stoffen mehrerer unterschiedlicher Zustände umfassen. In einem flüssigen Gemisch können also auch

<sup>5</sup> Vgl. Falbe/Regitz (1999), S. 4261.

<sup>6</sup> Vgl. Lautenschläger/Schröter/Teschner (2002), S. 5.

<sup>7</sup> In der Chemie wird für den Terminus „Stoff“ auch der Begriff „Substanz“ verwendet, der einerseits für unvermischte jeweils reine Stoffe, andererseits aber auch für eine definierte Vermischung von Reinstoffen stehen kann, vgl. Behrens (1998), S. 2f.

<sup>8</sup> Vgl. Falbe/Regitz (1999), S. 1747.

<sup>9</sup> Vgl. Lautenschläger/Schröter/Teschner (2002), S. 4f.

<sup>10</sup> Die Begriffe „Phase“ und „Komponente“ können die gleiche Bedeutung haben. Das ist dann der Fall, wenn jede Phase aus einer Komponente besteht. In der Regel ist eine Phase aber auch ein Gemisch und umfasst mehrere Komponenten. Eine Torte ist beispielsweise ein heterogenes Gemisch; es wechseln sich die unterschiedlichen Lagen (= Phasen) aus Tortenboden und Cremefüllung ab. Eine Untergruppe von Stoffen in einem Gemisch kann auch als Fraktion bezeichnet werden, vgl. Behrens (1998), S. 3f.

Ein weiteres Beispiel für heterogene Gemische stellen die sogenannten Verbunde dar. Verbunde oder Verbundstoffe sind Verpackungsmaterialien, die aus mehreren, vollflächig verbundenen Materialien (= Phasen) bestehen und manuell nicht mehr trennbar sind. Ein typischer Verbundstoff ist der Getränkekarton, der schichtweise aus Karton, Polyethylen und Aluminium besteht, vgl. Souren (1997), S. 33; Uhlig (1997), S. 12; Duales System Deutschland GmbH.

<sup>11</sup> Vgl. Lautenschläger/Schröter/Teschner (2002), S. 2.

<sup>12</sup> Vgl. Lautenschläger/Schröter/Teschner (2002), S. 2.

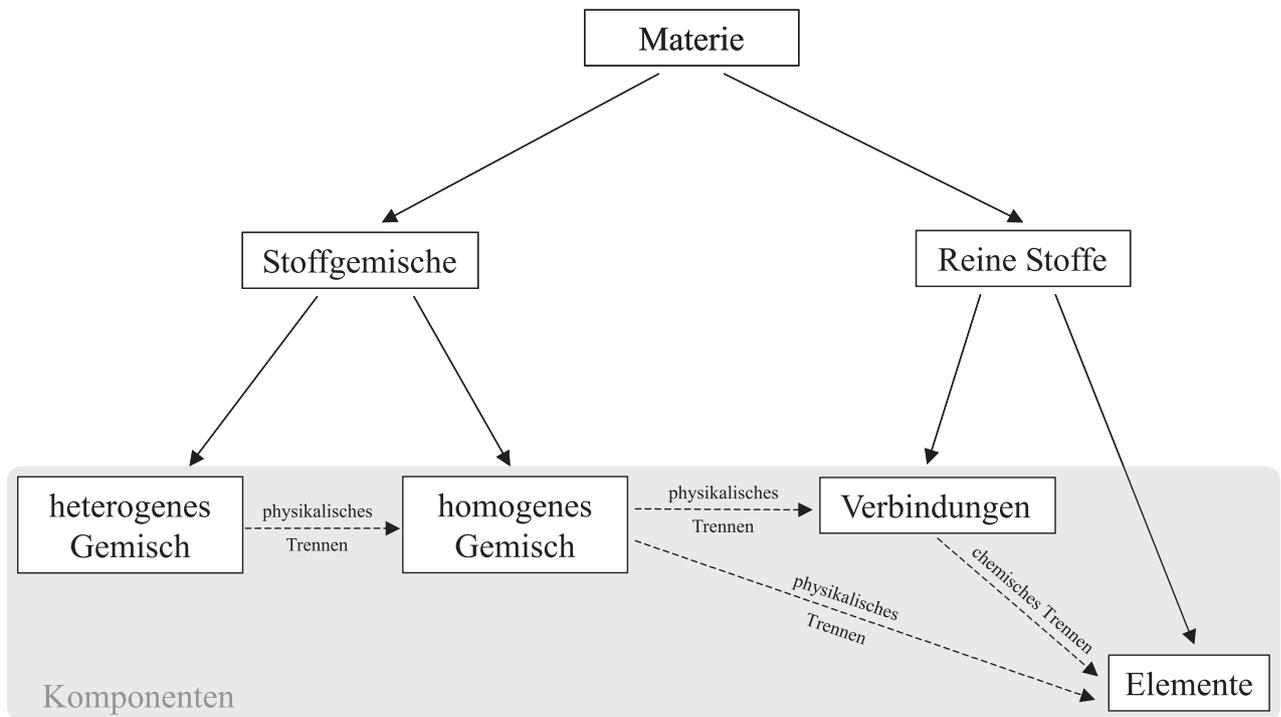


Abb. 1: Überblick über die Zusammenhänge von Stoffen und Gemischen (in Anlehnung an Lautenschläger/Schröter/Teschner, S. 7)

feste Bestandteile enthalten sein; z. B. besteht Schlamm aus in Wasser (flüssig) gelösten Erd- und Gesteinspartikeln (fest).

*Im Folgenden werden ausschließlich heterogene Gemische betrachtet, deren Komponenten Stückgüter sind, die jeweils in festem Aggregatzustand vorliegen. Zwar sind sie ihrerseits oft auch Gemische<sup>13</sup>, sie werden aber – zumindest in den betrachteten Sortierprozessen – nicht mehr weiter zerteilt und können somit als kleinste Bestandteile, d. h. nicht mehr weiter separierbare Komponenten, aufgefasst werden.*

Neben der Homo- bzw. Heterogenität gibt es noch zahlreiche weitere Merkmale, anhand derer sich Stoffgemische klassifizieren lassen. Für die Analyse und Gestaltung von Sortierprozessen besonders relevant sind die Diskretheit und die Dimensionalität (vgl. Abbildung 2), die nachfolgend kurz erläutert werden.

In *diskreten* Gemischen sind die einzelnen Komponenten in abzählbarer Anzahl vorhanden, was immer dann der Fall ist, wenn die Komponenten, wie hier im Weiteren stets unterstellt, als Stückobjekte vorliegen. Der relative (Stück-)Anteil einer Komponente lässt sich dann dadurch ermitteln, dass ihre Anzahl ins Verhältnis zur Gesamtstückzahl aller Komponenten gesetzt wird.<sup>14</sup> *Stetige* Gemische stellen dagegen nach außen für den Betrachter eine homogene Masse dar, die allerdings nicht unbedingt

<sup>13</sup> So besteht ein Getränkekarton, als Komponente des Gemisches „gelber Sack“, aus Pappe und verschiedenen Kunststoff- oder Aluminium-Schichten.

<sup>14</sup> Alternativ lassen sich auch Massen- oder Volumenanteile bestimmen, indem die Masse bzw. das Volumen aller Stücke einer bestimmten Komponentenart ins Verhältnis zur Masse bzw. Volumen aller Komponentenarten gesetzt wird.

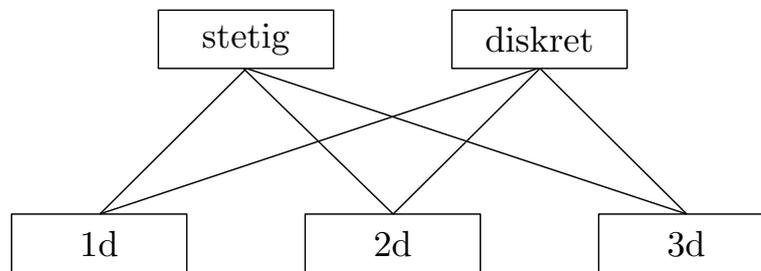


Abb. 2: Differenzierung von Gemischen nach den Merkmalen Diskretheit und Dimensionalität

auch homogen vermischt sein muss. Beispiele für stetige, aber heterogene Gemische sind Flüssigkeiten, die sich einem Betrachter als homogene Masse präsentieren, aber stellenweise eine deutlich unterschiedliche Konzentration der Komponenten aufweisen (zu beobachten etwa bei Fruchtsaftgemischen, die sich noch nicht völlig vermischt haben). Unabhängig von der Homogenität des Gemisches ist bei stetigen Gemischen die Anzahl bzw. Häufigkeit der verschiedenen Komponenten nicht abzählbar, sondern bedarf anderer Analyseverfahren. Dieser zentrale Unterschied zwischen diskreten und stetigen Gemischen spiegelt sich auch in der Form wider, mit der die Vermischung gemessen wird.

Das zweite Merkmal, welches zur Unterscheidung hauptsächlich diskreter Gemische dienen soll, ist die räumliche Ausdehnung des Gemisches und seiner Komponenten, wie sie für die Analyse und Gestaltung der Sortierprozesse relevant ist. In *eindimensionalen* (1d) Gemischen sind die Komponenten des Gemisches in einer Richtung horizontal bzw. vertikal aneinander gereiht. Auch wenn die Komponenten mehrdimensional sind, z. B. Getränkeflaschen unterschiedlicher Form und Farbe auf dem Förderband einer Sortieranlage, spielt für die Sortierung ausschließlich die Anordnung entlang der „Sortierrichtung“ eine Rolle.

Bei *zweidimensionalen* (2d) Gemischen liegt eine in zwei Richtungen ausgedehnte Vermischung vor. Als Beispiel ist hier ein Getränkekasten zu nennen, in dem die Flaschen aus der Draufsicht in mehreren Zeilen und Spalten platziert sind. Die *dreidimensionale* (3d) Vermischung stellt eine beliebige Anordnung der Komponenten im Raum dar. Ein Beispiel ist der gelbe Sack als Objekt dreidimensional angeordneter Stückgüter.

*Untersuchungsgegenstand dieses Arbeitsberichts sind ausschließlich eindimensionale, diskrete Gemische*, für die nachfolgend Überlegungen zur Vermischung angestellt werden sollen. Erweiterungen auf mehrdimensionale und/oder stetige Gemische bleiben weiteren Arbeiten vorbehalten.

## 2.2 Intuitive Vorüberlegungen zur Vermischung anhand eines einfachen Beispiels

Zur graphischen Veranschaulichung eines eindimensionalen, diskreten Gemisches und seiner Komponenten soll im Folgenden ein Kartenspiel dienen, weil es die beschriebenen Sachverhalte beson-

ders anschaulich macht. Eine Übertragung auf reale, eindimensionale Stoffgemische ist problemlos möglich; so lässt sich das in Abbildung 3 dargestellte 32-er-Skat-Kartenspiel<sup>15</sup> mit 32 Flaschen auf einem Sortierband vergleichen, bei denen jeweils 4 Stück von 8 Flaschentypen vermischt aufgereiht sind.

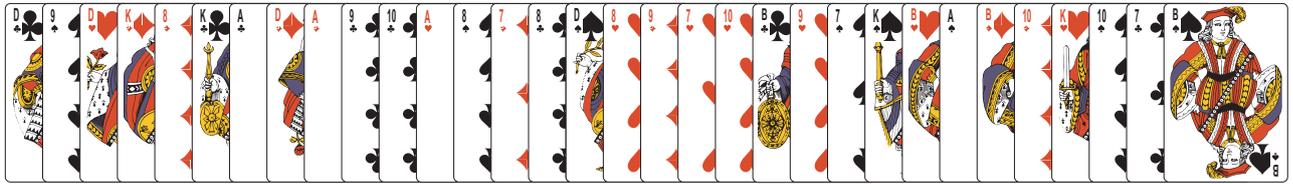


Abb. 3: Skatblatt mit 32 Karten in einer eindimensionalen Anordnung

Das Kartenspiel wurde in einer Reihe nebeneinander ausgelegt, die als abgeschlossen betrachtet wird.<sup>16</sup> Die insgesamt 32 Objekte des Kartenspiels lassen sich nach dem jeweiligen Symbol oder Wert einer Karte, unabhängig von ihrer Spielfarbe, in acht Fraktionen einteilen. Das bedeutet, es gibt die Fraktionen „7er“, „8er“, „9er“ und „10er“-Karten sowie „Buben“, „Damen“, „Könige“ und „Asse“. Jede dieser Fraktionen umfasst vier Karten, die innerhalb einer Fraktion als gleichwertig angesehen werden.<sup>17</sup> An dieser Stelle wird bereits das Problem der subjektiven Bestimmung der Fraktionen deutlich. Durch eine andere Einteilung der Fraktionen, beispielsweise nach den Spielfarben (vier Fraktionen mit je acht gleichwertigen Karten) ergäben sich auch andere Ergebnisse bei der Messung der Vermischung. Die Untersuchung der Vermischung ist demgemäß immer von der individuellen Wahl der relevanten Eigenschaften, nach denen sortiert wird, abhängig.<sup>18</sup>

Nachfolgend sollen einige Anordnungen des gesamten Kartenspiels oder kleinerer Teilgemische gegenüber gestellt werden, um zunächst rein intuitiv Unterschiede bzgl. der Vermischung zu visualisieren und Charakteristika von Stoffgemischen zu identifizieren. Abbildung 4 zeigt drei Kartenstapel mit jeweils acht Karten, deren Vermischung betrachtet von oben nach unten abnimmt. Während der obere Kartenstapel alle acht verschiedenen Kartenwerte, d. h. acht unterschiedliche Komponenten beinhaltet, bestehen die beiden unteren Kartenstapel nur aus vier verschiedenen Kartenwerten (Bube, Dame, König, Ass). Die beiden unteren Kartenstapel wiederum unterscheiden sich dadurch, dass der obere je zwei Karten der vier Werte beinhaltet, während der untere je drei Buben und Damen und nur einen König und ein Ass aufweist. Bei rein intuitiver Betrachtung der drei Kartenstapel kann festgehalten werden, dass sowohl *die Anzahl verschiedener Fraktionen* als auch die absoluten und relativen *Häufigkeiten der einzelnen Fraktionen* die Vermischung kennzeichnen. Ein komplettes

<sup>15</sup> Zur besseren Übersicht und Vergleichbarkeit der einzelnen Fälle sind alle Abbildungen der Kartenspiele in Anhang A noch einmal zusammengefasst.

