Entropie p-konvexer Hüllen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr.rer.nat.)

vorgelegt dem Rat der
Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Jörn Hildebrandt
geboren am 13. September 1974 in Jena

Gutachter	1. Prof. Dr. Bernd Carl, Jena
	2. Prof. Dr. Thomas Kühn, Leipzig
	3. Prof. Dr. Hans-Gerd Leopold, Jena

Tag der letzten Prüfung des Rigorosum	09. Januar 2003
Tag der öffentlichen Verteidigung	15. Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Entropiezahlen und Approximationsgrößen sind reelle Zahlenfolgen, die Eigenschaften von Mengen bzw. Operatoren beschreiben. So sind die (äußeren) Entropiezahlen einer Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) durch

$$\varepsilon_n(A) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \ \exists x_1, \ldots, x_n : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_d(x_i, \varepsilon) \right\}$$

definiert. Und für einen linearen stetigen Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ wird $\varepsilon_n(T) := \varepsilon_n(T(U_E))$ gesetzt. Die Entropiezahlen konvergieren genau dann gegen Null, wenn der Operator T kompakt ist. Das Konvergenzverhalten dieser Zahlenfolge kann als Grad der Kompaktheit eines Operators aufgefaßt werden.

Entropiezahlen finden ihre Anwendung in der Analysis, Geometrie, Stochastik und Approximationstheorie. Beispielsweise kann für $T \in \mathfrak{L}(E, E)$ die Eigenwertfolge $\lambda_n(T)$, die alle Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit und nach dem absoluten Betrag geordnet enthält, mit Hilfe der Entropiezahlen abgeschätzt werden:

$$\lambda_n(T) \leq \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{2^{n-1}}(T),$$

dabei wird auch kürzer $e_n(T) := \varepsilon_{2^{n-1}}(T)$ geschrieben.

Im Mittelpunkt der Arbeit stehen für $1 \leq p \leq 2$ p-konvexe Hüllen von abzählbar-unendlichen Punktmengen in Hilberträumen. Für eine solche Menge $M = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ sei die p-konvexe Hülle als Bild der Einheitskugel von ℓ_p unter dem linearen stetigen Operator

$$T : \ell_p \to H : (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$$

definiert. Ziel der Betrachtungen ist es, Zusammenhänge zwischen dem Aufbau der Menge und gewissen Approximationsgrößen ihrer p-konvexen Hülle zu finden. Genauer soll das Verhalten der sogenannten Gelfandzahlen der p-konvexen Hülle untersucht werden. Für $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ sind diese durch

$$c_n(T) := \inf \{ ||T|_M|| : \ M \subseteq E \ \wedge \ \operatorname{codim}(M) < n \}$$

definiert.

Im weiteren sollen die Voraussetzungen verschärft werden, das heißt, es soll eine Zerlegung $T = SD_\sigma$ in einen linearen stetigen Operator $S \in \mathfrak{L}(\ell_p, H)$ und einen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ mit monoton-fallender nichtnegativer Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)$ geben.

Ist $p=1$ und fällt σ logarithmisch, das heißt für ein $\alpha > 0$ ist $\sigma_i \lesssim (\log(i+1))^{-\alpha}$, dann gibt es bereits von Carl, Kyrezi und Pajor ([CaKyPa]) bzw. im Grenzfall $\alpha = 1/2$ von Li und Linde ([LiLi]) die Abschätzung

$$c_n(T) \lesssim \begin{cases} n^{-\alpha} & , \text{ für } 0 < \alpha \leq 1/2 \\ n^{-1/2} \cdot (\log(n+1))^{1/2-\alpha} & , \text{ für } \alpha \geq 1/2 \end{cases}$$

Fällt dagegen σ polynomial ($\sigma_i \lesssim i^{-\alpha}$), dann ist nach [CaKyPa] $c_n(T) \lesssim n^{-1/2-\alpha}$. Diese Abschätzungen sind alle asymptotisch optimal.
Der allgemeine p-konvexe Fall ($1 < p < \infty$) ist bisher nicht betrachtet worden. In dieser Arbeit werden die Fälle $1 < p \leq 2$ untersucht. So gibt es asymptotisch optimale Abschätzungen sowohl für den polynomialen als auch für den logarithmischen Fall. Interessanterweise vereinfacht sich im logarithmischen Fall ($\sigma_i \lesssim (\log(i+1))^{-\alpha}$) die Abschätzung zu einer Ungleichung $c_n(T) \lesssim (\log(n+1))^{-\alpha}$, während im polynomialen Fall ($\sigma_i \lesssim i^{-\alpha}$) nach der Größe von α differenziert werden muß

$$c_n(T) \lesssim \begin{cases} n^{-\frac{p'}{2}\cdot\alpha} & , \text{ für } \alpha < 1 - \frac{1}{p} \\ n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\alpha} & , \text{ für } \alpha > 1 - \frac{1}{p} \end{cases}$$

Für den Grenzfall $\alpha = 1 - 1/p$ konnte keine Abschätzung gefunden werden, aufgrund der Optimalitätsbetrachtungen muß aber $n^{-1/2} \lesssim c_n(T)$ gelten.

Im zweiten Teil werden die von Carl ([Ca1] bzw. [Ca4]) eingeführten Entropiemoduli betrachtet. Da diese aus den Entropiezahlen abgeleitet werden, können sie sowohl für Mengen als auch für Operatoren definiert werden. Steht also X für eine Menge bzw. einen Operator, dann wird der n-te Entropiemodul als $g_n(X) := \inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k(X)$ definiert. Mit Hilfe der Entropiemoduli sind unter anderem Volumenabschätzungen möglich, so gilt zum Beispiel für eine beliebige beschränkte Lebesgue-meßbare Teilmenge A eines Banachraums E die Ungleichung $(\operatorname{vol}_k(A)/\operatorname{vol}_k(U_E))^{1/k} \leq g_k(A)$.
Für Diagonaloperatoren $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ mit monoton-fallender nichtnegativer Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)$ ist bereits von Carl und Stephani ([CaSt]) die Abschätzung

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq g_k(D_\sigma) \leq 6 \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\right)^{\frac{1}{k}}$$

bekannt. Das Ziel ist es, eine Verallgemeinerung dieser Aussage für Diagonaloperatoren zwischen beliebigen Folgenräumen zu finden. Diese wird natürlich von dem Verhältnis der Volumina der Einheitskugeln in den beiden Folgenräumen abhängen, das heißt es tritt der Faktor $k^{\frac{1}{r}} := k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ auf.

Es wird gezeigt, daß für einen solchen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_q$ die Abschätzung nach unten folgendermaßen aussieht

$$k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \lesssim g_k(D_\sigma).$$

Bei der Abschätzung nach oben muß zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Auf der einen Seite ist für $p \leq q$

$$g_k(D_\sigma) \leq 6 \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}},$$

andererseits gilt für $p > q$

$$g_k(D_\sigma) \lesssim \left(4 + 2 \cdot \frac{\left|\left|(\sigma_i)_{i=k+1}^{\infty}\right|\right|_{\ell_r}}{\sigma_k} \right) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Zu bemerken ist, daß in beiden Fällen die Abschätzungen nach oben und unten nicht asymptotisch gleich sind. Es wird gezeigt, daß die Abschätzung nach unten asymptotisch optimal ist. Eine offene Frage ist, ob das auch für die Abschätzungen nach oben gilt.

Diese Aussage für Diagonaloperatoren läßt sich auf Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen verallgemeinern. Von Carl und Stephani ([CaSt]) existiert die asymptotisch optimale Abschätzung der Entropiemoduli durch die Approximationszahlen:

$$g_k(T) \leq 10k \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} a_i(T) \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Die Frage ist nun, ob eine geringfügige Vergrößerung des Index der Entropiemoduli, eine Verbesserung des Vorfaktors $10k$ ermöglicht. So wird gezeigt werden, daß für jedes $0 < \varepsilon \leq 3$

$$g_{(1+\varepsilon)\cdot k}(T) \lesssim (1 + \varepsilon^{-4}) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} t_i(T) \right)^{\frac{1}{k}}$$

gilt, wobei $t_i(T)$ die Folge der Tichomirovzahlen bezeichnet. Dies widerspricht nicht der Optimalität der vorhergehenden Abschätzung, da der Vorfaktor ε^{-4} für $\varepsilon \to 0$ gegen unendlich strebt.

Schließlich werden Entropiemoduli von 1-konvexen Hüllen von präkompakten Mengen in Banachräumen vom Typ p betrachtet. Für Entropiezahlen gibt es das folgende Ergebnis von Carl, Kyrezi und Pajor ([CaKyPa]) bzw. Creutzig und Steinwart ([CrSt]): Ist A eine präkompakte Menge in einem Banachraum vom Typ p mit $\varepsilon_n(A) \lesssim (\log(n+1))^{-\alpha}$, dann gilt

$$c_n(T) \lesssim \begin{cases} n^{-\alpha} & , \text{ für } 0 < \alpha < 1/2 \\ n^{-1/2} \cdot \log(n+1) & , \text{ für } \alpha = 1/2 \\ n^{-1/2} \cdot (\log(n+1))^{1/2-\alpha} & , \text{ für } \alpha > 1/2 \end{cases}$$

Ist nun die Übertragung der bekannten Aussagen für Entropiezahlen auf die Entropiemoduli möglich? Es wird gezeigt, daß die Entropiezahlen genau dann asymptotisch logarithmisch fallen ($\varepsilon_k(A) \asymp (\log(k+1))^{-\alpha}$), falls sich die Entropiemoduli $g_n(A)$ asymptotisch wie $n^{-\alpha}$ verhalten. Damit gilt für eine präkompakte Menge A in einem Banachraum vom Typ p, deren Entropiemoduli asymptotisch polynomial fallen ($g_n(A) \asymp n^{-\alpha}$), daß

$$g_n(\operatorname{aco} A) \lesssim \begin{cases} n^{-\alpha} & , \text{ für } 0 < \alpha < 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot \log(n+1) & , \text{ für } \alpha = 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{p'}-\alpha} & , \text{ für } \alpha > 1/p' \end{cases}$$

ist.

Bedanken möchte ich mich bei meinem Betreuer, Prof. B. Carl, für seine Anregung zu dem interessanten Thema dieser Dissertation, für seine Ratschläge, Hinweise und Anleitung. Weiterhin möchte ich dem Graduiertenkolleg „Analytische und stochastische Strukturen und Systeme“für die freundliche Gewährung meines Stipendiums danken. Ebenso danken möchte ich meinen Kollegen für zahlreiche Diskussionen, insbesondere Dr. I. Steinwart für das Korrekturlesen der Arbeit und viele nützliche Hinweise.

1 Grundbegriffe

1.1 Räume

Falls nicht explizit etwas anderes vereinbart wird, bezeichnen im folgenden E und F immer Banachräume und H einen Hilbertraum. U_E ist die abgeschlossene und $\overset{\circ}{U}_E$ die offene Einheitskugel im Banachraum E.
Für zwei Banachräume E und F wird der Raum der stetigen linearen Operatoren zwischen ihnen mit $\mathcal{L}(E,F)$ bezeichnet. Der Teilraum von $\mathcal{L}(E,F)$, in welchem die Operatoren zusätzlich noch kompakt sind, wird mit $\mathcal{K}(E,F)$ bezeichnet. Jeder Operator soll im weiteren stetig und linear sein, auch wenn dies nicht explizit angegeben ist.

Wichtige Vertreter von Banachräumen sind die Folgenräume $\ell_p(I)$ $(p \geq 1)$, die für eine endliche oder abzählbar-unendliche Menge I aus allen **p-summierbaren** Zahlenfolgen $x = (\xi_i)_{i\in I}$ bestehen, das heißt aus Folgen für die die Norm

$$||x||_p := \left(\sum_{i\in I} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

endlich ist. Ferner gibt es den Banachraum $\ell_\infty(I)$ der beschränkten Folgen mit der Norm

$$||x||_\infty := \sup_{i\in I} |\xi_i|.$$

Ist $I = \mathbb{N}$ wird die Indexmenge weggelassen. Ist I endlich und k die Kardinalität von I, dann wird auch ℓ_p^k anstatt $\ell_p(I)$ geschrieben.
Zur Vermeidung aufwendiger Fallunterscheidungen soll in den weiteren Betrachtungen der Ausdruck $\frac{1}{\infty}$ für 0 stehen.
Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnet p' die Zahl, die den Ausdruck $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ erfüllt. Dann gilt für $1 \leq p < \infty$, daß $\ell_{p'}$ der duale Raum von ℓ_p ist. (siehe [Pi1])

Die Folgenräume lassen sich zu den Lorentzfolgenräumen verallgemeinern. Eine Zahlenfolge gehört zu dem Quasi-Banachraum $\ell_{p,q}$ $(0 < p, q \leq \infty)$, falls für die dem Betrage nach monoton-fallende Umordnung $x = (\xi_i)$ die Quasi-Norm

$$||x||_{\ell_{p,q}} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(i^{(1/p-1/q)} \cdot |\xi_i|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{, für } 0 < p \leq \infty \text{ und } 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} i^{1/p} \cdot |\xi_i| & \text{, für } 0 < p \leq \infty \text{ und } q = \infty \end{cases}$$

endlich ist. Für $1 < p < \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$ ist $||\cdot||_{\ell_{p,q}}$ äquivalent zu einer Norm (siehe [Pi1]), damit ist $\ell_{p,q}$ in diesem Fall ein Banachraum.
Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der Folgenräume, denn für $1 \leq p \leq \infty$ gilt $\ell_p = \ell_{p,p}$. Außerdem existiert auf diesen Räumen eine lexikographische

Ordnung, das heißt für $q_1 \leq q_2$ ist $\ell_{p,q_1} \subseteq \ell_{p,q_2}$ und für $p_1 < p_2$ ist $\ell_{p_1,q_1} \subseteq \ell_{p_2,q_2}$ (siehe [Pi1] oder [CaSt]).

1.1. Definition. Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge, dann wird ein Operator

$$D_\sigma : \ell_p \to \ell_q : (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (\sigma_i \xi_i)_{i=1}^{\infty}$$

als **Diagonaloperator** bezeichnet.

Jeder Diagonaloperator ist durch die Folge $(\sigma_i)_{i=1}^{\infty}$ seiner Diagonalwerte eindeutig bestimmt. In [Pi1] werden die Eigenschaften charakterisiert, die diese Zahlenfolge erfüllen muß, damit der Diagonaloperator wohldefiniert ist:

1.2. Satz. *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ und eine Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^{\infty}$ gegeben. Weiter sei r so gewählt, daß $\frac{1}{r} = \max\{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}, 0\}$ ist. Dann bildet σ genau dann einen Diagonaloperator von ℓ_p in ℓ_q, falls $\sigma \in \ell_r$ ist. Die Norm des von σ erzeugten Diagonaloperators D_σ ist gleich $||\sigma||_r$.*

Eine Zahlenfolge (ξ_i) ist asymptotisch kleiner als eine Zahlenfolge (ζ_i) ($\xi_i \precsim \zeta_i$), wenn eine Konstante $c > 0$ existiert mit $\xi_i \leq c \cdot \zeta_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sind die beiden Zahlenfolgen sogar asymptotisch gleich $\xi_i \precsim \zeta_i \precsim \xi_i$, dann wird $\xi_i \asymp \zeta_i$ geschrieben.
Ein Banachraum E hat die **metrische Lifteigenschaft**, wenn sich jeder Operator T, der von E in einen Quotientenraum F/F_0 abbildet, für alle $\varepsilon > 0$ zu einer Abbildung $\tilde{T} : E \to F$ mit $T = Q_{F_0}^F \tilde{T}$ und $\|\tilde{T}\| \leq (1+\varepsilon)\|T\|$ liften läßt. Zum Beispiel hat $l_1(I)$ für jede Indexmenge I die metrische Lifteigenschaft. (siehe [CaSt])
Umgekehrt hat ein Banachraum F die **metrische Fortsetzungseigenschaft**, wenn für jeden Operator T, der von einem Raum $E_0 \subseteq E$ in F abbildet, eine lineare stetige Fortsetzung $\tilde{T} : E \to F$ mit $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ existiert. Der Raum $l_\infty(I)$ besitzt für alle Indexmengen I die metrische Fortsetzungseigenschaft. (vergleiche [CaSt])
Abschließend noch einige Anmerkungen zu Abbildungen zwischen Räumen. Eine Injektion $I : E \to F$ heißt **metrisch**, wenn für jedes $x \in E$ die Gleichung $||x|| = ||I(x)||$ gilt. Ferner ist eine Surjektion $S : E \to F$ **metrisch**, falls $S(\mathring{U}_E) = \mathring{U}_F$ ist.

1.2 Entropiezahlen und Approximationsgrößen

Für einen Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ ist die **n-te (äußere) Entropiezahl** ($n \in \mathbb{N}$) definiert durch

$$\varepsilon_n(T) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \ \exists x_1, \dots, x_n : T(U_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \varepsilon \cdot U_F) \right\}.$$

Häufiger werden im weiteren die **dyadischen Entropiezahlen**

$$e_n(T) := \varepsilon_{2^{n-1}}(T)$$

gebraucht. Mit Hilfe der Entropiezahlen kann ferner der **n-te Entropiemodul** definiert werden:

$$g_n(T) := \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k(T).$$

Weiterhin können für $n \in \mathbb{N}$ noch die **Approximationszahlen**

$$a_n(T) := \inf \{||T - A|| : \ A \in \mathfrak{L}(E, F) \ \wedge \ \operatorname{rank}(A) < n\}$$

definiert werden. Ferner gibt es die **Gelfandzahlen**

$$c_n(T) := \inf \left\{\left|\left|T I_M^E\right|\right| : \ M \subseteq E \ \wedge \ \operatorname{codim}(M) < n\right\}$$

und die **Kolmogorovzahlen**

$$d_n(T) := \inf \left\{\left|\left|Q_N^F T\right|\right| : \ N \subseteq F \ \wedge \ \dim(N) < n\right\},$$

dabei ist I_M^E die natürliche Einbettung von M in E und Q_N^F die Quotientenabbildung von F in F/N. Ist schließlich $Q_E : \ell_1(U_E) \to E : (x_b)_{b \in U_E} \mapsto \sum_{b \in U_E} x_b b$ die kanonische metrische Surjektion und $J_F : F \to \ell_\infty(U_{F'}) : y \mapsto (\langle y, b \rangle)_{b \in U_{F'}}$ die kanonische metrische Injektion, dann sind die **Tichomirovzahlen** definiert durch

$$t_n(T) := a_n(J_F T Q_E)$$

Die Beweise der folgenden Eigenschaften finden sich unter anderem in [CaSt], [Pi1] oder [Pi2].

