Abstract zur Dissertation

Leichte Teilgraphen in Polyedergraphen

von Dipl.-Math. Igor Fabrici

In der vorliegenden Arbeit wurden Teilgraphen von Polyedergraphen untersucht, die ausschließlich Knoten "kleiner" Valenz besitzen.
Für einen (endlichen schlichten ungerichteten) planaren Graphen $G = (V, E)$ bezeichne $\mathscr{S}(G)$ die Menge der Teilgraphen von G (man beachte, daß sie mehrere paarweise isomorphe Elemente enthält) und $\mathscr{H} \preceq G$ bezeichne die Tatsache, daß G einen Teilgraphen enthält, der zu einem Element der Menge $\mathscr{H}$ isomorph ist. Ein Weg der Ordnung k (ein sogenannter k-Weg) wird mit P_k bezeichnet. Schließlich sei $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$ die Menge der c-zusammenhängenden planaren Graphen mit Knotenminimalvalenz $\geq \delta$ und Flächenminimalvalenz $\geq \varrho$.

Problem. Es seien $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ zwei Mengen von zusammenhängenden planaren Graphen, wobei $\mathscr{G}$ einen Graphen G mit $\mathscr{H} \preceq G$ enthält, und Ψ eine Funktion, die jedem Paar (G, K) von Graphen mit $K \in \mathscr{S}(G)$ eine natürliche Zahl zuordnet (anstelle von $\Psi(G, K)$ schreiben wir $\Psi_G(K)$). Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl $\psi(\mathscr{G}, \mathscr{H}, \Psi)$, so daß jeder Graph $G \in \mathscr{G}$ mit $\mathscr{H} \preceq G$ einen Teilgraphen $K \in \mathscr{S}(G)$ enthält, der zu einem Graphen $H \in \mathscr{H}$ isomorph ist, wobei gilt

$$\Psi_G(K) \leq \psi(\mathscr{G}, \mathscr{H}, \Psi).$$

Existiert keine solche Zahl, so sei $\psi(\mathscr{G}, \mathscr{H}, \Psi) := \infty$.

Bemerkung. Es gilt also $\quad \psi(\mathscr{G}, \mathscr{H}, \Psi) = \max\limits_{G \in \mathscr{G}} \min\limits_{\substack{K \in \mathscr{S}(G) \\ \exists H \in \mathscr{H} : K \simeq H}} \Psi_G(K).$

In der Dissertation wurde dieses Problem für $\mathscr{G} = \mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$, zwei Mengentypen

$$\mathscr{H} = \{H\} \quad \text{oder} \quad \mathscr{H} = \{H : |V(H)| = k\}$$

und zwei konkrete Funktionen

$$\Psi_G(K) = \Delta_G(K) = \max_{x \in V(K)} \deg_G(x) \quad \text{oder} \quad \Psi_G(K) = W_G(K) = \sum_{x \in V(K)} \deg_G(x)$$

betrachtet.

Eines der Hauptresultate der Arbeit wurde im Falle $\Psi = \Delta$ und $\mathscr{H} = \{H\}$ erzielt. Es sei $\varphi(\mathscr{G}, H) := \psi(\mathscr{G}, \{H\}, \Delta)$. Ein (Teil-)Graph H mit $\varphi(\mathscr{G}, H) < \infty$ wird *leicht* in der Menge $\mathscr{G}$ genannt.

Satz.
$$\begin{aligned} \varphi(\mathscr{G}_3(3,3), P_k) &= 5k, & \text{für } k \geq 1, \\ \varphi(\mathscr{G}_3(3,3), H) &= \infty, & \text{für } H \not\simeq P_k. \end{aligned}$$

Also jeder Polyedergraph G, der einen k-Weg als Teilgraphen enthält, enthält auch ein P_k mit $\Delta_G(P_k) \leq 5k$; und für jedes $k \geq 1$ gibt es einen Polyedergraphen G_k, in dem $\Delta_G(Q_k) \geq 5k$ für alle seine Teilgraphen Q_k gilt, die zu einem k-Weg isomorph sind.
Weiterhin gibt es für jeden Graphen $H \not\simeq P_k$ und jedes $k \geq 1$ einen Polyedergraphen G_k, der ein Obergraph von H ist und in dem $\Delta_G(K) \geq k$ für alle seine Teilgraphen K gilt, die zu H isomorph sind.
Aus dem Satz folgt insbesondere, daß die Wege die einzigen leichten Graphen in der Menge der Polyedergraphen sind.