<sup>16</sup> Es besteht die Möglichkeit, die Reihe auch als unendliches Förderband anzulegen. Aber auch ein solches Förderband hätte einen Anfangspunkt, frühestens den Start-of-Production, und einen vorläufigen Endpunkt, den aktuellen Zeitpunkt. Es verändert sich bei dieser Betrachtung lediglich die Grundgesamtheit und ihre Aufteilung auf die einzelnen Fraktionen. Daher kann die Betrachtung einer „unendlichen Reihe“ analog zu der hier vorgestellten Vorgehensweise erfolgen.

<sup>17</sup> Es spielt also keine Rolle, ob es sich bei einem Buben um den Kreuzbuben oder Herzbuben handelt, nur das Merkmal „Bube“ ist entscheidend.

<sup>18</sup> Vgl. zu Trennmerkmalen Schubert (2003), S. 612.

32er-Kartenspiel ist demgemäß durch acht Fraktionen zu je vier Karten charakterisiert. Das Gemisch besteht zu je  $4/32 = 1/8$  bzw. zu einem Anteil von 12,5 % aus jeder Fraktion.

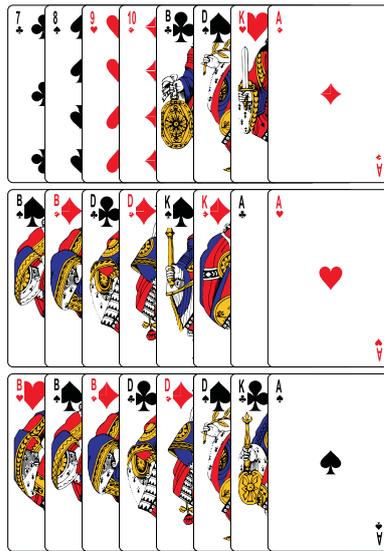


Abb. 4: Drei Teilgemische mit abnehmender Vermischung

### Intuitive Überlegungen zur Vermischung einer einzelnen Fraktion

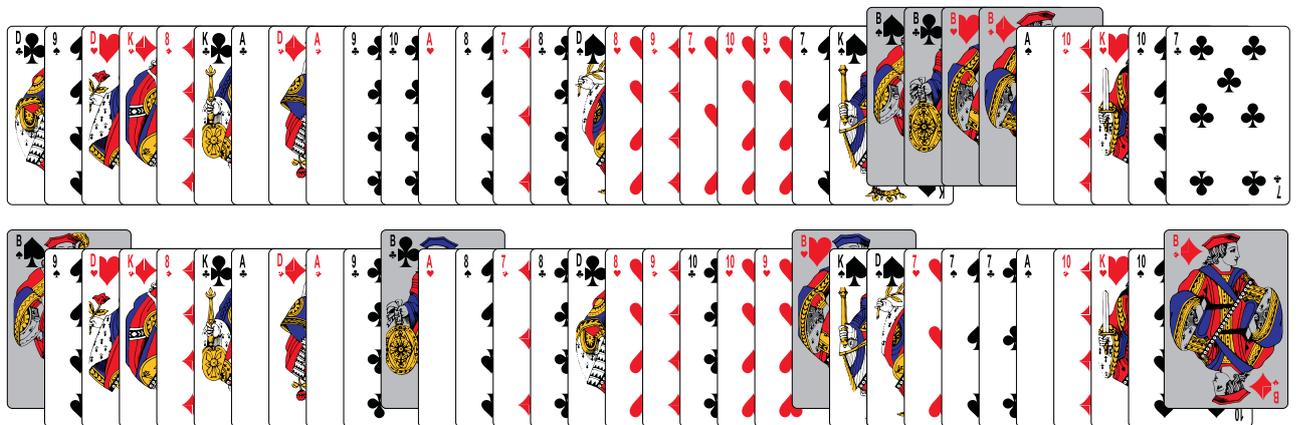


Abb. 5: Unterschiedliche Anordnungen von vier Buben

Abbildung 5, in der zwei komplette 32er-Kartenspiele dargestellt sind, macht deutlich, dass weitere Kriterien zur Beschreibung der Vermischung notwendig sind. So unterscheiden sich die beiden Kartenstapel z. B. durch die *Anordnung* der graphisch hervorgehobenen Buben-Karten, deren Anteil in beiden Fällen 12,5 % beträgt. Die Buben können im ausgelegten Kartenspiel direkt nebeneinander liegen (vgl. Abbildung 5 oben) oder jede Bubenkarte liegt einzeln durch andere Karten von den übrigen Buben getrennt (vgl. Abbildung 5 unten).

Rein intuitiv ist davon auszugehen, dass ein Kartenspiel, bei dem die Buben direkt nebeneinander liegen, weniger vermischt ist, als ein Spiel, bei dem die Buben jeweils einzeln liegen, zumindest bezüglich der Buben. Bei der Anordnung in Abbildung 5 oben handelt es sich bezüglich der Buben um die geringst mögliche Vermischung, da eine engere Anordnung der Karten hinsichtlich des Merkmals „Buben“ nicht möglich ist. Die *Gruppenanzahl* beträgt 1. Das Einzige, was an dieser Anordnung noch variabel ist, ist die Position des Stapels Buben innerhalb der 28 Karten des Restgemisches. Dies erscheint aber für die Vermischung der Buben an sich nicht relevant.

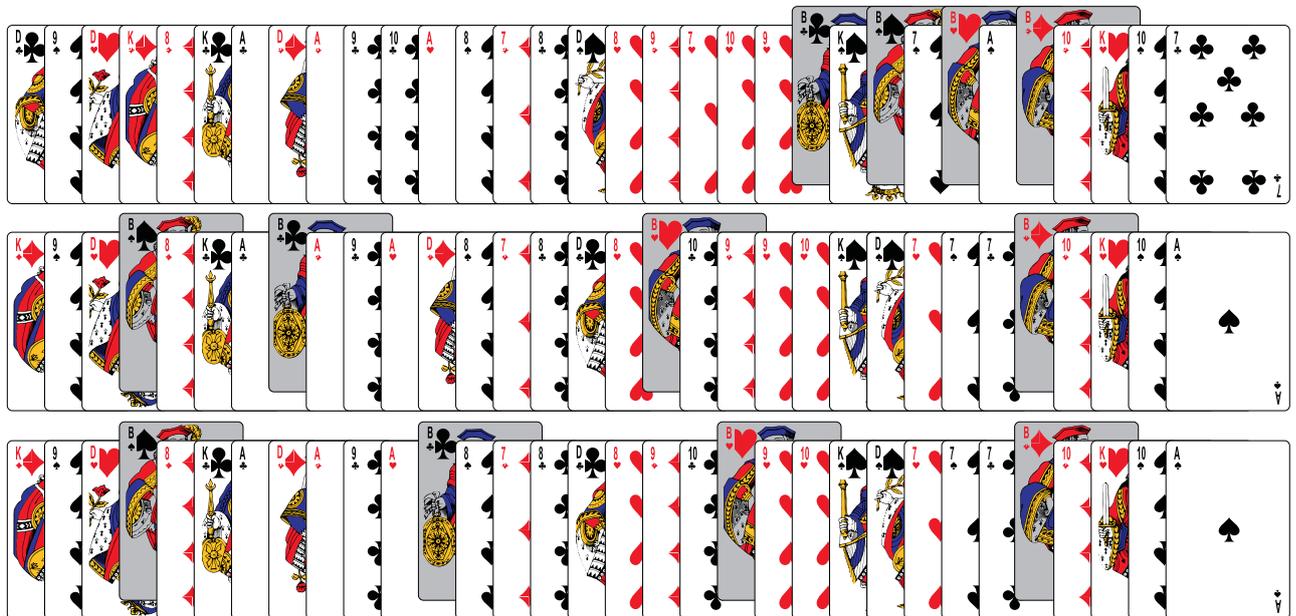


Abb. 6: Unterschiedlich vermishtes Kartenspiel mit vier einzelnen Buben

Nachdem die geringste Vermischung einer Fraktion mit einem Restgemisch identifiziert wurde, stellt sich die Frage nach einer oder mehreren Anordnungen, die die maximal mögliche Vermischung darstellen. Für diesen Fall können alle Anordnungen ausgeschlossen werden, bei denen zwei oder mehr Buben direkt nebeneinander liegen. Wenn zwei Buben nebeneinander lägen, ließe sich die Vermischung dadurch erhöhen, dass man diese beiden Karten voneinander trennt und damit die Gruppenanzahl erhöht. Es kann daher für die maximale Vermischung nur eine Konstellation von vier einzelnen Buben in Frage kommen. Solche Konstellationen zeigt Abbildung 6. Werden weiterhin nur die Buben näher betrachtet, so zeigen sich jedoch auch in diesen drei Alternativen Unterschiede, die schon intuitiv verschiedene Vermischungen offenbaren. Während im oberen Teil der Abbildung die vier Buben jeweils nur durch eine Karte voneinander getrennt sind, liegen analog zu Abbildung 5 unten die Buben im unteren Kartenstapel durch jeweils sieben Karten anderer Werte getrennt. Der *Abstand* der Komponentengruppen scheint also auch eine Rolle bei der Beurteilung der Vermischung zu spielen. Liegen die vier Buben sehr weit auseinander, so liegt eine höhere Vermischung vor, als wenn die Spanne zwischen den äußeren beiden Buben recht gering ist. Fraglich bleibt hier aber zunächst, ob die Anordnung der vier Buben gemäß Abbildung 6 unten eine höhere Vermischung aufweist als die Anordnung in der Mitte der Abbildung, bei der zwischen den beiden äußeren Buben ebenfalls

einen Gesamtabstand von 21 Karten (ohne die beiden Buben) besteht, die Abstände zwischen den vier Buben aber nicht dreimal sieben, sondern einmal 3 und zweimal 9 Karten betragen.

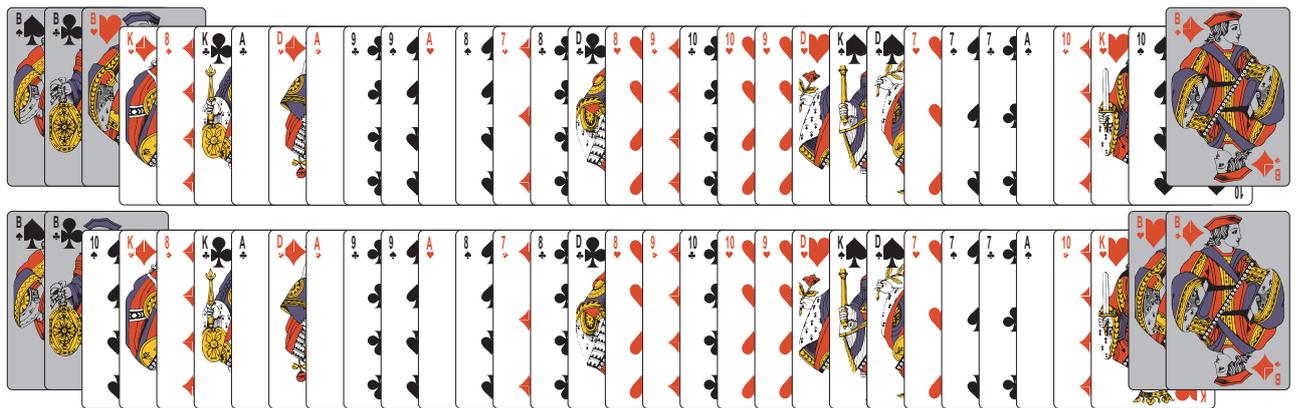


Abb. 7: Vermischung von vier gleichen Karten einer Fraktion mit unterschiedlichen Gruppengrößen

Zudem ist es weiterhin möglich, dass bestimmte Anordnungen mit gleicher Gruppenanzahl und gleichem Abstand existieren, die optisch von der Positionierung der Karten eindeutig unterschiedlich sind. Abbildung 7 zeigt wiederum bezogen auf die Buben solche Fälle, die sich nicht bezüglich Gruppenanzahl und Abstand, wohl aber bezüglich der *Gruppengrößen* unterscheiden. Es bleibt allerdings unklar, welche der beiden Kartenstapel bzgl. der Buben eine höhere Vermischung aufweist (1 Gruppe à 3 Buben und 1 separater Bube oder 2 Gruppen à 2 Buben).

Dass es sich aber in jedem Fall um unterschiedlich stark vermischte Kartenspiele handelt (bzw. handeln sollte) wird noch deutlicher, wenn größere Fraktionen betrachtet werden, z. B. wenn wie in Abbildung 8 statt der Kartenwerte die Kartenfarbe als Unterscheidungsmerkmal dient und dann eine Alternative mit einer Gruppe à 7 Karten und einer separaten Karte einer Alternative mit zwei Gruppen à 4 Karten gegenübersteht.