Der Operator T ist genau dann kompakt, wenn die Entropiezahlen gegen Null konvergieren. Dasselbe gilt für die Gelfand-, die Kolmogorov- und die Tichomirovzahlen. Durch betrachten des Konvergenzverhaltens dieser Zahlenfolgen, ist es möglich, einen Grad der Kompaktheit eines Operators einzuführen.

Konvergieren die Approximationszahlen gegen Null, wird der Operator **approximierbar** genannt. Jeder approximierbare Operator ist kompakt. Umgekehrt gilt diese Aussage im allgemeinen nicht (vgl. [En]).

1.3. Definition. Seien E, F, G und H Banachräume, $T, T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(E, F)$, $S \in \mathfrak{L}(F, G)$ und $R \in \mathfrak{L}(G, H)$. Dann können folgende Eigenschaften einigen oder sogar allen obigen Zahlenfolgen zugeordnet werden

1. (**Monotonie**) Für alle $s \in \{\varepsilon, e, g, a, c, d, t\}$ ist $s_1(T) \geq s_2(T) \geq s_3(T) \geq \ldots \geq 0$ und $s_1(T) = ||T||$.

2. (**Additivität**) Die Entropiezahlen erfüllen $\varepsilon_{kn}(T_1 + T_2) \leq \varepsilon_k(T_1) + \varepsilon_n(T_2)$, während für alle $s \in \{e, a, c, d, t\}$ die Ungleichung $s_{k+n-1}(T_1+T_2) \leq s_k(T_1) + s_n(T_2)$ gilt. Die Entropiemoduli sind nicht additiv.

   Die **schwache Additivität** besagt, daß $s_n(T_1 + T_2) \leq s_n(T_1) + ||T_2||$ ist. Damit gilt sie für alle $s \in \{\varepsilon, e, a, c, d, t\}$.

3. (**Multiplikativität**) Hier müssen vier Fälle unterschieden werden. Bei den Entropiezahlen ist $\varepsilon_{kn}(RS) \leq \varepsilon_k(R)\varepsilon_n(S)$ und bei $s \in \{e, a, c, d\}$ gilt die Ungleichung $s_{k+n-1}(RS) \leq s_k(R)s_n(S)$, ferner ist $g_n(RS) \leq g_n(R)g_n(S)$. Ein Extrafall sind die Tichomirovzahlen, denn es gilt $t_{k+n-1}(RS) \leq t_k(R)d_n(S)$ und $t_{k+n-1}(RS) \leq c_k(R)t_n(S)$.

4. (**Idealeigenschaft**) Die Idealeigenschaft oder auch **schwache Multiplikativität** ist eine Folgerung aus Monotonie und Multiplikativität. Sie gilt für alle $s \in \{\varepsilon, e, a, c, d, t\}$ und besagt $s_n(RST) \leq ||R|| \cdot s_n(S) \cdot ||T||$.

5. (**Rangeigenschaft**) Die Rangeigenschaft $s_n(T) = 0 \iff \operatorname{rank}(T) < n$ gilt für $s \in \{g, a, c, d, t\}$.

6. (**normbestimmende Eigenschaft**) Sei $s \in \{g, a, c, d, t\}$ und $\dim(E) \geq n$, dann ist $s_n(I_E) = 1$.

7. (**Surjektivität**) Ist Q eine metrische Surjektion und $s \in \{\varepsilon, e, g, d, t\}$, dann ist $s_n(TQ) = s_n(T)$. Die Gelfandzahlen sind nicht surjektiv.

8. (**Injektivität**) Für jede metrische Injektion J gilt einerseits $s_n(JT) = s_n(T)$, falls $s \in \{c, t\}$ ist, andererseits ist $s_n(T) \leq 2 \cdot s_n(JT) \leq 4 \cdot s_n(T)$, wenn $s \in \{\varepsilon, e, g\}$ ist. Die letzte Ungleichung wird auch als **schwache Injektivität** bezeichnet. Die Kolmogorovzahlen sind nicht injektiv.

Eine **s-Zahlenfunktion** ist eine Zahlenfolge, die monoton, schwach multiplikativ und schwach additiv ist, außerdem erfüllt sie die Rangeigenschaft und die normbestimmende Eigenschaft. s-Zahlenfunktionen sind **additiv**, wenn sie für $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(E, F)$ der Ungleichung $s_{k+n-1}(T_1+T_2) \leq s_k(T_1)+s_n(T_2)$ genügen. Die Approximationszahlen a_n, die Gelfandzahlen c_n, die Kolmogorovzahlen d_n und die Tichomirovzahlen t_n sind additive s-Zahlenfunktionen (vgl. [Pi2]).

Bei genauer Betrachtung der Definition der Entropiemoduli zeigt es sich, daß es gar nicht notwendig ist, den Index auf die natürlichen Zahlen zu beschränken. So kann ein **kontinuierlicher Entropiemodul** definiert werden: Sei ν eine positive reelle Zahl, dann ist

$$g_\nu(T) := \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{\nu}} \cdot \varepsilon_k(T).$$

Welche Eigenschaften haben diese verallgemeinerten Entropiemoduli?

Die Monotonie ist klar, wobei die Gleichung $g_1(T) = ||T||$ schon von den ganzzahligen Entropiemoduli bekannt ist. Die Multiplikativität, und damit auch die Idealeigenschaft, folgt unmittelbar aus der Multiplikativität der Entropiezahlen. Analog überträgt sich die Surjektivität und Injektivität von den Entropiezahlen auf die Entropiemoduli. Die Proposition 1.3.1 aus [CaSt] liefert die Rangeigenschaft. Diese besagt nämlich, daß ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ genau dann vom Rang $m > 0$ ist, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$c \cdot k^{-\frac{1}{m}} \leq \varepsilon_k(T) \leq 4 \cdot ||T|| \cdot k^{-\frac{1}{m}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei ein beliebiges $T \in \mathcal{L}(E, F)$ gegeben. Besitzt F die metrische Fortsetzungseigenschaft, dann ist $c_n(T) = a_n(T)$. Hat andersherum E die metrische Lifteigenschaft, dann ist $d_n(T) = a_n(T)$ (vgl. [CaSt]). Zwischen den Approximations-, Gelfand- und Tichomirovzahlen gilt die Beziehung $t_n(T) \leq c_n(T) \leq a_n(T)$.
Für den dualen Operator gilt nach [Pi2]:

1.4. Satz. *Für jeden Operator $T : E \to F$ zwischen Banachräumen E und F ist*

$$c_n(T') \leq d_n(T) \quad \text{und} \quad d_n(T') = c_n(T).$$

Ist T kompakt, dann ist sogar $c_n(T') = d_n(T)$.

Speziell für Diagonaloperatoren $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ gilt nach [Pi2] $t_i(D_\sigma) = a_i(D_\sigma) = \sigma_i$, falls $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \geq 0$ ist.

1.3 Interpolation

Zwei Quasi-Banachräume E_0 und E_1 bilden ein **Interpolationspaar** $\{E_0, E_1\}$, wenn sie beide linear und stetig in einen linearen Hausdorffraum $\mathcal{E}$ eingebettet sind. Die Räume $E_0 \cap E_1$ mit der Quasi-Norm

$$||x||_{E_0 \cap E_1} := \max\{||x||_{E_0}, ||x||_{E_1}\}$$

und

$$E_0 + E_1 := \{x \in \mathcal{E} : \exists x_0 \in E_0, x_1 \in E_1 : x = x_0 + x_1\}$$

mit der Quasi-Norm

$$||x||_{E_0+E_1} := \inf\{||x_0||_{E_0} + ||x_1||_{E_1} : x_0 \in E_0, x_1 \in E_1, x = x_0 + x_1\}$$

sind ebenfalls Quasi-Banachräume. Ein **Zwischenraum** E ist ein Quasi-Banachraum für den $E_0 \cap E_1 \subseteq E \subseteq E_0 + E_1$ gilt.
Die Menge $\mathcal{L}(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ umfaßt alle stetigen linearen Operatoren von $E_0 + E_1$ in $F_0 + F_1$, deren Einschränkungen auf E_i (für $i = 0, 1$) stetige Abbildungen von E_i in F_i sind.

1.5. Definition. Eine **Interpolationsmethode** ist ein Funktor Φ, der zu jedem Interpolationspaar $\{E_0, E_1\}$ einen geeigneten Zwischenraum E_Φ liefert, so daß die **Interpolationseigenschaft** erfüllt ist:
Sei ein Operator $T \in \mathfrak{L}(\{E_0, E_1\}, \{F_0, F_1\})$ gegeben, dann wird durch die Einschränkung von T auf E_Φ ein Operator $T \in \mathfrak{L}(E_\Phi, F_\Phi)$ induziert.

Ein Beispiel ist die reelle Interpolationsmethode. Sie liefert zu dem Interpolationspaar $\{E_0, E_1\}$ den Zwischenraum $(E_0, E_1)_{\vartheta,q}$ ($0 < \vartheta < 1$ und $0 < q \leq \infty$), der aus allen $x \in E_0 + E_1$ besteht, für die

$$||x||_{\vartheta,q} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \frac{|\tau^{-\vartheta} \cdot K(\tau,x)|^q}{\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} & , \text{für } q < \infty \\ \sup\limits_\tau \tau^{-\vartheta} \cdot K(\tau, x) & , \text{für } q = \infty \end{cases}$$

endlich ist, wobei $K(\tau, x) := \inf\{||x_0||_{E_0} + \tau\, ||x_1||_{E_1} : \ x = x_0 + x_1\}$ ist.
Wie sehen für konkrete Banachräume diese Zwischenräume aus? Für die Lorentzfolgenräume gilt nach [Pe]:

1.6. Satz. *Seien $0 < \vartheta < 1$, $1 < p_0 < p_1 < \infty$ und $1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty$. Dann gilt für p mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}$, daß*

$$(\ell_{p_0,q_0}, \ell_{p_1,q_1})_{\vartheta,q} = \ell_{p,q}$$

ist. Dabei darf auch $p_1 = q_1 = \infty$ sein.

Sei $0 < p, q \leq \infty$ gegeben, dann heißen die Elemente der Menge

$$\mathfrak{L}^{(s)}_{p,q}(E, F) := \left\{ S : E \to F| \ \ ||(s_n(S))_{i=1}^\infty||_{\ell_{p,q}} < \infty \right\}$$

Operatoren vom s-Typ $\ell_{p,q}$. Für Operatoren vom s-Typ $\ell_{p,\infty}$ gilt (siehe [Kö]):

1.7. Satz. *Sei s eine additive s-Zahlenfunktion. Ferner seien $0 < \vartheta < 1$ und $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ gegeben, außerdem p mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}$, dann ist*

$$\left(\mathfrak{L}^{(s)}_{p_0,\infty}(E, F), \mathfrak{L}^{(s)}_{p_1,\infty}(E, F) \right)_{\vartheta,\infty} \subseteq \mathfrak{L}^{(s)}_{p,\infty}(E, F).$$

1.4 Volumenverhältnisse in Folgenräumen

Für gewisse Abschätzungen ist das Verhältnis der Volumina der Einheitskugeln zweier k-dimensionaler Folgenräume ℓ_p^k und ℓ_q^k von Interesse. Wie hängt diese Zahl von k, p und q ab?

1.8. Lemma. *Das Verhältnis der Volumina der Einheitskugeln von* ℓ_p^k *und* ℓ_q^k *(*$1 \le p, q \le \infty$*) läßt sich folgendermaßen durch die Gammafunktion ausdrücken*

$$\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)^k \cdot \Gamma(\frac{k}{q}+1)}{\Gamma(\frac{1}{q}+1)^k \cdot \Gamma(\frac{k}{p}+1)}.$$

Bemerkung. Genauer wird sogar gezeigt, daß

$$\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k}) = 2^k \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)^k}{\Gamma(\frac{k}{p}+1)}$$

ist. Für $p = 2$ ist dies die Formel von Jacobi.

Beweis. Zunächst soll das Volumen von $U_{\ell_p^k}$ $(p < \infty)$ iterativ bestimmt werden. Dazu wird

$$U_{\ell_p^k} = \left\{ x \in \ell_p^k : \|x\|_p \le 1 \right\} = \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \ell_p^k : \sum_{i=1}^k |\xi_i|^p \le 1 \right\}$$

betrachtet. Wenn der Wert von ξ_k fixiert wird, dann kann die entstehende Menge als Teilmenge von ℓ_p^{k-1} aufgefaßt werden:

$$\left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \in \ell_p^{k-1} : \sum_{i=1}^{k-1} |\xi_i|^p \le 1 - |\xi_k|^p \right\} = (1 - |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot U_{\ell_p^{k-1}}.$$

Das Volumen von $U_{\ell_p^k}$ ergibt sich somit als Integral über diese „Schnitte"

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k}) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{vol}_{k-1}\left((1 - |\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot U_{\ell_p^{k-1}} \right) d\xi \\
&= \int_{-1}^{1} (1 - |\xi|^p)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \mathrm{vol}_{k-1}\left(U_{\ell_p^{k-1}} \right) d\xi \\
&= 2 \cdot \mathrm{vol}_{k-1}\left(U_{\ell_p^{k-1}} \right) \cdot \int_0^1 (1 - \xi^p)^{\frac{k-1}{p}} d\xi.
\end{aligned}$$

Iteration liefert nun

$$\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k}) = \mathrm{vol}_1(U_{\ell_p^1}) \cdot 2^{k-1} \cdot \prod_{i=2}^{k} \left[\int_0^1 (1 - \xi^p)^{\frac{i-1}{p}} d\xi \right].$$

Um das Integral zu berechnen, wird ξ^p durch ζ substituiert

$$\int_0^1 (1-\xi^p)^{\frac{i-1}{p}} d\xi = \frac{1}{p} \cdot \int_0^1 \zeta^{-\frac{p-1}{p}} \cdot (1-\zeta)^{\frac{i-1}{p}} d\zeta$$

Dies entspricht gerade der Eulerschen Beta-Funktion, die sich wiederum durch die Gamma-Funktion ausdrücken läßt. Da außerdem $\mathrm{vol}_1(U_{\ell_p^1}) = 2$ ist, gilt insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k}) &= 2^k \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{k-1} \cdot \prod_{i=2}^{k} \frac{\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{i-1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{i}{p}+1)} \\
&= 2^k \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^{k-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{k}{p}+1)} \\
&= 2^k \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)^k}{\Gamma(\frac{k}{p}+1)}.
\end{aligned}$$

Schließlich ist noch $\mathrm{vol}_k(U_{\ell_\infty^k}) = 2^k$, womit die Sonderfälle $p = \infty$ bzw. $q = \infty$ abgedeckt sind. $\square$.

Dieses Resultat kann bis auf konstante Vorfaktoren durch eine Potenz von k abgeschätzt werden.

1.9. Satz. *Für $1 \le p, q \le \infty$ gibt es Konstanten $c_1(p,q)$ und $c_2(p,q)$, die die Ungleichung*

$$c_1(p,q) \cdot k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \le \left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}} \le c_2(p,q) \cdot k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel gibt es zu jeder Zahl $0 < x \in \mathbb{R}$ ein $0 < \vartheta(x) < 1$, so daß

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \cdot e^{\frac{\vartheta(x)}{12x}}$$

gilt. Das Einsetzen der Grenzen von $\vartheta(x)$ liefert die Ungleichung

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot x^x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \le \Gamma(x+1) \le (2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot x^x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \cdot e^{\frac{1}{12x}}. \tag{1.1}$$

Wenn p und q kleiner als ∞ sind, kann damit das Volumenverhältnis nach oben abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}} &= \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)^k\cdot\Gamma(\frac{k}{q}+1)}{\Gamma(\frac{1}{q}+1)^k\cdot\Gamma(\frac{k}{p}+1)}\right]^{\frac{1}{k}}\\
&\leq \left[\frac{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{p}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{2}}\cdot e^{-\frac{k}{p}}\cdot e^{\frac{kp}{12}}\cdot(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{k}{q}\right)^{\frac{k}{q}}\cdot\left(\frac{k}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{k}{q}}\cdot e^{\frac{q}{12k}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\cdot\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{k}{q}}\cdot\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{k}{2}}\cdot e^{-\frac{k}{q}}\cdot(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{k}{p}}\cdot\left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{k}{p}}}\right]^{\frac{1}{k}}\\
&=\left[k^{\frac{k}{q}-\frac{k}{p}}\cdot q^{\frac{k-1}{2}}\cdot p^{-\frac{k-1}{2}}\cdot e^{\frac{kp}{12}}\cdot e^{\frac{q}{12k}}\right]^{\frac{1}{k}}\\
&=k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\cdot e^{\frac{p}{12}}\cdot e^{\frac{q}{12\cdot k^2}}.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Die Abschätzung nach unten läuft analog ab:

$$\left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}} \geq k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\cdot e^{-\frac{q}{12}}\cdot e^{-\frac{p}{12\cdot k^2}}.\tag{1.3}$$

Mit Hilfe der Ungleichung

$$\min\left\{1,\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\leq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\leq\max\left\{1,\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

folgt aus den Ungleichungen (1.2) und (1.3):

$$\min\left\{1,\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\cdot e^{-\frac{p+q}{12}}\cdot k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\leq\left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}}\leq\max\left\{1,\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}e^{\frac{p+q}{12}}\cdot k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

das heißt die Konstanten $c_1=\min\{1,\sqrt{q/p}\}\cdot e^{-\frac{p+q}{12}}$ und $c_2=\max\{1,\sqrt{q/p}\}\cdot e^{\frac{p+q}{12}}$ liefern für den Fall $1\leq p,q<\infty$ die Aussage des Satzes.

In den Fällen $p=\infty$ bzw. $q=\infty$ liefert die Stirlingsche Formel (1.1) folgende Ungleichungen

$$\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\cdot e^{-\frac{q}{12}}\cdot k^{\frac{1}{2k}}\cdot k^{\frac{1}{q}}\leq\left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}}\leq\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\cdot e^{\frac{q}{12\cdot k^2}}\cdot k^{\frac{1}{2k}}\cdot k^{\frac{1}{q}}$$

bzw.

$$\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \cdot e^{-\frac{p}{12\cdot k^2}} \cdot k^{-\frac{1}{2k}} \cdot k^{-\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \cdot e^{\frac{p}{12}} \cdot k^{-\frac{1}{2k}} \cdot k^{-\frac{1}{p}}.$$

Analog dem ersten Fall können die Vorfaktoren so abgeschätzt werden, daß sie unabhängig von k sind. So sind im Fall $p = \infty$ die Konstanten $c_1 = \min\{1, \sqrt{q/2\pi}\} \cdot e^{-\frac{q}{12}}$ und $c_2 = \max\{1, \sqrt{q/2\pi}\} \cdot e^{\frac{q}{12}} \cdot e^{\frac{1}{2e}}$ eine geeignete Wahl. Und für $q = \infty$ sind $c_1 = \min\{1, \sqrt{2\pi/p}\} \cdot e^{-\frac{p}{12}} \cdot e^{-\frac{1}{2e}}$ und $c_2 = \max\{1, \sqrt{2\pi/p}\} \cdot e^{\frac{p}{12}}$ Konstanten, die die Behauptung erfüllen. $\square$.

2 Gelfandzahlen p-konvexer Hüllen von Punktmengen

Es sollen p-konvexe Hüllen ($1 \leq p < \infty$) von abzählbar-unendlichen Punktmengen in einem beliebigen Hilbertraum H betrachtet werden. Konkret werden in dieser Arbeit die Fälle $1 < p \leq 2$ untersucht. Ist $M = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine solche Punktmenge, dann ist die **p-konvexe Hülle** definiert durch

$$\mathrm{co}_p\,(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i : \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \leq 1 \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für $p = 1$ ist das die „normale“ konvexe Hülle. Diese Definition wird im folgenden nicht benutzt, stattdessen wird das Bild der Einheitskugel von ℓ_p unter dem Operator

$$T : \ell_p \to H : (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$$

untersucht. Dies ist ausreichend, denn aufgrund der Inklusion

$$\mathrm{co}_p\,(M) \subseteq T(U_{\ell_p}) \subseteq \overline{\mathrm{co}_p\,(M)}$$

sind die Entropiezahlen von $\mathrm{co}_p\,(M)$ und T gleich. In den weiteren Betrachtungen soll für den Operator T eine Zerlegung

$$T = SD_\sigma$$

in einen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ mit nichtnegativer Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)$ und einen linearen stetigen Operator $S : \ell_p \to H$ existieren.

Wie verhalten sich die Gelfandzahlen der p-konvexen Hülle bzw. des Operators T in Abhängigkeit vom Verhalten des Diagonaloperators D_σ?
Fällt σ polynomial ($\sigma_i \lesssim i^{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$), dann gilt für die p-konvexe Hülle ($1 \leq p \leq 2$):

$$c_k(T) \lesssim \begin{cases} k^{-\frac{p'}{2}\cdot\alpha} & \text{, für } \alpha < 1 - \frac{1}{p} \\ k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\alpha} & \text{, für } \alpha > 1 - \frac{1}{p} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Fall $p = 1$ wurde in [CaKyPa] gezeigt. Für $1 < p \leq 2$ wird dies im folgenden bewiesen.
Fällt σ hingegen logarithmisch, gibt es also eine Konstante $\alpha > 0$ für die $\sigma_i \lesssim (\log(i+1))^{-\alpha}$ ist, dann muß zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Einerseits gilt nach [CaKyPa] bzw. [LiLi] für die 1-konvexe Hülle, daß

$$c_k(T) \lesssim \begin{cases} k^{-\alpha} & \text{, für } \alpha \leq \frac{1}{2} \\ k^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log(k+1))^{\frac{1}{2}-\alpha} & \text{, für } \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ist. Andererseits wird gezeigt, daß für die p-konvexe Hülle im Fall $1 < p \leq 2$

$$c_k(T) \lesssim (\log(k+1))^{-\alpha}$$

gilt. Diese schwache Aussage ist dennoch optimal, wie in Proposition 2.18 bewiesen wird.

2.1 Der polynomiale Fall

Im Mittelpunkt steht der Beweis der folgenden Aussage.

2.1. Satz. *Seien ein Hilbertraum H und für $1 \leq p \leq 2$ ein Operator T von ℓ_p in H gegeben, so daß eine Zerlegung $T = SD_\sigma$ in einen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ mit $\sigma_i \geq 0$ und einen linearen stetigen Operator $S : \ell_p \to H$ existiert. Gibt es eine Konstante $\alpha > 0$, so daß $\sigma_i \lesssim i^{-\alpha}$ ist, dann gilt*

$$c_k(T) \lesssim \begin{cases} k^{-\frac{p'}{2}\cdot\alpha} & \text{, für } \alpha < 1-\frac{1}{p} \\ k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\alpha} & \text{, für } \alpha > 1-\frac{1}{p} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Abschätzungen in diesem Satz sind optimal:

2.2. Proposition. *Für $1 \leq p \leq 2$ und $\alpha > 0$ gibt es einen Operator $T : \ell_p \to \ell_2$, der sich, wie im Satz gefordert, zerlegen läßt und für den*

$$c_k(T) \gtrsim \begin{cases} k^{-\frac{p'}{2}\cdot\alpha} & \text{, für } \alpha < 1-\frac{1}{p} \\ k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\alpha} & \text{, für } \alpha > 1-\frac{1}{p} \end{cases}$$

gilt.

Vor dem Beweis des Satzes zunächst einige vorbereitende Definitionen und Sätze.

2.3. Definition. Ein beliebiger Banachraum E ist **vom Typ p**, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so daß für alle endlichen Tupel $(x_i)_{i=1}^n$ von Elementen aus E

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \right\| dt \leq c \cdot \left(\sum_{i=1}^n ||x_i||^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist. Dabei sind $r_i(t) := \operatorname{sgn}(\sin 2^i \pi t)$ die Rademacher Funktionen. Gegebenenfalls wird das Infimum aller dieser Konstanten c die Typ p Konstante von E genannt und mit $\tau_p(E)$ bezeichnet.

2.4. Bemerkung. Der Folgenraum ℓ_p hat für $1 \leq p \leq 2$ den Typ p und für $2 \leq p < \infty$ den Typ 2. (siehe zum Beispiel [DiJaTo])

2.5. Definition. Seien E und F Banachräume. Ein Operator $T : E \to F$ heißt **absolut p-summierend**, falls ein $c \geq 0$ existiert mit der Eigenschaft, daß für beliebige $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq E$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ||T(x_i)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{||a|| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, a \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Gegebenenfalls wird das Infimum über alle möglichen Konstanten c die absolut p-summierende Konstante $\pi_p(T)$ genannt.

2.6. Definition. Sei F ein Banachraum und $T : \ell_2^n \to F$ ein linearer stetiger Operator, dann ist die **l-Norm** definiert durch

$$l(T) := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} ||T(x)||^2 \, d\gamma_n(x) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Dabei ist γ_n das Maß der Gaußschen Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^n$. Diese Definition kann auf jeden beliebigen linearen stetigen Operator $T : E \to F$ erweitert werden:

$$l(T) := \sup \left\{ l(Tu) | \ u : \ell_2^n \to E \text{ mit } \ ||u|| \leq 1 \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Die l-Norm und die absolut p-summierende Konstante π_p erfüllen die Idealeigenschaft (vergleiche unter anderem [LiPi], [Pi2] bzw. [ToJa]), das heißt:
Sind $v : E \to F$, $u : F \to F_0$ und $w : E_0 \to E$ für beliebige Banachräume E_0 und F_0 gegeben, dann ist

$$l(uvw) \leq ||u|| \cdot l(v) \cdot ||w|| \quad \textit{bzw.} \quad \pi_p(uvw) \leq ||u|| \cdot \pi_p(v) \cdot ||w|| .$$

Mit diesen Grundlagen lassen sich die folgenden Sätze formulieren. Zunächst eine Abschätzung aus [PaTo2] in der Präzisierung von [Go]

2.7. Satz. *Seien ein Banachraum E und ein Operator $T : E \to \ell_2$ gegeben, dann ist*

$$\sup_{1 \leq k} k^{\frac{1}{2}} c_k(T) \leq \sqrt{2} \cdot l(T').$$

In [CaPa] wird aus diesem Satz der folgende abgeleitet.

2.8. Satz. *Seien E und F Banachräume, wobei E′ vom Typ 2 sein soll. Dann gilt für jeden Operator $T : E \to F$ die Ungleichung*

$$\sup_{1\leq k} k^{\frac{1}{2}} c_k(T) \leq c \cdot \tau_2(E')\pi_2(T),$$

wobei c eine universelle Konstante ist.

Das Little Grothendieck Theorem (siehe [Gr]) besagt:

2.9. Satz. *Jeder Operator $T : \ell_1 \to \ell_2$ ist absolut 2-summierend und*

$$\pi_2(T) \leq c \cdot ||T||$$

für eine universelle Konstante c.

Für den Beweis des Falles $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$ wird noch folgende Aussage gebraucht (siehe [Ca5] bzw. [Ca6]).

2.10. Satz. *Seien $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < p'$ und $0 < t \leq \infty$ beliebig gewählt. Außerdem sei $D_\sigma : \ell_p \to \ell_1$ ein Diagonaloperator mit $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{q,t}$. Desweiteren seien ein Hilbertraum H und ein Operator $T \in \mathfrak{L}(\ell_1, H)$ gegeben. Dann ist*

$$(e_n(TD_\sigma))_{n=1}^\infty \in \ell_{s,t} \quad \textit{für} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

Schließlich lassen sich nach Théorème A aus [PaTo1] die Gelfandzahlen in geeignete Verbindung zu den dyadischen Entropiezahlen bringen.

2.11. Satz. *Für jedes $\alpha > \frac{1}{2}$ existiert eine Konstante $c(\alpha)$, welche für alle kompakten Operatoren $T : E \to \ell_2$ die Ungleichung*

$$\sup_{1\leq k} k^\alpha \cdot c_k(T) \leq c(\alpha) \cdot \sup_{1\leq k} k^\alpha \cdot e_k(T)$$

erfüllt.

Beweis von Satz 2.1. Im Fall $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$ muß $p > 1$ sein, da $\alpha > 0$ ist.
Sei zunächst $(\sigma_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p'}$, dann läßt sich der Operator D_σ in den Diagonaloperator $D_1 : \ell_p \to \ell_1 : (\xi_i) \mapsto (\sigma_i\xi_i)$ und die Identität $I : \ell_1 \to \ell_p$ zerlegen. Aus Satz 2.8 folgt

$$c_k(T) = c_k(SID_1) \leq c_1 \cdot \tau_2(\ell_{p'}) \cdot k^{-\frac{1}{2}} \cdot \pi_2(SID_1).$$

Wegen Satz 2.9 und der Idealeigenschaft von π_2 ist

$$\pi_2(SID_1) \leq \pi_2(SI) \cdot ||D_1|| \leq c_2 \cdot ||SI|| \cdot ||D_1|| \,,$$

und damit gilt schließlich $c_k(T) \leq c_3 \cdot k^{-\frac{1}{2}}$.

Sei jetzt $\phi : \ell_\infty \to \mathfrak{L}^{(c)}_{\infty,\infty}(\ell_p, H)$ der Operator, der eine Zahlenfolge $(\tilde{\sigma}_i)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ auf den Operator

$$S\tilde{D} \in \mathfrak{L}^{(c)}_{\infty,\infty}(\ell_p, H)$$

abbildet, wobei $\tilde{D} : \ell_p \to \ell_p$ der von $(\tilde{\sigma}_i)_{i=1}^\infty$ erzeugte Diagonaloperator ist. Wie oben gezeigt wurde ist

$$\phi(\ell_{p'}) \subseteq \mathfrak{L}^{(c)}_{2,\infty}(\ell_p, H),$$

daher gilt sogar

$$\phi \in \mathfrak{L}\left(\{\ell_{p'}, \ell_\infty\}, \{\mathfrak{L}^{(c)}_{2,\infty}(\ell_p, H), \mathfrak{L}^{(c)}_{\infty,\infty}(\ell_p, H)\}\right).$$

Sei nun $0 < \vartheta < 1$ so gewählt, daß $\alpha = \frac{1-\vartheta}{p'}$ ist. Dann wird mit Hilfe der reellen Interpolation der Operator

$$\phi : (\ell_{p'}, \ell_\infty)_{\vartheta,\infty} \to (\mathfrak{L}^{(c)}_{2,\infty}(\ell_p, H), \mathfrak{L}^{(c)}_{\infty,\infty}(\ell_p, H))_{\vartheta,\infty}$$

induziert. Ferner gilt nach Satz 1.6:

$$(\ell_{p'}, \ell_\infty)_{\vartheta,\infty} = \ell_{\frac{1}{\alpha},\infty},$$

und nach Satz 1.7:

$$(\mathfrak{L}^{(c)}_{2,\infty}(\ell_p, H), \mathfrak{L}^{(c)}_{\infty,\infty}(\ell_p, H))_{\vartheta,\infty} \subseteq \mathfrak{L}^{(c)}_{\frac{2}{1-\vartheta},\infty}(\ell_p, H) = \mathfrak{L}^{(c)}_{\frac{2}{p'\cdot\alpha},\infty}(\ell_p, H).$$

Da $\phi\Big((\sigma_i)_{i=1}^\infty\Big) = T$ ist, liefert dies schließlich $c_k(T) \leq c \cdot k^{-\frac{p'}{2}\cdot\alpha}$.

Analog zum Beweis des ersten Falles wird im Fall $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$ der Operator D_σ in den Diagonaloperator D_1 und die Identität I zerlegt, sodaß nach Satz 2.10

$$e_k(SID_1) \leq c_1 \cdot k^{-\frac{1}{p}-\alpha+\frac{1}{2}}$$

ist. Aufgrund der Voraussetzung $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$ ist $\frac{1}{p} + \alpha - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, damit ist aber SID_1 kompakt. Durch anwenden von Satz 2.11 ergibt sich nun die Ungleichung:

$$\sup_{1\leq k} k^{\frac{1}{p}+\alpha-\frac{1}{2}} \cdot c_k(SID_1) \leq c_2 \cdot \sup_{1\leq k} k^{\frac{1}{p}+\alpha-\frac{1}{2}} \cdot e_k(SID_1) \leq c_1 \cdot c_2.$$

$\square$.

Jetzt soll zunächst eine verallgemeinerte Optimalitätsabschätzung bewiesen werden, welche sowohl für den polynomialen als auch für den logarithmischen Fall benötigt wird. Folgende Ungleichung aus [Ca3] ist für die weiteren Betrachtungen notwendig.

2.12. Satz. *Sei $s \in \{a, c, d, t\}$, dann gilt für jeden Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$, jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 < \alpha < \infty$:*

$$\sup_{1 \le k \le n} k^\alpha \cdot e_k(T) \le c_\alpha \cdot \sup_{1 \le k \le n} k^\alpha \cdot s_k(T),$$

wobei c_α nur von α abhängt.

Daraus kann mit Hilfe einer Beweismethode aus [Ca5] bzw. ihrer Verallgemeinerung aus [St] gefolgert werden:

2.13. Lemma. *Seien ein Operator $T : E \to F$ und nichtnegative Konstanten ν_1 und ν_2 gegeben, so daß $\nu_1 + \nu_2 > 0$ und $c_n(T) \lesssim n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2} \lesssim e_n(T)$ ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt für $n \in \mathbb{N}$*

$$e_n(T) \asymp c_n(T) \asymp n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2}.$$

Beweis. Im weiteren sei ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben.
Nach Voraussetzung gibt es Konstanten c_1 und c_2, so daß $c_1 \cdot n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2} \le e_n(T)$ und $c_n(T) \le c_2 \cdot n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2}$ gilt. Da für $\nu := 2 \cdot \nu_1 + \nu_2$ der Ausdruck $k^\nu \cdot k^{-\nu_1}(\log(k+1))^{-\nu_2}$ monoton wachsend ist, folgt aus Satz 2.12:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot n^{\nu-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2} &\le \sup_{1 \le k \le n} k^\nu \cdot e_k(T) \le \\ &\le c_\nu \cdot \sup_{1 \le k \le n} k^\nu \cdot c_k(T) \le c_\nu \cdot c_2 \cdot n^{\nu-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2}. \end{aligned}$$

Woraus sich unmittelbar $e_n(T) \asymp n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2}$ ergibt.
Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot (mn)^{\nu-\nu_1}(\log(mn+1))^{-\nu_2} &\le c_\nu \cdot \sup_{1 \le k \le mn} k^\nu \cdot c_k(T) \\ &\le c_\nu \cdot \sup_{1 \le k \le n} k^\nu \cdot c_k(T) + c_\nu \cdot \sup_{n \le k \le mn} k^\nu \cdot c_k(T) \\ &\le c_\nu c_2 \cdot n^{\nu-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2} + c_\nu \cdot (mn)^\nu \cdot c_n(T). \end{aligned}$$

Sei jetzt $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $m > (2 \cdot c_2 \cdot c_\nu \cdot 2^{\nu_2} \cdot c_1^{-1})^{\frac{1}{\nu_1+\nu_2}}$ ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m-1$

$$\begin{aligned}
c_n(T) &\geq \frac{c_1}{c_\nu} \cdot (mn)^{-\nu_1}(\log(mn+1))^{-\nu_2} - c_2 \cdot m^{-\nu} \cdot n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2} \\
&\geq \left(\frac{c_1}{c_\nu} \cdot m^{-\nu_1}(\log(m) + \log(n+1))^{-\nu_2} - c_2 \cdot m^{-\nu}(\log(n+1))^{-\nu_2} \right) \cdot n^{-\nu_1} \\
&\geq \left(\frac{c_1}{c_\nu} \cdot m^{-\nu_1} \cdot (2 \cdot \log(n+1))^{-\nu_2} - c_2 \cdot m^{-\nu}(\log(n+1))^{-\nu_2} \right) \cdot n^{-\nu_1} \\
&= \left(\frac{c_1}{c_\nu} \cdot 2^{-\nu_2} - c_2 \cdot m^{-\nu_1-\nu_2} \right) \cdot m^{-\nu_1} \cdot n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2} \\
&> \left(\frac{c_1}{c_\nu} \cdot 2^{-\nu_2} - \frac{c_1}{2 \cdot c_\nu} \cdot 2^{-\nu_2} \right) \cdot m^{-\nu_1} \cdot n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2}.
\end{aligned}$$

Das heißt mit einem entsprechend gewählten $c' > 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(T) \geq c' \cdot n^{-\nu_1}(\log(n+1))^{-\nu_2}.$$

$\square$.