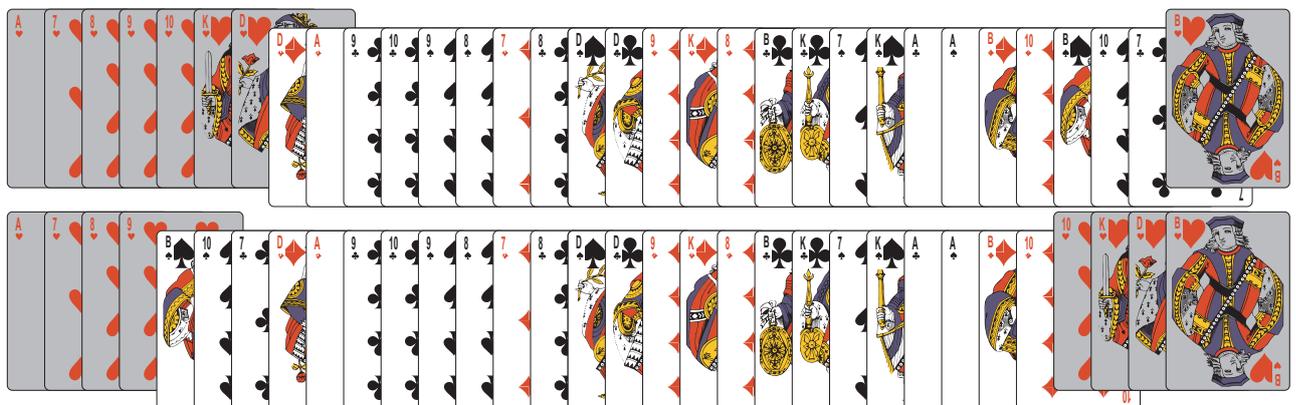


Abb. 8: Vermischung von acht gleichen Karten einer Fraktion

## Intuitive Überlegungen zur Vermischung mehrerer Fraktionen

Für den Fall, dass nicht nur eine, sondern alle im Gemisch enthaltenen Fraktionen betrachtet werden sollen, liegt die geringste Vermischung vor, wenn die Objekte jeder Fraktion direkt nebeneinander angeordnet sind (vgl. Abbildung 9).<sup>19</sup>

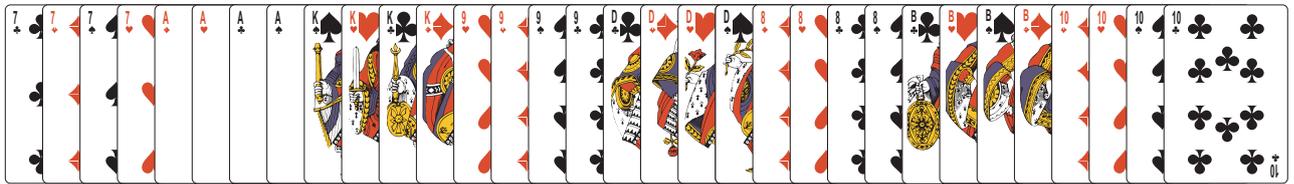


Abb. 9: Unvermischtheit aller Fraktionen<sup>20</sup>

Die größte Vermischung liegt entsprechend dann vor, wenn die einzelnen Objekte jeder Fraktion verteilt und mit möglichst großem Abstand voneinander angeordnet sind. In jedem Fall sollte somit jede Fraktion in vier Gruppen à einer Karte angeordnet sein. Wenn davon ausgegangen wird, dass die größte Vermischung bei sich abwechselnden Fraktionen erreicht wird, könnten diese *Fraktionswechsel* auch als Indikator der Vermischung eingesetzt werden.

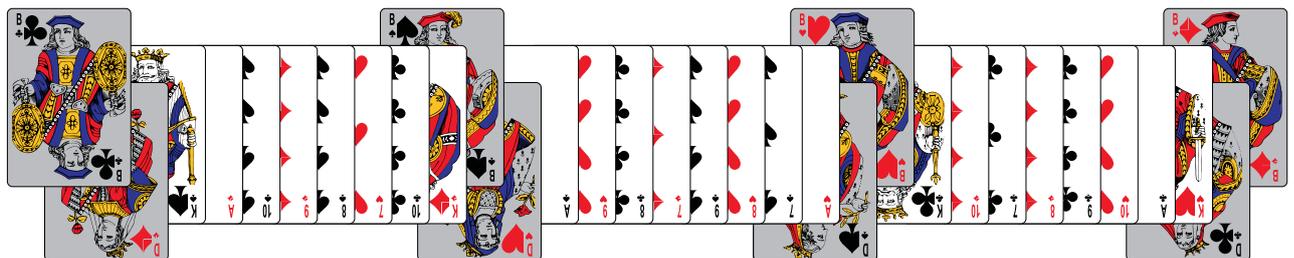


Abb. 10: Maximalabstände verschiedener Fraktionen

Anders als bei der ausschließlichen Betrachtung einer einzelnen Fraktion sind Aussagen über die Vermischung aufgrund der Abstände bei Betrachtung aller Fraktionen nicht so einfach zu treffen. Der Grund hierfür ist, dass die Abstände der einzelnen Fraktionen sich gegenseitig beeinflussen. So kann der Gesamtabstand zwischen den beiden äußeren Karten nur für eine Fraktion 28 (= 9 + 10 + 9) betragen, nämlich dann, wenn je eine Karte der Fraktion am linken und rechten Rand des Kartenstapels liegt (vgl. die Buben in Abbildung 10). Für eine weitere Fraktion (vgl. die Damen in Abbildung 10) kann der Gesamtabstand im Kartenspiel dann nur noch 26 (= 8 + 10 + 8) betragen.

<sup>19</sup> Solange keine Bewertung der einzelnen Fraktionen vorliegt, beispielsweise nach ihrer Erwünschtheit (im Beispiel etwa der Kartenwert) oder einer kostengünstigen Reihenfolge in einem Produktions- oder Recyclingprozess, ist die Position der einzelnen Fraktionenstapel im Gemisch unerheblich. Ein Beispiel für eine kostengünstige Reihenfolge in einem Produktionsprozess ist die Farbfolge bei der PKW-Lackierung. Dabei werden zunächst Autos in einer hellen Farbe lackiert; nachfolgende Autos können dann in der gleichen oder einer dunkleren Farbe lackiert werden, ohne dass die Anlage zwischendurch gereinigt werden muss.

<sup>20</sup> Unvermischtheit bedeutet hier, dass alle Karten einer Fraktion nebeneinander liegen.

Werden die Gesamtabstände aller Fraktionen addiert, so ergibt sich ein Wert von 168 (in Abbildung 10 = 28B + 26D + 24K + 22A + 20Zehn + 18Neun + 16Acht + 14Sieben; angegeben sind jeweils die Gesamtabstände für die verschiedenen Kartenwerte).

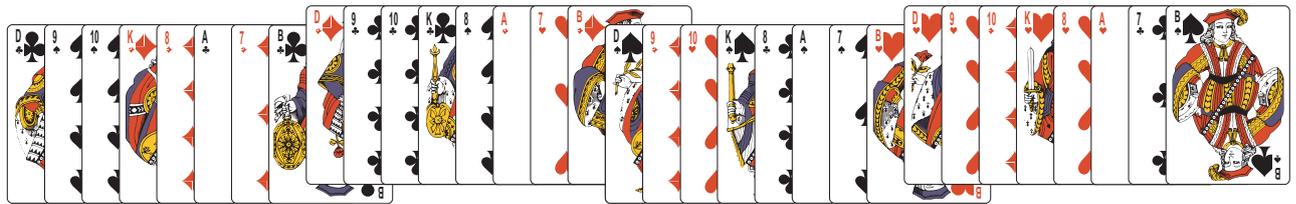


Abb. 11: Vermischung mit gleichmäßigen Abständen aller Fraktionen

Die Summe der Gesamtabstände über alle Fraktionen ist jedoch als zusätzliches Maß für die Vermischung wenig hilfreich, da sie für jede beliebige Verteilung der Fraktionen, bei denen alle Objekte aller Fraktionen vereinzelt liegen, stets gleich hoch, im Beispiel des 32er-Kartenspiel also immer gleich 168 ist. So gilt dies auch für den in Abbildung 11 dargestellten Fall, bei dem sich die einzelnen Karten der Fraktionen immer in der gleichen Reihenfolge abwechseln. Für jede Fraktion beträgt die Gesamtspanne 21 Karten. Im Gegensatz zur Betrachtung von nur einer Fraktion mit einem nicht näher definierten Restgemisch weist also die „Randlösung“ nicht zweifelsfrei die größte Vermischung auf.

### 3 Wirkungszusammenhänge und Erhebungsprobleme

In Abschnitt 2.2 wurden mit Fraktionsanzahl, Fraktionsanteilen, Gruppenanzahl, Gruppengrößen und -abständen bereits fünf Merkmale identifiziert, mittels derer sich die Vermischung charakterisieren lässt. Tabelle 1 beschreibt in der ersten Zeile die Wirkungsrichtung dieser Merkmale und zeigt in den beiden weiteren Zeilen, auf welche Weise sie zur Charakterisierung der Vermischung Verwendung finden können.

Tab. 1: Übersicht der Wirkungszusammenhänge von Vermischungsmerkmalen

	Häufigkeitsmerkmale		Anordnungsmerkmale			
	Fraktionsanzahl	Fraktionsanteile	Wechselanzahl	Gruppenanzahl	Konzentration	Entfernung
Wirkungsrichtung <sup>2,1</sup> : je ... desto vermischter ist das Stoffgemisch	größer die	gleichmäßiger die Verteilung der	größer die	größer die	kleiner und gleichmäßiger die	Gruppenabstände größer und un- gleichmäßiger
separate Aussagen zur Vermischung einzelner Fraktionen	nicht möglich	möglich, aber nicht sinnvoll			möglich und sinnvoll	
Vorgehen zur Beur- teilung des Stoffge- misches	simultane Beurteilung aller Fraktionen in einem ein- zigen Vorgang				separate Beurteilung der Vermischung einzelner Frak- tionen und anschließende Aggregation zur Gesamthe- urteilung	

<sup>2,1</sup> Lesebeispiel: Je größer die *Fraktionsanzahl* desto vermischter ist das Stoffgemisch.

## Häufigkeitsmerkmale

*Fraktionsanzahl* und *Fraktionsanteile* sind Häufigkeitsmerkmale, die zur Charakterisierung der Vermischung eines Stoffgemisches beitragen können. Mit steigender Anzahl Fraktionen nimmt die Vermischung *ceteris paribus* (c. p.) zu. Ist eine maximal mögliche Anzahl Fraktionen bekannt, so lässt sich auch eine relative Einordnung konkreter Stoffgemische vornehmen. Dies ist etwa in Sortieranlagen für Leichtstoffverpackungen („Gelbe Säcke und Tonnen“) der Fall, wo i. d. R. ca. 10 verschiedene Fraktionen separiert werden (u. a. Weißblech, Aluminium, Verbundkartons und diverse Kunststofffraktionen). Anhand der Fraktionsanzahl in einem konkreten gelben Sack kann dann eine Aussage über seine Vermischung getroffen werden: Befinden sich nur wenige Fraktionen im Verhältnis zur insgesamt möglichen Anzahl Fraktionen darin, ist das Gemisch bezüglich der Fraktionen relativ unvermischt bzw. sortenrein.

Für die Fraktionsanteile spielt die Gleichmäßigkeit der Verteilung die entscheidende Rolle. Ein Stoffgemisch mit ausgewogenen Anteilen verschiedener Fraktionen weist demgemäß c. p. eine höhere Vermischung auf als ein Stoffgemisch, bei dem eine oder einige wenige Fraktionen in ihren Anteilen überwiegen.

Es liegt in der Charakteristik von Häufigkeitsmerkmalen begründet, dass sie keine separate Aussage über die Vermischung einer einzelnen Fraktion erlauben. Während die Fraktionsanzahl schon per definitionem mehrere Fraktionen betrifft, lässt sich der Anteil einer einzelnen Fraktion zwar ermitteln, er besitzt aber keinen separierbaren Aussagegehalt über die Vermischung der Fraktion an sich, sondern wirkt nur im Zusammenspiel mit den Anteilen anderer Fraktionen. Aus dieser Charakteristik der Häufigkeitsmerkmale folgt, dass fraktionsanzahl- und fraktionsanteilbezogene Kennzahlen nur ermittelt werden können, wenn alle Fraktionen simultan berücksichtigt werden.

## Anordnungsmerkmale

Neben die Häufigkeitsmerkmale treten als zweite Gruppe von Charakteristika der Stoffgemische die Anordnungsmerkmale *Gruppenanzahl*, *Gruppengrößen* und *Gruppenabstände*, die gemeinsam beschreiben, wie sich die verschiedenen (diskreten) Objekte einer jeden Fraktion bzw. Komponente im Stoffgemisch verteilen. Wie die intuitiven Überlegungen in Abschnitt 2.2 bereits gezeigt haben, ist bei diesen Merkmalen eine separate Betrachtung einzelner Fraktionen möglich. Auch wenn sich die Merkmalsausprägungen einzelner Fraktionen u. U. gegenseitig beeinflussen, können anordnungsbezogene Kennzahlen sukzessive bestimmt werden, d. h. zunächst Werte für die einzelnen Fraktionen ermittelt und diese dann anschließend aggregiert werden.