Nun soll ein Operator konstruiert werden, der bestimmte Abschätzungen der Gelfandzahlen optimal erfüllt. Der Beweis des Theorems 1.1. aus [BeDo] besagt:

2.14. Satz. *Sei $2 < s < \infty$. Dann gibt es Konstanten c_1 und c_2, die nur von s abhängen, so daß für jede positive natürliche Zahl n und für $m := \left[n^{\frac{s}{2}}\right]$ eine isomorphe Einbettung $T_n : \ell_2^n \to \ell_s^m$ mit $||T_n|| \leq c_1$ und $||T_n^{-1}|| \leq c_2$ existiert.*

Weitergehend kann gezeigt werden:

2.15. Lemma. *Sei $T : E \to F$ ein injektiver Operator und $T^{-1} : T(E) \to E$ sein Linksinverses, außerdem gebe es Konstanten c_1 und c_2 mit $||T|| \leq c_1$ und $||T^{-1}|| \leq c_2$. Dann ist T' eine Surjektion mit der Eigenschaft*

$$\frac{1}{c_2} \cdot U_{E'} \subseteq T'(U_{F'}) \subseteq c_1 \cdot U_{E'}.$$

Beweis. Sei $a \in E'$ gegeben, dann ist für die Surjektivität von T' zu zeigen, daß es ein $b \in F'$ gibt mit $T'(b) = a$. Nach dem Hahn-Banach-Theorem kann $\hat{b} := aT^{-1} \in (T(E))'$ zu $b \in F'$ fortgesetzt werden. Dabei ist $b|_{T(E)} = \hat{b}$ und $\|b\| = \|\hat{b}\|$, das heißt $T'b = bT = \hat{b}T = aT^{-1}T = a$.
Ist nun $a \in 1/c_2 \cdot U_{E'}$ gegeben, dann existiert nach obiger Vorgehensweise ein $b \in F'$. Und aus $\|b\| = \|\hat{b}\| \leq \|a\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1$ ergibt sich unmittelbar $b \in U_{F'}$. Die andere Inklusion folgt sofort aus der Gleichheit $\|T\| = \|T'\|$, damit ist nämlich $\|T'\| \leq c_1$ bzw. $T'(U_{F'}) \subseteq c_1 \cdot U_{E'}$. $\square$.

Unter Zuhilfenahme dieser Aussagen kann nun folgender Satz gezeigt werden.

2.16. Satz. *Seien nichtnegative Konstanten ν_1 und ν_2 mit $\nu_1 + \nu_2 > 0$ und die Funktion $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^{-\nu_1}(\log(x+1))^{-\nu_2}$ gegeben.*
Außerdem soll für jeden Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ mit $0 \leq \sigma_i \lesssim \delta(i^{2/p'})$ und jeden linearen stetigen Operator $S : \ell_p \to \ell_2$, die Abschätzung $c_n(SD_\sigma) \lesssim \delta(n)$ gelten.
Dann gibt es einen Operator $T : \ell_p \to \ell_2$, der sich genauso zerlegen läßt ($T = SD_\sigma$) und für den $c_n(T) \asymp \delta\,(n)$ gilt.

Beweis. Wird $m(n) := [2^{n \cdot p'/2}]$ für $n \in \mathbb{N}$ gesetzt, dann existiert nach Satz 2.14 und Lemma 2.15 für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Surjektion $S_n : \ell_p^{m(n)} \to \ell_2^{2^n}$, welche für zwei geeignete Konstanten c_1 und c_2 die Eigenschaft

$$c_1 \cdot U_{\ell_2^{2^n}} \subseteq S_n\left(U_{\ell_p^{m(n)}}\right) \subseteq c_2 \cdot U_{\ell_2^{2^n}} \tag{2.1}$$

erfüllt. Daraus kann ein Operator $T : \ell_p \to \ell_2$ konstruiert werden:

$$T := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \delta\left(2^{n-1}\right) \cdot S_n.$$

Um die Zerlegung von T zu erhalten, wählt man $S : \ell_p \to \ell_2$ als

$$S := \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n$$

und den Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ mit

$$D_\sigma := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \delta\left(2^{n-1}\right) \cdot id_{\ell_p^{m(n)} \to \ell_p^{m(n)}}. \tag{2.2}$$

Nach (2.1) ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $||S_n|| \leq c_2$, das heißt $||S|| \leq c_2$.
Für ein beliebiges festes i soll als nächstes σ_i nach oben abgeschätzt werden. Nach Gleichung (2.2) gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit:

$$\sigma_i = \delta\left(2^{j-1}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{j-1} m(n) < i \leq \sum_{n=1}^{j} m(n).$$

Damit kann j nach unten durch i abgeschätzt werden, denn aus

$$i \leq \sum_{n=1}^{j} m(n) \leq \sum_{n=1}^{j} 2^{\frac{p'}{2} \cdot n} = \frac{2^{\frac{p'}{2}}}{2^{\frac{p'}{2}} - 1} \cdot \left(2^{\frac{p'}{2} \cdot j} - 1\right) =: c_3 \cdot \left(2^{\frac{p'}{2} \cdot j} - 1\right)$$

folgt unmittelbar $j \geq \frac{2}{p'} \cdot \log_2\left(\frac{i}{c_3} + 1\right)$. Woraus sich aufgrund der Definition von δ

$$\sigma_i = \delta\left(2^{j-1}\right) \leq \delta\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{c_3} + 1\right)^{\frac{2}{p'}}\right) \leq \delta\left(\frac{1}{2} \cdot c_3^{-\frac{2}{p'}} \cdot i^{\frac{2}{p'}}\right) \lesssim \delta\left(i^{\frac{2}{p'}}\right)$$

ergibt. Damit gilt nach Voraussetzung

$$c_k(T) \lesssim \delta(k) \tag{2.3}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe von (2.1) kann der Beweis der zweiten Ungleichung geführt werden. Durch betrachten der Volumina ergibt sich $e_k(I_{\ell_2^k}) \geq \frac{1}{2}$. Somit gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{2^k}(T) &\geq e_{2^k}(\delta\left(2^{k-1}\right) \cdot S_k) \\ &\geq \delta\left(2^{k-1}\right) \cdot c_1 \cdot e_{2^k}(I_{\ell_2^{2^k}}) \\ &\geq \frac{c_1}{2} \cdot \delta\left(2^{k-1}\right), \end{aligned}$$

deshalb ist

$$e_k(T) \geq e_{k+1}(T) = e_{2^{\log_2(k+1)}}(T) \geq \frac{c_1}{2} \cdot \delta\left(\frac{1}{2} \cdot (k+1)\right) \geq \frac{c_1}{2} \cdot \delta(k).$$

Zusammen mit Ungleichung (2.3) kann nun Lemma 2.13 angewendet werden. $\square$.

Beweis von Proposition 2.2. Der Beweis des Falles $\alpha < 1 - 1/p$ ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.16, wenn $\nu_1 := \alpha \cdot p'/2$ und $\nu_2 := 0$ gesetzt wird.

Im Fall $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$ liefert die Wahl $\sigma_i := i^{-\alpha}$ einen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_2$. Nach Satz 3.2 gibt es eine Konstante c, so daß

$$c \cdot k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq g_k(D_\sigma)$$

ist. Das heißt für D_σ gilt

$$c \cdot k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} i^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} n^{\frac{1}{k}} \cdot \varepsilon_n(D).$$

Aus der konkreten Wahl $n := 2^{k-1}$ folgt nun

$$\begin{aligned} e_k(D) &\geq c \cdot 2^{\frac{1}{k}-1} \cdot k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} i^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} \\ &\geq c' \cdot k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} k^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} \\ &= c' \cdot k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\alpha}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist zum Beispiel in [Ca2] zu finden. Ferner gilt nach Satz 2.1 $c_k(D) \lesssim k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\alpha}$. Damit kann schließlich für $\nu_1 := \frac{1}{p} + \alpha - \frac{1}{2}$ und $\nu_2 := 0$ das Lemma 2.13 angewendet werden. $\square$.

2.2 Der logarithmische Fall

Zuerst soll die logarithmische Abschätzung für den Fall $1 < p \leq 2$ gezeigt werden.

2.17. Satz. *Seien $1 < p \leq 2$ und der Operator T von ℓ_p in den Hilbertraum H gegeben. Ferner soll eine Zerlegung $T = SD_\sigma$ in einen linearen stetigen Operator $S : \ell_p \to H$ und einen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ existieren, wobei es eine Konstante $\alpha > 0$ mit $0 \leq \sigma_i \lesssim (\log(i+1))^{-\alpha}$ geben soll. Dann ist*

$$c_n(T) \lesssim (\log(n+1))^{-\alpha} .$$

Beweis. Die Definition

$$D_{n-1} : \ell_p \to \ell_p : (\xi_i) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_i \xi_i & , \text{für } i < n \\ 0 & , \text{für } i \geq n \end{array} \right\}$$

liefert einen Diagonaloperator vom Rang $n-1$. Also ist der Rang von $A := SD_{n-1}$ kleiner als n, und es gilt

$$a_n(T) \leq ||T - A|| .$$

Außerdem ist nach Voraussetzung $||D_\sigma - D_{n-1}|| \lesssim (\log(n+1))^{-\alpha}$, sodaß insgesamt gilt:

$$c_n(T) \leq a_n(T) \leq ||SD_\sigma - SD_{n-1}|| \lesssim ||S|| \cdot (\log(n+1))^{-\alpha} .$$

$\Box$.

Obwohl dies auf den ersten Blick nur eine schwache Abschätzung ist, ist es nicht möglich, sie asymptotisch weiter zu verbessern:

2.18. Proposition. *Sei $1 < p \leq 2$ und $\alpha > 0$. Dann gibt es ein $T : \ell_p \to \ell_2$, das sich wie im Satz 2.17 zerlegen läßt, so daß $c_n(T) \gtrsim (\log(n+1))^{-\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.*

Beweis. Wird $\nu_1 := 0$ und $\nu_2 := \alpha$ gesetzt, dann läßt sich Satz 2.16 anwenden. Dabei ist nur zu beachten, daß für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\left(\log(i^{\frac{2}{p'}} + 1)\right)^{-\alpha} \lesssim (\log(i+1))^{-\alpha}$$

gilt. $\Box$.

Im logarithmische Fall für die 1-konvexe Hülle muß nach der Größe von α unterschieden werden. Im Fall $\alpha \neq \frac{1}{2}$ wurden die entsprechenden Ungleichungen in [CaKyPa] bewiesen. Der Grenzfall $\alpha = \frac{1}{2}$ wurde dann in [LiLi] gezeigt. Diese Aussage aus [LiLi] soll jetzt für den gesamten Beweis genutzt werden:

2.19. Satz. *Sei H ein Hilbertraum und $T : \ell_1 \to H$ ein Operator für den eine Zerlegung in einen Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_1 \to \ell_1$ mit nichtnegativer monoton-fallender Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)$ und einen linearen stetigen Operator $S : \ell_1 \to H$ existiert. Dann gilt*

(i) Ist die Folge $(\log(k+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_k$ monoton-fallend, dann existiert eine Konstante c, so daß

$$c_{2n-1}(T) \le c \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_n.$$

(ii) Ist umgekehrt $(\log(k+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_k$ monoton-wachsend, dann gibt es eine Konstante c mit

$$c_n(T) \le c \cdot \sigma_{2^n-1}.$$

2.20. Folgerung. *Für die Wahl $\sigma_n := (\log(n+1))^{-\alpha}$ folgt aus diesem Satz unmittelbar:*

$$c_n(T) \lesssim \begin{cases} n^{-\alpha} & , \text{für } 0 < \alpha \le \frac{1}{2} \\ n^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{2}-\alpha} & , \text{für } \alpha \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Die Abschätzungen in Folgerung 2.20 sind optimal:

2.21. Proposition. *Für jedes $\alpha > 0$ existiert ein Operator $T : \ell_1 \to H$, der sich entsprechend Satz 2.19 in D_σ und S zerlegen läßt. Für dieses T gilt $\sigma_i \lesssim (\log(i+1))^{-\alpha}$ und*

$$c_n(T) \gtrsim \begin{cases} n^{-\alpha} & , \text{für } 0 < \alpha \le \frac{1}{2} \\ n^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{2}-\alpha} & , \text{für } \alpha \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Auf einen Hinweis von Prof. B. Carl läßt sich der Beweis des obigen Satzes aus [LiLi] verkürzen. Zunächst soll eine Verallgemeinerung von Satz 2.7 bewiesen werden. Dazu wird folgende Definition gebraucht.

2.22. Definition. Seien E und F Banachräume und $T : E \to F$ ein Operator, dann ist

$$a_n(T, l) := \inf \{ l(T - A) : \text{rank}(A) < n \}.$$

2.23. Lemma. *Seien ein Banachraum E, ein Hilbertraum H und ein Operator $T : E \to H$ gegeben, dann ist*

$$k^{\frac{1}{2}} \cdot c_{k+n-1}(T) \le \sqrt{2} \cdot a_n(T', l). \tag{2.4}$$

Gibt es weiterhin einen Banachraum F und Operatoren $R : E \to F$ und $S : F \to H$ mit $T = SR$, dann gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$

$$k^{\frac{1}{2}} \cdot c_{k+n-1}(SR) \le \sqrt{2} \cdot l(S') \cdot a_n(R). \tag{2.5}$$

Beweis. Sei zunächst $V \in \mathfrak{L}(H,E)$ ein beliebiger Operator. Ist $J : E \to E''$ die natürliche Einbettung, das heißt für $x \in E$ und $y \in E'$ ist $\langle J(x), y\rangle := \langle y, x\rangle$, dann gilt $V'' = JV$. Also ist aufgrund der Idealeigenschaft $l(V) \geq l(V'')$.
Im Fall $l(V) < \infty$ ist unter Beachtung von Satz 2.7 V' kompakt, und damit nach Schauder auch V. Zusammen mit Satz 1.4 folgt

$$\sup_{1 \leq k} k^{\frac{1}{2}} d_k(V) = \sup_{1 \leq k} k^{\frac{1}{2}} c_k(V') \leq \sqrt{2} \cdot l(V'') \leq \sqrt{2} \cdot l(V). \tag{2.6}$$

Schließlich gilt die Aussage $\sup\limits_{1 \leq k} k^{\frac{1}{2}} d_k(V) \leq \sqrt{2} \cdot l(V)$ auch für $l(V) = \infty$.
Für den Beweis der Ungleichung (2.4) sei nun ein Operator $A : H \to E'$ mit $\operatorname{rank}(A) < n$ gegeben. Damit ist aufgrund der Rangeigenschaft der Kolmogorovzahlen

$$d_{k+n-1}(T') \leq d_k(T' - A) + d_n(A) = d_k(T' - A).$$

Weiter ist nach (2.6)

$$k^{\frac{1}{2}} \cdot d_k(T' - A) \leq \sqrt{2} \cdot l(T' - A).$$

Die Definition von $a_n(T', l)$ und Satz 1.4 liefern schließlich

$$k^{\frac{1}{2}} \cdot c_{k+n-1}(T) = k^{\frac{1}{2}} \cdot d_{k+n-1}(T') \leq \sqrt{2} \cdot a_n(T', l).$$

Um die Ungleichung (2.5) zu zeigen, sei ein Operator $B : F' \to E'$ mit $\operatorname{rank}(B) < n$ gegeben. Jetzt ist

$$\begin{aligned} a_n(T', l) = a_n(R'S', l) &= \inf \{ l(R'S' - A) : \operatorname{rank}(A) < n \} \\ &\leq l((R' - B)S') \\ &\leq ||R' - B|| \cdot l(S') \end{aligned}$$

Aufgrund von Ungleichung (2.4) ist nur noch zu zeigen, daß $a_n(R') \leq a_n(R)$ ist: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $A : E \to F$ mit $\operatorname{rank}(A) < n$, so daß $||R - A|| \leq a_n(R) + \varepsilon$ ist. Damit ist aber

$$a_n(R') \leq ||R' - A'|| = ||(R - A)'|| \leq a_n(R) + \varepsilon.$$

□.

Für den eigentlichen Beweis von Satz 2.19 wird noch folgender Satz aus [LiPi] benötigt.

2.24. Satz. *Sei ein Diagonaloperator* $D_\sigma : \ell_\infty \to \ell_\infty$ *gegeben, wobei die Folge* $\sigma = (\sigma_i)$ *nichtnegativ und monoton-fallend sein soll. Ist außerdem*

$$\varrho := \sup_{n\in\mathbb{N}} (\log(n+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_n < \infty,$$

dann gibt es eine Konstante $c > 0$*, die nur von* σ_1 *und* ϱ *abhängt, so daß* $l(D_\sigma) \leq c$ *ist.*

Beweis von Satz 2.19. Um (i) zu beweisen, wird D_σ in zwei Diagonaloperatoren

$$D_1 : \ell_1 \to \ell_1 : (\xi_i) \mapsto \left((\log(i+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_i \cdot \xi_i\right)$$

und

$$D_2 : \ell_1 \to \ell_1 : (\xi_i) \mapsto \left((\log(i+1))^{-\frac{1}{2}} \cdot \xi_i\right)$$

zerlegt. Nach Lemma 2.23 ist

$$n^{\frac{1}{2}} \cdot c_{2n-1}(SD_2D_1) \leq \sqrt{2} \cdot a_n(D_1) \cdot l(D_2'S') \leq \sqrt{2} \cdot a_n(D_1) \cdot l(D_2') \cdot ||S'||\,.$$

Da $(\log(n+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_n$ nach Voraussetzung monoton-fallend ist, gilt

$$a_n(D_1) \leq (\log(n+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_n.$$

Vervollständigt wird der Beweis durch Anwenden von Satz 2.24 auf den Operator $D_2' : \ell_\infty \to \ell_\infty$, denn damit ist

$$n^{\frac{1}{2}} \cdot c_{2n-1}(T) \leq \sqrt{2} \cdot c \cdot ||S|| \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_n.$$

Für den Fall (ii) wird der Operator

$$D_{2^n} : \ell_1 \to \ell_1 : (\xi_i) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_i\xi_i & \text{, für } i \leq 2^n \\ 0 & \text{, für } i > 2^n \end{array} \right\}$$

durch die zwei Operatoren

$$D_{2^n}^{(1)} : \ell_1 \to \ell_1 : (\xi_i) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} (\log(i+1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_i\xi_i & \text{, für } i \leq 2^n \\ 0 & \text{, für } i > 2^n \end{array} \right\}$$

und

$$D_{2^n}^{(2)} : \ell_1 \to \ell_1 : (\xi_i) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} (\log(i+1))^{-\frac{1}{2}} \cdot \xi_i & \text{, für } i \leq 2^n \\ 0 & \text{, für } i > 2^n \end{array} \right\}$$

faktorisiert. Damit ist nun:

$$c_n(T) = c_n(SD_\sigma) = c_n(S(D_\sigma - D_{2^n}) + SD_{2^n}) \leq ||S|| \cdot \sigma_{2^n-1} + c_n\left(SD_{2^n}\right).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} c_n\left(SD_{2^n}\right) &\leq c_n\left(SD_{2^n}^{(2)}\right) \cdot \left|\left|D_{2^n}^{(1)}\right|\right| \leq \\ &\leq c_n\left(SD_{2^n}^{(2)}\right) \cdot \left(\log(2^n+1)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{2^n} \leq c_n\left(SD_{2^n}^{(2)}\right) \cdot (n+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{2^n}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 2.7 ist außerdem

$$n^{\frac{1}{2}} \cdot c_n\left(SD_{2^n}^{(2)}\right) \leq \sqrt{2} \cdot l\left(\left(D_{2^n}^{(2)}\right)' S'\right) \leq \sqrt{2} \cdot l\left(\left(D_{2^n}^{(2)}\right)'\right) \cdot ||S'||.$$

Nach Satz 2.24 ist schließlich $l\left(\left(D_{2^n}^{(2)}\right)'\right) \leq c$, woraus die Behauptung folgt. $\square$.

Abschließend soll noch die Optimalität im 1-konvexen Fall bewiesen werden. Die folgende Asymptotik ist aus [GaGl] bekannt.

2.25. Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$, dann ist*

$$c_k(id : \ell_1^n \to \ell_2^n) \asymp \begin{cases} 1 & , \textit{für } 1 \leq k \leq \log n \\ \left(\frac{\log\left(\frac{n}{k}+1\right)}{k}\right)^{\frac{1}{2}} & , \textit{für } \log n \leq k \leq n \end{cases}$$

Beweis von Proposition 2.21. Sei $\sigma_n = (\log(n+1))^{-\alpha}$ wie in Folgerung 2.20 gewählt. Daraus ergibt sich der Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_1 \to \ell_2$. Betrachtet man jetzt $D_{n,m} : \ell_1^{m-n} \to \ell_2^{m-n} : (\xi_i)_{i=1}^{m-n} \mapsto (\sigma_{i+n-1}\xi_i)_{i=1}^{m-n}$, dann ist zunächst

$$c_n(D) \geq c_n(D_{n,m}) \geq \sigma_m \cdot c_n(id : \ell_1^{m-n} \to \ell_2^{m-n}).$$

Seien m und n so gewählt, daß $\log(m-n) \leq n \leq m-n$ bzw. $2n \leq m \leq 2^n + n$ ist. Werden nun n und $m-n$ in Satz 2.25 eingesetzt, dann folgt

$$c_n(id : \ell_1^{m-n} \to \ell_2^{m-n}) \asymp \left(\frac{\log\left(\frac{m}{n}\right)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Wahl $m := 2^n$ liefert insgesamt

$$\begin{aligned} c_n(D) &\geq c \cdot \sigma_{2^n} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\log \frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq c' \cdot \sigma_{2^n} \\ &\geq c'' \cdot n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Und für $m := n^2 + n$ ist

$$\begin{aligned} c_n(D) &\geq c \cdot \sigma_{n^2+n} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{2}} \\ &\geq c' \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{2}-\alpha} \,. \end{aligned}$$

$\square$.

3 Entropiemoduli

3.1 Diagonaloperatoren

Aus [CaSt] ist folgende Abschätzung der Entropiemoduli von Diagonaloperatoren bekannt

3.1. Satz. *Für $1 \leq p \leq \infty$ sei der Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_p$ die monoton-fallende nichtnegative Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)$ gegeben, dann ist*

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq g_k(D_\sigma) \leq 6 \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Im weiteren seien $1 \leq p, q \leq \infty$ gegeben. Außerdem sei r so gewählt, daß $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ist. Kann obiger Satz für wohldefinierte (vgl. Satz 1.2) Diagonaloperatoren $D_\sigma : \ell_p \to \ell_q$ mit monoton-fallender nichtnegativer Zahlenfolge σ verallgemeinert werden?
In Anlehnung an Beweismethoden aus [CaSt] kann gezeigt werden, daß folgendes gilt:

3.2. Satz. *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ vorgegeben. Ferner sei $D_\sigma : \ell_p \to \ell_q$ ein Diagonaloperator mit monoton-fallender nichtnegativer Zahlenfolge $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^{\infty}$ gegeben. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, daß im Fall $p \leq q$*

$$c_1(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq g_k(D_\sigma) \leq 6 \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}}$$

ist. Und im umgekehrten Fall ($p > q$) folgt

$$\begin{aligned} c_1(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} &\leq g_k(D_\sigma) \leq \\ &\leq \left(4 + 2 \cdot \frac{\left|\left|(\sigma_i)_{i=k+1}^{\infty}\right|\right|_r}{\sigma_k} \right) \cdot c_2(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Dabei hängen die Konstanten $c_1(p,q)$ und $c_2(p,q)$ nur von p und q ab.

3.3. Bemerkung. Die Abschätzung nach unten ist asymptotisch optimal, denn bei vorgegebenem $\alpha > \max\{\frac{1}{r}, 0\}$ gilt nach [Ca2] für den Diagonaloperator $D_\sigma : \ell_p \to \ell_q$ mit $\sigma_i = i^{-\alpha}$, daß $e_n(D_\sigma) \lesssim n^{\frac{1}{r}-\alpha}$ ist. Woraus $g_k(D_\sigma) \lesssim k^{\frac{1}{r}-\alpha}$ folgt.
Die Frage, ob die Abschätzungen nach oben optimal sind, konnte nicht geklärt werden.

Vor dem Beweis des Satzes soll zunächst eine Abschätzung für die Entropiezahlen gezeigt werden, welche sich anschließend auf die Entropiemoduli übertragen läßt.

3.4. Lemma. *Seien* $1 \leq p, q \leq \infty$ *und* $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *gegeben. Dann gilt für den wohldefinierten Diagonaloperator* $D_\sigma : \ell_p \to \ell_q$ *mit monoton-fallender nichtnegativer Zahlenfolge* $\sigma = (\sigma_i)$*, daß*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} c_1(p,q) \cdot n^{-\frac{1}{k}} \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon_n(D_\sigma)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist. Dabei bezeichnet* $c_1(p,q)$ *die Konstante aus Satz 1.9.*

Beweis. Die kanonische Injektion $I_k : \ell_p^k \to \ell_p$ und die kanonische Projektion $P_k : \ell_q \to \ell_q^k$ haben beide Norm 1. Also erfüllt $D_\sigma^{(k)} := P_k D_\sigma I_k$ die Ungleichung

$$\varepsilon_n(D_\sigma^{(k)}) \leq ||P_k|| \cdot \varepsilon_n(D_\sigma) \cdot ||I_k|| = \varepsilon_n(D_\sigma).$$

Daher genügt es $\varepsilon_n(D_\sigma^{(k)})$ nach unten abzuschätzen. Sei dazu $\varepsilon > \varepsilon_n(D_\sigma^{(k)})$ beliebig aber fest vorgegeben, dann gibt es geeignete $(\xi_i)_{i=1}^n$, so daß

$$D_\sigma^{(k)}(U_{\ell_p^k}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \xi_i + \varepsilon \cdot U_{\ell_q^k} \right\}$$

ist. Durch betrachten der Volumina folgt daraus unmittelbar:

$$\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_k \cdot \mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k}) \leq n \cdot \varepsilon^k \cdot \mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k}).$$

Das heißt für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^{-\frac{1}{k}} \cdot \left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})} \right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon.$$

Das Volumenverhältnis läßt sich nach Satz 1.9 durch $c_1(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}}$ abschätzen. Abschließend liefern der Grenzwertübergang $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_n(D_\sigma^{(k)})$ und die Ermittlung des Supremums über alle $1 \leq k < \infty$ schließlich

$$\sup_{1 \leq k < \infty} c_1(p,q) \cdot n^{-\frac{1}{k}} \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon_n(D_\sigma).$$

□.

Nun soll die eigentliche Abschätzung der Entropiemoduli von Diagonaloperatoren $D_\sigma : \ell_p \to \ell_q$ erfolgen.

Beweis von Satz 3.2. Die Abschätzungen nach unten folgen, indem die Ungleichung für Entropiezahlen aus Lemma 3.4 auf die Entropiemoduli übertragen wird. Nach diesem Lemma ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{1 \le k < \infty} c_1(p,q) \cdot n^{-\frac{1}{k}} \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \le \varepsilon_n(D_\sigma),$$

das heißt aber für beliebige n und k aus $\mathbb{N}$ ist

$$c_1(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \le n^{\frac{1}{k}} \cdot \varepsilon_n(D_\sigma).$$

Die Bestimmung des Infimums über alle $1 \le n < \infty$ liefert schließlich

$$c_1(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \le \inf_{1 \le n < \infty} n^{\frac{1}{k}} \cdot \varepsilon_n(D_\sigma) = g_k(D_\sigma).$$

Die Abschätzungen nach oben müssen für die beiden Fälle einzeln bewiesen werden. Im Fall $p \le q$ wird $I : \ell_p \to \ell_q : (\xi_i) \mapsto (\xi_i)$ die kanonische Einbettung zwischen ℓ_p und ℓ_q betrachtet. Ferner sei $D_\sigma^{(p)} : \ell_p \to \ell_p : (\xi_i) \mapsto (\sigma_i \xi_i)$ der wohldefinierte (vgl. Satz 1.2) Operator von ℓ_p in ℓ_p gegeben, so daß $D_\sigma = I D_\sigma^{(p)}$ ist. Aufgrund von Satz 3.1 ergibt sich

$$g_k(D_\sigma) \le ||I|| \cdot g_k(D_\sigma^{(p)}) \le 6 \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Im Fall $p > q$ werden, wie im Beweis von Lemma 3.4, die kanonische Injektion $I_k : \ell_p^k \to \ell_p$ und die kanonische Projektion $P_k : \ell_q \to \ell_q^k$ herangezogen, so daß sich ein Operator $D_\sigma^{(k)} := P_k D_\sigma I_k : \ell_p^k \to \ell_q^k$ ergibt. Außerdem wird der Operator

$$D_k : \ell_p \to \ell_q : (\xi_i) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_i \xi_i & , \text{für } i \le k \\ 0 & , \text{für } i > k \end{array} \right\}$$

gebraucht.
Weiterhin sei ein maximales System von Punkten $(y_i)_{i=1}^N$ aus der Menge $D_\sigma^{(k)}(U_{\ell_p^k})$ mit $||y_i - y_j||_q > 2 \cdot \sigma_k$ für alle $i \ne j$ gegeben. Da $U_{\ell_q^k} \subseteq U_{\ell_p^k}$ ist, gilt die Inklusion

$$\bigcup_{j=1}^{N} \left\{ y_j + \sigma_k \cdot U_{\ell_q^k} \right\} \subseteq D_\sigma^{(k)}(U_{\ell_p^k}) + \sigma_k \cdot U_{\ell_p^k} \subseteq 2 \cdot D_\sigma^{(k)}(U_{\ell_p^k}).$$

Dabei sind die Mengen $\{y_j + \sigma_k \cdot U_{\ell_q^k}\}$ $(j = 1 \dots N)$ paarweise disjunkt, da $||y_i - y_j||_q > 2 \cdot \sigma_k$ ist. Die Betrachtung der Volumina ergibt nun

$$N \cdot \sigma_k^k \cdot \mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k}) \leq 2^k \cdot \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_k \cdot \mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k}). \tag{3.1}$$

Wegen der Maximalität der y_j, bilden die Mengen $\{y_j + 2\sigma_k \cdot U_{\ell_q^k}\}$ $(j = 1 \dots N)$ eine Überdeckung von $D_\sigma^{(k)}(U_{\ell_p^k})$. Da sich $U_{\ell_q^k}$ in U_{ℓ_q} einbetten läßt, bilden somit die Mengen $\left\{y_j + 2\sigma_k U_{\ell_q}\right\}$ $(j = 1 \dots N)$ eine Überdeckung von $D_k(U_{\ell_p})$. Für die Entropiezahlen heißt das, daß $\varepsilon_N(D_k) \leq 2 \cdot \sigma_k$ ist. Nach Satz 1.2 ist $||D_\sigma - D_k|| = \left|\left|(\sigma_i)_{i=k+1}^\infty\right|\right|_r$. Was insgesamt zu der Abschätzung

$$\varepsilon_N(D_\sigma) \leq ||D_\sigma - D_k|| + \varepsilon_N(D_k) \leq \left|\left|(\sigma_i)_{i=k+1}^\infty\right|\right|_r + 2 \cdot \sigma_k$$

führt. Zusammen mit Ungleichung (3.1) und Satz 1.9 läßt sich schließlich $g_k(D_\sigma)$ folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned} g_k(D_\sigma) &\leq N^{\frac{1}{k}} \cdot \varepsilon_N(D_\sigma) \\ &\leq \frac{2}{\sigma_k} \cdot \left[\frac{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_p^k})}{\mathrm{vol}_k(U_{\ell_q^k})}\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\prod_{i=1}^k \sigma_i\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\left|\left|(\sigma_i)_{i=k+1}^\infty\right|\right|_r + 2 \cdot \sigma_k\right) \\ &\leq \left(4 + 2 \cdot \frac{\left|\left|(\sigma_i)_{i=k+1}^\infty\right|\right|_r}{\sigma_k}\right) \cdot c_2(p,q) \cdot k^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\prod_{i=1}^k \sigma_i\right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Was das gewünschte Ergebnis ist. $\square$.

3.2 Operatoren zwischen Banachräumen

Gibt es ähnliche Abschätzungen, wie im vorigen Abschnitt für Diagonaloperatoren, auch für beliebige lineare stetige Operatoren zwischen Banachräumen?

Da beliebige Operatoren keine Diagonalwerte σ_i besitzen, muß eine geeignete Verallgemeinerung gefunden werden. Eine Möglichkeit ist es, die Diagonalwerte durch die Approximationszahlen zu ersetzen. Diese Wahl ist insofern plausibel, da für Diagonaloperatoren die n-te Approximationszahl gleich dem n-ten Diagonalwert ist.

Ist nun T ein beliebiger linearer stetiger Operator zwischen Banachräumen, dann ist bereits aus [CaSt] die Abschätzung

$$g_k(T) \leq 10k \cdot \left(\prod_{i=1}^k a_i(T)\right)^{\frac{1}{k}}$$

bekannt.

Zuerst soll gezeigt werden, daß der Vorfaktor $10k$ für diese Art der Abschätzung asymptotisch optimal ist.

3.5. Satz. *Es gibt Banachräume E und F und ein $T \in \mathfrak{L}(E,F)$, so daß*

$$\frac{k}{2e} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} a_i(T) \right)^{\frac{1}{k}} \leq g_k(T)$$

gilt.

Beweis. Für den Operator $D_\sigma : \ell_\infty \to \ell_1$ mit $\sigma_i := 2^{-i}$ sei

$$D_i : \ell_\infty \to \ell_1 : (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\sigma_1 \xi_1, \dots, \sigma_i \xi_i, 0, 0, \dots)$$

die Einschränkung auf die ersten i Einheitsvektoren. Aufgrund von Satz 1.2 folgt

$$a_i(D_\sigma) \leq ||D_\sigma - D_{i-1}|| = \left|\left|(2^{-j})_{j=i}^{\infty}\right|\right|_1 = \sum_{j=i}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-i+1} = 2 \cdot \sigma_i.$$

Außerdem liefert der Beweis des Satzes 3.2

$$\left[\frac{\operatorname{vol}_k(U_{\ell_\infty^k})}{\operatorname{vol}_k(U_{\ell_1^k})} \right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq g_k(D_\sigma).$$

Nach Lemma 1.8 ist $\operatorname{vol}_k(U_{\ell_\infty^k}) / \operatorname{vol}_k(U_{\ell_1^k}) = \Gamma(k+1)$, was nach der Stirlingschen Formel (siehe Ungleichung (1.1)) größer als $(k/e)^k$ ist. Insgesamt folgt also

$$g_k(D_\sigma) \geq \frac{k}{e} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{k}{2e} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} a_i(D_\sigma) \right)^{\frac{1}{k}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$.

Es ist also im allgemeinen nicht möglich, den Vorfaktor weiter zu verkleinern. Was passiert, wenn der Index der Entropiemoduli geringfügig vergrößert wird? Läßt sich dann der Vorfaktor verkleinern? Dies ist möglich, wie im weiteren gezeigt wird.