*Gruppenanzahl* und *Gruppengrößen* kennzeichnen gemeinsam die *Konzentration* einer Fraktion innerhalb des Stoffgemisches. Für eine bestimmte Anzahl von Objekten einer Fraktion gibt sie *unabhängig von ihrer konkreten Lage* im Gemisch an, ob und wenn ja wie stark sie miteinander verbunden sind. Die beiden Merkmale Gruppenanzahl und Gruppengröße sind voneinander abhängig. So liegen

für das 32er-Kartenspiel mit bekannter Grundgesamtheit (8 Fraktionen à 4 Karten) vier Fälle mit zusammen fünf Ausprägungen der Merkmalskombination für eine Fraktion (hier nachfolgend die Buben) vor:

- 1. Fall: Von den Buben liegt nur eine Gruppe vor, die dann alle vier Buben enthält.
- 2. Fall: Ist die Fraktion in zwei Gruppen zerlegt, dann gibt es zwei Möglichkeiten, wie sich die vier Buben auf die Gruppen aufteilen:
  - drei Buben in einer Gruppe und einer in der zweiten Gruppe bzw.
  - zwei Buben in jeder Gruppe.
- 3. Fall: Bei drei Gruppen bestehen stets eine Gruppe aus zwei und die beiden anderen Gruppen aus je einem Buben.
- 4. Fall: Es gibt vier Gruppen, die aus je einem Buben bestehen.

Eine größere Vermischung liegt c. p. bei größerer Gruppenanzahl und kleineren Gruppengrößen vor. Damit lassen sich die oben genannten vier Fälle unterschiedlicher Konzentration der Buben in eine Rangfolge zunehmender Vermischung (von 1 nach 4) einordnen. Überdies wird hier als Konvention vorausgesetzt, dass die Vermischung auch mit gleichmäßigerer Verteilung der Gruppengrößen ansteigt. Der zweite Unterfall zu Fall 2 (2 Gruppen mit je 2 Buben) ist demgemäß stärker vermischt als der erste Unterfall (1 Gruppe mit 3 Buben und 1 Gruppe mit 1 Buben).

Wie bereits erwähnt, lässt sich die Vermischung des gesamten Gemisches bzgl. der beiden Konzentrationsmerkmale sukzessive bestimmen, in dem zunächst für jede Fraktion die Gruppenanzahl und -größen bestimmt werden und anschließend ein Gesamtwert daraus bestimmt wird. Wie dann eine Kennzahl gebildet werden kann, ist erst Gegenstand des entsprechenden Abschnitts in Kapitel 4. Hier soll nachfolgend aber noch eine andere Option vorgestellt werden, die analog zur Bestimmung der Gruppenanzahl genutzt werden kann. Denn statt die Gruppenanzahlen der verschiedenen Fraktionen zu bestimmen und anschließend zu addieren, kann auch simultan die *Wechselanzahl* verschiedener Fraktionen ermittelt werden.<sup>22</sup> Ein Wechsel liegt immer dann vor, wenn zwei nebeneinander liegende Objekte bezüglich des Unterscheidungsmerkmals der Fraktionen unterschiedlich sind. Die Zählung der Wechsel erfolgt in zuvor festgelegter Betrachtungsrichtung und beschränkt sich somit nur auf Übergänge *nach* einem Objekt zum nächsten.<sup>23</sup>

In einem abgeschlossenen Kartenspiel mit 32 Karten liegen insgesamt 31 Kartenübergänge vor, wenn die Ränder nach außen nicht betrachtet werden. Ein Wechsel der Fraktion soll durch das Symbol  $W_f$  dargestellt werden, wobei  $f$  die jeweilige Fraktion bezeichnet. Falls nun sämtliche Buben, als ausgewählte Beispielfraktion, direkt nebeneinander liegen (vgl. Abbildung 5 bzw. Abbildung 12), wird

<sup>22</sup> Eine sukzessive Ermittlung für jede Fraktion ist möglich, jedoch nicht sinnvoll, da das Kartenspiel für jede Fraktion extra ausgewertet werden müsste. Für acht Fraktionen wären acht Auszählungen erforderlich.

<sup>23</sup> Im Folgenden soll die Betrachtungsrichtung für alle wechselbezogenen Abbildungen von links nach rechts verlaufen. Ein möglicher Wechsel wird am rechten Rand der betrachteten Karte gezählt.

innerhalb dieser Gruppe kein Wechsel der Fraktion gezählt, da alle Karten zur selben Fraktion gehören. Erst durch die Einbeziehung vor- bzw. nachgelagerter anderer Karten können Fraktionswechsel registriert werden. Liegt in der Reihe zuerst eine Karte einer beliebigen anderen Fraktion, z. B. eine 8, dann die vier Buben und nach den Buben wieder eine Karte einer anderen Fraktion, z. B. eine Dame, so wird nach der 8er-Karte ein Fraktionswechsel für die 8er-Fraktion gezählt, da die nachfolgende Karte ein Bube ist (vgl. Abbildung 12).

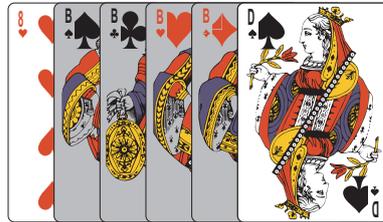


Abb. 12: Beispiel für die Zählung der Wechsel

Dem Buben folgen noch drei weitere Buben, für die kein Wechsel gezählt wird, da es sich um Objekte der gleichen Fraktion handelt. Erst nach dem letzten Buben in der Gruppe wird ein Fraktionswechsel für die Buben gezählt, da die nachfolgende Karte zur Fraktion „Dame“ gehört. Für die Fraktion „Bube“ liegt also die Wechselzahl  $W_{Bube} = 1$  vor, ebenso wie für die Fraktion „8er“:  $W_8 = 1$ ;  $W_{Dame} = 0$ . Daraus folgt:  $W_{ges} = 2$ . Wie anhand aller in diesem Arbeitsbericht visualisierter Beispiele einfach nachzuvollziehen ist, entspricht die Wechselanzahl stets der um eins verminderten Gesamtgruppenanzahl ( $GA_{ges}$ ), wodurch die starke Analogie zwischen Wechselzahl und Gruppenanzahl auch formal deutlich wird:  $W_{ges} = GA_{ges} - 1$ .<sup>24</sup>

Mit steigender Wechselanzahl nimmt die Vermischung des Stoffgemisches zu. Die minimale Vermischung für das Kartenspiel mit 8 Fraktionen hat die in Abbildung 9 dargestellte Anordnung: jede Fraktion bildet eine Gruppe aus vier Karten, die alle Objekte der Fraktion umfasst, und alle Gruppen sind nacheinander angeordnet. Für das Beispiel minimaler Vermischung ergibt sich in Summe für alle Fraktionen eine minimale Wechselanzahl von  $W_{ges} = 7$ . Allgemein gilt für die minimale Vermischung  $W_{ges}^{min} = \text{Fraktionsanzahl} - 1$ . Die maximale Wechselanzahl ergibt sich, wenn im Kartenspiel die Karten jeder Fraktion vereinzelt durch Karten anderer Fraktionen getrennt liegen. Da dann nach jeder Karte die Fraktion gewechselt wird und die Wechsel aufsummiert werden, ergeben sich für 32 Karten insgesamt 31 Wechsel. Allgemein gilt:  $W_{ges}^{max} = \text{Anzahl Objekte} - 1$ . Im Gegensatz zur Formel für die minimale Wechselzahl gilt diese Formel allerdings nicht uneingeschränkt. Falls eine Fraktion mehr als 50 % des Gemisches umfasst, können die Karten dieser Fraktion nicht mehr vereinzelt werden. Es gibt daher immer eine Fraktionsgruppe, in der sich mindestens zwei Karten konzentrieren, und die Ermittlung der maximalen Wechselanzahl ist somit abhängig von den Fraktionsanteilen.

<sup>24</sup> Würde der Wechsel des letzten Objekts und somit der Abschluss des diskreten Gemisches auch als ein Wechsel gezählt werden, so entsprächen sich Wechselanzahl und Gesamtgruppenanzahl.

Für Aussagen zur Vermischung eines Stoffgemisches ist neben der Konzentration auch die genaue Lage der verschiedenen Fraktionsgruppen relevant. Als weitere Anordnungsmerkmale sollten daher die Abstände bzw. *Entfernungen* der Gruppen berücksichtigt werden.<sup>25</sup> Dabei gilt es zunächst festzulegen, wie die Abstände gemessen werden. Eine nahe liegende Möglichkeit besteht darin, die Distanz ( $d$ ) zwischen zwei Gruppen auf einer metrischen Skala, z. B. durch Maßnahmen mit einem Lineal oder Maßband zu bestimmen. Für den Fall, dass die Ausdehnung (Breite) der einzelnen Objekte für den Sortierprozess keine wesentliche Rolle spielt, sondern lediglich die Abfolge der Objekte relevant ist, besteht auch die Möglichkeit, den Objekten ihren Positionswert zuzuordnen, deren Differenz dann die Entfernung misst. Für die Distanz zweier Objekte A und B gilt dann mit den jeweiligen Positionswerten  $a$  und  $b$ :

$$d_{AB} = |a - b|. \quad (1)$$

Ähnlich wie etwa die Leergut-Flaschen auf einem Sortierband besteht das Kartenspiel aus diskreten, gleichförmigen Objekten, für die eine Bestimmung des Abstands mittels der Positionswerte (statt zentimetergenauer Positionen) zweckmäßig erscheint. Der Abstand zwischen zwei Buben-Gruppen wird daher exemplarisch ermittelt, in dem die Karten anderer Fraktionen gezählt werden, die zwischen den Buben liegen.<sup>26</sup>

Für eine einzelne Fraktion lässt sich die Vermischung durch Angabe der Abstände zwischen ihren Gruppen innerhalb des gesamten Stoffgemisches beschreiben. Je größer die Summe der Abstände ist, desto vermischerter liegt diese Fraktion im Stoffgemisch vor. Entgegengesetzt zu den Überlegungen zu unterschiedlichen Gruppengrößen wird hier als Konvention festgelegt, dass bei insgesamt gleich großen Gesamtabständen der verschiedenen Gruppen einer Fraktion (vgl. nochmals die unterschiedlichen Anordnungen der Buben in Abbildung 6) ungleichmäßigere Verteilungen der Abstände eine größere Vermischung bedingen sollen. Dies lässt sich etwa dadurch begründen, dass unterschiedlich weite Abstände zwischen den Objekten einer Fraktion eine Aussortierung in einem speziellen Rhythmus erschweren, wohingegen gleichmäßige Abstände besser eine Struktur in der Anordnung zwischen den Objekten einer Fraktion erkennen lassen.

Zur Beurteilung des Stoffgemisches anhand aller Fraktionen können die Abstände jeder einzelnen Fraktion sukzessive bestimmt und anschließend über alle Fraktionen zu einem Gesamtwert aggregiert werden. Wie eine entsprechende Kennzahl ausgestaltet sein sollte, ist wiederum erst Gegenstand des nachfolgenden Kapitels 4. Hier soll allerdings auf mögliche Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Fraktionen hingewiesen werden, wie sie schon in den intuitiven Überlegungen angesprochen wurden. Diese betrafen die Frage nach den maximalen Gesamtabständen einer Fraktion in einem Stoffgemisch. Wie gezeigt, kann nur eine Fraktion am Rand des Stoffgemisches liegen, und somit kommt die gesamte Spanne des Stoffgemisches nur für die Entfernung einer einzelnen Fraktion als Maximalwert in Frage. Dies gilt es bei der Entwicklung einer Kennzahl zu berücksichtigen, die ein aussagekräftiges Maß für die Vermischung darstellt. Würde hingegen die Kennzahl so konstruiert,

<sup>25</sup> Als Gruppen werden hier wiederum auch vereinzelt liegende Objekte, also z. B. ein separater Bube, aufgefasst.

<sup>26</sup> Betont sei, dass die Abstände innerhalb einer Gruppe nicht bestimmt werden, auch wenn gemäß der Distanz-Formel innerhalb einer Gruppe Abstände zwischen den Einzelobjekten bestehen.

dass die gesamte Spanne parallel für alle Fraktionen denkbar ist, so würden tatsächliche Kennzahlenwerte ein falsches Bild vermitteln, da durch einen Vergleich mit einem idealen (nicht-erreichbaren) Maximalwert eine Verzerrung auftritt.

## 4 Messung der verschiedenen Merkmale durch Kennzahlen

Im vorigen Abschnitt wurden die Merkmale, anhand derer die Vermischung gemessen werden kann, vorgestellt, und ihre Wirkungsrichtungen sowie einige Erhebungsprobleme aufgezeigt. Es wurde deutlich, dass keine der vorgestellten Merkmale die Vermischung alleine vollständig abbildet. In diesem Abschnitt sollen daher zunächst für die verschiedenen Merkmale einzelne Kennzahlen entworfen werden, welche die jeweiligen Aspekte erfassen. Zur Vergleichbarkeit der Werte ist es zweckmäßig, alle Kennzahlen auf den Bereich  $[0,1]$  zu normieren. Abschließend wird dann noch untersucht, ob sich die Kennzahlen zu einer gemeinsamen Spitzenkennzahl kombinieren lassen, die dann einen Gesamteindruck von der Vermischung des Stoffgemisches vermittelt.