3.6. Satz. *Sei T ein linearer stetiger Operator zwischen den Banachräumen E und F, dann ist für jedes $0 < \varepsilon \leq 3$:*

$$g_{(1+\varepsilon)\cdot k}(T) \leq \left(c_1 + c_2 \cdot \frac{(2+3\varepsilon)^2}{\varepsilon^4} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} t_i(T) \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wobei c_1 und c_2 positive Konstanten sind.

Um den eigentlichen Beweis führen zu können, sind noch einige Vorbetrachtungen notwendig.

3.7. Definition. Da Entropiezahlen nur für positive natürliche Zahlen definiert sind, wird die Funktion

$$[\![x]\!] := \begin{cases} k & \text{, für } k \le x < k+1 \ (k \in \mathbb{N}) \\ 1 & \text{, für } x < 1 \end{cases}$$

benötigt.

3.8. Bemerkung. Für jedes $x > 0$ gilt die Ungleichung $\frac{x}{2} \le [\![x]\!] < x + 1$. Ist x größer als $\frac{1}{2}$, dann ist die Abschätzung $[\![x]\!] < 2 \cdot x$ richtig. Schließlich gilt für alle $x \ge 1$ sogar $[\![x]\!] \le x$ bzw. allgemeiner (für beliebige x) formuliert $[\![x]\!] \le \max\{1, x\}$. Die Ganzzahlfunktion, welche die nächstkleinere ganze Zahl liefert, wird im weiteren wie üblich mit $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

Wichtig für die weiteren Ausführungen ist der folgende Satz aus [Ps].

3.9. Satz. *Für jedes $\alpha > \frac{1}{2}$ gibt es eine Konstante $C(\alpha)$, so daß für jeden n-dimensionalen normierten Raum E ein Isomorphismus $u : \ell_2^n \to E$ existiert mit*

$$\max\{d_k(u), c_k(u^{-1})\} \le C(\alpha) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha$$

für $1 \le k \le n$. Aufgrund der Rangeigenschaft der c_k und d_k gilt diese Ungleichung sogar für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gibt es eine weitere Konstante $C_1(\alpha)$, womit die Ungleichung

$$\max\{e_k(u), e_k(u^{-1})\} \le C_1(\alpha) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung. Im weiteren wird dieser Satz immer mit $\alpha = 1$ angewandt.

3.10. Lemma. *Seien Banachräume E und F und ein linearer stetiger Operator $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ gegeben, dann ist für alle $0 < \delta \le 1$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge 2$*

$$g_{(1+2\delta)\left(\frac{m}{m-1}\right)\cdot k}(T) \le \left(c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot m^2\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} t_i(T)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Dabei sind c_1 und c_2 positive Konstanten.

Beweis. (unter Verwendung von Methoden aus [CaSt], [DeJu] und [CaMa])
Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im weiteren $\alpha := \frac{m}{m-1}$ gesetzt.
Seien $\varepsilon > 0$, die kanonische metrische Surjektion $Q_E : \ell_1(U_E) \to E$ und die kanonische metrische Injektion $J_F : F \to \ell_\infty(U_{F'})$ gegeben. Dann existiert für $S := J_F T Q_E$ ein $\hat{R} \in \mathfrak{L}(\ell_1(U_E), \ell_\infty(U_{F'}))$ mit $r := \operatorname{rank}(\hat{R}) < [\alpha k]$, so daß

$$\left\|S - \hat{R}\right\| \le (1+\varepsilon) \cdot a_{[\alpha k]}(S) = (1+\varepsilon) \cdot t_{[\alpha k]}(T) \tag{3.2}$$

ist. Daher ist unter Ausnutzung der Injektivität und Surjektivität der Tichomirovzahlen

$$t_i(\hat{R}) \leq \left|\left|\hat{R} - S\right|\right| + t_i(S) \leq (1+\varepsilon) \cdot t_{[\alpha k]}(T) + t_i(T) \leq (2+\varepsilon) \cdot t_i(T) \tag{3.3}$$

für alle $i \leq [\alpha k]$. Aufgrund der Surjektivität und der schwachen Injektivität der Entropiemoduli ist außerdem

$$g_{(1+2\delta)\alpha k}(T) \leq 2 \cdot g_{(1+2\delta)\alpha k}(S). \tag{3.4}$$

Sei X der Faktorraum $\ell_1(U_E)/\,\mathrm{N}(\hat{R})$ und Y der r-dimensionale Bildraum von $\hat{R}$, dann gibt es für die kanonische Projektion $Q : \ell_1(U_E) \to X$ und die kanonische Injektion $I : Y \to \ell_\infty(U_{F'})$ einen Operator $R : X \to Y$ mit $\hat{R} = IRQ$. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist $\varepsilon_n(\hat{R}) \leq ||I||\, \varepsilon_n(R)\, ||Q|| = \varepsilon_n(R)$ und zusammen mit (3.2) ist

$$\varepsilon_n(S) \leq \left|\left|S - \hat{R}\right|\right| + \varepsilon_n(\hat{R}) \leq (1+\varepsilon) \cdot t_{[\alpha k]}(T) + \varepsilon_n(R). \tag{3.5}$$

Die Injektivität und Surjektivität der Tichomirovzahlen t_i führt zu der Gleichung $t_i(\hat{R}) = t_i(R)$.

Nun seien $u : \ell_2^r \to X$ und $v : \ell_2^r \to Y$ Isomorphismen wie im Satz 3.9, dann gilt für beide die Ungleichung (stellvertretend wird sie hier nur für v angeführt)

$$\varepsilon_{\left[(8n)^\delta\right]+1}(v) \leq e_{\left[\log_2\left(\left[(8n)^\delta\right]+1\right)\right]+1}(v) \leq \frac{C_1(1) \cdot r}{\left[\log_2\left(\left[(8n)^\delta\right]+1\right)\right]+1},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Damit ist aber

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\left(\left[(8n)^\delta\right]+1\right)^2 \cdot n}(R) &= \varepsilon_{\left(\left[(8n)^\delta\right]+1\right)^2 \cdot n}(vv^{-1}Ruu^{-1}) \\ &\leq \varepsilon_{\left[(8n)^\delta\right]+1}(v) \cdot \varepsilon_n(v^{-1}Ru) \cdot \varepsilon_{\left[(8n)^\delta\right]+1}(u^{-1}) \\ &\leq C_1(1)^2 \cdot \left(\frac{r}{\left[\log_2\left(\left[(8n)^\delta\right]+1\right)\right]+1}\right)^2 \cdot \varepsilon_n(v^{-1}Ru) \end{aligned} \tag{3.6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Operator $v^{-1}Ru$ läßt sich nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren (vgl. [Pi1]) durch geeignet gewählte isometrische Operatoren $U, V : \ell_2^r \to \ell_2^r$ und ihren Adjungierten als Diagonaloperator $D := U^\star v^{-1} R u V$, der von einer monoton-fallenden nichtnegativen Zahlenfolge $(\sigma_i)_{i=1}^r$ erzeugt wird, schreiben. Da U, $U^\star$, V und $V^\star$ isometrisch sind, ist

$$\varepsilon_n(v^{-1}Ru) = \varepsilon_n(D) \tag{3.7}$$

und $t_i(v^{-1}Ru) = t_i(D)$. Mit Hilfe von Satz 3.9 und (3.3) folgt daraus, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq r < [\alpha k]$

$$\begin{aligned}\sigma_i &= a_i(D) = t_i(D) = t_i(v^{-1}Ru)\\ &\leq c_{[\![\frac{(\alpha-1)i}{2\alpha}]\!]}(v^{-1}) \cdot t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(R) \cdot d_{[\![\frac{(\alpha-1)i}{2\alpha}]\!]}(u)\\ &\leq C(1)^2 \cdot \left(\frac{4\alpha \cdot r}{(\alpha-1)\cdot i}\right)^2 \cdot t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(R)\\ &\leq C(1)^2 \cdot 16 \cdot m^2 \cdot \left(\frac{r}{i}\right)^2 \cdot (2+\varepsilon) \cdot t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)\end{aligned}$$

gilt. Die Definition

$$\tilde{\sigma}_i := C(1)^2 \cdot 16 \cdot m^2 \cdot (2+\varepsilon) \cdot \left(\frac{r}{i}\right)^2 \cdot t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)$$

liefert eine monoton-fallende nichtnegative Zahlenfolge, die einen Diagonaloperator $\tilde{D} : \ell_2^r \to \ell_2^r$ bildet. Wegen der vorhergehenden Ungleichung ist $D(U_{\ell_2^r}) \subseteq \tilde{D}(U_{\ell_2^r})$, was wiederum bedeutet

$$\varepsilon_n(D) \leq \varepsilon_n(\tilde{D}). \tag{3.8}$$

In jedem Fall ist $\alpha > 1$, deshalb ist für alle $k \in \mathbb{N}$

$$k = \left[\frac{\alpha k}{\alpha}\right] \leq \left[\frac{[\alpha k]+1}{\alpha}\right] \leq \left[\frac{\alpha k+1}{\alpha}\right] = \left[k + \frac{1}{\alpha}\right] = k. \tag{3.9}$$

Daher gilt für $\varrho := C(1)^2 \cdot 16 \cdot m^2 \cdot (2+\varepsilon) \cdot t_k(T)$, daß

$$\tilde{\sigma}_i \geq \tilde{\sigma}_r \geq C(1)^2 \cdot 16 \cdot m^2 \cdot (2+\varepsilon) \cdot \left(\frac{r}{r}\right)^2 \cdot t_{\left[\frac{[\alpha k]+1}{\alpha}\right]}(T) = \varrho$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq r < [\alpha k]$ richtig ist.
Jetzt sei ein maximales System $(y_i)_{i=1}^N$ von Punkten in $\tilde{D}(U_{\ell_2^r})$ mit der Eigenschaft $||y_i - y_j|| > 2\varrho$ für alle $i \neq j$ gegeben. Aufgrund der Maximalität ist einerseits

$$\tilde{D}(U_{\ell_2^r}) \subseteq \bigcup_{j=1}^N \{y_j + 2\varrho U_{\ell_2^r}\}. \tag{3.10}$$

Andererseits ist

$$\bigcup_{j=1}^N \{y_j + \varrho U_{\ell_2^r}\} \subseteq \tilde{D}(U_{\ell_2^r}) + \varrho U_{\ell_2^r} \subseteq 2 \cdot \tilde{D}(U_{\ell_2^r}), \tag{3.11}$$

da ϱ kleiner als $\tilde{\sigma}_i$ ist. Aus (3.10) folgt unmittelbar $\varepsilon_N(\tilde{D}) \le 2\varrho$. Zusammen mit (3.5), (3.6), (3.7) und (3.8) gilt nun

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2\cdot N}(S) \le (1+\varepsilon)\cdot t_{[\alpha k]}(T) + \varepsilon_{\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2\cdot N}(R)\\
&\le (1+\varepsilon)\cdot t_k(T) + C_1(1)^2 \cdot \left(\frac{r}{\left[\log_2\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)\right]+1}\right)^2 \cdot \varepsilon_N(v^{-1}Ru)\\
&\le (1+\varepsilon)\cdot t_k(T) + C_1(1)^2 \cdot \left(\frac{r}{\left[\log_2\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)\right]+1}\right)^2 \cdot 2\cdot\varrho\\
&\le \left(1+\varepsilon+32\cdot m^2\cdot(2+\varepsilon)C_1(1)^2C(1)^2\left(\frac{r}{\left[\log_2\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)\right]+1}\right)^2\right)\cdot t_k(T).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Das Betrachten der Volumina in (3.10) liefert die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^r \tilde{\sigma}_i \le N\cdot(2\varrho)^r.$$

Unter Zuhilfenahme der Stirlingschen Formel (siehe Ungleichung (1.1)) ist somit

$$\begin{aligned}
N &\ge \prod_{i=1}^r \frac{\tilde{\sigma}_i}{2\varrho} = \prod_{i=1}^r \frac{\left(\frac{r}{i}\right)^2 \cdot t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)}{2\cdot t_k(T)}\\
&\ge \prod_{i=1}^r \frac{r^2}{2\cdot i^2} = \frac{r^{2r}}{2^r\cdot(r!)^2}\\
&\ge \frac{r^{2r}}{2^r\cdot 2\pi\cdot r^{2r}\cdot r\cdot e^{-2r}\cdot e^{\frac{1}{6r}}}\\
&\ge \frac{e^{2r}}{2\pi\cdot e^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{2r}} \ge \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^{2r}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Daher kann $\left[\log_2\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)\right]+1$ nach unten durch $\frac{\delta r}{2}$ abgeschätzt werden, denn es gilt

$$\left[\log_2\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)\right]+1 \ge \left[\log_2\left(\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{2\delta r}\right]+1\right)\right]+1 \ge 2\delta r\cdot\log_2\left(\frac{e}{2}\right) \ge \frac{\delta r}{2}.$$

Dies kann in (3.12) eingesetzt werden. Der anschließende Grenzwertübergang von ε gegen 0 führt zu der Ungleichung

$$\varepsilon_{\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2\cdot N}(S) \le \left(1+256\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\cdot C_1(1)^2C(1)^2\right)\cdot t_k(T). \tag{3.14}$$

Nun soll noch N von oben abgeschätzt werden. Nach dem Vergleich der Volumina in (3.11) ist $N \cdot \varrho^r \le 2^r \cdot \tilde{\sigma}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{\sigma}_r$, da die Mengen $\{y_i + \varrho U_{\ell_2^r}\}$ disjunkt sind. Analog obiger Abschätzung (3.13) folgt aufgrund der Stirlingschen Formel schließlich

$$
\begin{aligned}
N &\le 2^r \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{\tilde{\sigma}_i}{\varrho} \\
&\le 2^r \cdot \frac{r^{2r}}{2\pi \cdot r^{2r} \cdot r \cdot e^{-2r}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r} t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)}{t_k(T)^r} \\
&\le 2^{[\alpha k]} \cdot e^{2[\alpha k]} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{[\alpha k]} t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)}{t_k(T)^{[\alpha k]}} \qquad (3.15) \\
&= 2^{[\alpha k]} \cdot e^{2[\alpha k]} \cdot \left(\frac{\prod_{i=1}^{[\alpha k]} t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)^{\frac{1}{\alpha}}}{t_k(T)^{\frac{[\alpha k]}{\alpha}}} \right)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Im weiteren soll gezeigt werden, daß daraus

$$
N \le 2^{[\alpha k]} \cdot e^{2[\alpha k]} \cdot \left(\frac{\prod_{i=1}^{k} t_i(T)}{t_k(T)^k} \right)^{\alpha}
$$

folgt. Dazu muß nur die Ungleichung

$$
\frac{\prod_{i=1}^{[\alpha k]} t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)^{\frac{1}{\alpha}}}{t_k(T)^{\frac{[\alpha k]}{\alpha}}} \le \frac{\prod_{i=1}^{k} t_i(T)}{t_k(T)^k}
$$

gezeigt werden. Wird für α der Quotient $\frac{m}{m-1}$ eingesetzt, dann ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^{[\alpha k]} t_{\left[\frac{i+1}{\alpha}\right]}(T)^{\frac{1}{\alpha}}}{t_k(T)^{\frac{[\alpha k]}{\alpha}}} &= \frac{\prod_{i=1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{\frac{m-1}{m}}}{t_k(T)^{\frac{\left[\frac{m}{m-1}k\right](m-1)}{m}}} \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1}}{t_k(T)^{\left[\frac{m}{m-1}k\right](m-1)}} \right)^{\frac{1}{m}} .
\end{aligned}
$$

Zähler und Nenner des Bruchs in Klammern bestehen aus $\left[\frac{m}{m-1}k\right]\cdot(m-1)$ Faktoren. Durch Erweitern mit $t_k(T)$ sind es schließlich genau $m \cdot k$ Stück. Der Zähler hat dann die Form

$$\prod_{i=1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1} \cdot \prod_{i=\left[\frac{m}{m-1}k\right]\cdot(m-1)+1}^{mk} t_k(T). \tag{3.16}$$

Um aufwendige Fallunterscheidungen zu vermeiden, werden dabei wie üblich leere Produkte (Produkte, deren Endindex kleiner als ihr Startindex ist) gleich Eins gesetzt. Jetzt sollen diese $m \cdot k$ Faktoren in aufsteigender Reihenfolge in Gruppen von $m \cdot (m-1)$ Faktoren aufgeteilt werden. Dies geht natürlich meistens nicht exakt auf, das heißt es ergeben sich $\left[\frac{m\cdot k}{m\cdot(m-1)}\right] = \left[\frac{k}{m-1}\right]$ „volle“ Gruppen und ein Rest r. So hat der Zähler schließlich die Form:

$$\prod_{j=0}^{\left[\frac{k}{m-1}\right]-1} \left(\prod_{i=jm+1}^{jm+m} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1} \right) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot m+1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1} \cdot \prod_{i=\left[\frac{m}{m-1}k\right]\cdot(m-1)+1}^{mk} t_k(T).$$

In jeder der vollen Gruppen läuft der Produktindex i von $jm+1$ bis $jm+m$. Für einen konkreten Produktindex $i = jm+d$ $(1 \le d \le m)$, läßt sich der Index der Tichomirovzahlen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right] &= \left[\frac{(jm+d+1)(m-1)}{m}\right] \\
&= \left[j\cdot(m-1) + \frac{(d+1)(m-1)}{m}\right] \\
&= j\cdot(m-1) + \left[\frac{(d+1)(m-1)}{m}\right] \\
&= j\cdot(m-1) + d + 1 + \left[-\frac{d+1}{m}\right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dabei ist

$$\left[-\frac{d+1}{m}\right] = \begin{cases} -1 & ,\ 1 \le d \le m-1 \\ -2 & ,\ d = m \end{cases} \tag{3.18}$$