### 4.1 Fraktionsanzahlorientierter Vermischungsgrad (FVG)

Der fraktionsanzahlorientierte Vermischungsgrad kann für Gemische bestimmt werden, deren maximal mögliche Komponentenzahl bekannt ist. Hierbei wird aus der Anzahl der im Gemisch vorgefundenen Komponenten auf die Vermischung des Gemisches geschlossen. Zur Berechnung wird die Anzahl vorhandener Komponenten ins Verhältnis zur Anzahl möglicher Komponenten gesetzt:

$$FVG = \frac{\text{Anzahl vorhandener Komponenten} - 1}{\text{Anzahl möglicher Komponenten} - 1}. \quad (2)$$

Zähler und Nenner werden jeweils um 1 korrigiert, damit die Kennzahl den oben angeführten Wertebereich umfasst und bei nur einer vorhandenen Komponente ein Wert von 0 erreicht wird. Vollständige Vermischung hinsichtlich der Fraktionsanzahl ergibt sich dann, wenn alle möglichen Komponenten auch in dem Gemisch vorhanden sind. Zähler und Nenner haben in diesem Fall den gleichen Wert und es ergibt sich aus dem Quotienten  $FVG = 1$ .

### 4.2 Anteilorientierter Vermischungsgrad (AVG)

Die Anteile einzelner Fraktionen wurden bereits als ausschließliches Maß für die Vermischung verworfen. Allerdings können die Anteile aller Fraktionen zu einer Gesamtkennzahl aggregiert werden, wobei eine gleichmäßige Verteilung einen höheren Kennzahlenwert bedingen soll als eine ungleichmäßige. Graphisch ist eine Darstellung der Vermischung als Lorenzkurve möglich. Dabei wird unter

Einbeziehung der Punkte (0 %,0 %) und (100 %, 100 %) in einem Koordinatensystem der Anteil an der Merkmalssumme über dem Anteil des Merkmals an der Gesamtheit aller Merkmale abgetragen.<sup>27</sup> Die Fraktionsanteile müssen hierfür der Größe nach geordnet werden. Bei einer Sortierung vom größten zum kleinsten Wert befindet sich die Kurve oberhalb der Winkelhalbierenden.

Für ein Gemisch von 100 Karten mit fünf Fraktionen (10, Bube (B), Dame (D), König (K), Ass (A)), von denen eine Fraktion (B) 80 Karten umfasst, d. h. einen Mengenanteil von 80 % hat, und alle übrigen Fraktionen aus je fünf Karten bestehen, also je einen Anteil von 5 % haben, ergibt sich nach der Sortierung der Mengenanteile (1 (Bube), 2 (10), 3 (Dame), 4 (König), 5(Ass)) der Kurvenverlauf in Abbildung 13. Auf der Abszisse wird dabei der kumulierte Anteil der Fraktionen an der Gesamtanzahl Fraktionen (bei fünf Fraktionen also jeweils 20 %) abgetragen und auf der Ordinate der kumulierte Mengenanteil der Karten einer Fraktion.

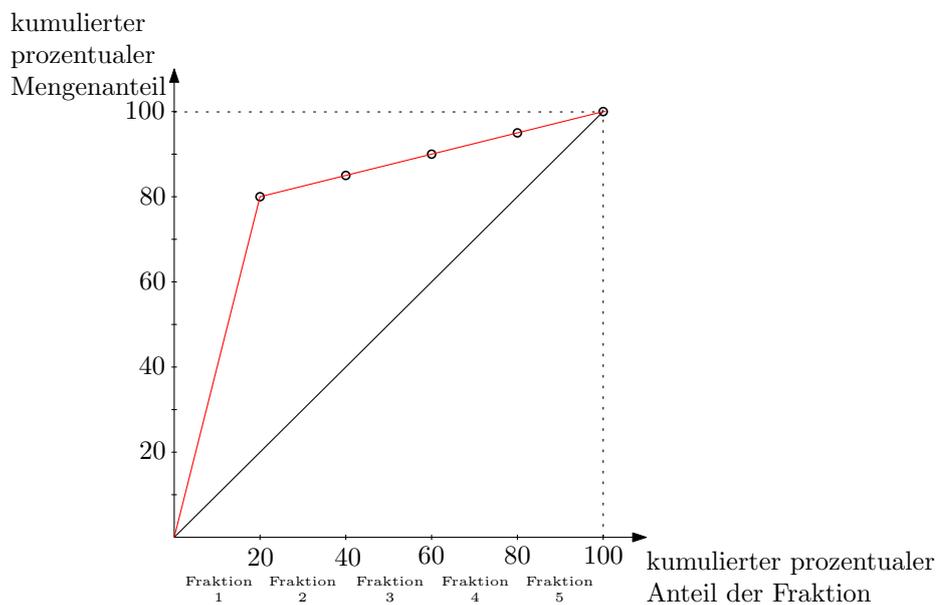


Abb. 13: Lorenzkurve als Basis zur Messung des anteilsorientierten Vermischungsgrades

Im Fall der größten Vermischung bezüglich der Anteile hätten alle Fraktionen den gleichen Anteil, d. h. der Kurvenverlauf der Lorenzkurve entspräche dem Verlauf der Winkelhalbierenden. Bei der kleinsten Vermischung, einem Gemisch, das nur aus einer Fraktion besteht, hat die Kurve die größte Durchbiegung.<sup>28</sup> Um die Vermischung in einer Zahl auszudrücken, bietet sich der Gini-Koeffizient<sup>29</sup> mit folgender Notation an:

<sup>27</sup> Vgl. Bamberg/Baur (2001), S. 24ff.; Bankhofer/Vogel (2008), S. 44–48.

<sup>28</sup> Hierbei ist zu beachten, dass die am größten ausgedehnte Lorenzkurve nicht dem Dreieck zwischen den Achsen und der Winkelhalbierenden entspricht. Sie hat im Fall der größten Ungleichheit ihren Knick im Punkt (1,100 %), vgl. hierzu Bankhofer/Vogel (2008), S. 46.

<sup>29</sup> Vgl. Bankhofer/Vogel (2008), S. 48.

---

$F$	Anzahl Fraktionen (= Merkmal)
$j$	Laufindex der Merkmalsausprägungen
$S_j$	relative Summe der Beobachtungswerte bis zur Merkmalsausprägung $j$
$h_j$	absolute Häufigkeit der Merkmalsausprägung $j$

---

$$G = 1 - \frac{1}{F} \cdot \sum_{j=1}^k (S_{j-1} + S_j) \cdot h_j. \quad (3)$$

Er vergleicht die Fläche zwischen der Lorenzkurve und der Winkelhalbierenden mit der maximal möglichen Fläche des Dreiecks zwischen den Achsen und der Winkelhalbierenden. Da der Gini-Koeffizient bei diesem Vergleich aufgrund des Knicks der maximalen Lorenzkurve nicht 1 werden kann, muss er um diese Abweichung korrigiert werden:<sup>30</sup>

$$G_{norm} = \frac{F}{F-1} \cdot G. \quad (4)$$

Dadurch wird eine Normierung auf das Intervall  $[0,1]$  erreicht und die hier aufgestellte Anforderung an eine Kennzahl erfüllt. Es ist allerdings zu beachten, dass die Bewertung invers zur eigentlichen Interpretation des Gini-Maßes erfolgen muss. Bei einem Gini-Koeffizient von 1 liegt eigentlich die größte Konzentration auf eine Fraktion vor, d. h. per Definition Unvermischtheit. Bei einem Gini-Koeffizient von 0 liegt die kleinste Konzentration vor, eine Gleichverteilung auf alle Fraktionen, also die größte Vermischung.<sup>31</sup> Der AVG ergibt sich daher als:

$$AVG = 1 - G_{norm}. \quad (5)$$

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich unter Verwendung der Häufigkeitstabelle (vgl. Tab. 2) ein normierter Gini-Koeffizient  $G_{norm}$  von 0,8 ( $G = 0,64$ ) und ein AVG von 0,2. Bezüglich der Fraktionsanteile liegt also eine Vermischung von 20 % vor.

---

$a_j$	Merkmalsausprägungen
$C_j$	kumulierte relative Häufigkeiten mit $C_j = \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{F}$
$a_j \cdot h_j$	Anzahl Beobachtungswerte mit der Merkmalssumme $MS = \sum_{j=1}^k a_j \cdot h_j$

---

<sup>30</sup> Vgl. Bankhofer/Vogel (2008), S. 48; Bamberg/Baur (2001), S. 26.

<sup>31</sup> Hier gilt es zu beachten, dass der Begriff „Konzentration“ nicht die statistische Konzentration bezeichnet.

Tab. 2: Häufigkeitstabelle zur Berechnung des Gini-Koeffizienten bzw. AVG<sup>32</sup>

$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$
5	4	0,8	20	0,2
80	1	1	80	0,8
	5		100	

$$G = 1 - \frac{1}{5} \cdot (0,2 \cdot 4 + 1 \cdot 1) = 1 - \frac{1}{5} \cdot (0,8 + 1) = 1 - 0,36 = 0,64 \quad (6)$$

$$G_{norm} = \frac{5}{5-1} \cdot 0,64 = 0,8 \quad (7)$$

$$AVG = 1 - 0,8 = 0,2 \quad (8)$$

### 4.3 Wechselorientierter Vermischungsgrad (WVG)

Die Häufigkeit des Fraktionswechsels wurde in Kapitel 3 als eine Möglichkeit der Messung von Vermischung identifiziert, bei der eine steigende Anzahl Fraktionswechsel eine erhöhte Vermischung bedingt. Der Wechselorientierte Vermischungsgrad (WVG), der einen Wertebereich zwischen 0 und 1 aufweist, wird zunächst wie folgt:<sup>33</sup>

$$WVG = \frac{\text{Anzahl Wechsel} - (\text{Anzahl Fraktionen} - 1)}{\text{Anzahl Objekte} - \text{Anzahl Fraktionen}}. \quad (9)$$

Die Anzahl Wechsel bezieht sich hier auf alle Fraktionen. Eine ausschließliche Betrachtung einer Fraktion ist möglich, aber nicht zweckmäßig (vgl. Kapitel 3). Die minimale Wechselzahl in einem Gemisch ist  $(\text{Anzahl Fraktionen} - 1)$ . Der Zähler ergibt in diesem Fall völliger Unvermischtheit den Wert 0 und der WVG ist insgesamt 0. Für die maximale Zahl Wechsel  $(\text{Anzahl Objekte} - 1)$  ergibt der Zähler den Term  $(\text{Anzahl Objekte} - \text{Anzahl Fraktionen})$ . Da Zähler und Nenner dann identische Werte aufweisen, ist  $WVG = 1$ .

Die obige Formel für den WVG besitzt allerdings nur dann die Eigenschaft, dass ein Wert von 1 erreicht werden kann, wenn keine Fraktion am Gemisch einen Anteil von mehr als 50 % + 1 Stück aufweist. Wie schon in Kapitel 3 beschrieben, besteht ansonsten keine Möglichkeit, alle Objekte einer Fraktion separat anzuordnen. Begegnet werden kann diesem Problem durch eine angepasste Ermittlung der maximal möglichen Wechselzahl (Anpassung des Nenners in Formel (9)). Falls eine Fraktion einen Anteil von 50 % + 1 Stück oder mehr hat, ist die maximale Zahl Wechsel dieser Fraktion  $W_f^{max} = n - n_f$  (mit  $n$  = Anzahl aller Objekte,  $n_f$  = Anzahl Objekte der Fraktion f). Die

<sup>32</sup> Anders als bei der graphischen Darstellung der Konzentration mittels einer Lorenzkurve müssen bei der Berechnung der Gini-Koeffizienten die Ausprägungen stets aufsteigend nach ihrer Größe sortiert werden.

<sup>33</sup> Diese Formel gilt streng genommen nicht für den Fall, dass jede Fraktion aus nur einem Objekt besteht. Da in diesem Fall Zähler und Nenner gleich null sind und vollständige Vermischung der Objekte vorliegt, wird der WVG für diese speziellen Fall gleich eins definiert.

Anzahl der Fraktionswechsel der anderen Fraktionen kann ebenfalls maximal diesen Wert annehmen. Berücksichtigt man ferner, dass das letzte Objekt keinen Wechsel nach hinten mehr aufweist, dann ergibt sich als maximale Anzahl Wechsel insgesamt der Wert  $W^{max} = (n - n_f) \cdot 2$ . Dieser Term bildet den ersten Teil des Nenners in der Formel, falls eine Fraktion mehr als 50 % + 1 Stück der Objekte umfasst, und muss für die Normierung auf das Intervall  $[0, 1]$  noch um die minimale Wechselanzahl korrigiert werden. Insgesamt ergibt sich somit folgende zweigeteilte Formel (mit  $W$  = Anzahl Wechsel) für den Wechselorientierten Vermischungsgrad (WVG):

$$WVG = \begin{cases} \frac{W-(F-1)}{n-F} & \text{falls alle } n_f < \lceil 50\% \cdot n + 1 \text{ Stück} \rceil \\ \frac{W-(F-1)}{(n-n_{fmax}) \cdot 2 - (F-1)} & \text{falls ein } n_f \geq \lceil 50\% \cdot n + 1 \text{ Stück} \rceil. \end{cases} \quad (10)$$

Erwähnt sei abschließend, dass sich statt der Wechselanzahl auch die Gruppenanzahl zur Bildung eines Vermischungsgrades heranziehen ließe, der dann als gruppenanzahlorientierter Vermischungsgrad bezeichnet werden könnte. Die Ausführungen in Kapitel 3 haben aber bereits ausreichend verdeutlicht, dass dies nur eine einfache Anpassung erfordern würde, welche die Tatsache berücksichtigt, dass die Gesamtgruppenanzahl stets gleich der Wechselanzahl plus 1 ist. Deshalb wird hierauf nachfolgend verzichtet und stattdessen direkt eine Kennzahl vorgestellt, die neben der Gruppenanzahl auch die Gruppengröße berücksichtigt.