Das heißt, wird der Produktindex i um Eins vergrößert, dann nimmt auch der Index der Tichomirovzahlen um Eins zu, außer für $i = jm+m-1$, da die beiden größten Produktindizes in der Gruppe ($jm+m-1$ und $jm+m$) den gleichen Tichomirovzahlen-Index haben:

$$\prod_{i=jm+1}^{jm+m} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1} = \left(\prod_{d=1}^{m-1} t_{(j\cdot(m-1)+d)}(T)^{m-1}\right) \cdot t_{(j\cdot(m-1)+m-1)}(T)^{m-1}.$$

Diese Eigenschaft kann nun ausgenutzt werden, um einige Tichomirovzahlen-Indizes so zu verkleinern, daß sich schließlich das Produkt der Gruppe folgendermaßen abschätzen läßt:

$$\left(\prod_{d=1}^{m-1} t_{(j\cdot(m-1)+d)}(T)^{m-1}\right) \cdot t_{(j\cdot(m-1)+m-1)}(T)^{m-1} \leq \prod_{d=1}^{m-1} t_{(j\cdot(m-1)+d)}(T)^{m}.$$

Die restlichen Faktoren r des Zählers zerfallen in die zwei Produkte

$$r_1 := \prod_{i=\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot m+1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1} \quad \text{und} \quad r_2 := \prod_{i=\left[\frac{m}{m-1}k\right]\cdot(m-1)+1}^{mk} t_k(T).$$

Zunächst ist

$$k = \frac{(m-1)\cdot k}{m-1} = \frac{m\cdot k}{m-1} - \frac{k}{m-1} = \left[\frac{m\cdot k}{m-1}\right] - \left[\frac{k}{m-1}\right], \tag{3.19}$$

was zu der Gleichung

$$mk - \left[\frac{m}{m-1}k\right]\cdot(m-1) = \left[\frac{m}{m-1}k\right] - m\cdot\left[\frac{k}{m-1}\right] \tag{3.20}$$

führt. Aus der Ungleichung

$$\left[\frac{m}{m-1}k\right] + 1 > \frac{m\cdot k}{m-1}$$

ergibt sich mit Hilfe von (3.20)

$$(m-1) > mk - \left[\frac{m}{m-1}k\right]\cdot(m-1) = \left[\frac{m}{m-1}k\right] - m\cdot\left[\frac{k}{m-1}\right].$$

Daher folgt aus (3.17) und (3.18), daß

$$r_1 = \prod_{i=\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot m+1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]} t_{\left[\frac{(i+1)(m-1)}{m}\right]}(T)^{m-1} = \prod_{d=1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]-\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot m} t_{\left(\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot(m-1)+d\right)}(T)^{m-1}$$

ist. Die Gleichung (3.20) besagt, daß die beiden Produkte r_1 und r_2 gleichgroße Indexmengen haben. Da in r_1 außerdem $i \leq [\alpha k]$ ist, sind nach (3.9) die Tichomirovzahlen-Indizes in r_1 immer kleiner gleich k. Somit können die Tichomirovzahlen-Indizes von r_2 so verkleinert werden, daß schließlich

$$r_1 \cdot r_2 \leq \prod_{d=1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]-\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot m} t_{\left(\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot(m-1)+d\right)}(T)^m$$

gilt. Der gesamte Zähler (3.16) hat nun die Form

$$\prod_{j=0}^{\left[\frac{k}{m-1}\right]-1}\left(\prod_{d=1}^{m-1} t_{(j\cdot(m-1)+d)}(T)^m\right) \cdot \prod_{d=1}^{\left[\frac{m}{m-1}k\right]-\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot m} t_{\left(\left[\frac{k}{m-1}\right]\cdot(m-1)+d\right)}(T)^m.$$

Aufgrund von (3.19) ist dies aber genau das m-fache Produkt der k ersten Tichomirovzahlen. Und aus (3.15) folgt

$$N \leq 2^{[\alpha k]} \cdot e^{2[\alpha k]} \cdot \left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} t_i(T)}{t_k(T)^k}\right)^{\alpha}.$$

Mit dieser Ungleichung und unter Einbeziehung der Abschätzungen (3.4) und (3.14) folgt schließlich

$$\begin{aligned}
g_{(1+2\delta)\alpha k}(T) &\leq 2 \cdot g_{(1+2\delta)\alpha k}(S) \\
&\leq 2 \cdot \left(\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2 \cdot N\right)^{\frac{1}{(1+2\delta)\alpha k}} \cdot \varepsilon_{\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2\cdot N}(S) \\
&\leq 2 \cdot \left(4 \cdot 8^{2\delta} \cdot N^{1+2\delta}\right)^{\frac{1}{(1+2\delta)\alpha k}} \cdot \varepsilon_{\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2\cdot N}(S) \\
&\leq 2 \cdot 8 \cdot N^{\frac{1}{\alpha k}} \cdot \varepsilon_{\left(\left[(8N)^\delta\right]+1\right)^2\cdot N}(S) \\
&\leq 16 \cdot 2 \cdot e^2 \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} t_i(T)^{\frac{1}{k}}}{t_k(T)} \cdot \left(1 + 256 \cdot m^2 \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 C_1(1)^2 C(1)^2\right) \cdot t_k(T) \\
&\leq 32 \cdot e^2 \cdot \left(1 + 256 \cdot m^2 \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot C_1(1)^2 C(1)^2\right) \cdot \prod_{i=1}^{k} t_i(T)^{\frac{1}{k}}.
\end{aligned}$$

$\square$.

Durch passende Wahl von m und δ für ein gegebenes $0 < \varepsilon \leq 3$ kann nun Satz 3.6 bewiesen werden.

Beweis von Satz 3.6. Es muß nur gezeigt werden, daß sich das vorhergehende Lemma anwenden läßt. Ziel ist es dabei m und δ so zu wählen, daß $(1+\varepsilon) = (1+2\delta)\left(\frac{m}{m-1}\right)$ ist und $c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot m^2$ möglichst klein wird. Falls $m > \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$ ist, läßt sich also δ durch m und ε ausdrücken:

$$\delta = \frac{\varepsilon \cdot (m-1) - 1}{2 \cdot m} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon + 1}{2m}. \tag{3.21}$$

Zunächst wird vernachlässigt, daß m ganzzahlig sein muß, und m durch $\mu := 1 + \frac{1}{\varepsilon} + r$ für ein $r > 0$ ersetzt. Um das Minimum des Ausdruckes

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot \mu^2 = \frac{4\mu^4}{(\varepsilon(\mu-1)-1)^2}$$

für alle $r > 0$ zu finden, werden die Nullstellen der Ableitung nach r

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{4\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+r\right)^4}{(\varepsilon r)^2}\right) = \frac{16\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+r\right)^3 \cdot (\varepsilon r)^2 - 4\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+r\right)^4 \cdot 2\varepsilon r \cdot \varepsilon}{(\varepsilon r)^4}$$

bestimmt. Dies ist genau dann Null, wenn

$$0 = 16(\varepsilon r)^2 - 8\left(1+\frac{1}{\varepsilon}+r\right) \cdot \varepsilon^2 \cdot r = 8\varepsilon^2 \cdot r^2 - 8\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \varepsilon^2 \cdot r$$

gilt, woraus sich die Nullstellen 0 und $1 + \frac{1}{\varepsilon}$ ergeben. Davon ist aber nur $1 + \frac{1}{\varepsilon}$ eine Minimumstelle, da nur für $r = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ die zweite Ableitung positiv ist. Die beste Wahl wäre also $\mu = 2 + \frac{2}{\varepsilon}$. Diese kann aber nicht genutzt werden, da m ganzzahlig sein muß.
Sei daher m die nächstgrößere ganze Zahl nach μ, das heißt

$$2 < \mu \leq m < \mu + 1.$$

So ist nach Gleichung (3.21)

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon+1}{2m} \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon+1}{2\mu} = \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon+1}{2m} < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon+1}{2\mu+2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Das heißt es genügt ε kleiner gleich 3 zu wählen, damit $\delta \leq 1$ ist. Insgesamt gilt also

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot m^2 \leq \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2 \cdot (\mu+1)^2 = 16 \cdot \frac{(3\varepsilon+2)^2}{\varepsilon^4}.$$

$\square$.

3.3 Entropie konvexer Hüllen

Die Entropiezahlen für Operatoren sind eigentlich nur eine Spezialisierung der Entropiezahlen für Mengen.

3.11. Definition. Für eine Teilmenge A eines beliebigen Banachraums E werden die Entropiezahlen folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_n(A) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : \ \exists x_1, \dots, x_n : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \varepsilon \cdot U_E)\right\}.$$

Die Definitionen der dyadischen Entropiezahlen bzw. der Entropiemoduli gelten entsprechend: $e_n(A) := \varepsilon_{2^{n-1}}(A)$ bzw. $g_n(A) := \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k(A)$.

Der Banachraum E sei vom Typ p $(1 < p \leq 2)$. Das Verhalten der dyadischen Entropiezahlen der konvexen Hülle einer präkompakten Teilmenge von E läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen relativ gut abschätzen. Die relevanten Ergebnisse sind hier kurz zusammengefaßt:

3.12. Satz. *Für eine präkompakte Teilmenge A des Banachraums E vom Typ $p \in (1, 2]$ gebe es ein $\alpha > 0$ mit $e_n(A) \leq n^{-\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$e_n(\operatorname{aco} A) \leq c_{\alpha,p} \cdot \frac{||A||}{\varepsilon_1(A)} \cdot \begin{cases} n^{-\alpha} & \text{, \textit{für} } 0 < \alpha < 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot \log(n+1) & \text{, \textit{für} } \alpha = 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot (\log(n+1))^{\frac{1}{p'}-\alpha} & \text{, \textit{für} } \alpha > 1/p' \end{cases}$$

Dabei ist $||A|| := \sup\{||x|| : \ x \in A\}$ und $\operatorname{aco} A$ die absolut-konvexe Hülle von A, diese entspricht der 1-konvexen Hülle.

Der Beweis des allgemeinen Falls $\alpha \neq 1/p'$ ist in [CaKyPa] zu finden. Der Grenzfall $\alpha = 1/p'$ wurde für Hilberträume in [Ga] und für Banachräume in ([CrSt]) bewiesen.
Gibt es eine ähnliche Aussage für Entropiemoduli?

3.13. Satz. *Ist A eine präkompakte Teilmenge des Banachraums E vom Typ $p \in (1, 2]$. Und existieren drei positive Konstanten α, c_1 und c_2, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$c_1 \cdot n^{-\alpha} \leq g_n(A) \leq c_2 \cdot n^{-\alpha}$$

gilt. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(\operatorname{aco} A) \leq c \cdot \begin{cases} n^{-\alpha} & \text{, \textit{für} } 0 < \alpha < 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot \log(n+1) & \text{, \textit{für} } \alpha = 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot (\log(n+1))^{1/p'-\alpha} & \text{, \textit{für} } \alpha > 1/p' \end{cases}$$

Wobei c nur von α, c_1, c_2, $\varepsilon_1(A)$, $||A||$ und p abhängt.

3.14. Bemerkung. In Analogie zu [CaKyPa] kann mit Hilfe der Menge

$$A := \left\{ (\log(j+1))^{-\alpha} \cdot e_j : \ j \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \ell_p$$

die Optimalität der Abschätzung im Fall $\alpha < \frac{1}{p'}$ gezeigt werden, dabei bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor von ℓ_p. Einerseits läßt sich A mit k Einheitskugeln vom Radius $(\log(k+1))^{-\alpha}$ überdecken. Andererseits ist die Überdeckung mit k Einheitskugeln vom Radius $\frac{1}{5}(\log(k+1))^{-\alpha}$ nicht möglich, das heißt

$$\frac{1}{5}(\log(k+1))^{-\alpha} \le \varepsilon_k(A) \le (\log(k+1))^{-\alpha}.$$

Woraus schließlich $g_n(A) \asymp n^{-\alpha}$ folgt. Und da $\varepsilon_k(A) \le \varepsilon_k(\operatorname{aco} A)$ ist, gilt außerdem $n^{-\alpha} \lesssim g_n(\operatorname{aco} A)$.

Die Frage der Optimalität für $\alpha \ge \frac{1}{p'}$ ist offen.

Vor dem eigentlichen Beweis des Satzes zunächst noch einige vorbereitende Schritte.

3.15. Bemerkung. Für $k > 1$ und $\alpha > 0$ sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \ \nu \mapsto k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha}$ gegeben. Aus der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(\nu) &= \log k \cdot k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \nu^{-\alpha} - \alpha \cdot k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha-1} \\ &= k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha-1} \cdot \left(\log k \cdot \frac{1}{\nu} - \alpha \right) \end{aligned}$$

ergibt sich die Maximumstelle $\nu_{max} = \frac{\log k}{\alpha}$. Im Intervall $(0, \nu_{max})$ ist die Ableitung positiv, das heißt f streng monoton-wachsend, und im Intervall (ν_{max}, ∞) negativ, das heißt f streng monoton-fallend.

Seien die Konstanten $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $1 \le \nu \in \mathbb{R}$ gegeben, dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$

$$k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha} \le k^{-\frac{1}{\nu_{max}}} \cdot \nu_{max}^{-\alpha} = e^{-\alpha} \cdot \alpha^{\alpha} \cdot (\log k)^{-\alpha}. \tag{3.22}$$

Der folgende Satz zeigt, daß sich aus den Voraussetzungen des Satzes 3.13 die von Satz 3.12 ableiten lassen.

3.16. Satz. *Seien eine monoton-fallende nichtnegative Zahlenfolge ε_k und positive Konstanten α, c_1 und c_2 gegeben, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$c_1 \cdot n^{-\alpha} \le \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k \le c_2 \cdot n^{-\alpha} \tag{3.23}$$

ist. Dann existiert eine Konstante $c(\alpha, c_1, c_2, \varepsilon_1)$, die nicht von k abhängt, so daß für alle $k > 1$

$$\varepsilon_k \le c(\alpha, c_1, c_2, \varepsilon_1) \cdot (\log k)^{-\alpha}$$

ist.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, daß sich die Ungleichung (3.23) auf die reellen Zahlen ($\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 1$) verallgemeinern läßt:

$$c_1' \cdot \nu^{-\alpha} \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{\nu}} \cdot \varepsilon_k \leq c_2' \cdot \nu^{-\alpha}. \tag{3.24}$$

Dazu sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $n \leq \nu < n+1$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{\nu}} \cdot \varepsilon_k \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k &\leq c_2 \cdot n^{-\alpha} = c_2 \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha} \cdot \nu^{-\alpha} \\ &< c_2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \nu^{-\alpha} \leq c_2 \cdot 2^{\alpha} \cdot \nu^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Wird umgekehrt $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $n-1 < \nu \leq n$ ist, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{\nu}} \cdot \varepsilon_k \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k &\geq c_1 \cdot n^{-\alpha} = c_1 \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha} \cdot \nu^{-\alpha} \\ &> c_1 \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\alpha} \cdot \nu^{-\alpha} \geq c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \cdot \nu^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Es genügt demnach $c_1' := c_1 \cdot 2^{-\alpha}$ und $c_2' := c_2 \cdot 2^{\alpha}$ zu setzen.
Für den weiteren Beweis seien die Konstanten

$$\varrho := \sup\left\{\tau \geq 1 :\ \tau = 1 \ \vee\ e^{\alpha\cdot\tau} \leq 2 \cdot \frac{c_2'}{c_1'} \cdot e \cdot \alpha^{\alpha} \cdot \tau^{\alpha}\right\}$$

und $\vartheta \in (1,2]$ vorgegeben, dann gilt für jedes $\sigma > \varrho$ die Ungleichung

$$e^{\alpha\cdot\sigma} > 2 \cdot \frac{c_2'}{c_1'} \cdot e \cdot \alpha^{\alpha} \cdot \sigma^{\alpha} > \vartheta \cdot \frac{c_2'}{c_1'} \cdot e \cdot \alpha^{\alpha} \cdot \sigma^{\alpha}$$

oder anders formuliert:

$$\vartheta^{-1} \cdot \frac{c_1'}{c_2'} \cdot e^{-1} \cdot \alpha^{-\alpha} > e^{-\alpha\cdot\sigma} \cdot \sigma^{\alpha}. \tag{3.25}$$

Nun soll noch eine Menge konstruiert werden, die für den Beweis benötigt wird. Für jedes $\nu \geq 1$ ist nach (3.24) $\inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{\nu}} \cdot \varepsilon_k \leq c_2' \cdot \nu^{-\alpha}$, das heißt es gibt mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon_k \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha}. \tag{3.26}$$

Alle $k > 1$ mit dieser Eigenschaft werden in der Menge

$$K_\nu := \left\{k \in \mathbb{N} :\ k > 1 \ \wedge\ \varepsilon_k \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha}\right\}$$

zusammengefaßt. Die Vereinigung

$$\bigcup_{\nu \geq 1} K_\nu = \left\{ k \in \mathbb{N} : \; k > 1 \;\; \wedge \;\; \exists \nu \in \mathbb{R} : \; \nu \geq 1 \;\; \wedge \;\; \varepsilon_k \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot k^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha} \right\}$$

ist nach Ungleichung (3.22) eine Teilmenge von

$$K := \left\{ k \in \mathbb{N} : \; k > 1 \;\; \wedge \;\; \varepsilon_k \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^\alpha \cdot (\log k)^{-\alpha} \right\}.$$

Jetzt kann zum eigentlichen Beweis des Satzes übergegangen werden. Sei also im weiteren ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \max\{e^{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}, 188^\varrho\}$ vorgegeben. Zu zeigen ist dann $\varepsilon_m \leq c \cdot (\log m)^{-\alpha}$, wobei c nur von α, c_1, c_2, ε_1 und ϑ abhängen darf. Für $m \in K$ ist aufgrund der Definition von K die Behauptung bereits bewiesen. Sei also $m \notin K$.
Nun soll gezeigt werden, daß die Menge

$$\bar{K} := \bigcup_{1 \leq \tau \leq \frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}} K_\tau$$

eine Teilmenge des Intervalls $(1, m]$ ist. Aufgrund der Wahl von $m > e^{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}$ ist $1 < \frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}$, und damit $\bar{K}$ wohldefiniert.
Angenommen es gäbe ein $l \in \bar{K}$ mit $l > m$, dann müßte es ein $\tau \in \left[1, \frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right]$ geben mit

$$\varepsilon_l \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot l^{-\frac{1}{\tau}} \cdot \tau^{-\alpha}.$$