#### 4.4 Konzentrationsorientierter Vermischungsgrad (KVG)

Der Konzentrationsorientierte Vermischungsgrad (KVG) soll messen, wie stark sich die einzelnen Objekte einer Fraktion in Gruppen konzentrieren und somit gleichzeitig Gruppenanzahl ( $GA_f$ ) und Gruppengrößen berücksichtigen. Bei einer Konzentration aller Objekte der Fraktion in einer Gruppe liegt Unvermischtheit vor; die größte Vermischung besteht dann, wenn jedes Objekt eine einzelne Gruppe bildet.

Diese Form der Konzentration kann, ähnlich wie die anteilsorientierte Vermischung, mit Hilfe von Konzentrationsmaßen, wie der Lorenzkurve und des normierten Gini-Koeffizienten, gemessen werden (vgl. Abschnitt 4.2). Zur korrekten Messung muss hier auch für den KVG der normierte Gini-Koeffizient von 1 abgezogen werden (inverse Betrachtung).

$$G^f = 1 - \frac{1}{GA_f} \cdot \sum_{j=1}^k (S_{j-1}^f + S_j^f) \cdot h_j^f \quad (11)$$

$$G_{norm}^f = \frac{GA_f}{GA_f - 1} \cdot G^f \quad (12)$$

$$KVG^f = 1 - G_{norm}^f \quad (13)$$

Die Messung erfolgt für jede Fraktion einzeln (Index  $f$ ). Die Ergebnisse müssen anschließend zu einem gesamten KVG zusammengefasst werden. Dies kann durch eine Gewichtung der Fraktionen

mit ihrem Anteil am Gemisch erfolgen:

$$KVG = \sum_{f=1}^F \frac{n_f}{n} \cdot KVG^f. \quad (14)$$

### Beispiel für die Berechnung des KVG

Abbildung 14 zeigt ein Beispiel von 12 Karten (je 4 Buben, Damen und Könige), für die der KVG exemplarisch bestimmt werden soll.

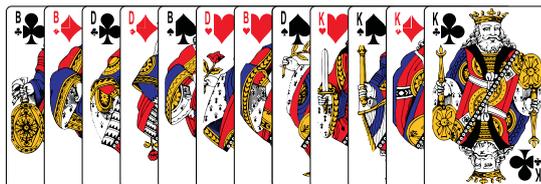


Abb. 14: Beispiel 1 für die Berechnung des KVG

Notation	
$a_j$	Merkmalsausprägungen
$h_j$	absolute Häufigkeit der Merkmalsausprägung $j$
$C_j$	relative kumulierte Häufigkeit bis zur Merkmalsausprägung $j$ mit $C_j = \sum_{i=1}^j \frac{h_i}{n}$
$S_j$	relative Summe der Beobachtungswerte bis zur Merkmalsausprägung $j$

Tab. 3: Häufigkeitstabellen für Beispiel 1 (vgl. Abbildung 14)

Buben					Damen					Könige				
$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$
1	2	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	4	1	1	4	1
2	1	1	2	1	2	1	1	2	1					
	3		4			3		4			1		4	

$$G^{Buben} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 1 \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (15)$$

$$G_{norm}^{Buben} = \frac{3}{3-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$KVG^{Buben} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$G^{Damen} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 1 \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (18)$$

$$G_{norm}^{Damen} = \frac{3}{3-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad (19)$$

$$KVG^{Damen} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$G^{Könige} = 1 - \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot 1) = 1 - 1 = 0 \quad (21)$$

$$G_{norm}^{Könige} = \frac{1}{1-1} \cdot 0 = \frac{0}{0} = 1 \quad (22)$$

$$KVG^{Könige} = 1 - 1 = 0 \quad (23)$$

$$KVG^{Bsp.1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \quad (24)$$

Drei weitere Beispielrechnungen für unterschiedliche Vermischungen finden sich in Anhang Anhang B. Dabei zeigt sich, dass die Berechnung für den Fall der Unvermischtheit (vgl. Beispiel 4, Anhang Anhang B) problematisch ist. Weil es nur eine Ausprägung gibt und die Summe der Häufigkeiten gleich 1 ist, ergibt sich analog zu den Königen im obigen Beispiel bei der Normierung der Gini-Koeffizienten für alle Fraktionen das Problem, dass durch den Wert 0 dividiert werden muss:

$$G_{norm} = \frac{n}{n-1} \cdot G \Rightarrow \frac{1}{1-1} \cdot 0 \Rightarrow \frac{1 \cdot 0}{0} \Rightarrow \frac{0}{0} \quad (25)$$

Dieses Problem lässt sich dahingehend lösen, dass in diesem Fall (und nur in diesem Fall) als Konvention die Division von 0 durch sich selbst, wie bei jeder beliebigen Zahl ungleich 0 geteilt durch sich selbst, 1 ergibt. Für den normierten Gini-Koeffizienten ergibt sich dann ein Wert von 1 und daraus resultiert  $KVG = 0$ .

Die Berechnungen (vgl. Anhang 2) des KVG für zwei „mittlere“ Vermischungen und die Extremfälle vollständige Vermischung und Unvermischtheit eines Gemisches mit 12 Karten zeigen, dass die Anforderungen an den Wertebereich dieser Kennzahl erfüllt werden und die KVGs sich in eine sinnvolle und unter dem Vermischungsaspekt plausible Reihenfolge bringen lassen:

$$KVG^{Bsp.4}(0) < KVG^{Bsp.2} \left( \frac{1}{6} \right) < KVG^{Bsp.1} \left( \frac{1}{3} \right) < KVG^{Bsp.3}(1) \quad (26)$$

#### 4.5 Abstands- bzw. Zwischenraumorientierter Vermischungsgrad (ZVG)

Der Abstands- bzw. Zwischenraumorientierte Vermischungsgrad (ZVG) soll die Vermischung hinsichtlich der Position der Objekte einer Fraktion im Gemisch messen. Dies geschieht über die Erfassung der Abstände aller Objekte einer Fraktion und anschließender Summation über alle Fraktionen. Der Abstand zwischen zwei Objekten der gleichen Fraktion wird als Zwischenraum (ZWR) bezeichnet und im Fall des Kartenspiels abgezählt.

Analog zu anderen Vermischungskennzahlen wird beim zwischenraumorientierten Vermischungsgrad die Summe der tatsächlich vorliegenden Zwischenräume ( $ZWR^{fakt}$ ) zu den maximal mögli-

chen Zwischenräumen ins Verhältnis gesetzt. Nachfolgende Formel gibt den Zwischenraumorientierten Vermischungsgrad (ZVG) als Verhältnis von tatsächlicher und maximaler ( $ZWR^{max}$ ) Zwischenraumsumme an:<sup>34</sup>

$$ZVG = \frac{ZWR^{fakt}}{ZWR^{max}} = \frac{\sum_{f=1}^F \sum_i ZWR_{fi}^2}{ZWR^{max}} \quad (27)$$

Das Quadrat bei der Berechnung der faktischen Zwischenräume stellt sicher, dass, wie in der Konvention gefordert, eine ungleichmäßige Verteilung der Zwischenraumgrößen zu einer höheren Vermischung führt als eine Verteilung, bei der die Zwischenräume (annähernd) gleich groß sind.<sup>35</sup> Diese Kennzahl erfüllt die oben definierten Anforderungen, indem sie einen Wertebereich zwischen 0 und 1 aufspannt. Der ZVG ist 0, wenn keine Fraktion einen Zwischenraum aufweist (Zähler ist gleich 0), die Objekte jeder Fraktion also unmittelbar nebeneinander liegen. Die Kennzahl nimmt den Wert 1 an, wenn der maximale Vermischungszustand vorliegt, Zähler und Nenner also gleich sind. Fraglich bleibt jedoch noch, wie die maximale Zwischenraumsumme bestimmt werden kann.

Gemäß den Aussagen in Kapitel 3 liegt die größte Vermischung einer einzelnen Fraktion vor, wenn die Objekte der Fraktion sehr weit auseinander liegen, also auf den beiden Randpositionen je ein Objekt dieser Fraktion positioniert ist. Die Problematik bei dieser Definition der Vermischungszustände liegt darin, dass bei einem Gemisch mit mehreren Fraktionen die vollständige Vermischung eigentlich nur für eine Fraktion vorliegen kann, da nur eine Fraktion an den äußeren Rändern des Gemisches platziert sein kann. Dies muss die Kennzahlenbestimmung berücksichtigen, da ansonsten der ideale Vermischungsgrad von 1 nie erreicht werden kann.

Entscheidend für die Messung ist der Fakt, dass zwar für jede einzelne Fraktion ein Wert bestimmt werden kann, dass aber die Werte der einzelnen Fraktionen nicht unabhängig voneinander sind. Belegt eine Fraktion (Buben) die Randpositionen, so ist der maximale Zwischenraum für sie die Anzahl aller nicht zu dieser Fraktion gehörenden Objekte ( $ZWR_{Bube}^{max} = n - n_{Bube}$ ). Für die nachfolgend betrachtete Fraktion (Damen) ist dieser maximale Zwischenraum gleichzeitig nicht möglich. Daher muss hier von einer insgesamt geringeren Grundgesamtheit ausgegangen werden ( $ZWR_{Dame}^{max} = n - n_{Bube} - n_{Dame}$ ). Die Einschränkung nimmt zu, je mehr Fraktionen bereits berücksichtigt wurden, bis nur noch eine Fraktion übrig ist, die keine Zwischenräume mehr aufweisen kann, weil keine weiteren Objekte vorhanden sind oder sie aus einer Karte bestehen.

<sup>34</sup>  $i$  bezeichnet hier den Laufindex für die Zwischenräume.

<sup>35</sup> Durch das Quadrieren der einzelnen Zwischenräume wird sicher gestellt, dass der größte Zwischenraum auch formal die größte Vermischung ergibt. Der Beweis hierfür kann über die Binomische Formel anhand des nachfolgenden Beispiels geführt werden. In einem Kartenspiel mit Zwischenräumen aus insgesamt 8 Karten wäre die größte Vermischung durch einen einzelnen Zwischenraum aus diesen 8 Karten gegeben. Die 8 Karten können sich aber z. B. auch auf zwei Zwischenräume mit 5 und 3 Karten aufteilen, was eine geringere Vermischung darstellt. Die erste Binomische Formel,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , zeigt nun, dass das Quadrat der Summe der zwei Zwischenräume (5 + 3), die dem größten Zwischenraum mit 8 Karten entspricht, immer größer ist als die Summe der einzeln quadrierten (kleineren) Zwischenräume:  $8^2 = (5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2 > 5^2 + 3^2 \Rightarrow 8^2 = 64 > 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ . Dies gilt auch für eine Verteilung auf drei oder mehr Zwischenräume, z. B. 1, 2 und 5 Karten:  $(1 + 2 + 5)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 5^2 > 1^2 + 2^2 + 5^2 \Rightarrow 8^2 = 64 > 1^2 + 2^2 + 5^2 = 1 + 4 + 25 = 30$ .

Will man nun die größte Summe der Zwischenräume aller Fraktionen bestimmen, so ist hierfür die Anordnung der Fraktionen maßgeblich. Sie muss sich folgendermaßen ergeben: Um für ein gegebenes Gemisch die maximalen Zwischenräume über alle Fraktionen zu bestimmen, müssen zunächst die Mächtigkeiten der Fraktionen festgestellt werden. Fraktionen, die lediglich aus einem Objekt bestehen, können selber keinen Zwischenraum besitzen. Da sie aber einen Beitrag zu den Zwischenräumen der weiteren Fraktionen leisten, sollten sie in der Mitte des Gemisches angeordnet werden. Fraktionen mit einer Objektanzahl größer als 1 müssen nach ihrer Objektanzahl sortiert werden. Die Fraktion mit der kleinsten Mächtigkeit, größer als 1, wird außen angeordnet mit mindestens je einem Objekt auf den Randpositionen. Die nächstgrößere Fraktion wird innerhalb der äußersten Fraktion platziert, ebenfalls mit mindestens je einer Karte auf den für diese Fraktion noch möglichen „Randpositionen“. Wie sich die Objekte auf diese beiden Positionen aufteilen, ist beliebig. In dieser Folge wird für alle Fraktionen vorgegangen, bis zum Schluss die größte Fraktion die innerste Position belegt. Diese Fraktion muss innen liegen, weil sie für die vorletzte Fraktion den größten noch möglichen Zwischenraum ergibt.

Für die resultierende Anordnung der Objekte müssen jetzt über alle Fraktionen die entsprechenden Zwischenraumgrößen mathematisch bestimmt werden. Dazu wird für jede Fraktion die Spannweite inklusive des ersten und letzten Objekts der Fraktion als diskreter Wert ermittelt:

$$\text{Spannweite} = (\text{letzte Position} - \text{erste Position}) + 1 \quad (28)$$

Von der Spannweite wird die Objektanzahl der Fraktion subtrahiert ( $\text{Spannweite} - n_f$ ) und der resultierende Wert ist dann der Gesamtwzwischenraum. Dieser wird analog zur Bestimmung der tatsächlichen Zwischenräume im Zähler ebenfalls quadriert. Dann werden die quadrierten Gesamtwzwischenräume über alle Fraktionen summiert.

Diese Ermittlung des größtmöglichen Zwischenraums ( $ZWR^{max}$ ) eines Gemisches lässt sich nicht durch eine einzige Formel beschreiben. Daher wird auf eine algorithmische Darstellung der Vorgehensweise als Pseudocode zurückgegriffen:

---

**Algorithmus 1:** Bestimmung des maximalen Zwischenraums eines Gemisches

---

Initialisierung der Zwischenraumsumme = 0;

Für alle Fraktionen  $f$

    Falls  $n_f = 1$

        Ordne  $f$  mittig an und entferne die Fraktion aus der Menge der Fraktionen;

    Ende falls;

Ende für;

Für alle Fraktionen  $f$

    Ermittle die größte der verbleibenden Fraktionen;

    Ordne das erste Objekt dieser Fraktion links neben den ggf. schon platzierten Objekten an und alle übrigen Objekte ordne rechts an bzw. ordne die Fraktion mittig an (falls keine Fraktion aus nur einer Karte besteht);

Ende für;

Setze die Menge der Fraktionen wieder auf ihren Eingangswert;

Für alle Fraktionen  $f$

    Spannweite der Fraktion = (letzte Position – erste Position) + 1

    Gesamtzwischenraum der Fraktion = Spannweite –  $n_f$

    Gesamtzwischenraumquadrat = Quadriere Zwischenraum der Fraktion

    Zwischenraumsumme = Zwischenraumsumme + Gesamtzwischenraumquadrat

Ende für;

Ausgabe  $ZWR^{max} =$  Zwischenraumsumme.

---

Der Algorithmus folgt der oben angeführten Reihenfolge zur Bestimmung der maximalen abstandsorientierten Vermischung.

### Beispiel für die Berechnung des ZVG

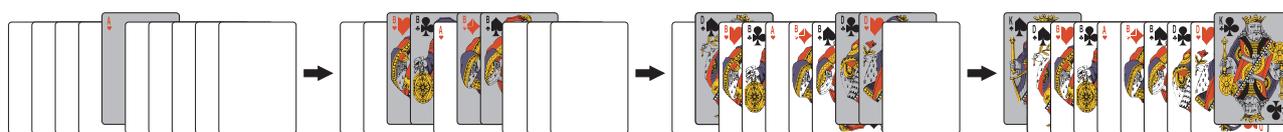


Abb. 15: Anordnungsfolge für die maximale Vermischung eines Beispiels mit 10 Karten und vier Fraktionen unterschiedlicher Größe

Im Folgenden werden für ein Beispielmischung mit zehn Karten und vier Fraktionen die maximalen Abstände und damit die maximalen Gesamtzwischenräume ermittelt. Davon hat die größte Fraktion (Buben) vier Karten, drei Karten sind Damen, zwei Könige und eine Karte ist ein Ass. Da hier eine Fraktion nur eine Karte umfasst, wird diese zur Ermittlung der maximalen Zwischenräume dieses Gemisches in der Mitte angeordnet (vgl. Abbildung 15 links). Als nächste Fraktion werden die Buben als größte Fraktion um diese Karte herum angeordnet. Die Aufteilung der Karten, drei links, eine

rechts oder umgekehrt bzw. zwei auf der einen und zwei auf der anderen Seite, ist beliebig. Der Zwischenraum der Buben ist immer das eine Ass. Außerhalb der Buben werden dann die Damen platziert und zum Schluss die Könige ganz außen auf den Randpositionen.

Hier ist die maximale Vermischung  $ZWR^{max}$ :

$$\underbrace{8^2}_{\text{Könige}} + \underbrace{5^2}_{\text{Damen}} + \underbrace{1^2}_{\text{Buben}} + \underbrace{0}_{\text{Ass}} = 90. \quad (29)$$

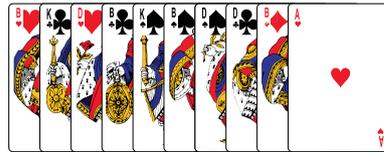


Abb. 16: Vollständiges Beispiel zum ZVG

Wird nun ein Kartenspiel mit den obigen zehn Karten, wie in der Abbildung 16 gezeigt, vermischt, dann ergibt sich ein ZVG gemäß Formel (27) und der Berechnung von  $ZWR^{max}$  in (29) von:

$$ZVG = \frac{\overbrace{2^2 + 1^2 + 2^2}^{\text{Buben}} + \overbrace{3^2}^{\text{Damen}} + \overbrace{2^2}^{\text{Könige}}}{\underbrace{90}_{ZVG^{max}}} = \frac{22}{90} \approx 0,2444. \quad (30)$$

## 4.6 Integrierter Vermischungsgrad (IVG)

Die fünf entwickelten Kennzahlen können allesamt verwendet werden, um sich einen Eindruck über die verschiedenen Facetten der Vermischung eines Gemisches zu verschaffen. Fraglich ist, ob und wenn ja wie sich alle oder eine Auswahl der Kennzahlen sinnvoll zu einer Gesamtkennzahl vereinigen lassen, die den Gesamtzustand des Gemisches beschreibt. Als eine zweckmäßige Option könnte sich hierzu eine multiplikative Verknüpfung der einzelnen Kennzahlen erweisen. Dabei sollte allerdings der Wechselorientierte Vermischungsgrad (WVG) nicht zusammen mit dem Konzentrationsorientierten Vermischungsgrad (KVG) verwendet werden, da, wie gezeigt wurde, beide ähnliche Sachverhalte betreffen. Da der KVG umfassender als der WVG ist, wird letzter nachfolgend bei den Überlegungen zu einer Gesamtkennzahl nicht weiter betrachtet.

Ein Integrierter Vermischungsgrad (IVG) ließe sich dann z. B. wie folgt definieren:

$$IVG = FVG^\alpha \cdot AVG^\beta \cdot KVG^\gamma \cdot ZVG^\delta \text{ mit } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \text{ und } \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0. \quad (31)$$

Die Exponenten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  dienen zur Gewichtung der einzelnen Teilkennzahlen. Diese Gewichtung kann abhängig von der konkreten Problemstellung, z. B. nach den prozessualen Besonderheiten

eines Sortierverfahrens, gewählt werden. Die Höhe des jeweiligen Exponenten gibt die Stärke an, mit der die jeweilige Kennzahl einfließt. Bei einem Exponenten von 0 wird die damit gewichtete Kennzahl aus der Betrachtung des IVG ausgeschlossen; nehmen alle Exponenten den Wert  $\frac{1}{4}$  an, so sind alle vier Kennzahlen zur Bestimmung der gesamten (Un-)Vermischtheit gleich wichtig.

Der IVG ist wie die einzelnen Kennzahlen (theoretisch) ebenfalls auf den Wertebereich zwischen 0 und 1 normiert. Er nimmt den Wert 0 an, wenn mindestens eine Teilkennzahl den Wert 0 annimmt. Der Maximalwert  $IVG = 1$  ergibt sich hingegen, wenn alle einzelnen Vermischungsgrade den Wert 1 annehmen (oder das Bewertungskriterium als vollkommen irrelevant aufgefasst und somit der Exponent der entsprechenden Kennzahl auf 0 gesetzt wird). Unter den in diesem Arbeitsbericht getroffenen Konventionen lässt sich keine Anordnung finden, bei der dies gilt, denn zumindest die Maximalwerte für KVG und ZVG treten nicht bei der gleichen Anordnung auf. Während beim KVG ein Wert von 1 nur erzielt werden kann, wenn alle Karten separat liegen, lässt sich der ZVG immer dadurch erhöhen, dass zwei Objekte einer Fraktion zusammenrücken, bis sie eine Gruppe bilden, die dann weiter von den anderen Objekten bzw. Gruppen der Fraktion entfernt liegt (vgl. nochmals die Aussagen zur Begründung der Konvention bzgl. der Entfernungsbeurteilung in Kapitel 3).

Aufgrund der getroffenen Konventionen kann der Integrierte Vermischungsgrad somit nie den Wert 1 annehmen (falls  $\delta \neq 0$  und  $\delta \neq 1$ ), weil die Beurteilung der beiden Anordnungsmerkmale (Konzentration, Entfernung) mit gegenläufigen bzw. zumindest nicht vollständig gleichläufigen Wirkungsrichtungen verbunden ist. Dies bedeutet nicht, dass der Vergleich konkreter Anordnungen nicht dennoch auf Basis des Integrierten Vermischungsgrades möglich ist. Solange die Exponenten die Wichtigkeit der Merkmale richtig widerspiegeln, ist das Gemisch mit höherem IVG auch – relativ gesehen – stärker vermischt. Lediglich die absolute Einordnung eines IVG-Wertes ist nicht möglich, da kein Referenzwert von 100 % gegeben ist.

Dies wäre anders, wenn die Konvention bzgl. der Entfernungen dahingehend verändert würde, dass gleichmäßige Entfernungen eine stärkere Vermischung bedingen sollen und demgemäß die Bestimmung des ZVG eine unterproportionale Gewichtung der Entfernungen vornehmen würde.<sup>36</sup> Dann würde die in Abbildung 11 dargestellte Anordnung einen 100 %-igen IVG aufweisen, da alle Einzelkennzahlen den Wert 100 % annehmen. Letztlich sollte dem Wunsch nach einer auf dem vollen Prozentintervall [0 %, 100 %] normierten Gesamtkennzahl aber nicht der Aussagegehalt der Einzelkennzahlen geopfert werden, zumal eine aussagekräftige Beurteilung der Vermischung ohnehin nur durch die separate Betrachtung aller Einzelkennzahlen möglich ist.

---

<sup>36</sup> Dies ließe sich erreichen, indem statt des Quadrats die Wurzel der Entfernungen in die Formel und den Algorithmus zur Bestimmung des ZVG integriert würde.

## 5 Resümee und Ausblick

Die Ausführungen dieses Arbeitsberichts haben verdeutlicht, dass sich die Vermischung eines Stoffgemisches nicht auf triviale Weise kennzeichnen lässt. Obwohl sich oft intuitiv einschätzen lässt, welches von zwei Stoffgemischen stärker vermischt ist, fällt eine objektive Kennzeichnung der Vermischung schwer. Dies ist erstens dadurch begründet, dass die Vermischung nicht durch ein einziges Kennzeichen beschreibbar ist, sondern der simultanen Analyse verschiedener Merkmale bedarf. Diese Merkmale beinhalten neben den (absoluten und relativen) Häufigkeiten der Fraktionen auch ihre Konzentrationen und Abstände innerhalb des Gemisches. Andererseits ist die Wirkungsrichtung der einzelnen Merkmale nicht immer eindeutig. So mussten bei gleicher Gruppenanzahl zur Beurteilung der Verteilung von Gruppengrößen und -abständen zunächst Konventionen getroffen werden, die von individuellen Einschätzungen und den konkreten Sortierprozessen abhängen. Überdies ist auch die Aggregation der in Kapitel 4 entwickelten Kennzahlen zu einer Gesamtkennzahl wenig zweckmäßig, da hierdurch die separat gemessenen, unterschiedlichen Charakteristika des Stoffgemisches nicht mehr sichtbar werden. Demgemäß lassen sich Sortierprozesse nur dann präzise planen, wenn die einzelnen Vermischungskennzahlen bekannt sind und ihr Aussagegehalt richtig interpretiert wird.

Gleichwohl stellt die Ermittlung der hier vorgestellten Kennzahlen nur den ersten Schritt einer kennzahlengestützten Sortierplanung dar. Im Anschluss daran müssen die Auswirkungen bestimmter Kennzahlenwerte auf die Ausgestaltung des Sortierprozesses und die damit einhergehenden Kosten funktional beschrieben werden. Die Kosten (und Erlöse) sind dabei nicht nur von der Qualität des Inputs, sondern auch von der angestrebten Qualität des Prozesses (vor allem seiner Ergiebigkeit) und des Outputs (vor allem seiner Sortenreinheit) abhängig. Weiterführende Forschungsarbeiten sollten im Rahmen von Erklärungsmodellen zunächst diesen Themenbereich adressieren. Darüber hinaus müssen die in diesem Arbeitsbericht lediglich für eindimensionale Sortierprozesse angestellten Überlegungen auf zwei- und dreidimensionale Sortierprozesse ausgeweitet werden, um eine Anwendung auf zusätzliche praxisrelevante Sortierprozesse (z. B. die Sortierung von Leichtstoffverpackungen) zu ermöglichen. Um schließlich in der Praxis nutzbare Planungs- bzw. Optimierungsmodelle zu entwickeln, muss noch eine weitere Forschungslücke geschlossen werden. Da die Zusammensetzung des Stoffgemisches und somit auch die Werte der verschiedenen Vermischungskennzahlen in der Realität schwanken – und demgemäß die Zusammensetzung des Stoffgemisches ex ante nie bekannt ist –, bedürfen die entwickelten Optimierungsmodelle stochastischer Modellelemente.