Da $l > m$ und $\varrho \geq 1$ ist, gilt $\tau \leq \frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho} < \frac{\log l}{\alpha}$. Und da nach Bemerkung 3.15 die Funktion $\tau \mapsto l^{-\frac{1}{\tau}} \cdot \tau^{-\alpha}$ im Intervall $\left(0, \frac{\log l}{\alpha}\right)$ streng monoton-wachsend ist, folgt

$$\varepsilon_l \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot l^{-\frac{1}{\left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right)}} \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho} \right)^{-\alpha} = \vartheta \cdot c_2' \cdot e^{-\alpha \cdot \varrho \cdot \frac{\log l}{\log m}} \cdot \alpha^\alpha \cdot \varrho^\alpha \cdot (\log m)^{-\alpha}.$$

Umgekehrt besagt Ungleichung (3.24), daß für jedes $\nu \geq 1$

$$c_1' \cdot l^{-\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{-\alpha} \leq \varepsilon_l$$

ist. Für $\nu := \frac{\log l}{\alpha}$ ergibt sich

$$c_1' \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^\alpha \cdot (\log l)^{-\alpha} \leq \varepsilon_l \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot e^{-\alpha \cdot \varrho \cdot \frac{\log l}{\log m}} \cdot \alpha^\alpha \cdot \varrho^\alpha \cdot (\log m)^{-\alpha}.$$

Woraus durch umformen

$$1 \leq \vartheta \cdot e^{\alpha} \cdot \frac{c_2'}{c_1'} \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\varrho \cdot \frac{\log l}{\log m}\right)} \cdot \left(\varrho \cdot \frac{\log l}{\log m}\right)^{\alpha}$$

folgt. Da $\frac{\log l}{\log m} > 1$ vorausgesetzt wurde, gilt auch die Ungleichung $\varrho \cdot \frac{\log l}{\log m} > \varrho$. Zusammen mit der Ungleichung (3.25) folgt

$$1 < \vartheta \cdot e^{\alpha} \cdot \frac{c_2'}{c_1'} \cdot \vartheta^{-1} \cdot \frac{c_1'}{c_2'} \cdot e^{-1} \cdot \alpha^{-\alpha} = e^{\alpha - \alpha \cdot \log \alpha} \cdot \frac{1}{e}.$$

Die Funktion $\alpha - \alpha \cdot \log \alpha$ hat im Intervall $(0, \infty)$ das globale Maximum 1. Damit liefert die vorherige Ungleichung den Widerspruch $1 < 1$, das heißt die Annahme war falsch und $\bar{K}$ ist Teilmenge von $(1, m]$.
Gibt es jetzt ein $l \in \bar{K}$ mit $l \geq m^{\frac{1}{4 \cdot e \cdot \varrho}}$, dann ist mit Hilfe von Bemerkung 3.15 für ein $\tau \leq \frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m &\leq \varepsilon_l \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot l^{-\frac{1}{\tau}} \cdot \tau^{-\alpha} \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^{\alpha} \cdot (\log l)^{-\alpha} \\
&\leq \vartheta \cdot c_2' \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^{\alpha} \cdot (\log m^{\frac{1}{4 \cdot e \cdot \varrho}})^{-\alpha} = \vartheta \cdot c_2' \cdot \alpha^{\alpha} \cdot 4^{\alpha} \cdot \varrho^{\alpha} \cdot (\log m)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Welches die gewünschte Abschätzung ist.
Für den Fall, daß $\bar{K} \subset (1, m^{\frac{1}{4 \cdot e \cdot \varrho}})$ ist, sei $l \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $l - 1 < m^{\frac{1}{4 \cdot e \cdot \varrho}} \leq l$ ist. Das heißt $l \notin \bar{K}$, daher gilt für alle $\tau \in \left[1, \frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right]$

$$\varepsilon_l > \vartheta \cdot c_2' \cdot l^{-\frac{1}{\tau}} \cdot \tau^{-\alpha}.$$

Da $m > e^{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}$ ist, kann $\tau := \frac{\log m}{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}$ gesetzt werden. Außerdem gilt $m^{\frac{1}{2 \cdot e \cdot \varrho}} > m^{\frac{1}{4 \cdot e \cdot \varrho}} + 1$, da $m > 188^{\varrho}$ ist. Und so ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon_l &> \vartheta \cdot c_2' \cdot l^{-\frac{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}{\log m}} \cdot \left(\frac{\log m}{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}\right)^{-\alpha} \\
&> \vartheta \cdot c_2' \cdot \left(m^{\frac{1}{4 \cdot e \cdot \varrho}} + 1\right)^{-\frac{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}{\log m}} \cdot \left(\frac{\log m}{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}\right)^{-\alpha} \\
&> \vartheta \cdot c_2' \cdot \left(m^{\frac{1}{2 \cdot e \cdot \varrho}}\right)^{-\frac{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}{\log m}} \cdot \left(\frac{\log m}{2 \cdot e \cdot \alpha \cdot \varrho}\right)^{-\alpha} \\
&= \vartheta \cdot c_2' \cdot 2^{\alpha} \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Damit ist $K_{\left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right)}$ die leere Menge, denn gäbe es ein $j \in K_{\left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right)}$, dann wäre

$$\varepsilon_j \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot j^{-\frac{\alpha \cdot \varrho}{\log m}} \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right)^{-\alpha} \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha \cdot \varrho}\right)^{-\alpha}$$

Und nach Wahl von l ist $j \in K_{\left(\frac{\log m}{\alpha\cdot\varrho}\right)} \subset \bar{K} \subset (1, m^{\frac{1}{4\cdot e\cdot\varrho}}) \subset (1,l)$, also müßte

$$\vartheta \cdot c_2' \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha\cdot\varrho}\right)^{-\alpha} \geq \varepsilon_j \geq \varepsilon_l > \vartheta \cdot c_2' \cdot 2^\alpha \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha\cdot\varrho}\right)^{-\alpha}$$

gelten. Was aber zu der falschen Aussage $1 > 2^\alpha$ führt. Damit kann für $\frac{\log m}{\alpha\cdot\varrho}$ nur noch $k = 1$ die Ungleichung (3.26) erfüllen:

$$\varepsilon_1 \leq \vartheta \cdot c_2' \cdot \left(\frac{\log m}{\alpha\cdot\varrho}\right)^{-\alpha} = \vartheta \cdot c_2' \cdot \alpha^\alpha \cdot \varrho^\alpha \cdot (\log m)^{-\alpha}.$$

Dies ist, wegen $\varepsilon_m \leq \varepsilon_1$, genau das Gewünschte. Verbleibt noch der Fall, wenn $1 < m \leq \max\{e^{2\cdot e\cdot\alpha\cdot\varrho}, 188^\varrho\}$ gilt. Dann ist aber

$$\varepsilon_m \leq \varepsilon_1 \cdot \max\{2^\alpha \cdot e^\alpha \cdot \alpha^\alpha \cdot \varrho^\alpha, \varrho^\alpha \cdot (\log 188)^\alpha\} \cdot (\log m)^{-\alpha}.$$

Insgesamt ist schließlich die Ungleichung $\varepsilon_m \leq c(\alpha, c_1, c_2, \varepsilon_1, \vartheta) \cdot (\log m)^{-\alpha}$ für jedes beliebige $\vartheta \in (1,2]$ richtig, wobei das Infimum $\inf_{\vartheta\in(1,2]} c(\alpha, c_1, c_2, \varepsilon_1, \vartheta)$ eine positive reelle Zahl ist. $\square$.

Jetzt kann der Satz 3.13 bewiesen werden.

Beweis von Satz 3.13. Die Entropiezahlen $\varepsilon_k(A)$ sind eine monoton-fallende nichtnegative Zahlenfolge, genau wie in den Voraussetzungen des vorigen Satzes verlangt. Auch die Ungleichung in der Voraussetzung wird erfüllt, da die Entropiemoduli als $g_n(A) := \inf_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k(A)$ definiert sind. Daher läßt sich der Satz anwenden, und für alle $k > 1$ ist

$$\varepsilon_k(A) \leq \bar{c} \cdot (\log k)^{-\alpha}.$$

Dies kann, falls $i \in \mathbb{N}$ und $i > 1$ ist, auf die dyadischen Entropiezahlen spezialisiert werden: $e_i(A) = \varepsilon_{2^{i-1}}(A) \leq \bar{c} \cdot (\log 2)^{-\alpha} \cdot i^{-\alpha}$.
Für die Konstante $C := \max\{\varepsilon_1(A), \bar{c} \cdot (\log 2)^{-\alpha}\}$ ist damit $e_i(A) \leq C \cdot i^{-\alpha}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Das heißt wiederum $e_i(\frac{1}{C} \cdot A) \leq i^{-\alpha}$, womit sich Satz 3.12 anwenden läßt.
Dadurch können nun die Entropiemoduli der konvexen Hülle folgendermaßen

abgeschätzt werden:

$$
\begin{aligned}
g_n(\operatorname{aco} A) &= C \cdot g_n(\operatorname{aco}(\frac{1}{C} \cdot A)) \\
&\leq C \cdot \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon_k(\operatorname{aco}(\frac{1}{C} \cdot A)) \\
&\leq C \cdot 2^{\frac{n-1}{n}} \cdot \varepsilon_{2^{n-1}}(\operatorname{aco}(\frac{1}{C} \cdot A)) \\
&\leq C \cdot 2 \cdot e_n(\operatorname{aco}(\frac{1}{C} \cdot A)) \\
&\leq C \cdot 2 \cdot c_{\alpha,p} \cdot \frac{||A||}{\varepsilon_1(A)} \cdot \begin{cases} n^{-\alpha} & \text{, für } 0 < \alpha < 1/p' \\ n^{-\frac{1}{p'}} \cdot \log(n+1) & \text{, für } \alpha = 1/p' \\ n^{-1/p'} \cdot (\log(n+1))^{1/p'-\alpha} & \text{, für } 1/p' < \alpha \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\square$.

Literatur

[BaPa] Keith Ball & Alain Pajor:
The entropy of convex bodies with "few" extreme points
Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 158; 25-32; 1991; ISBN 0-521-40850-4

[BeDo] G. Bennett, L. E. Dor, V. Goodman, W. B. Johnson & C. M. Newman:
On uncomplemented subspaces of L_p, $1 < p < 2$
i. Jour. Math. 26/2; 178-187; 1977; ISSN 0021-2172

[BeLö] Jöran Bergh & Jörgen Löfström:
Interpolation spaces
Grundlehren Math. Wiss. 223; 1976; ISSN 0072-7830

[BrSe] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew (begründet); G. Grosche, D. Ziegler & V. Ziegler (weitergeführt); E. Zeidler (herausgegeben) :
Teubner-Taschenbuch der Mathematik
B. G. Teubner; 1996; ISBN 3-8154-2001-6

[Ca1] Bernd Carl:
Entropy numbers, entropy moduli, s-numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces
Sem. Anal. 1983/1984; 24-55; 1984

[Ca2] Bernd Carl:
Entropy numbers of diagonal operators with an application to eigenvalue problems
J. Approx. Theory 32; 135-150; 1981; ISSN 0021-9045

[Ca3] Bernd Carl:
Entropy numbers, s-numbers and eigenvalue problems
J. Funct. Anal. 41; 290-306; 1981; ISSN 0022-1236

[Ca4] Bernd Carl:
Inequalities between geometric quantities of operators in Banach spaces
Integral Equations Oper. Theory 5; 759-773; 1982; ISSN 0378-620X

[Ca5] Bernd Carl:
Inequalities of Bernstein-Jackson-type and the degree of compactness of operators in Banach spaces
Ann. Inst. Fourier 35/3; 79-118; 1985; ISSN 0373-0956

[Ca6] Bernd Carl:
On a characterization of operators from l_q into a Banach space of type p with some applications to eigenvalue problems
J. Funct. Anal. 48; 394-407; 1982; ISSN 0022-1236

[CaHe] Bernd Carl & Albrecht Hess:
Estimates of covering numbers
J. Approx. Theory 65/2; 121-139; 1991; ISSN 0021-9045

[CaKyPa] Bernd Carl, Ioanna Kyrezi & Alain Pajor:
Metric entropy of convex hulls in Banach spaces
J. London Math. Soc.II 60/3; 871-896; 1999; ISSN 0024-6107

[CaMa] Bernd Carl & Endre Makai, Jr.:
New covering numbers and spectral properties of operators in Banach spaces
Anal. Math. 17/3; 183-209; 1991; ISSN 0133-3852

[CaPa] Bernd Carl & Alain Pajor:
Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space
Invent. Math. 94/3; 479-504; 1988; ISSN 0020-9910

[CaSt] Bernd Carl & Irmtraud Stephani:
Entropy, compactness and the approximation of operators
Cambridge University Press; 1990; ISBN 0-521-33011-4

[CrSt] Jakob Creutzig & Ingo Steinwart:
Metric entropy of convex hulls in type p spaces – the critical case
Seminar an der Friedrich-Schiller-Universität Jena; 2000
erscheint voraussichtlich in: Proc. Amer. Math. Soc.; 2002; ISSN 0002-9939

[DaMiTo] William J. Davis, Vitali D. Milman & Nicole Tomczak-Jaegermann:
The distance between certain n-dimensional spaces
i. Jour. Math. 39; 1-15; 1981; ISSN 0021-2172

[DeJu] Martin Defant & Marius Junge:
Some estimates on entropy numbers
i. Jour. Math. 84/3; 417-433; 1993; ISSN 0021-2172

[DiJaTo] Joe Diestel, Hans Jarchow & Andrew Tonge:
Absolutely summing operators
Cambridge University Press; 1995; ISBN 0-521-43168-9

[En] Per Enflo:
A counterexample to the approximation problem in Banach spaces
Acta Math. 130; 309-317; 1973; ISSN 0001-5962

[Ga] Fuchang Gao:
Metric entropy of convex hulls
i. Jour. Math. 123; 359-364; 2001; ISSN 0021-2172

[GaGl] Andrej Yu. Garnaev & Efim D. Gluskin:
On widths of the euclidean ball
Sov. math. - dokl. 30; 200-204; 1984; ISSN 0197-6788
Übersetzung aus:
Доклады Академии Наук 277; 1048-1052; 1984; ISSN 0038-5573

[Go] Yehoram Gordon:
On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$
Lecture notes in math. 1317; 84-106; 1984; ISBN 3-540-19353-7

[Gr] Alexandre Grothendieck:
Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques
Bol. Soc. Mat. 8; 1-79; 1956; ISSN 0373-1375

[He] Harro Heuser:
Funktionalanalysis
B. G. Teubner; 1992; ISBN 3-519-22206-X

[Kö] Hermann König:
Interpolation of operator ideals with an application to eigenvalue distribution problems
Math. Ann. 233; 35-48; 1978; ISSN 0025-5831

[LeTa] Michel Ledoux & Michel Talagrand:
Probability in Banach spaces
Springer; 1991; ISBN 3-540-52013-9

[LiLi] Wenbo V. Li & Werner Linde:
Metric entropy of convex hulls in Hilbert spaces
Stud. Math. 139/1; 29-45; 2000; ISSN 0039-3223

[LiPe] Jacques-Louis Lions & Jaak Peetre:
Sur une classe d'espaces d'interpolation
Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 19; 5-68; 1964; ISSN 0073-8301

[LiPi] Вернер Линде & Альбрехт Пич:
Отображения Гауссовских мер цилиндрических множеств в Банаховых пространствах
Теор. вероятн. примен. 19; 472-487; 1974; ISSN 0040-361X

[PaTo1] Alain Pajor & Nicole Tomczak-Jaegermann:
Remarques sur les nombres d'entropie d'un opérateur et de son transposé
C. R. Acad. Sci.I 301; 743-746; 1985; ISSN 0764-4442

[PaTo2] Alain Pajor & Nicole Tomczak-Jaegermann:
Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces
Proc. Amer. Math. Soc. 97; 637-642; 1986; ISSN 0002-9939

[Pe] Jaak Peetre:
Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation
C. R. Acad. Sci.I 256; 1424-1426; 1963; ISSN 0764-4442

[Pi1] Albrecht Pietsch:
Eigenvalues and s-numbers
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig; 1987; ISBN 3-321-00012-1

[Pi2] Albrecht Pietsch:
Operator ideals
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; 1978

[Pi3] Albrecht Pietsch:
Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces
Math. Ann. 247; 149-168; 1980; ISSN 0025-5831

[Ps] Gilles Pisier:
The volume of convex bodies and Banach space geometry
Cambridge University Press; 1989; ISBN 0-521-36465-5

[St] Ingo Steinwart:
Entropy of $C(K)$-valued operators and some applications
Dissertation; 2000

[ToJa] Nicole Tomczak-Jaegermann:
Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals
Harlow, Longman and Wiley; 1988; ISBN 0-582-01374-7

[Tr] Hans Triebel:
Interpolation theory, function spaces, differential operators
Johann Ambrosius Barth; 1995; ISBN 3-335-00420-5

[We] Dirk Werner:
Funktionalanalysis
Springer; 1997; ISBN 3-540-61904-6

Index

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der aufgeführten Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Jena, den 13. Februar 2002

Jörn Hildebrandt

Lebenslauf

Name	Jörn Hildebrandt
Geburt	13. September 1974 in Jena
Familienstand	ledig
Schulbildung	1981 – 1989 Polytechnische Oberschule „Wilhelm Pieck“, Jena
	1989 – 1993 Staatliches Gymnasium „Carl Zeiss“ mit mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Spezialklassen, Jena 30. Juni 1993 Abschluß: allgemeine Hochschulreife (Abitur)
Studium	1993 – 1998 Mathematikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena 06. Oktober 1998 Abschluß: Diplom Mathematiker
	1999 – 2001 Stipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs „Analytische und stochastische Strukturen und Systeme“ an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Jena, den 13. Februar 2002