## Anhang A Bilderübersicht der Kartenspiele

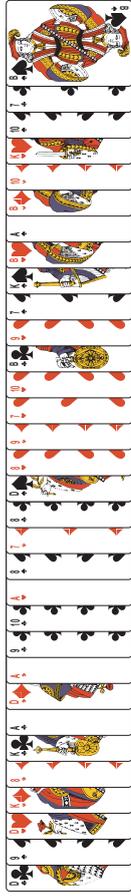


Abb. 3 : Skatblatt mit 32 Karten in einer eindimensionalen Anordnung

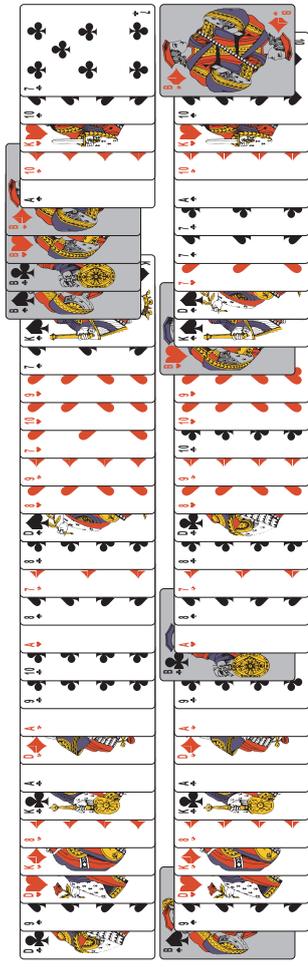


Abb. 5 : Unterschiedliche Anordnungen von vier Buben

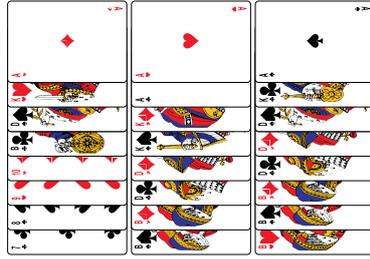


Abb. 4 : Drei Teilgemische mit abnehmender Vermischung

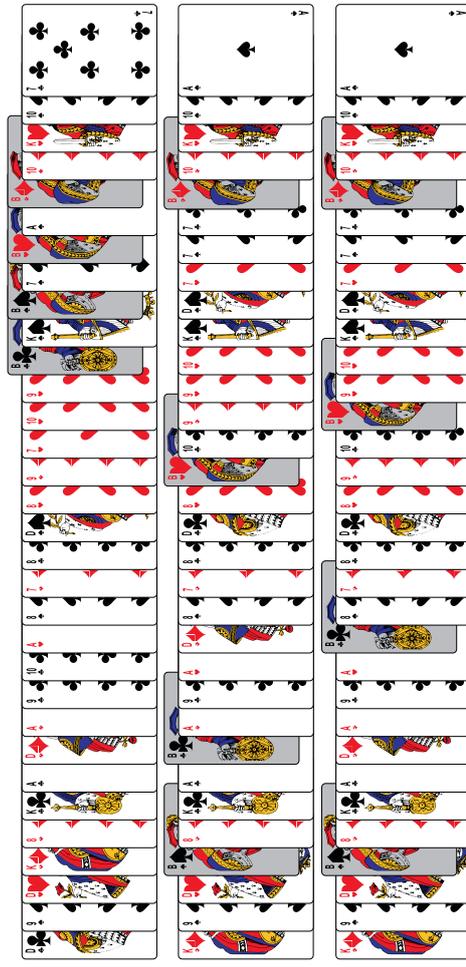


Abb. 6 : Unterschiedlich vermischtes Kartenspiel mit vier einzelnen Buben

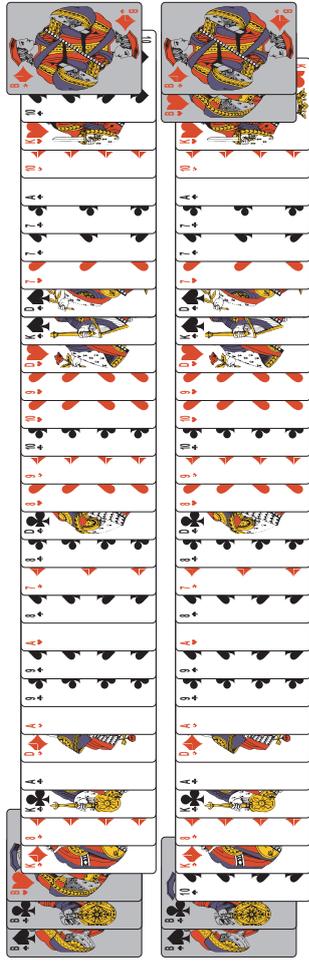


Abb. 7 : Vermischung von vier gleichen Karten einer Fraktion mit unterschiedlichen Gruppengrößen

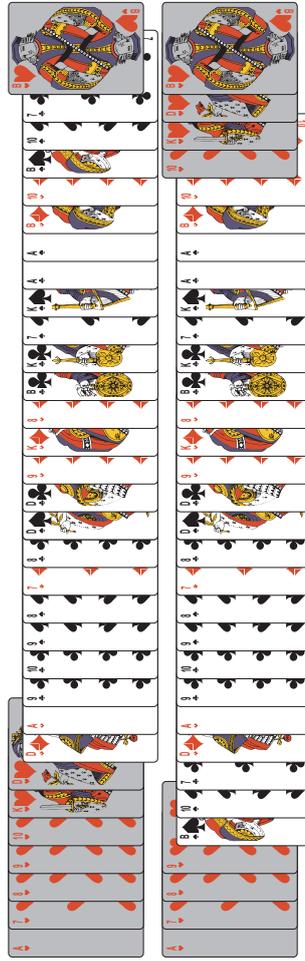


Abb. 8 : Vermischung von acht gleichen Karten einer Fraktion



Abb. 9 : Unvermischung aller Fraktionen

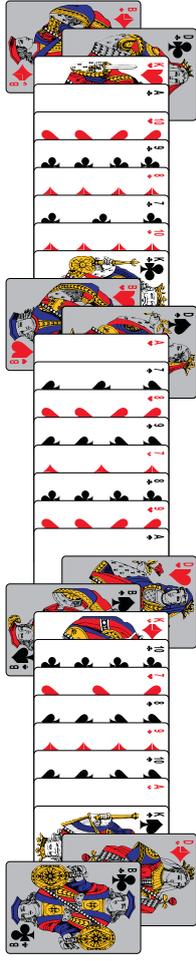


Abb. 10 : Unterschiedliche Versionen mit hoher Vermischung aller Fraktionen

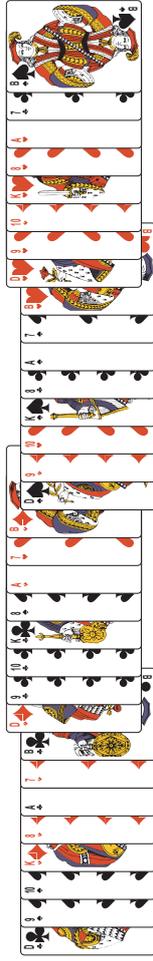


Abb. 11 : Vermischung mit gleichmäßigen Abständen aller Fraktionen



Abb. 12 : Beispiel für die Zählung der Wechsel

## Anhang B Berechnung der KVGe für ein Beispiel mit 12 Karten

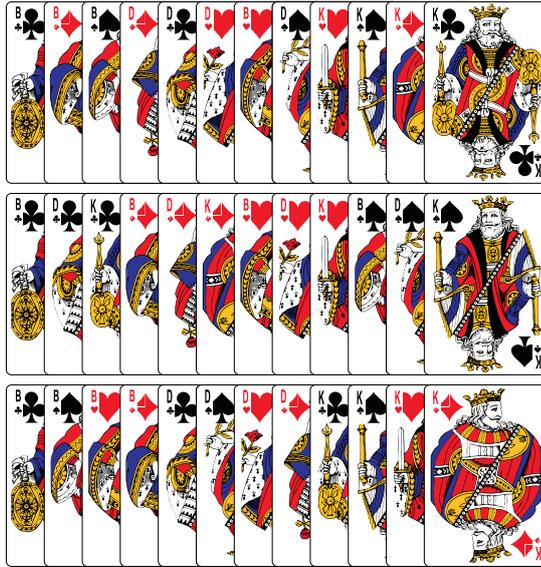


Abb. 27: Drei weitere Beispiele zur Bestimmung des KVG (oben Beispiel 2, Mitte Beispiel 3, unten Beispiel 4)

Tab. 4: Häufigkeitstabellen für Beispiel 2

Buben					Damen					Könige				
$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$
1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	4	1	1	4	1
3	1	1	3	1	3	1	1	3	1					
	2		4			2		4			1		4	

$$G^{Buben} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \quad (32)$$

$$G_{norm}^{Buben} = \frac{2}{2-1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \quad (33)$$

$$KVG^{Buben} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$G^{Damen} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \quad (35)$$

$$G_{norm}^{Damen} = \frac{2}{2-1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \quad (36)$$

$$KVG^{Damen} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (37)$$

$$G^{Könige} = 1 - \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot 1) = 1 - 1 = 0 \quad (38)$$

$$G_{norm}^{Könige} = \frac{1}{1-1} \cdot 0 = 1 \quad (39)$$

$$KVG^{Könige} = 1 - 1 = 0 \quad (40)$$

$$KVG^{Bsp.2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{6} \quad (41)$$

Tab. 5: Häufigkeitstabellen für Beispiel 3

Buben					Damen					Könige				
$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$
1	4	1	4	1	1	4	1	4	1	1	4	1	4	1
	4		4			4		4			4		4	

$$G^{Buben} = 1 - \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot 4) = 1 - 1 = 0 \quad (42)$$

$$G_{norm}^{Buben} = \frac{4}{4-1} \cdot 0 = 0 \quad (43)$$

$$KVG^{Buben} = 1 - 0 = 1 \quad (44)$$

$$G^{Damen} = 1 - \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot 4) = 1 - 1 = 0 \quad (45)$$

$$G_{norm}^{Damen} = \frac{4}{4-1} \cdot 0 = 0 \quad (46)$$

$$KVG^{Damen} = 1 - 0 = 1 \quad (47)$$

$$G^{Könige} = 1 - \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot 4) = 1 - 1 = 0 \quad (48)$$

$$G_{norm}^{Könige} = \frac{4}{4-1} \cdot 0 = 0 \quad (49)$$

$$KVG^{Könige} = 1 - 0 = 1 \quad (50)$$

$$KVG^{Bsp.3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = 1 \quad (51)$$

Tab. 6: Häufigkeitstabellen für Beispiel 4

Buben					Damen					Könige				
$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$	$a_j$	$h_j$	$C_j$	$a_j \cdot h_j$	$S_j$
4	1	1	4	1	4	1	1	4	1	4	1	1	4	1
	1		4			1		4			1		4	

$$G^{Buben} = 1 - \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot 1) = 1 - 1 = 0 \quad (52)$$

$$G_{norm}^{Buben} = \frac{1}{1-1} \cdot 0 = 1 \quad (53)$$

$$KVG^{Buben} = 1 - 1 = 0 \quad (54)$$

$$G^{Damen} = 1 - \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot 1) = 1 - 1 = 0 \quad (55)$$

$$G_{norm}^{Damen} = \frac{1}{1-1} \cdot 0 = 1 \quad (56)$$

$$KVG^{Damen} = 1 - 1 = 0 \quad (57)$$

$$G^{Könige} = 1 - \frac{1}{1} \cdot (1 \cdot 1) = 1 - 1 = 0 \quad (58)$$

$$G_{norm}^{Könige} = \frac{1}{1-1} \cdot 0 = 1 \quad (59)$$

$$KVG^{Könige} = 1 - 1 = 0 \quad (60)$$

$$KVG^{Bsp.4} = \frac{3 \cdot 0}{3} = 0 \quad (61)$$

# Literaturverzeichnis

**Bamberg, G./Baur, F.:** Statistik, 11. Auflage, München, Wien 2001.

**Bankhofer, U./Vogel, J.:** Datenanalyse und Statistik, Wiesbaden 2008.

**Behrens, S.:** Stoffgemische als Erkenntnisobjekt der Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1998.

**Bilitewski, B./Härdtle, G./Marek, K.:** Abfallwirtschaft: Handbuch für Praxis und Lehre, 3. Auflage, Berlin, Heidelberg 2000.

**Duales System Deutschland GmbH:** Wertstoffkreislauf der Verbundverpackungen, <http://www.gruener-punkt.de/index.php?id=1816>, Abrufdatum: 15.07.2008.

**Falbe, J./Regitz, M. (Hrsg.):** Römpf-Lexikon Chemie, Band 5, 9. Auflage, Stuttgart 1999.

**Lautenschläger, K.-H./Schröter, W./Teschner, J.:** Taschenbuch der Chemie, 19. Auflage, Frankfurt 2002.

**Pascoe, R. D.:** Sorting of Wastoplastics for Recycling, in: Rapra Review Reports, Vol. 11, No. 4, 2000.

**Schubert, H. (Hrsg.):** Handbuch der Mechanischen Verfahrenstechnik, Band 2, Weinheim 2003.

**Sodhi, M. S./Young, J./Knight, W. A.:** Modelling material separation processes in bulk recycling, in: International Journal of Production Research, Vol. 37, No. 10, 1999, S. 2239–2252.

**Souren, R.:** Theorie betrieblicher Reduktion – Grundlagen, Modellierung und Optimierungsansätze stofflicher Entsorgungsprozesse, Heidelberg 1996.

**Souren, R.:** Optimale Sortierung von Verpackungsabfällen, in: Abfallwirtschaftsjournal, Jg. 9, Nr. 12, 1997, S. 32–38.

**Uhlig, D. E.:** Handbuch der Sortiertechnik: Duales System in der Praxis, Köln 1997.

**Ilmenauer Schriften zur Betriebswirtschaftslehre**

**Institut für Betriebswirtschaftslehre der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der  
Technischen Universität Ilmenau**

[www.tu-ilmenau.de/is-ww](http://www.tu-ilmenau.de/is-ww)

**Herausgeber**

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Norbert Bach  
Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Gernot Brähler  
Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Gerrit Brösel  
Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Katja Gelbrich  
Jun.-Prof. Dr. rer. pol. David Müller  
Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Rainer Souren

**ISSN 2192-4643**

**URN urn:nbn:de:gbv:ilm1-2011200283**